Aldina Isabel de Azevedo Correia

Aplicação do Método da transformada de Laplace a uma Classe de Operadores Integrais de Convolução

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Maio / 2004

Aldina Isabel de Azevedo Correia

Aplicação do Método da transformada de Laplace a uma Classe de Operadores Integrais de Convolução

Tese Submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Maio / 2004

Esta dissertação é afectuosamente dedicada aos meus pais, ao meu irmão, aos meus familiares e amigos e em especial ao meu namorado, pessoas a quem devo a felicidade de viver.

Agradecimentos

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos ao Professor Semyon Yakubovich não só pelo esforçado trabalho de orientação nesta dissertação, mas também pela sua disponibilidade e boa disposição.

Uma palavra de apreço aos meus pais pelo esforço e pela alegria que mostram em ver-me vencer cada etapa da vida, da qual foram os primeiros mestres.

Júri:

Presidente: Prof. Catedrático José Agostinho Basto Gonçalves

Vogais: Prof. Associado Alexandre Plakhov e Prof. Associado Semyon Yakubovich

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados do nosso estudo sobre operadores integrais de convolução, baseado no método das transformadas de Laplace e de Mellin. Apresentamos as definições e estabelecemos condições da sua existência, em vários espaços de Lebesgue. Além disso, provamos fórmulas de inversão de certos operadores integrais de convolução do tipo de Mellin. São discutidas algumas relações entre a transformada de Laplace e a transformada Mellin. Por fim, aplicamos estes métodos na investigação de operadores de convolução de Mellin, relacionados com núcleos associados a funções de Bessel, de Gauss e de Bessel modificadas.

Abstract

In this work we exhibit results of our study of convolution integral operators, based on the Laplace and Mellin transforms methods. We give the definitions, establish conditions of their existence and boundness in various Lebesgue spaces. Furthermore, we prove inversion formulas for certain convolution operators of Mellin type. Some relationships between Laplace and Mellin transforms are discussed. Finally, we apply these methods to investigate Mellin convolution transforms related to the kernels, which are associated with Bessel, Gauss and modified Bessel functions.

Résumé

Dans ce travail nous présentons les résultats de notre étude sur les opérateurs intégraux de convolution, selon le méthode des transformées da Laplace et de Mellin. Nous présentons les definitions et établissons les conditions de son existence, dans plusieurs espaces de Lebesgue. Nous démontrons également des formules d'inversion de certain opérateurs integraux de convolution du type de Mellin. Certaines relations entre transformée de Laplace et la transformée de Mellin sont aussi discutées. Finalment, nous applicons ces méthodes dans l'investigation des opérateurs de convolution de Mellin, relationnés avec les nucléaux associés aux functions de Bessel, de Gauss et de Bessel modifiées.

Introdução

O tema deste estudo foi escolhido por forma contribuir no estudo dos operadores integrais usando os métodos das transformadas de Laplace e de Mellin.

Os assuntos de teoria geral relacionados com a transformada de Laplace, tema tratado no seminário, são assuntos já abordados por diversos autores e nas mais diversas áreas. A transformada de Laplace tem uma grande aplicação prática em diversas áreas, daí esse interesse em tratar o tema. No entanto, a transformada de Laplace não é a única transformada, existe uma variedade bastante diversificada de transformadas, com aplicações diferenciadas.

Na presença desta diversidade apetece perguntar: Existe alguma relação entre elas? De uma forma diferente do que é habitual, que é partir da transformada de Fourier, no sentido de tirar elacções sobre as restantes transformadas e relacioná-las, tentamos, aqui, estabelecer algumas relações importantes, partindo da transformada de Laplace, isto é, aplicando o método da transformada de Laplace a uma classe de operadores integrais de convolução.

Para culminar nesta aplicação, tivemos que percorrer um caminho de pesquisa para reunir as noções essenciais ao objectivo principal do nosso trabalho.

Este trabalho é apresentado ao longo dos Capítulos 1 e 2, sendo o Capítulo 3 o detentor dos conteúdos que foram o objectivo pretendido aquando iniciamos o estudo.

Iniciamos o primeiro Capítulo com a definição de transformada de Laplace, seguida da apresentação das condições da sua existência. Foram sinteticamente abordadas algumas das suas propriedades básicas e terminamos com um Subcapítulo que diz respeito à transformada inversa de Laplace.

O segundo Capítulo encerra o grande estudo de pesquisa deste trabalho e refere-se aos operadores integrais de covolução de Mellin.

Começamos por uma apresentação da teoria básica da transformada de Mellin, como a definição, existência, propriedades e inversa. Definimos convolução de Mellin e apresentamos uma relação entre a transformada de Mellin e a transformada de Laplace. Seguidamente expomos a teoria geral referente à

função Gama: definição e suas propriedades. As funções do tipo hipergeométrico também são apresentadas pela sua definição e por exemplos particulares. Passamos ao teorema de Slater e à aplicação deste em dois exemplos. O ponto seguinte apresenta algumas funções especiais do tipo hipergeométrico. O último subcapítulo é já um um resultado da aplicação que dá título a esta dissertação, é a apresentação do primeiro operador de convolução de Mellin.

Por fim, o terceiro Capítulo, objectivo essencial do nosso estudo, é a verdadeira aplicação do método da transformada de Laplace a alguns operadores integrais de convolução de Mellin.

Conteúdo

Agradecimentos **iii**

Júri: **v**

Resumo **vii**

Abstract **ix**

Résumé **xi**

Introdução **xiii**

1 Transformada de Laplace **3**

1.1 Definição de Transformada de Laplace 3

1.2 Existência de transformada de Laplace 4

1.2.1 Cálculo de transformada de Laplace de algumas funções elementares 6

1.3 Algumas Propriedades Básicas da Transformada de Laplace . . . 7

1.3.1 Transformada de Laplace de algumas Funções 8

1.3.2 Transformada de Laplace e derivadas 11

1.3.3 Relações que envolvem integrais 12

1.3.4 Transformada de Laplace e Funções periódicas 13

1.3.5 Convolução de duas funções 13

1.4 Transformada inversa 15

1.4.1 Fórmula de inversão para a Transformada de Laplace . . 15

1.4.2 Cálculo de transformadas inversas 17

2 Operadores integrais de Convolução de Mellin 19

2.1 Transformada de Mellin 19

2.1.1 Definição de transformada de Mellin e Propriedades . . . 19

2.1.2 Existência da Transformada de Mellin 20

2.1.3 Cálculo da Transformada de Mellin de algumas funções elementares 21

2.1.4 Inversão da transformada de Mellin 22

2.2 Operadores de Convolução 23

2.2.1 Convolução de Mellin 23

2.2.2 Transformada de Mellin e Transformada de Laplace 25

2.3 Propriedades da transformada de Mellin 26

2.3.1 Transformada de Mellin e derivadas 28

2.4 Função Gama 29

2.4.1 Definição da Função Gama 30

2.4.2 Propriedades da Função Gama 30

2.4.2.1 Fórmula da redução 30

2.4.2.2 Símbolo de Pochhammer 31

2.4.2.3 Função Gama como um Factorial 31

2.4.2.4 Resíduos 33

2.4.2.5 Função Gama e integral de Cauchy-Saalschütz . 33

2.4.2.6 Função Gama e Função Beta 34

2.4.2.7 Fórmula de Duplicação 34

2.4.2.8 Fórmula de multiplicação de Gauss e Legendre . 35

2.4.2.9 Fórmula de duplicação de Legendre 35

2.4.2.10 Fórmula de Stirling 35

2.4.2.11 Integral Euleriano e Função Beta 36

2.5 Funções do Tipo Hipergeométrico 36

2.5.1 Série hipergeométrica generalizada 37

2.5.2 Definição de Função do Tipo Hipergeométrico 38
2.5.3 Exemplos de Funções do Tipo Hipergeométrico 38
2.6 Teorema de Slater 38
2.6.1 Notação 39
2.6.2 Enunciado do Teorema 40
2.6.3 Exemplos de Aplicação do Teorema de Slater 41
2.7 Integrais de Mellin-Barnes 44
2.8 Algumas Funções Especiais do Tipo Hipergeométrico 44
2.8.1 Função hipergeométrica de Gauss 44
2.8.2 Função hipergeométrica degenerada e Função de Bessel . . 46
2.8.2.1 Função de Kummer 46
2.8.2.2 Função de Whittaker 46
2.8.2.3 Função de Bessel 47
2.9 Transformada de Laplace de variável real 49

3 Aplicação do Método da Transformada de Laplace a uma Classe de Operadores Integrais de Convolução 53
3.1 Transformada de Hankel 53
3.2 Transformada com função de Gauss 56
3.3 Transformada de Meijer 60

Conclusão 63

A Tabela de Transformadas de Laplace 65

B Tabela de transformadas de Mellin 67

C Lista de símbolos 69

Referências 71

Aplicação do Método da transformada de Laplace a uma Classe de Operadores Integrais de Convolução

Aldina Isabel de Azevedo Correia

8 de Maio de 2005

Capítulo 1

Transformada de Laplace

O principal objectivo deste capítulo é a apresentação de alguma informação elementar sobre a transformada de Laplace: definição e existência, algumas propriedades básicas e noção de transformada inversa de Laplace. Assim, pretendemos introduzir o estudo desta transformada, tão útil nas mais diversas áreas, como a física, a engenharia e outras.

Como complemento do capítulo e para melhor percepção dos conteúdos são, ainda, apresentados cálculos de transformadas de Laplace de algumas Funções elementares.

Estes resultados podem-se encontrar em vários livros, como por exemplo, Watson [8]; Widder [9].

1.1 Definição de Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é usada para resolver problemas em várias áreas. Na resolução de equações diferenciais é usual usarem-se as tabelas de transformadas de Laplace, no entanto é importante conhecer a sua definição.

Definição 1.1.1 *[8]* Seja $u(t)$uma função definida para t>0. A sua *transformada de Laplace* é definida por

$$\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\} = \mathscr{L}\left\{u(t)\right\}(p) = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt. \tag{1.1.1}$$

para todo o número complexo p para o qual o integral convirja. O integral diz-se *integral de Laplace.*

De igual forma, também se custuma escrever que $u(t) = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$. Neste caso diz-se que $u(t)$ admite transformada de Laplace.

Nota 1 Ao longo deste trabalho, sempre que usamos a expressão, função $u(t)$, referimo-nos a uma função $u(t)$, para $t > 0$.

1.2 Existência de transformada de Laplace

Uma vez que a transformada de Laplace de uma função $u(t)$ é definida por um integral é-nos colocada a questão da sua existência, porque nem sempre o integral existe. O integral (1.1.1) não existe, portanto, para todas as funções $u(t)$. Por exemplo se $u(t) = e^{t^2}$, então o integral diverge, quando $t \to \infty$, para todos os valores de p. Além disso o integral, para algumas funções, existe para alguns valores de p, mas não existe para outros. Por exemplo, se $u(t) = e^t$, o integral existe para $Re\ p > 1$, mas não existe se $Re\ p \leq 1$. Vejamos, então, quais são as condições suficientes para que o integral de Laplace da função $u(t)$ exista.

Lema 1.2.1 *[9] Se:*

a) $u(t)$ *é integrável em qualquer intervalo* $[a, b]$,$0 < a < b$;

b) Existe um número real c*, tal que para qualquer* $b > 0$; $\int_b^\lambda u(t)e^{-ct}dt$ *tem limite finito quando* $\lambda \to \infty$;

c) para $a > 0$, $\int_\epsilon^a |u(t)|\, dt$, *tem limite finito quando* $\epsilon \to 0^+$

Então $\mathscr{L}\{u(t); p\}$ *existe para* $Re\ p \geq c$.

Lema 1.2.2 *[9] Se o integral de Laplace de uma dada função* $u(t)$ *converge para* $p = c$, c *número real, então converge no semi-plano* $Re\ p \geq c$. *A convergência é uniforme para* $|\arg(p - c)| < \frac{1}{2}\pi$.

Demonstração. Isto é consequência da desigualdade

$$\left|e^{-p\,t}u(t)\right| = e^{-tRe(p-c)}\left|e^{-ct}u(t)\right| \leq \left|e^{-ct}u(t)\right|, (t > 0).$$

■

O teorema seguinte é útil na determinação da região de convergência do integral de Laplace.

Teorema 1.2.1 *[9] Se* $u(t)$ *satisfaz as condições do Lema 1.2.1, a sua transformada de Laplace é uma função analítica de* p *no semi-plano* $Re\ p > c$.

Deste teorema temos que

$$\mathscr{L}\{tu(t);p\} = -\frac{d\mathscr{L}\{u(t);p\}}{dp}. \tag{1.2.2}$$

Temos, então a primeira propriedade da transformada de Laplace.

Propriedade 1.2.1 *Do teorema 1.2.1, temos (1.2.2), e, por indução sobre n, podemos mostrar que todas as derivadas de $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ existem para Re $p \geq c$ e, consequentemente, que $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ é uma função analítica da variável complexa p no seu domínio de convergência e tem-se que*

$$\mathscr{L}\{t^n\, u(t);p\} = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\mathscr{L}\{u(t);p\}.$$

Lema 1.2.3 *[9] Se $u(t)$ satisfaz as condições do lema 1.2.1, então*

$$\mathscr{L}\{u(t);p\} \to 0, \text{ quando } |p| \to +\infty,\ |\arg(p-c)| \leq \theta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Nota 2 Este lema e o teorema 1.2.1 permitem ver que nem a toda a função corresponde uma função $u(t)$ tal que $\mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t);p\}$. Se $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ não é analítica em algum semi-plano $Re\ p > c$(c finito), ou se $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ não tende para zero quando $|p| \to \infty$, no sector $|\arg(p-c)| \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$, então $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ não pode ser a transformada de Laplace de uma função $u(t)$ que satisfaz as condições do lema 1.2.1. Então é importante salientar que as condições (a)-(c) do Lema 1.2.1, relativas a $u(t)$, são suficientes para a existência de $\mathscr{L}\{u(t);p\}$, mas não são necessárias.

Outra questão com alguma importância é saber se é possível que duas funções u_1(t) e u_2(t) tenham a mesma transformada de Laplace $\mathscr{L}\{u(t);p\}$.

Para responder a esta questão definimos função nula.

Definição 1.2.1 *[8]* Uma *função nula* é uma função $N(t)$ que é zero em quase toda a parte, excepto possivelmente num conjunto de medida nula. Assim $N(t)$ verifica a seguinte igualdade.

$$\int_0^T N(t)dt = 0, \forall T \geq 0.$$

Se postularmos que N(t) é contínua, então $N(t) \equiv 0$, $\forall t$ e temos o resultado seguinte.

Teorema 1.2.2 *[8] (Teorema de Lerch). Se:*

- *$u_1(t)$ e $u_2(t)$ satisfazem as condições (a)-(c) do lema 1.2.1;*

- $\mathscr{L}\{u_1(t);p\}$ *existe para* $Re(p) > c_1$;
- $\mathscr{L}\{u_2(t);p\}$ *existe para* $Re(p) > c_2$ *e*
- $\mathscr{L}\{u_1(t);p\} = \mathscr{L}\{u_2(t);p\}$ *para* $Re\ p > c = \max(c_1, c_2)$

então $u_2(t) - u_1(t)$ *é uma função nula. Se adicionalmente,* $u_1(t)$ *e* $u_2(t)$ *forem contínuas, na recta real, então* $u_1(t) = u_2(t), t > 0$.

1.2.1 Cálculo de transformada de Laplace de algumas funções elementares

Tendo fixado a definição e existência da transformada de Laplace, podemos aplicar estes conceitos a algumas funções elementares:

1. Seja $u(t) = 1$, então a transformada de Laplace de $u(t)$ é

$$\mathscr{L}\{1:p\} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \left[-p^{-1}e^{-pt}\right]_0^\infty = p^{-1},$$

para $Re\ (p) > 0$.

2. Seja $u(t) = t$, a transformada de Laplace de $u(t)$ é dada por

$$\mathscr{L}\{t;p\} = \int_0^\infty te^{-pt}dt = \left[-p^{-1}e^{-pt}\right]_0^\infty + p^{-1}\int_0^\infty e^{-pt}dt = p^{-2},$$

para $Re\ (p) > 0$.

3. Se $u(t) = \cos(wt)$, temos que a sua transformada de Laplace é calculada da seguinte forma

$$\mathscr{L}\{\cos(wt);p\} = \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{iwt} + e^{-iwt})e^{-pt}dt = \frac{1}{2}\left[(p-iw)^{-1} + (p+iw)^{-1}\right],$$

Ou seja,

$$\mathscr{L}\{\cos(wt);p\} = \frac{p}{p^2+w^2},$$

para $Re\ (p) > w > 0$, w real.

4. Do mesmo modo, tendo $u(t) = \sin(wt)$ obtemos a transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{\sin(wt);p\} = \int_0^\infty \frac{1}{2i}(e^{iwt} - e^{-iwt})e^{-pt}dt = \frac{1}{2i}\left[(p-iw)^{-1} - (p+iw)^{-1}\right],$$

Ou seja,

$$\mathscr{L}\{\sin(wt);p\} = \frac{w}{p^2+w^2},$$

para $Re\ (p) > w > 0$, w real.

1.3 Algumas Propriedades Básicas da Transformada de Laplace

Apesar da transformada de Laplace estar definida por um integral, nem sempre é necessário fazer a integração. Existem diversas propriedades da transformada de Laplace que podem ser usadas no cálculo de transformadas de funções.

As propriedades seguintes são algumas das mais importantes.

Propriedade 1.3.1 *(Linearidade) [8]*

Considerem-se as funções $u(t)$ e $v(t)$, se $\mathscr{L}\{u(t)\}=\mathscr{L}\{u(t);p\}$, para Re $p > a$ e $\mathscr{L}\{v(t)\} = \mathscr{L}\{v(t);p\}$, para Re $p > b$ então

$$\mathscr{L}\{\lambda u(t) + \mu v(t)p; p\} = \lambda\mathscr{L}\{u(t);p\} + \mu\mathscr{L}\{v(t);p\},$$

para quaisquer constantes λ e μ e para Re $p > \max(a,b)$.

Demonstração. A demonstração é imediata da linearidade do integral.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\lambda u(t) + \mu v(t); p\} &= \int_0^\infty (\lambda u(t) + \mu v(t))e^{-pt}dt \\ &= \lambda\int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt + \mu\int_0^\infty v(t)e^{-pt}dt \\ &= \lambda\mathscr{L}\{u(t);p\} + \mu\mathscr{L}\{u(t);p\}\end{aligned}$$ ■

Propriedade 1.3.2 *[8] Consideremos a função $u(t)$.*

Se $k > 0$ e $\mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t);p\}$, para $Re(p) > a$,então

$$\mathscr{L}\{u(kt);p\} = \frac{1}{k}\mathscr{L}\left\{u(t);\frac{p}{k}\right\}.$$

Demonstração.

Por definição de transformada de Laplace temos que

$$\mathscr{L}\{u(kt);p\} = \int_0^\infty u(kt)e^{-pt}dt.$$

Fazendo uma mudança de variável $kt = s$ temos

$$\mathscr{L}\{u(kt);p\} = \int_0^\infty u(s)e^{-psk^{-1}}k^{-1}ds = k^{-1}\int_0^\infty u(s)e^{-pk^{-1}s}ds$$

Ou seja,

$$\mathscr{L}\{u(kt);p\} = k^{-1}\mathscr{L}\left\{u(kt);\frac{p}{k}\right\}.$$

Note-se que isto só se verifica quando k é real e positivo e $Re(p) \geq ka$. ■

Propriedade 1.3.3 *[8] Consideremos a função $u(t)$.*

Se α é constante e $\mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{u(t);p\}$, para $Re(p) > a$, então

$$\mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}u(t);p\right\} = \mathscr{L}\left\{u(t);(p-\alpha)\right\},$$

com $Re(p-\alpha) > a \Leftrightarrow Re(p) > a+\alpha$.

Demonstração. Usando, de novo, a definição de transformada de Laplace vamos obter facilmente o resultado pretendido

$$\mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}u(t);p\right\} = \int_0^\infty e^{\alpha t}u(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty u(t)e^{\alpha t-pt}dt =$$
$$= \int_0^\infty u(t)e^{(\alpha-p)t}dt = \mathscr{L}\left\{u(t);(p-\alpha)\right\}.$$

■

1.3.1 Transformada de Laplace de algumas Funções

As propriedades anteriores podem ser generalizadas, por exemplo, substituindo as variáveis de integração. Assim, de generalizações e substituições, podemos calcular transformadas de Laplace de inúmeras funções, usando as que já conhecemos.

Algumas delas são apresentadas em anexo, na Tabela de transformadas de Laplace. Vejamos alguns exemplos destes procedimentos.

Combinando a Propriedade 1.3.3 com a Propriedade 1.3.2 temos que

$$\mathscr{L}\left\{u(kt)e^{-at};p\right\} = \frac{1}{k}\mathscr{L}\left\{u(t);\left(\frac{p+a}{k}\right)\right\}, (Rep > a, k > 0).$$

e também os casos especiais:

$$\mathscr{L}\left\{e^{-at}\sin(bt);p\right\} = \frac{b}{(p+a)^2+b^2},$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-at}\cos(bt);p\right\} = \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}.$$

Também podemos usar os resultados na forma inversa. Por exemplo

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right\} = b^{-1}e^{-at}\sin(bt),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p+a)^2+b^2}\right\} = e^{-at}\left[\cos(bt) - \frac{a}{b}\sin(bt)\right].$$

Antes de calcular as transformadas de Laplace de mais algumas funções vejamos a seguinte

Definição 1.3.1 [8] Uma *função do tipo exponencial (f.t.e)* é uma função da forma

$$u(t) = \sum_{m=1}^{M} P_m(t) exp(\alpha_m t), \tag{1.3.3}$$

onde cada termo α_m é constante e

$$P_m(t) = \sum_{n=0}^{N_m} a_{mn} t^n \tag{1.3.4}$$

é um polinómio em t.

Propriedade 1.3.4 *[8] A soma e o produto de duas f.t.e. são f.t.e.. Além disso, a derivada e o integral indefinido de uma f.t.e. é uma f.t.e..*

Exemplo 1.3.1 *Se $u(t)$ é definida pelas equações (1.3.3) e (1.3.4), então*

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=0}^{N_m} a_{mn} n!(p-\alpha_m)^{-n-1}.$$

Note-se que quando $|p| \to \infty$ temos que

$$p\mathscr{L}\{u(t)\} \to \sum_{m=1}^{M} a_{m0} = u(0).$$

Propriedade 1.3.5 *[8] Se $\mathscr{L}\{u(t);p\} = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, onde $N(p)$ e $D(p)$ são polinomiais em p e o grau de $N(p)$ é menor do que o grau de $D(p)$, então $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ é a transformada de uma f.t.e.*

Nota 3 *Se $(grauD(p)) < (grauN(p))$, então $\frac{N(p)}{D(p)}$ não tende para zero quando $|p| \to \infty$, no sector $|\arg(p-c)| \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$. Deste modo, $\frac{N(p)}{D(p)}$ não pode ser a transformada de Laplace de uma função $u(t)$, que satisfaz as condições do lema 1.2.1. Além disso, $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ poder ser escrito em fracções parciais da forma (1.3.4). Os números α_m são raizes distintas (reais ou complexas) da equação $D(p) = 0$ e $N_m + 1$ é a multiplicidade da raíz α_m.*

Vejamos alguns exemplos de cálculo de transformadas de Laplace usando os resultados anteriores.

Exemplo 1.3.2 *Seja* $\mathscr{L}\{u(t);p\} = \dfrac{1}{p^3(p+1)^2}$.

$$\frac{1}{p^3(p+1)^2} = \frac{1}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{3}{p+1} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 - (t+3)e^{-t}; p\right\}.$$

Então

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 - (t+3)e^{-t}.$$

Exemplo 1.3.3 *Seja* $\mathscr{L}\{u(t);p\} = \dfrac{p+3}{(p^2+2p+5)^2} =$

$$= \frac{p+3}{(p+1-2i)^2(p+1+2i)^2} = -\frac{1+i}{8(p+1-2i)^2} - \frac{1-i}{8(p+1+2i)^2} =$$

$$= -\frac{i}{16(p+1-2i)} + \frac{i}{16(p+1+2i)^2} = \mathscr{L}\{u(t);p\},$$

onde

$$\begin{aligned} u(t) &= \left[-\frac{1}{8}(1+i)t - \frac{1}{16}i\right] e^{(-1+2i)t} + \left[-\frac{1}{8}(1-i)t + \frac{1}{16}i\right] e^{(-1-2i)t} \\ &= \frac{1}{4}e^{-t}\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)\sin(2t) - t\cos(2t)\right]. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.4 *Seja* $\mathscr{L}\{u(t);p\} = \dfrac{p+4}{(p+1)^2+4}$.

Consideremos $N(p) = p+4$ *e* $D(p) = (p+1)^2+4$. *Portanto, temos* $\alpha_1 = -1+2i$; $\alpha_2 = -1-2i$.

Então $\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{u(t);p\}\} = \dfrac{1}{4i}\left\{(3+2i)\,e^{-t+2it} - (3-2i)e^{-t-2it}\right\}$.

Às vezes também se encontram problemas, de cálculo de transformadas de Laplace, onde é necessário encontrar a transformada de Laplace de funções do tipo $u(t)H(t-a)$, $(a > 0)$, onde H denota a *função unitária de Heaviside*.

Definição 1.3.2 [8] A *função unitária de Heaviside* é

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0; \\ 1 & \text{se} \quad t > 0. \end{cases}$$

Com esta notação podemos escrever o integral da transformada de Laplace da forma seguinte

$$\mathscr{L}\{u(t);p\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)H(t)e^{-pt}dt, \tag{1.3.5}$$

onde o factor H(t) representa o salto da função $u(t)$ em $t = 0$. A equação (1.3.5) expressa $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ como a transformada de Laplace da função $u(t)\,H(t)$ de ambos lados.

Propriedade 1.3.6 *[8] Consideremos a função $u(t)$. Então*

$$\mathscr{L}\{u(t)H(t-a);p\} = e^{-pa}\mathscr{L}\{u(t+a);p\}\,, se\ a \geq 0.$$

Demonstração. Como $H(t-a) = 0$ para $(t < a)$ o lado esquerdo da igualdade fica $\mathscr{L}\{u(t)H(t-a);p\} = \int_a^\infty u(t)e^{-pt}dt$, fazendo a mudança de variável $t = s + a$, temos que $\mathscr{L}\{u(t)H(t-a);p\} = \int_0^\infty u(s+a)e^{-p(s+a)}ds =$ $= e^{-pa}\mathscr{L}\{u(t+a);p\}\,, se\ a \geq 0.$ ■

Esta propriedade tem uma grande aplicação na determinação da transformada de Laplace de muitas funções. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.3.5 *Se $\mathscr{L}\{u(t);p\} = \cos(t)$ então $u(t+a) = \cos a\cos t - \sin a\sin t$, pelo que*

$$\mathscr{L}\{\cos t H(t-a);p\} = e^{-pa}\mathscr{L}\{u(t+a);p\} =$$

$$= e^{-pa}\cos a\mathscr{L}\{\cos t;p\} - e^{-pa}\sin a\mathscr{L}\{\sin t;p\} = \frac{e^{-pa}}{p^2+1}(p\cos a - a\sin a).$$

1.3.2 Transformada de Laplace e derivadas

Propriedade 1.3.7 *[8] Consideremos a função $u(t)$. Se $u^{(n)} = \dfrac{du^{n-1}}{dt^{n-1}}$, existe para $t > 0$, então a sua transformada de Laplace é*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{u^{(n)}(t);p\right\} &= p^n\mathscr{L}\{u(t);p\} - p^{n-1}u(o) - p^{n-2}u'(0) - ... - n^{(n-1)}(0)\\ &= p^n\mathscr{L}\{u(t);p\} - \sum_{k=0}^{n-1}p^k u^{(n-1-k)}(0).\end{aligned}$$

Nota 4 *$u(0)$ é o limite de $u(t)$, quando $t \longrightarrow 0^+$.*

E, do mesmo modo, $u'(0), ..., u^{(n-1)}(0)$, são os limites das derivadas, quando $t \longrightarrow 0^+$.

Demonstração. Suponhamos que $u'(t) = \frac{du}{dt}$ existe para $t > 0$. Pretendemos provar que

$$\mathscr{L}\left\{u'(t);p\right\} = p\mathscr{L}\{u(t);p\} - u(0).$$

Vejamos

$$\mathscr{L}\left\{u'(t);p\right\} = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \frac{du}{dt}(t)e^{-pt}dt =$$
$$= \left[u(t)e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt = -u(0) + p\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}.$$

Agora, suponhamos que

$$\mathscr{L}\left\{u^{(n)}(t);p\right\} = p^n\bar{u}(p) - p^{n-1}u(0) - p^{n-2}u'(0) - ... - u^{(n-1)(0)},$$

e $u^{(n+1)}(t)$ existe para $t > 0$.

Pretendemos provar que

$$\mathscr{L}\left\{u^{(n+1)}(t);p\right\} = p^{n+1}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\} - p^n u(0) - p^{n-1}u'(0) - ... - u^{(n)}(0).$$

Vejamos

$$\mathscr{L}\left\{u^{(n+1)}(t);p\right\} = \int_0^\infty u^{(n+1)}(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \frac{d^{n+1}u}{dt^{n+1}}(t)e^{-pt}dt =$$
$$= \left[\frac{d^n u}{dt^n}e^{-pt}\right]_0^\infty - \int_0^\infty [\frac{d^n u}{dt^n}(-p)e^{-pt}dt = -u^{(n)}(0) + p\int_0^\infty u^{(n)}(t)e^{-pt}dt =$$
$$= -u^{(n)}(0) + p\mathscr{L}\left\{u^{(n)}(t);p\right\} = -u^{(n)}(0) + p^{n+1}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\} - p^n u(0) +$$
$$+(-p^{(n-1)})u'(0) - ... - u^{(n)}(0) = p^{n+1}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\} - \sum_{k=0}^{n} p^k u^{(n-k)}(0).$$

■

1.3.3 Relações que envolvem integrais

Propriedade 1.3.8 *[8] Consideremos a função $u(t)$. Se $\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$ existe para Re $p > a$ e se a função $v(t)$ é dada por $v(t) = \int_0^t u(s)ds$, então*

$$\mathscr{L}\left\{v(t);p\right\} = p^{-1}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\},$$

para Re $p > \max(a, 0)$.

Demonstração. Consideremos a função $v(t) = \int_0^t u(s)ds$, então $v'(t) = u(t)$ e $v(0) = 0$ e pela propriedade anterior

$$\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\} = \mathscr{L}\left\{v'(t);p\right\} = p\mathscr{L}\left\{v(t);p\right\} - v(0) = p\mathscr{L}\left\{v(t);p\right\},$$

e portanto, temos que $\mathscr{L}\left\{\int_0^t u(s)ds;p\right\} = \frac{1}{p}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$. ■

Exemplo 1.3.6 *A Propriedade anterior permite-nos concluir que*

$$\mathscr{L}\{t^n;p\} = n!p^{-n-1}, n = 0, 1, 2, ..., Re\ p > 0.$$

Efectivamente, já vimos que

$$\mathscr{L}\{1;p\} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p},$$

e, pela propriedade anterior, segue o pretendido.

1.3.4 Transformada de Laplace e Funções periódicas

Propriedade 1.3.9 *[8] Seja $u(t)$ uma função periódica, com período τ e limitada. Então a transformada de Laplace existe para Re $p > 0$ e*

$$\mathscr{L}\{f(t);p\} = (1 - e^{-2p\tau})^{-1}\int_0^\tau f(u)e^{-pu}du.$$

Demonstração.

$$\mathscr{L}\{f(t);p\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \sum_{r=0}^{\infty}\int_{r\tau}^{(r+1)\tau} f(t)e^{-pt}dt,$$

Fazendo a mudança de variável $t = u + r\tau$, obtemos

$$\sum_{r=0}^{\infty}\int_{r\tau}^{(r+1)\tau} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{r=0}^{\infty}\int_0^\tau f(u + r\tau)e^{-p(u+r\tau)}du =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} e^{-pr\tau}\int_0^\tau f(u)e^{-pu}du.$$

Como f é periódica $f(u + r\tau) = f(u)(r = 1, 2, ...)$. Além disso,

$$\sum_{r=0}^{\infty} e^{-pr\tau} = (1 - e^{-p\tau})^{-1}.$$

Então

$$\mathscr{L}\{f(t);p\} = (1 - e^{-p\tau})^{-1}\int_0^\tau f(u)e^{-pu}du.$$

■

1.3.5 Convolução de duas funções

Definição 1.3.3 Define-se *convolução de Laplace (f*g) de duas funções f e g* pela equação

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \tag{1.3.6}$$

Propriedade 1.3.10 *[8] Considerem-se duas funções f e g. Então $f * g = g * f$*

Demonstração. Usando o teorema: $\int_0^t \Psi(\tau)d\tau = \int_0^t \Psi(t-\tau)d\tau$, do cálculo elementar, temos que o integral (1.3.3) pode-se escrever $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Assim tem-se que $f * g = g * f$. ■

Propriedade 1.3.11 *[8] Seja $u(t) = f * g(t)$, a convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que admitem transformada de Lapace em Df e Dg, respectivamente. Então a transformada de Laplace de $u(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ existe, na intersecção de Df com Dg, e é o produto das transformadas de cada uma das funções.*

Demonstração. Temos que $u(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, então

$$\mathscr{L}\{u(t);p\} = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f*g(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, e^{-pt}dt$$

Mudando a ordem de integração

$$\int_0^\infty \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau =$$

$$= \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt \int_0^\infty g(\tau)d\tau$$

Fazendo $u = t - \tau$

$$\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt \int_0^\infty g(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(u)e^{-pu}du \int_0^\infty g(\tau)e^{-p\tau}d\tau =$$

$$= \mathscr{L}\{f(t);u\}\,\mathscr{L}\{g(t);\tau\}$$

Então $\mathscr{L}\{f * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\,\mathscr{L}\{g(t)\}$, ou seja, a transformada de Laplace da convolução é simplesmente o produto das transformadas de cada uma das funções. ■

É óbvio que este resultado pode ser generalizado, por iteração, obtendo-se que a convolução de n funções, com n natural, é o produto das transformadas destas funções.

Outras Propriedades [8]

Além desta propriedade existem outras, relacionadas com as convoluções, que apresentamos a seguir.

1. Se λ é real,então, $(\lambda f) * g = f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$

2. $f*(g+h) = f*g + f*h$
3. $f*(g*h) = (f*g)*h$
4. $\mathscr{L}\{f*g;p\} = \mathscr{L}\{f;p\}\mathscr{L}\{g;p\} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{f;p\}\mathscr{L}\{g;p\}\} = f*g$
5. $\mathscr{L}\{f*f;p\} = \{\mathscr{L}\{f;p\}\}^2 \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\{\mathscr{L}\{f;p\}\}^2\right\} = f*f$

1.4 Transformada inversa

1.4.1 Fórmula de inversão para a Transformada de Laplace

Nos capítulos anteriores estudamos algumas propriedades da transformada de Laplace $\mathscr{L}\{u(t);p\}$, de uma função $u(t)$. A maioria dessas propriedades fornecem informação sobre a transformada, $\mathscr{L}\{u(t);p\}$, quando a função original, $u(t)$, é conhecida. Neste capítulo vamos considerar o problema inverso, isto é, como obter informações sobre a função $u(t)$, quando temos alguma informação sobre a sua transformada de Laplace. Quando $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ é dada, qualquer fórmula que permita obter a função original $u(t)$ diz-se *Fórmula de inversão* para a transformada de Laplace. Então temos dois problemas. O primeiro é a unicidade da transformada inversa de Laplace e o segundo é como a calcular. A fórmula de inversão para a transformada de Laplace requer que a transformada seja tratada como uma função de variável complexa, como aliás ja considerávamos, no entanto $Re(p) > c$, c constante real, em quase todos os casos, ou seja, p era tratado quase como real. Agora vamos considerar apenas a fórmula de inversão na forma mais simples, tendo, no entanto, em consideração que existem outras formas da fórmula de inversão.

Antes de considerar a fórmula geral da inversão vamos ver dois casos especiais de funções: as funções do tipo exponencial (f.t.e.) e as funções em escada.

Propriedade 1.4.1 *[8] Se $u(t)$ é uma f.t.e., é igual à soma dos resíduos de*

$$\mathscr{L}\{u(t);p\}\, e^{pt}.$$

Demonstração. Como a função $u(t)$ é f.t.e. os seus termos são do tipo $v(t) = at^m e^{\alpha t}$, cuja transformada de Laplace é

$$\mathscr{L}\{v(t);p\} = m!a(p-\alpha)^{-m-1}.$$

Então

$$v(p)e^{pt} = m!ae^{\alpha t}\sum_{r=0}^{\infty} t^r (p-\alpha)^{r-m-1}/r!,$$

e o coeficiente de $(p-\alpha)^{-1}$ é $m!ae^{\alpha t}(t^m/m!) = v(t)$.

Por $u(t)$ ser f.t.e. é a soma de termos do tipo de $v(t)$, e portanto tem-se o resultado pretendido. ■

Pela propriedade anterior

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \mathscr{L}\{u(t);p\}\, e^{pt}dp,$$

onde C é um caminho fechado simples no plano p, contendo todos os polos de $\mathscr{L}\{u(t);p\}$.

Podemos modificar o integral de forma a ser zero quando $t < 0$ e $u(t)$ quando $t > 0$, substituindo C por uma recta paralela ao eixo imaginário do plano p. Desta forma

$$u(t)H(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} \mathscr{L}\{u(t);p\}\, e^{pt}dp.$$

estando todos os polos de $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ em $Re(p) < c$. Então podemos aplicar o Lema de Jordan a um semi-círculo de raio R, à direita se $t < 0$ e à esquerda se $t > 0$.

Propriedade 1.4.2 *[8] Se $u(t)$ é uma função em escada, isto é, se*

$$u(t) = \sum_{r=1}^{N} k_r[H(t-t_{r-1}) - H(t-t_r)],$$

onde $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N \le \infty$, e $c > 0$, então

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR} \mathscr{L}\{u(t);p\}\, e^{pt}dp \quad = \quad \begin{cases} u(t) & se \quad t \neq t_r, \forall r; \\ \frac{1}{2}[u(t_r+0)+u(t_r-0)] & se \quad t = t_r. \end{cases}$$

Demonstração. A transformada do termo típico $v(t) = k[H(t-a)-H(t-b)]$ é $\mathscr{L}\{v(t);p\} = k(e^{-ap} - e^{-bp})p^{-1}$.

A função $p^{-1}e^{pt}$ é regular excepto no polo simples $p = 0$, cujo resíduo é 1.

Então se $c > 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR} p^{-1}e^{pt}dt \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0; \\ 2\pi i & \text{se} \quad t > 0, \end{cases}$$

por aplicação do Lema de Jordan a um semi-círculo apropriado. Para $t = 0$ temos

$$\lim_{R\to\infty}\int_{c-iR}^{c+iR} p^{-1}dt = \log\frac{c+iR}{c-iR} = 2i\ \tan^{-1}\left(\frac{R}{c}\right),$$

e, $2i\tan^{-1}\left(\frac{R}{c}\right) \to \pi i$, quando $R \to \infty$.

Então, substituindo t por $(t-a)$ e $(t-b)$ obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR}\mathscr{L}\left\{v(t);p\right\}e^{pt}dp=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t<a \text{ ou } t>b;\\ \frac{1}{2}k & \text{se} \quad t=a \text{ ou } t=b;\\ k & \text{se} \quad a<t<b.\end{cases}$$

O que prova o resultado para $v(t)$ e consequentemente para $u(t)$. Se $t_N=\infty$, o termo $H(t-t_N)$ é zero. ■

Como qualquer função integrável pode ser aproximada por uma função em escada, é de esperar que o resultado geral seja análogo ao resultado da propriedade anterior.

A *fórmula de inversão* é geralmente escrita da forma seguinte

$$u(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}\right\}=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR}^{c+iR}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}e^{pt}dp, \tag{1.4.7}$$

no entanto, é necessário saber em que sentido se verifica a igualade estabalecida pela equação.

O teorema seguinte estabelece as condições da função $\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$ suficientes para assegurar a validade do *teorema da inversão* (1.4.7). As condições impostas a $u(t)$ são resultado das condições impostas a $\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$ que são importantes.

Teorema 1.4.1 *[6] Se $\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$ é uma função de variável complexa p, e é de ordem $O(p^{-k})$ em algum semi-plano $Re\ p>c$, onde c e k são constantes reais e $k>1$, então o integral*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR}\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}e^{pt}dp, \tag{1.4.8}$$

ao longo de uma recta $Re\ p=\gamma>c$ converge para uma função $u(t)$ independente de c e cuja transformada de Laplace é a função correspondente a $\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\}$, $Re\ p>c$. Além disso, a função $u(t)$ é contínua para todo $t\geq 0$ e é de ordem $O(e^{\gamma t})$, quando $x\to\infty$.

1.4.2 Cálculo de transformadas inversas

O teorema de inversão para a transformada de Laplace pode ser usado para calcular a transformada inversa.

Se $\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}$ é uma função analítica no plano complexo p, excepto para um número finito de singularidades, $p_1,p_2,...,p_n$, calculamos $\mathscr{L}^{-1}\left\{\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\};t\right\}$, integrando a função $\mathscr{L}\left\{v(t);p\right\}=\mathscr{L}\left\{u(t)\right\}e^{pt}$ ao longo do caminho delimitado

pela intersecção da circunferência centrada na origem e de raio R, com o plano, $Re(p) \leq c$, onde c é como foi dito no teorema anterior, então a recta $Re\ (p) = c$, está à direita de todas as singularidades de $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ e o raio R é escolhido de forma às singularidades estarem dentro deste caminho. Usando o teorema de inversão:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{u(t);p\};t\} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{AB} \mathscr{L}\{v(t);p\}\,dp,$$

onde AB é o segmento de recta da recta $Re\ (p) = c$, delimitado pela circunferência anteriomente referida.

Então, pelo teorema de Cauchy

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{u(t);p\};t\} = \sum_{r=1}^{n} res\ \mathscr{L}\{v(t);p_r\}. \tag{1.4.9}$$

Este resultado pode ser generalizado para o caso em que $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ tem um número infinito de singularidades, obtendo-se

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{u(t);p\};t\} = \sum_{r=1}^{\infty} res\mathscr{L}\{v(t);p_r\}.$$

Exemplo 1.4.1 *Como simples ilustração do uso da fórmula (1.4.9), calcule-se* $\mathscr{L}^{-1}\left\{(p^2+w^2)^{-1};t\right\}$, *onde w é real e positivo.*

A função $\mathscr{L}\{v(t);p\} = (p^2+w^2)^{-1}e^{pt}$, *com $t > 0$, tem polos simples em* $p = \pm iw$, *com resíduos* $(\pm 2iw)e^{\pm iwt}$, *respectivamente. Como*

$$\lim_{|P|\to\infty} p\mathscr{L}\{u(t);p\} = 0,$$

se $Re\ (p) < 0$, então o integral ao longo do arco tende para zero quando $R \to \infty$, então da equação (1.4.9), temos

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{u(t);p\};t\} = \frac{1}{2iw}(e^{iwt} - e^{-iwt}) = \frac{\sin(wt)}{w}.$$

Capítulo 2

Operadores integrais de Convolução de Mellin

Neste capítulo faremos uma abordagem geral à transformada de Mellin, introduzimos os operadores de convolução de Mellin, apresentamos teoria geral relativa à função Gama, definimos funções do tipo hipergeométrico e ainda enunciamos o Teorema de Slater. Terminamos o capítulo com a aplicação do método da transformada de Laplace ao primeiro operador integral, ou seja, procedemos ao cálculo da transformada de Laplace de variável real.

2.1 Transformada de Mellin

No presente subcapítulo pretendemos fazer uma abordagem geral à transformada de Mellin. Os assuntos abordados incidirão designadamente sobre a sua definição e existência, exemplos, transformada inversa, relações com as transformadas de Fourier e Laplace e algumas das suas propriedades. O estudo da transformada de Mellin tem grande aplicação no estudo de funções especiais, como a função Gama, por exemplo. Resultados mais pormenorizados sobre este tema podem ser encontrados em literatura de autores diversos, como é o caso de Marichev [2].

2.1.1 Definição de transformada de Mellin e Propriedades

Como era de esperar, o primeiro ponto que vamos apresentar refere-se à própria definição da transformada agora em estudo.

Definição 2.1.1 *[2]* Considere-se a função $\varphi(\tau)$, onde $\tau \in \Re^+ =]0, +\infty[$. O integral

$$\varphi^*(s) = \mathscr{M}\{\varphi(\tau); s\} = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, \tau^{s-1} d\tau, \tag{2.1.1}$$

para todo o número complexo s, para o qual o integral seja convergente, diz-se a *transformada de Mellin* da função $\varphi(\tau)$ no ponto $s \in \mathbf{C}$.

2.1.2 Existência da Transformada de Mellin

Por ser definida por um integral, analogamente à transformada de Laplace, a transformada de Mellin de uma função nem sempre existe. Efectivamente o integral (2.1.1) pode não ser convergente para todos os valores $s \in C$, dada uma qualquer função $\varphi(\tau)$.

Desta forma, temos que estabelecer condições para a existência da transformada de Mellin.

Teorema 2.1.1 *[2] (Existência da transformada de Mellin)*

Seja a função $\varphi(x) \in L^c(\epsilon, E)$, $0 < \epsilon < E < \infty$, contínua nos intervalos $]0, \epsilon]$, $[E, \infty[$, e seja $|\varphi(x)| \leq Ax^{-a}$, para $0 < x < \epsilon$ e $|\varphi(x)| \leq Ax^{-b}$, para $x > E$, onde A é uma constante. Então para a existência da faixa no plano s, tal que $\varphi(x)\, x^{s-1}$ pertence a $L^c(0, \infty)$ [ver nota 5] é suficiente que tenhamos $a < b$. Quando esta condição é válida, a transformada de Mellin $\varphi^*(s)$ existe na faixa vertical $Re\ s = \gamma$, $a < \gamma < b$. Além disso, neste caso, o integral (2.1.1) converge uniformemente em qualquer faixa $a + \delta \leq Re\ s \leq b$.

Nota 5 Denotamos por L^c o conjunto real ou Complexo de funções de variável real x definidas e contínuas em todo o eixo real (excepto, possivelmente, para um número finito de pontos), para os quais o integral impróprio finito $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)dx|$ existe. Denotamos por $L^c(0, \infty)$ a classe correspondente de funções definidas em $]0, \infty[$.

Em seguida enunciamos dois resultados que vamos usar na demonstração deste teorema.

Propriedade 2.1.1 *[2]* $|t^s| = \left|e^{s \ln t}\right| = e^{Re\, s \ln t} \left|e^{i\, Im\, s \ln t}\right| = t^{Re\, s}$, $t > 0$.

Teorema 2.1.2 *[2] Se $\psi(z, t)$ é analítica em z, é integrável em t sobre a curva C para todo o $z \in D$, onde D é um domínio simples e o integral $f(z) = \int_c \psi(z, t)\, dt$ converge uniformemente em D, então o integral é uma função analítica neste domínio.*

Demonstração do Teorema 2.1.1. Pretendemos mostrar que o integral (2.1.1) converge uniformemente, em qualquer faixa $a + \delta \leq Re\ s \leq b$.

Seja $0 < \epsilon < 1 < E$. Vejamos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|\varphi(\tau)\tau^{s-1}\right| d\tau &= \int_0^\epsilon \left|\varphi(\tau)\tau^{s-1}\right| d\tau + \int_\epsilon^E \left|\varphi(\tau)\tau^{s-1}\right| d\tau + \int_E^\infty \left|\varphi(\tau)\tau^{s-1}\right| d\tau \\
&\leq \int_0^\epsilon \tau^{-a}\left|\tau^{s-1}\right| d\tau + \int_\epsilon^E |\varphi(\tau)|\left|\tau^{s-1}\right| d\tau + \int_E^\infty A\tau^{-b}\left|\tau^{s-1}\right| d\tau \\
&\leq A\int_0^\epsilon \tau^{-a}\tau^{\gamma-1}d\tau + \int_\epsilon^E |\varphi(\tau)|\,\tau^{Re\,s-1}d\tau \;+\; A\int_E^\infty \tau^{-b}\tau^{\gamma-1}d\tau \\
&\leq A\int_0^\epsilon \tau^{-a+\gamma-1}d\tau + \int_\epsilon^E |\varphi\,(\tau)|\,\tau^{Re\,s-1}d\tau + A\int_E^\infty \tau^{-b+\gamma-1}d\tau \\
&= A\frac{\epsilon^{\gamma-a}}{\gamma-a} + B + A\frac{E^{\gamma-b}}{b-\gamma} < \infty,
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

com $\gamma - a > 0 \Leftrightarrow \gamma > a$ e $\gamma - b < 0 \Leftrightarrow b > \gamma$, condições estas, que asseguram a convergência nos extremos dos integrais em 0 e em ∞. O integral existe, desde que $\varphi \in L^c(\epsilon, E)$, e o seu valor é denotado por B. Assim para a existência de s cujo o integral anterior é finito, é suficiente que $a < b$. Deste modo, para qualquer complexo s da faixa vertical $a < Re\,s = \gamma < b$, o integral (2.1.2) é convergente, e a convergência é uniforme para todo o interior da faixa $a + \delta \leq Re\ s \leq b - \delta$, $\delta > 0$, pelo *teste M de Weierstrass.*

Como o integrando é analitico em s, a convergência uniforme do integral $\varphi^*(s)$, para todo s sobre a faixa $a < Re < b$, decorre do Teorema 2.1.2.

2.1.3 Cálculo da Transformada de Mellin de algumas funções elementares

Exemplo 2.1.1 *Consideremos a função $f(x) = e^{-x}$. A transformada de Mellin de e^{-x} é a* ***função Gama de Euler***

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = \Gamma(s),\ com\ Re\ s > 0.$$

Este integral existe e é analítico para $Re\ s > 0$.

Exemplo 2.1.2 *Seja a função $f(x) = (1+x)^{-\rho}$. A transformada de Mellin de $f(x)$ é a* ***função Beta de Euler***

$$B(s, \rho - s) = \int_0^\infty (1+\tau)^{-\rho}\tau^{s-1}d\tau.$$

Este integral existe e é analítico na faixa $0 < \gamma = Re\ s < Re\ \rho$.

Exemplo 2.1.3 *Consideremos função $f(x) = \frac{1}{1+x}$. A transformada de Mellin de $f(x)$ é*

$$f^*(s) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x} x^{s-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad , \quad 0 < Re\ s < 1.$$

2.1.4 Inversão da transformada de Mellin

Antes de calcular a inversa da transformada de Mellin apresentamos a relação entre a transformada de Mellin e a **transformada de Fourier**. A razão para tal é que podemos obter a transformada de Mellin através da transformada de Fourier, e dessa relação é possível obter resultados e propriedades básicas da transformada de Mellin.

Podemos definir a transformada de Fourier pelas fórmulas

$$F(x) = F\{f(t); x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt, \tag{2.1.3}$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(x); t\} = F\{F(x); -t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx. \tag{2.1.4}$$

Se substituirmos a exponencial e efectuarmos uma rotação no plano complexo através do plano $\frac{\pi}{2}$ obtemos a transformada de Mellin (2.1.1).

De facto, substituindo $f(t)$ por $\sqrt{2\pi}\varphi(e^t)$ em (2.1.3) e fazendo a

Mudança de variável 2.1.1 $e^t = \tau \Leftrightarrow t = \ln \tau,\ x = -is\ e\ dt = \frac{d\tau}{\tau}$

Obtemos

$$F\left\{\sqrt{2\pi}\ \varphi\left(e^t\right)\ ; -is\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}\ \varphi(et)\ e^{it(-is)} dt = \int_0^{+\infty} \varphi(\tau)\ \tau^s\ \tau^{-1} d\tau = \tag{2.1.5}$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(\tau)\, \tau^{s-1} d\tau = \varphi^*(s).$$

De igual modo em (2.1.4), obtemos

$$\sqrt{2\pi}\varphi\left(e^t\right) = F^{-1}\{F(-is); \ln \tau\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(-is)\, e^{-i(-is)t} d(-is).$$

Então existe uma forte relação entre estas duas transformadas. Esta relação, como já tinhamos referido, permite obter resultados e propriedades básicas da transformada de Mellin, entre elas a que se segue.

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \varphi^*(s) \tau^{-s} ds, 0 < \tau < \infty, Re(s) = \gamma. \tag{2.1.6}$$

Esta propriedade tem a forma (2.1.4) na transformada de Fourier e permite obter a função $\varphi(\tau)$ através da sua transformada de Mellin, isto é, a **inversão da transformada de Mellin**. Dada a transformada de Mellin $\varphi^*(s)$, a função $\varphi(\tau)$ é calculada através da **fórmula da inversão da transformada de Mellin** que se segue

$$\mathscr{M}^{-1}\ \{\varphi^*(s);\tau\} = \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \varphi^*(s)\tau^{-s}ds,$$

onde $0 < \tau < \infty$, $Re\ s = \gamma$.

Rigorosas justificações destas relações foram dadas por Mellin em 1896 e 1902.

Teorema 2.1.3 *[2] Inversão da transformada de Mellin*

Consideremos $\varphi(x)\ x^{\gamma-1} \in L^c(0,\infty)$ e $\varphi(y)$ diferenciável em algumas partes da vizinhança $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, $\epsilon > 0$, no ponto $y = x > 0$, e contínua nesse mesmo ponto $y = x$. Então a fórmula da Inversão é válida para x tal que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \varphi^*(s)x^{-s}ds, \gamma = Re(s), x > 0. \tag{2.1.7}$$

Esta fórmula é válida para funções contínuas. No entanto, se $\varphi(y)$ for descontínua por saltos no ponto $y = x$, então sustitui-se $\varphi(y)$ por $\frac{1}{2}[\varphi(x+0) + +\varphi(x-0)]$ em (2.1.7).

Exemplo 2.1.4 *Tendo em conta o exemplo 2.1.1, do subcapítulo 2.1.3, temos que o integral da transformada inversa da função Gama é*

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s)x^{-s}ds,\ Re\ s = \gamma > 0\ , x > 0,$$

Exemplo 2.1.5 *A transformada inversa da função Beta é*

$$(1+x)^{-\rho} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} B(s,\rho-s)x^{-s}ds,\ 0 < Re\ s = \gamma < Re\ \rho\ .$$

2.2 Operadores de Convolução

2.2.1 Convolução de Mellin

Outra propriedade da transformada de Mellin que podemos obter através da transformada de Fourier é a convolução de Mellin. Já definimos em (1.3.3) a

convolução de Laplace de duas funções. Fazendo uma mudança de variável essa definição pode-se escrever da forma que se segue.

Definição 2.2.1 *[2] A convolução de Fourier $(f*g)$ de duas funções f e g está definida em toda a recta real e é dada pela função*

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ g(x-t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\ f(x-\tau)d\tau.$$

Vejamos como obter a **convolução de Mellin**.

Consideremos as mudanças de variável (2.1.1) e ainda que $\mathscr{K}(\eta) = g(\ln\eta)$, $\gamma = 0$. Obtemos então, para as funções φ e $\mathscr{K}$

$$(f*g)(\ln x) = (\varphi\circ\mathscr{K})(x) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau)\ g\left(\frac{\ln x}{\tau}\right) d(\ln\tau), \tag{2.2.8}$$

e também a fórmula que define a convolução de Mellin de φ e de $\mathscr{K}$.

Definição 2.2.2 *[2] A convolução, $(\varphi\circ\mathscr{K})$, de φ e $\mathscr{K}$ é definida por*

$$(\varphi\circ\mathscr{K})(x) = (\mathscr{K}\circ\varphi)(x) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau)\mathscr{K}\left(\frac{x}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}. \tag{2.2.9}$$

Nota 6 *O operador (2.2.9) chama-se também* ***operador integral de convolução de Mellin*** *com núcleo $\mathscr{K}(x)$ (elementos de teoria e exemplos particulares dos núcleos deste operador mais à frente, no Subcapítlo 2.9 e no Capítulo 3).*

Podemos calcular a **transformada de Mellin da convolução de Mellin**

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}\left\{(\varphi\circ\mathscr{K})(x); s\right\} &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\mathscr{K}\left(\frac{x}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}\right)x^{s-1}dx \\
&= \int_0^{\infty} x^{s-1}dx\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\mathscr{K}\left(\frac{x}{\tau}\right)\tau^{-1}d\tau \\
&= \int_0^{\infty}\varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau\int_0^{\infty}\tau^{s}\mathscr{K}\left(\frac{x}{\tau}\right)\left(\frac{x}{\tau}\right)^{s-1}d\left(\frac{x}{\tau}\right) \\
&= \int_0^{\infty}\varphi(\tau)\tau^{-1}\tau^{s}d\tau\int_0^{\infty}\mathscr{K}\left(\frac{x}{\tau}\right)\left(\frac{x}{\tau}\right)^{s-1}d\left(\frac{x}{\tau}\right) \\
&= \varphi^*(s)\mathscr{K}^*(s).
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Se fixarmos $\varphi(\tau) = \mathscr{K}_2(\tau)$ e $\mathscr{K}(s) = \mathscr{K}_1(s)$ em (2.2.9) e (2.2.10) respectivamente, obtem-se:

i)

$$\int_0^\infty \mathscr{K}_1\left(\frac{x}{t}\right)\mathscr{K}_2(t)\frac{dt}{t} = \mathscr{K}(x)\ , \quad x > 0, \tag{2.2.11}$$

onde $\mathscr{K}_1(\tau)$ e $\mathscr{K}_2(\tau)$ são funções que podem ser encontradas na segunda coluna das linhas da tabela básica da transformada de Mellin.

ii)

$$\mathscr{K}_1^*(s)\mathscr{K}_2^*(s) = \mathscr{K}^*(s), \tag{2.2.12}$$

onde $\mathscr{K}^*(s)$ representa a transformada de Mellin da convolução (2.2.8).

A existência da convolução de Mellin é fixada pelo resultado que se segue

Teorema 2.2.1 *[2] Se $\mathscr{K}_n(x)x^{\gamma-1} \in L^c(0,\infty)$, $n = 1, 2$, então a convolução, $(\mathscr{K}_1 \circ \mathscr{K}_2)$ existe, $x^{\gamma-1}(\mathscr{K}_1 \circ \mathscr{K}_2)(x)$ pertence a $L^c(0,\infty)$, e para qualquer s tal que Re $s = \gamma$, a transformada de Mellin da convolução (2.2.10) existe e é igual ao produto das imagens das funções inicialmente convoluídas.*

Nota 7 *As condições em $\mathscr{K}_n(x)$ neste teorema são suficientes. O lado direito de (2.2.12) é preservado no caso em que um dos integrais $\mathscr{K}_n^*(s)$ $, n = 1, 2$ é condicionalmente convergente.*

Nota 8 *Se cada função $\mathscr{K}_n(x)$, $n = 1, 2$, satisfaz as condições do teorema da existência da transformada de Mellin, com expoentes a_n e b_n $, n = 1, 2$, então os intervalos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) devem intersectar-se e γ deve ser tal que*

$$\max(a_1, a_2) < \gamma < \min(b_1, b_2), \tag{2.2.13}$$

Assim, podemos considerar as condições que se seguem, como corolário da desigualdade (2.2.13) $a_1 < b_2$, $a_2 < b_1$, as quais asseguram a convergência nos extremos do integral (2.2.11) em 0 e em ∞ .

2.2.2 Transformada de Mellin e Transformada de Laplace

Através da fórmula da convolução obtemos uma relação entre a transformada de Mellin e Laplace.

Sabemos que sendo $u(t)$ uma função definida para $t > 0$. A sua transformada de Laplace é definida por $\mathscr{L}\{u(t); p\} = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}dt$, para todo o número complexo p para o qual o integral convirja, conforme a definição (1.1.1). Fazendo a mudança de variável $t = \frac{1}{v}$, $dt = -\frac{dv}{v^2}$, na transformada de Laplace, temos, $\mathscr{L}\{u(t); p\} = \int_\infty^0 u\left(\frac{1}{v}\right)e^{-p\frac{1}{v}}\left(-\frac{1}{v^2}\right)dv = \int_0^\infty \frac{u\left(\frac{1}{v}\right)}{v}e^{\frac{-p}{v}}\frac{dv}{v}$.

Ou seja,

$$\mathscr{L}\left\{u(t);p\right\} = \int_0^\infty \mathscr{K}_1(v)\ \mathscr{K}_2\left(\frac{p}{v}\right)\frac{dv}{v},$$

com $\mathscr{K}_1(v) = \frac{u\left(\frac{1}{v}\right)}{v}$ e $\mathscr{K}_2(v) = e^{-v}$.

2.3 Propriedades da transformada de Mellin

Propriedade 2.3.1 *[2] Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funções definidas em $\Re_+ =]0,\infty[$, então*

$$\mathscr{M}\left\{af_1(x) + bf_2(x); s\right\} = a\ \mathscr{M}\left\{f_1(x); s\right\}\ +\ b\ \mathscr{M}\left\{f_2(x); s\right\},$$

para quaisquer constantes a e b , ou seja, a transformada de Mellin é linear.

Demonstração. Usando a definição (2.1.1) e as propriedades do integral, temos

$$\mathscr{M}\left\{af_1(x) + bf_2(x); s\right\} = \int_0^\infty \left(af_1(x) + bf_2(x)\right)x^{s-1}dx =$$

$$= \int_0^\infty af_1(x)\ x^{s-1}dx\ +\ \int_0^\infty bf_2(x)\ x^{s-1}dx = af_1^*(s)\ +\ bf_2^*(s) =$$

$$= a\ \mathscr{M}\left\{f_1(x); s\right\}\ +\ b\ \mathscr{M}\left\{f_2(x); s\right\}.$$

■

Propriedade 2.3.2 *[2] Se $a > 0$, então $\mathscr{M}\left\{f(ax); s\right\} = a^{-s}f^*(s)$.*

Demonstração. Por definição, (2.1.1), $\mathscr{M}\left\{f(ax); s\right\} = \int_0^\infty f(ax)\ x^{s-1}dx$. Fazendo uma mudança de variável $ax = u$ temos

$$\mathscr{M}\left\{f(ax); s\right\} = \int_0^\infty f(u)\ \frac{u^{s-1}}{a^{s-1}}\ \frac{1}{a}\ du = \int_0^\infty f(u)\ \frac{u^{s-1}}{a^s}\ du = a^{-s}\ f^*(s).$$

■

Propriedade 2.3.3 *[2] Se a é constante, então $\mathscr{M}\left\{x^a f(x); s\right\} = f^*(s+a)$.*

Demonstração. Por (2.1.1), temos que

$$\mathscr{M}\left\{x^a\ f(x); s\right\} = \int_0^\infty x^a\ f(x)\ x^{s-1}dx = \int_0^\infty f(x)\ x^{s+a-1}dx = f^*(s+a).$$

■

Propriedade 2.3.4 *[2]* $\mathscr{M}\left\{f\left(x^2\right)\ ;s\right\} = \frac{1}{2}\ f^*(\frac{s}{2})$

Demonstração. Sabemos, por (2.1.1), que

$$\mathscr{M}\left\{f\left(x^2\right)\ ;s\right\} = \int_0^\infty\ f(x^2)\ x^{s-1}dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x^2 = u$, temos

$$\mathscr{M}\left\{f\left(x^2\right)\ ;s\right\} = \int_0^\infty\ f(u)\ \left(\sqrt{u}\right)^{s-1}\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty\ f(u)\ \left(\sqrt{u}\right)^{s-2}\ du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty\ f(u)\ \ u^{\frac{s}{2}-1}\ du = \frac{1}{2}\ f^*\left(\frac{s}{2}\right).$$

■

Propriedade 2.3.5 *[2]*

Seja $a > 0$, constante, então $\mathscr{M}\left\{f\left(x^a\right);s\right\} = a^{-1}f^*(\frac{s}{a})$.

Demonstração. Temos que $\mathscr{M}\left\{f\left(x^a\right);s\right\} = \int_0^\infty f\left(x^a\right)x^{s-1}dx$.

Fazendo uma mudança de variável $x^a = u$, temos

$$\mathscr{M}\left\{f\left(x^a\right)\ ;s\right\} = \int_0^\infty\ f(u)\ u^{\frac{s}{a}-\frac{1}{a}}\ \ \left(\frac{1}{a}\ u^{\frac{1}{a}-1}\ du\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty\ f(u)\ u^{\frac{s-a}{a}}\ \ du = \frac{1}{a}\int_0^\infty\ f(u)\ \ u^{\frac{s}{a}-1}\ du = \frac{1}{a}\ f^*\left(\frac{s}{a}\right).$$

■

Propriedade 2.3.6 *[2]* $\mathscr{M}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right);s\right\} = f^*(-s)$.

Demonstração. $\mathscr{M}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right);s\right\} = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{x}\right)x^{s-1}dx$. Fazendo a mudança de variável $\frac{1}{x} = u$, temos

$$\mathscr{M}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)\ ;s\right\} = \int_0^\infty\ f(u)\ \left(\frac{1}{u}\right)^{s-1}\ \ \left(-\frac{1}{u^2}\right)\ du =$$

$$= \int_\infty^0\ f(u)\ u^{-s+1}\ \ u^{-2}\ du = \int_0^\infty\ f(u)\ \ u^{-s+1-2}\ du =$$

$$= \int_0^\infty\ f(u)\ \ u^{-s-1}\ du = f^*(-s).$$

■

Propriedade 2.3.7 *[2] Sejam $a > 0$, $\beta \neq 0$ e λ, constantes quaisquer, então*

$$\mathscr{M}\left\{x^{\lambda} f\left(ax^{\beta}\right) ; s\right\} = \frac{1}{\beta}\ a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\ f^{*}\left(\frac{-s+\lambda}{\beta}\right).$$

Demonstração. $\mathscr{M}\left\{x^{\lambda} f\left(ax^{\beta}\right) ; s\right\} = \int_0^{\infty} f\left(ax^{\beta}\right) x^{s-1+\lambda} dx$. Fazendo a mudança de variável $u = ax^{\beta}$, temos

$$\mathscr{M}\left\{x^{\lambda} f\left(ax^{\beta}\right) ; s\right\} = \int_0^{\infty} f(u)\ \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{s+\lambda-1}{\beta}}\ a^{-\frac{1}{\beta}}\ \frac{u^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta}\ du =$$

$$= \frac{1}{\beta}\ a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}} \int_0^{\infty} f(u)\ u^{\frac{s+\lambda}{\beta}-1}\ du = \frac{1}{\beta}\ a^{-\frac{s+\lambda}{\beta}}\ f^{*}\left(\frac{s+\lambda}{\beta}\right)$$

■

2.3.1 Transformada de Mellin e derivadas

No cálculo da transformada de Mellin de determinadas funções é, por vezes, necessário calcular a transformada de Mellin da derivada da função dada, $f(x)$, ou a transformada de Mellin de integrais da função, dados em termos da transformada de Mellin, $\varphi^{*}(s)$, da função.

Os resultados seguintes resultam da aplicação da definição da transformada de Mellin.

Propriedade 2.3.8 *[2] Se $f^{*}(s-1)$ existe para $\sigma_1 < Re\ s < \sigma_2$, então*

$$\mathscr{M}\left\{f'(x) ; s\right\} = -(s-1)\ f^{*}(s-1)\ \ ,\ \sigma_1 < Re\ s < \sigma_2.$$

Demonstração. Por definição

$$\mathscr{M}\left\{f'(x) ; s\right\} = \int_0^{\infty} f'(x)\ x^{s-1} dx,$$

integrando por partes, temos

$$\mathscr{M}\left\{f'(x) ; s\right\} = \left[f(x)x^{s-1}\right]_0^{\infty} - (s-1)\int_0^{\infty} f(x)x^{s-2} dx.$$

Se existem σ_1 , σ_2 tal que $\lim\limits_{x\to 0} x^{s-1} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{s-1} f(x) = 0$, quando $\sigma_1 < Re\ s < \sigma_2$, e $f^{*}(s-1)$ existe, então

$$\mathscr{M}\left\{f'(x) ; s\right\} = -(s-1)\ f^{*}(s-1)\ \ ,\ \sigma_1 < Re\ s < \sigma_2.$$

■

Se aplicarmos duas vezes a propriedade anterior, temos o resultado que se segue.

Propriedade 2.3.9 *[2] Nas condições da propriedade 2.3.8, se $f^*(s-2)$ existe e $\lim_{x\to 0} x^{s-1}f'(x) = 0$, temos que*

$$\mathscr{M}\left\{f''(x)\ ;s\right\} = -(s-1)\ \mathscr{M}\left\{f'(x)\ ;s-1\right\} =$$
$$= -(s-1)\left[-(s-2)f^*(s-2)\right] = (s-1)(s-2)f^*(s-2).$$

E, fazendo indução sobre n, $n \in \mathbb{N}$, para todos os valores de s para os quais $f^*(s-n)$ existe, temos a generalização da propriedade.

Propriedade 2.3.10 *[2] Se $f^*(s-n)$, $n \in \mathbb{N}$ existe, então*

$$\mathscr{M}\left\{f^{(n)}(x)\ ;s\right\} = (-1)^n\ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\ f^*(s-n),$$

desde que

$$\lim_{x\to 0} x^{s-r-1}\ f^{(r)}(x) = 0\ \ ,\ r = 0, 1, ..., n-1.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos, pela propriedade (2.3.8), que se verifica a igualdade. Considere-se, agora, $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que se verifica a igualdade

$$\mathscr{M}\left\{f^{(n)}(x); s\right\} = (-1)^n\ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\ f^*(s-n).$$

Usando a definição de transformada de Mellin temos que

$$\mathscr{M}\left\{f^{(n+1)}(x)\ ;s+1\right\} = \int_0^\infty f^{(n+1)}(x)\ x^s\ dx = \int_0^\infty (f^n)'(x)x^{s-1}dx =$$
$$= -(s-1)\int_0^\infty f^n(x)\ x^{s-1}\ dx = -(s-1)(-1)^n\ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\ f^*(s-n) =$$
$$= (-1)^{n+1}\ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n-1)}\ f^*(s-n-1).$$

Ou seja, temos

$$\mathscr{M}\left\{f^{(n+1)}(x)\ ;s\right\} = (-1)^{n+1}\ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n-1)}\ f^*(s-n-1).$$

■

2.4 Função Gama

Nos cursos de Análise a função Gama, $\Gamma(s)$, é definida normalmente pelo integral de Euler, e apenas para valores reais positivos de s. E como já vimos, no subcapítulo 2.1.3, um dos casos particulares da transformada de Mellin é a função Gama de Euler, quando consideramos $\mathscr{K}(x) = e^{-x}$.

2.4.1 Definição da Função Gama

Definição 2.4.1 *[2] Seja a função $\mathscr{K}(x) = e^{-x}$, definida em $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$. A função Gama de Euler é a transformada de Mellin da função $\mathscr{K}(x) = e^{-x}$, no ponto $s \in \mathbb{C}$, definida por*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx = \mathscr{K}^*(x), \;\; Re\ s > 0. \tag{2.4.14}$$

É usual denotar a função Gama por função$-\Gamma$.

$\Gamma(s)$ é analítica no semi-plano $Re\ s > 0$. Para mostrar este facto basta usar a definição de Euler. De facto, a função integranda $\psi(s,t) = e^{-t} t^{s-1}$ é analítica em relação a s e integrável em relação a $t \in]0, +\infty[$, para qualquer s tal que $Re\ s > 0$, desde que $t^s = e^{-s\ \ln t}$ seja uma função constante de s, e

$$|t^s| = |e^{s\ ln\ t}| = e^{Re\ s\ ln\ t} |e^{\ i\ Im\ s\ ln\ t}| = t^{Re\ s}, t\ >\ 0,$$

e, portanto,

$$|\Gamma(s)| \leq \int_0^1 1.\ t^{Re\ s-1}\, dt\ + \int_1^\infty t^{-b+Re\ s-1}\, dt < \infty, \tag{2.4.15}$$

para $0 < Re\ s < b$, onde $b > 0$ é arbitrário.

Assim de (2.4.15), temos que o integral(2.4.14) converge uniformemente em cada faixa $0 < a < Re\ s < b$, onde, consequentemente, é analítica.

Como os limites $a, b > 0$ são arbitrários, concluímos que a função Gama é analítica no plano $Re\ s > 0$. A mesma conclusão, também pode surgir da existência da derivada $\Gamma'(s)$, para $Re\ s > 0$, e da definição de analiticidade.

Para mostrar que $\Gamma(s)$ pode ser extendida analiticamente para todo o plano complexo s, excepto para os pontos singulares $s = 0, -1, -2, ...$, temos que estabelecer algumas propriedades importantes desta função.

2.4.2 Propriedades da Função Gama

2.4.2.1 Fórmula da redução

Propriedade 2.4.1 *[2] (Fórmula da redução)* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $Re\ s > 0$.

Demonstração. Aplicando a definição (2.4.14) da Função Gama, temos

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}\ x^{s+1-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\ x^s\, dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\Gamma(s+1) = -e^{-x}\, x^s]_0^\infty - \int_0^\infty -e^x\, sx^{s-1}\, dx = s\int_0^\infty e^x\, x^{s-1}\, dx = s\Gamma(s)\,, Re\, s > 0.$$

■

Aplicando a última propriedade n vezes, encontramos a propriedade mais geral.

2.4.2.2 Símbolo de Pochhammer

Propriedade 2.4.2 *[2] Seja s tal que $Re\ s > 0$, então*

$$\Gamma(s+n) = (s)_n\, \Gamma(s) = \ s(s+1)(s+2)...(s+n-1)\Gamma(s) \ \ , \ n = 1, 2, ..., (s)_0 = 1. \tag{2.4.16}$$

Definição 2.4.2 *[2] O símbolo definido por*

$$(s)_n = s(s+1)(s+2)...(s+n-1), n = 1, 2, ..., (s)_0 = 1, \tag{2.4.17}$$

diz-se ***símbolo de Pochhammer.***

Nota 9 Fazendo $s = 1$, em (2.4.14), vemos que $\Gamma(1) = 1$ e, tendo isso em conta em (2.4.16), com $s = 1$, temos mais uma propriedade.

2.4.2.3 Função Gama como um Factorial

Propriedade 2.4.3 *[2] Quando o argumento s da função Gama é um número natural, a função Gama é um factorial, isto é*

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ ,\ n = 1, 2, ...$$

Demonstração. Para $n = 1$, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1 = (1-1)!$. Vamos supôr que $\Gamma(n) = (n-1)!$, pela propriedade 2.4.1, temos que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(s) = n\ (n-1)! = n!.$$

■

A propriedade 2.4.2, deduzida sob a condição $Re\ s > 0$, pode ser usada para encontrar uma extensão analítica da função Gama (ou função-Γ) ao plano s pela fórmula

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)(s+2)...(s+n-1)}\ ,\ n=1,2,... \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)...(s+n-1)}\int_0^\infty e^{-x}\ x^{s+n-1}\ dx.\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Este integral (2.4.18) é convergente e analítico, para $Re\ s > -n$. Note-se que o denominador, também depende analiticamente de s, então o integral é analítico para $Re\ s > -n$, $n = 0, 1, 2, ...$, $s \neq 0, -1, ..., 1-n$. Porém, por transitividade da relação de igualdade,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)...(s+n-1)}\int_0^\infty e^{-x}\ x^{s+n-1}\ dx,$$

para $Re\ s > 0$, pelo que temos, assim, a definição analítica da função Gama para valores não positivos de $Re\ s$.

Assim, como o denominador $s(s+1)(s+2)...(s+n-1)$ da equação (2.4.18) tende para zero quando $s \to -k$, $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$, e o numerador nunca se anula, concluímos que $\Gamma(s)$ tem polos simples para $s = 0, -1, -2, ...$ Além disso, a propriedade 2.4.2 permite definir uma classe de funções analíticas, da qual a função Gama é um elemento. A classe de funções que verificam

$$f(s+1) = sf(s),\ f(1) = 1 \tag{2.4.19}$$

De facto, tal como a função-Γ, qualquer função da forma $\Gamma(s)\theta(s)$, onde $\theta(s)$ é analítica e periódica de período 1 ($\theta(s+1) = \theta(s)$) e $\theta(1) = 1$, também verificam (2.4.19). Desta forma, para distinguir a função-Γ unicamente nesta classe de funções é necessário acrescentar a (2.4.19) uma condição inicial. Esta questão foi estudada por alguns autores. Mencionamos apenas um teorema básico nesta matéria

Teorema 2.4.1 *[2] Seja $f(s)$ uma função analítica, não nula, que satisfaz (2.4.19), para todo o complexo s, e logaritmicamente convexa, para todo real $s > 0$, isto é, $\ln f(s)$, $s > 0$ é uma função convexa.*

Então $f(s) \equiv \Gamma(s)$, por outras palavras, esta função pode ser representada como um integral de Euler (2.4.14)(para $Re\ s > 0$).

Com este teorema podemos contruir a teoria da função-Γ começando pela sua representação analítica como integral de Euler (2.4.14). Apresentemos, então, mais algumas propriedades da função-Γ.

2.4.2.4 Resíduos

Propriedade 2.4.4 *[2] A Função Gama é analítica em todo o plano complexo s, excepto nos pontos $s = -n$, $n = 0, 1, 2, ...$, onde $\Gamma(s)$ tem polos simples com resíduos $\frac{(-1)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, ...$*

Demonstração. Tendo em conta a definição de resíduo, substituindo n por $(n+1)$, na equação (2.4.18), tomando o limite quando $s \to -n$ e usando a fórmula

$$res_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_2^{(k)}(z_0) f_3^{(n-k-1)}(z_0)}{k!(n-k-1)!}, \tag{2.4.20}$$

temos

$$res\ s_{s\to -n}\Gamma(s) = \lim_{s\to -n} (s+n)\Gamma(s) = \lim_{s\to -n} \Gamma(s+n+1) =$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)...(-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\ ,\ n = 0, 1, 2, ...$$

■

A seguir, apresentam-se algumas propriedades da função Gama, sem demonstração. Estas aparecem em diversos livros, em particular no livro de Marichev [2].

Propriedade 2.4.5 *[2] A Função Gama pode ser representada como a soma de séries de fracções simples e funções analíticas em todo o seu domínio*

$$\Gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

2.4.2.5 Função Gama e integral de Cauchy-Saalschütz

Propriedade 2.4.6 *[2] Na faixa $-(n+1) < Re\ s < -n$, $n = 0, 1, 2, ...$, a função Gama, $\Gamma(s)$, pode ser representada como um integral de Cauchy-Salschütz*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \right) x^{s-1} dx\ ,\ -(n+1) < Re\ s < -n.$$

2.4.2.6 Função Gama e Função Beta

Propriedade 2.4.7 *[2] A Função Gama, $\Gamma(s)$, está relacionada com a função Beta, pela fórmula*

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{2.4.21}$$

Nota 10 *A função* ***Beta Euler*** é a transformada de Mellin de $(1+x)^{-\rho}$,

$$B(S, \rho - s) = \int_0^\infty (1+\tau)^{-\rho} \tau^{s-1} d\tau. \tag{2.4.22}$$

2.4.2.7 Fórmula de Duplicação

Propriedade 2.4.8 *[2] A Função Gama, $\Gamma(s)$, satisfaz a seguinte* ***fórmula de duplicação***

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \ \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right). \tag{2.4.23}$$

Demonstração. Ver Marichev [2]- Capítulo 2-(2.20). ■

O integral de Euler, tem o valor seguinte,

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \ 0 < Re\ s < 1, \tag{2.4.24}$$

A relação, apresentada na Propriedade 2.4.8, é consequência de (2.4.22), com $\rho = 1$, e tendo em conta o valor do integral de Euler (2.4.24) e a relação (2.4.21) entre as funções B e Γ. Fixando $s = \frac{1}{2}$ em (2.4.23) obtemos a igualdade $\left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2 = \pi$.

Propriedade 2.4.9 *[2] $\frac{1}{\Gamma(s)}$ é uma função analítica em todo o seu domínio, isto é, $\Gamma(s)$ é não nula.*

Demonstração. De facto, de (2.4.23) temos que

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi}\Gamma(s). \tag{2.4.25}$$

O lado direito da igualdade (2.4.25) é analítico para todo o s, porque é o produto de funções analíticas apenas com singularidades removíveis em $s = -n, \ n = 0, 1, 2, ...$

Consequentemente, o lado esquerdo é também analítico, isto é, é uma função analítica em todo o seu domínio e o seu denominador $\Gamma(1-s)$ nunca se anula. ■

2.4.2.8 Fórmula de multiplicação de Gauss e Legendre

Propriedade 2.4.10 *[2] A função Gama satisfaz a fórmula de multiplicação de Gauss e Legendre*

$$\Gamma(ms) = m^{ms-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-m}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(s+\frac{k}{m}\right), m = 2, 3, 4, ..., \tag{2.4.26}$$

Demonstração. Ver Marichev [2]- Capítulo 3-(3.16). ■

2.4.2.9 Fórmula de duplicação de Legendre

Nota 11 *A fórmula de multiplicação de Gauss e Legendre (2.4.26), para $m = 2$, é a fórmula de duplicação de Legendre*

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right). \tag{2.4.27}$$

Propriedade 2.4.11 *[2]*

A Função Gama é, unicamente, definida como a solução, diferenciável, do sistema de equações funcionais (2.4.16) e (2.4.27).

Demonstração. Ver Marichev [2]- Capítulo 3. ■

2.4.2.10 Fórmula de Stirling

Propriedade 2.4.12 *[2] Para $|s| \to \infty$ a Função Gama e o factorial têm uma extensão assintócica dada pela Fórmula de Stirling*

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}\left[1+\frac{1}{12s}+O(s^{-2})\right], |\arg s| < \pi, n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1+O(\frac{1}{n})\right].$$

Demonstração. Ver Marichev [2]- Capítulo 3-(3.22). ■

Propriedade 2.4.13 *[2]*

Para $|s| \to \infty$ e $|y| \to \infty$ temos

$$\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)} = s^{a-b}\left[1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2s} + O(s^{-2})\right], |\arg s| < \pi,$$

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi}|y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\pi/2|y|}\left[1 + O(1/y)\right], |y| \to \infty,$$

onde x e y são variáveis reais.

Demonstração. Este resultado prova-se usando a Fórmula de Stirling, ver Marichev [2]- Capítulo 3-(3.23) e (3.34). ■

2.4.2.11 Integral Euleriano e Função Beta

Propriedade 2.4.14 *[2] A função Beta pode ser relacionada com a funçao Gama por (2.4.21). Além disso a função Beta (2.4.22), pode ser representada por um integral Euleriano do primeiro tipo*

$$B(s,b) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{b-1}dx, Re\ s > 0, Re\ b > 0.$$

Demonstração. Ver Marichev [2]. ■

Nota 12 *A função Gama, além das propriedades apresentadas, tem outras propriedades que podem ser encontradas em diversos livros e na maioria dos casos encontram-se adaptadas ás necessidades das áreas em que é usada.*

As propriedades básicas da função Gama são usadas na demonstração do teorema de Slater, que permite calcular o valor de $\mathscr{M}(x)$ quando a sua transformada de Mellin, $\mathscr{M}^*(x)$, é igual à razão de produtos de funções-Γ. Não apresentamos esta demonstração, apenas o enunciado do teorema (Teorema 2.6.1).

2.5 Funções do Tipo Hipergeométrico

Neste subcapítulo introduzimos a noção de função do tipo hipergeométrico. Esta noção terá como complemento o subcapítulo 2.8, onde apresentamos algumas funções especiais deste tipo.

2.5.1 Série hipergeométrica generalizada

Definição 2.5.1 *[2] Considere-se a série cujos coeficientes contêm a expressão* $(a)_k$*, definida em (2.4.17)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k(a_2)_k...(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k...(b_q)_k} \frac{z^k}{k!} =_p F_q\left((a);(b);z\right) \equiv_p F_q\left(\begin{array}{c} (a) \\ (b) \end{array} ;z\right) \equiv_p F_q\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_p \\ b_1, b_2, ..., b_q \end{array} ;z\right), \tag{2.5.28}$$

com $(a) = a_1, a_2, ..., a_p$ *e* $(b) = b_1, b_2, ..., b_q$.

Esta série que contém p parâmetros no numerador e q no denominador diz-se **série hipergeométrica generalizada** de ordem q e classe $q - p + 1$.

Assim,

$$_0F_0(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad e \quad _1F_0(a;z) = (1-z)^{-a}. \tag{2.5.29}$$

A última igualdade relaciona a função $_pF_q$ com a soma da série geométrica generalizada, justificando-se, assim, o nome série hipergeométrica generalizada.

Usando o critério de Raabe pode-se estabelecer a **convergência da série** (2.5.28).

A série é convergente para:

$$\begin{cases} qualquer z & \text{se} \quad p \leq q; \\ |z| < 1 & \text{se} \quad p = q+1; \\ |z| = 1 & \text{se} \quad p = q+1, \sigma = Re \ \sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{k=1}^{q} b_k < 0; \\ |z| = 1, z \neq 1 & \text{se} \quad p = q+1, 0 \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

A série é divergente para:

$$\begin{cases} z \neq 0 & \text{se} \quad p > q+1; \\ |z| > 1 & \text{se} \quad p = q+1; \\ |z| = 1 & \text{se} \quad p = q+1, \sigma \geq 1. \end{cases}$$

Se o parâmetro do numerador $a_j = -n (n = 0, 1, 2, ...)$, então a série (2.5.28) reduz-se a um polinómio de grau n; em particular temos

$$_pF_q\left(0, a_2, a_3, ..., a_p; b_1, b_2, ..., b_q; z\right) =_p F_q\left((a);(b);0\right) = 1.$$

Se o parâmetro do denominador $b_k = -l (l = 0, 1, 2, ...)$, então a série não tem sentido, visto que o denominador de todos os termos desaparece.

2.5.2 Definição de Função do Tipo Hipergeométrico

Definição 2.5.2 *[2] Qualquer função $u(z)$ que pode ser representada numa vizinhança de $z = 0$, como combinação linear de funções, da forma*

$$E\left((a),(b),\alpha\right) z^{\alpha}\ {}_pF_q\left((a);(b);hz^{v}\right)$$

diz-se ***função do tipo hipergeométrico*** *da variável z, (onde $E\left((a),(b),\alpha\right)$ é uma função dos parâmetros (a),(b) e α, $v > 0$ e h é uma constante) e, também, qualquer função que pode ser obtida continuamente desta combinação linear por passagem ao limite em relação aos parâmetros.*

2.5.3 Exemplos de Funções do Tipo Hipergeométrico

Existem muitos exemplos de funções do tipo hipergeométrico. Temos $z^{\alpha}e^{hz}$;$(1-z)^{-a}$; $\ln z$; $\sin^{-1} z$; $\tan^{-1} z$; $(1+(1-z)^{\frac{1}{2}})^{-a}$ e combinações lineares destas. A conclusão de que $u(z) = \ln z$ pertence a esta classe vem da igualdade $\ln z = (z^{\alpha}-1)\alpha^{-1}$ e da segunda parte da definição (2.5.2). As funções seguintes, que serão apresentadas no subcapítulo 2.8, são do tipo hipergeométrico. A função hipergeométrica ou Função de Gauss ${}_2F_1\left(a;b;c;z\right)$ que se denota simplesmente por $F\left(a;b;c;z\right)$. A função hipergeométrica degenerada ou Função de Kummer ${}_1F_1\left(a;c;z\right)$ também denotada pelo Símbolo de Humbert $\Phi\left(a;c;z\right)$. A função ${}_0F_1\left(c;z\right)$ que se reduz à Função de Bessel.

2.6 Teorema de Slater

Como vimos, podemos utilizar a tabela da transformada de Mellin para avaliar integrais e os seus domínios de convergência. Este processo resulta numa regra para encontrar a função $K(x)$. No entanto quando $K(x)$ pertence à classe das funções hipergeometricas, isto é, em particular, quando a transformada de Mellin $K^*(x)$ é o produto da razão de funções Gama de s por constantes, $K^*(x)$ tem a estrutura

$K^*(x) = c\prod_{i,j,k,l}\dfrac{\Gamma(ai+s)\Gamma(bj-s)}{\Gamma(c_k+s)\Gamma(d_e-s)}$, c constante e $\Gamma(s)$ a função Gama de Euler.

Neste caso, a transição de $K^*(x)$ para $K(x)$ é alcançada pela aplicação do teorema de Slater, ou pela teoria dos resíduos, base pela qual este teorema é provado.

2.6.1 Notação

Antes de enunciar o Teorema de Slater vamos apresentar a notação. Foram usadas as notações

$$\Gamma\left[\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_A \\ b_1, b_2, ..., b_B \end{array}\right] = \Gamma[(a);(b)] = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)...\Gamma(a_A)}{\Gamma(b_1)...\Gamma(b_B)},$$

onde o produto vazio é substituido por 1.

$$(a) + s = a_1 + s,\ a_2 + s, ..., a_A + s,$$

$$(b)' - b_k = b_1 - b_k, ..., b_{k-1} - b_k, b_{k+1} - b_k, ..., b_B - b_k,$$

$$\sum{}_A(z) = \sum_{j=1}^{A} z^{a_j}\Gamma\left[\begin{array}{ll} (a)' - a_j, & (b) + a_j \\ (c) - a_j, & (d) + a_j \end{array}\right] \times {}_{B+C}F_{A+D-1}\left(\begin{array}{l} (b) + a_j, 1 + a_j - (c); (-1)^{C-A} z \\ 1 + a_j - (a)', (d) + a_j \end{array}\right), \tag{2.6.30}$$

$$\sum{}_B(1/z) = \sum_{k=1}^{B} z^{-b_k}\Gamma\left[\begin{array}{ll} (b)' - b_k, & (a) + b_k \\ (d) - b_k, & (c) + b_k \end{array}\right] \times {}_{A+D}F_{B+C-1}\left(\begin{array}{l} (a) + b_k, 1 + b_k - (d); \dfrac{(-1)^{D-B}}{z} \\ 1 + b_k - (b)', (c) + b_k \end{array}\right), \tag{2.6.31}$$

com $|\arg z| < \pi$.

Se as séries convergem, então $\sum_A (x)$ e $\sum_B \left(\frac{1}{x}\right)$ são funções do tipo Hipergeométrico, e transformam-se uma na outra se trocarmos o vector complexo A-dimensional $(a) = a_1, a_2, ..., a_A$, e os vectores similares B-dimensional, (b), C-dimensional, (c) e D-dimensional, (d), e substituirmos z por $1/z$. Estas funções dependem analiticamente dos parâmetros complexos (a), (b), (c) e (d) e da variável z. Se certos parâmetros dos vectores (a)(ou (b)) são iguais ou diferem de um inteiro, então os vectores $(a)' - a_j$ $((b)' - b_k)$ contêm componentes nulas ou inteiras negativas e então $\Gamma(-n) = \infty, n = 0, 1, 2, ...$, nas funções $\sum_A(z)$ e $\sum_B \left(\frac{1}{z}\right)$ podem ser indeterminações do tipo $\infty - \infty$ (se as singularidades dos numeradores dos coeficientes gama em (2.6.30) e (2.6.31) não se anulam nos denominadores correspondentes). Mas nos casos logarítmicos as indeterminações são removíveis por continuidade . Assim, nesse caso os valores $\sum_A(z)$ e $\sum_B \left(\frac{1}{z}\right)$ significam os limites correspondentes das funções regulares $\sum_A(z)$ e $\sum_B \left(\frac{1}{z}\right)$ quando os seus parâmetros tendem continuamente para os valores singulares em questão (ver o livro de Marichev [2]-Capítulo 4).

Nota 13 *Sem a condição $|\arg z| < \pi$, as funções $\sum_A(z)$ e $\sum_B(1/z)$ têm, em geral, valores multiplos. Assim assumimos que $|\arg z| < \pi$, para valores isolados e portanto em muitos casos esta condição pode ser removida se ñão tratarmos funções que tenham valores multiplos.*

2.6.2 Enunciado do Teorema

Prova-se o teorema seguinte, dito **Teorema de Slater**

Teorema 2.6.1 *[2] Seja*

$$\mathscr{K}^*(s) = \Gamma \left[\begin{array}{ccc} (a)+s & , & (b)-s \\ \\ (c)+s & , & (d)-s \end{array} \right], \tag{2.6.32}$$

onde os vectores (a), (b), (c) e (d) têm respectivamente, A, B, C e D componentes a_j, b_k, c_l e d_m. Se são satisfeitas as seguintes condições

$$i) - Re\ (a_j) < Re\ s < Re\ (b_k)\ ,\ j = 1, 2, ..., A\ \ ,\ k = 1, 2, ..., B; \tag{2.6.33}$$

$$ii) \begin{cases} A + B > C + D\ , \\ A + B = C + D\ , & Re\ s(A + D - B - C) < -Re\ v; \\ A = C, B = D\ , \quad Re\ \ v < 0, & v = \sum_{j=1}^{A} a_j + \sum_{k=1}^{B} b_k - \sum_{l=1}^{C} c_l - \sum_{m=1}^{D} d_m; \end{cases} \tag{2.6.34}$$

então para s, assim definido, temos que

$$\mathscr{K}^*(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \sum\nolimits_A (x)dx & se \quad A + D > B + C, \\ \displaystyle\int_0^1 x^{s-1} \sum\nolimits_A (x)dx + \int_1^\infty x^{s-1} \sum\nolimits_B \left(\frac{1}{x}\right) dx, & A + D = B + C, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \sum\nolimits_B \left(\frac{1}{x}\right) dx & se \quad A + D < B + C, \end{cases} \tag{2.6.35}$$

$\sum_A(1) = \sum_B(1)$ *se* $A + D = B + C,\ Re\ v + C - A - 1 < 0, A \geq C.$

Demonstração. A demonstração está no livro [2] e tem como base o teorema clássico de Cauchy. ■

Corolário 2.6.1 *[2] Quando são verificadas as condições do Teorema de Slater (2.6.33) e (2.6.34), a imagem da inversa da função (2.6.32) é a função Hipergeométrica $\mathscr{K}(x)$ que é dada por uma das seguintes expressões*

$$\mathscr{K}(x) = \begin{cases} \sum_A (x) \; para \; x > 0, & se \quad A+D > B+C, \\ \sum_A (x) \; para \; 0 < x < \; ou \; \sum_B \left(\frac{1}{x}\right) \; para \; x > 1, & se \quad A+D = B+C, \\ \sum_B \left(\frac{1}{x}\right) \; para \; x > 0, & se \quad A+D < B+C, \end{cases} \tag{2.6.36}$$

$$\mathscr{K}(1) = \sum_A (1) = \sum_B (1) \; se \; A+D = B+C, \; Re \; v+C-A-1 < 0, A \geq C. \tag{2.6.37}$$

Em conclusão, ao aplicar o Teorema de Slater, calculamos os resíduos respectivos das funções Gama, dependendo da relação entre os parâmetros.

Nota 14 *As condições do teorema de Slater asseguram, pelo menos condicionalmente, a convergência dos integrais (2.6.35), como integrais impróprios, são, em geral, divergentes, mas como casos individuais existem no sentido do valor principal.*

2.6.3 Exemplos de Aplicação do Teorema de Slater

Exemplo 2.6.1 *Este exemplo é, também, o primeiro passo da demostração do teorema de Slater. É uma caso mais simples, o caso em que $A = B = 1$, $C = D = 0$. Isto leva-nos à função de potências $\mathscr{K}(x) = \Gamma(s)(1+x)^{-\rho}$. Para tal calculamos o integral de linha*

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma[s, \rho - s] x^{-s} ds, x > 0. \tag{2.6.38}$$

Se considerarmos L como sendo a recta paralela ao eixo imaginário, $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, então o integral $I[\Gamma(\rho)]^{-1}$, para $0 < Re \; s = \gamma < Re \; \rho$, toma um dos valores

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a)_k z^k / k! = (1-z)^{-a} = f(z), \; |z| < 1, \tag{2.6.39}$$

ou

$$f(z) = (-z)^{-a}(1 - 1/z)^{-a} = (-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k z^{-k} / k!, \; |z| > 1, \tag{2.6.40}$$

onde $z = -x$ e $a = \rho$. Do ponto de vista de (2.5.29) isto é completamente consistente com as fórmulas (2.1.5), (2.1.6) e (2.1.7) da transformada de Mellin, e com o Teorema de Slater no caso $A + D = B + C$. O integrando em (2.6.38) é analítico em todo o plano complexo s, excepto nos polos de primeira ordem da função-Γ, em $s = -n, s = \rho + n, n = 0, 1, 2, ...$ Da propriedade (2.4.4) da função-Γ, os resíduos de $\Gamma[s, \rho - s]x^{-s}$, nestes polos são, respectivamente iguais a

$$(-1)^n/n!\Gamma(\rho + n)x^n, \Gamma(\rho + n)(-1)^{n+1}/n!x^{-\rho-n}. \tag{2.6.41}$$

Tomando L como um contorno simples, L_{-N}, contendo um segmento da recta vertical $Re\ s = \gamma$, que separa os pontos $(0, 0)$ e $(Re\ \rho, 0)$, $0 < \rho < Re\ \rho$, e circunda apenas un certo número finito N dos polos à esquerda $s = -n, n = 0, 1, ..., N$. Então pelo teorema dos resíduos, o integral (2.6.38) é igual à soma dos primeiros N resíduos (2.6.41) nos polos dentro do contorno. Fazendo $N \to \infty$ neste resultado e assumindo que o contorno L_{-N} extendido pela adição dos polos $s = -n$ ao ramo esquerdo $L_{-\infty}$, não está de qualquer forma perto destes polos para um pequena distância $\epsilon > 0$. Então no limite obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{-\infty}} \Gamma[s, \rho - s]x^{-s}ds = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Gamma(\rho+n)x^n/n! = \Gamma(\rho)(1+x)^{-\rho}. \tag{2.6.42}$$

O limite do lado direito existe (isto é, a série é convergente), se $|x| < 1$. Então pelo teorema sobre a passagem ao limite em igualdades, segue que para $|x| < 1$ o integral ao longo do ramo infinito $L_{-\infty}$ converge. Este ramo, que começa no infinito, no terceiro quadrante, e acaba no infinito, no segundo, pode ser arbitrário; em particular, podemos expandi-lo na recta $Re\ s = \gamma, 0 < \gamma < Re\ \rho$, conforme requerido em (2.1.6), enquanto preservamos a convergência do integral. Se para L tomarmos o contorno similar L_N circundando os polos do lado direito $s = \rho + n, n = 0, 1, 2, ..., N$, então, do mesmo modo, temos no limite a fórmula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{+\infty}} \Gamma[s, \rho - s]x^{-s}ds = -x^{-\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\rho + n)(-x)^{-n}/n! = -\Gamma(\rho)(1 + x)^{-\rho}, \tag{2.6.43}$$

onde $|x| > 1,\ x > 0$. Por expansão de $L_{+\infty}$ à recta $Re\ s = \gamma$, referida anteriormente, e dando uma direcção a este circuito deduzimos de novo a igualdadde que provamos.

Note-se que neste caso as séries (2.6.42) e (2.6.43) (com o sinal menos) podem ser extendidas a outra como função de x, mas em geral, as funções $\sum_A(z)$ e $\sum_B(1/z)$ não podem ser analiticamente extendidas a outras (se $A + B = C + D$).

Nota 15 *O lado direito de (2.6.42) depende analiticamente do parámetro ρ, consequentemente, a restrição $Re\ \rho > 0$ anterior a (2.6.42) é desnecessário.*

Pode-se fazer uma extensão analítica da igualdade (2.6.42) a qualquer $\rho \neq 0, -1, -2, ...,$ *se removermos a condição de separação dos polos do lado esquerdo e do lado direito* $s = -n,\ \rho+n,\ n = 0, 1, 2, ...,$ *representados pela recta* $Re\ s = \gamma$. *Por continuição analítica é natural considerar o ramo* L_∞ *como sendo qualquer circuito aberto, mas que separa todos os polos à esquerda dos polos à direita. Isto só é possível sob a condição* $\rho = 0, -1, -2, ...$ *Neste caso a função* $(1+x)^{-\rho}$ *não se reduz a um polinómio.*

Nota 16 *Se fixarmos* $\rho = 0$ *no integral (2.6.42) e tomando o contorno* $L_{-\infty}$ *que separa os pontos* $s = -1$ *e* $s = 0$ $(-1 < \gamma < 0)$, *então devemos remover da soma (2.6.42) o primeiro resíduo (o termo de* $n = 0$*) corresponde ao polo* $s = 0$, *e seja* $\rho \to 0$. *Como resultado obtemos por continuidade a série de* $-\ln(1+x), |x| < 1$. *Este caso particular onde polos de séries diferentes coincidem, é também dito logarítmico.*

Exemplo 2.6.2 *Seja* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}-t}\ t^{v-1}\ dt = K(x),\ x > 0$. *Assim, considerando* $K_1(\tau) = e^{-\tau},\ K_2(\tau) = e^{-\tau}\ \tau^v$.

Consultando a tabela da transformada de Mellin, em anexo, podemos encontrar a imagem da primeira função

$$K_1^*(s) = \int_0^\infty e^{-x}\ x^{s-1}\ dx = \Gamma(s) \quad , \quad Re\ s > 0.$$

A imagem da segunda função $e^{-x}x^v$ *é*

$$\begin{aligned} K_2^*(s) &= \int_0^\infty \left(e^{-x}x^v\right)\ x^{s-1}\ dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}x^{(v+s)-1}\ dx \\ &= \Gamma(v+s) \quad , \qquad\qquad Re\ (v+s) > 0. \end{aligned}$$

Multiplicando as imagens obtemos

$$K^*(s) = K_1^*(s)\ K_2^*(s) \ = \ \Gamma(s)\ \Gamma(v+s) \ = \ \Gamma[s\ ,\ s+v],$$

e podemos encontrar a imagem inversa do resultado do produto, o qual é escrito na forma $\Gamma[s\ ,\ s+v]$.

Usamos o teorema de Slater no qual expressamos o valor de $K(x)$ *em termos dos quais conhecemos a imagem* $K^*(s)$ *igual à razão dos produtos das funções Gama. Neste exemplo discutimos as dimensões A, B, C e D e os parâmetros* a_j, b_k, c_t *e* d_m *que, pelo teorema de Slater têm os seguintes valores* $A = 2,\ B = C = D = 0,\ a_1 = 0$ *e* $a_2 = v$. *De* $A+D > B+C$ *e* $A+B > C+D$,

segundo as condições apropriadas, Re $s > 0$, Re $v > 0$, o pedido é dado por $K(x) = \sum_A(x) = x^0\ \Gamma(v)_0\ F_1\ (1-v;x) + x^v\ \Gamma(-v)_0\ F_1(1+v;x)$.

2.7 Integrais de Mellin-Barnes

Definição 2.7.1 *[2] Consideremos o integral ao longo de uma linha L correspondente à transformada inversa de Mellin (2.1.7) de $\mathscr{K}^*(s)$ (no caso $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, Im $z = 0$),*

$$I_L(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma\left[\begin{array}{ll}(a)+s, & (b)-s\\ (c)+s, & (d)-s\end{array}\right] z^{-s}ds. \tag{2.7.44}$$

Se L é uma curva infinita, então o integral diz-se ***Integral de Mellin-Barnes.***

2.8 Algumas Funções Especiais do Tipo Hipergeométrico

2.8.1 Função hipergeométrica de Gauss

Agora, vamos estudar a função hipergeométrica de Gauss um pouco mais geral, que foi estudada por Gauss (1813). Esta função tem três pontos singulares regulares $z = 0, 1$ e ∞ e é definida no disco unitário como soma da série (2.5.28) com $p = 2$ e $q = 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k =_2 F_1\left(a;b;c;z\right) \equiv F\left(a;b;c;z\right).$$

Através do critério de Raabe provamos que a série é absolutamente convergente para $|z| < 1$. E absolutamente e uniformemente convergente no círculo $|z| = 1$ se $Re(c-a-b) > 0$. Se $-1 < Re(c-a-b) \leq 0$, então a série diverge em $z = 1$ enquanto permanece condicionalmente convergente nos outros pontos do círculo $|z| = 1$. Se $Re(c-a-b) \leq -1$, então a série é divergente neste círculo.

Mas pelo Teorema de Slater podemos introduzir uma definição equivalente da função da Gauss em relação ao integral de Mellin-Barnes (1908), igual a (2.7.44) com $A = 1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1,\ a_1 = 0,\ b_1 = a,\ b_2 = b,\ d_1 = c$, e $L = L_{i\infty}$ (com $-z$ em vez de z), temos

$$\Gamma\left[\begin{array}{c}a,b\\ c\end{array}\right]F(a,b;c;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma\left[\begin{array}{r}s, a-s, b-s\\ c-s\end{array}\right](-z)^{-s}ds, \tag{2.8.45}$$

$$|\arg(-z)| < \pi,\ |z| < 1.$$

Para manifestar a natureza das singularidades em $z = 1$ é conveniente usar a representação analítica da função de Gauss como *Integral de Euler*

$$F(a,b;c;z) = \Gamma \left[\begin{array}{c} c \\ b, c-b \end{array} \right] \int_0^1 \tau^{b-1}(1-\tau)^{c-b-1}(1-\tau z)^{-a} d\tau, \qquad (2.8.46)$$

$$Re\ c > Re\ b > 0,\ |\arg(1-z)| < \pi,\ |z| < \infty.$$

A representação (2.8.46) permite-nos deduzir a *Fórmula de Bolza* (em função do parâmetro a)

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right),$$

a *Fórmula da Transformação*

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F\left(c-a, c-b; c; z\right),$$

e obter o *valor da função de Gauss* em $z = 1$

$$F(a,b;c;z) = \Gamma \left[\begin{array}{c} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{array} \right],$$

com

$$Re\ (c-a-b) > 0,\ c \neq 0, -1, -2, ...$$

A igualdade (2.8.45) permite-nos deduzir a representação da *função de Kummer* em termos do *integral de Mellin-Barnes* seguinte

$$F(a,b;c;1-z) = \Gamma \left[\begin{array}{c} c \\ a, b, c-a, c-b \end{array} \right] \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\ s, s+c-a-b, a-s, b-s \ \right] (z)^{-s} ds,$$

$$|\arg(z)| < \pi,\ |z| < \infty,$$

onde a integração é feita ao longo de uma linha L de $-i\infty$ a $i\infty$ com a única condição de separar os polos à esquerda $s = -n, s = a+b-c-n, n = 0, 1, 2, ...$, dos polos à direita $s = a+n, s = b+n, n = 0, 1, 2, ...$

2.8.2 Função hipergeométrica degenerada e Função de Bessel

2.8.2.1 Função de Kummer

A função hipergeométrica degenerada é, normalmente, definida como a soma da *série de Kummer* (1837) seguinte

$$ {}_1F_1(a;c;z) \equiv \Phi(a,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} $$

Esta série corresponde ao caso em que $p = q = 1$ da série geral (2.5.28), é convergente para todo $|z| < 1$, e tem uma singularidade essencial no infinito.

De acordo com o teorema de Slater, a *função de Kummer* pode também ser definida em termos do *integral de Mellin-Barnes*

$$ \Gamma \left[\begin{array}{c} a \\ c \end{array} \right] {}_1F_1(a;c;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{array}{c} s, a-s \\ c-s \end{array} \right] (-z)^{-s} ds, $$

$$ |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}, a \neq 0, 1, 2, ..., $$

onde a integração é ao longo de um caminho que separa os polos da esquerda $s = 0, -1, -2, ...$, dos polos da direita $s = a, a+1, ...$, e o ramo $L_{-\infty}$ é admissível.

2.8.2.2 Função de Whittaker

A função $\Psi(a,c;z)$ foi introduzida por Tricomi em 1927. Ela é solução especial da equação de Kummer independente da solução especial ${}_1F_1(a;c;z)$. A representação integral de $\Psi(a,c;z)$ na forma de *Integral de Tricomi* é

$$ \Psi(a,c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, Re\ a > 0, Re\ z > 0, $$

A *função de Whittaker* pode ser expressa em termos de ${}_1F_1$ e Ψ, da seguinte forma

$$ M_{\chi,\mu}(z) = e^{-z/2} z_1^{c/2} F_1(a;c;z), a = \frac{1}{2} + \mu - \chi, c = 2\mu + 1, $$

$$ W_{\chi,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{c/2} \Psi(a,c;z) $$

Nota 17 *Vejamos alguns casos especiais de funções hipergeométricas degeneradas e funções de Tricomi:*

- e^z
- *As funcões de Bessel:* $J_\nu(z)$; $I_\nu(z)$; $H_\nu^{(j)}(z)$; $K_\nu(z)$; $Y_\nu(z)$
- *As funções integrais exponenciais e logarítmicas:* $Ei(z)$; $Ei(z)$; $li(z)$
- *As funções integrais seno e coseno:* $Si(z)$; $si(z)$; $Ci(z)$
- *As funções de erro:* $Erf(z)$; $Erfc(z)$
- *Os integrais de Fresnel:* $C(z)$; $S(z,\alpha)$; $C(z,\alpha)$
- *As funções de Gama incompletas:* $\gamma(a,z)$; $\Gamma(a,z)$
- *As funções parabólicas cilindricas* $D_\nu(z)$
- *Os polinómios ortogonais de Hermite e Laguerre:* $H_N(z)$; $L_n^\alpha(z)$

As fórmulas relevantes são dadas na lista de símbolos.

2.8.2.3 Função de Bessel

A função de Bessel define-se pela série seguinte

$$ {}_0F_1(c;z) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{z^k}{(c)_k k!} = \lim_{a\to\infty} {}_1F_1(a;c;z/a), $$

que representa uma função analítica em todo o seu domínio. Esta série pode ser obtida do teorema de Slater com A=D=1 e B=C=0,

$$ \frac{1}{\Gamma(c)}\ {}_0F_1(c;-z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{-\infty}} \Gamma\left[\begin{array}{c} s \\ c-s \end{array}\right] z^{-s} ds. \tag{2.8.47} $$

O contorno esquerdo $L_{-\infty}$ circunda os polos à esquerda $s = 0, -1, -2, ...$ (para $c \neq 0, -1, -2, ...$). Este contorno só pode ser extendido a um contorno $L_{i\infty}$, de $\gamma - i\infty$ a $\gamma + i\infty$, quando z é real e $z = x > 0$, e quando $2\gamma < Re\ c$ (ver o livro de Marichev [2]). Se $Re\ c > o$, então para $L_{i\infty}$ podemos considerar a linha recta $Re\ s = \gamma$, onde $0 < \gamma < Re\ c/2$.

O Termo principal da expansão da função (2.8.2.3) no infinito é, seguundo Marichev [2]

$$ [\Gamma(c)]^{-1}\ {}_0F_1(c;-z) \sim \pi^{-1/2} z^{1/4-c/2} \cos(2\sqrt{z} - \pi c/2 + \pi/4), |\arg z| < 2\pi. \tag{2.8.48} $$

As fórmulas (2.8.47) e (2.8.48), com $c = 0, -1, -2, ...$, devem ser entendidas no sentido de limite, o seu lado esquerdo foi definido por continuidade.

As *Funções de Bessel de ordem complexa* ν são definidas por

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1; \frac{-z^2}{4}\right), \quad (2.8.49)$$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin\ \pi\gamma} \left[J_\nu(z) \cos\ \pi\nu - J_{-\nu}(z)\right], \quad (2.8.50)$$

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \quad (2.8.51)$$

$$H\ {}_\nu^{(j)}(z) = J_\nu(z) - (-1)^j\ iY_\nu(z), j = 1, 2, ..., \quad (2.8.52)$$

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ze^{i\pi/2}), \quad (2.8.53)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\ \pi\nu} \left[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right], \quad (2.8.54)$$

$$K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z)\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \quad (2.8.55)$$

$J_\nu(z)$ diz-se *função de Bessel do primeiro tipo,* $Y_\nu(z)$ *função de Bessel do Segundo tipo ou função de Neumann* (ás vezes é denotada por $N_\nu(z)$). $H\ {}_\nu^{(j)}(z)$ diz-se *função de Bessel do terceiro tipo ou função de Hankel. As restantes duas funções* ($I_\nu(z)$ e $K_\nu(z)$) dizem-se *Funções de Bessel modificadas:* $I_\nu(z)$ é a *função Modificada de Bessel do primeiro tipo de um argumento imaginário,* e a $K_\nu(z)$ também se chama *função Macdonald's.*

Para distinguir os ramos dos valores singulares das funções de (2.8.49 a 2.8.55), o corte é feito, usualmente, de $-\infty$ a 0 ao longo do eixo $y = 0$, isto é, assumido que $|\arg\ z| < \pi$.

Todas as funções apresentadas são definidas a partir da série ${}_0F_1(c; z)$, e são solução especial de duas equações de Bessel: a equação básica (cujas soluções são $J_{\pm\nu}(z)$, $Y_{\pm\nu}(z)$ e $H\ {}_\nu^{(j)}(z)$) e a equação modificada (cujas soluções são $I_{\pm\nu}(z)$ e $K_\nu(z)$). Para obter informação mais detalhada sobre este assunto basta consultar , por exemplo, o livro de Marichev [2].

Por (2.8.47), $J_\nu(z)$ pode ser definido de forma equivalente por um *integral de Mellin-Barnes*

$$J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma \begin{bmatrix} (\nu+s)/2 \\ 1 + (\nu - s)/2 \end{bmatrix} \left(\frac{z}{2}\right)^{-s} ds, z = x > 0, -Re\ \gamma < \gamma < 1. \quad (2.8.56)$$

A restrição de γ e a condição de z ser real podem ser ultrapassadas se a integração é feita ao longo do ramo esquerdo $L_{-\infty}$ que circunda os polos $s = -\gamma - 2n, n = 0, 1, 2, ...$

Analogamente, $I_\nu(z)$ pode ser definido pelo integral

$$I_\nu(z) = \frac{1}{4i\ \sin\,(\pi c)} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{array}{l} (s+\nu)/2 \\ 1+(\nu-s)/2, c+(\nu+s)/2, 1-c-(\nu+s)/2 \end{array} \right] \times \tag{2.8.57}$$
$$\times \left(\frac{z}{2}\right)^{-s} ds, |z| < \infty,$$

onde c é arbitrário, e o ramo $L_{-\infty}$, que circunda os polos $s = -\nu - 2n$, com $n = 0, 1, 2, ...$, não pode ser extendido ao contorno L_∞. Quando $c = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, o lado direito deve ser definido por continuidade.

Substituindo (2.8.56) na definição (2.8.49) e usando a fórmula de duplicação (2.4.23), pode-se deduzir o integral de Mellin-Barnes para $Y_\nu(z)$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{array}{l} (\nu+s)/2, (s-\nu)/2 \\ (1-\nu+s)/2, (1+\nu-s)/2 \end{array} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{-s} ds,$$

onde o ramo $L_{-\infty}$ circunda os polos $s = \pm\nu - 2n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Além disso, para $|\arg z| < \pi$ tem-se a seguinte representação integral da função de Macdonald

$$K_\nu(2\sqrt{z}) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma - i\ \infty}^{\gamma + i\ \infty} \Gamma\left[\nu/2 + s, -\nu/2 + s\right] z^{-s} ds, \gamma > |Re\ \nu|/2, \tag{2.8.58}$$

onde o contorno ou linha de integração também pode ser tomada como sendo o ramo $L_{-\infty}$ cercando os polos $s = \pm\nu/2 - n, n = 0, 1, 2, ...$

O comportamento da função de Bessel quando $z \to 0$ pode ser estabelecido pelas fórmulas seguintes

$$J_\nu(z) = O(z^\nu); I_\nu(z) = O(|z|^{Re\ \nu}); Y_\nu(z) = O(|z|^{-|Re\ \nu|}), \nu \neq 0;$$
$$K_\nu(z) = O(|z|^{-|Re\ \nu|}), \nu \neq 0; Y_0(z) = O(\ln|z|), K_0(z) = O(\ln|z|).$$

As funções de Bessel têm várias representações integrais similares aos integrais de Euler, Laplace e Tricomi.

2.9 Transformada de Laplace de variável real

A transformada de Laplace de variável real é o primeiro operador que vamos tratar como convolução de Mellin.

Consideremos, neste subcapítulo, a seguinte *transformada de Laplace modificada*

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\left\{f(t);x\right\} = g(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{t}} f(t)\frac{dt}{t}, x > 0. \tag{2.9.59}$$

Usando substituições elementares das variáveis e das funções podemos chegar à transformada de Laplace (1.1.1), conforme vimos na secção 2.2.2. Podemos tratar o operador (2.9.59) como convolução de Mellin (2.2.9), também escrita por (2.2.11), onde $\mathscr{K}_1(t) = e^{-t}$ e $\mathscr{K}_2(t) = f(t)$. Sendo a fórmula (2.2.12) obtemos que a transformada de Mellin da convolução (2.2.11) é igual ao produto das convoluções de Mellin das funções $\mathscr{K}_1$ e $\mathscr{K}_2$, ou seja, $\mathscr{K}_1^*$ e $\mathscr{K}_2^*$. Agora, usando a fórmula da inversão da transformada de Mellin (2.1.7) e tendo algumas condições imediatamente escrevemos que a nossa convolução é

$$(\mathscr{K}_1 \circ \mathscr{K}_2)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathscr{K}_1^*(s)\mathscr{K}_2^*(s)x^{-s}ds. \tag{2.9.60}$$

Mas, voltando à transformada de Laplace (2.9.59) e observando que a transformada de Mellin da função e^{-t} é a função $\Gamma(s)$ aplicamos a fórmula (2.9.60) e escrevemos o operador de Laplace (2.9.59) da seguinte maneira

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s)f^*(s)x^{-s}ds, \tag{2.9.61}$$

onde $f^*(s)$ é a transformada de Mellin da função $f(t)$ e γ um parámetro real.

Suponhamos que o produto $f^*(s)\Gamma(s)$ é uma função integrável na recta vertical $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, ou seja, $f^*(s)\Gamma(s) \in L_1\left(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty\right)$ (espaço de Banach), o que significa que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\gamma + it)f^*(\gamma + it)|dt < \infty. \tag{2.9.62}$$

Voltando à representação (2.9.61), temos a seguinte estimativa da transformada de Laplace

$$|g(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\gamma + it)f^*(\gamma + it)|x^{-\gamma}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^{\gamma}g(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\gamma + it)f^*(\gamma + it)|dt, \tag{2.9.63}$$

o que significa que a transformada de Laplace da função $g(x)$ é uma função contínua e $x^{\gamma}g(x)$ é limitada para todo $x > 0$. Portanto obtemos uma transformada de Laplace de variável positiva que envia funções f, com transformada de Mellin no espaço (2.9.62), para funções contínuas g, tal que $x^{\gamma}g(x)$ são limitadas.

Resta obter a *fórmula da inversão da transformada de Laplace* . Como a fórmula (2.9.61) representa uma transformada de Mellin do produto $\Gamma(s)f^*(s)$, então assumimos que $g(x)x^{\gamma-1}$ também é uma função integrável sobre a recta $\mathbb{R}_+$, o que implica que existe transformada de Mellin $g^*(s)$, ou seja, de (2.9.61) e obtemos a seguinte relação

$$g^*(s) = \Gamma(s)f^*(s). \tag{2.9.64}$$

Resolvemos esta equação algébrica (2.9.64) relativamente à função $f^*(s)$ e obtemos

$$f^*(s) = \frac{g^*(s)}{\Gamma(s)}. \tag{2.9.65}$$

Agora, aplicamos a transformada inversa de Mellin (2.1.7) à equação (2.9.65), e, obtemos a *fórmula de inversão do operador de Laplace* (2.9.59)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{g^*(s)}{\Gamma(s)} t^{-s} ds. \tag{2.9.66}$$

Então podemos concluir o resultado deste subcapítulo, no seguinte teorema

Teorema 2.9.1 ***(Teorema da transformada de Laplace de variável real)*** *Seja f uma função que satisfaz as condições (2.9.62), então o operador de transformada de Laplace (2.9.59) é um operador limitado, e a sua imagem pertence ao espaço das funções contínuas $g(x)$ em $\mathbb{R}_+$, tais que, $x^\gamma g(x)$ são limitadas. Além disso,se $g \in L_1(\mathbb{R}_+; x^{\gamma-1}dx)$, ou seja, $\int_o^\infty |g(x)|x^{\gamma-1}dx < \infty$, então existe transformada de Mellin da função g que satisfaz a relação (2.9.64) e tem lugar a fórmula de inversão (2.9.66).*

Demonstração. Ao longo do desenvolvimento do subcapítulo. ■

Capítulo 3

Aplicação do Método da Transformada de Laplace a uma Classe de Operadores Integrais de Convolução

Neste último capítulo aplicamos o operador da transformada de Laplace de variável real, do subcapítulo 2.9, a alguns operadores integrais de convolução (2.2.9), nomeadamente, vamos considerar a transformada de Hankel, com núcleo a função de Bessel (2.8.56), a transformada de Gauss, com núcleo a função de Gauss (2.8.45) e transformada de Meijer, com núcleo a função de Mcdonald (2.8.58).

3.1 Transformada de Hankel

Consideremos a transformada de Hankel na seguinte forma

$$(J_\nu f)(x) = \int_0^\infty J_\nu \left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right) f(t)\frac{dt}{t}, Re\ \nu > -1. \tag{3.1.1}$$

Como podemos ver este operador tem a forma do operador de convolução de Mellin (2.2.9), onde

$$\mathscr{K}_1(x) = J_\nu\left(2\sqrt{x}\right)\ e\ \mathscr{K}_2(x) = f(x).$$

Podemos tratar este operador (3.1.1), usando a fórmula (2.9.60). Como a fórmula (2.8.56) e usando a propriedade 2.3.5, temos que a função de Bessel $J_\nu\left(2\sqrt{x}\right)$ pode ser representada através do integral de Mellin-Barnes que se segue

$$J_\nu\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}-s\right)} x^{-s} ds. \tag{3.1.2}$$

Portanto, da fórmula (2.9.60) imediatamente obtemos que

$$(J_\nu f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}-s\right)} f^*(s) x^{-s} ds. \tag{3.1.3}$$

Agora, o objectivo deste subcapítulo é decompôr o operador ou transformada de Hankel na composição dos dois operadores de Laplace de variável real. As formas destes operadores de Laplace podem ser obtidas usando resultados do subcapítulo 2.9, nomeadamente definimos os seguintes operadores de Laplace que são modificações das fórmulas (2.9.61) e (2.9.66). Então temos os operadores de Laplace seguintes

$$(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma\left(s+\frac{\nu}{2}\right) f^*(s) x^{-s} ds, \tag{3.1.4}$$

$$(\Lambda_-^{-1} f)_{1+\frac{\nu}{2}}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f^*(s)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}-s\right)} x^{-s} ds. \tag{3.1.5}$$

Observamos que o operador (3.1.4) pode ser escrito como transformada de Laplace da forma (2.9.59). De facto, por definição (2.4.14)

$$\Gamma(s+\frac{\nu}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s+\frac{\nu}{2}-1} dt, Re\ (s+\frac{\nu}{2}) > 0.$$

Substituindo este integral em (3.1.4) e trocando a ordem de integração, admitindo que $f^*(s)$ pertence ao espaço $L_1(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$ obtemos

$$\begin{aligned}(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s) x^{-s} ds \int_0^\infty e^{-t} t^{s+\frac{\nu}{2}-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\nu}{2}-1} dt \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s) \left(\frac{x}{t}\right)^{-s} ds.\end{aligned}$$

O último integral iterado sobre s, através da fórmula de inversão da transformada de Mellin (2.1.7), representa $f\left(\frac{x}{t}\right)$, portanto obtemos

$$(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\nu}{2}-1} f\left(\frac{x}{t}\right) dt,$$

fazendo a mudança de variável $\frac{x}{t} = y$, temos

$$\begin{aligned}(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x) &= \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} f(y) \frac{x}{y^2} dy \\ &= x^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} y^{-\frac{\nu}{2}-1} f(y) dy.\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Então, finalmente, o nosso operador

$$(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x) = x^{\frac{\nu}{2}} \mathscr{L}_{\mathbb{R}} \left\{ y^{-\frac{\nu}{2}} f(y); x \right\}$$

Como na fórmula (3.1.5) a função$-\Gamma$ está no denominador do núcleo do integral nós não podemos escrever o operador $(\Lambda_-^{-1} f)(x)$, na forma (3.1.6). Apesar disso a fórmula (3.1.5) dá o valor da transformada de Mellin do operador $(\Lambda_-^{-1} f)(x)$. Nomeadamente, obtemos

$$\mathscr{M} \left\{ (\Lambda_-^{-1} f)_{1+\frac{\nu}{2}}(x); s \right\} = \frac{f^*(s)}{\Gamma(1 + \frac{\nu}{2} - s)}. \tag{3.1.7}$$

Substituindo (3.1.7), no integral (3.1.3) obtemos

$$(J_\nu f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(s + \frac{\nu}{2}) \mathscr{M} \left\{ (\Lambda_-^{-1} f)_{1+\frac{\nu}{2}}(x); s \right\} x^{-s} ds,$$

usando a fórmula (2.9.61) obtemos

$$(J_\nu f)(x) = (\mathscr{K}_1 \circ \mathscr{K}_2)(x),$$

onde

$$\mathscr{K}_1(t) = e^{-t} t^{\frac{\nu}{2}}; \ \mathscr{K}_2(t) = (\Lambda_-^{-1} f)_{1+\frac{\nu}{2}}(t),$$

ou seja,

$$(J_\nu f)(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}} \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{\nu}{2}} (\Lambda_-^{-1} f)_{1+\frac{\nu}{2}}(t) \frac{dt}{t}.$$

Então finalmente, obtemos que a transformada de Hankel é uma composta dos operadores de Laplace de variável real (3.1.5) e (3.1.6) ou

$$(J_\nu f)(x) = (\Lambda_+)_{\frac{\nu}{2}} (\Lambda_-^{-1})_{1+\frac{\nu}{2}}(f)(x). \tag{3.1.8}$$

Então podemos concluir o resultado deste subcapítulo, no seguinte

Teorema 3.1.1 *Seja f uma função tal que a sua transformada de Mellin*

$$f^*(s) \in L_1\left((\gamma - i\infty, \gamma + i\infty); \frac{ds}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} - s\right)}\right);$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f^*(\nu + it)}{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} - \gamma - it\right)} \right| dt < \infty,$$

então podemos escrever a transformada de Hankel, $(J_\nu f)(x)$ em (3.1.1), na forma (3.1.8), ou seja, como a composta dos operadores de Laplace de variável real (3.1.4) e (3.1.5).

3.2 Transformada com função de Gauss

A transformada de Gauss pode ser escrita da seguinte forma

$$\left(\mathscr{F}_c^{a,b} f\right)(x) = \Gamma\left[\begin{array}{c} a,\ b \\ c \end{array}\right] \int_0^\infty F\left(a, b; c; -\frac{x}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t},\ x > 0. \tag{3.2.9}$$

Este operador tem a forma do operador de convolução de Mellin (2.2.9), onde

$$\mathscr{K}_1(x) = F(a, b; c; -x) \ \text{ e } \mathscr{K}_2(x) = f(x).$$

Podemos tratar este operador (3.2.9), usando a fórmula (2.9.60) e obtemos que

$$\left(\mathscr{F}_c^{a,b} f\right)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a - s)\Gamma(b - s)}{\Gamma(c - s)} f^*(s) x^{-s} ds. \tag{3.2.10}$$

Pretendemos decompôr este operador ou transformada de Gauss na composição de operadores de Laplace de variável real. As formas destes operadores de Laplace podem ser obtidas usando resultados do subcapítulo 2.9, nomeadamente definimos os seguintes operadores de Laplace que são modificações das fórmulas (2.9.61) e (2.9.66). Então temos os operadores de Laplace seguintes

$$(\Lambda_+ f)_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(s) f^*(s) x^{-s} ds, \tag{3.2.11}$$

$$(\Lambda_- f)_a(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(a - s) f^*(s) x^{-s} ds, \tag{3.2.12}$$

$$(\Lambda_- f)_b(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(b - s) f^*(s) x^{-s} ds, \tag{3.2.13}$$

$$(\Lambda_-^{-1}f)_c(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f^*(s)}{\Gamma(c-s)} x^{-s} ds. \tag{3.2.14}$$

Os operadores (3.2.11), (3.2.12) e (3.2.13) podem ser escritos como transformada de Laplace da forma (2.9.59), $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{f(t);x\}$. De facto, como, por definição (2.4.14)

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt, Re\ (s) > 0,$$

$$\Gamma(a-s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{a-s-1}dt, Re\ (a-s) > 0,$$

$$\Gamma(b-s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{b-s-1}dt, Re\ (b-s) > 0,$$

pelo que temos a condição $0 < \gamma < \min(Re\ a, Re\ b)$. Substituindo este integral em (3.2.11) e trocando a ordem de integração, admitindo que $f^*(s)$ pertence ao espaço $L_1(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ obtemos

$$\begin{aligned}(\Lambda_+f)_0(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{-1}dt \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)\left(\frac{x}{t}\right)^{-s} ds.\end{aligned}$$

O último integral iterado sobre s, através da fórmula de inversão da transformada de Mellin (2.1.7), representa $f\left(\frac{x}{t}\right)$, portanto obtemos

$$(\Lambda_+f)_0(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1}f\left(\frac{x}{t}\right)dt,$$

fazendo a mudança de variável $\frac{x}{t} = y$, temos

$$\begin{aligned}(\Lambda_+f)_0(x) &= \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} f(y)\frac{x}{y^2}dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}}f(y)\frac{dy}{y}.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Assim,

$$(\Lambda_+f)_0(x) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{f(t);x\}.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}(\Lambda_- f)_a(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds\int_0^\infty e^{-t}t^{a-s-1}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)\,(xt)^{-s}\,ds.\end{aligned}$$

Usando a fórmula de inversão da transformada de Mellin (2.1.7), temos

$$(\Lambda_- f)_a(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}f\,(xt)\,dt,$$

fazendo a mudança de variável $xt = y$, temos

$$\begin{aligned}(\Lambda_- f)_a(x) &= \int_0^\infty e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}\right)^{a-1} f\,(y)\,\frac{1}{x}dy \\ &= x^{-a}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{x}}y^a\ f(y)\frac{dy}{y}.\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Assim,

$$(\Lambda_- f)_a(x) = x^{-a}\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\left\{y^a\ f(t);x\right\}.$$

E também,

$$\begin{aligned}(\Lambda_- f)_b(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds\int_0^\infty e^{-t}t^{b-s-1}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{b-1}dt\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)\,(xt)^{-s}\,ds \\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{b-1}f(xt)dt.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $xt = y$, temos

$$\begin{aligned}(\Lambda_- f)_b(x) &= \int_0^\infty e^{-\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}\right)^{b-1} f\,(y)\,\frac{1}{x}dy \\ &= x^{-b}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{x}}y^{b-1}\ f(y)dy.\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Assim,

$$(\Lambda_- f)_b(x) = x^{-b}\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\left\{y^b\ f(t);x\right\}. \tag{3.2.18}$$

Como na fórmula (3.2.14) a função$-\Gamma$ está no denominador do núcleo do integral nós não podemos escrever o operador $(\Lambda_-^{-1}f)_c(x)$, na forma (3.2.18). Apesar disso a fórmula (3.2.14) dá o valor da transformada de Mellin do operador $(\Lambda_-^{-1}f)_c(x)$. Nomeadamente, obtemos

$$\mathscr{M}\left\{(\Lambda_-^{-1}f)_c(x);s\right\} = \frac{f^*(s)}{\Gamma(c-s)}. \tag{3.2.19}$$

Substituindo (3.2.19) em (3.2.10), obtemos

$$\left(\mathscr{F}_c^{a,b}f\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,\Gamma(b-s)\,\mathscr{M}\left\{(\Lambda_-^{-1}f)_c(x);s\right\}x^{-s}ds.$$

Então temos que q transformada de Gauss é a composição dos operadores de Laplace de variável real (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) e (3.2.14).

Podemos ver que tem lugar a seguinte representação

$$\left(\mathscr{F}_c^{a,b}f\right)(x) = (\Lambda_+)_0\,(\Lambda_-)_a\,(\Lambda_-)_b\left(\Lambda_-^{-1}\right)_c(f)\,(x)\,. \tag{3.2.20}$$

Vejamos, que esta igualdade se verifica, considerando o operador (3.2.14), sob a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f^*(\nu+it)}{\Gamma(c-\gamma-it)}\right|dt < \infty, \tag{3.2.21}$$

analogamente à condição imposta no teorema 3.1.1.

Assim, podemos escrever que

$$(\Lambda_-)_b\left(\Lambda_-^{-1}\right)_c(f)\,(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(b-s)\,\frac{f^*(s)}{\Gamma(c-s)}x^{-s}ds.$$

Usando a condição (3.2.21) sobre f e como a função $\Gamma(b-s)$ é limitada, quando $0<\gamma<\min(Re\ a, Re\ b)$, logo o produto é integrável e podemos escrever

$$(\Lambda_-)_a\,(\Lambda_-)_b\left(\Lambda_-^{-1}\right)_c(f)\,(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(a-s)\,\Gamma(b-s)\,\frac{f^*(s)}{\Gamma(c-s)}x^{-s}ds.$$

Do mesmo modo e sob as mesmas condições

$$(\Lambda_+)_0\,(\Lambda_-)_a\,(\Lambda_-)_b\left(\Lambda_-^{-1}\right)_c(f)\,(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)\,\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}f^*(s)x^{-s}ds,$$

ou seja, temos a igualdade (3.2.20).

Teorema 3.2.1 *Seja f uma função tal que acontece (3.2.21), então podemos escrever a transformada de Gauss, $\left(\mathscr{F}_c^{a,b} f\right)(x)$, na forma (3.2.20), ou seja, como a composta de operadores de Laplace de variável real (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) e (3.2.14).*

Nota 18 *Não podemos afirmar que na composição dos operadores, anterior, é possível trocar a ordem dos operadores aleatoriamente, mas podemos dizer que aos primeiros três operadores, ou seja, $(\Lambda_+)_0$, $(\Lambda_- f)_a$ e $(\Lambda_- f)_b$ podemos fazê-lo. Isto acontece porque as funções Gama correspondentes estão no numerador e sendo estas funções limitadas e decrescentes para zero não alteram a convergência do integral. No caso do quarto operador estando a função Gama no denominador, a troca de ordem poderá influenciar a convergência do integral, porque a função $\frac{1}{\Gamma(s)}$, de acordo com a fórmula de Stirling, cresce exponencialmente quando $|s| \to \infty$.*

3.3 Transformada de Meijer

A transformada de Meijer é a transformada com núcleo a função de Macdonald (2.8.58), pelo que se pode definir da seguinte forma

$$(\mathscr{K}_\nu f)(x) = \int_0^\infty K_\nu \left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right) f(t)\frac{dt}{t}, Re\ \nu > -1. \tag{3.3.22}$$

Suponhamos que $f \in L_1(\mathbb{R}_+; t^{\gamma-1}dt)$. Então, usando a fórmula (2.8.58) e pelo Teorema de Fubini podemos trocar a ordem de integração e obtemos

$$(\mathscr{K}_\nu f)(x) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+s\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+s\right) f^*(s)x^{-s}ds,\ \gamma > |Re\ \nu|/2. \tag{3.3.23}$$

Pretendemos decompôr o operador ou transformada de Meijer na composição dos dois operadores de Laplace de variável real.

Consideremos os operadores $(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x)$ e $(\Lambda_+ f)_{-\frac{\nu}{2}}(x)$, do tipo (3.1.4).

De (3.1.6) temos que

$$(\Lambda_+ f)_{\frac{\nu}{2}}(x) = x^{\frac{\nu}{2}}\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\left\{y^{-\frac{\nu}{2}} f(y); x\right\},$$

e, também,

$$(\Lambda_+ f)_{-\frac{\nu}{2}}(x) = x^{-\frac{\nu}{2}} \mathscr{L}_{\mathbb{R}} \left\{ y^{\frac{\nu}{2}} f(y); x \right\}.$$

E, obtemos que a transformada de Meijer é uma composta dos operadores de Laplace de variável real $(\Lambda_+)_{\frac{\nu}{2}}$ e $(\Lambda_+)_{-\frac{\nu}{2}}$, ou seja,

$$(\mathscr{K}_\nu f)(x) = \frac{1}{2}(\Lambda_+)_{\frac{\nu}{2}}(\Lambda_+)_{-\frac{\nu}{2}}(f)(x). \tag{3.3.24}$$

Pelo que temos

Teorema 3.3.1 *Seja $f \in L_1(\mathbb{R}_+; t^{\gamma-1}dt)$, ou seja, $\int_0^\infty |f(t)| t^{\gamma-1} dt < \infty$, e, $\gamma > |Re\ \nu|/2$.*

Então podemos escrever a transformada de Meijer, $(\mathscr{K}_\nu f)(x)$ em (3.3.22), na forma (3.3.24), ou seja, como a composta dos operadores de Laplace de variável real $(\Lambda_+)_{\frac{\nu}{2}}$ e $(\Lambda_+)_{-\frac{\nu}{2}}$.

Nota 19 *A condição $f \in L_1(\mathbb{R}_+; t^{\gamma-1}dt)$ é suficiente para escrever o teorema, uma vez que $|f^*(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)| t^{\gamma-1} dt < \infty$, pelo que existe a Transformada de Mellin, $f^*(s) = \int_0^\infty t^{\gamma-1} dt,\ s = \gamma + i\tau$.*

Conclusão

Neste trabalho apresentamos o método de composição de operadores integrais do tipo convolução de Mellin, através de transformadas direitas e inversas de Laplace, com multiplicadores, para estudar propriedades de limitação e inversão nos espaços das funções integráveis. Foi demonstrado que a transformada de Laplace de variável real é o único operador integral que está envolvido nestas composições. Portanto podemos estudar vários operadores do tipo convolução na base da transformada de Laplace. Esta situação foi possível porque transformadas do tipo convolução de Mellin envolvem núcleos com funções especiais do tipo hipergeométrico, cujas transformadas de Mellin são fracções dos produtos de funções Gama. Além disso podemos escrever estas composições dos operadores de Laplace tendo em conta que para cada função Gama no numerador, corresponde uma transformada de Laplace direita, e para cada função Gama no denominador, corresponde uma transformada de Laplace inversa. Este método também pode ser útil para calcular várias classes de integrais impróprios de convolução, com funções especiais do tipo hipergeométrico. Aqui apresentamos o método apenas para três operadores integrais de convolução nomeadamente de Gauss, de Hankel e de Meijer, mas o método pode ser desenvolvido para diversos operadores integrais, com outras funções especiais no seu núcleo.

Apêndice A

Tabela de Transformadas de Laplace

A tabela que apresentamos é uma tabela básica, só com transformadas de algumas funções. Para encontrar tabelas de mais transformadas basta ver livros sobre o tema e também alguns livros de diversas matérias, como física, por exemplo, área onde estas transformadas tem grande aplicação.

Função $u(t)$	Transformada $\mathscr{L}\{u(t);p\}$	Condições
1	$\frac{1}{p}$	$(Re\ p>0)$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$(Re\ p>a)$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$(Re\ p>0)$ *e n inteiro positivo*
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$(Re\ p>0)$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$(Re\ p>0)$
$e^{at}.\sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$	$(Re\ p>a)$
$e^{at}.\cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$	$(Re\ p>a)$
$t^n.e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$(Re\ p>a)$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f(t);p\}$	condições de $\mathscr{L}\{f(t);p\}$
$f'(t)$	$p\mathscr{L}\{f(t);p\}-f(0)$	condições de $\mathscr{L}\{f(t);p\}$
$H_c(t)$	$\frac{e^{-cp}}{p}$	$(Re\ p>0)$
$e^{at}.f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t);p-a\}$	condições de $\mathscr{L}\{f(t);p\}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$(Re\ p>a)$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$(Re\ p>a)$
$t\sinh(at)$	$\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$	$(Re\ p>a)$
$t\cosh(at)$	$\frac{(p^2+a^2)}{(p^2-a^2)^2}$	$(Re\ p>a)$
$\frac{1}{2}at\cosh(at)-\frac{1}{2}\sinh(at)$	$\frac{a^3}{(p^2-a^2)^2}$	$(Re\ p>a)$
$t^{-1}\sin(at)$	$\cot\left(\frac{p}{a}\right)$	$(Re\ p>0)$

Apêndice B

Tabela de transformadas de Mellin

A tabela da transformada de Mellin é um pouco diferente da tabela da transformada de Laplace. Apresentamos uma tabela básica desta transformada, podendo-se encontrar uma tabela bastante mais completa no livro de Marichev [2], iniciando por explicar como se utiliza esta tabela.

As funções $\mathscr{K}_1(\tau)$ e $\mathscr{K}_2(\tau)$, de acordo com 2.2.2, podem ser encontradas na segunda coluna das linhas da tabela que apresentamos a seguir.

Para obtermos o valor $\mathscr{K}(x)$ do integral seguimos os passos seguintes:

- Multiplicamos $\mathscr{K}_1^*(s)$ e $\mathscr{K}_2^*\ (s)$, imagens das funções $\mathscr{K}_1(\tau)$ e $\mathscr{K}_2(\tau)$. Obtemos $\mathscr{K}^*(s)$. Este produto é-nos dado na terceira coluna, segunda linha da Tabela. De salientar que as funções $\mathscr{K}_j^*(s)$ e $\mathscr{K}_j(\tau)$, $j = 1, 2$ estão relacionadas entre elas pelo integral

$$\mathscr{K}_j^*(s) = \int_0^\infty \mathscr{K}_j(\tau)\tau^{s-1}d\tau \ , \ j = 1, 2.$$

- Aplicar a fórmula da transformada inversa de Mellin para $\mathscr{K}^*(s)$

$$\mathscr{K}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathscr{K}^*(s)\tau^{-s}ds.$$

Número do Bloco (fórmula)	$\mathscr{K}(x)$	$\mathscr{K}^*(s) = \int_0^\infty \mathscr{K}(x)x^{s-1}dx$
1	2	3
1	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathscr{K}^*(s)x^{-s}dx$	$\mathscr{K}^*(s)$
2	$\int_{\infty}^{\infty} \mathscr{K}_1\left(\frac{x}{t}\right)\mathscr{K}_2(t)\frac{dt}{t}$	$\mathscr{K}_1^*(s)\mathscr{K}_2^*(s)$
3	$\mathscr{K}(ax), a > 0$	$a^{-s}\mathscr{K}^*(s)$
4	$x^\alpha \mathscr{K}(x)$	$\mathscr{K}^*(s+\alpha)$
5	$\mathscr{K}(x^p),\ p \neq 0$	$\frac{1}{\lvert p\rvert}\mathscr{K}^*(s/p)$
6	$\mathscr{K}\left(\frac{1}{x}\right)$	$\mathscr{K}^*(-s)$
7	$\mathscr{K}^{(n)}(x),\ para$ $\lim_{x\to 0} x^{s-j-1}\mathscr{K}^{(j)}(x) = 0,$ $j = 0, 1, 2, ..., n-1$	$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+1-s \\ 1-s \end{array}\right]\mathscr{K}^*(s-n)$
8	$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \mathscr{K}(x)$	$(-s)^n\mathscr{K}^*(s)$
9	$\left(\frac{d}{dx}x\right)^n \mathscr{K}(x)$	$(1-s)^n\mathscr{K}^*(s)$
10	$\int_0^\infty e^{-xt}f(t)dt$	$\Gamma(s)f^*(1-s), Re\ s > 0$
11	e^{-x}	$\Gamma(s),\ Re\ s > 0$
12	$J_\nu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\left[\begin{array}{c} s+\nu/2 \\ \nu/2+1-s \end{array}\right],$ $-Re\ \nu/2 < Re\ s < 3/4$

Apêndice C

Lista de símbolos

Transformada de Laplace, $\mathscr{L}\{u(t);p\}$ → página 3;

Função Nula, $N(t)$ → página 5;

Função Unitária de Heaviside, $H(t)$ → página 10;

Convolução de Laplace, $f * g$ → página 13;

Transformada de Mellin, $\varphi^*(s) = \mathscr{M}\{\varphi(\tau);s\}$ → página 19;

Função Gamma de Euler, $\Gamma(s)$ → página 21;

Função Beta de Euler, $B(s, \rho - s)$ → página 21;

Convolução de Mellin, $(\varphi \circ \mathscr{K})$ página 24;

Função Gamma, $\Gamma(s)$ → página 30;

Símbolo de Pochhammer, $(s)_n$ → página 31;

Função Beta, $B(a, b)$ → página 34;

Série hipergeométrica generalizada, ${}_pF_q((a);(b);z)$ → página 37;

Função do tipo Hipergeométrico, $E((a),(b),\alpha)\, z^\alpha\ {}_pF_q((a);(b);hz^v)$ → página 38;

$\Gamma[(a);(b)]$ → página 39;

$(a) + s$ → página 39;

$(b)' - b_k$ → página 39;

$\sum_A(z)$ → página 39;

$\sum_B(1/z)$ → página 39;

Integral de Mellin-Barnes, $I_L(z)$ → página 44;

Função hipergeométrica de Gauss, $F(a;b;c;z) \to$ página 44;

Função de Kummer, ${}_1F_1\left(a;c;z\right) = \Phi\left(a;c;z\right) \to$ página 46;

Integral de Tricomi, $\Psi(a,c;z) \to$ página 46;

Função de Whittaker, $M_{\chi,\mu}(z)$ ou $W_{\chi,\mu}(z) \to$ página 46;

Função de Bessel, ${}_0F_1(c;z) \to$ página 47;

Funções de Bessel, $J_\nu(z); Y_\nu(z); Y_n(z); H\ {}^{(j)}_{\nu}(z); I_\nu(z); K_\nu(z); K_n(z) \to$ página 48;

Transformada de Laplace de variável real, $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\left\{f(t);x\right\} \to$ página 50;

Transformada de Hankel, $(J_\nu f)(x) \to$ página 53;

Operadores de Laplace, $(\Lambda_+ f)$ e $(\Lambda_-^{-1} f) \to$ página 54;

Transformada de Gauss, $\left(\mathscr{F}_c^{a,b} f\right)(x) \to$ página 56;

Transformada de Meijer, $(\mathscr{K}_\nu f)(x) \to$ página 60.

Referências

[1] Lang, Serge, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, (1985).

[2] Marichev, O. I., *Handbook of a Integral Transforms of Higher Transcendental Functions, Theory and Algorithmic Tables*, Ellis Horwood Ltd., (1983).

[3] Marsden, Jerold E. and Michael J. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, Freeman, (1987).

[4] Mikusinski,Jan, *Operational Calculus*, Pergamon Press, (1959)

[5] Santos, J. C. e Coimbra de Matos, *Curso de Análise Complexa*, Escolar Editora, (2000).

[6] Sneddon, Ian N., *The use of Integral Transforms*, Mcgraw-Hill, (1972).

[7] Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford: Clarendon Press, (1937).

[8] Watson, E. J. , *Laplace Transforms and Applications*, Van Nostrand Reinhold Company, (1981).

[9] Widder, D.V., *Transform Theory*, Academic Press, (1971).

[10] Yakubovich, S. B. and Nguyen Thanh Hai, *The Double Mellin-Barnes Type Integrals and their Applications to Convolution Theory, Series on Soviet and East European Mathematics Vol. 6* , World Scientific, (1992).

[11] Yakubovich, S. B. and Yurii F. Lucko, *The Hipergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions*, Kluwer Academic Publishers, (1994).

[12] Zemanian, A.H., *Generalized Integral Transformations*, Dover Publications, (1968).

[13] http: \\ www.sosmath.com/tables/laplace/laplace.html .

[14] http: \\ www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Mellin.html .

[15] http: \\ www-history.mcs.st-and.ac.uk/References/Mellin.html .