

Orientação

AGRADECIMENTOS

A todos os que de alguma forma me apoiaram ao longo da realização deste estudo, expresso o meu agradecimento pela forma carinhosa como o fizeram.

À minha orientadora, Professora Doutora Cláudia Maia, pela disponibilidade com que sempre me atendeu, pelo interesse e apoio na forma construtiva como orientou este trabalho.

Ao meu coorientador, Professor Doutor António Barbot, pelos seus contributos pertinentes, pela orientação profissional, rigorosa e atenta.

Aos meus alunos do 4.º ano, pela sua colaboração e empenho e por terem permitido a recolha de dados para este estudo.

À Direção do Agrupamento de Escolas que autorizou a realização deste estudo.

À Coordenada da Escola EB1 do Agrupamento de Escolas pela disponibilidade e confiança demonstrada.

Ao meu marido e filhas por todo o apoio que me deram.

RESUMO

Este estudo insere-se no âmbito da Geometria e pretende compreender a influência dos recursos didáticos utilizados no reconhecimento de propriedades e relações geométricas em figuras planas.

De acordo com o objetivo do estudo formulamos duas questões orientadoras que se articulam entre si.

- Que fragilidades apresentam os alunos, no reconhecimento de propriedades geométricas em figuras planas?

- Que contributos resultam da utilização de materiais manipuláveis, na visualização espacial e investigação de propriedades geométricas?

Com este estudo pretendemos reunir informação que contribua para aprofundar o conhecimento sobre o raciocínio geométrico dos alunos.

Em termos metodológicos segue um método de investigação misto, com recolha de informação qualitativa de natureza interpretativa e quantitativa, na modalidade de estudo de caso. A recolha de dados foi realizada numa turma de 4.º ano do ensino básico onde foi desenvolvida a experiência didática.

A informação recolhida resultou da observação direta e as fontes dos dados foram as produções dos alunos, as notas de campo, registos fotográficos, vídeo e áudio.

A docente assumiu o papel de investigadora e orientadora das tarefas propostas aos alunos tendo estes desempenhado um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento.

Os resultados obtidos permitem evidenciar as fragilidades dos alunos no reconhecimento de propriedades geométricas de figuras planas em diferentes posições. Destacam ainda os contributos da utilização da Mira e do *Tangram*, no estudo da simetria e no desenvolvimento da visualização espacial para a concretização de aprendizagens concretas, motivadoras e significativas.

Palavras - chave: Geometria, representações, simetria, visualização.

ABSTRACT

This study falls within the scope of geometry and intends to understand the influence of using teaching resources in the identification of geometrical properties and relationships in plane shapes.

According to the aim of the study, we formulate two guiding questions that articulate together:

- What are the students' weaknesses in the identification of geometrical properties of plane shapes?

- What are the contributions resulting from using manipulatives in spatial visualization and in the study of geometrical properties?

With this study we intend to gather information that contributes to deepening knowledge about the geometrical reasoning of the students.

In terms of methodology it follows a joint research method with the collection of qualitative information with interpretative nature in conjunction with quantitative information, in a case study mode.

The data collection was carried out in a 4th grade primary school class where the learning experience has been developed.

The information gathered resulted from direct observation and the data sources were comprised by the students' productions, field scores as well as photographic, video and audio records.

The teacher took both the roles of researcher and adviser for the tasks proposed to the students, having them played an active role in the building of their own knowledge.

The obtained results allow to evidence the students' weaknesses in identifying geometrical properties of plane shapes placed in different positions. They also highlight the contributions of using the Sight and the Tangram in the study of symmetry and in the development of the spatial visualization, to achieve concrete, motivating and meaningful learnings.

Keywords: Geometry, representations, symmetry, visualization.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	1
RESUMO	3
ABSTRACT	4
ÍNDICE GERAL	5
SIGLAS E ACRÓNIMOS	7
ÍNDICE DE FIGURAS	9
ÍNDICE DE TABELAS	11
INTRODUÇÃO	13
Contextualização e Pertinência do Estudo	13
Objetivos do estudo e Questões de investigação	15
Estrutura do relatório	17
CAPÍTULO I.....	19
ENQUADRAMENTO TEÓRICO	19
A Geometria no Currículo de Matemática	19
O Ensino e a Aprendizagem da Geometria	25
O Sentido Espacial	29
A Formação de Conceitos	32
O Caso Particular da Simetria	34
Os Materiais Manipuláveis.....	36
O <i>Tangram</i> na aprendizagem de conceitos geométricos.....	37
O GeoRefletor (ou Mira) na investigação da Simetria.....	38
CAPÍTULO II	41
ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO	41
Opções metodológicas.....	41
Contexto de Intervenção.....	43
A Escola	43

A Turma.....	43
Recolha de Dados	44
Plano geral da experiência didática	45
Experiência Didática.....	46
CAPÍTULO III	49
APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	49
Tarefa 1: Representar e descrever uma figura geométrica	49
Tarefa 2: Representar linhas horizontais verticais, paralelas e perpendiculares.....	52
Tarefa 3: Reconhecer e representar segmentos de reta geometricamente iguais.....	55
Tarefa 4: Reconhecer e representar segmentos de reta paralelos	59
Tarefa 5: Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares.....	63
Tarefa 6: Reconhecer e representar ângulos retos	67
Tarefa 7: Representar polígonos geometricamente iguais.....	72
Tarefa 8: Reconhecer simetrias	77
Tarefa 9: Reconhecer e representar eixos de simetria	80
Tarefa 10: Investigar simetrias	83
Tarefa 11: Criar uma composição geométrica com o <i>Tangram</i>	92
Tarefa 12: Representar e descrever uma figura geométrica	97
CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES.....	103
Conclusões.....	103
Aspetos positivos do estudo	108
Limitações e Recomendações.....	109
REFERÊNCIAS	111
ANEXOS.....	115

SIGLAS E ACRÓNIMOS

CEB – Ciclo do Ensino Básico

CNEB - Currículo Nacional do Ensino Básico

DGIDC - Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

FG – Figuras geométricas

GM - Geometria e Medida

IAVE – Instituto de Avaliação Educativa

LOE – Localização e orientação no espaço

MCM – Metas Curriculares de Matemática

ME – Ministério da Educação

MMM – Movimento da Matemática Moderna

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

NO - Números e Operações

OTD - Organização e Tratamento de Dados

PISA - Programme for International Student Assessment

PMEB - Programa de Matemática do Ensino Básico

TIMSS - Trends in International Mathematics and Science Study

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Graus de aquisição de um nível de Van Hiele	28
Figura 2. Modelo de Tangram (7 peças)	37
Figura 3. Modelo atípico de <i>Tangram</i> (9 peças)	38
Figura 4. Modelo da Mira	39
Figura 5. Modelo de espelho	39
Figura 6. Enunciado da Tarefa 1	49
Figura 7. Exemplos de resposta sobre a representação da figura geométrica	50
Figura 8. Exemplos de resposta sobre a descrição da figura geométrica	52
Figura 9. Enunciado da Tarefa 2	53
Figura 10. Exemplos de resposta de representações de linhas paralelas e perpendiculares	55
Figura 11. Enunciado da Tarefa 3	56
Figura 12. Exemplo de resposta sobre a identificação de lados com o mesmo comprimento	58
Figura 13. Exemplo de polígonos com pelo menos um par de lados iguais	59
Figura 14. Enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 4	60
Figura 15. Exemplos de resposta sobre a identificação de lados paralelos	62
Figura 16. Exemplos de resposta sobre a representação de polígonos com lados paralelos	63
Figura 17. Enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 5	64
Figura 18. Exemplo de resposta sobre a identificação de lados perpendiculares	66
Figura 19. Exemplos da representação de polígonos com lados perpendiculares	67
Figura 20. Enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 6	68
Figura 21. Exemplo de resposta sobre a identificação de ângulos retos	71
Figura 22. Enunciado da questão 1 da Tarefa 7	72
Figura 23. Exemplo de representação de polígonos geometricamente iguais	75
Figura 24. Enunciado da questão 2 da Tarefa 7	75
Figura 25. Exemplo de registo das características geométricas dos polígonos	77
Figura 26. Enunciado da questão 1 da Tarefa 8	78
Figura 27. Exemplo de resposta à questão 1 e 2	79
Figura 28. Enunciado da questão 1.1 e 1.2 da Tarefa 9	80
Figura 29. Exemplo de resposta sobre a representação de eixos de simetria	82
Figura 30. Enunciado da questão 2 da Tarefa 9	82
Figura 31. Exemplo de resposta sobre a definição do conceito de eixo de simetria	83
Figura 32. Enunciado da questão 1.1 e 1.2 da Tarefa 10	84
Figura 33. Exemplos de procedimentos na fase 1 e fase 2	86
Figura 34. Exemplos de procedimentos na fase 3 e fase 4	86
Figura 35. Exemplo de registos para a resolução da Tarefa 10	87
Figura 36. Exemplos de resposta na questão 1.1	88
Figura 37. Exemplos de resposta na questão 1.2	90
Figura 38. Enunciado da questão 1.3 da Tarefa 10	90
Figura 39. Exemplos de respostas na questão 1.3	91
Figura 40. Enunciado da questão 1 da Tarefa 11	92
Figura 41. Enunciado da questão 2 e 3 da Tarefa 11	93
Figura 42. Exemplos de resposta à questão 2 e 3	94
Figura 43. Enunciado da questão 4 da Tarefa 11	94
Figura 44. Exemplos de figuras com 1 eixo de simetria	95

Figura 45. Exemplos de figuras com 2 ou mais eixos de simetria	96
Figura 46. Exemplos de figuras para a investigação de eixos de simetria	97
Figura 47. Enunciado da Tarefa 12 (repetição da Tarefa 1).....	98
Figura 48. Exemplos de representações da figura geométrica – 2.º momento	101
Figura 49. Exemplos de resposta sobre a descrição da figura geométrica	101

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Geometria e Medida – LOE e FG - 1.º/ 2.º Ano, PMEB (2013)	22
Tabela 2. Geometria e Medida – LOE e FG - 3.º/4.º Ano, PMEB (2013)	23
Tabela 3. Planificação geral da Experiência didática	45
Tabela 4. Enquadramento da Experiência didática no PMEB - Geometria e Medida	47
Tabela 5. Enquadramento da Experiência didática no PMEB – Geometria e Medida.....	48
Tabela 6. Distribuição das figuras por grupo	50
Tabela 7. Distribuição dos termos utilizados na descrição das figuras geométricas.....	51
Tabela 8. Distribuição das respostas dos alunos na Tarefa 2	54
Tabela 9. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 3	57
Tabela 10. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2 da Tarefa 3	58
Tabela 11. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 4	61
Tabela 12. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2 da Tarefa 4	63
Tabela 13. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 4	65
Tabela 14. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2 da Tarefa 5	66
Tabela 15. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 4	69
Tabela 16. Representar polígonos que têm pelo menos um ângulo reto	70
Tabela 17. Distribuição das respostas sobre a representação de polígonos geometricamente	73
Tabela 18. Distribuição das respostas sobre o reconhecimento da simetria axial	74
Tabela 19. Análise das respostas sobre o reconhecimento de características geométricas.	76
Tabela 20. Distribuição das respostas sobre as representações das figuras da questão 1 e 2.....	79
Tabela 21. Distribuição das respostas sobre a representação de eixos de simetria	81
Tabela 22. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2.1 da Tarefa 9	82
Tabela 23. Distribuição dos dados sobre a investigação da <i>simetria - Polígonos regulares</i>	88
Tabela 24. Distribuição das respostas sobre a investigação de <i>simetria - Polígonos não regulares</i>	89
Tabela 25. Distribuição dos dados sobre a simetria em polígonos regulares – Questão 1.3.....	90
Tabela 26. Distribuição das respostas dos alunos sobre a simetria nas peças do Tangram.....	93
Tabela 27. Distribuição das figuras por categoria.....	98
Tabela 28. Análise comparativa da terminologia utilizada nas Tarefas 1 e 12	100

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da Matemática, e em particular da Geometria, têm evoluído ao longo dos anos em relação aos conteúdos a lecionar, metodologias de ensino, recursos e materiais didáticos. Os estudos desenvolvidos nas diversas áreas temáticas têm contribuído para que a prática docente seja cada vez mais refletida e ajustada ao contexto atual. Contudo, nas provas e exames nacionais, os alunos continuam a apresentar resultados pouco favoráveis em questões de raciocínios mais complexos e maior domínio de abstração. O estabelecimento de conexões entre conteúdos, a interpretação e comunicação matemática e a visualização espacial, são domínios que necessitam de ser mais estimulados nos alunos.

Este relatório apresenta alguns contributos de um trabalho desenvolvido sobre o tema “Geometria e Medida” com alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB).

Iniciamos com a contextualização e pertinência do estudo, os objetivos do estudo e questões de investigação; fazemos uma breve referência às motivações para o tema e à sua importância no ensino e aprendizagem da Matemática e descrevemos sucintamente a estrutura do relatório.

Contextualização e Pertinência do Estudo

A Educação Matemática, nas últimas décadas, tem sido alvo de diversas reformas curriculares que pretendem adequar o currículo e a sua abordagem ao desenvolvimento da sociedade contemporânea.

No documento internacional *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008), definem-se os princípios fundamentais e as normas orientadoras para o ensino e desenvolvimento da matemática nas salas de aula, nas escolas e nos sistemas educativos. Os princípios fundamentais “descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade” (p. 11) referindo-se à equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia e as normas “descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos devem aprender” (p. 11).

No currículo de Matemática, a Geometria é considerada um dos temas mais importantes pelo papel que desempenha na compreensão e intervenção no ambiente que nos rodeia. Desde muito cedo as crianças vivenciam situações no quotidiano que lhes permitem o desenvolvimento de ideias geométricas, através da construção e manipulação de representações mentais de objetos a duas e três dimensões, que constituem um aspeto importante do pensamento geométrico (NCTM, 2008).

A Geometria é desde os primeiros anos, um campo propício ao desenvolvimento de tarefas com natureza investigativa e exploratória e resolução de problemas que permitem o desenvolvimento

do raciocínio e da argumentação que é transversal a todas as áreas da Matemática. Existem múltiplas interações entre a Geometria e as outras áreas como as representações geométricas que podem facilitar o estudo e a compreensão das frações, dos histogramas e dos diagramas de dispersão utilizados para clarificar a informação, os gráficos de coordenadas que permitem estabelecer um elo entre a geometria e a álgebra e o raciocínio espacial mobilizado na utilização de mapas, definição de trajetos, construção de plantas e na criação artística (NCTM, 2008).

Com o Movimento da Matemática Moderna (MMM), a Geometria foi considerada um “parente pobre” da Álgebra linear e as atividades envolvendo construções geométricas foram transferidas para a Educação Visual. A visualização foi desvalorizada na atividade matemática e a geometria elementar reduzida ao teorema de Pitágoras e a algumas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes (Velo, 1998). Mais tarde diversos documentos sobre o ensino da Matemática (NCTM, 1991, 2008; Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, 2007; Ministério da Educação - ME, 2013) voltam a destacar a Geometria e o seu papel fundamental na Educação Matemática, realçando a sua importância no desenvolvimento do sentido espacial na compreensão das relações espaciais, no reconhecimento e utilização das ideias geométricas, na comunicação matemática e no desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo.

Embora as diversas reformas curriculares e a investigação realizada tenham contribuído para a tendência positiva que se tem verificado nos resultados do desempenho em matemática dos alunos portugueses, continuam a existir temáticas onde os resultados são menos favoráveis. Estes resultados estão expressos em estudos internacionais como é o caso do *Programme for International Student Assessment* (PISA) 2009, *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) 2011, PISA 2012 e em relatórios nacionais. No relatório sobre os Testes intermédios do 2.º ano do 1.º CEB em Matemática, relativamente ao tema *Geometria e Medida*, é referida a evolução positiva e a melhoria gradual nos desempenhos dos alunos na compreensão e aplicação dos conceitos de área e de perímetro, comparativamente aos resultados de 2011. No entanto, no que se refere à identificação de propriedades geométricas de figuras no plano e em sólidos geométricos, os alunos continuam a revelar fragilidades. Nos itens em que se pretende comparação, descrição e identificação de semelhanças e diferenças o nível máximo de desempenho foi de 44% (Instituto de Avaliação Educativa, I.P. – IAVE, 2015, p. 25). Também nas Provas Finais de 2.º e 3.º CEB, de acordo com o relatório sobre estas provas, no tema *Geometria e Medida* os resultados foram “globalmente fracos” no que se refere ao reconhecimento de propriedades dos sólidos geométricos. Nos itens que mobilizam capacidades de visualização espacial e operações cognitivas que requerem o domínio da abstração, os alunos continuam a apresentar fragilidades. Uma das conclusões deste relatório no domínio da Geometria e Medida refere-se à necessidade de “insistir na resolução de problemas que envolvam (...) as propriedades de figuras planas/sólidos com figuras de suporte, mas também sem figuras de suporte, de modo a trabalhar a capacidade de abstração” (IAVE, 2015, p. 54).

O que acabamos de referir permite-nos considerar que a Geometria continua a ser uma área onde os alunos apresentam dificuldades de natureza diversa desde os níveis iniciais de escolaridade. Em diversos estudos sobre esta temática são identificadas dificuldades, que os alunos demonstram em conhecimentos básicos de geometria, em diferentes níveis de ensino.

É neste contexto, e dada a importância do tema, que nos parece pertinente a realização deste estudo que incidirá sobre o tema “Geometria e Medida” no 1.º CEB. Como professora e formadora, a realização deste trabalho irá permitir aprofundar o conhecimento sobre o domínio da Geometria e contribuir assim para melhorar a prática profissional e, conseqüentemente, o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Objetivos do estudo e Questões de investigação

A Matemática é uma disciplina em que o conhecimento é progressivo e hierarquizado. As diversas fragilidades, que os alunos vão acumulando ao longo da escolaridade, no conhecimento matemático podem condicionar as novas aprendizagens e culminar na opção pelo abandono da disciplina. A Geometria é uma área particularmente “rica” do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio matemático relativamente a outras áreas como a Álgebra ou a Estatística. À medida que os alunos se vão familiarizando com a forma, a posição, as transformações geométricas e ao desenvolverem o raciocínio espacial, adquirem as bases que lhes permitirão compreender a noção de espaço, assim como outros temas de Matemática, Arte e Ciências (NCTM, 2008).

A informação resultante dos diversos estudos e relatórios, a reflexão sobre a nossa experiência profissional e o desejo de aprofundar o nosso conhecimento sobre a área da Geometria conduziu-nos à questão: “Que metodologias e recursos utilizar em sala de aula, para ajudar os alunos a colmatar algumas dificuldades em aprendizagens de conceitos elementares de Geometria?”.

O sucesso do processo de ensino e aprendizagem da Geometria implica a compreensão dos contextos em que este se desenvolve e a identificação de recursos pedagógicos que motivem os alunos e fomentem o potencial de exploração e investigação. O aluno deve ser capaz de, autonomamente, mobilizar e articular aprendizagens na resolução de novas situações. Assim é importante proporcionar aos alunos, desde os anos iniciais da escolaridade, experiências pedagógicas com estrutura semelhante às que são desenvolvidas com alunos de ciclos subsequentes.

O estudo que nos propomos desenvolver sobre o tema “Geometria e Medida” no 1.º CEB incidirá, por limitações de tempo, no estudo de alguns conteúdos sobre “Localização e orientação no espaço” e “Figuras geométricas”.

Como objetivo principal deste estudo, pretendemos averiguar a influência dos recursos e materiais manipuláveis utilizados no ensino-aprendizagem da Geometria no 1.º CEB.

Para orientar o estudo foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- i.) Desenvolver e implementar atividades que estimulem o desenvolvimento das capacidades de visualização e reconhecimento de propriedades geométricas;
- ii.) Analisar o desempenho dos alunos na mobilização e conexão de aprendizagens;
- iii.) Identificar contributos de materiais manipuláveis facilitadores da aprendizagem;
- iv.) Analisar a comunicação matemática dos alunos e refletir sobre o papel do professor como moderador do processo;
- v.) Observar o desempenho dos alunos na manipulação de instrumentos de desenho e medição;

Com base nos objetivos enunciados formularam-se as seguintes questões orientadoras:

- Que fragilidades apresentam os alunos, no reconhecimento de propriedades geométricas em figuras planas?

- Que contributos resultam da utilização de materiais manipuláveis, na visualização espacial e investigação de propriedades geométricas?

Neste trabalho pretendemos reunir informação que contribua para aprofundar o conhecimento sobre o pensamento geométrico dos alunos e o contexto em que este se processa. Como o estudo incide sobre as noções básicas de geometria consideramos que a opção por um grupo-turma em final de ciclo (4.º ano) nos permitiria explorar um maior número de conteúdos.

A opção pelo tema em estudo e a motivação para a realização deste trabalho deve-se aos seguintes fatores:

- A necessidade de aprofundar o conhecimento com vista a melhorar a prática docente, cada vez mais exigente e centrada na ação do professor;

- A vivência de experiências pedagógicas em que os alunos, à medida que progridem na sua escolaridade, apresentam fragilidades estruturantes que condicionam o sucesso na resolução de problemas do quotidiano;

- O reconhecimento de que deve existir mais investigação em anos iniciais da escolaridade e em particular na área da Geometria.

Na nossa perspetiva, há múltiplos fatores que podem ser considerados de forma que a ação do professor resulte em aprendizagens significativas para os alunos. No sentido de contribuir para a identificação de alguns desses fatores desenvolvemos uma cadeia de tarefas cuja análise estará na base deste estudo.

Estrutura do relatório

Este relatório está organizado em cinco secções.

A primeira: Introdução - apresenta a contextualização e pertinência do estudo, os seus objetivos e questões de investigação e por fim a estrutura do relatório.

A segunda: Capítulo I – Enquadramento Teórico - debruça-se sobre a Geometria no currículo de Matemática com uma breve análise do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) focalizada na Geometria do 1.º ciclo; apresenta alguns referenciais teóricos sobre o sentido espacial, a formação de conceitos, a simetria e destaca a importância dos materiais manipuláveis na aprendizagem de conceitos geométricos como no caso particular do *Tangram* e da *Mira*.

A terceira: Capítulo II – Enquadramento Metodológico - refere as opções metodológicas, caracteriza o contexto de intervenção: a escola e a turma; os procedimentos de recolha e análise dos dados; descreve a experiência didática mencionando os seus objetivos e o plano de ação.

A quarta: Capítulo III – Apresentação e Análise de Dados – descreve e analisa a informação recolhida, com referências à atitude dos alunos e registos que ilustram alguns momentos da experiência desenvolvida.

A quinta: Conclusões, Limitações e Recomendações – sintetiza e problematiza os resultados procurando responder às questões do estudo sustentadas pelo quadro teórico apresentado. Finaliza com algumas considerações, limitações e recomendações para futuras investigações.

CAPÍTULO I

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo começamos com uma breve análise da evolução histórica da Geometria no currículo de Matemática, para compreendermos a sua importância e aplicação. Seguidamente apresentamos alguns referenciais teóricos sobre o sentido espacial, a simetria e finalizamos com uma referência à importância dos materiais manipuláveis na aprendizagem matemática, em particular o *Tangram* e a *Mira*.

A Geometria no Currículo de Matemática

A década de 60 foi marcada por uma reformulação radical dos currículos impulsionada pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), que fomentou a introdução de novos conteúdos e metodologias de ensino orientados por métodos abstratos e gerais. O MMM propôs-se (Ponte et al., 1997):

(i) usar conceitos e processos unificadores para reestruturar os diversos tópicos escolares de um modo mais coerente, (ii) introduzir novos tópicos que se considerava poderem ser aprendidos pelos alunos e de valor nas novas aplicações desta ciência e (iii) eliminar alguns dos tópicos tradicionais, considerados obsoletos. Pretendia-se proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas e, ao mesmo tempo, melhorar as suas competências de cálculo. Argumentava-se que as suas dificuldades resultavam, em grande medida, de eles não conseguirem relacionar umas coisas com as outras. O estudo das estruturas unificadoras e o uso de uma linguagem comum poderiam ter, nesta perspetiva, uma influência benéfica no próprio domínio do cálculo (p. 49).

Nas diversas áreas temáticas que integram a Matemática, a Geometria é uma das áreas em que se tem verificado grandes mudanças conceituais. Embora algumas das práticas adotadas pelo MMM tivessem sido aconselháveis, as consequências da implementação deste processo foram desastrosas. O movimento relegou a Geometria para segundo plano passando esta a ser “encarada como um (...) «parente pobre» da álgebra linear; as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, dando como exemplo a disciplina de Educação Visual” (Abrantes, 1999, p. 3, citado por Maia, 2014, p. 70), o mesmo aconteceu ao desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas (Ponte, 2003) e os cálculos numéricos foram “substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudoformalismo vazio e desligado da realidade” (Lima, 2004, p. 129). O objetivo de melhoria das aprendizagens matemáticas não foi atingido, apesar da integração de novos temas no programa de Matemática e da sua abordagem mais atual (Ponte, 2003).

No regresso da Geometria ao currículo, destaca-se o papel fundamental de *Hans Freudenthal* (1905-1990). A Geometria Euclidiana e um conhecimento com *caráter axiomático e dedutivo* desvalorizando a observação, experimentação e construção, deram lugar a uma aprendizagem em que o aluno tem um papel ativo neste processo (Ponte, 2003). O *método expositivo* deu lugar a um *método ativo* cabendo ao professor a função de promover o diálogo com os alunos e estimular a sua imaginação conduzindo-os no processo de redescoberta (Ponte, 2003). A aprendizagem da Geometria passa a ser perspectivada como uma “experiência multifacetada que envolve aprendizagens em múltiplos campos: visualização, linguagem, aplicações matemáticas entre outros” (Matos & Serrazina, 1996, p. 265).

Desde então foram surgindo diversas reformas, mais ou menos profundas, nos Programas de Matemática. Em Portugal, surgiu o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (CNEB): *Competências Essenciais* (CNEB, 2001) indicando como uma das competências a desenvolver no tema da Geometria, ao longo de todos os ciclos de ensino, “a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação” (p. 62). Em dezembro de 2007, foi homologado um novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2007) que introduziu uma mudança curricular substancial, relativamente aos programas anteriores (de 1990 e 1991), ao nível da organização e dos conteúdos em estudo. O programa estava organizado em quatro grandes temas matemáticos *Números e operações, Geometria, Álgebra e Organização e tratamento de dados*. Este programa articulou, pela primeira vez, os nove primeiros anos de escolaridade e enunciou duas finalidades e nove objetivos gerais para a aprendizagem da Matemática. Definiu objetivos específicos de aprendizagem por ciclo e por tema, capacidades transversais (*Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação*) e estabeleceu orientações metodológicas sobre o ensino dos temas matemáticos. No domínio da Geometria, valorizou o desenvolvimento do *sentido espacial* e, em particular a visualização. O estudo das *figuras geométricas bi e tridimensionais* inicia-se no 1.º e 2.º CEB, em que os alunos devem ser capazes de relacionar propriedades geométricas e, no 3.º CEB, contactar com *situações de raciocínio hipotético-dedutivo*. O estudo das transformações geométricas é iniciado no 1.º CEB “primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização” (PMEB, 2007, p. 9).

Em 2012 surgiu uma nova revisão curricular, com a homologação das *Metas Curriculares de Matemática* (MCM) que surgem na sequência da revogação do CNEB constituindo um referencial para professores, encarregados de educação e alunos. Este documento, elaborado com base nos conteúdos temáticos do PMEB (2007), estabelece o que o Ministério da Educação (ME) elege como essencial na aprendizagem a realizar pelos alunos em cada ano ou CEB. As dificuldades que foram surgindo na articulação entre as MCM e o programa de 2007, para além de outros motivos de carácter político, resultaram na homologação de um novo PMEB em 17 de junho de 2013 (PMEB, 2013), cuja implementação se iniciou em setembro desse ano. Os seus autores pretenderam suprimir desfasamentos pontuais entre o PMEB (2007) e as MCM (2012). O programa pretende promover

“uma aprendizagem progressiva, na qual se caminha etapa a etapa, respeitando a estrutura própria de uma disciplina cumulativa como a matemática” (p. 4) e destaca a importância do papel da abstração na atividade matemática que permite “agregar e unificar objetos, conceitos e linhas de raciocínio, e adaptar métodos e resultados conhecidos a novos contextos” (p. 4).

O PMEB (2013) surge com uma nova organização em relação ao PMEB (2007). Define os conhecimentos e capacidades fundamentais que os alunos devem adquirir e desenvolver, e apresenta uma estrutura curricular sequencial que resulta da interdependência de conhecimentos e capacidades numa lógica de aprendizagem progressiva. Este documento enuncia três finalidades do ensino da matemática: *a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade*. Estabelece também os objetivos por ciclo que devem traduzir “os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar em cada um dos três ciclos de escolaridade básica” (PMEB, 2013, p. 3). As orientações metodológicas são apresentadas de forma geral e sucinta de forma que as escolas e os professores selecionem as metodologias e os recursos mais adequados. Os temas matemáticos do 1.º CEB organizam-se em três domínios de conteúdos: Números e Operações (NO), Geometria e Medida (GM) e Organização e Tratamento de Dados (OTD). Para a articulação entre os domínios de conteúdos e os objetivos da Matemática foram criadas as Metas Curriculares de Matemática.

No PMEB (2013) os conteúdos a desenvolver no domínio da *Geometria e Medida* estão integrados nos três ciclos de escolaridade e estão organizados em *Localização e Orientação no espaço, Figuras Geométricas e Medida*. Em termos de conhecimento geométrico pretende-se, neste programa, que os alunos adquiram as noções básicas da *Geometria*, começando pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas e segmentos de reta, paralelismo e perpendicularidade e, a partir destes, a construção de objetos mais complexos como polígonos, circunferências, sólidos ou ângulos. Dado que este trabalho incide sobre o 1.º CEB, nomeadamente sobre a Geometria e Medida, sistematizamos nas tabelas seguintes os diversos conteúdos a desenvolver ao longo de cada ano deste ciclo neste domínio.

No 1.º CEB o domínio da Geometria está organizado em três subdomínios: *Localização e orientação no espaço, Figuras Geométricas e Medida*. Como as tarefas desenvolvidas neste estudo incidem apenas sobre a *Localização e orientação no espaço* e *Figuras Geométricas*, a nossa análise sobre a distribuição dos conteúdos programáticos refere-se apenas a estes.

Na Tabela 1., apresentamos os conteúdos programáticos dos subdomínios: *Localização e Orientação no Espaço* e *Figuras geométricas* e os *Objetivos gerais* referentes ao 1.º e 2.º Ano.

Tabela 1. Geometria e Medida – LOE e FG - 1.º/ 2.º Ano, PMEB (2013)

Domínio: Geometria e Medida	
1.º Ano	
Conteúdos	Objetivo Geral
Localização e orientação no espaço • Relações de posição e alinhamentos de objetos e pontos; • Comparação de distâncias entre pares objetos e pontos; • Figuras geometricamente iguais.	1. Situar-se e situar objetos no espaço
Figuras geométricas • Partes retilíneas de objetos e desenhos; entre pares de partes planas de objetos; • Segmentos de reta e extremos de um segmento de reta; • Comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta; • Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respectivos lados e vértices, circunferência, círculo; • Sólidos: cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro e esfera.	2. Reconhecer e representar formas geométricas
2.º Ano	
Conteúdos	Objetivo Geral
Localização e orientação no espaço • Direções no espaço relativamente a um observador; • Voltas inteiras, meias voltas, quartos de volta, viragens à direita e à esquerda; • Itinerários em grelhas quadriculadas.	1. Situar-se e situar objetos no espaço
Figuras geométricas • Retas e semirretas; Polígonos e linhas poligonais; • Parte interna e externa de linhas planas fechadas; • Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos; • Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango); • Pentágonos e hexágonos; • Sólidos geométricos poliedros e não poliedros; pirâmides e cones; vértice, aresta e face; • Atributos geométricos e não geométricos de um objeto; • Construção de figuras com eixo de simetria.	2. Reconhecer e representar formas geométricas

Na Tabela 2, apresentamos os conteúdos programáticos dos subdomínios: *Localização e Orientação no Espaço* e *Figuras geométricas* e os Objetivos gerais referentes ao 3.º e 4.º Ano.

Tabela 2. Geometria e Medida – LOE e FG - 3.º/4.º Ano, PMEB (2013)

Domínio: Geometria e Medida	
3.º Ano	
Conteúdos	Objetivo Geral
Localização e orientação no espaço • Segmentos de reta paralelos e perpendiculares em grelhas quadriculadas; • Direções perpendiculares e quartos de volta; Direções horizontais e verticais; • Coordenadas em grelhas quadriculadas.	1. Situar-se e situar objetos no espaço
Figuras geométricas • Circunferência, círculo, superfície esférica e esfera; centro, raio e diâmetro; • Identificação de eixos de simetria em figuras planas.	2. Reconhecer propriedades geométricas
4.º Ano	
Conteúdos	Objetivo Geral
Localização e orientação no espaço • Ângulo formado por duas direções; vértice de um ângulo; • Ângulos com a mesma amplitude; • A meia volta e o quarto de volta associados a ângulos.	1. Situar-se e situar objetos no espaço
Figuras geométricas Ângulos • Ângulos convexos e ângulos côncavos; • Ângulos verticalmente opostos; • Ângulos nulos, rasos e giros; • Critério de igualdade de ângulos; • Ângulos adjacentes; • Comparação das amplitudes de ângulos; • Ângulos retos, agudos e obtusos. Propriedades geométricas • Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas; retas não paralelas que não se intersectam; • Retângulos como quadriláteros de ângulos retos; • Polígonos regulares; • Polígonos geometricamente iguais; • Planos paralelos; • Paralelepípedos retângulos; dimensões; • Prismas retos; • Planificações de cubos, paralelepípedos e prismas retos; • Pavimentações do plano.	2. Identificar e comparar ângulos 3. Reconhecer propriedades geométricas

O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

“Geometria é compreender o espaço em que a criança vive, respira, e se move. O Espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.”

(Hans Freudenthal, 1973, citado por Veloso 1998, p.15)

A Geometria é considerada um meio privilegiado para o desenvolvimento do pensamento matemático e competências transversais a diversas áreas do currículo. Como noutras áreas da Matemática, a Geometria além do conhecimento de factos e procedimentos envolve capacidades de visualização, representação, raciocínio e comunicação (Loureiro, 2007). Como refere Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999):

a geometria e a visualização espacial proporcionam meios de perceber o mundo físico e de interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objetos. Estabelecer e comunicar relações espaciais entre os objetos, fazer estimativas relativamente à forma e à medida, descobrir propriedades das figuras e aplicá-las em diversas situações são processos importantes do pensamento geométrico (p. 60).

Para a análise do desenvolvimento do raciocínio geométrico, existem diversas teorias que têm contribuído para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem como a teoria de Piaget, os modelos de Ciência Cognitiva e o modelo van Hiele.

As primeiras investigações sobre os conceitos das crianças sobre figuras iniciaram-se com os estudos de Piaget que analisou os diferentes níveis de raciocínio geométrico. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que, nos estudos de Piaget, o desenvolvimento espacial na criança resulta das suas interações com o meio e antecede o desenvolvimento da linguagem distinguindo *percepção* como “conhecimento dos objectos resultante de um contacto direto com eles” e *representação (ou imaginário mental)* “que envolve a evocação de objetos na sua ausência” (p. 62). Segundo estes autores, a teoria de Piaget considera que há uma sequência progressiva na distinção de propriedades geométricas em relação à percepção e representação visual que vão desde as topológicas (que não dependem da forma e tamanho e são propriedades globais), projetivas (observação de um objeto segundo diferentes ângulos de visão) e finalmente as euclidianas (que consideram a dimensão, distância e direção). Clements (1999) critica a teoria de Piaget por esta não considerar a componente educacional, uma vez que há estudos que já identificaram a existência de noções euclidianas em crianças jovens. Também as teorias cognitivas não consideram as relações sociais e culturais nos esquemas intuitivos e o desenvolvimento concetual.

O modelo de aprendizagem dos van Hiele continua a ser o mais referido para o currículo de Matemática, embora existam propostas alternativas de outros investigadores sobre a interpretação e análise do raciocínio geométrico dos alunos neste modelo (Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991).

A progressão na aprendizagem da Geometria no modelo van Hiele desenvolve-se através de níveis com complexidade crescente, associados à maturidade geométrica do aluno. Para os van Hiele: o ensino é um processo descontínuo; os níveis de conhecimento são sequenciais e hierárquicos; os conceitos implicitamente percebidos num nível são explicitamente percebidos no nível seguinte; cada nível tem a sua linguagem, ou seja, o seu conjunto de símbolos e relação entre eles (Clements & Battista, 1992).

O modelo van Hiele, referido por Crowley (1987), consiste na identificação de cinco níveis de compreensão na aprendizagem da Geometria:

- Nível 0: Visualização – os conceitos geométricos são vistos como entidades totais e não como tendo atributos ou características.
As figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas pela sua forma como um todo, isto é, pela sua aparência física e não pelas suas características. Um aluno neste nível pode adquirir vocabulário geométrico, identificar formatos especificados e, dada uma figura, reproduzi-la. Mas não reconhecerá num conjunto de figuras (quadrados e retângulos com diferentes dimensões e em diferentes posições) que os seus ângulos são retos ou que os seus lados opostos são paralelos.
- Nível 1: Análise – inicia-se uma análise dos conceitos geométricos em que através da observação e experimentação o aluno começa a discernir as características das figuras. Este novo conhecimento passa a ser utilizado na identificação de classes de figuras e a permitir generalizações. No entanto o aluno ainda não consegue explicar as relações entre propriedades, não visualiza inter-relações entre figuras e não compreende as definições.
- Nível 2: Dedução Informal - o aluno estabelece relações entre propriedades relativas a uma figura (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos então os ângulos opostos são iguais) ou entre figuras (um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo). Deduz as propriedades de uma figura e reconhece a classes de figuras. O aluno não compreende o significado das deduções como um todo ou o papel dos axiomas;
- Nível 3: Dedução Formal – a relação entre os termos indefinidos, os axiomas, postulados, definições, teoremas, e a demonstração, bem como o papel de cada um são compreendidos. Neste nível o aluno pode construir e não apenas memorizar e demonstrar.
- Nível 4: Rigor – O aluno é capaz de trabalhar em diversos sistemas axiomáticos e assim as geometrias não-euclidianas podem ser estudadas, e sistemas diferentes podem ser comparados. A Geometria é vista como uma abstração.

A progressão do aluno neste modelo está associada à existência de um ciclo de aprendizagens composto por cinco fases didáticas relacionadas com os níveis de raciocínio do aluno. A

aprendizagem é classificada em função do resultado da acumulação de uma quantidade de experiências adequadas, existindo a possibilidade de se alcançar níveis mais altos de raciocínio fora do contexto escolar com as experiências adequadas (Jaime & Gutiérrez, 1990). Os van Hiele propõem cinco fases a seguir pelo professor para ajudar os seus alunos a progredir na aprendizagem (Clements & Battista, 1992):

- Fase 1- Informação: o professor deve informar o aluno sobre o conteúdo em estudo, materiais a utilizar, perceber o seu estado de conhecimentos e nível de raciocínio sobre o tema em estudo;
- Fase 2 - Orientação guiada: o professor tem o papel de orientar os alunos de forma que eles se envolvam ativamente na exploração dos objetos em estudo descobrindo as redes de relações existentes. Nesta fase devem ser construídos os elementos básicos da rede de relações do nível seguinte;
- Fase 3 - Explicitação: nesta fase os alunos devem trocar experiências, comentar regularidades observadas, explicar a resolução das atividades, em diálogo de grupo. Devem começar a desenvolver o seu conhecimento intuitivo, descrevendo pelas suas próprias palavras os conceitos geométricos. O professor deve conduzir os alunos a utilizar uma linguagem com termos técnicos;
- Fase 4 - Orientação livre: os alunos devem aplicar os conhecimentos e a linguagem adquiridos a novas investigações, resolver problemas cuja solução exige a utilização de conceitos e relações elaboradas previamente. O professor deve selecionar os materiais e os problemas adequados, orientar a procura de várias soluções e introduzir conceitos e processos importantes para a resolução de problemas;
- Fase 5 - Integração: os alunos devem sintetizar as aprendizagens, adquirir uma visão geral dos conteúdos estudados e integrar o seu conhecimento numa rede coerente que facilmente mobilizem. O professor deve estimular os alunos a refletir e consolidar o seu conhecimento geométrico.

Burger e Shaughnessy (1986), Fuys et al. (1988), Usiskin (1982, citados por Gutiérrez et al. 1991) apresentam, nos seus estudos, alternativas de análise do raciocínio geométrico dos alunos no modelo van Hiele. Como forma de identificar os estudantes que se encontram entre níveis, estes investigadores apontam para um processo contínuo, ao invés do processo discreto que caracteriza o modelo van Hiele. Segundo Burger e Shaughnessy (1986), Fuys et al. (1988), Usiskin (1982, citados por Gutiérrez et al., 1991), embora a maioria dos alunos mostrem um nível dominante, em respostas abertas, um grande número de alunos reflete nas suas respostas a presença de outros níveis e outros apresentam em simultâneo dois níveis de raciocínio dominantes. Também Burger e Shaughnessy (1986), Fuys et al. (1988, citados por Gutiérrez et al., 1991) consideram que esses estudantes estavam na transição entre níveis. Estes investigadores consideram que não deve ser atribuído um único nível

de raciocínio e que, dependendo do conceito ou contexto em causa, os alunos podem desenvolver simultaneamente dois níveis de van Hiele.

Gutiérrez et al. (1991), com referência às conclusões dos estudos desses investigadores, concluíram que os níveis de van Hiele não são discretos e que deve ser aprofundado o estudo da transição entre níveis e apresentam uma proposta alternativa baseada numa interpretação flexível do modelo dos van Hiele com os seguintes argumentos:

- a) Para se ter uma visão mais completa do atual raciocínio geométrico dos alunos devemos ter em atenção a sua capacidade de utilização de cada um dos níveis de van Hiele em vez de atribuir um único nível;
- b) A continuidade no modelo de van Hiele significa que a aquisição de um nível específico não acontece instantaneamente ou muito rapidamente mas em vez disso pode levar vários meses ou mesmo anos (p. 238).

Gutiérrez et al. (1991) quantificaram a aquisição de um nível de raciocínio, representando-o por um segmento graduado de 0 a 100 (em que os limites foram estabelecidos de uma forma subjetiva), considerando que é possível identificar formas distintas de raciocínio durante a aquisição de um determinado nível. Dividiram este processo contínuo em 5 períodos, caracterizados por formas qualitativamente diferentes do raciocínio dos alunos, que representam diferenças fundamentais no grau de aquisição de um determinado nível. Para estes autores, a divisão em níveis não significa descontinuidade, justificando a atribuição dum valor numérico para um grau de aquisição de um nível pela necessidade de planear o ensino de forma a ser possível atribuir atividades diferenciadas aos alunos para promover uma aprendizagem apropriada.

Na Figura 1 estão representadas as interpretações quantitativas e qualitativas do processo de aquisição de um nível, segundo Gutiérrez et al. (1991).

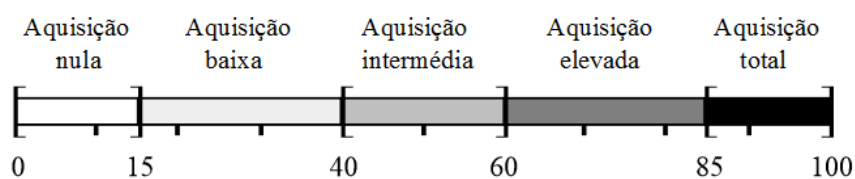


Figura 1. Graus de aquisição de um nível de Van Hiele
(Representação de Gutiérrez et al., 1991)

O Sentido Espacial

Uma componente essencial, no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, é o desenvolvimento do sentido espacial. Para Walle (2001), o sentido espacial pode ser definido como uma intuição sobre as formas e suas relações. Este conhecimento intuitivo, do meio que nos rodeia e dos objetos que nele existem, pode ser desenvolvido a partir de experiências que incidam nas relações geométricas: direção, orientação e perspectivas dos objetos no espaço; nas formas e tamanhos relativos de figuras e objetos; e no modo como uma modificação na forma se relaciona com a mudança no tamanho (NCTM, 1991). O sentido espacial tem um papel fundamental no raciocínio geométrico e no raciocínio matemático em geral estando o seu desenvolvimento dependente das atividades propostas ao aluno. Este sentido pode ser desenvolvido a partir de experiências “ricas”, na exploração de formas geométricas e suas relações, que devem ser realizadas de forma consistente ao longo do tempo (Walle, 2001, p. 308) e adquire-se gradualmente a partir das interações da criança com os objetos e o meio físico em que se movimenta, nomeadamente, através do envolvimento ativo em atividades espaciais concretas envolvendo três componentes fundamentais: a visualização espacial, as figuras geométricas e a orientação espacial (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011).

No estudo das formas e estruturas geométricas, os alunos analisam características e as suas relações. Para o NCTM (2008), a visualização espacial engloba capacidades que se relacionam com a forma como se percebe o mundo que nos rodeia e envolve a “construção e manipulação de representações mentais de objetos *bi* e tridimensionais e a percepção de um objeto a partir de diferentes perspectivas e constitui um aspeto essencial do raciocínio geométrico” (p. 44).

Para Gutiérrez (1996) os termos *visualização*, *raciocínio espacial* ou *percepção espacial* são usados pelos diversos autores representando ideias comuns. Segundo este autor, o termo *visualização* em Matemática, está associado à “atividade baseada na utilização de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou demonstrar propriedades” (Gutiérrez, 1996, p. 9) e é constituída por quatro elementos principais:

- i. Imagens mentais: representações cognitivas de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais;
- ii. Representações externas: representações verbais ou gráficas dos conceitos ou propriedades, incluindo figuras, desenhos, diagramas, que ajudam a criar ou transformar as imagens mentais e fazer raciocínio visual;
- iii. Processos de Visualização: ações físicas ou mentais, onde imagens mentais estão envolvidas. Este autor refere-se a dois processos de visualização: a interpretação visual da informação e a interpretação dessas imagens mentais para gerir informação;
- iv. Capacidades de visualização: capacidades exigidas para realizar os processos necessários com as imagens mentais.

Del Grande (1990, citado por Matos & Gordo, 1993) refere-se à visualização espacial como um conjunto de sete capacidades:

- i. Coordenação visual motora: capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. Pode ser estimulada por exemplo através de: resolver labirintos, pintar desenhos, reproduzir desenhos dados, pintar espaços marcados com pontinhos;
- ii. Memória visual: capacidade de recordar objetos que já não estão visíveis. Esta capacidade desenvolve-se quando se pede aos alunos para observar e copiar figuras, em papel pontado, quadriculado ou no geoplano, sem as voltar;
- iii. Perceção figura-fundo: capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de perceção de figuras contra fundos complexos. Esta capacidade desenvolve-se através de atividades que exijam a observação de figuras escondidas, através de um problema de pavimentação, pesquisa de retas paralelas ou que se intersetem ou através do recurso ao *Tangram*.
- iv. Constância perceptual: capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas. Uma pessoa mostra possuir constância perceptual quando reconhece um cubo ou um quadrado, mesmo numa posição não habitual. Pode desenvolver-se esta capacidade através da procura de quadrados em posições menos comuns ou através do reconhecimento de características geométricas em diferentes perspetivas.
- v. Perceção da posição no espaço: aptidão para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes. Distingue-se da perceção figura-fundo ou da constância perceptual porque nestas procuramos identificar entidades geométricas numa diversidade de contextos, posições e tamanhos. Esta perceção pode ser desenvolvida através do desenho ou identificação de figuras geométricas simétricas, ou da identificação de eixos de simetria em diversas figuras utilizando a Mira ou o espelho.
- vi. Perceção de relações espaciais: capacidade de ver ou imaginar dois ou mais objetos em relação consigo próprios ou em relação connosco. Pode ser desenvolvida através de construções com um dado número de cubos, reproduções de objetos ou do relacionamento de objetos geométricos com as suas vistas e as suas planificações.
- vii. Discriminação visual: esta capacidade consiste na identificação de semelhanças e diferenças. Na análise de duas figuras inclui o reconhecimento das suas diferenças, caso as figuras não sejam iguais. Nesta capacidade não está envolvida a situação do objeto no espaço. A discriminação visual desenvolve-se através de atividades de classificação e ordenação de formas geométricas.

Para clarificar o uso do termo *figura* ao longo deste texto, referimos que este é usado para indicar uma *figura geométrica* ou a uma *figura plana* como sendo “um subconjunto de pontos do plano ou do espaço conforme o contexto em que nos encontramos a trabalhar” (Bastos, 2006, p. 9).

No início da escolaridade, os alunos começam por observar e descrever uma variedade de figuras, descobrir as suas propriedades e reconhecer conceitos de posição relativa entre objetos. A orientação espacial está relacionada com a posição relativa das formas e dos objetos bem como a relatividade dos seus tamanhos (Breda & al., 2011) e implica a capacidade para detetar combinações de objetos segundo um padrão e a capacidade de manter precisas as perceções, face à mudança de orientação (Bishop, 1983, citado em Matos & Gordo, 1993). Ao pedirmos ao aluno para agrupar figuras, de acordo com as suas características geométricas, fundamentando as suas escolhas, estamos a proporcionar-lhe a oportunidade de reconhecer características geométricas, desenvolver a visualização e o sentido espacial. Por outro lado, se o aluno tiver apenas que indicar o nome da figura geométrica (triângulo, quadrado, ...) estará apenas a fazer apelo de uma representação mental em vez de evoluir no reconhecimento de relações espaciais entre os objetos. Outra forma de desenvolver o sentido espacial resulta da associação de formas bi e tridimensionais como por exemplo a associação de uma planificação ao respetivo sólido.

Segundo Dreyfus (1990) utilizamos representações externas dos objetos (fórmulas, diagramas, gráficos, desenhos, etc.) na comunicação matemática e cada um ao pensar num determinado objeto ou processo matemático relaciona-o com uma imagem que tem na mente (uma representação mental). Estas representações mentais podem variar de pessoa para pessoa. Para Loureiro (2009), a imagem mental que um aluno tem de um determinado objeto geométrico, um quadrado por exemplo, deve ser construída ao longo da sua aprendizagem a partir de múltiplas representações que lhe permitam ver a figura isolada ou integrada desse objeto e descobrir as diferentes relações que é possível estabelecer entre o todo e as partes. Uma *representação* refere-se “à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma” (NCTM, 2008, p.75) e desempenha um papel fundamental na compreensão dos conceitos e relações matemáticas. Loureiro (2009) refere que uma figura geométrica é representada por um protótipo que deve evoluir ao longo da aprendizagem, de forma a representar toda a variedade de elementos de uma classe. O mesmo autor refere que a forma de evitar a formação de protótipos rígidos é através de atividades com objetos geométricos em representações diversas estabelecendo ligações entre elas. Também é importante, no raciocínio geométrico, o estudo de famílias de figuras “finitas” ou seja com um pequeno número de elementos para a descoberta de “invariantes” entre os seus elementos (Loureiro, 2009, p. 63). Na passagem do abstrato para o concreto, a utilização de materiais manipuláveis e instrumentos de desenho proporciona aos alunos aprendizagens significativas e facilita o desenvolvimento da visualização e do sentido espacial (PMEB, 2007)

Outro aspeto importante no conhecimento do aluno refere-se às conexões que se podem identificar entre diferentes categorias de objetos geométricos. No final do 1.º ciclo os alunos já deverão ter adquirido uma quantidade significativa de conteúdos matemáticos. Para o NCTM (2008), a capacidade do aluno para mobilizar estas novas ideias vai “depende, em parte, da eficiência com que elas forem relacionadas” (p. 234) e isto implica “estabelecer a ligação entre ideias novas e outras

que lhe estão relacionadas e que forem previamente consideradas” (p. 234). Estas conexões permitem, segundo o NCTM (2008), que os alunos “vejam a matemática como um corpo unificado de conhecimentos, em vez de um conjunto complexo de conceitos, procedimentos e processos isolados” (p. 234). Os alunos aprendem as propriedades que definem um triângulo, um retângulo, um quadrado, e outros quadriláteros ou outras figuras geométricas. A partir destas propriedades, os alunos aprendem que algumas categorias de figuras constituem subconjuntos de outras categorias, dependendo da classificação adotada. Por exemplo: os retângulos são quadriláteros porque têm quatro lados; os retângulos também são paralelogramos porque têm lados opostos que são paralelos; os quadrados também são retângulos porque além de terem quatro lados têm ângulos retos. Nas situações em que é necessário estabelecer conexões matemáticas, o professor deve ajudar os alunos explorar e descrever essas conexões e verificar que o fazem em diversos contextos e modelos (NCTM, 2008).

A *congruência* é uma noção primitiva da Geometria euclidiana na construção axiomática apresentada por Hilbert (2003, citado por Veloso, 2006, p. 8). Segundo Lindquist e Shulte (1987, citado por Maia, 2014) a percepção de congruência é a “habilidade de reconhecer que um objecto possui invariantes propriedades tais como o tamanho e a forma apesar da possível variabilidade quando é observado de um ponto de vista distinto” (p. 128). Pode definir-se que “dois *entes* geométricos são congruentes se existir uma isometria que transforme um no outro” (Palhares, 2004, p. 358) e assim a relação de congruência é “uma relação de equivalência no conjunto de todas figuras geométricas” (p. 358) pelo que “qualquer figura é congruente consigo própria (identidade)” (p. 358). Para construir o conceito de *congruência* os alunos podem começar por sobrepor figuras, pelas suas propriedades e posteriormente [já no 2.º CEB] pela translação, rotação e reflexão e pelas suas composições (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Clements, 2003; Del Grande, 1990 citados por Gaspar & Cabrita, 2014, p. 173).

A Formação de Conceitos

A aprendizagem de conceitos geométricos sempre foi um aspeto da matemática em que muitos alunos sentem dificuldades e a sua aprendizagem por vezes é realizada com lacunas ou erros (Fuys, Geddes & Tichler, 1988, citados por Aires, Campos & Poças, 2015). Este processo de aprendizagem proporciona um desenvolvimento cognitivo e promove capacidades, especialmente a visualização espacial, que permitem ao sujeito compreender e intervir no mundo que o rodeia.

A construção dos conceitos é um processo lento que começa pela formação de conceitos concretos e evolui para os conceitos abstratos. Para Freudenthal (1973, citado por Aires et al., 2015), “não é possível definir-se algo antes de se saber o que pretende definir” (p. 155) e definir um conceito é “um meio de organizar dedutivamente as suas propriedades” (p. 156). Os alunos através das suas criações e uso de modelos, desenhos, diagramas, tabelas ou notações simbólicas vão estabelecendo

uma ponte entre o concreto e abstrato (Meyer, 2001, citado por Valério, 2005). Através destas representações, vão evoluindo na formação de conceitos pelos seus próprios métodos que merecem ser explorados pois constituem-se como ferramentas de apoio à construção e aprendizagem da Matemática (NCTM, 2008).

A visualização e a representação são duas capacidades de conexão muito forte (Loureiro, 2007) e são essenciais no processo de formação de conceitos. As representações constituem-se como um processo dinâmico e são ferramentas que o sujeito utiliza para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios que capturam o processo de construir um conceito ou uma relação matemática (Woleck, 2001, citado por Valério, 2005). Uma representação relaciona-se com a forma como a criança se liberta dos estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo (Bruner, 1999). Estas representações são um apoio à compreensão dos alunos em relação aos conceitos e relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados (NCTM, 2008) e são úteis para os alunos organizarem o seu raciocínio e tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão.

A compreensão de conceitos é uma componente importante da competência matemática, juntamente com o conhecimento de factos e procedimentos (Bransford, Brown & Cocking, 1999). Para dar sentido à matemática e ser facilitada a sua memorização é necessário que os alunos relacionem o conhecimento novo com o conhecimento prévio de forma significativa (Schoenfel, 1998, citado em NCTM, 2008). Para existir aprendizagem na matemática é necessária a sua compreensão e a capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos (NCTM, 2008).

Muitos conceitos em Geometria não são de fácil entendimento e não podem ser reconhecidos ou compreendidos, a menos que, visualmente, o aluno possa perceber exemplos e identificar figuras e propriedades associando-os a experiências anteriores (Ponte & Serrazina, 2000). O raciocínio espacial é um conjunto de processos cognitivos em que são construídas e manipuladas as representações mentais de objetos, relações e transformações (Clements & Battista, 1992). As imagens mentais e outras representações que o aluno vai construindo desempenham neste campo um papel fundamental. Uma imagem mental é o resultado figural ou proposicional ou um resultado misto de uma solicitação (interna ou externa) e reflete a experiência pessoal, influências culturais e estilos pessoais sendo o “produto típico” de um indivíduo apresentando conotações comuns entre indivíduos diferentes (D’Amore, 2007, p. 153). Estas imagens, associadas a determinados conceitos geométricos, são imagens concetuais e têm uma grande influência no domínio cognitivo do aluno. Quando os alunos reconhecem figuras geométricas e identificam as suas propriedades e relações espaciais, visualizando representações, associam-nas à imagem mental que têm dessas figuras.

Tall e Vinner (1981, citado por Dreyfus, 1990) apresentam a distinção entre o *conceito definição*, na sua definição formal matemática, e o *conceito imagem*, que engloba todas as imagens associadas na mente do sujeito ao nome do conceito e as propriedades que as caracterizam. O *conceito*

imagem está relacionado com as experiências do sujeito e forma-se a partir de exemplos e contra exemplos do conceito. É possível existir discrepâncias entre o *conceito imagem* e o *conceito definição*, uma vez que “o conjunto de objetos matemáticos considerados pelo aluno como exemplos de um conceito não é necessariamente o mesmo que o conjunto dos objetos matemáticos determinado pela definição” (Dreyfus, 1990, p. 117).

O Caso Particular da Simetria

No programa de Matemática o tema das transformações geométricas pode ser particularmente “rico” para a identificação de relações e compreensão de diversos conceitos como o de paralelismo, perpendicularidade e congruência. O programa do 1.º CEB integra apenas o estudo da simetria de reflexão e os padrões.

Quando se pretende que um aluno identifique que duas figuras são congruentes é necessário que ele tenha a “capacidade de reconhecer que um objeto possui invariantes propriedades tais como o tamanho e a forma apesar da possível variabilidade quando é observado de um ponto de vista distinto” (Lindquist & Shulte, 1987, citado por Maia, 2014, p. 128) o que pode ser particularmente difícil se as figuras visualizadas não estão em posições *standard*. Por exemplo, um aluno pode ter dificuldade em reconhecer ângulos retos que não estão em posições *standard* (um lado na vertical e o outro na horizontal), ou só conseguir identificar o triângulo retângulo quando o ângulo reto tem um dos lados na vertical e o outro na horizontal e no caso do quadrado se um dos seus lados é horizontal (Clements & Battista, 1992; Cooper & Krainer, 1990; citados por Maia, 2014, p. 129).

A noção de transformação acrescenta uma perspectiva funcional da Geometria e constitui um meio poderoso de estudo, de organização dos conceitos geométricos e mesmo de definição de Geometria (Veloso, 1998). No contexto deste estudo utilizamos o termo *transformação* para referir uma correspondência entre dois conjuntos de objetos geométricos e analisamos apenas o grupo das isometrias. Uma Isometria é uma transformação T de $\mathbf{R}^2$ sobre $\mathbf{R}^2$ que preserva as distâncias, ou seja, tal que, se A e B são dois pontos quaisquer de $\mathbf{R}^2$, se tem $\text{dist}(T(A), T(B)) = \text{dist}(A, B)$ e há quatro tipos fundamentais de isometrias: rotação, translação, reflexão (ou simetria axial) e reflexão deslizante (Veloso, 1998, p. 72). Para cada um dos quatro tipos de isometria indicados há uma simetria: simetria de reflexão (ou simetria axial), simetria de rotação (ou simetria rotacional), simetria de translação e simetria de reflexão deslizante (Serra, 1993).

A simetria não é exclusiva da área da matemática, e da Geometria em particular. A noção de simetria é importante em matemática mas também nas artes visuais e em diversas ciências como a Cristalografia e a Física (Oliveira, 1997). Segundo Veloso (1998), uma figura tem simetria se “existe pelo menos uma transformação geométrica diferente da identidade (...) que deixa a figura invariante” (p. 182), ou seja, “podem alguns ou todos os pontos da figura mudar de posição mas, a figura, como

um todo fica invariante” (p. 182). De um modo mais formal, consideramos que existe uma transformação de simetria, se F é uma figura de $\mathbf{R}^2$ e T uma transformação de $\mathbf{R}^2$ sobre $\mathbf{R}^2$ tal que $T(F)=F$ (Veloso, 1998).

Nas transformações geométricas, destacamos a simetria, por estar no âmbito deste estudo, sendo que “a ideia de simetria é uma das mais ricas em matemática e, em particular, na geometria” (Bastos, 2006, p. 8). O estudo das simetrias tem grandes potencialidades (Bastos, 2006):

- i. Constitui uma aplicação muito interessante das isometrias que permite desenvolver o conhecimento matemático destas transformações geométricas e fornecer, consequentemente, ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos.
- ii. O conceito de simetria pode ser também a base para atividades de descrição e classificação de figuras geométricas de argumentação/demonstração ou, em níveis mais adiantados, de construção de figuras.
- iii. A análise de objetos artísticos ou de cristais através das suas simetrias são atividades que estabelecem ligações entre a matemática e outros domínios do saber, podendo ser o ponto de partida para projetos interdisciplinares onde a matemática, em geral, e a geometria, em particular, assumem papéis importantes (p.11).

Os alunos, partindo das suas próprias experiências com as figuras, virando peças, rodando-as e experimentando novas disposições, aprendem naturalmente as transformações geométricas como o deslizar (translação), rodar (rotação) e inverter (reflexão), realizando estes movimentos de forma intuitiva desenvolvem o seu sentido espacial (Veloso, 1998).

A simetria está intimamente ligada às transformações geométricas, nomeadamente às isometrias, e os padrões envolvem “simetrias axiais, rotações e translações” (Veloso, 1998). Estes dois conceitos têm um excelente potencial para explorar as conexões entre a Matemática, a Natureza e a Arte.

Um bom exemplo para o estudo da simetria, são os polígonos regulares, pois estas figuras apresentam uma regularidade: o número de simetrias de reflexão é igual ao número de simetrias de rotação e, por isso, o número total de simetrias são o dobro do número de lados do polígono. Analisando alguns exemplos, temos: o caso do *quadrado* com quatro simetrias de reflexão – relativas às retas que passam pelos vértices opostos e pelos pontos médios de lados opostos e quatro simetrias de rotação de amplitudes 90° , 180° , 270° e 360° ; o *pentágono* com cinco simetrias de reflexão e cinco simetrias de rotação de amplitudes 72° , 144° , 216° , 288° e 360° (Veloso, 1998). O triângulo é outro polígono que permite investigar o conceito de simetria de uma forma bastante completa a partir dos três tipos de triângulos: triângulo equilátero, triângulo escaleno e triângulo isósceles (não equilátero). Podemos, por exemplo, apelar à atenção dos alunos para a ausência de simetria axial no triângulo escaleno por oposição ao sentido de *harmonia* que se verifica no triângulo equilátero. Qualquer estudo, com estes e outros polígonos, é interessante ser realizado a partir da apresentação das figuras em diferentes posições.

No estudo da simetria atividades como completar figuras, explorar elementos geométricos em diferentes polígonos, criar composições de figuras geométricas e padrões, permitem investigar

propriedades e relações geométricas, descobrir regularidades e aprofundar o conceito de transformação geométrica e, em particular, o de simetria.

Os Materiais Manipuláveis

Os materiais manipuláveis são “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar (...) objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia” (Matos & Serrazina, 1996, p. 193).

A importância dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem para a formação do conhecimento matemático é reconhecida em diversos documentos. O CNEB e o NPMEB já mencionavam o seu uso realçando os seus benefícios. O CNEB (2001) já referia que:

os materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos (p. 7).

Também no PMEB (2007) era mencionado que o ensino e aprendizagem da Geometria do 1.º ciclo devia “privilegiar a exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objetos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial” (p. 20) uma vez que os materiais manipuláveis estruturados e não estruturados “permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos” (p. 21).

Uma grande parte dos conceitos em Geometria para serem reconhecidos ou compreendidos requerem que o aluno reconheça exemplos e identifique figuras e propriedades associando-os a experiências anteriores (Ponte e Serrazina, 2000). No processo de ensino e aprendizagem a utilização de materiais manipuláveis pode proporcionar um ambiente de trabalho participativo e estimulante. No entanto, o sucesso da utilização destes materiais, com fins didáticos, depende do modo como as tarefas são implementadas, da visão que o professor tem da matemática e do seu conhecimento (Ponte & Serrazina, 2000; Serrazina, 1998; citados por Caldeira, 2009). Num estudo realizado por Ma (2009), com professores americanos e chineses, a investigadora destaca que um aspeto importante na utilização dos materiais manipuláveis é o debate nas aulas após o seu uso no qual os alunos têm de “mencionar, mostrar, explicar e argumentar as suas próprias soluções” (p. 59). Segundo Hiebert (1984, citado por Ma, 2009) é através destes debates que se estabelece “a construção explícita de ligações entre ações perceptíveis sobre os objetos e procedimentos simbólicos relacionados” (p. 59).

A manipulação de materiais e a reflexão sobre as atividades realizadas com estes recursos tem um papel fundamental na construção de conceitos (Ponte & Serrazina, 2000), constituindo o suporte visual e experimental como meio facilitador do desenvolvimento do pensamento geométrico e espacial. Os materiais concretos como, por exemplo, geoplanos, papel, modelos de formas geométricas em madeira ou plástico, sólidos, miras, espelhos e políedros pode ser útil no desenvolvimento de representações geométricas, mas devem ser utilizados *sabidamente* (Clements,

2004, citado por Vale, 2011). Para facilitar a concretização de um conceito, os alunos devem “criar e usar as representações para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas” (NCTM, 2007, p. 160) e assim minimizar as suas dificuldades tornando a matemática mais acessível e interessante.

Para Reis (1982, citado por Caldeira, 2009) há aspectos fundamentais que resultam da utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da matemática: (i) a aprendizagem baseia-se na experiência; (ii) a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência e o cerne da aprendizagem; (iii) a aprendizagem caracteriza-se por estádios distintos de desenvolvimento; (iv) a aprendizagem é aumentada pela motivação; (v) a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstrato; (vi) a aprendizagem requer participação/envolvimento ativo do aluno.

Através da manipulação os alunos adquirem competências matemáticas mas, do ponto de vista da aprendizagem matemática, o mais importante é a ação mental que é estimulada quando as crianças têm contacto com os objetos e os diferentes materiais nas suas mãos (Alsina, 2004).

Os materiais manipuláveis, como é o caso da Mira e do Tangram, podem ser usados em diversas atividades para facilitar o pensamento espacial dos alunos, mas, como refere Vale (2011):

um conjunto de materiais não contém ou produz matemática; apenas cada pessoa pode fazê-lo com a sua mente (...) as ideias matemáticas são abstractas, assim qualquer modelo que englobe essas ideias tem limitações: o modelo apenas proporciona o contexto favorável para a compreensão dos conceitos matemáticos que estão a ser tratados (p. 87).

O Tangram na aprendizagem de conceitos geométricos

O *Tangram* (Figura 2) é um *puzzle* originário da China, constituído por 7 peças com as formas básicas: 5 triângulos (2 grandes, 1 médio e 2 pequenos), 1 quadrado (correspondente a dois triângulos pequenos) e 1 paralelogramo (correspondente a 2 triângulos pequenos). As 7 peças deste *puzzle* formam um quadrado.



Figura 2. Modelo de Tangram (7 peças)

Existe um outro *Tangram* atípico com 9 peças (Figura 3) que não tem forma quadrada (Alsina, 2004). Este modelo possui bordas curvas e permite explorar também as linhas curvas. O *puzzle* originalmente designado como *Columbus` Egg* (*Columbian Puzzle*, Richter Anchor Stone, 1893) ou como *Ovo mágico/Tangram oval* (Figura 3) é muito interessante mas não é usual nas nossas escolas.



Figura 3. Modelo atípico de *Tangram* (9 peças)

Fonte: <http://www.cs.brandeis.edu/~storer/JimPuzzles/ZPAGES/zzzRichter03-EggOfColumbus.html>

A utilização do *Tangram* permite explorar diversos temas da matemática de forma lúdica e criativa, ao mesmo tempo que facilita o pensamento espacial através da concretização. Este recurso pode ser usado com múltiplas finalidades como por exemplo: para conhecer propriedades elementares das diferentes figuras que o compõem; observar relações simples que se podem estabelecer entre as diversas figuras (como classificar e ordenar); estudar a composição e decomposição de figuras; aprofundar a análise das diferentes formas geométricas, no que se refere às suas propriedades (lados formados por linhas retas ou curvas, número de lados de cada figura, etc.); realizar mudanças de posição construindo figuras mais complexas a partir de um critério pré-estabelecido; explorar as noções equivalência e congruência, superfície e área, entre outras (Alsina, 2004).

O GeoRefletor (ou Mira) na investigação da Simetria

O GeoRefletor (ou *Mira*), tal como o espelho plano, são materiais frequentemente usados na investigação das transformações geométricas. A *Mira* (Figura 4) é um objeto construído em material plástico colorido semiopaco e o *espelho plano* (Figura 5) é um objeto em vidro ou em papel refletor. Estes objetos permitem modelar fisicamente a transformação reflexão mas o *espelho* apresenta limitações em relação à *Mira*. O *espelho* não sobrepõe as imagens, há por vezes uma parte da figura que fica ocultada pelo espelho e não é refletida. Assim, ao utilizarmos os espelhos no estudo das isometrias há que ter em atenção duas limitações importantes (Velo, Bastos, Figueirinhas, 2009):

- i.) a de transformar um semiplano (ou semiespaço) no semiplano (ou semiespaço) complementar, em vez de transformar todo o plano (espaço) nele próprio;
- ii.) embora seja sempre possível obter, com os espelhos, a transformada de uma figura pela composta de duas ou três reflexões, posicionando devidamente dois ou três espelhos, não é possível «eliminar do campo visual» a figura intermédia. (p. 24).

A *Mira* sendo de material semiopaco, permite ver a reflexão do objeto de um dos lados (tal como no espelho) mas também através do plástico, possibilitando o traçado da imagem do outro lado.

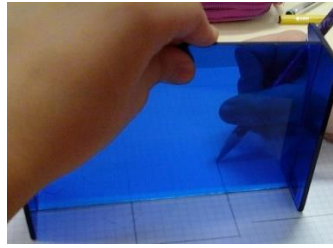


Figura 4. Modelo da Mira

O *espelho*, como só tem uma face espelhada, permite ver a reflexão da figura mas não permite ver se coincide ou não com a parte ocultada e a *Mira* permite ver o prolongamento da figura e verificar se existe ou não simetria (Veloso et. al., 2009).



Figura 5. Modelo de espelho

Fonte: <http://www.primas-project.eu/artikel/en/1119/magic-mirrors/view.do>

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

O objetivo principal deste estudo é a análise do desempenho dos alunos e suas aprendizagens, no contexto das tarefas de exploração e investigação de conceitos geométricos no 1.º Ciclo. Para este efeito foi elaborada uma cadeia de tarefas que integraram uma experiência didática com alunos de uma turma de 4.º ano, em que estes desenvolveram a sua atividade tendo a investigadora assumido o papel de professora e orientadora do trabalho.

Neste capítulo, apresentamos as opções metodológicas desta investigação e a fundamentação da metodologia de natureza qualitativa utilizada, plano de intervenção, os métodos de recolha e a análise dos dados. Descrevemos os participantes em estudo, as suas características gerais e referimos, sucintamente, o seu enquadramento escolar.

Opções metodológicas

A aprendizagem da matemática, e da Geometria em particular, é um processo contínuo e dependente de muitos fatores, nomeadamente: as vivências pessoais dos alunos, as atividades desenvolvidas e os recursos utilizados, a formação dos professores e a pré-disposição do aluno para a aprendizagem. Muitos dos resultados desse processo não são visíveis no imediato mas refletem-se ao longo de todo o percurso de um estudante.

Este estudo incidiu sobre as aprendizagens dos alunos no domínio da Geometria e Medida, subdomínio *Localização e orientação no espaço* e *Figuras geométricas*. Definiu-se como objetivo principal do estudo a observação, descrição e interpretação do processo de mobilização de aprendizagens e sua aplicação a novas situações e pretendemos identificar contributos para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem no campo da visualização espacial.

Em termos metodológicos optamos por um método de investigação misto, com recolha de informação qualitativa e quantitativa. Para Afonso (2005) “a investigação qualitativa preocupa-se com a recolha de informação fiável e sistemática sobre aspetos específicos da realidade social usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade” (p. 14).

Para Bogdan e Biklen (2013), a investigação qualitativa tem cinco características:

1. Os dados são recolhidos em ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. O investigador integra-se no ambiente a estudar, de forma a criar a aproximação adequada, pelo contacto direto, para observar e compreender o

objeto em estudo no seu próprio contexto. “Para o investigador divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o seu significado” (p. 48).

2. É uma investigação descritiva, sendo os dados recolhidos em forma de palavras ou imagens e não números. Esses dados resultam de transcrição de entrevistas, notas de campo, documentos pessoais e registos de som e imagem. A sua análise deve respeitar com o maior rigor possível a forma em que foram registados e transcritos. Os detalhes do meio envolvente devem ser considerados na análise devendo esta ser realizada no pressuposto de que “tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo” (p. 49). É dada maior importância ao processo do que aos resultados ou ao produto.
3. A análise dos dados é realizada de forma indutiva, não existindo o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses pré-concebidas. Numa investigação qualitativa a elaboração de uma teoria resulta da inter-relação de todos os elementos recolhidos e vai-se clarificando à medida que o processo vai evoluindo.
4. É atribuído ao significado uma importância vital.
5. Os investigadores revelam preocupação com a apreensão rigorosa das diferentes perspetivas dos participantes e com o registo do modo como as pessoas interpretam os seus significados.

Pretendemos realizar um estudo de caso que, não sendo meramente descritivo, permitisse fundamentar considerações e reflexões de cariz analítico e, ao mesmo tempo, ajudar a produzir novas teorias e conduzir a interrogações para futuras investigações. Um estudo de caso, em educação “é uma pesquisa empírica conduzida numa situação circunscrita de espaço e de tempo, centrada em facetas interessantes de uma atividade ou programa” (Basse, 1999, citado por Afonso, 2005, p. 70) e tem como objetivo “fundamentar juízos e decisões” (p. 70).

Os estudos descritivos resultam de “uma narrativa ou descrição de factos, situações, processos ou fenómenos” (Afonso, 2005, p. 43) a partir de “material empírico relevante” (p. 43).

O estudo foi desenvolvido com alunos do 4.º ano do Ensino básico, por se tratar de um ano terminal de ciclo e permitir uma maior abrangência de aprendizagens sobre a temática em estudo. A experiência decorreu em ambiente natural, sendo a investigadora (e professora) um elemento ativo no processo. Desenvolveu e orientou as tarefas na aula, observou os comportamentos dos alunos nos diversos momentos de aprendizagem, e verificou a sua evolução em termos de construção de conhecimentos geométricos.

Contexto de Intervenção

A Escola

O presente estudo foi realizado numa Escola Básica do 1.º ciclo e pré-escolar. É uma das cinco escolas de um Agrupamento de Escolas do concelho de Vila Nova de Gaia, distrito do Porto. Esta escola é constituída por uma comunidade de alunos pluricultural, em que uma parte desses alunos entra na escola pelo fator proximidade ao trabalho e a outra parte pela proximidade à residência (Projeto Educativo, 2012-2015).

Em termos de instalações, é uma escola com boas infraestruturas em que se incluem 14 salas de aula, biblioteca, polivalente, cantina, gabinete da educação especial e polidesportivo. Todas as salas estão equipadas com computadores, quadros interativos ou vídeo-projetores.

Como atividades complementares do currículo escolar, esta escola oferece aos alunos a possibilidade de frequentar o ensino da música, inglês ou desporto. Ao longo do ano são desenvolvidos diversos projetos escolares nomeadamente: “Mais Educação”, “Saúde em Meio Escolar”, “Eco-Escolas e Proteção da Natureza”, “Solidariedade e Voluntariado”, “Tradições e Épocas Festivas” e outros projetos Científico-Pedagógicos. Em termos pedagógicos para o triénio 2012-2015, a escola elegeu para o 1.º ciclo dois grandes objetivos a atingir: “melhorar a qualidade do sucesso” e “melhorar a taxa de transição” (PE, 2012-2015).

A Turma

A turma é constituída por 20 alunos do 4.º ano de escolaridade, sendo 12 do sexo feminino e 8 do sexo masculino, com uma média de 10 anos de idade. O grupo-turma tem 1 aluno com Necessidades Educativas Especiais, 1 aluno em processo de avaliação e 2 alunos com “mutismo seletivo”. Estes alunos, pelas suas características, não integram no estudo embora tenham realizado as atividades mas estas não são analisadas. Com exceção de dois alunos, os restantes frequentam a escola desde o Pré-Escolar e estão pela primeira vez no 4.º ano.

Em termos de ritmo de trabalho o grupo-turma é bastante heterogéneo, pois metade da turma realiza as tarefas com autonomia no tempo previsto. A maioria dos alunos revela também pouca destreza em termos de motricidade fina, o que é notável no recorte, dobragem, pintura e sobretudo na utilização de instrumentos de medida e desenho.

Os alunos são respeitadores, interessados, empenhados, muito participativos, competitivos e com uma boa estabilidade emocional. Em relação à família, pode considerar-se que têm bom acompanhamento familiar e pais muito presentes no percurso escolar dos seus educandos, disponíveis e colaborativos nos projetos e atividades escolares.

A maioria dos alunos tem computador e acesso à Internet em casa e frequenta atividades fora da escola como futebol, dança, música e patinagem.

Recolha de Dados

A recolha de dados resultou da aplicação de uma cadeia de tarefas desenvolvidas numa lógica de aprendizagem sequencial, durante dois períodos letivos (2.º e 3.º período) do ano escolar 2014/2015.

As tarefas foram desenvolvidas em contexto de sala de aula e como instrumentos de recolha de dados foram utilizados os seguintes:

- i. Observação participante: notas de campo, resultantes da observação da atividade dos alunos e algumas gravações em vídeo no decurso da realização das tarefas;
- ii. Registos fotográficos, vídeo e áudio;
- iii. Análise documental dos registos escritos dos alunos e outros materiais manipuláveis de suporte às tarefas realizadas.

As *notas de campo* são um relato escrito do que o investigador observa, ouve, vê, e experiencia enquanto recolhe e reflete sobre os dados (Bogdan & Biklen, 2013).

Para este estudo confrontaram-se os elementos emergentes de cada uma das tarefas propostas e dos contextos de trabalho envolvidos e, a partir deste processo, foi gerada informação qualitativa e quantitativa. Estamos conscientes de que numa experiência pedagógica “tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão esclarecedora do nosso objeto de estudo” (Bogdan & Biklen, 2013, p. 49).

Realizámos uma observação direta e participante atenta às dinâmicas de cada aluno, às suas questões, à forma de manuseamento dos materiais, ao tempo de realização das atividades e ao seu empenho e motivação. Segundo Bogdan e Biklen (2013), a presença do investigador como observador pode afetar e alterar o comportamento dos sujeitos da investigação. Conscientes desta possibilidade, procedemos de forma natural e discreta de forma a não alterar o ambiente habitual de sala de aula. Na investigação qualitativa, assumimos o papel de professora e investigadora e procuramos “compreender a forma como os indivíduos envolvidos entendem a sua situação” (Bogdan & Biklen, 2013, p. 265) ao “lidar com os participantes na mudança”(p. 265) e observando o comportamento no seu contexto valorizando o processo em detrimento dos resultados. Neste sentido procedemos a uma recolha de dados com carácter indutivo sem hipóteses pré-concebidas.

A observação participante permite conhecer globalmente os processos, as dinâmicas e as perspetivas dos participantes envolvidos (Ponte, 1994). Neste caso possibilitou-nos a compreensão,

com pormenor, dos procedimentos dos alunos no decorrer das tarefas e a identificação de eventuais constrangimentos à sua resolução.

Plano geral da experiência didática

Na elaboração deste estudo consideramos três grandes fases: primeira - identificação do problema, definição dos objetivos e questões orientadoras, revisão da literatura científica e definição das opções metodológicas; segunda – elaboração e planificação das tarefas, implementação da experiência didática; terceira - análise de dados, conclusões e identificação de outras temáticas a estudar.

A experiência decorreu em dois períodos letivos (2.º e 3.º Períodos) com o desenvolvimento de 12 tarefas (T1 a T12) em contexto de sala de aula.

Na Tabela 3, apresentamos a calendarização e o tempo previsto para o desenvolvimento de cada sessão ou tarefa.

Tabela 3. Planificação geral da Experiência didática

Sessão	Tarefas desenvolvidas	Calendarização/ Duração
1.ª Sessão	T1: Desenhar e descrever uma figura geométrica	3 de fevereiro de 2015 45 minutos
2.ª Sessão	T2: Representar linhas horizontais, verticais, paralelas e perpendiculares	18 de março de 2015 90 minutos
	T3: Reconhecer e representar segmentos de reta geometricamente iguais	
	T4: Reconhecer e representar segmentos de reta paralelos	
	T5: Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares	
3.ª Sessão	T6: Reconhecer e representar ângulos retos	19 de março de 2015 90 minutos
	T7: Representar polígonos geometricamente iguais	
4.ª Sessão	T8: Reconhecer simetrias (completar figuras)	25 de maio de 2015 90 minutos
	T9: Reconhecer e representar eixos de simetrias	
5.ª Sessão	T10: Investigar simetrias (com a <i>Mira</i>)	3 de junho de 2015 90 minutos
6.ª Sessão	T11: Criar uma composição geométrica com o Tangram	5 de junho de 2015 90 minutos
7.ª Sessão	T12: Desenhar e descrever uma figura geométrica	12 de junho de 2015 45 minutos
	Criar um padrão geométrico para a capa do “Livro de Curso”	12 de junho de 2015 90 minutos

Para este estudo elaborámos um conjunto de tarefas, de acordo com o Programa e Metas Curriculares de Matemática, que consideramos estarem ao alcance de todos os participantes. Estas tarefas foram pensadas e estruturadas para serem implementadas no âmbito deste estudo, no sentido de fornecer informação que nos permita responder às questões orientadoras definidas. O valor de uma tarefa matemática “depende do facto de abordar temas matemáticos importantes, de ser intelectualmente estimulante e de poder ser resolvida por meio de ferramentas que o aluno possui ou pode inferir” (NCTM, 2008, p. 236).

Esta experiência didática foi possível pela disponibilidade dos Alunos, Encarregados de Educação e Direção da Escola, que permitiram o seu desenvolvimento. Os objetivos desta intervenção foram apresentados às estruturas de Direção do Agrupamento, que reconheceram prontamente a sua importância e autorizaram o seu desenvolvimento. Por questões legais e éticas, solicitamos aos Encarregados de Educação dos alunos da turma, a autorização escrita para a recolha de dados sobre os seus educandos.

Experiência Didática

Os conteúdos programáticos contemplados nas tarefas deste estudo, já tinham sido abordados pelos alunos no presente ano letivo ou em anos letivos anteriores. Sendo assim, as tarefas não foram desenvolvidas como uma nova abordagem de conteúdos mas como verificação de pré-requisitos, consolidação e ampliação de conhecimentos. Iniciamos com tarefas que mobilizam um menor número de conceitos evoluindo, sequencialmente, para tarefas com uma maior abrangência de conceitos e a sua conexão. Para este estudo e como é recomendado pelo NCTM (2008), seleccionámos tarefas que “ajudem os alunos a explorar e desenvolver ideias matemáticas cada vez mais complexas” (p. 236).

As tarefas desenvolvidas estão integradas no domínio *Geometria e Medida* (GM) e incidem sobre os subdomínios *Localização e orientação no espaço* (LOE) e *Figuras geométricas* (FG), conforme os conteúdos envolvidos. A tarefa T1, considerada de diagnóstico, foi repetida na última sessão, para permitir uma análise da evolução dos alunos em termos de reconhecimento das propriedades geométricas e comunicação matemática. As tarefas T2 a T7, sobre o reconhecimento visual de objetos e suas propriedades, incidem sobre conceitos geométricos elementares considerados como pré-requisitos para as tarefas seguintes.

Na Tabela 4, apresentamos o enquadramento deste grupo de tarefas no PMEB (2013) e MCM (2012).

Tabela 4. Enquadramento da Experiência didática no PMEB - Geometria e Medida

N.º	Tarefas desenvolvidas	Conteúdos	Ano
1	Desenhar e descrever uma figura geométrica	Comparação de comprimentos	FG1
		Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respectivos lados e vértices, circunferência, círculo	
		Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos	FG2
		Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango)	
		Pentágonos e hexágonos	FG3
		Identificação de eixos de simetria em figuras planas	
		Comparação das amplitudes de ângulos	
2	Representar linhas horizontais, verticais, paralelas e perpendiculares	Ângulos retos, agudos e obtusos	FG4
		Polígonos regulares	
3	Reconhecer e representar segmentos de reta geometricamente iguais	Segmentos de reta paralelos e perpendiculares Direções horizontais e verticais	LOE3
4	Reconhecer e representar segmentos de reta paralelos	Comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta	FG1
		Segmentos de reta paralelos e perpendiculares em grelhas quadriculadas	LOE3
5	Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares	Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas; retas não paralelas que não se intersectam	FG4
		Segmentos de reta paralelos e perpendiculares em grelhas quadriculadas	LOE3
6	Reconhecer e representar ângulos retos	Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas; retas não paralelas que não se intersectam	FG4
		Ângulo formado por duas direções	LOE4
7	Representar polígonos geometricamente iguais	Ângulos retos, agudos e obtusos	FG4
		Identificação de eixos de simetria em figuras planas	FG3
		Polígonos geometricamente iguais	FG4

Exemplo: **LOE4** - Localização e orientação no espaço - 4.º ano; **FG4** – Figuras Geométricas - 4.º Ano

As tarefas T8 a T12 têm como o tema estruturante *Simetria* - caso particular da *simetria de reflexão* e envolvem a conexão de vários conceitos geométricos. Neste grupo, as tarefas T10 e T11, foram desenvolvidas com o recurso a materiais manipuláveis: T10 – com a *Mira* e *modelos de polígonos em papel*; T11 – com o *Tangram*. A tarefa T12 é uma repetição da T1. Esta experiência terminou com a criação de um padrão geométrico para a capa do livro de curso dos alunos. No final de todas as tarefas, os alunos realizaram um trabalho refletindo a aplicação dos conteúdos

programáticos desenvolvidos e a sua criatividade através da criação de um padrão geométrico. Este trabalho constituiu-se apenas como um exemplo de aplicação da Geometria e Arte e não faz parte da análise neste estudo.

Na Tabela 5, apresentamos o enquadramento deste grupo de tarefas no PMEB (2013) e MCM (2012).

Tabela 5. Enquadramento da Experiência didática no PMEB – Geometria e Medida

N.º	Tarefas desenvolvidas	Conteúdos	
8	Reconhecer simetrias	Construção de figuras com eixo de simetria	FG2
9	Reconhecer e representar eixos de simetrias	Identificação de eixos de simetria em figuras planas	FG3
		Polígonos regulares	FG4
10	Investigar simetrias (com a <i>Mira</i>)	Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos	
		Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango)	FG2
		Pentágonos e hexágonos	
		Identificação de eixos de simetria em figuras planas	FG3
		Polígonos regulares	FG4
11	Criar uma composição geométrica com o Tangram	Construção de figuras com eixo de simetria	FG2
		Identificação de eixos de simetria em figuras planas	FG3
12	Desenhar e descrever uma figura geométrica	Comparação de comprimentos	
		Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respectivos lados e vértices, circunferência, círculo	FG1
		Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos	
		Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango)	FG2
		Pentágonos e hexágonos	
		Segmentos de reta paralelos e perpendiculares	LOE3
		Identificação de eixos de simetria em figuras planas	FG3
		Comparação das amplitudes de ângulos	
		Ângulos retos agudos e obtusos	FG4
		Polígonos regulares	
	Criar um padrão geométrico para a capa do “Livro de Curso”	Pavimentações do plano	FG4

FG - Figuras geométricas; LOE – Localização e orientação no espaço.

CAPÍTULO III

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

O objetivo deste estudo é analisar as práticas dos alunos de uma turma do 4.º ano na resolução de tarefas de Geometria.

Neste capítulo apresentamos o desenvolvimento de cada uma das tarefas, a informação obtida dos diversos instrumentos de recolha de dados, a análise e discussão dos resultados.

No tratamento dos dados, procedemos a uma análise qualitativa e quantitativa dos registos escritos, produções gráficas e construções, dos alunos. Após uma análise de conteúdo das respostas dos alunos em cada tarefa, procedemos a uma categorização dos dados de acordo com os objetivos definidos para as questões. Todas as tarefas foram resolvidas individualmente por cada aluno.

De forma a manter o anonimato dos alunos, estes são referenciados com uma sigla composta pela letra **A** (aluno) e um número que corresponde seu número de ordem na lista da turma (e.g., “A3”).

Para complementar a análise apresentamos alguns exemplos de produções dos alunos: respostas escritas, desenhos ou imagens fotográficas.

Tarefa 1: Representar e descrever uma figura geométrica

Nesta tarefa, pretendemos a descrição de uma figura geométrica, numa malha quadriculada. Como objetivos gerais foram definidos os seguintes: *situar-se e situar objetos no espaço; identificar e comparar ângulos; reconhecer propriedades geométricas*. Além destes objetivos gerais pretendemos também o desenvolvimento da *comunicação matemática*.

Na Figura 6 apresentamos o enunciado das questões da Tarefa 1.

“Desenha uma figura geométrica no quadriculado seguinte.”

[quadrado de 10x10 em malha quadriculada]

“Imagina que tens de explicar a um colega o que desenhaste sem dizeres o nome dessa figura geométrica.

Regista essa explicação nas linhas seguintes.”

Figura 6. Enunciado da Tarefa 1

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno e a sua leitura em voz alta. Após a análise de conteúdo das respostas dos alunos, procedemos à categorização dos dados da seguinte forma:

As figuras geométricas foram organizadas em quatro grupos:

- *Triângulo*;
- *Retângulo*;
- *Quadrado* (como caso particular do retângulo);
- *Outras figuras* (com mais de 4 lados).

Na Tabela 6, apresentamos a distribuição das figuras desenhadas pelos alunos, por grupo.

Tabela 6. Distribuição das figuras por grupo

Figura geométrica	N.º figuras/tipo
<i>Triângulo</i>	4
Quadriláteros:	
<i>Retângulo</i>	3
<i>Quadrado</i>	3
<i>Outras figuras</i>	6

Nesta tarefa verificamos uma distribuição uniforme do número de figuras por grupo. A maioria dos alunos desenhou possivelmente as figuras que lhes são mais familiares, sendo 63% das figuras representações triângulos e retângulos (incluindo o quadrado como caso particular). Nas *outras figuras*, há polígonos cuja forma corresponde à inicial do nome do aluno e duas figuras resultantes de uma composição de polígonos. Observamos que apesar dos alunos terem material de desenho e medida, alguns não o utilizaram para desenho e nenhum o usou para efetuar medições.

Apresentamos na Figura 7 alguns exemplos de figuras dos alunos.

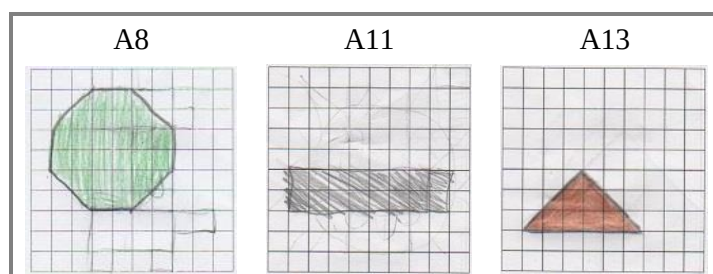


Figura 7. Exemplos de resposta sobre a representação da figura geométrica

Na análise da descrição/explicação da figura geométrica selecionamos os seguintes atributos geométricos:

- *Vértices*: número;
- *Lados*: número e congruência: iguais/diferentes; comprimento em quadriculas/cm;
- *Paralelos/Perpendiculares*: posição relativa dos lados da figura;
- *Ângulos*: retos/agudos/obtusos e sua amplitude;
- *Eixos de simetria*: número ou referência à propriedade;
- *Outras propriedades*: polígonos regulares/irregulares.

Na Tabela 7 apresentamos uma sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos.

Tabela 7. Distribuição dos termos utilizados na descrição das figuras geométricas

Atributos geométricos	Figura geométrica			
	Triângulo	Retângulo	Quadrado	Outros polígonos
Vértices	“três pontos” “é bicuda”	“4 bicos” “4 cantos”	“4 vértices” “linhas na ponta coladas uma às outras”	
Lados	“3 lados com a mesma medida” “uma reta na diagonal”	“4 lados” “comprimentos diferentes” “plano por todos os lados” “4 linhas” “duas linhas maiores do que as outras”	“4 lados” “lados todos iguais” “4 linhas retas”	“8 lados”
Ângulos	-	-	-	-
Eixos de simetria	-	-	-	-
Outras propriedades	-	-	-	-

A análise qualitativa e quantitativa das respostas dos alunos permite-nos registar as seguintes constatações:

- Destaque para a referência aos lados e vértices e ao seu número;
- Reconhecimento correto do número de lados e vértices;
- Ausência de rigor matemático, em algumas respostas, na referência aos vértices (*bicos, cantos*);
- Ausência de rigor matemático, em algumas respostas, na referência aos lados (*linhas*);
- Ausência de referência à *relação de posição, ângulos, eixos de simetria e outras propriedades*.

Na sua maioria, as descrições revelaram-se muito incompletas, com uma redação escrita pouco clara e sem rigor matemático o que dificilmente permitiria “adivinhar” a figura em causa. Uma vez que estas representações são de figuras familiares aos alunos (retângulo, quadrado, triângulo), seria de esperar uma descrição mais completa tendo em conta o ano em estudo. Apresentamos seguidamente alguns exemplos de respostas dos alunos (Figura 8.).

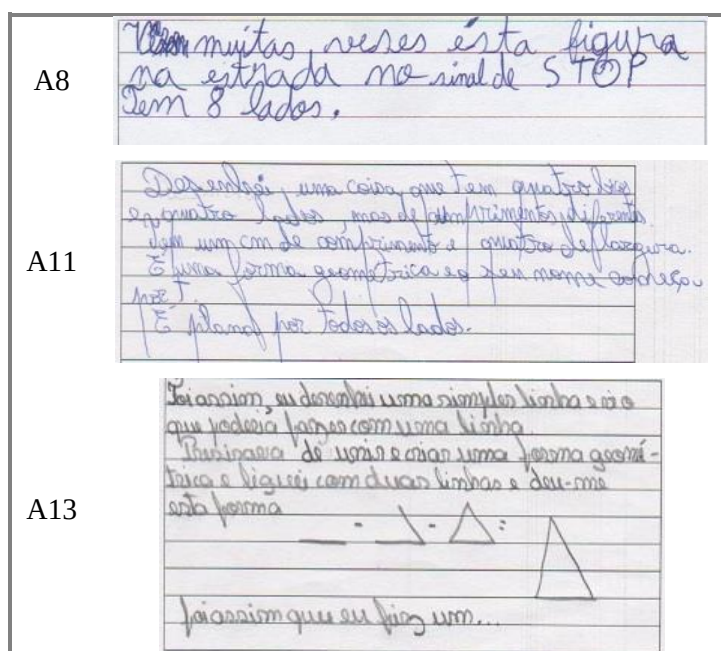


Figura 8. Exemplos de resposta sobre a descrição da figura geométrica

Tarefa 2: Representar linhas horizontais verticais, paralelas e perpendiculares.

Nesta tarefa, pretendemos a representação de pares de *linhas horizontais*, *verticais*, *paralelas* e *perpendiculares* em três planos (representados por um quadrado) com fundos diferentes: plano *liso*, plano *quadriculado* e plano *triangular isométrico*. Foi referido aos alunos que não podiam usar as linhas de contorno de cada um dos quadrados nas suas representações.

Como objetivo geral definimos o seguinte: *situar-se e situar objetos no espaço*.

Na Figura 9 apresentamos o enunciado das questões da Tarefa 2.

1. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas horizontais.
2. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas verticais.
3. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas paralelas.
4. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas perpendiculares.

[grupo de grelhas apresentada em cada questão]

Figura 9. Enunciado da Tarefa 2

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno e a sua leitura em voz alta.

Após análise das respostas dos alunos, em cada uma das representações, organizamos os dados de acordo com as seguintes categorias: *Representa certo* e *Representa errado*.

- i. ***Representa certo*** - as *linhas horizontais, verticais, paralelas, perpendiculares*, se apresenta uma representação correta no plano respetivo (plano liso/quadriculado/isométrico);
- ii. ***Representa errado*** - as *linhas horizontais, verticais, paralelas, perpendiculares*, se não apresenta uma representação ou apresenta uma representação errada no plano respetivo (plano liso/quadriculado/isométrico).

Na Tabela 8, apresentamos uma sistematização da análise das respostas sobre a representação de linhas verticais, horizontais, paralelas e perpendiculares.

Tabela 8. Distribuição das respostas dos alunos na Tarefa 2

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas	
		<i>Representa certo</i>	<i>Representa errado</i>
Q.1	Representar linhas horizontais		
	Plano <i>liso</i>	15	1
	Plano <i>quadriculado</i>	15	1
	Plano <i>isométrico</i>	15	1
Q.2	Representar linhas verticais		
	Plano <i>liso</i>	16	-
	Plano <i>quadriculado</i>	16	-
	Plano <i>isométrico</i>	16	-
Q.3	Representar linhas paralelas		
	Plano <i>liso</i>	16	-
	Plano <i>quadriculado</i>	16	-
	Plano <i>isométrico</i>	15	1
Q.4	Representa linhas perpendiculares		
	Plano <i>liso</i>	15	1
	Plano <i>quadriculado</i>	15	1
	Plano <i>isométrico</i>	14	2

No desenvolvimento da tarefa T2, observamos que três alunos revelaram dificuldades no posicionamento da régua na folha, particularmente no traçado das linhas verticais e oblíquas.

A análise das respostas permite-nos verificar que a grande maioria dos alunos conseguiu representar os objetos geométricos indicados nos diferentes modelos de plano.

Na análise da questão 3 e 4, constatamos que a posição *standard* é significativamente mais marcante na representação de *linhas perpendiculares* relativamente à representação de *linhas paralelas*. Verificamos que 75% dos alunos apresenta as suas representações de linhas perpendiculares na posição *standard*. No caso das linhas paralelas só 35% dos alunos é que representa nesta posição os restantes apresentam representações em posição *não standard*. Uma situação que nos despertou interesse foi observar o rigor de alguns alunos em traçar as paralelas com o mesmo comprimento, facto que decidimos explorar na reflexão realizada no final da tarefa.

Apresentamos na Figura 10 alguns exemplos de representações sobre linhas paralelas e perpendiculares.

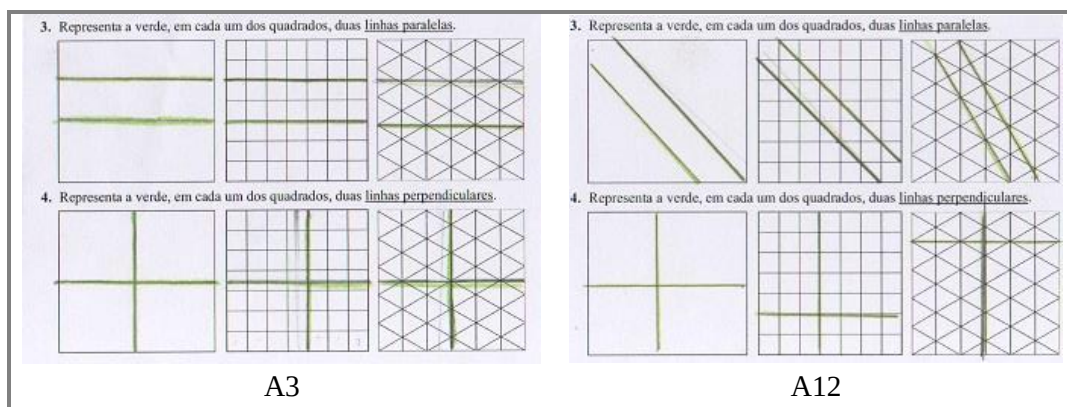


Figura 10. Exemplos de resposta de representações de linhas paralelas e perpendiculares

No final da sessão, no momento de reflexão em grande grupo, a professora apresentou no quadro, alternativamente, dois exemplos de representações *não standard* para cada um dos tipos de linhas (paralelas/ perpendiculares). Num dos exemplos, as linhas tinham aproximadamente o mesmo comprimento e, no outro, comprimentos significativamente diferentes. A professora formulou a seguinte questão?

Prof.: “As representações que estão no quadro, são as duas de linhas paralelas?” “Levanta o braço, quem responde SIM”.

A esta questão, e após algum silêncio geral, levantam o braço apenas 2 alunos (A8 e A11).

A professora [apagou as linhas paralelas e representou as perpendiculares] reformulando a questão.

Prof.: “As representações que estão no quadro são as duas de linhas perpendiculares?” “Levanta o braço, quem responde SIM”.

A esta questão, a resposta foi mais imediata e 4 alunos (A8, A11, A12 e A13) levantam de imediato o braço. Devemos notar que, os dois alunos que responderam “SIM” à questão anterior foram novamente os primeiros a levantar o braço e como são bons alunos a sua resposta pode ter influenciado a dos colegas.

Após esta constatação explicamos aos alunos que em todas as representações que fizemos no quadro o comprimento das linhas não tinha importância. O aluno A9 interveio dizendo “quando são do mesmo comprimento é mais fácil ver”.

Tarefa 3: Reconhecer e representar segmentos de reta geometricamente iguais

Nesta tarefa, pretendemos na questão 1, que os alunos identificassem, em cada um dos polígonos, os lados com o mesmo comprimento (geometricamente iguais) e, na questão 2, a representação de polígonos com esta mesma característica. Em cada um dos polígonos apresentados há no máximo 2 grupos de lados geometricamente iguais.

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer e representar formas geométricas*. Na Figura 11., apresentamos o enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 3.

-
1. Em cada uma das figuras marca com um **X**, **se existir**, todos os lados com o mesmo comprimento.

[imagem com as figuras]
 2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um par de lados com o mesmo comprimento.
-

Figura 11. Enunciado da Tarefa 3

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno, a sua leitura em voz alta e as seguintes recomendações:

[Observar com atenção todas as figuras e assinalar, com X, os lados com o mesmo comprimento caso existam;

Nas figuras que não tiverem marcado nenhum X, consideramos, para efeito de correção, que não têm a característica indicada;

Evitar repetir, na questão 2, as figuras apresentadas na questão 1.]

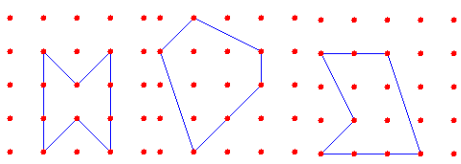
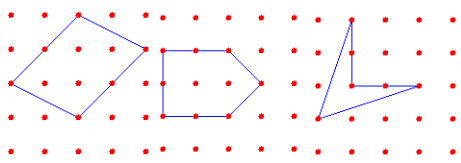
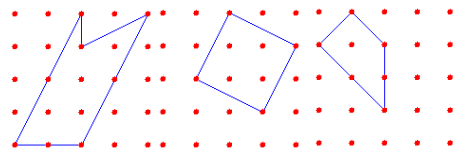
Após análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 1 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 1

- i. **Resposta Certa** - se responde corretamente de acordo com a figura (assinala todos os grupos de segmentos de reta geometricamente iguais que existem ou não assinala nenhum caso não exista);
- ii. **Resposta Incompleta** - se assinala apenas parte dos grupos de segmentos geometricamente iguais;
- iii. **Resposta Errada** - se responde errado de acordo com a figura.

Na Tabela 9, apresentamos a análise das respostas sobre o reconhecimento de segmentos de reta geometricamente iguais.

Tabela 9. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 3

Questão	Categorização da Resposta Figuras	N.º de respostas		
		Certa	Incompleta	Errada
Q.1	 Fig. A Fig. B Fig. C			
	Figura A	14	2	-
	Figura B	6	-	10
	Figura C	4	-	12
	 Fig. D Fig. E Fig. F			
	Figura D	14	-	2
	Figura E	4	12	-
	Figura F	13	-	3
	 Fig. G Fig. H Fig. I			
	Figura G	12	-	4
	Figura H	16	-	-
	Figura I	10	-	6

Na questão 1, os alunos responderam aparentemente sem grandes hesitações, assinalando ou não assinalando os segmentos de reta geometricamente iguais (ou congruentes) conforme entendiam. Os dados permitem verificar que, nas Figuras B, C e E, mais de metade dos alunos apresentaram uma resposta errada ou incompleta (Tabela 9):

- Figura B - 62,5% dos alunos apresenta uma resposta errada; têm dificuldade o na comparação do comprimento de lados em posição *não standard*;
- Figura C - 75% dos alunos apresentam uma resposta errada;
- Figura E - 75% dos alunos apresentam uma resposta incompleta; não reconhecem a congruência dos lados horizontais com o vertical;
- Figura H - apesar de representada em posição *não standard*, as respostas dos alunos superaram as nossas expetativas pois todos responderam acertadamente.

Na Figura 12, apresentamos um exemplo de resposta dos alunos sobre o reconhecimento de segmentos de reta geometricamente iguais.

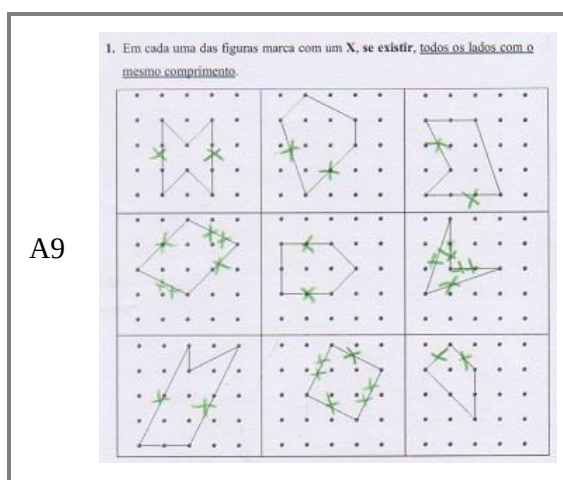


Figura 12. Exemplo de resposta sobre a identificação de lados com o mesmo comprimento

Após análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 2 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 2

- i. **Representa** polígonos que têm pelo menos um par de lados com o mesmo comprimento, se representa dois ou três polígonos com a característica indicada;
- ii. **Não representa** polígonos que têm pelo menos um par de lados com o mesmo comprimento, se não responde ou se não representa dois ou três polígonos com a característica indicada.

Na Tabela 10., apresentamos uma sistematização dos dados sobre a análise das representações de polígonos realizadas pelos alunos.

Tabela 10. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2 da Tarefa 3

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.2	Representa polígonos com segmentos de reta geometricamente iguais	16
	Não representa polígonos com segmentos de reta geometricamente iguais	-

Na questão 2, com exceção de um aluno, todos os outros representaram os três polígonos com a característica indicada mas, apenas 3 alunos desenharam polígonos na posição *não standard* e

diferentes dos exemplos dados na questão 1. Verificamos também que 31% dos polígonos representados são retângulos (inclui os quadrados, como caso particular).

A análise conjunta das respostas às duas questões, permite-nos verificar que os alunos têm mais facilidade em reconhecer a congruência de segmentos de reta se estes estão na vertical ou na horizontal, como refere a literatura sobre imagens conceptuais. O mesmo acontece na maioria das representações em que poucos alunos apresentam polígonos em posição *não standard*.

Observamos também, no decurso da realização da tarefa, que nenhum aluno utilizou os instrumentos de medição para este fim. A régua foi apenas usada por alguns alunos nas construções da questão 2. Referimos que propositadamente, não sugerimos esta possibilidade (medição dos segmentos de reta nas figuras), pois pretendíamos verificar se algum aluno o fazia de forma espontânea, o que não aconteceu.

No momento da reflexão final sobre esta tarefa, perguntamos aos alunos se tiveram dificuldade em alguma figura em especial mas nenhum aluno indicou qualquer figura. Esta resposta, leva-nos a pensar que os alunos não tiveram consciência da sua dificuldade em reconhecer objetos geométricos em posição *não standard*.

Na Figura 13, apresentamos um exemplo sobre a representação de polígonos com algum par de lados geometricamente iguais.

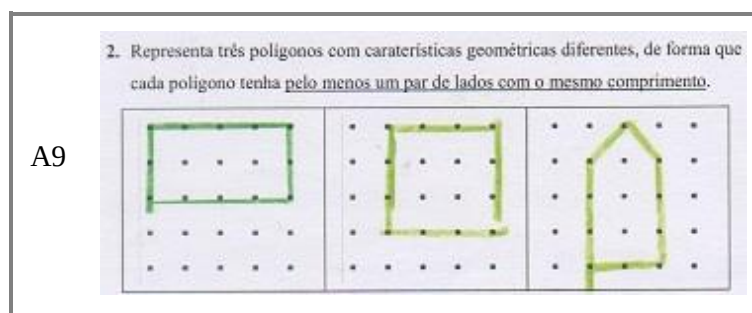


Figura 13. Exemplo de polígonos com pelo menos um par de lados iguais

Tarefa 4: Reconhecer e representar segmentos de reta paralelos

Nesta tarefa, pretendemos com a questão 1, que os alunos identificassem, em cada um dos polígonos, os segmentos de reta paralelos e, na questão 2, a representação de polígonos com esta mesma característica. Na ficha distribuída aos alunos, as figuras apresentadas na questão 1, têm no máximo 3 pares de lados paralelos e as restantes, na sua maioria, 1 par.

Indicamos, entre parênteses, para cada figura, o número de pares de lados paralelos correspondente: Fig. A (3), Fig. B (1), Fig. C (1), Fig. D (2), Fig. E (1), Fig. F (0), Fig. G (1), Fig. H (2), Fig. I (1).

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer propriedades geométricas*.

Na Figura 14., apresentamos o enunciado das questões 1 e 2 da Tarefa 4.

-
1. Em cada uma das figuras identifica, **se existir**, todos os lados paralelos. (Assinala com uma cor diferente cada par de lados paralelos).
[imagem com as figuras]
 2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um par de lados paralelos.
-

Figura 14. Enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 4

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno, a sua leitura em voz alta e as seguintes recomendações:

[Observar com atenção todas as figuras e assinalar, com **X**, os pares de lados paralelos caso existam;

Nas figuras que não tiverem marcado nenhum **X**, consideramos, para efeito de correção, que não têm a característica indicada;

Evitar repetir, na questão 2, as figuras apresentadas na questão 1.]

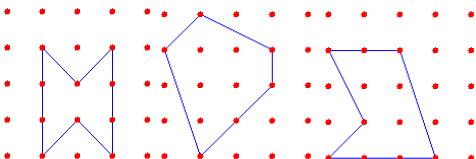
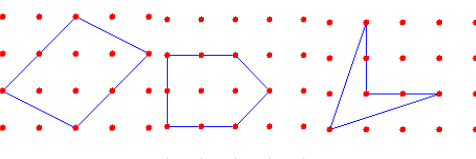
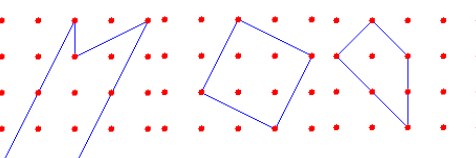
Após a análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 1 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 1

- i. **Resposta Certa** - se responde corretamente de acordo com a figura (assinala todos os pares de segmentos de reta paralelos que existem ou não assinala nenhum caso não exista);
- ii. **Resposta Incompleta** - se assinala apenas parte dos segmentos de reta paralelos (em 3 pares assinala 1 ou 2; em 2 pares assinala 1);
- iii. **Resposta Errada** - se não responde ou responde errado de acordo com a figura.

Na Tabela 11, sistematizamos a análise das respostas sobre o reconhecimento de lados paralelos.

Tabela 11. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 4

Questão	Categorização da Resposta Figuras	N.º de respostas		
		Certa	Incompleta	Errada
Q.1	 Fig. A Fig. B Fig. C Figura A Figura B Figura C	7	9	-
		10	-	6
		13	-	3
	 Fig. D Fig. E Fig. F Figura D Figura E Figura F	15	1	-
		15	-	1
		12	-	4
	 Fig. G Fig. H Fig. I Figura G Figura H Figura I	16	-	-
		16	-	-
		13	-	3

À semelhança do que aconteceu na tarefa anterior, os alunos responderam, aparentemente, sem grandes hesitações à questão 1. A identificação desta característica, globalmente correu bem, embora o primeiro grupo de Figuras A, B e C apresente um maior número de respostas parcialmente certas ou erradas. Na análise das respostas verificámos o seguinte:

- Figura A - mais de metade dos alunos apresenta uma resposta incompleta; nas figuras com segmentos paralelos só reconhecem parte dos segmentos de reta paralelos e destes a maioria só reconhece os que estão na posição *standard*;
- Figura B – há um número significativo de respostas erradas; 38% dos alunos não reconhece os segmentos de reta paralelos ou não responde.

Destacamos que neste grupo de figuras (A, B, C) todas têm mais de quatro lados em que a maioria está na posição *não standard*. As duas figuras, A e B, têm lados paralelos na posição *não*

standard (na Fig. A dois dos três pares e na Fig. B um par). O conjunto destas duas características pode ter constituído uma dificuldade acrescida na identificação da característica em estudo.

Na Figura 15, apresentamos alguns exemplos de respostas dos alunos à questão 1.

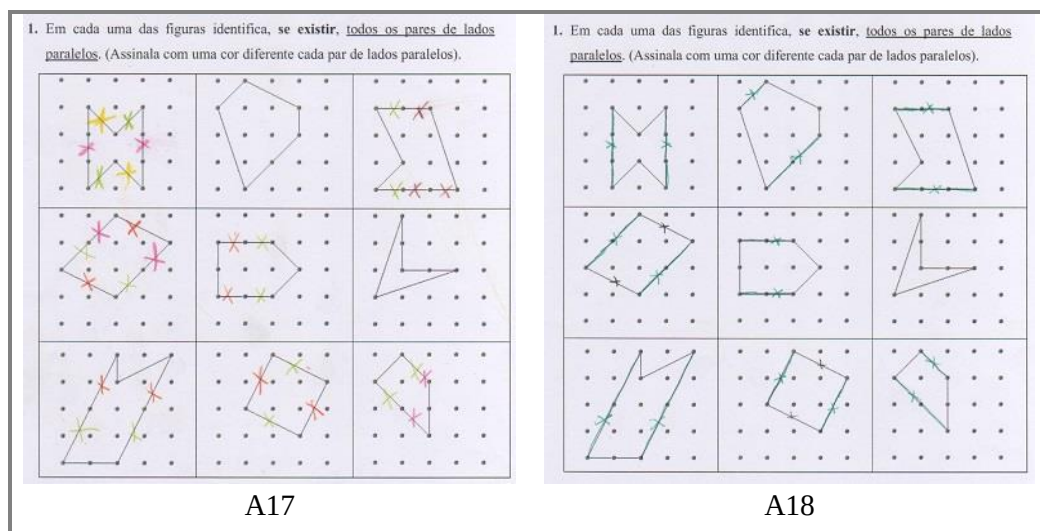


Figura 15. Exemplos de resposta sobre a identificação de lados paralelos

Após a análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 2 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 2

- i. **Representa** polígonos com lados paralelos, se representa dois ou três polígonos que têm pelo menos um par de lados paralelos;
- ii. **Não representa** polígonos com lados paralelos, se não responde ou se não representa dois ou três polígonos que têm pelo menos um par de lados paralelos.

Na Tabela 12, apresentamos os dados sobre a análise das representações de polígonos realizadas pelos alunos.

Tabela 12. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2 da Tarefa 4

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.2	<i>Representa</i> polígonos com um par de lados paralelos	16
	<i>Não representa</i> polígonos com um par de lados paralelos	-

Na questão 2, todos os alunos representaram os três polígonos com a característica indicada. Verifica-se uma grande variedade de polígonos, maioritariamente com mais de 4 lados, num total de 48 figuras apenas 4 são retângulos (em que se inclui o quadrado) e destes na 2 estão posição *não standard*.

Na Figura 16, apresentamos as representações dos alunos de polígonos com lados paralelos.

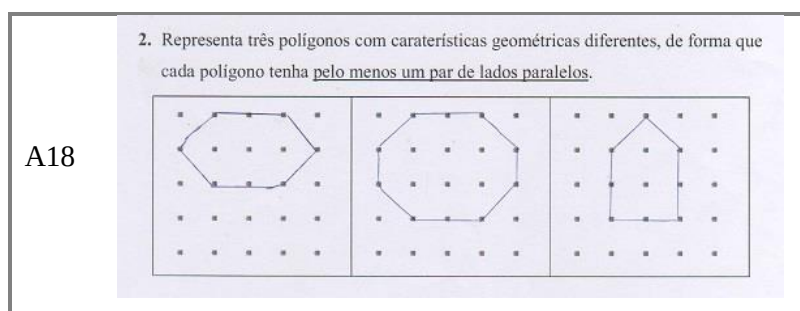


Figura 16. Exemplos de resposta sobre a representação de polígonos com lados paralelos

Tarefa 5: Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares

Esta tarefa tem a mesma estrutura que as duas anteriores, variando apenas a característica em estudo, e por isso foi apenas realizada a leitura do enunciado. As figuras apresentadas na questão 1, têm no máximo 4 pares de lados perpendiculares e apresentam a seguinte distribuição de acordo com o número de pares: Fig. A (2), Fig. B (0), Fig. C (0), Fig. D (0), Fig. E (3), Fig. F (1), Fig. G (0), Fig. H (4), Fig. I (2).

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer propriedades geométricas*.

Na Figura 17, apresentamos o enunciado das questões da Tarefa 5.

-
1. Em cada uma das figuras identifica, **se existir**, todos os lados perpendiculares.
(Assinala com uma cor diferente cada par de lados perpendiculares).
[imagem com as figuras]
 2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um par de lados perpendiculares.
-

Figura 17. Enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 5

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Os dados desta tarefa seguem a mesma estrutura de categorização que os da tarefa anterior.

Questão 1

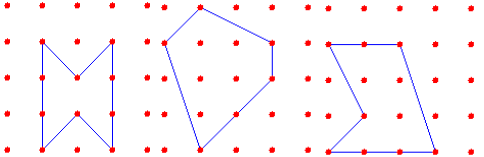
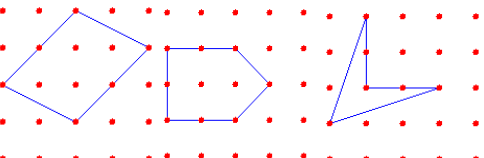
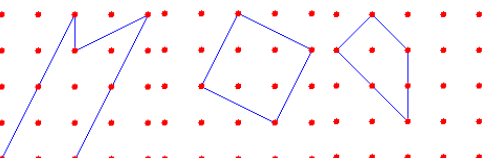
- i. **Resposta Certa** - se responde corretamente de acordo com a figura (assinala todos os pares de segmentos de reta perpendiculares que existem ou não assinala nenhum caso não exista);
- ii. **Resposta Incompleta** -se assinala apenas parte dos pares de segmentos de reta perpendiculares (em 4 pares assinala 2 ou 3; em 3 pares assinala 1 ou 2; em 2 pares assinala 1);
- iii. **Resposta Errada** - se não responde ou responde errado de acordo com a figura.

Na análise dos dados da questão 1 verificámos que, as Figuras A e D, são as que apresentam mais respostas erradas. Apuramos assim que:

- Figura A - 81,3% apresenta uma resposta errada; também nesta situação o problema de visualização esteve relacionado com os lados em posição não standard;
- Figura D - não tem segmentos de reta perpendiculares e 87,5% dos alunos não reconhece a sua inexistência e erram.
- Figuras C, F e G - há uma percentagem elevada de respostas erradas pois os alunos reconhecem como perpendiculares quaisquer segmentos concorrentes.
- Figura E - a maioria dos alunos, ou não reconhece os lados perpendiculares ou reconhece apenas os que são formados por um segmento na vertical e outro na horizontal.
- A Figura H, possivelmente por ser mais “familiar” aos alunos, apesar de se encontrar em posição não standard, não tem respostas erradas.

Na Tabela 13, sistematizamos a análise das respostas sobre o reconhecimento de segmentos de reta perpendiculares.

Tabela 13. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 4

Questão	Figuras	Categorização da Resposta		
		N.º de respostas		
		<i>Certa</i>	<i>Incompleta</i>	<i>Errada</i>
Q.1	 Fig. A Fig. B Fig. C Figura A Figura B Figura C	3	-	13
		8	8	-
		7	-	9
	 Fig. D Fig. E Fig. F Figura D Figura E Figura F	2	-	14
		4	5	7
		6	-	9
	 Fig. G Fig. H Fig. I Figura G Figura H Figura I	5	-	11
		16	-	-
		9	-	7

Observámos também que os alunos demoraram mais tempo no reconhecimento de segmentos perpendiculares do que nos paralelos, denotando alguma insegurança na resposta a dar. A análise dos resultados vai ao encontro desta observação pelos resultados obtidos nas duas tarefas. As respostas dos alunos parecem indicar que estes reconhecem como segmentos perpendiculares qualquer segmento de reta concorrente.

Na Figura 18, apresentamos alguns exemplos de respostas dos alunos à questão 1.

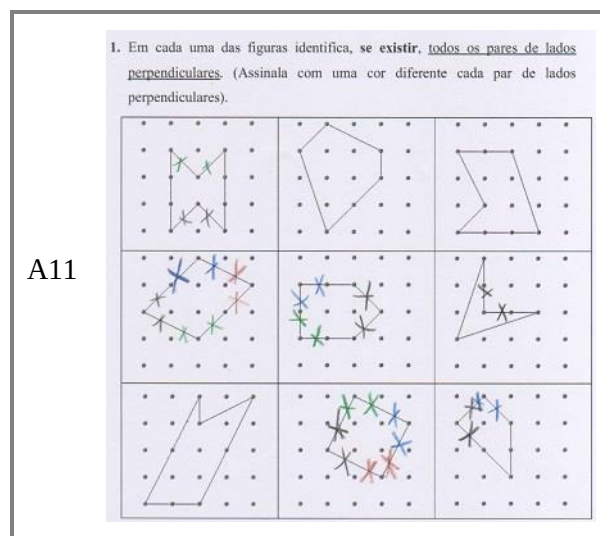


Figura 18. Exemplo de resposta sobre a identificação de lados perpendiculares

Após a análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 2 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 2

- i. **Representa** polígonos com lados perpendiculares, se representa dois ou três polígonos que têm pelo menos um par de lados perpendiculares;
- ii. **Não representa** polígonos com lados perpendiculares, se não responde ou se não representa dois ou três polígonos que têm pelo menos um par de lados perpendiculares.

Na Tabela 14, apresentamos uma sistematização dos dados sobre a análise das representações de polígonos realizadas pelos alunos.

Tabela 14. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2 da Tarefa 5

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.2	<i>Representa</i> polígonos com lados perpendiculares	16
	<i>Não representa</i> polígonos com lados perpendiculares	-

Na questão 2, todos os alunos representaram dois ou três polígonos com pares de lados perpendiculares. Há uma grande variedade de polígonos, maioritariamente com mais de 4 lados, e

num total de 48 figuras apenas 4 são retângulos (incluindo quadrados) em que 2 estão posição *não standard*. Destacamos como situações particulares, os alunos A3, A12 e A13 que sombrearam o interior da linha poligonal, o que não se verificou com outros alunos.

Globalmente, na representação de polígonos com lados perpendiculares, observamos uma evolução dos alunos em termos de diversidade de figuras que apresentam, na sua maioria, lados perpendiculares em posição *não standard*. Constatamos também, observando o desempenho dos alunos ao longo da realização da tarefa, que a maioria dos alunos apresentou maior destreza na utilização da régua para desenhar os polígonos.

Na Figura 19, apresentamos algumas representações dos alunos sobre polígonos com lados perpendiculares.

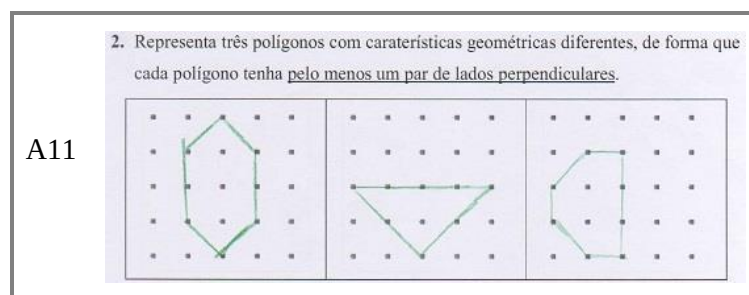


Figura 19. Exemplos da representação de polígonos com lados perpendiculares

No momento da reflexão final sobre a Tarefa 4 e 5, perguntamos aos alunos se tiveram dificuldade em alguma figura em especial mas nenhum aluno indicou qualquer figura. Esta resposta não está de acordo com os resultados obtidos, uma vez que há respostas erradas em figuras com lados paralelos em posição *não standard*, em particular nas Figuras A e B. O mesmo aconteceu no caso dos lados perpendiculares em que é bem significativo o número de respostas erradas, sendo a Figura H (quadrado em posição *não standard*) a única figura em que todos os alunos acertaram. Estas constatações e, o facto de os alunos não utilizarem o transferidor para responder com mais rigor, refletem a falta de consciência sobre as suas dificuldades e ausência da competência de decidir sobre estratégias de resolução em questões “aparentemente” simples.

Tarefa 6: Reconhecer e representar ângulos retos

Esta tarefa também apresenta a mesma estrutura que as duas anteriores, variando apenas a característica em estudo. Como há uma correlação entre as características geométricas em estudo na Tarefa 5 (perpendicularidade) e na Tarefa 6 (ângulos retos) optamos por não as aplicar no mesmo dia. Por outro lado também não quisemos correr o risco de “cansar” os alunos com uma análise repetitiva de figuras que poderia induzir em erros à margem dos objetivos definidos.

As figuras apresentadas na questão 1 têm no máximo 4 ângulos retos e apresentam a seguinte distribuição de acordo com o número de ângulos: Fig. A (2 - exterior), Fig. B (0), Fig. C (0), Fig. D (0), Fig. E (3), Fig. F (1- exterior), Fig. G (0), Fig. H (4), Fig. I (2).

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *identificar e comparar ângulos*.

Na Figura 20, apresentamos as questões da Tarefa 6.

-
1. Em cada uma das figuras identifica, **se existir**, todos os ângulos retos.
[imagem com as figuras]
 2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um ângulo reto.
-

Figura 20. Enunciado da questão 1 e 2 da Tarefa 6

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno e a sua leitura em voz alta. Referimos aos alunos que deviam identificar todos os ângulos retos formados pelos lados da figura, quer estejam no seu interior “dentro da figura” ou no exterior “fora da figura”.

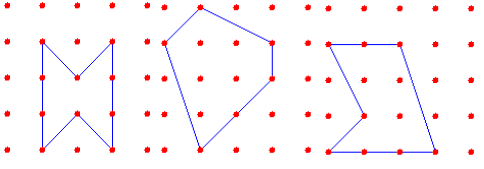
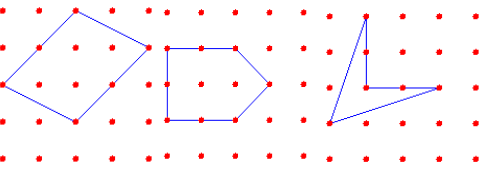
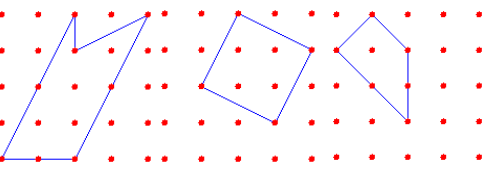
Após a análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 1 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 1

- i. **Resposta Certa** - se responde corretamente de acordo com a figura (assinala todos os ângulos retos que existem ou não assinala nenhum caso não exista);
- ii. **Resposta Incompleta** - se assinala apenas parte dos ângulos retos (em 4 ângulos assinala 2 ou 3; em 3 ângulos assinala 1 ou 2; em 2 ângulos assinala 1);
- iii. **Resposta Errada** - se não responde ou responde errado de acordo com a figura.

Na Tabela 15., apresentamos uma sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos.

Tabela 15. Distribuição das respostas dos alunos na questão 1 da Tarefa 4

Questão	Figuras	N.º de respostas		
		Certa	Incompleta	Errada
Q.1	 Fig. A Fig. B Fig. C			
	Figura A	5	-	11
	Figura B	14	-	2
	Figura C	15	-	1
	 Fig. D Fig. E Fig. F			
	Figura D	4	-	12
	Figura E	5	11	-
	Figura F	10	-	6
	 Fig. G Fig. H Fig. I			
	Figura G	11	-	5
	Figura H	16	-	-
	Figura I	10	6	-

Na análise dos dados na questão 1 verificamos que as Figuras A e D foram as que os alunos mais erraram. A Figura A, tem 2 ângulos retos formados por lados em posição *não* standard no exterior da figura e 68% dos alunos não reconhece estes ângulos. A Figura D não tem ângulos retos mas 75% dos alunos erra nesta figura, identificando como retos todos os seus ângulos (2 agudos e 2 obtusos). Na Figura E, os alunos verificamos também dificuldades no reconhecimento do ângulo reto formado pelos lados em posição *não standard*. Nesta figura 62,5% identifica apenas os 2 ângulos retos formados por um dos lados na vertical e outro na horizontal. Também nas Figuras F e G, há uma percentagem significativa de respostas erradas, 37,5% e 31,3% respetivamente. Na Figura F

esperávamos melhores resultados uma vez que o ângulo reto, embora no exterior da figura, é formado por lados em posição *standard* e tínhamos “alertado” os alunos para os ângulos no exterior da figura. A Figura H, apesar de estar em posição *não standard*, não tem respostas erradas e todos os alunos identificam os 4 ângulos retos. Esta situação pode ser resultado da “familiaridade” com a figura.

Após a análise de conteúdo das produções dos alunos na questão 2 desta tarefa, organizamos os dados em categorias que emergem das respostas dos alunos.

Questão 2

- i. **Representa** polígonos com ângulos retos, se representa dois ou três polígonos que têm pelo menos um ângulo reto;
- ii. **Não representa** polígonos com ângulos retos perpendiculares, se não responde ou se não representa dois ou três polígonos que têm pelo menos um ângulo reto.

Na Tabela 16., apresentamos uma sistematização dos dados sobre a análise das representações dos alunos de polígonos com ângulos retos.

Tabela 16. Representar polígonos que têm pelo menos um ângulo reto

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.2	<i>Representa</i> polígonos com ângulos retos	16
	<i>Não representa</i> polígonos com ângulos retos	-

Na questão 2, todos os alunos representaram dois ou três polígonos com ângulos retos. Tal como na tarefa anterior, também se verifica uma grande variedade de polígonos. Há polígonos com os lados em posição *não standard* mas, na maioria dos polígonos, os ângulos retos assinalados são os que têm um dos lados na vertical e o outro na horizontal.

Verificamos também que 63% dos alunos representam polígonos com ângulos retos cujos lados estão na posição *não standard*, mas só metade destes alunos assinalam esses ângulos (A2, A6, A11, A16, A18, A29). Isto pode significar que, embora esta característica (ângulos com lados em posição *não standard*) esteja presente nessas representações, não foi intencional.

Numa análise global do reconhecimento desta característica sintetizamos o seguinte:

- A maioria dos alunos, apresenta erros na identificação de ângulos retos quando os seus lados estão na posição *não standard*;

- No total de respostas erradas, o grupo dos *não quadriláteros* é o que apresenta maior percentagem (47%)¹ de erro;
- Nas representações dos alunos, a maioria dos ângulos retos assinalados, são os que têm um dos lados na vertical e o outro na horizontal (posição *standard*);
- 63% dos alunos, representam polígonos que contém ângulos retos cujos lados estão na posição *não standard*, mas só metade destes alunos assinalam esses ângulos;
- 31% do total dos alunos, assinalam nas suas representações ângulos retos cujos lados estão na posição *não standard*.

Na reflexão final sobre esta tarefa os alunos referiram não ter sentido dificuldades na sua realização.

Na Figura 21, apresentamos alguns exemplos de figuras dos alunos.

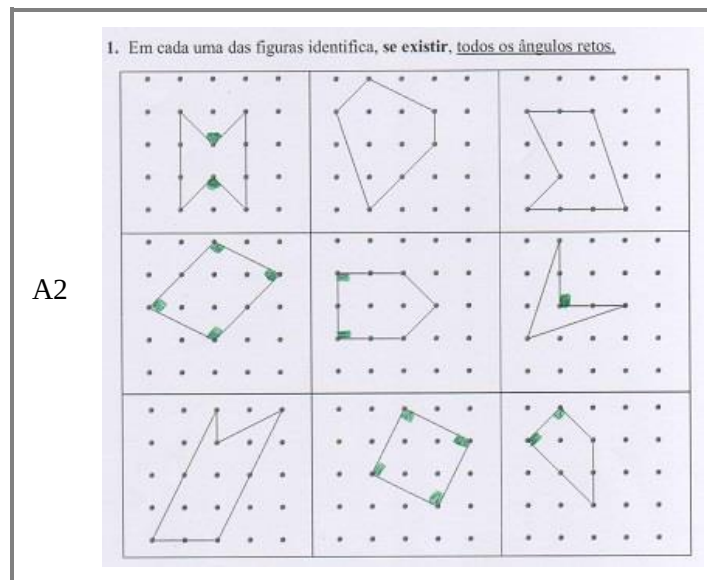


Figura 21. Exemplo de resposta sobre a identificação de ângulos retos

¹ Neste valor consideramos as respostas da categoria “Incompleta”, por corresponderem a representações *não standard*.

Tarefa 7: Representar polígonos geometricamente iguais

Nesta tarefa pretendemos a representação de dois polígonos geometricamente iguais e o reconhecimento das suas propriedades geométricas.

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer propriedades geométricas*.

Na Figura 23 apresentamos o enunciado da questão 1 da Tarefa 7.

Deves utilizar a régua em todas as representações.

1. Representa, em cada um dos geoplanos, dois polígonos **geometricamente iguais** que tenham mais de 4 lados.

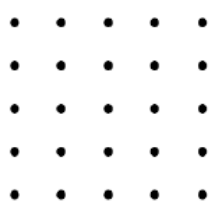
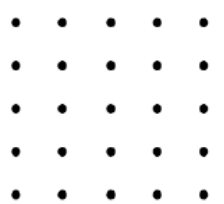
Representação gráfica	 Fig. 1	 Fig. 2
O polígono tem simetria axial? (Se respondeste SIM traça o(s) eixo(s) de simetria que identificas.)	☐ SIM ☐ NÃO	☐ SIM ☐ NÃO

Figura 22. Enunciado da questão 1 da Tarefa 7

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno, a sua leitura em voz alta e clarificação de algumas questões.

Para que não existissem dúvidas sobre a forma de representar na malha “modelo geoplano” questionamos os alunos:

Prof. : “Há algum aluno que nunca tenha trabalho com um *Geoplano*? “

Apesar da resposta de todos os alunos ser afirmativa, exemplificamos a construção de um polígono irregular sem simetria num *Geoplano* de plástico rígido.

Ao apercebermo-nos, aquando da leitura do enunciado, que alguns alunos desconheciam o significado da palavra *axial* na expressão *simetria axial*, clarificamos o significado do termo. Explicamos que [*axial* refere-se a *eixo*] e quanto ao significado da expressão *simetria axial* referimos que [*simetria axial* é a simetria em relação a uma reta qualquer que designamos por *eixo de simetria*]. Realçamos como objetivo desta questão que pretendíamos a [representação de um ou mais eixos de simetria, caso o polígono desenhado tenha simetria em relação a esses eixos].

Na questão 1, ao impormos como condição a representação de polígonos com *mais de 4 lados*, foi nosso objetivo “desviar” os alunos da representação do quadrado, por esta figura já estar bem explorada nas tarefas anteriores.

Após a análise de conteúdo das produções dos alunos, verificamos que todos os alunos desenharam figuras com mais de 4 lados para efeitos de organização consideramos as seguintes categorias:

Questão 1

“Representação gráfica”

- i. **Representa certo**, polígonos geometricamente iguais se desenha os dois polígonos geometricamente iguais;
- ii. **Representa errado**, polígonos geometricamente iguais se não desenha os dois polígonos ou se desenha dois polígonos que não são geometricamente iguais.

Nesta tarefa, por motivos imprevistos, participaram apenas 15 dos 16 alunos envolvidos no estudo. Os dados sobre a representação gráfica, organizados em função dos objetivos previstos e são apresentados na Tabela 17.

Tabela 17. Distribuição das respostas sobre a representação de polígonos geometricamente

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.1	Representação gráfica de polígonos geometricamente iguais	
	Representa certo	11
	Representa errado	4

Na análise das representações dos alunos verificamos o seguinte:

- Um aluno representou os dois polígonos com menos de 4 lados;
- Em 80% das representações os polígonos estão em posições diferentes no plano (apresentam algum tipo de transformação ou uma composta de transformações);
- Há 27% dos alunos que *representa errado*;
- Nos polígonos representados pelos alunos, 1/3 são reproduções do pentágono irregular apresentado nas Tarefas 3-6 (nestas tarefas a figura não foi analisada sobre a simetria).

Nas respostas à questão “O polígono tem simetria axial?”, consideramos as seguintes categorias:

- i. **Responde certo:**
 - “SIM” se o polígono tem simetria axial
 - “NÃO” se o polígono não tem simetria axial
- ii. **Responde errado:**
 - “SIM” se o polígono não tem simetria axial;
 - “NÃO” se o polígono tem simetria axial;

Na Tabela 18, apresentamos uma sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos.

Tabela 18. Distribuição das respostas sobre o reconhecimento da simetria axial

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas			
		Responde certo		Responde errado	
		SIM	NÃO	SIM	NÃO
O polígono tem simetria axial? (SIM/NÃO)	Figura 1	15	-	-	-
	Figura 2	14	-	-	1

Relativamente à representação do eixo de simetria, focamos a análise na categoria “**Responde certo**” subcategoria “**SIM**”, pois pretendemos apenas verificar se o aluno reconhece e representa corretamente o(s) eixo(s) de simetria caso exista.

A análise dos dados sobre esta questão permite constatar o seguinte:

- Todos os alunos, com exceção do aluno n.º 3, reconheceram a simetria, ou seja, responderam *SIM* se o polígono tem simetria axial e responderam *NÃO* se o polígono não tem simetria axial;
- Um aluno não representou o eixo de simetria no polígono, respondeu *SIM* e mostrou no seu desenho evidências do seu correto reconhecimento (o aluno A3 desenha não desenha os dois polígonos com mais de 4 lados e também não são geometricamente iguais);
- Há 2 alunos que representaram figuras com 2 eixos de simetria, mas apenas um dos alunos traçou os dois eixos;
- Não há representações de eixos de simetria oblíquos.

Na Figura 23, apresentamos o exemplo de uma representação de polígonos geometricamente iguais.

A18

Representação gráfica		
	Fig. 1	Fig. 2
O polígono tem simetria axial? (Se respondeste SIM traça o(s) eixo(s) de simetria que identificas.)	☐ SIM ☒ NÃO	☐ SIM ☒ NÃO

Figura 23. Exemplo de representação de polígonos geometricamente iguais

Na Figura 24 apresentamos o enunciado da questão 2 da Tarefa 7.

2. Observa com atenção os polígonos que representaste.

Faz uma lista de todas as características geométricas que são comuns aos dois polígonos. (Usa os termos: lados, ângulos, comprimento, paralelos, perpendiculares, ...).

Figura 24. Enunciado da questão 2 da Tarefa 7

Na questão 2 além do objetivo geral de reconhecimento de propriedades geométricas pretendemos também o desenvolvimento da comunicação matemática escrita.

Nesta questão, após verificarmos as dificuldades dos alunos na descrição da figura geométrica apresentada na Tarefa 1, como forma de orientar a resposta indicamos alguns termos como “pistas”.

Após a análise de conteúdo das respostas dos alunos, agrupamos os dados de acordo com as seguintes categorias e subcategorias:

Lados

- *Número*
- *Congruência* (lados iguais/diferentes)
- *Posição relativa* (paralelos/perpendiculares)

Ângulos

- *Número* (em função da sua classificação)
- *Congruência* (ângulos iguais/diferentes)
- *Classificação quanto à amplitude* (agudos, retos, obtusos)

Simetria de reflexão (axial)

- *Tem simetria de reflexão* (refere “tem eixo de simetria”, “é simétrica”)

- *Não tem simetria de reflexão* (refere “não tem eixo de simetria”, “não é simétrica”)

Na Tabela 19, apresentamos a sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos.

Tabela 19. Análise das respostas sobre o reconhecimento de características geométricas.

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas		
		<i>Reconhece</i>	<i>Reconhece parte</i>	<i>Não Responde/ Erra</i>
Q.2	Lados			
	<i>Número</i>	12	3	-
	<i>Congruência</i>	3	11	1
	<i>Posição relativa (paralelos/perpendiculares/não aplicável)</i>	8	7	-
	Ângulos			
	<i>Classificação quanto à sua amplitude (agudos, retos e obtusos)</i>	3	12	-
	<i>Número de ângulos em função da sua classificação</i>	4	11	-
	Simetria axial			
	<i>Tem simetria axial</i>	2	-	11
	<i>Não tem simetria axial</i>	2	-	-
	Outros termos/expressões			
	<i>Perímetro</i>	1	-	-
	<i>Lados concorrentes</i>	2	-	-
	<i>Polígono irregular</i>	1	-	-

Na análise dos registos dos alunos sobre as características geométricas dos seus polígonos verificamos o seguinte:

- Todos os alunos referem os termos indicados acrescentando a informação em falta (p.e. ângulos *retos*) de forma seja correta/incorrecta;
- Relativamente aos **lados**: 80% dos alunos indicou corretamente o seu *número*; 53% dos alunos *reconheceu a posição relativa* de todos os lados da figura “lados paralelos” e/ou “lados perpendiculares”; 20% dos alunos reconheceu a congruência;
- Relativamente aos **ângulos**: a maioria dos alunos não reconheceu nem classificou todos os ângulos do polígono; há um número significativo de respostas erradas quando os ângulos têm os lados em posição *não standard*; não há referências à congruência;
- Quanto à **simetria de reflexão**: 25% dos alunos dos alunos reconhece a simetria e os restantes não responde ou erra;

- Outros termos: 25% dos alunos referem outros termos - – perímetro, lados concorrentes, polígono regular.

Nesta questão seria de esperar que mais alunos referissem a simetria, uma vez que a tinham analisado corretamente na questão anterior. As respostas dos alunos refletem as suas dificuldades ao nível da comunicação matemática, não reconhecendo propriedades geométricas importantes ou não o fazendo com rigor matemático. Também destacamos o facto de nenhum aluno usar os instrumentos de medida para os ângulos e apenas uma minoria o fazer para os lados. Embora não tenhamos referido explicitamente esta possibilidade, o material fazia parte do seu estojo de trabalho.

Apresentamos na Figura 25 o exemplo de uma descrição das caraterísticas geométricas dos polígonos representados por um aluno.

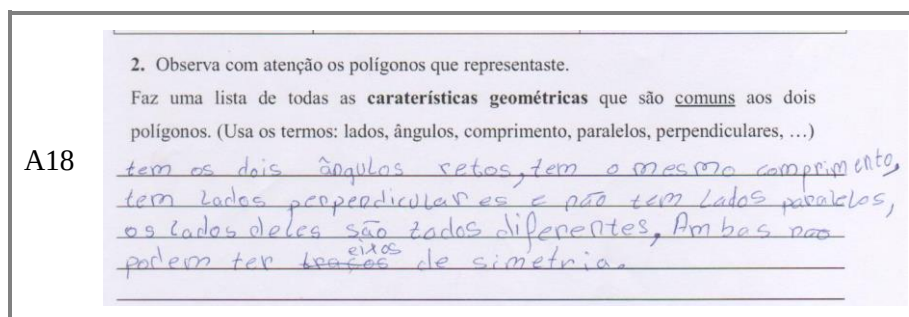


Figura 25. Exemplo de registo das caraterísticas geométricas dos polígonos

Em reflexão final sobre a tarefa, os alunos reconheceram que sentiram mais dificuldade “a pensar e escrever nas caraterísticas” ou seja a reconhecer as propriedades e a comunicar com rigor matemático. Os alunos reconheceram esta dificuldade mas continuam a não ser capazes de usar um material quando não é explicitamente referido, por exemplo.

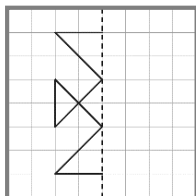
Tarefa 8: Reconhecer simetrias

Nesta tarefa, após a distribuição da tarefa procedemos de imediato à leitura do enunciado. Como as expressões destacadas nas questões eram suficientemente claras, não realizamos mais esclarecimentos embora tivéssemos questionado os alunos se tinham alguma dúvida sobre a tarefa.

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer e representar formas geométricas.*

Na Figura 26 apresentamos o enunciado da Tarefa 8.

-
1. Completa a figura, de modo a que tenha simetria de reflexão segundo o eixo marcado a tracejado. (Deves utilizar lápis e régua)



2. Completa a figura, de modo a que não tenha simetria de reflexão segundo o eixo marcado a tracejado. (Deves utilizar lápis e régua)

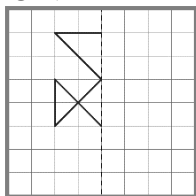


Figura 26. Enunciado da questão 1 da Tarefa 8

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Após a análise dos desenhos dos alunos, decidimos organizar os dados em três categorias.

Questão 1 e 2

- i. **Completa a figura corretamente**, de forma que tenha simetria de reflexão;
- ii. **Completa parte da figura corretamente**, se completa apenas uma parte da figura e essa parte está correta;
- iii. **Completa errado**, se não completa a figura ou se completa errado.

Na Tabela 20 apresentamos uma sistematização dos dados sobre a análise das figuras que os alunos completaram.

Tabela 20. Distribuição das respostas sobre as representações das figuras da questão 1 e 2

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.1	Completa a figura de modo que <i>tenha simetria</i> de reflexão	
	<i>Completa a figura corretamente</i>	16
	<i>Completa parte da figura corretamente</i>	-
	<i>Completa errado</i>	-
Q.2	Completa a figura de modo que <i>não tenha simetria</i> de reflexão	
	<i>Completa parte da figura corretamente</i>	14
	<i>Completa parte da figura corretamente</i>	-
	<i>Completa errado</i>	2

Esta tarefa foi realizada pelos alunos sem grande dificuldade. Na questão 1, todos os alunos completaram a totalidade da figura corretamente. Na questão 2, em que pretendíamos que o aluno completasse a figura de forma a não ter simetria, verificamos que dois alunos completaram a figura como se o objetivo fosse ter simetria. Este erro resultou de distração como apuramos posteriormente.

Na Figura 27, apresentamos o exemplo de uma resposta à questão 1 “figura com simetria” e questão 2 “figura sem simetria”.

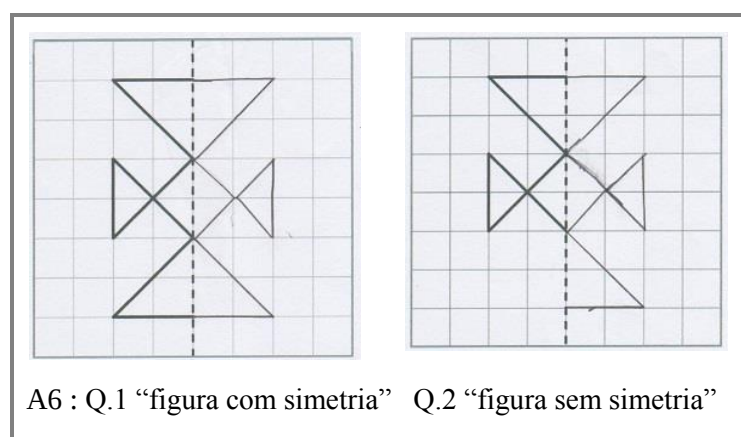


Figura 27. Exemplo de resposta à questão 1 e 2

Tarefa 9: Reconhecer e representar eixos de simetria

Nesta tarefa pretendemos a representação de eixos de simetria em polígonos regulares. Os polígonos regulares apresentados na ficha têm um número de eixos de simetria de reflexão que varia entre 1 e 8. Representando os polígonos pelas letras A - F temos a seguinte distribuição do número de eixos por figura: Fig. A (4), Fig. B (3), Fig. C (5), Fig. D (6), Fig. E (4), Fig. F (8).

Iniciamos com a distribuição da tarefa, a leitura do enunciado e a explicação da questão 2.

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer propriedades geométricas*.

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Na Figura 28 apresentamos as questões 1.1 e 1.2 da Tarefa 9.

-
1. Todas as figuras apresentadas **são polígonos regulares**.
 - 1.1. Explica o que são polígonos regulares.
 - 1.2. Traça todos os eixos de simetria que identificas, em cada figura
-

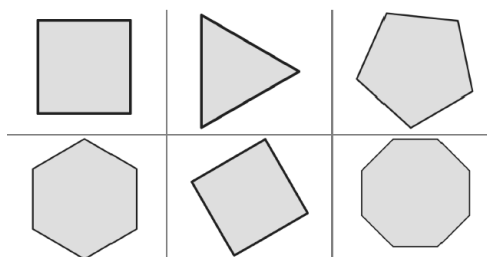


Figura 28. Enunciado da questão 1.1 e 1.2 da Tarefa 9

Questão 1.1.

“Explica o que são polígonos regulares.”

Nesta questão, à exceção de um aluno, todos os outros responderam acertadamente referindo a igualdade de lados e ângulos. Esta situação pode dever-se ao facto de o conceito ter sido abordado algumas aulas antes e por isso os alunos facilmente o recordarem. Também verificámos que algumas respostas são bastante rigorosas.

Questão 1.2.

“Traça todos os eixos de simetria que identificas, em cada figura.”

As respostas apresentadas foram organizadas nas seguintes categorias:

- i. **Reconhece todos** os eixos de simetria do polígono, se traça corretamente todos os eixos de simetria do polígono;
- ii. **Reconhece parte** dos eixos de simetria do polígono, se traça apenas corretamente parte dos eixos de simetria do polígono;

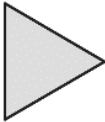
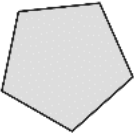
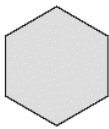
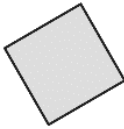
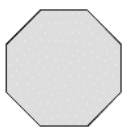
- iii. **Não reconhece** eixos de simetria, se não responde ou responde errado traça mal o eixo de simetria ou não traça pelo menos um eixo.

Após uma análise das respostas à questão 1.2 verificámos o seguinte:

- A maioria dos alunos, não reconhece todos os eixos de simetria dos polígonos;
- 25% dos alunos reconhece a totalidade ou a maioria dos eixos de simetria (A8 e A11 - totalidade; A13 e A16 – todos exceto 1 dos eixos do hexágono);
- O quadrado em posição *standard* ou *não standard* foi a figura em que os alunos apresentaram melhor desempenho;
- O hexágono (Figura D) é o que apresenta mais respostas erradas, seguindo-se o octógono e o pentágono;
- No triângulo equilátero (Figura B) e no pentágono a maioria dos alunos reconhece apenas 1 eixo de simetria.

Na Tabela 21, apresentámos a sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos.

Tabela 21. Distribuição das respostas sobre a representação de eixos de simetria

Questão	Figuras	Categorização da Resposta		N.º de respostas		
				Reconhece	Reconhece parte	Não reconhece
Q.1	   Fig. A Fig. B Fig. C Figura A Figura B Figura C			10	6	-
				6	10	-
				5	10	1
	   Fig. D Fig. E Fig. F Figura D Figura E Figura F			2	14	-
				8	8	-
				4	11	1

Apresentamos na Figura 29 um exemplo de resposta às questões 1.1 e 1.2.

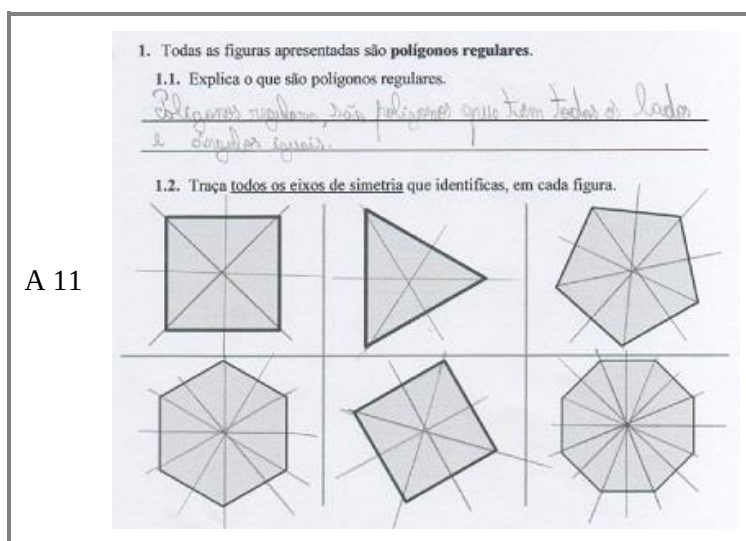


Figura 29. Exemplo de resposta sobre a representação de eixos de simetria

Questão 2

Na Figura 30 apresentámos a questão 2 da Tarefa 9.

2. Nas figuras apresentadas, há alguma relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria? ☐ SIM ☐ NÃO
- 2.1. Se a tua resposta foi “SIM”. Explica o que observas.

Figura 30. Enunciado da questão 2 da Tarefa 9

Na questão 2 apenas analisamos em termos analíticos as respostas dos alunos que responderam “SIM”, por serem estes os que tinham de justificar a sua opção.

Na Tabela 22 apresentamos a distribuição dos dados por cada uma das categorias.

Tabela 22. Distribuição das respostas dos alunos na questão 2.1 da Tarefa 9

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.2.	Responde “SIM”	
	Apresenta uma explicação completa e correta	3
	Apresenta uma explicação parcialmente correta	
	Não explica ou apresenta uma explicação sem sentido no contexto	7
	Responde “NÃO”	6

Nesta questão verificámos o seguinte:

- 19% dos alunos apresenta uma resposta completa e com rigor matemático. Estas respostas são dos alunos que traçaram todos ou a maioria dos eixos de simetria (questão 1.2);
- 81% dos alunos ou responde “NÃO” ou não apresenta uma conjectura sobre a relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria;
- Na comunicação matemática a maioria destes alunos não apresenta uma explicação correta para justificar o “SIM”;

Questão 3.

“Como explicarias a um colega o que é um eixo de simetria?”

Nesta questão procedemos apenas a uma análise qualitativa das respostas. Verificámos que a maioria dos registos denotam a presente da *ideia de congruência entre essas partes*.

Na figura 31 apresentamos um exemplo de respostas dos alunos.

A11

2. Nas figuras apresentadas, há alguma relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria? ☒ SIM ☐ NÃO

Se a tua resposta foi “SIM”. Explica o que observas.

O número de lados é o mesmo número de eixos.

3. Como explicarias a um colega o que é um eixo de simetria?

É um eixo que divide uma figura em metade completamente igual.

Figura 31. Exemplo de resposta sobre a definição do conceito de eixo de simetria

Tarefa 10: Investigar simetrias

Nesta tarefa pretendemos que os alunos investigassem uma das propriedades dos polígonos regulares - *relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria*.

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer propriedades geométricas*.

Na Figura 32 apresentamos as questões 1.1 e 1.2 da Tarefa 10.

1. Utiliza o GeoRefletor, para descobrires todos os eixos de simetria nas figuras em anexo.

1.1. Completa a tabela 1, com a informação sobre os **polígonos regulares**.

Nome do polígono				
N.º de lados do polígono				
N.º de eixos de simetria de reflexão				

1.2. Completa a tabela 2, com a informação sobre os **polígonos não regulares**.

Nome do polígono			
N.º de lados do polígono			
N.º de eixos de simetria de reflexão			

Figura 32. Enunciado da questão 1.1 e 1.2 da Tarefa 10

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa, a cada aluno, e à sua leitura em voz alta. Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material:

- Ficha da tarefa
- 1 GeoRefletor (ou);
- 7 pequenos modelos em papel com a representação individual de cada polígono: 4 regulares (1 triângulo equilátero, 1 quadrado, 1 pentágono, 1 hexágono) e 3 não regulares (1 triângulo isósceles não equilátero, 1 triângulo escaleno, 1 retângulo);
- 1 transferidor e 1 régua;
- material de escrita;
- 1 bolsa de plástico e 1 mola/clip (material de organização).

Os materiais manipuláveis, distribuídos aos alunos, tiveram como objetivo facilitar a visualização, exploração e investigação das propriedades geométricas dos polígonos e suas classes. A régua e o transferidor a utilizar na medida de lados ou ângulos (classificação). Os “modelos” dos polígonos para facilitar a visualização permitindo a manipulação da figura e o seu posicionamento em posições mais favoráveis no uso da *Mira* para investigar a congruências das partes.

Nesta sessão, não foi necessário explicar aos alunos como utilizar a *Mira*, uma vez que este procedimento já tinha decorrido numa aula anterior depois de percebermos que os alunos não

conheciam o material. Numa aula de treino (90 minutos) com os alunos, apoiando individualmente cada um na manipulação da *Mira*, proporcionamos-lhes a experimentação do material através do desenho livre de figuras geométricas com simetria de reflexão. Com a aula de treino, pretendemos evitar que esta sessão de investigação (Tarefa 10) fosse perturbada por “ruído e distração” ou por desconhecimento da forma de uso do material com vista à obtenção de um clima de naturalidade com os alunos apenas focados no objetivo desta tarefa.

O desenvolvimento desta tarefa teve as seguintes fases que sumariamente enunciamos:

1. Agrupar os polígonos, em dois grupos, de acordo com as suas características: *polígonos regulares* e *polígonos não regulares*;
2. Colocar os polígonos irregulares separados na mica e os regulares juntos na mola/clip;
3. Aguardar, silenciosamente, que a professora verificasse se os polígonos estavam devidamente agrupados e registasse esta informação;
4. Analisar, em grande grupo, as características dos polígonos e sistematizar a informação no quadro reorganizando os grupos de polígonos caso existissem erros;
5. Investigar a simetria axial com o GeoRefletor, traçar os eixos de simetria e completar a ficha.

Na fase 1, os alunos analisaram os diversos polígonos, em relação às suas características geométricas, realizaram medições, classificaram os polígonos e registaram esta informação no verso da imagem. Na fase 2, colocaram o grupo dos polígonos irregulares devidamente separados dentro da mica e os regulares fixos com a mola/clip. Na fase 3, a professora verificou individualmente se cada aluno tinha os grupos corretos e registou essa informação. Na fase 4, em grande grupo e com a participação dos alunos, foi registada no quadro a lista das características geométricas de cada polígono. Organizamos um esquema com os modelos dos 7 polígonos distribuídos pelos 2 grupos: *polígonos regulares* e *polígonos não regulares*. A fase 5 consistiu na resolução da ficha da tarefa com os materiais manipuláveis disponibilizados.

Na Figura 33 apresentamos exemplos destes procedimentos.

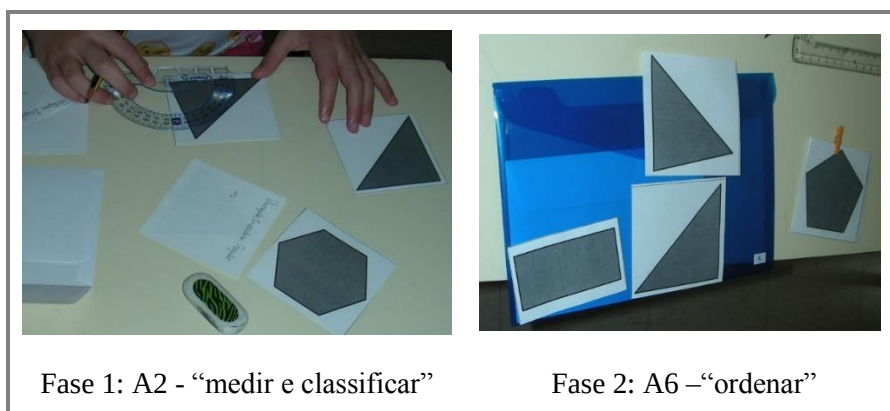


Figura 33. Exemplos de procedimentos na fase 1 e fase 2

Na Figura 34 apresentamos exemplos dos procedimentos de investigação dos eixos de simetria com a Mira e o respetivo registo da informação na ficha da tarefa.

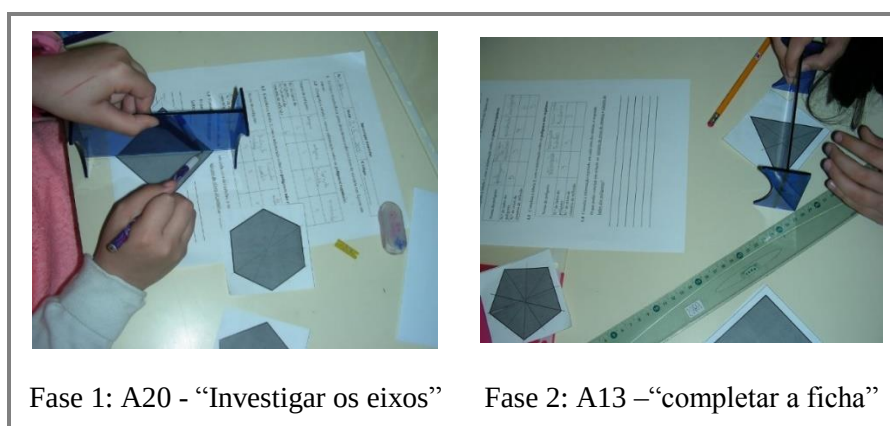


Figura 34. Exemplos de procedimentos na fase 3 e fase 4

Questão 1.1 e 1.2

– Grupo de polígonos regulares:

Na questão 1.1., ao observarmos que alguns alunos não tinham conseguido descobrir todos os eixos de simetria dos polígonos e então sugerimos-lhes que voltassem a investigar melhor. Foi o caso dos alunos A3, A9, A10, A15, A17 e A18 que, após novas tentativas, continuaram a não reconhecer e a não traçar todos os eixos nos polígonos tendo apresentado respostas erradas.

- O *pentágono* e o *hexágono* foram as figuras em que a maioria dos alunos teve mais dificuldades no reconhecimento de todos os eixos de simetria. Com a *Mira* experimentaram algumas dificuldades relativamente ao seu posicionamento de forma a obter a congruência das partes. Mas com o decorrer da sessão foram ultrapassadas após várias tentativas.

- O pentágono foi a figura em que os alunos mais erraram. Este facto poderá ter a ver com a posição relativa dos lados. Embora tenha quase tantos lados como o hexágono, o que já é uma dificuldade (mais eixos), não tem lados paralelos e o hexágono tem 3 pares. Esta característica determina que todos os eixos de simetria axial são obtidos unindo cada vértice ao ponto médio do lado oposto e este procedimento pode ter constituído uma dificuldade acrescida relativamente ao hexágono.
- No processo de contagem, alguns alunos “perderam-se” a contar os eixos e tiveram que voltar a recontar mais do que uma vez duplicando contagens. Apenas uma minoria de alunos revelou estratégias de contagem [p.e. colocar um pequeno traço à medida que contavam o eixo] para evitar o erro.
- Nos triângulos, a maior dificuldade foi o reconhecimento dos 3 eixos no triângulo equilátero, facto que não esperávamos. Também neste polígono o traçado dos eixos segue um procedimento idêntico ao do pentágono.

Na Figura 35 apresentamos um exemplo dos registos efetuados no verso dos modelos de papel e uma representação dos eixos de simetria nos polígonos regulares. Nesta figura é possível verificar a estratégia de contagem dos eixos.

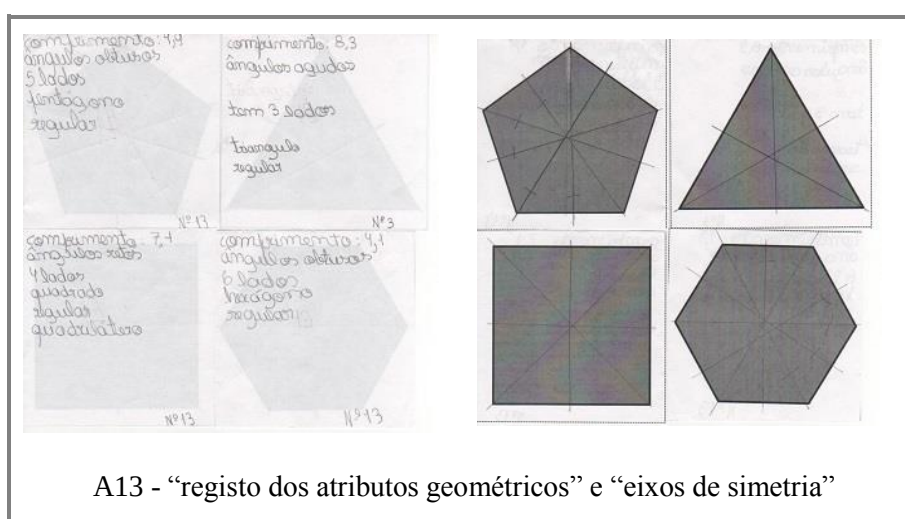


Figura 35. Exemplo de registos para a resolução da Tarefa 10

Na Tabela 23., apresentamos a sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos sobre a investigação da simetria nos **polígonos regulares**.

Tabela 23. Distribuição dos dados sobre a investigação da *simetria - Polígonos regulares*

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q 1.1	Triângulo Equilátero	
	Reconhece número de lados igual ao número de eixos	11
	Reconhece número de lados diferente do número de eixos	4
	Não responde	1
	Quadrado	
	Reconhece número de lados igual ao número de eixos de simetria	15
	Reconhece número de lados diferente do número de eixos	1
	Não responde	-
	Pentágono	
	Reconhece número de lados igual ao número de eixos de simetria	9
	Reconhece número de lados diferente do número de eixos	7
	Não responde	-
	Hexágono	
	Reconhece número de lados igual ao número de eixos de simetria	11
	Reconhece número de lados diferente do número de eixos	4
	Não responde	1

Na Figura 36 apresentamos exemplos de respostas sobre o número de eixos de simetria nos **polígonos regulares**.

A3	Nome do polígono	exagono	pentagono	triangulo	quadrado
	N.º de lados do polígono	6	5	3	4
	N.º de eixos de simetria de reflexão	6	5 5	3	4
A13	Nome do polígono	pentagono	triangulo equilateral	quadrado	hexagono
	N.º de lados do polígono	5	3	4	6
	N.º de eixos de simetria de reflexão	5	3	4	6

Figura 36. Exemplos de resposta na questão 1.1

– **Grupo dos polígonos não regulares:**

- O *retângulo* (não quadrado) foi a figura em que os alunos mais erraram. *Rodaram* várias vezes este polígono ensaiando a colocação da *Mira*, de forma a observar a congruências das partes e descobrir o número de eixos de simetria. Apesar das várias tentativas há ainda 31% dos alunos que erraram ao traçar 4 eixos de simetria (consideraram as diagonais como eixos de simetria). Nesta figura um ou outro aluno optou pelo método de dobragem tendo um dos alunos pedido autorização para o recorte da figura. Um destes alunos usava óculos e referiu a dificuldade em ver através da *Mira*.
- A classificação dos triângulos também foi uma dificuldade porque os alunos já não se recordavam mas desvalorizamos este facto.

Na Tabela 24., apresentamos uma sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos sobre a investigação da simetria nos *polígonos não regulares*.

Tabela 24. Distribuição das respostas sobre a investigação de *simetria* - *Polígonos não regulares*

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q. 1.2	Triângulo Escaleno	
	<i>Reconhece corretamente o número de eixos</i>	13
	<i>Não Reconhece corretamente o número de eixos</i>	2
	<i>Não responde</i>	1
	Triângulo isósceles	
	<i>Reconhece corretamente o número de eixos</i>	13
	<i>Não Reconhece corretamente o número de eixos</i>	3
	<i>Não responde</i>	-
	Retângulo	
	<i>Reconhece corretamente o número de eixos</i>	10
	<i>Não Reconhece corretamente o número de eixos</i>	6
	<i>Não responde</i>	-

A aluna A3 não soube classificar os triângulos quanto ao comprimento dos lados referindo que não se recordava dos “nomes”.

Na Figura 37 apresentamos exemplos das respostas, dos mesmos alunos, sobre o número de eixos de simetria nos polígonos não regulares.

A3	Nome do polígono	retângulo	triângulo	triângulo
	N.º de lados do polígono	4	3	3
	N.º de eixos de simetria de reflexão	2 3 4	0	1
A13	Nome do polígono	retângulo	triângulo Equilátero	triângulo Equilátero
	N.º de lados do polígono	4	3	3
	N.º de eixos de simetria de reflexão	2	1	0

Figura 37. Exemplos de resposta na questão 1.2

Questão 1.3

Na questão 1.3, pretendemos que os alunos reconhecessem a relação entre o *número de lados* e o *número de eixos de simetria* dos polígonos em estudo. Estávamos conscientes da reduzida amostra de polígonos, para o estudo em causa, e de que o desempenho dos alunos nas questões anteriores poderia condicionar a resposta a esta questão.

Na Figura 38 apresentamos o enunciado da questão 1.3 da Tarefa 10.

1.3. Completa a informação registada, em cada uma das tabelas, e responde.

O que podes concluir em relação ao número de eixos de simetria e número de lados dos polígonos?

Figura 38. Enunciado da questão 1.3 da Tarefa 10

Na Tabela 25, sistematizamos uma análise das conjecturas dos alunos, sobre a relação entre o *número de eixos de simetria* e o *número de lados* dos polígonos regulares.

Tabela 25. Distribuição dos dados sobre a simetria em polígonos regulares – Questão 1.3

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.1.3	Apresenta uma conclusão	
	<i>Completa e correta</i>	7
	<i>Parcialmente correta</i>	4
	<i>Errada</i>	3
	Não conclui	2

Na questão 1.3, as conclusões dos alunos estão em conformidade com a resposta às questões anteriores e verificámos o seguinte:

- 44% dos alunos reconheceu que o *número de eixos de simetria é igual ao número de lados* nos polígonos regulares e que tal não se verifica nos polígonos não regulares.
- Em termos de comunicação matemática, há registos muito bem estruturados, com rigor matemático e uma conjectura correta; outros registos não apresentam uma conjectura correta mas descrevem muito bem os resultados obtidos.

Nesta tarefa constatamos que os alunos conseguiram muito razoavelmente expressar nas suas conclusões os resultados do seu trabalho e da sua análise, revelando uma boa evolução no domínio do conhecimento de factos e procedimentos, no raciocínio e comunicação matemática.

Apresentamos na Figura 39 alguns exemplos de respostas dos alunos sobre a relação em estudo.

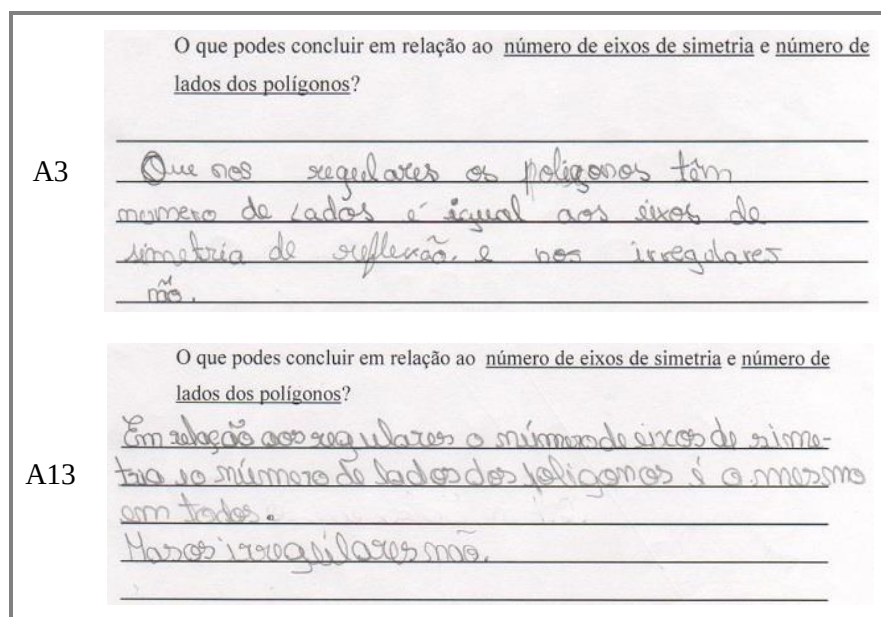


Figura 39. Exemplos de respostas na questão 1.3

Na decorrer desta tarefa, identificamos nos alunos algumas dificuldades, nomeadamente:

- Reconhecer todos os eixos de simetria, em especial nos polígonos com maior número de lados e no retângulo;
- Utilizar o transferidor, na medida da amplitude dos ângulos;
- Manusear o *Mira*, para averiguar a existência de congruência das partes;
- Traçar, com rigor, os eixos de simetria;

- Efetuar a contagem dos eixos de simetria, nos polígonos com maior número de eixos. (por falta de estratégia na contagem alguns alunos tiveram que repetir a contagem)

No manuseamento da *Mira*, apesar de terem treinado a sua utilização numa aula anterior, pensamos que o tempo de experimentação possa ter sido insuficiente. Também o facto de proporcionarmos o uso da *Mira* em desenho livre de formas simétricas, ao invés da investigação numa figura dada por nós, pode ter resultado numa inadequada experimentação das dificuldades.

Tarefa 11: Criar uma composição geométrica com o *Tangram*

Nesta tarefa desenvolvida com o *Tangram* pretendemos que os alunos construíssem uma composição geométrica com simetria.

Como objetivo geral foi definido o seguinte: *reconhecer propriedades geométricas*.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno e a sua leitura em voz alta.

A questão 2 suscitou algumas dúvidas na sua interpretação inicial e pensamos que tal se deveu ao seu enunciado tendo-se explicado o que pretendíamos.

Após a distribuição de um *Tangram* a cada aluno iniciamos o desenvolvimento da tarefa.

Questão 1.

Na Figura 40 apresentamos o enunciado da questão 1 da Tarefa 11.

O ***Tangram*** é um puzzle chinês que se obtém decompondo um quadrado em sete polígonos (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo).

1. Já tinhas realizado alguma atividade com o *Tangram*, nas aulas de matemática?

☐

SIM

☐

NÃO

Se a tua resposta foi “**SIM**”. Explica o que fizeste.

Figura 40. Enunciado da questão 1 da Tarefa 11

Nesta questão, verificámos que 56% dos alunos já tinha usado o *Tangram*, no 2.º ano. Os alunos construíram uma figura “brincando” com as peças do *Tangram* mas não realizaram qualquer exploração das propriedades geométricas dos polígonos deste *puzzle*. Os restantes alunos nunca usaram o material.

A utilização dos materiais manipuláveis, como é o caso do *Tangram*, deve ser orientada, ter um objetivo didático e o professor deve “ter alguns cuidados para que a experiência dos alunos não

se limite a «brincadeiras» com os objectos, mas implique realmente actividade intelectual” (Velooso & al., 2009)

Nesta tarefa orientámos a exploração do material com o objetivo de aproveitar todo o seu potencial no estudo da Simetria.

Na Figura 41 apresentamos o enunciado da questão 2 e 3 da Tarefa 11.

Questão 2 e 3

-
2. Observa com atenção, as sete peças do *Tangram*. ☐ SIM ☐ NÃO
- Há alguma peça que não tenha simetria de reflexão?
Se a tua resposta foi “**SIM**”, indica a sua forma geométrica.
3. Qual é a forma geométrica com o maior número de eixos de simetria?
-

Figura 41. Enunciado da questão 2 e 3 da Tarefa 11

Na Tabela 26 apresentamos uma sistematização dos dados recolhidos com base na análise das respostas dos alunos.

Tabela 26. Distribuição das respostas dos alunos sobre a simetria nas peças do Tangram.

Questão	Categorização da resposta	N.º de respostas
Q.2	<i>Reconhece que o paralelogramo não tem simetria</i>	7
	<i>Não responde ou responde errado</i>	9
Q.3	<i>Reconhece o quadrado como a figura com mais de eixos de simetria</i>	15
	<i>Não responde ou responde errado</i>	1

O *paralelogramo obliquângulo* foi a figura que apresentou maior complexidade no seu posicionamento nas composições de polígonos de forma a obter figuras com simetria. Este polígono não tem simetria o que não foi reconhecido inicialmente pela maioria dos alunos. Este erro poder ter dificultado as primeiras construções dos alunos. O facto de o paralelogramo ter os seus lados em posição *não standard* terá sido a causa das dificuldades.

Apresentamos na Figura 42 exemplos de respostas sobre a questão 2 e 3. O aluno (A19) revelou-se indeciso sobre a sua resposta, como se pode observar no exemplo.

The image shows two examples of student responses to questions 2 and 3. The top example is from student A11. Question 2 asks if any piece lacks reflection symmetry, with checkboxes for SIM (checked) and NÃO. The student's handwritten answer is 'Não é nenhum'. Question 3 asks for the shape with the most axes of symmetry, with the handwritten answer 'A forma é o quadrado'. The bottom example is from student A19. Question 2 has checkboxes for SIM (checked) and NÃO (checked). The student's handwritten answer is 'Paralelogramo'. Question 3 has the handwritten answer 'Quadrado'.

Figura 42. Exemplos de resposta à questão 2 e 3

Verificámos que apenas quatro alunos, pelo que apuramos, responderam com certeza absoluta na questão 2. Para investigar a existência ou não da simetria neste polígono os alunos começaram por juntar os dois triângulos pequenos e, “virando e revirando”, faziam composições que comparavam com o paralelogramo obliquângulo. Como os alunos tinham à sua disposição o material para manipular esperávamos que pudessem descobrir a ausência da simetria nesta figura mais facilmente. Na questão 3 a maioria dos alunos respondeu acertadamente o que reflete o facto de esta figura já estar suficientemente explorada pelos alunos ao longo desta experiência didática.

Apresentamos na Figura 42 alguns exemplos de resposta que representativas das dificuldades dos alunos sobre a simetria do paralelogramo.

Questão 4

Nesta questão, pretendemos que os alunos apresentassem uma composição de polígonos, organizando-os de forma a obter uma figura com simetria, com o maior número possível de peças do *Tangram*.

Na Figura 43 apresentamos o enunciado da questão 4 da Tarefa 11.

-
4. Com as peças do **Tangram**, cria uma composição geométrica com simetria de reflexão.
(Deves utilizar o maior número possível de peças sem as sobrepor.)
-

Figura 43. Enunciado da questão 4 da Tarefa 11

Nesta fase observámos um grande interesse, entusiasmo e o espírito de “competitividade” dos alunos procurando atingir o objetivo proposto com a maior rapidez possível. Numa tentativa de afirmação em relação aos colegas sempre que algum aluno terminava a sua figura, chamava a professora para verificar o seu trabalho. O aluno A6 foi o primeiro a concluir o desafio e logo de seguida o A8. Ambos tinham conseguido construir duas figuras simétricas apenas com um eixo de simetria de reflexão.

Prof.: “Quantos eixos tem?” [perguntamos a cada um dos alunos]

A6: “Tem um”

A8: “A minha também”

[os alunos indicam os eixos simulando com o desenho o seu traçado]

Prof.: “Agora façam mais figuras mas com mais eixos de simetria?”

[referíamos aos alunos sempre que terminavam uma composição com sucesso]

A6: “Pode ver a minha, professora?”

[a figura tinha 7 peças mas não era simétrica]

Prof.: “A tua não tem simetria, tenta outra vez”

[referíamos ao aluno, sempre que apresentava uma figura não simétrica]

A3: “já fiz professora”

Prof.: “a tua também não é simétrica. Tens aí uma peça que não está bem, qual é?”

[a aluna aponta corretamente a peça]

Prof.: “então altera como entenderes”

[a A3 reconstruiu e obteve uma figura com simetria]

(...)

O diálogo apresentado constitui um exemplo da dinâmica da aula.

Apresentamos na Figura 44 alguns exemplos de figuras construídas pelos alunos.

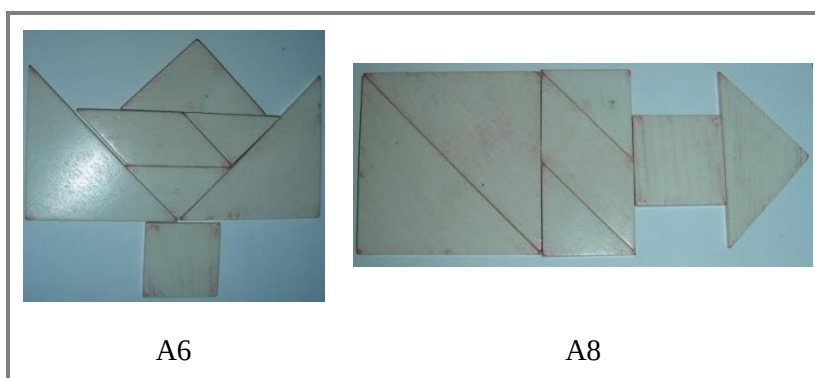


Figura 44. Exemplos de figuras com 1 eixo de simetria

Nesta tarefa verificamos que todos os alunos conseguiram construir uma figura com um eixo de simetria. A maioria conseguiu logo na primeira construção e em duas ou três tentativas todos os alunos atingiram o objetivo proposto. Apenas um aluno não utilizou as sete peças, usando apenas 5 mas construiu uma figura com dois eixos de simetria.

Todas as figuras construídas tinham apenas um eixo e nenhum era oblíquo.

Após esta 1ª fase propusemos um novo desafio, acrescentando à condição anterior o número de eixos de simetria.

“Criar uma composição geométrica simétrica, com o maior número possível de peças e o maior número possível de eixos de simetria.”

Vários alunos começaram logo por juntar dois triângulos e apresentar o quadrado. Nesta altura avisamos que deviam utilizar mais peças.

Neste novo desafio os alunos revelaram mais dificuldades e nem todos atingiram este objetivo.

A maioria das construções tinham 4 ou 5 peças e só dois alunos criaram figuras com mais de 5 ou mais peças e tinham no máximo dois eixos de simetria. Eram construídas a partir do quadrado, 2 triângulos grandes e 2 pequenos. Apenas alguns alunos fizeram construções com 5 ou mais peças e mais de um eixo de simetria.

Apresentamos na Figura 45 alguns exemplos de figuras construídas pelos alunos.

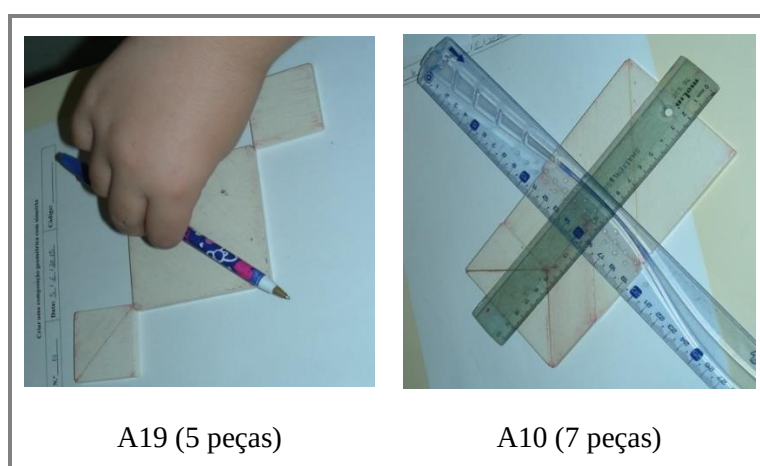


Figura 45. Exemplos de figuras com 2 ou mais eixos de simetria

Observamos que a principal dificuldade dos alunos foi a manipulação do paralelogramo oblíquângulo no processo de reflexão deste polígono. Os alunos facilmente identificavam quais as figuras a unir para formar uma figura congruente com este polígono. Mas ao organizar uma composição com esse polígono facilmente erravam devido à posição do paralelogramo.

Sintetizando observamos as seguintes dificuldades: reconhecimento de eixos de simetria oblíquos – os alunos não os reconheciam facilmente; composições que incluíam o paralelogramo; figuras em que no centro existia um espaço vazio com a forma de um retângulo (não quadrado).

Globalmente este material apresentou os seguintes contributos para a investigação da simetria:

- Clima de motivação, concentração e interesse em corresponder aos desafios;
- Competitividade saudável entre os alunos que tentavam ser os primeiros a atingir o objetivo máximo;
- Facilidade de experimentação de novas posições dos objetos, reposicionamentos ou sobreposições para a investigação das propriedades.

Apresentamos na Figura 46 alguns exemplos de figuras onde os alunos apresentaram dificuldades a reconhecer a simetria.

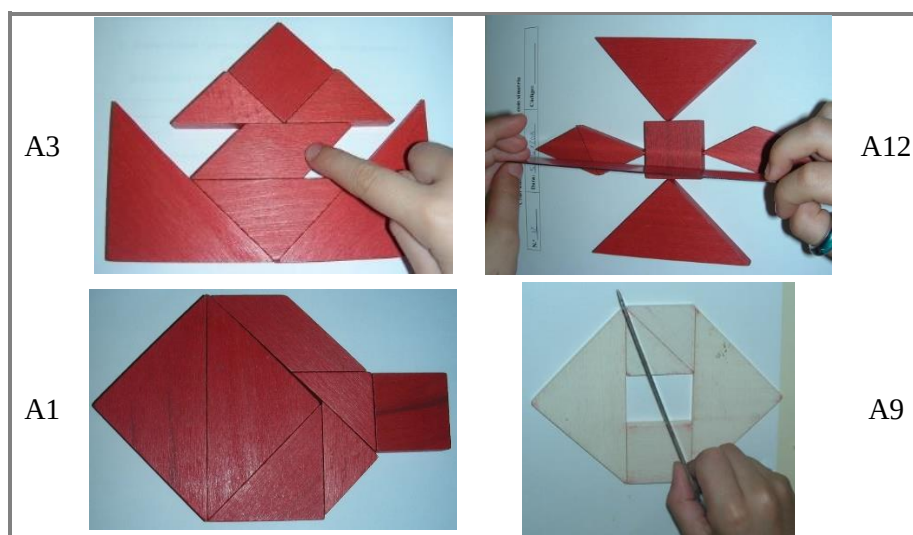


Figura 46. Exemplos de figuras para a investigação de eixos de simetria

Tarefa 12: Representar e descrever uma figura geométrica

Esta tarefa foi uma repetição da Tarefa 1 desenvolvida na primeira sessão. Desta forma pretendemos reunir mais informação sobre a evolução das aprendizagens dos alunos ao longo deste estudo, no reconhecimento de propriedades geométricas e na comunicação matemática.

Os objetivos gerais definidos são os seguintes: *situar-se e situar objetos no espaço; identificar e comparar ângulos; reconhecer propriedades geométricas*. Além destes objetivos gerais pretendemos também o desenvolvimento da *comunicação matemática*.

Na Figura 47 apresentamos o enunciado das questões da Tarefa 12.

“Desenha uma figura geométrica no quadriculado seguinte.”

[*quadrado de 10x10 em malha quadriculada*]

“Imagina que tens de explicar a um colega o que desenhaste sem dizeres o nome dessa figura geométrica.

Regista essa explicação nas linhas seguintes.”

Figura 47. Enunciado da Tarefa 12 (repetição da Tarefa 1)

Para esta tarefa os alunos dispunham do seguinte material: Ficha da tarefa; Régua e Transferidor; material de desenho e escrita.

Iniciamos com a distribuição do enunciado da tarefa a cada aluno e a sua leitura em voz alta.

Após a análise de conteúdo das respostas dos alunos, procedemos à categorização dos dados mantendo a mesma estrutura da Tarefa 1.

As figuras geométricas foram agrupadas em quatro grupos:

- *Triângulo*;
- *Retângulo*;
- *Quadrado* (como caso particular do retângulo);
- *Outras figuras* (com mais de 4 lados).

Na análise dos dados desta tarefa procedemos a uma comparação de resultados entre os dados obtidos na Tarefa 1 e na sua repetição nesta Tarefa 12.

Na Tabela 27, está representado o número de figuras, desenhadas pelos alunos, por categoria.

Tabela 27. Distribuição das figuras por categoria

Figura geométrica	N.º de Figuras	
	Tarefa 1	Tarefa 12
<i>Triângulo</i>	4	3
Quadriláteros:		
<i>Retângulo</i>	3	1
<i>Quadrado</i>	3	7
<i>Outras figuras</i>	6	5

Nesta tarefa a maioria dos alunos optou pela representação do quadrado. Continuamos a verificar a opção por figuras mais “familiares”, sendo 69% das figuras triângulos e retângulos (incluindo quadrado como caso particular) face aos 63% observados na Tarefa 1. As *outras figuras* incluem apenas polígonos estudados nas tarefas desenvolvidas ao longo desta experiência, sendo 1

octógono e 5 hexágonos. Os alunos terão percebido a dificuldade em descrever figuras mais complexas, nas quais não reconheciam algumas propriedades, e centraram-se apenas em figuras conhecidas.

Na análise da descrição/explicação da figura geométrica foram usados os seguintes atributos geométricos (tal como na Tarefa 1):

- *Vértices*: número;
- *Lados*: número e congruência: iguais/diferentes; comprimento em quadrículas/cm;
- *Paralelos/Perpendiculares*: relação de posição dos lados;
- *Ângulos*: retos/agudos/obtusos e sua amplitude;
- *Eixos de simetria*: número ou referência à propriedade;
- *Outras propriedades*: polígonos regulares/irregulares.

Na análise comparativa dos dados das duas tarefas, verificamos uma melhoria significativa no desempenho dos alunos sobre o reconhecimento das propriedades geométricas, na comunicação matemática, na utilização dos instrumentos de medição e desenho e consequentemente no traçado geométrico das figuras.

A descrição das figuras apresentou-se muito mais completa e com rigor matemático, salvo algumas imprecisões de medida por erro de medição ou por deficiente visualização (medida por quadrícula). No desenho das figuras há uma clara melhoria em termos de rigor no traçado (os exemplos apresentados não são representativos desta situação), uma vez que todos os alunos usaram a régua para o desenho das figuras, o que não aconteceu em algumas representações da Tarefa 1. Em muitas das respostas dos alunos, há também um registo da medida dos lados ou ângulos a partir do uso dos instrumentos de medição ou por contagem de quadrículas, o que também não se verificou em nenhum caso na Tarefa 1.

Na Tabela 28 apresentamos uma sistematização da análise comparativa da terminologia usada na descrição das figuras geométricas: Tarefa 1 e 12.

Tabela 28. Análise comparativa da terminologia utilizada nas Tarefas 1 e 12

Atributos geométricos	Tarefa	Figura geométrica			
		Triângulo	Retângulo	Quadrado	Outros polígonos
Vértices	1	“três pontos” “é bicuda”	“4 bicos” “4 cantos”	“4 vértices” “linhas na ponta coladas uma às outras”	
	12				
Lados	1	“3 lados com a mesma medida” “uma reta na diagonal”	“4 lados” “comprimentos diferentes” “plano por todos os lados” “4 linhas” “duas linhas maiores do que as outras”	“4 lados” “lados todos iguais” “4 linhas retas”	“8 lados”
	12	“3 lados” “dois iguais e um maior” [isósceles]	“iguais dois e dois”	“4 lados iguais” “4 lados com a mesma medida” “4 lados iguais com 6 cm” “4 lados com a mesma medida: 6 quadriculas”	“8 lados todos iguais” ⁽¹⁾ “cada lado mede 2cm” ⁽²⁾ “2 ...iguais ... e os outros 4 são iguais mas diferentes dos outros 2”
Ângulos	1				
	12	“ângulos agudos”	“4 ângulos retos (90°)”	“4 ângulos retos” “4 ângulos retos (90°)”	“8 ângulos obtusos iguais” “8 ângulos obtusos iguais” “ângulo com 120°” ⁽³⁾
Eixos de simetria	1				
	12	“1 eixo de simetria”		“4 eixos de simetria” “um na vertical, um na horizontal, um na vertical, dois na diagonal”	
Outras propriedades	1				
	12	“polígono irregular” “linhas perpendiculares” [retângulo]	“polígono irregular”	“polígono regular” “24 cm de perímetro e 36 cm ² de área”	“polígono regular” ⁽¹⁾ “polígono irregular”

Anotações referentes aos dados da tabela 28:

- (1) Percepção errada no reconhecimento do comprimento dos lados. A figura é um octógono irregular: 4 lados - têm de comprimento a diagonal de duas quadriculas; os outros 4 - a altura de duas quadriculas;
- (2) Altura de 2 quadriculas;
- (3) Medição incorreta dos ângulos.

Na Figura 48 apresentamos exemplos sobre a representação de figuras geométricas de cada uma das categorias de grupos.

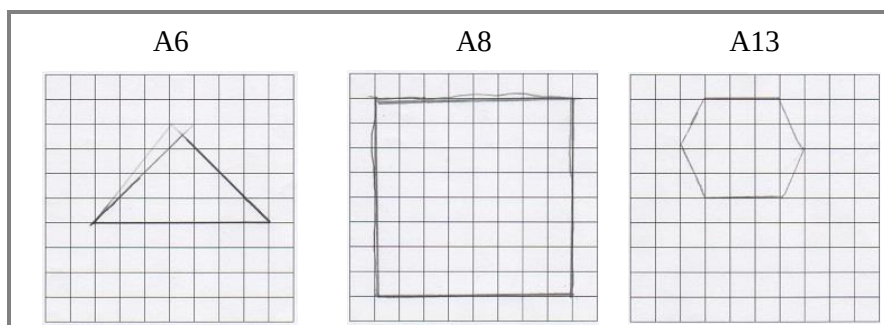


Figura 48. Exemplos de representações da figura geométrica – 2.º momento

Na Figura 49 apresentamos exemplos sobre a descrição das figuras apresentadas na figura 48.

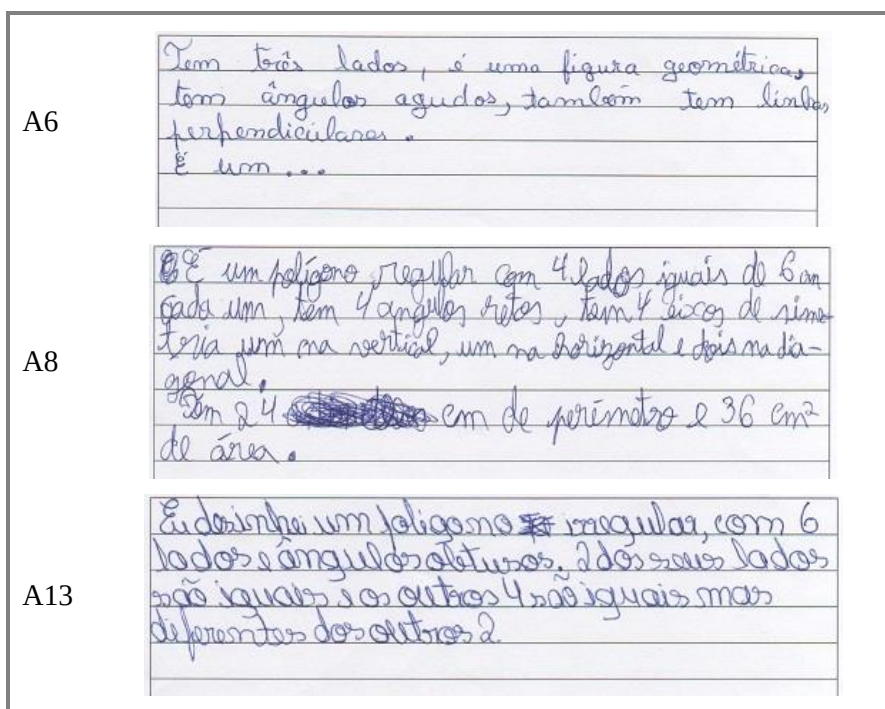


Figura 49. Exemplos de resposta sobre a descrição da figura geométrica

Sintetizando a análise qualitativa das respostas dos alunos nesta Tarefa 12 registamos o seguinte:

- Ausência de referência aos vértices e ao seu número (em destaque na Tarefa 1);
- Aumento do rigor na referência aos lados e referência ao seu comprimento (cm/quadrícula);
- Ausência de referência sobre a *relação de posição*;
- Referência com bastante rigor em relação aos *ângulos* e à sua medida;

- Referência com bastante rigor em relação aos *eixos de simetria*, particularmente no caso do quadrado;
- Referência a *outras propriedades*: *polígono regular/irregular*; *perímetro e área* (1 aluno).

CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Este estudo, realizado numa turma do 4.º Ano do 1.º CEB, permitiu desenvolver capacidades de visualização espacial nos alunos a partir de uma sequência de tarefas elaboradas para o efeito.

Neste capítulo apresentamos as principais conclusões do estudo, tendo em conta os objetivos específicos, as questões orientadoras, o referencial teórico e os dados recolhidos nos diferentes suportes de registo. Seguidamente, apresentamos as limitações encontradas e as implicações deste estudo no ensino da Geometria elementar e, por fim, algumas recomendações para futuros trabalhos.

Conclusões

Nesta secção apresentamos os principais resultados obtidos procurando responder às duas questões que orientaram o estudo tendo como suporte a informação recolhida.

As tarefas elaboradas para este estudo, no domínio da Geometria e Medida, incidem sobre conteúdos dos subdomínios: *Localização e orientação no espaço* e *Figuras geométricas*. A estrutura das tarefas e a sequência em que foram implementadas permitiram analisar e refletir sobre o conhecimento geométrico dos alunos e a sua evolução, nos conteúdos programáticos em estudo.

Apresentamos de seguida um desenvolvimento das principais conclusões deste estudo, respondendo a cada uma das questões orientadoras.

Que fragilidades apresentam os alunos, no reconhecimento de propriedades geométricas em figuras planas?

Nas tarefas implementadas os alunos tiveram oportunidade de expressar as suas aprendizagens de diversas formas: linguagem verbal utilizando a terminologia matemática; representações pictóricas de objetos geométricos; representações ativas com a manipulação de instrumentos de medida (régua e transferidor) e materiais manipuláveis (Mira e *Tangram*).

As fragilidades evidenciadas pelos alunos, no decurso desta experiência didática, situam-se ao nível da visualização espacial, particularmente em três das sete capacidades enunciadas por Del Grande (1990): Constância percetual, Perceção da posição no espaço; Discriminação visual.

Estas capacidades não estarão suficientemente desenvolvidas nestes alunos, tendo por referência os resultados obtidos, reconhecendo-se fragilidades de carácter concetual que analisamos em pormenor:

Na representação de linhas paralelas/perpendiculares (Tarefa 2), a posição *standard* é significativamente mais marcante na representação de *linhas perpendiculares* do que na representação de *linhas paralelas*. A maioria dos alunos representa as linhas perpendiculares em

posição *standard*. No caso das linhas paralelas, esta situação não é tão evidente uma vez que mais de metade dos alunos apresenta representações destas linhas que não se encontram na posição *standard*.

Nas tarefas seguintes (Tarefa 3 a 6) pretendemos que os alunos aplicassem os seus conhecimentos nas figuras geométricas que selecionámos para este estudo. Conscientes da importância das representações na compreensão dos conceitos e relações matemáticas (NCTM, 2008, p. 75) apresentamos aos alunos classes de polígonos com múltiplas representações. Nestes polígonos há quadriláteros (quadrado e paralelogramo obliquângulo), pentágonos e hexágonos que, na sua maioria, são irregulares com lados em posição *standard* (um lado na horizontal e outro na vertical) e *não standard*. O único polígono regular apresentado foi o quadrado em posição *não standard*. Com esta variedade de figuras pretendemos ir ao encontro do que é referido na literatura apresentando objetos geométricos em representações diversas de forma a evitar a formação de protótipos rígidos (Loureiro, 2009).

Relativamente à percepção de congruência (Tarefa 3), como a aptidão de reconhecer que os objetos [neste caso segmentos de reta] possuem invariantes propriedades como o tamanho e a forma mesmo que se encontrem em posições variadas (Lindquist & Shulte, 1987), consideramos também que esta também não está bem presente. Verificámos que os alunos têm mais facilidade em reconhecer a congruência de segmentos de reta se estes estão na vertical ou na horizontal, como refere a literatura sobre imagens conceptuais. Os que não estão na posição *standard* não os reconhecem. A comparação de distâncias entre os extremos de segmentos no geopapel, por exemplo, não foi uma estratégia evidenciada por estes alunos. A verificação da congruência seria simples se os alunos pudessem sobrepor os objetos, como é recomendado por vários autores (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Clements, 2003; Del Grande, 1990) mas nesta tarefa não era esse o nosso objetivo.

No reconhecimento das relações de posição (paralelas/perpendiculares) entre lados de polígonos (Tarefa 4 e 5), os alunos apresentaram fragilidades no reconhecimento de lados paralelos e perpendiculares na posição *não standard*. Estas fragilidades evidenciaram-se no caso dos lados perpendiculares. Já nas representações de linhas perpendiculares só 25% dos alunos é que as representa na posição *não standard*. (Tarefa 2).

Também o reconhecimento de ângulos retos (Tarefa 6) em que os lados não estão na posição *standard*, se tornou numa dificuldade para o aluno. Esta situação não foi tão marcante como no caso da perpendicularidade. Dada a correlação entre a noção de *perpendicularidade* e *ângulos retos*, os resultados obtidos nas duas tarefas são coerentes.

Observámos que a posição *não standard* foi um constrangimento no processo de visualização, destes alunos para a resolução das tarefas propostas. Os resultados obtidos podem indiciar a ausência de imagens mentais suficiente “fortes” que permitam o reconhecimento dos objetos e das suas propriedades em diferentes perspetivas. No grupo de figuras apresentadas, o *quadrado* não estava em posição *standard* no entanto nesta figura os alunos não evidenciaram dificuldades. A imagem

mental deste objeto geométrico – *quadrado*, para estes alunos, já deve ter sido construída ao longo da sua aprendizagem a partir das suas múltiplas representações (Loureiro, 2009). A “familiaridade” com esta figura tornou a tarefa de reconhecimento das suas propriedades mais simples do que nas restantes figuras. O paralelogramo oblíquângulo foi uma das figuras onde se verificaram muitas dificuldades. O facto de a maioria das figuras serem polígonos não regulares com mais de 4 lados e em posições *não standard*, pode também ter contribuído para esta situação. Estas classes de polígonos nomeadamente os *quadriláteros*, *pentágonos* e *hexágonos*, bem como o conceito de polígono regular integram o programa do 1.º CEB. Contudo, as representações que seleccionámos para cada uma destas classes revelaram-se de grande complexidade para os alunos uma vez que não lhes eram “familiares”. Estas fragilidades no reconhecimento de relações de posição (paralelas/perpendiculares), de ângulos retos e da congruência, em objetos que estão noutras posições que não sejam a posição *standard* são referidas por vários autores (Clements & Battista, 1992, Cooper & Krainer, 1990).

A investigação da simetria de reflexão foi realizada em três tarefas (Tarefa 9, 10 e 11) com e sem materiais manipuláveis. Na Tarefa 9, foram estudados polígonos regulares usando só a régua. Na Tarefa 10, foram estudados polígonos regulares e não regulares usando a Mira. Na Tarefa 11, foi realizada uma exploração de figuras usando o Tangram.

Nestas três tarefas só é possível fazer a comparação analítica do estudo com os polígonos regulares (Tarefa 9 e 10), uma vez que este grupo é o único comum às duas tarefas. Nesta análise comparativa verificámos que o reconhecimento da relação entre o *número de lados e o número de eixos de simetria de reflexão* passou de 19% (Tarefa 9) para 44% dos alunos (Tarefa 10). O uso da Mira revelou-se um material facilitador do reconhecimento dos eixos de simetria. No entanto, a comunicação matemática continuou a ser uma dificuldade para muitos alunos que não conseguiram formular esta conjectura. O triângulo equilátero que é o mais harmonioso foi aquele em que, dentro da sua classe (triângulos), os alunos não reconheceram a totalidade dos eixos. Neste caso aproveitamos para refletir sobre a regularidade desta figura.

O *Tangram* foi, tal como a Mira, um bom recurso para o estudo da simetria (Tarefa 11). Através das suas múltiplas composições os alunos experimentaram várias organizações das peças tentando criar figuras com simetria e com o maior número de peças possível. Neste desafio os alunos tentavam ser os primeiros a atingir o objetivo revelando um grande esforço em termos de raciocínio geométrico. As atividades de manipulação com este recurso permitiram evidenciar facilmente as fragilidades nas diversas capacidades ao nível da visualização espacial. O paralelogramo oblíquângulo é das figuras que realçam este problema nomeadamente: nos processos de reflexão deste polígono, pelo facto de o reconhecerem como uma figura com simetria [o que não se verifica]; O Tangram permitiu também evidenciar dificuldades como: reconhecimento de eixos de simetria oblíquos; na criação livre de figuras com simetria sempre que o interior de uma composição de polígonos era um retângulo (não quadrado) verificamos dificuldades no reconhecimento de alguns

eixos nesta composição de polígonos. O Tangram facilitou a criação de uma ampla diversidade de figuras e, de forma muito prática e motivadora, a investigação das suas propriedades (Bastos, 2006) como pudemos verificar no nosso estudo do tema - Simetria. O estudo dos polígonos regulares, pela sua regularidade foram um bom exemplo de investigação no estudo da simetria de reflexão (Veloso, 1998).

Na análise dos resultados obtidos sobre o desenvolvimento das aprendizagens de conceitos geométricos, destacamos em termos gerais as seguintes fragilidades dos alunos:

- i. Reconhecer e representar objetos geométricos em diferentes posições;
- ii. Reconhecer propriedades geométricas nas diferentes famílias de figuras;
- iii. Comparar e ordenar objetos mensuráveis;
- iv. Utilizar com rigor instrumentos de medida nomeadamente o transferidor;
- v. Comunicar por forma escrita, utilizando terminologia matemática;
- vi. Argumentar e formular conjecturas, a partir de um número reduzido de objetos geométricos.

Que contributos resultam da utilização de materiais manipuláveis, na visualização espacial e investigação de propriedades geométricas?

A utilização de materiais manipuláveis, na resolução de tarefas matemáticas é, normalmente, uma ação que os alunos desenvolvem com curiosidade e interesse. Neste sentido estes recursos podem constituir um estímulo à aprendizagem e facilitar a construção do conhecimento matemático.

A Mira e o *Tangram* foram os materiais manipuláveis que selecionámos como recurso principal para o estudo da simetria (Tarefa 10 e Tarefa 11). Além destes usamos também pequenos modelos em papel com a representação individual de polígonos, um transferidor e uma régua.

Com estes materiais pretendemos facilitar aos alunos a visualização espacial, a exploração e investigação das propriedades geométricas dos polígonos e suas classes, pois é através da manipulação que desenvolvem a ação mental estimulada pelo contacto das mãos com os objetos e os diferentes materiais (Alsina, 2004).

Na utilização do material de desenho e medida, como a régua e o transferidor, verificámos que no evoluir das tarefas os alunos foram reconhecendo a sua importância e melhorando a sua manipulação. Na comparação dos desempenhos na Tarefa 1 e 12 “Representação e descrição de uma figura geométrica” este facto evidenciou-se. Na Tarefa 1 não há registos da utilização deste material, nomeadamente do transferidor. Na Tarefa 12 os registos dos alunos evidenciam medidas de lados e ângulos e a sua classificação. Estes materiais foram também utilizados em vários processos de classificação e ordenação de objetos geométricos (Tarefa 7 e 10). Também verificámos uma clara melhoria no traçado geométrico, nomeadamente: mais fino e rigoroso. A maior parte das figuras

passaram a ser desenhadas com a régua em vez da simples união grosseira dos vértices das quadrículas.

A utilização de material de desenho e medida, como a régua e o transferidor, em várias tarefas, permitiu aos alunos melhorar os seus desempenhos sobre a ordenação e classificação de objetos geométricos mensuráveis e comunicar matematicamente de forma mais completa e rigorosa. Contribuiu também para o desenvolvimento de uma competência essencial nos anos subsequentes quando forem necessárias construções geométricas mais complexas.

A utilização dos pequenos “modelos” de polígonos em papel facilitou o processo de visualização ao permitir a “manipulação da figura”. Os alunos rodavam as figuras de forma a posicioná-las em perspectivas mais favoráveis à investigação das suas propriedades e ao mesmo tempo tentavam colocar a Mira de forma a observarem a congruência das partes e assim traçarem os eixos. O processo de concretização foi facilitado com estes modelos.

O *Tangram* facilita o pensamento espacial dos alunos através da concretização, de forma lúdica e criativa (Alsina, 2004; Vale, 2011) e foi utilizado para aprofundar o estudo da simetria por permitir a rápida movimentação de peças no processo de investigação das propriedades das figuras geométricas. No estudo da simetria, a Mira é outro material recomendado por vários autores (Clements, 2004, Veloso et. al., 2009) pois permite observar o prolongamento de uma figura e verificar assim se existe ou não simetria. Constatámos que este material foi o responsável pela melhoria significativa das aprendizagens na investigação de eixos de simetria nos polígonos regulares e não regulares (Tarefa 10). A evolução significativa verificada nos resultados da investigação de eixos de simetria foi analisada na questão anterior e como tal não se justifica a sua repetição.

A dinâmica das aulas, as tarefas e os materiais utilizados permitiram aos alunos desenvolver uma aprendizagem significativa e atenuar uma parte das suas fragilidades. A Mira e o *Tangram* facilitaram o processo de visualização, proporcionando aos alunos uma aprendizagem sensorial, motivadora, com o seu envolvimento ativo num processo de construção de conceitos do concreto para o abstrato (Reys, 1982). Neste processo os alunos com mais dificuldades evidenciaram-se sendo muita positiva a evolução do seu conhecimento.

O nosso papel foi o de moderar todo este processo, orientando, sugerindo e promovendo sempre a reflexão sobre o conhecimento que se foi construindo. Foi nosso objetivo promover a comunicação matemática dos alunos quer de forma escrita quer oral. Em termos orais particularmente na Tarefa 10 e 11.

Finalmente, destacamos algumas fragilidades de carácter processual:

- Manusear a Mira, para averiguar a existência de congruência das partes (destaque particular - 2 alunos que usam óculos);

- Traçar, com rigor, os eixos de simetria (coincidência perfeita no cruzamento dos eixos);
- Efetuar a contagem dos eixos de simetria, nos polígonos com maior número de lados; apenas uma minoria de alunos evidenciou algum tipo de estratégia de contagem – pequeno traço).

Para atenuar estas fragilidades os alunos necessitam de realizar mais atividades, com caráter prolongado no tempo, para que possam experienciar a utilização destes recursos. No caso da Mira os alunos não se sentiram suficientemente adaptados o que de certa forma condicionou o “aproveitamento” deste recurso.

Numa análise global da implementação desta experiência didática destacamos as seguintes conclusões:

- Um desenvolvimento de capacidades estruturais como a comunicação e o raciocínio matemático;
- Uma evolução positiva nas aprendizagens ao longo da implementação das tarefas, embora alguns alunos ainda evidenciassem fragilidades em conceitos e procedimentos;
- Um grande empenho e motivação, particularmente nas tarefas em que se utilizaram os materiais manipuláveis, como a Mira e o *Tangram*;
- Uma oportunidade para os alunos com mais dificuldades se evidenciarem. Esta situação ocorreu nas tarefas com recurso à Mira e ao *Tangram*;
- Uma competitividade “saudável”, na criação de figuras com simetria na tarefa com o uso do *Tangram* -Tarefa 11;
- Um claro desenvolvimento na manipulação de instrumentos de desenho e medida, especialmente no uso do transferidor. Maior rigor na medição e no traçado geométrico;
- Mudança de atitude face à matemática.

Aspetos positivos do estudo

A simetria é uma área particularmente rica no estabelecimento de conexões matemáticas e no desenvolvimento da criatividade e motivação. Estas razões justificam a escolha do tema.

Para que o ensino da Geometria resulte em aprendizagens significativas, é necessário que a ação didática seja bem planeada e os recursos sejam adequados. Foi esta a nossa preocupação na elaboração das tarefas, quanto à sua forma e estrutura e aos materiais de suporte a utilizar em cada uma delas.

O raciocínio geométrico é um processo que se constrói pouco a pouco e envolve a manipulação de imagens mentais e as suas relações. Neste processo, as representações têm um papel fundamental e por isso sempre que pretendemos o estudo de propriedades geométricas de figuras e as suas relações fomos criteriosos nestas escolhas. Proporcionamos aos alunos experiências com figuras geométricas diversificadas e em diferentes perspetivas, de forma a descobrirem os seus invariantes tendo em atenção a importância das múltiplas representações das diferentes classes de objetos.

Neste estudo os alunos realizaram diferentes tarefas de exploração e investigação possibilitando-lhes a utilização de vários processos matemáticos e várias formas de expressar o seu conhecimento. O processo de comunicação foi utilizado em várias tarefas, como forma de desenvolver competências nesta área tão sensível nos alunos. Apresentamos questões de representação gráfica ou pictórica e escrita. A utilização de instrumentos de medida foi igualmente um requisito em diversas questões.

Considerando a natureza abstrata da maioria dos conceitos matemáticos, utilizámos materiais manipuláveis para envolver a parte sensorial do aluno. Através do Tangram e da Mira conseguimos que alguns conceitos fossem por esta via entendidos de uma forma mais rigorosa.

Procuramos identificar fragilidades e reconhecer contextos favoráveis à sua superação.

Limitações e Recomendações

Este estudo seguiu um método de investigação misto, com recolha de informação qualitativa de natureza interpretativa e quantitativa por forma a obter informação rica em pormenores e assim responder às questões orientadoras do estudo. O grupo de estudo foi constituído por alunos de uma turma do 4.º ano do ensino básico e como tal os dados não devem ser dissociados do seu contexto.

Tendo em consideração estes pressupostos, os resultados obtidos não são generalizáveis a outros contextos mas podem contribuir para uma análise da mesma temática noutros contextos.

A principal limitação que sentimos neste estudo foi a insuficiência de tempo para explorar, de forma mais aprofundada, o raciocínio geométrico dos alunos e os contextos que o favorecem. Dado o elevado número de tarefas e as limitações tempo para as aplicar e analisar, sentimos que mais haveria a fazer. Uma vez que não o conseguimos registamos algumas sugestões para futuros trabalhos.

Uma outra limitação foi o facto de os participantes do estudo serem alunos do 4.º ano e dada a aproximação dos exames, não foi possível desenvolver de forma mais intensa a exploração dos materiais utilizados (Tangram e Mira) como desejaríamos.

Seria interessante dar continuidade a este trabalho, realizando um novo estudo com este grupo no final do 2.º ciclo do ensino básico, sobre a temática das transformações geométricas e analisar os efeitos desta experiência.

Na temática da Simetria sugerimos o seu desenvolvimento através de um projeto de articulação com a disciplina de Estudo do Meio sobre o tema – Exploração da Simetria na Natureza.

Na exploração de materiais manipuláveis - seleccionámos o Tangram para a realização de uma exploração mais abrangente integrando o subdomínio da *Medida*. Para o efeito sugerimos algumas atividades:

- Construção de um modelo de Tangram em papel pelo próprio aluno;
- Desenvolvimento dos conteúdos: área e perímetro;
- Construção de padrões com este material de base.

REFERÊNCIAS

- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In E. Veloso; H. Fonseca; J. Ponte; P. Abrantes (Orgs). *Ensino da geometria ao virar do milénio*, pp. 51-62. Lisboa: ME, Departamento da Educação Básica.
- Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., Loureiro, C., & Nunes, F. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME, Departamento da Educação Básica.
- Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação*. Porto: Asa Editores.
- Aires, A., Campos, H., & Poças, R. (2015). Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: A definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. *Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa*, 151-176.
- Alsina, À., (2004). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos*. Porto Editora.
- Bastos, R. (2006). Notas sobre o ensino da Geometria. Simetria. *Educação e Matemática*, 88, 9-11.
- Bogdan, R., & Biklen S. (2013) *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.) (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L. Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D'Água.
- Caldeira, M. (2009). *A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da Matemática*. Tese de Doutoramento, Universidad de Málaga, Espanha.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In *Learning and Teaching Geometry, K-12 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, edited Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston:VA. National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H. (1999). Geometric and Spatial Thinking in Young Children. In Copley, J. V. (Ed) National Association for the Education of Young Children. pp. 66 - 79. Reston: VA.
- Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. "A project of the NCTM", pp. 420-464. New York: Macmillan Publishing Company.

- D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. [tradução Maria Cristina Banomi]. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In J. Kilpatrick e P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* pp. 113-134. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Gaspar, J. & Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais – Uma conjugação favorável à apropriação das Isometrias. In *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 169-190. Braga: APM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME conference 1* (pp. 3-19). Consultado em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcoapg.html>
- Gutiérrez, A., Jaime A., & Fortuny J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 3, 237-251.
- Instituto de Avaliação Educativa. I. P. (2015). *Relatório Nacional 2010-2014*. Provas Finais do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico.
- Instituto de Avaliação Educativa, I. P. (2015). *Relatório: Projeto Testes Intermédios do 1.º Ciclo do Ensino Básico*.
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. In S. Llinares & M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*, pp. 295-384. Sevilla: Alfar.
- Lima, E. L. (2004). *Matemática e Ensino*. Lisboa: Gradiva.
- Loureiro, C. (2007). A Geometria na proposta de ajustamento – algumas questões. *Educação e Matemática*, 95, 25.
- Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de Matemática do ensino básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática*, 105, 61-66.
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.
- Maia, C. (2014). *As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Universidade Portucalense, Portugal.
- Matos, J. & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas atividades. *Educação e Matemática*, 26, 13 – 17.
- Matos, J. & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

- Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e metas curriculares de Matemática do ensino básico*. Lisboa: MEC.
- Ministério da Educação (2013). Portugal: Primeiros resultados do PISA - *Programme for international student assessment* 2012. Projavi: Avaliação internacional de alunos. DGEEC. Consultado em: [http://www.dgeec.mec.pt/np4/246/%7B\\$clientServletPath%7D/?newsId=371&fileName=PISA_Primeiros_Resultados_PORTUGAL.pdf](http://www.dgeec.mec.pt/np4/246/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=371&fileName=PISA_Primeiros_Resultados_PORTUGAL.pdf)
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (2.^a ed.). Lisboa. APM.
- Oliveira, A. (1997). *Transformações geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.
- Ponte, J. P. (1994). O Estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3 (1), 3-18.
- Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas*, pp. 21-56. Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário.
- Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Serra, M. (1993). *Discovering geometry: An inductive approach*. Berkeley: Key Curriculum Press.
- Vale, I. (2011). Tarefas Geométricas com Recurso a Materiais Manipuláveis: alguns exemplos com futuros professores do ensino básico. In *Formação Contínua. Relatos e Reflexões*, pp. 83-100.
- Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo. *Quadrante*, 14, 1, 37-65.
- Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Atuais. Materiais para Professores*. Lisboa: ME, Instituto de Inovação Educacional.
- Veloso, E., (2006). Sobre as Definições. *Educação e Matemática*, 90, 7-9.

Veloso, E., Bastos, R., & Figueirinhas, S. (2009). Isometrias e simetria com materiais manipuláveis. *Educação e Matemática*, 101, 23-28.

Walle, J. (2001). Geometric thinking and Geometric concepts. In *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 4th ed., pp. 306-312, Boston: Allyn and Bacon.

Outros Documentos consultados:

Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas Dr. Costa Matos. Triénio 2012-2015.

Software utilizado nas construções geométricas:

GeoGebra

Download em: <https://www.geogebra.org/>

ANEXOS

N.º _____	Data: ____ / ____	Código: _____
-----------	-------------------	---------------

Desenha uma figura geométrica no quadriculado seguinte.

[illegible]

Imagina que tens de explicar a um colega o que desenhaste sem dizeres o nome dessa figura geométrica.

Regista essa explicação nas linhas seguintes.

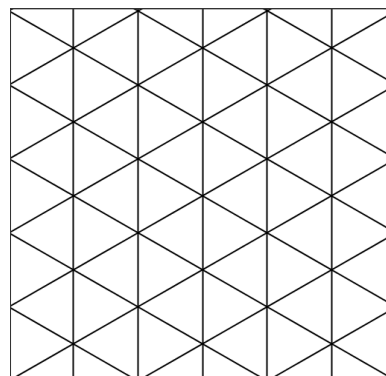
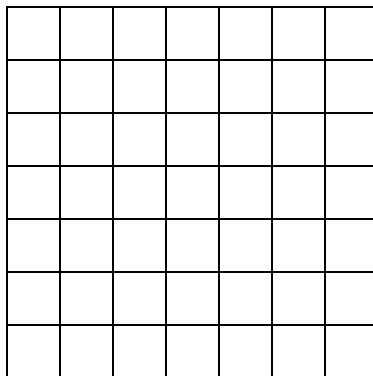
[illegible]

Representar linhas horizontais, verticais, paralelas e perpendiculares

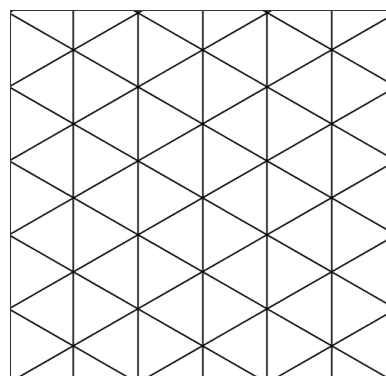
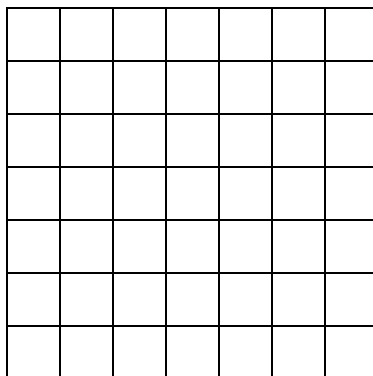
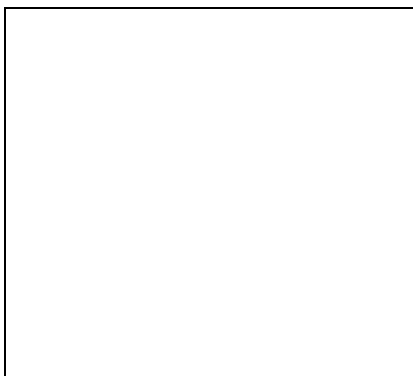
N.º _____	Data: ____ / ____ / _____	Código: _____
-----------	---------------------------	---------------

Deves utilizar a régua em todas as representações.

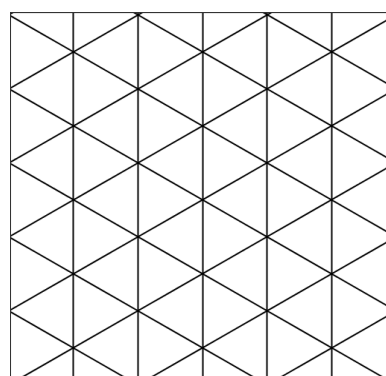
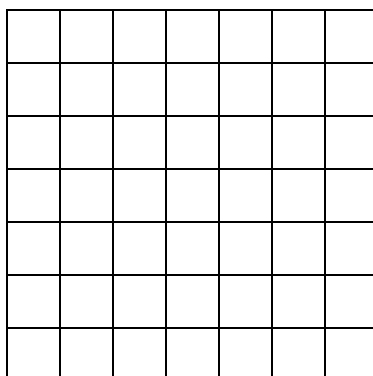
1. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas horizontais.



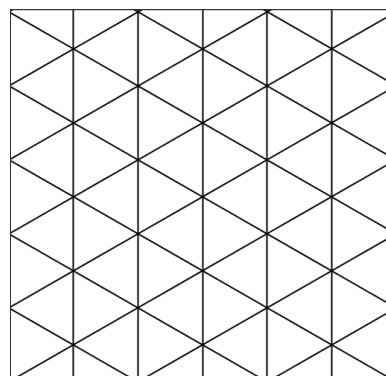
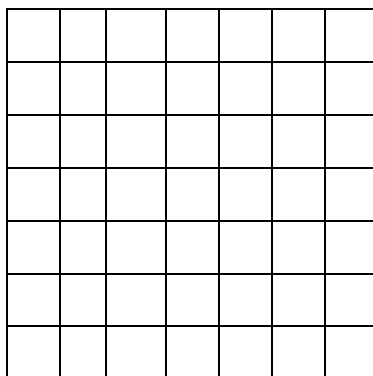
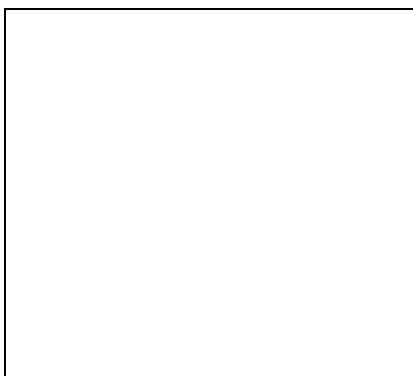
2. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas verticais.



3. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas paralelas.



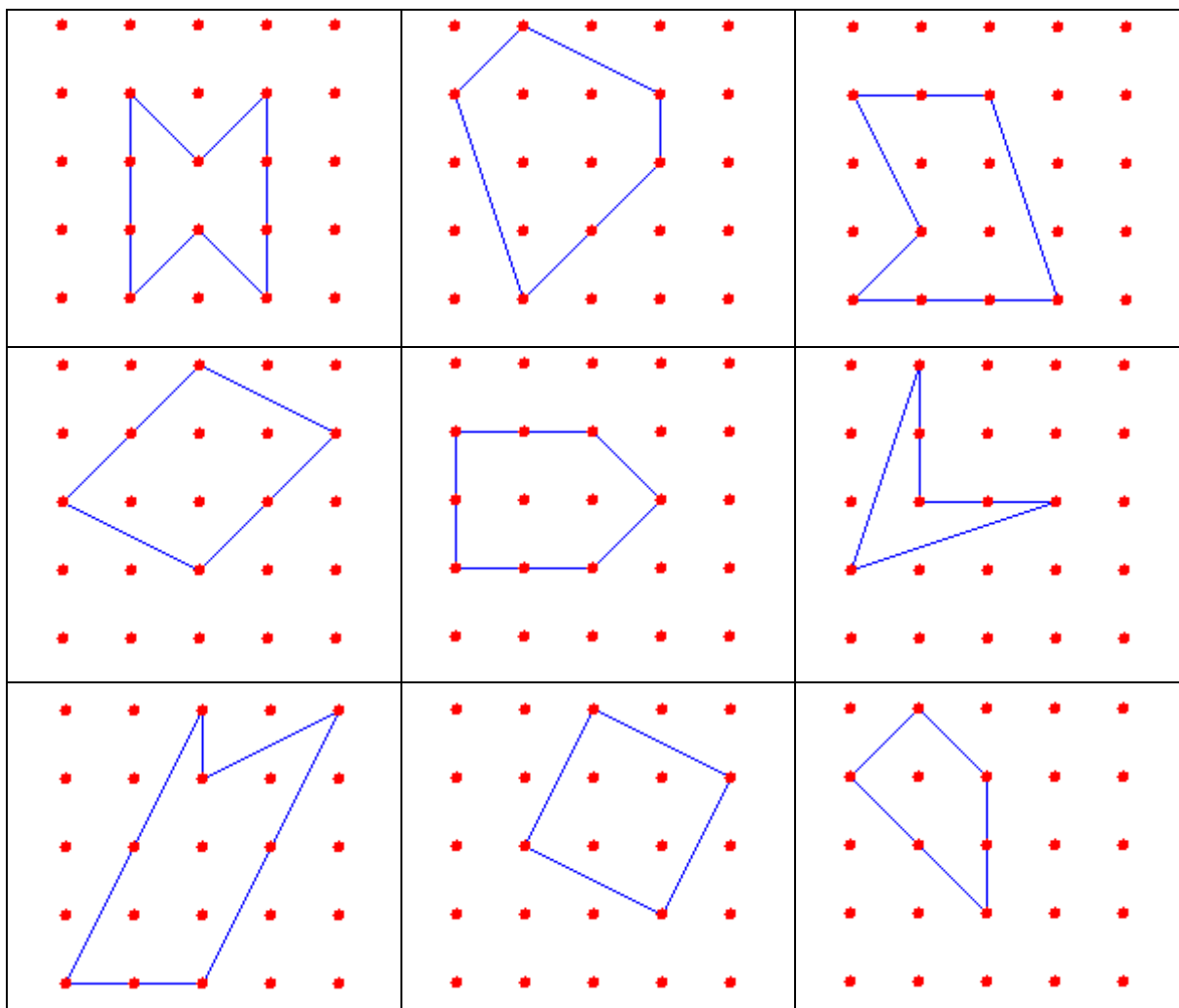
4. Representa a verde, em cada um dos quadrados, duas linhas perpendiculares.



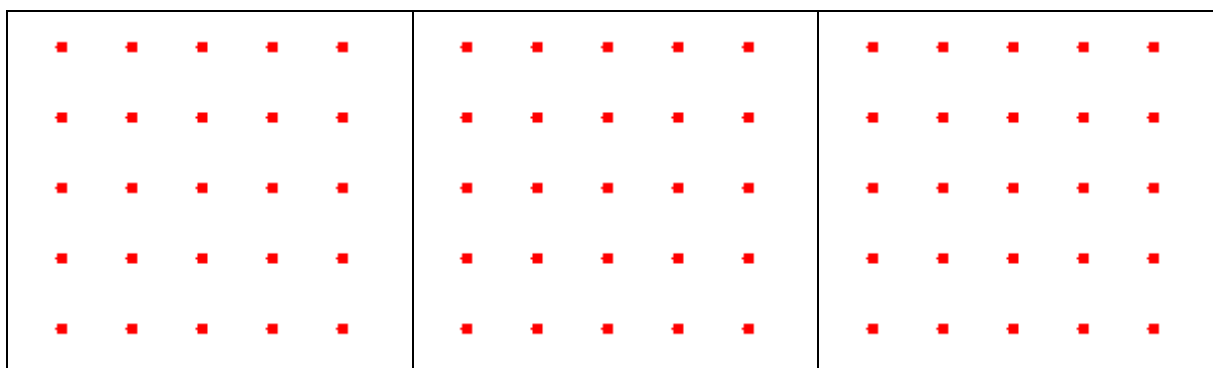
Reconhecer e representar segmentos de reta geometricamente iguais

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Em cada uma das figuras marca com um X, **se existir**, todos os lados com o mesmo comprimento.



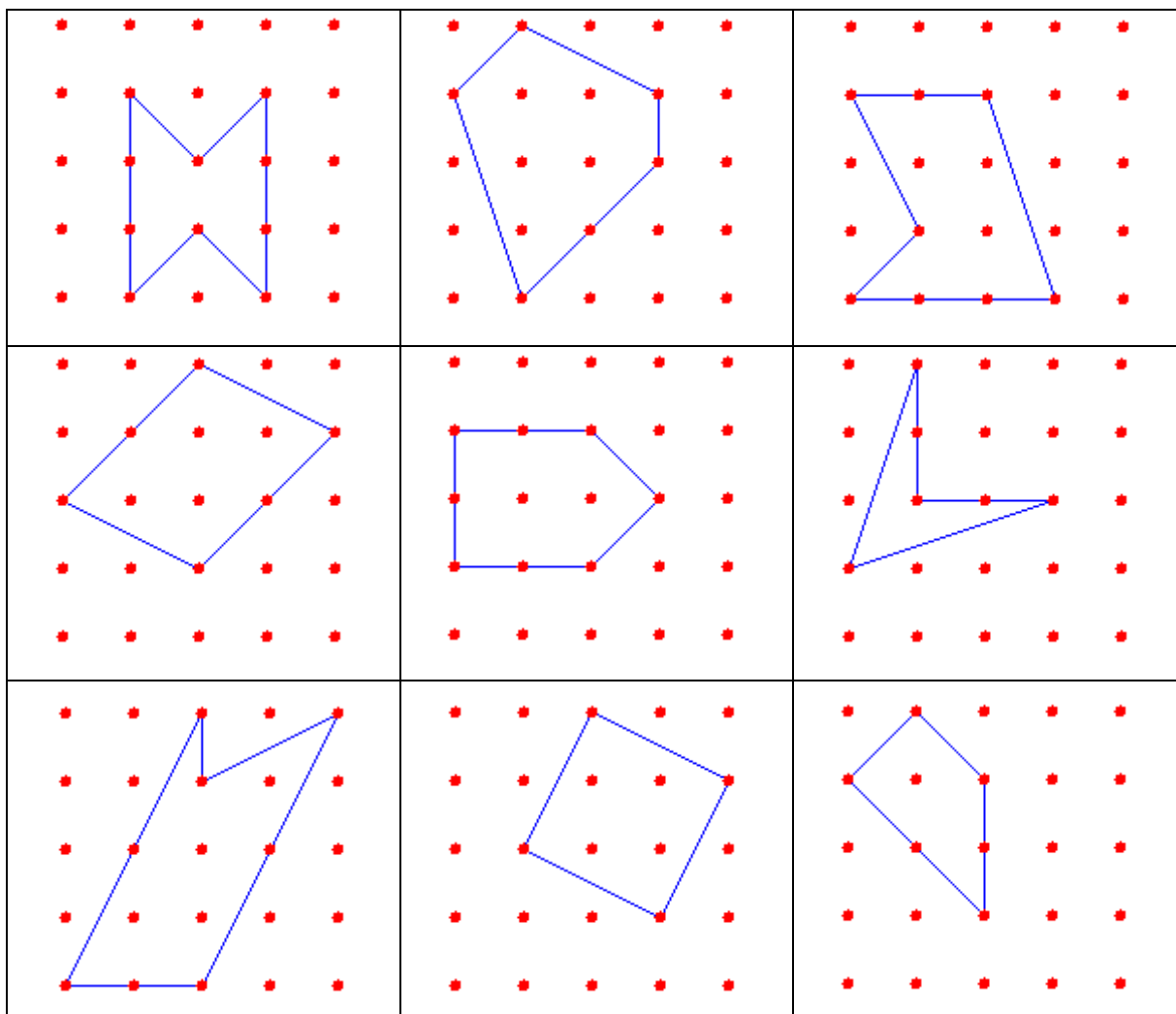
2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um par de lados com o mesmo comprimento.



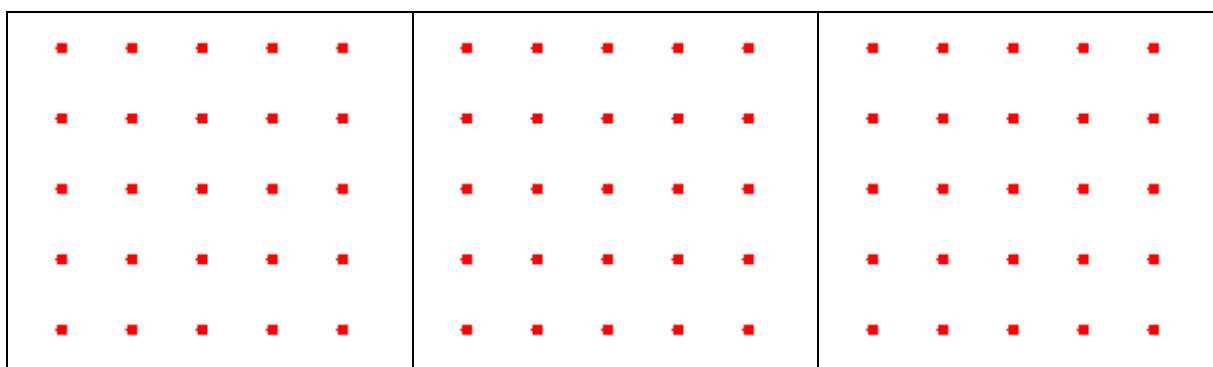
Reconhecer e representar segmentos de reta paralelos

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Em cada uma das figuras identifica, **se existir**, todos os pares de lados paralelos. (Assinala com uma cor diferente cada par de lados paralelos).



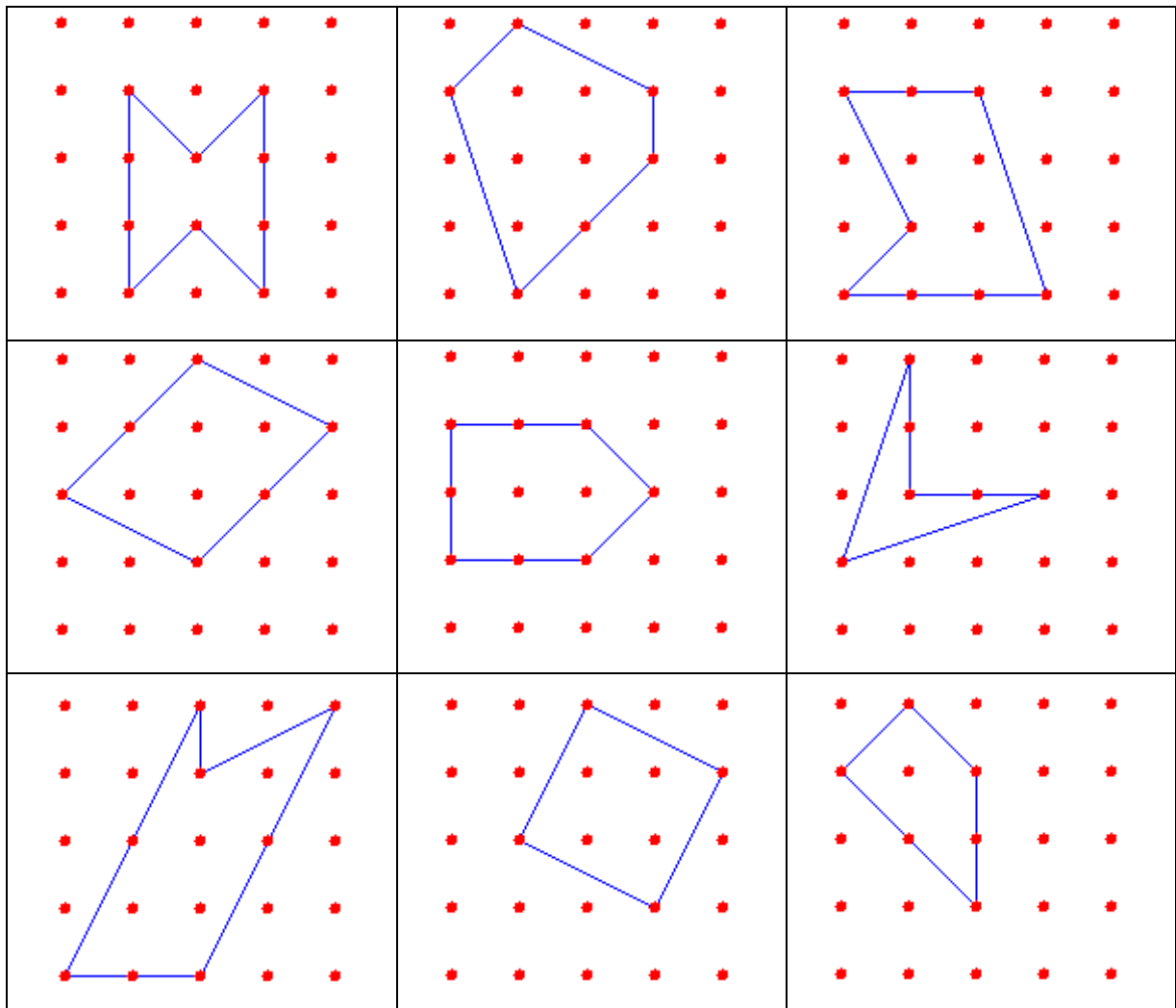
2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um par de lados paralelos.



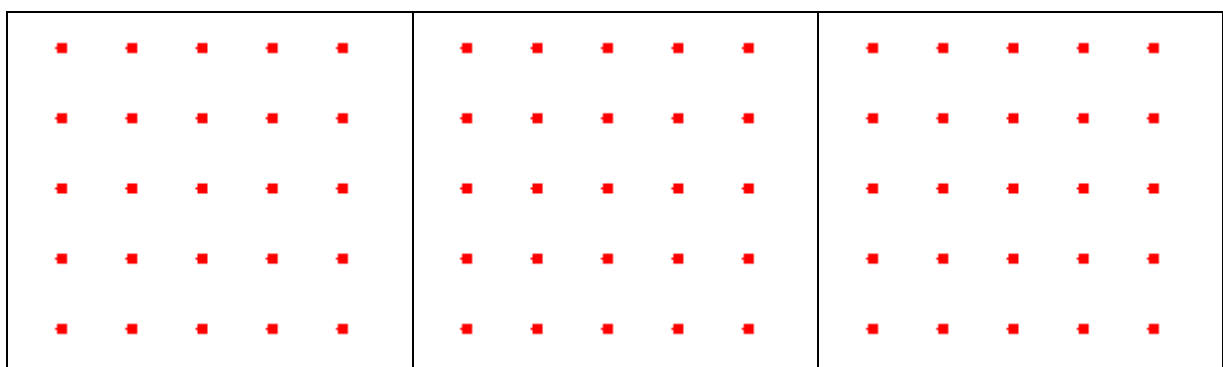
Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Em cada uma das figuras identifica, **se existir**, todos os pares de lados perpendiculares. (Assinala com uma cor diferente cada par de lados perpendiculares).



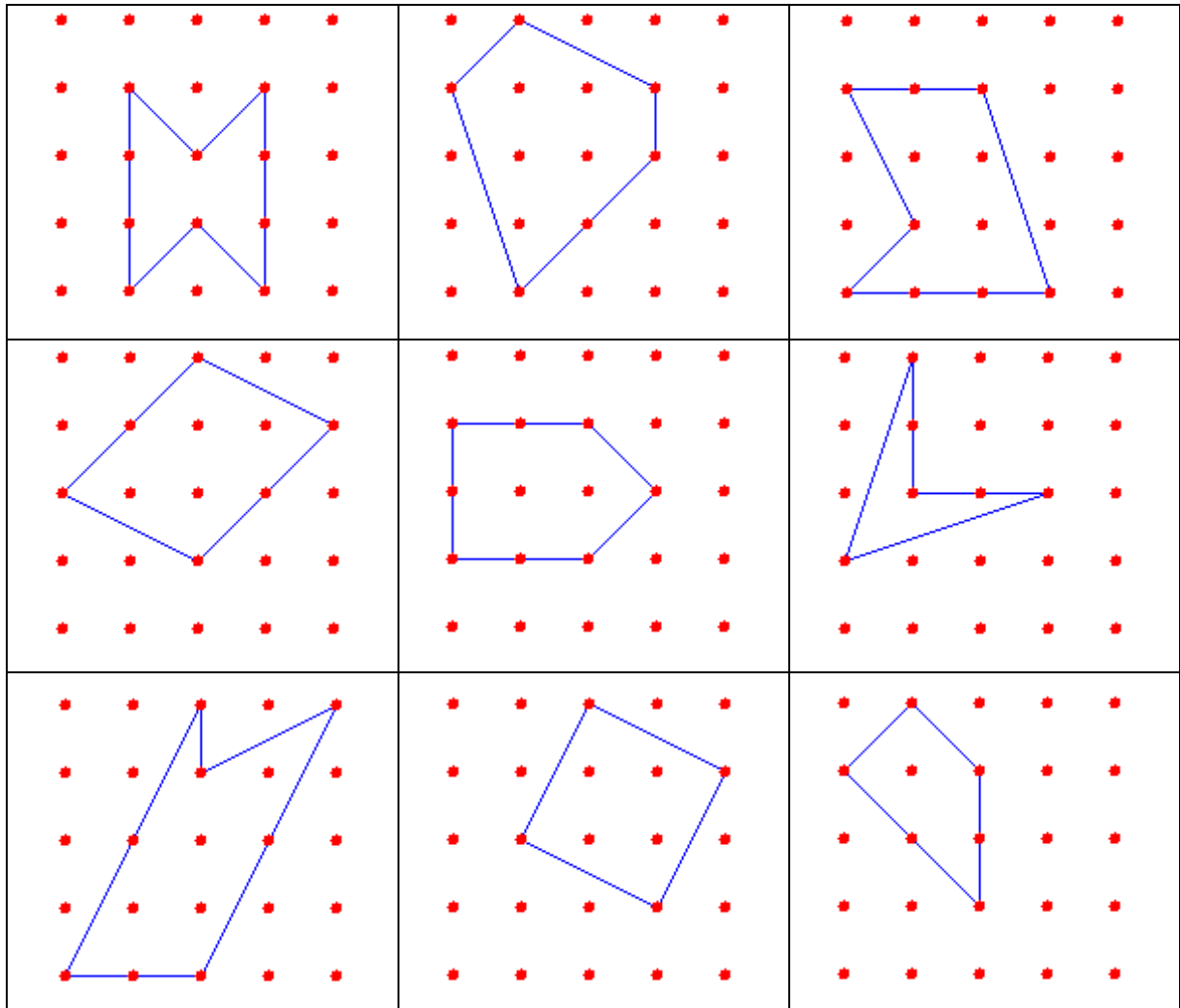
2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um par de lados perpendiculares.



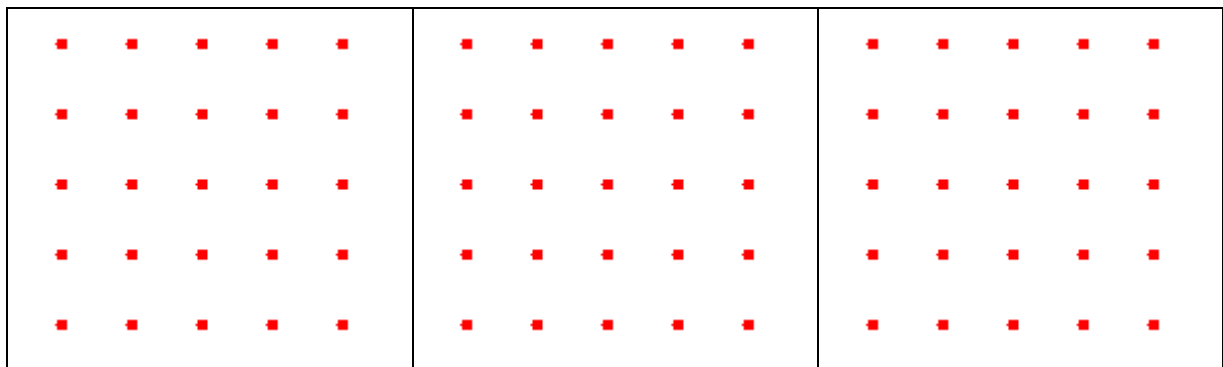
Reconhecer e representar ângulos retos

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Em cada uma das figuras identifica, **se existir**, todos os ângulos retos.



2. Representa três polígonos com características geométricas diferentes, de forma que cada polígono tenha pelo menos um ângulo reto.

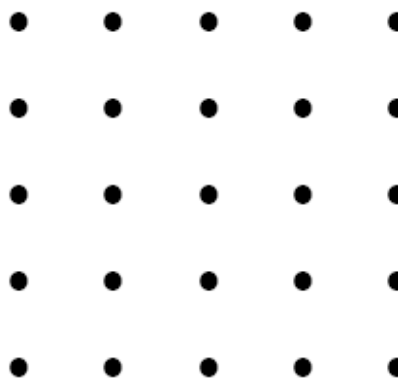
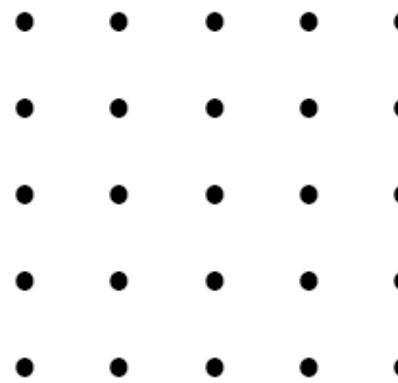


Representar polígonos geometricamente iguais

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

Deves utilizar a régua em todas as representações.

1. Representa, em cada um dos geoplanos, dois polígonos **geometricamente iguais** que tenham mais de 4 lados.

Representação gráfica	 Fig. 1	 Fig. 2
O polígono tem simetria axial ? (Se respondeste SIM traça o(s) eixo(s) de simetria que identificas.)	☐ SIM ☐ NÃO	☐ SIM ☐ NÃO

2. Observa com atenção os polígonos que representaste.

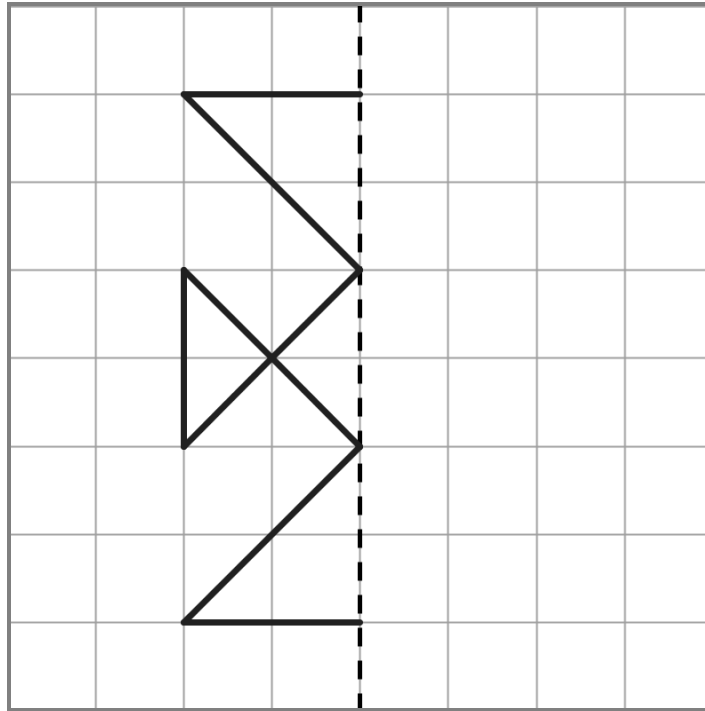
Faz uma lista de todas as **caraterísticas geométricas** que são comuns aos dois polígonos.

(Usa os termos: lados, ângulos, comprimento, paralelos, perpendiculares, ...)

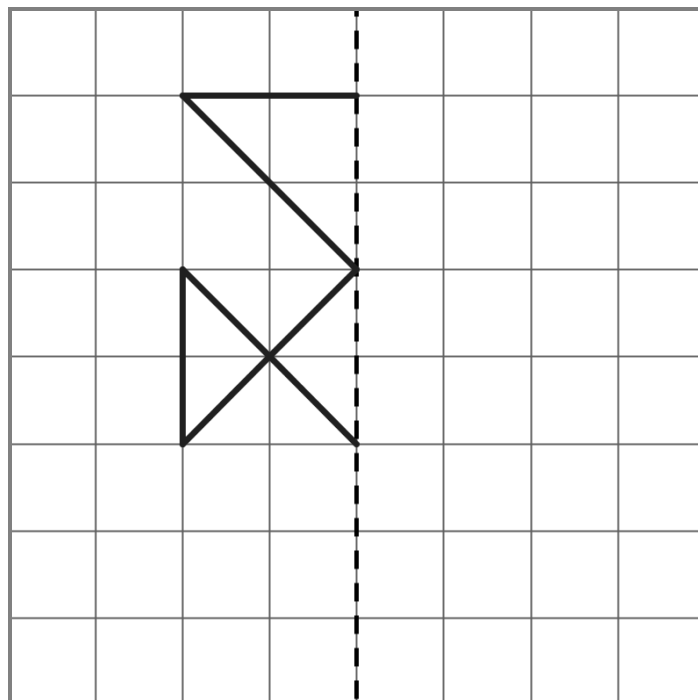
Reconhecer simetrias

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Completa a figura, de modo a que tenha simetria de reflexão segundo o eixo marcado a tracejado. (Deves utilizar lápis e régua)



2. Completa a figura, de modo a que não tenha simetria de reflexão segundo o eixo marcado a tracejado. (Deves utilizar lápis e régua)



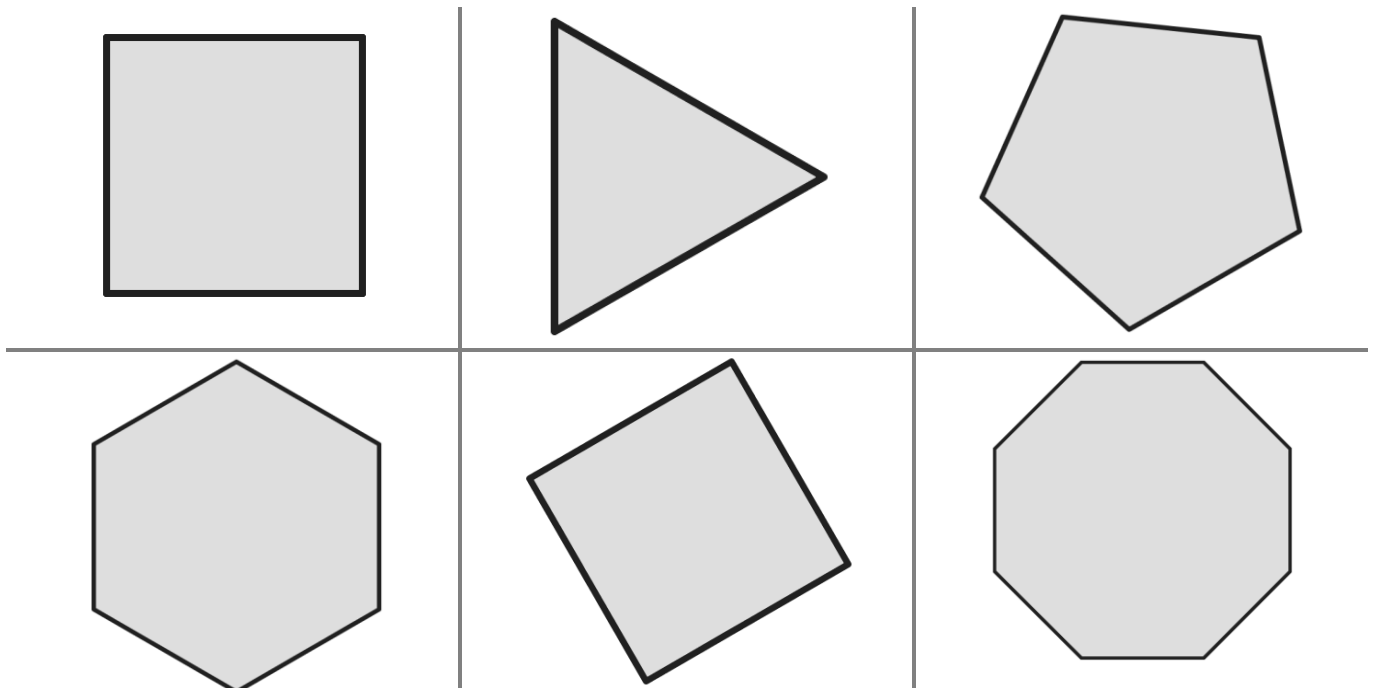
Reconhecer e representar eixos de simetria

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Todas as figuras apresentadas são **polígonos regulares**.

1.1. Explica o que são polígonos regulares.

1.2. Traça todos os eixos de simetria que identificas, em cada figura.



2. Nas figuras apresentadas, há alguma relação entre o número de lados e o número de eixos de simetria? ☐ **SIM** ☐ **NÃO**

Se a tua resposta foi “**SIM**”. Explica o que observas.

3. Como explicarias a um colega o que é um eixo de simetria?

Investigar simetrias

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

1. Utiliza o GeoRefletor, para descobrires todos os eixos de simetria nas figuras em anexo.

1.1 Completa a tabela 1, com a informação sobre os **polígonos regulares**.

Nome do polígono				
N.º de lados do polígono				
N.º de eixos de simetria de reflexão				

1.2 Completa a tabela 2, com a informação sobre os **polígonos não regulares**.

Nome do polígono			
N.º de lados do polígono			
N.º de eixos de simetria de reflexão			

1.3 Consulta a informação registada, em cada uma das tabelas, e responde.

O que podes concluir em relação ao número de eixos de simetria e número de lados dos polígonos?

Criar uma composição geométrica com o *Tangram*

N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
-----------	--------------------------	---------------

O ***Tangram*** é um *puzzle* chinês que se obtém decompondo um quadrado em sete polígonos (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo).

1. Já tinhas realizado alguma atividade com o *Tangram*, nas aulas de matemática?

☐

SIM

☐

NÃO

Se a tua resposta foi “**SIM**”. Explica o que fizeste.

2. Observa, com atenção, as sete peças do ***Tangram***.

Há alguma peça que não tenha simetria de reflexão?

☐

SIM

☐

NÃO

Se a tua resposta foi “**SIM**”, indica a sua forma geométrica.

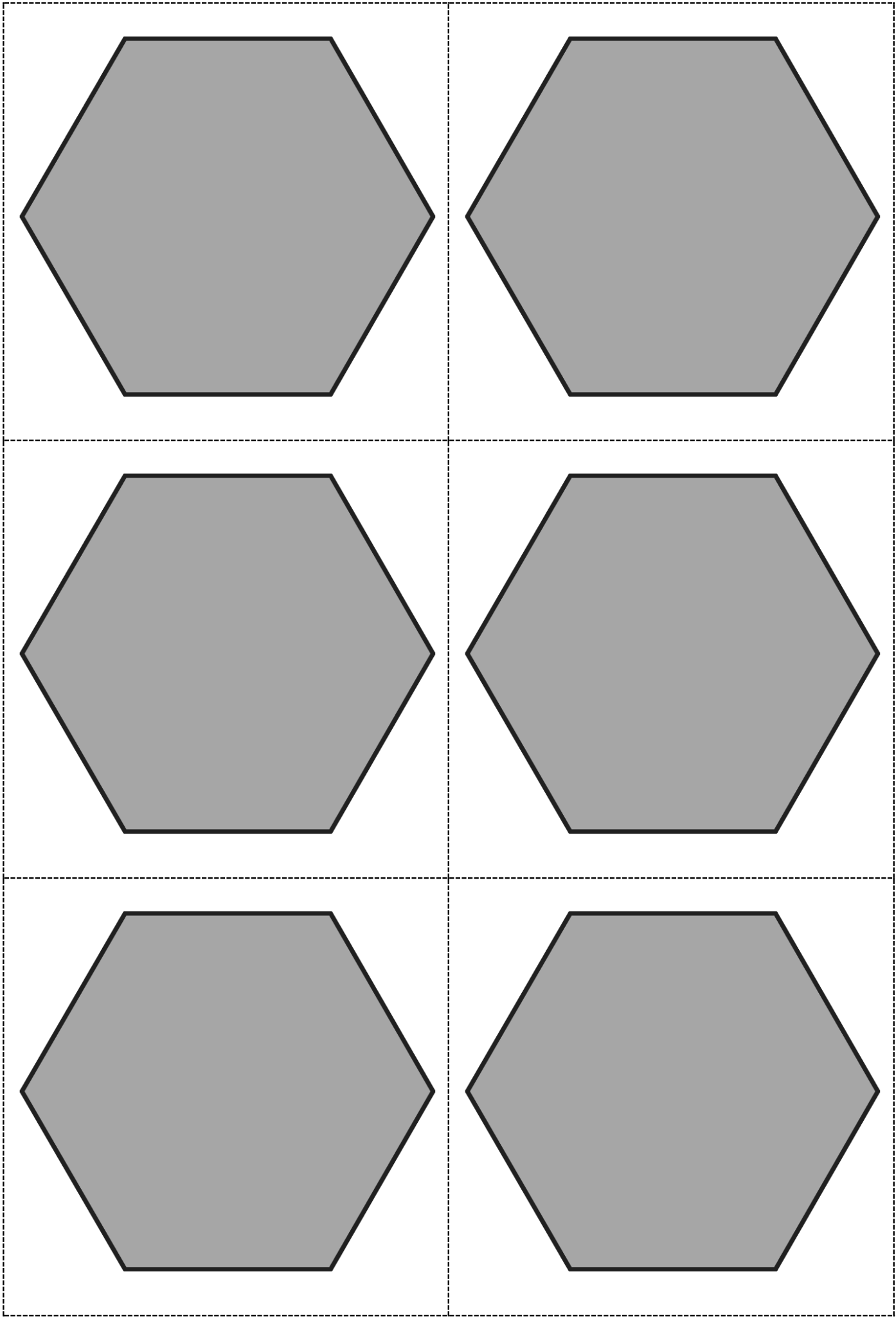
3. Qual é forma geométrica com o maior número de eixos de simetria?

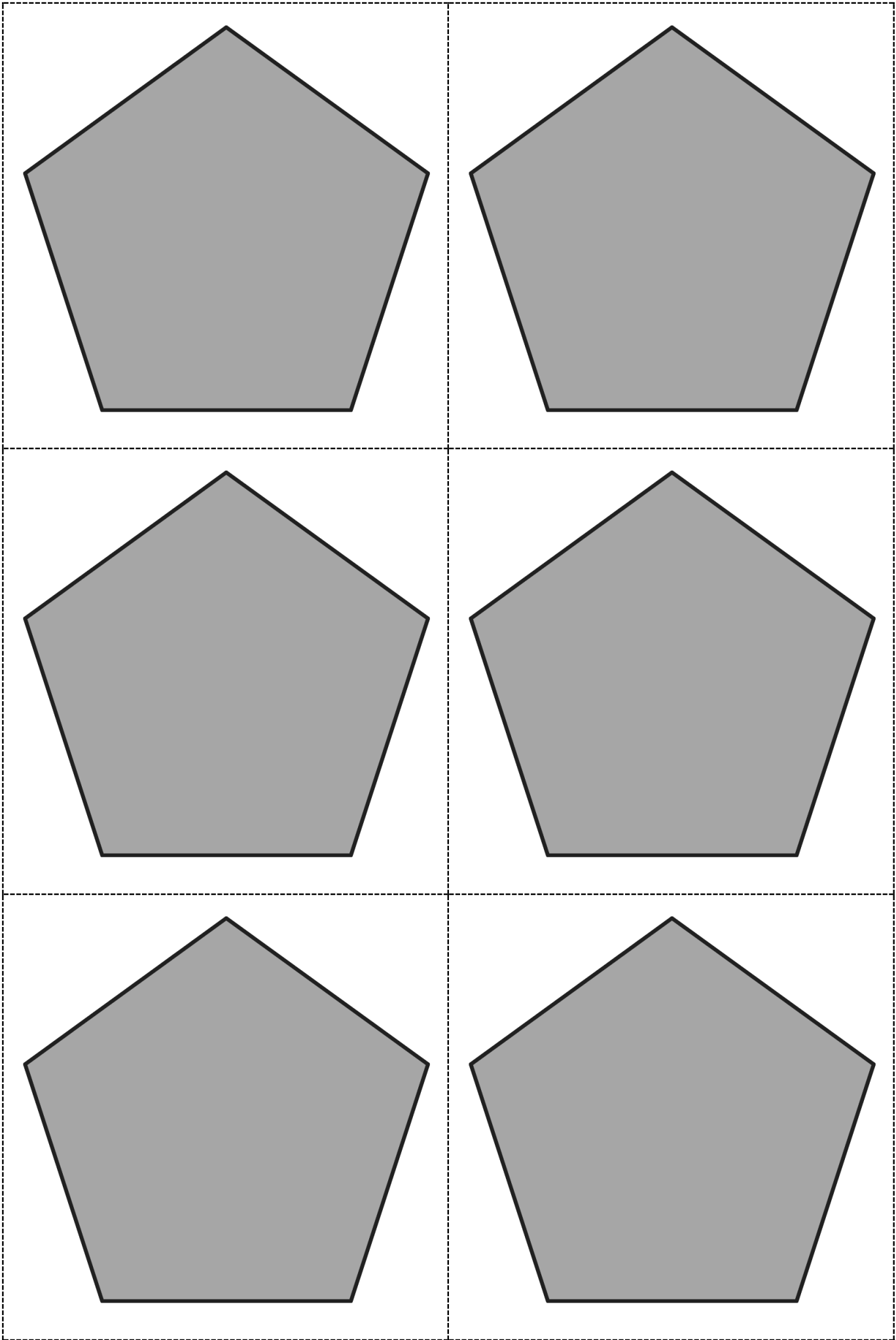
4. Com as peças do ***Tangram***, cria uma composição geométrica com simetria de reflexão. (Deves utilizar o maior número possível de peças sem as sobrepor.)

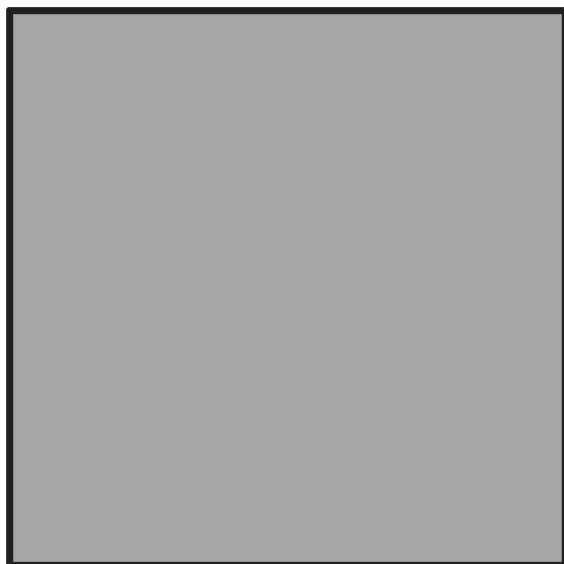
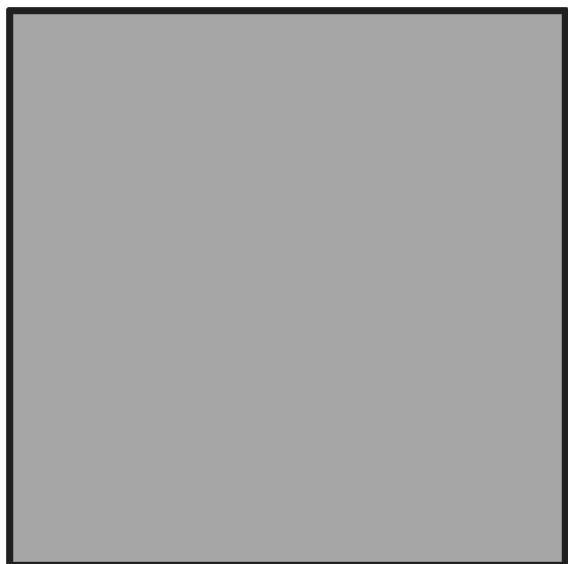
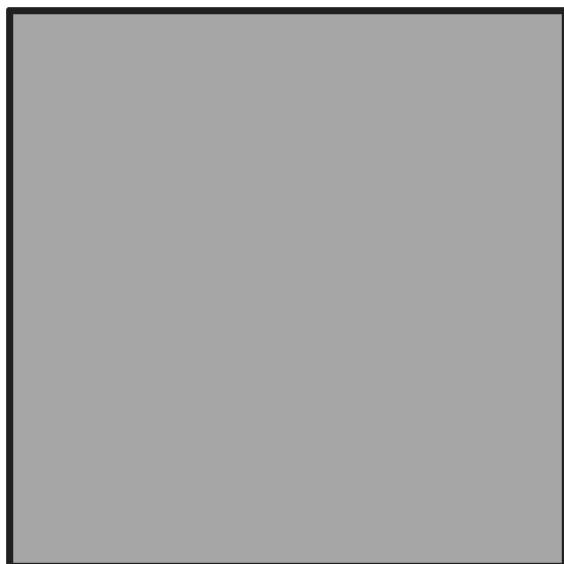
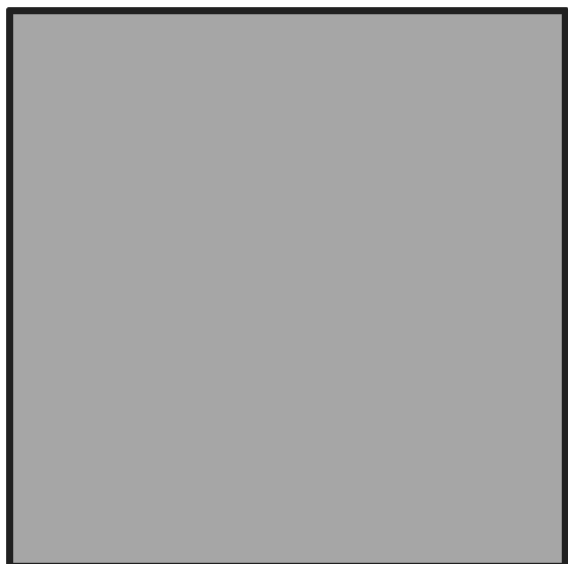
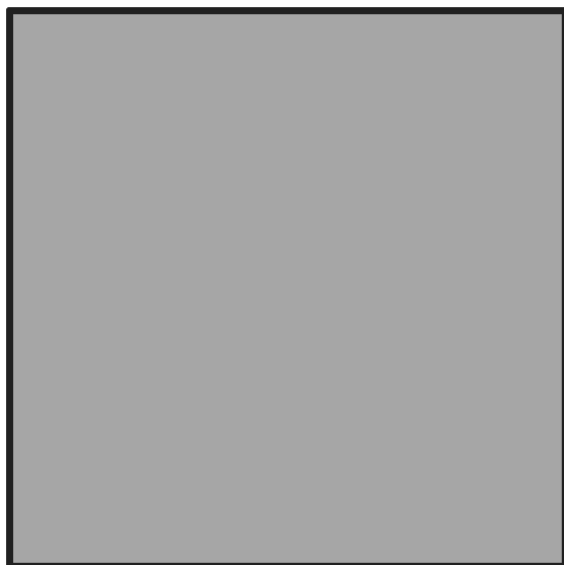
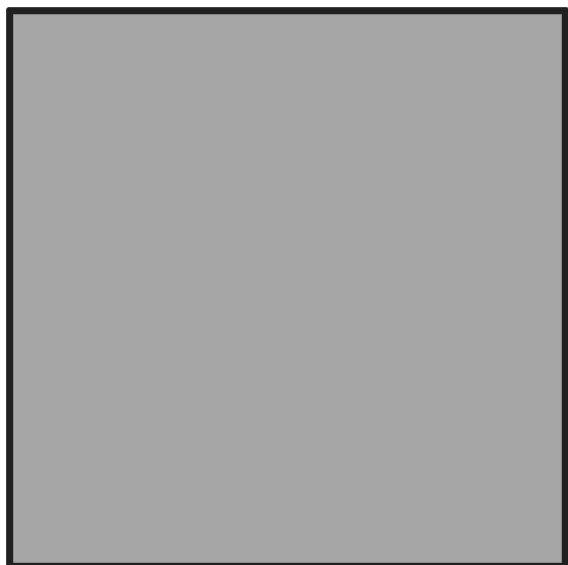
5. Se tiveste dificuldades a realizar a atividade 4 regista-as.

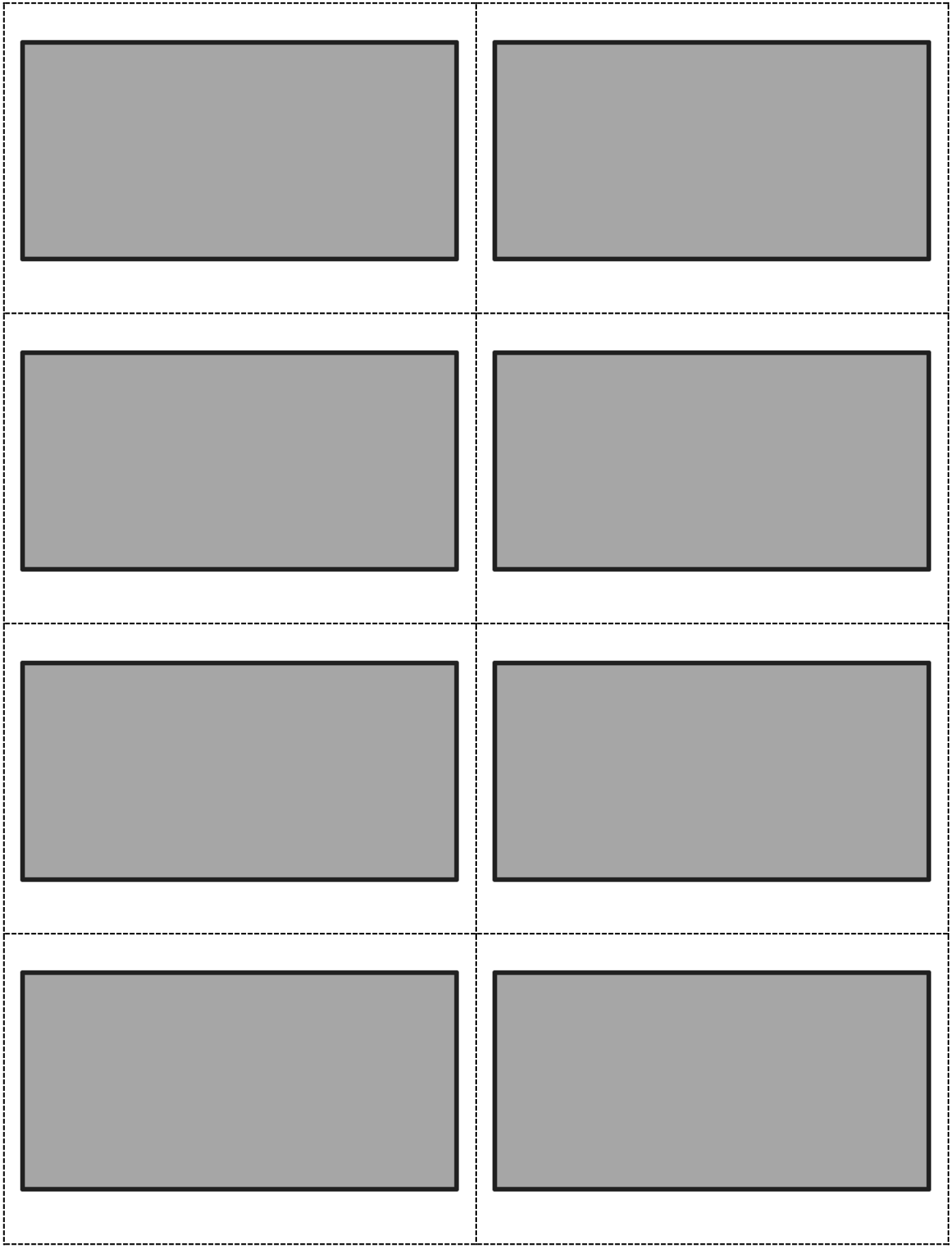
Criar uma composição geométrica com simetria

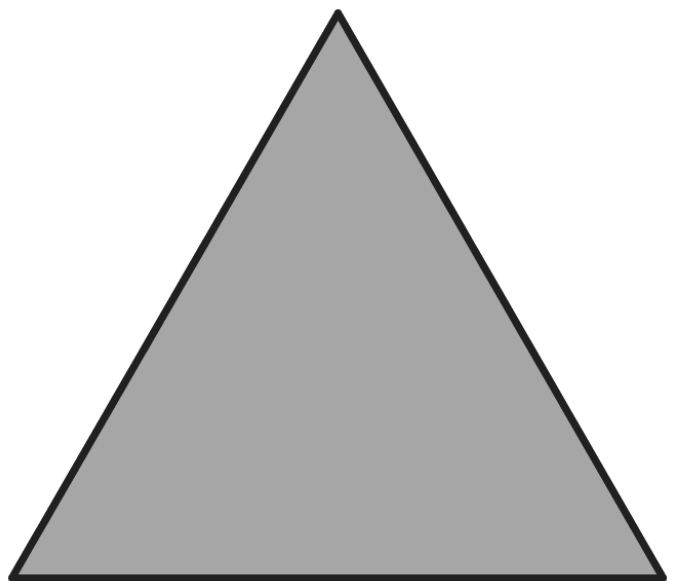
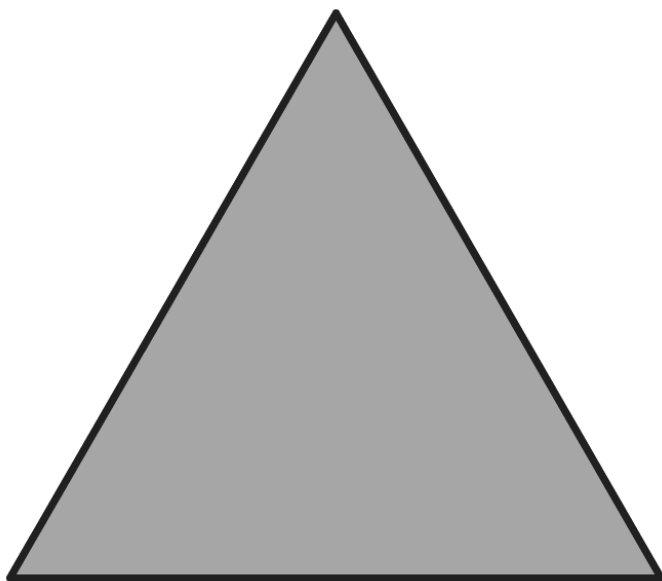
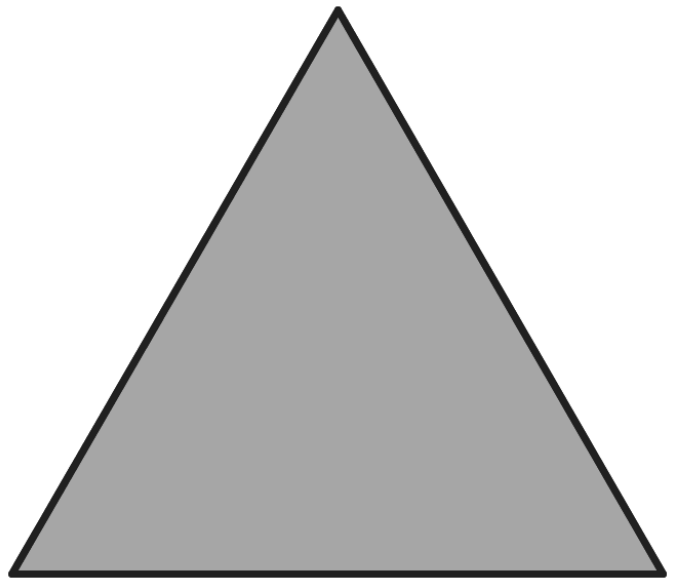
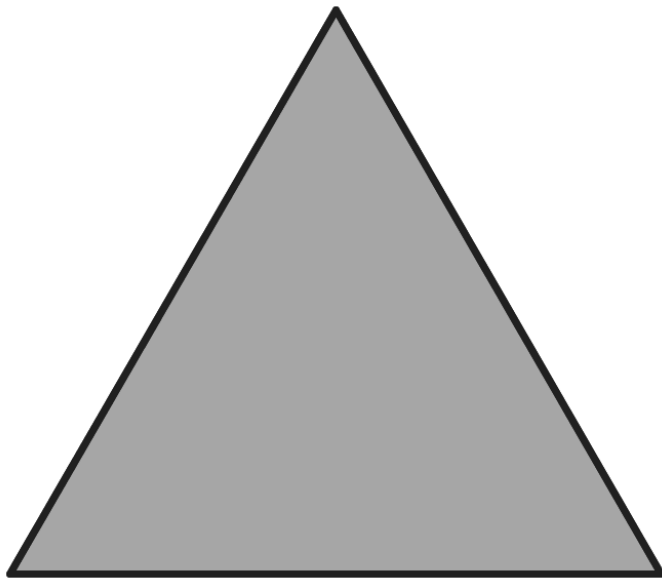
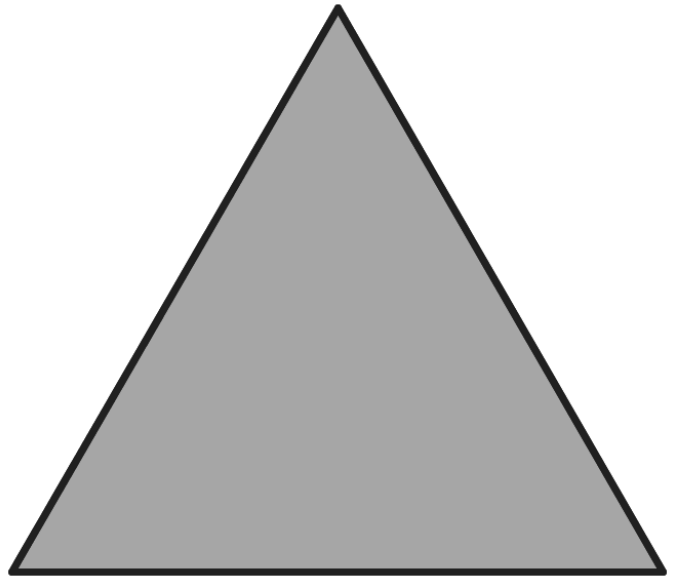
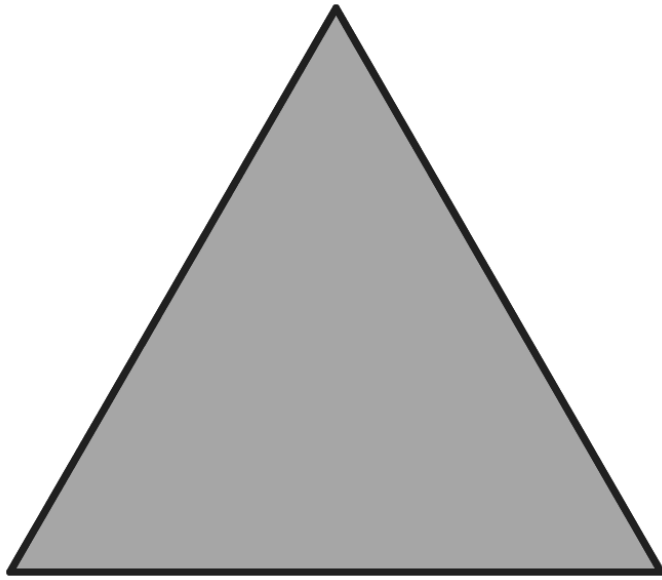
N.º _____	Data: ____ / ____ / ____	Código: _____
------------------	---------------------------------	----------------------

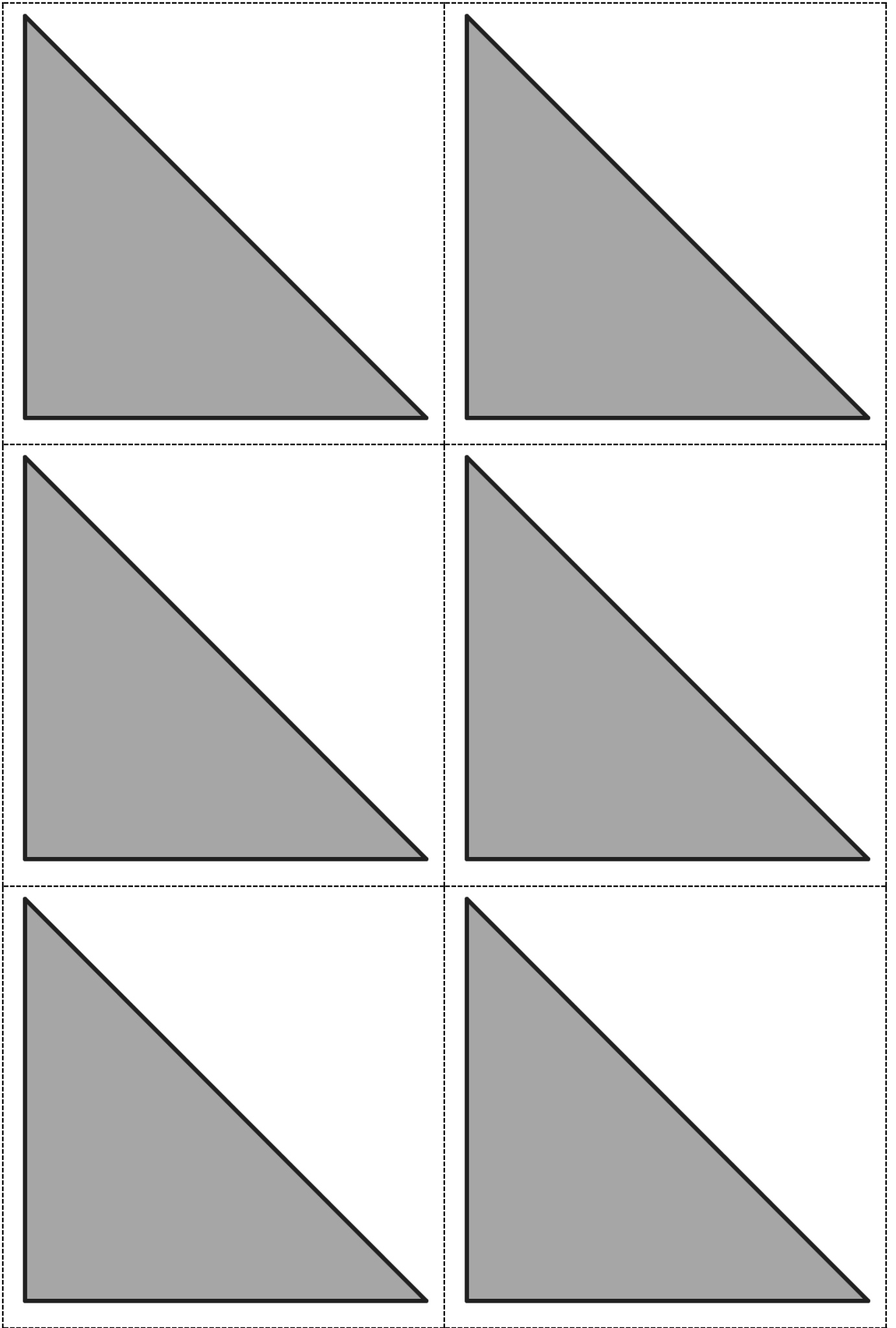


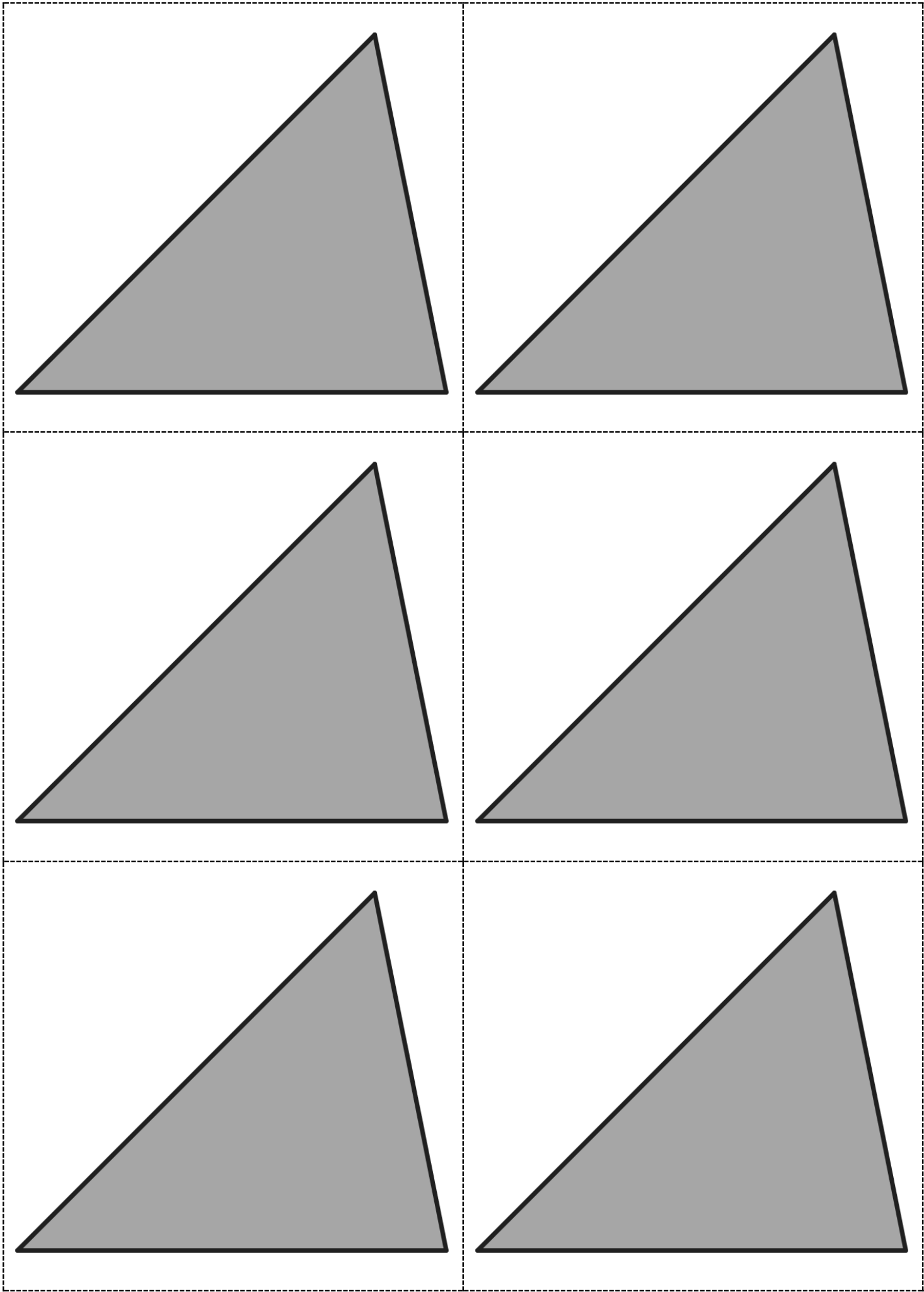












....., de novembro de 2014

Exmo. Senhor Diretor do Agrupamento de Escolas

Assunto: Pedido de autorização para realização de um estudo no âmbito de uma Tese de Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática

Maria Manuela Rodrigues Matos Alves Neto, docente do agrupamento, encontra-se a realizar um projeto de investigação em Educação Matemática no domínio da Geometria e Medida. Esta investigação pretende identificar contributos para as práticas educativas do ensino da Geometria, tendo como base uma sequência de atividades a realizar pelos alunos em contexto de sala de aula.

As atividades serão selecionadas de acordo com os objetivos da investigação, as orientações curriculares, o Programa e as Metas Curriculares de Matemática. Os dados a recolher consistirão em registos orais, escritos, áudio e/ou vídeo, produzidos no âmbito das atividades a desenvolver. De forma a manter o anonimato dos alunos, os registos serão codificados considerando-se que a metodologia adoptada, na recolha e tratamento dos dados, assegura as medidas de segurança previstas na Lei da Proteção de Dados Pessoais.

Solicita-se a V. Ex.^a autorização para a realização deste estudo sob o compromisso de que será igualmente solicitada a respetiva autorização dos encarregados de educação. Os dados recolhidos serão utilizados apenas para fins científicos.

Agradecendo a Vossa colaboração e sob o compromisso de contribuir para o desenvolvimento das finalidades do Ensino da Matemática, subscrevo-me com consideração.

Com os melhores cumprimentos,

Atenciosamente

(Maria Manuela Neto)

....., 9 de dezembro de 2014

Exmo(a) Sr(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito da minha tese de Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática, estou a desenvolver uma investigação em Educação Matemática com alunos do 4.º ano do Ensino Básico. A investigação visa identificar contributos para as práticas educativas do ensino da Geometria e Medida.

O desenvolvimento desta investigação implica a observação e recolha de dados sobre o trabalho dos alunos num conjunto de atividades a realizar durante o ano letivo 2014/2015. As atividades serão selecionadas de acordo com os objetivos da investigação, as orientações curriculares e o Programa de Matemática.

A recolha de dados, consistirá em registos escritos pelos alunos, gravações áudio e/ou vídeo e fotografias no contexto da realização das atividades propostas. Os dados a recolher destinam-se apenas a fins científicos, estando salvaguardadas todas as questões éticas, de privacidade e confidencialidade dos participantes.

Sob o compromisso de contribuir para o desenvolvimento do conhecimento e competências previstas no Currículo Escolar e de não perturbar o ambiente de aprendizagem, solicito a autorização de Vossa Excelência, para proceder à referida recolha de dados. Manifesto ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que entenda necessário.

Agradecendo a colaboração de V. Exa, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A Investigadora

(Professora Manuela Neto)

AUTORIZAÇÃO

Eu,, Encarregado(a) de Educação do aluno(a) n.º __, 4.º Ano Turma B, declaro que autorizo o(a) meu(inha) educando(a), a participar na recolha de dados realizada pela Professora Maria Manuela Neto, no âmbito da sua tese de investigação em Educação Matemática.

Data ____ / ____ / 2014

(Assinatura do Encarregado de Educação)