ESE

POLITÉCNICO
DO PORTO

20

M

ESE POLITÉCNICO DO PORTO

Orientação

AGRADECIMENTOS

À sensação de satisfação de dever cumprido, que se faz presente no momento em que conclui o trabalho.

Ao sentimento de gratidão para todas as pessoas que dele fizeram parte e que possibilitaram a sua concretização com orientações, compreensão e incentivo nos momentos difíceis.

À Professora Doutora Cláudia Manuela Ferreira Maia-Lima, pela orientação segura, pelas ideias sempre oportunas e, sobretudo, pelo privilégio de um convívio afável.

À professora Paula Lopes da turma em que realizei o estudo, pela sua disponibilidade e empenho.

A todos os alunos da turma do 3.º ano que participaram, pelo entusiasmo, pelo interesse, colaboração e simpatia com que me receberam.

À diretora do Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches, professora Doutora Ana Alice da Silva Araújo Lopes Rodrigues, pelo apoio na minha atividade profissional e por autorizar a realização do estudo numa das escolas do agrupamento.

Agradeço especialmente à minha família pelo apoio e constante incentivo para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este estudo visa compreender as dificuldades que os alunos evidenciam na aprendizagem da noção de número racional não negativo.

Ao longo da minha experiência como docente do 2.º ciclo, permitiu-me questionar por que razão os alunos de 5.º e 6.º ano apresentam dificuldades em compreender o conceito de fração nos seus diversos significados: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo.

Foi no sentido de entender esta dificuldade na apropriação dos conhecimentos matemáticos sobre frações, que resolvi aplicar esta investigação a alunos do 1.º ciclo, nomeadamente a uma turma do 3.º ano, uma vez que é neste ano escolar que o estudo dos números racionais não negativos é aprofundado.

A metodologia constou de um estudo de abordagem de carácter qualitativo, de natureza interpretativa.

A recolha de dados inclui as produções escritas dos alunos e as gravações de áudio das intervenções verbais dos mesmos.

A análise dos resultados realizou-se a partir das estratégias cognitivas que os alunos utilizaram para responderem às tarefas propostas.

Os resultados deste estudo mostraram que a construção do sentido de número racional não é de fácil compreensão. É um conceito que requer uma abordagem multifacetada, apoiada com a manipulação de materiais estruturados ou não estruturados, para que os diferentes significados de fração fiquem bem consolidados nas estruturas cognitivas dos alunos.

Palavras chave: Sentido de número; número racional não negativo, fração, dificuldades de aprendizagem

ABSTRACT

This study aims to understand the difficulties that students present in learning the notion of non-negative rational number.

My experience as a primary education teacher, allowed me to question why the students of 5 and 6 year-old have difficulty on understanding the concept of fraction in its various meanings: number, part-whole, quotient measured and multiplicative operator.

It was in order to understand this difficulty in the appropriation of mathematical knowledge of fractions, that I decided to apply this research to students of the from the 1st to 4th grade, including a group of 3rd grade, because it's in this school grade that study of numbers no negative rational is deepened.

The methodology consisted of a study of a qualitative nature approach of interpretative nature.

Data collection includes written productions of students and the audio recordings of verbal interventions of them.

The analysis was conducted from the cognitive strategies that students used to answer to the proposed tasks.

The results of this study showed that the construction of rational number meaning is not easily understood. It is a concept that requires a multifaceted approach, supported by handling structured or unstructured material, so that the different meanings of a fraction are well consolidated in students' cognitive structures.

Keywords: Rational number, Number sense, Fraction, Learning Disabilities

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 14

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 16

2.1. Os números racionais nos programas de matemática desde 1990 16

2.1.1. Os Programas de Matemática desde 1990 16

2.1.2. Os Números Racionais Não Negativos nos Programas de Matemática (1990, 2007, 2013) 22

2.2. Sentido de número 27

2.2.1. Perspetiva histórica e concetualização 28

2.2.2. Sentido de Número Racional Não Negativo 30

2.3. A importância dos materiais manipuláveis na aquisição do conceito de fração 35

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO 37

3.1. O estudo 37

3.2. Contexto da Investigação 38

3.3. Instrumentos e Procedimentos de Recolha de Dados 42

3.4. Identificação das Dificuldades 43

3.5. Planificação 50

3.6. Tarefas 53

3.6.1. Tarefa 1: Números Racionais Não Negativos 53

3.6.2. Tarefa 2: Na cozinha com frações 55

3.6.3. Tarefa 3: Os berlindes do Zeca 56

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 58

4.1. As Tarefas 58

4.1.1. Tarefa 1:Números Racionais Não Negativos 58

4.1.2. Tarefa 2: Na cozinha com frações 63

4.1.3. Tarefa 3: Os berlindes do Zeca 72

4.2. Análise do Pós-teste 81

5. CONCLUSÃO 87

REFERÊNCIAS 91

APÊNDICES 97

LISTA DE SIGLAS E ACRÓNIMOS

APM- Associação de Professores de Matemática
CEB- Ciclo do Ensino Básico
CNEB- Currículo Nacional do Ensino Básico
DEB- Departamento do Ensino Básico
NCTM- National Council of Teachers of Matematics
OCEPE- Orientações Curriculares para a Educação do Pré-Escolar
PISA- Programme for International Student Assessment
PM- Plano da Matemática
PMEB- Programa de Matemática do Ensino Básico
ME- Ministério da Educação
MEC- Ministério da Educação e Ciência

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1: Abordagem dos números racionais na Organização Curricular e Programas (ME, 1990) e no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) 23

Quadro 2: Os números racionais na Organização Curricular e Programas (ME, 1990) e no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) 24

Quadro 3: Descritores da unidade temática Números Racionais, 1.º CEB 25

Quadro 4: Análise das respostas ao item 3 45

Quadro 5: Análise das respostas ao item 4 46

Quadro 6: Planificação da Unidade de Ensino 51

Quadro 7: Síntese dos momentos de análise dos dados 52

Quadro 8: Sequência das 3 fases de desenvolvimento das tarefas 53

Quadro 9: Tarefa Números Racionais 54

Quadro 15: Nível de desempenho no item 4 83

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Análise das respostas ao item 1 43
Gráfico 2: Análise das respostas ao item 2 44
Gráfico 3: Análise das respostas ao item 5 47
Gráfico 4: Análise das respostas ao item 6 48
Gráfico 5: Análise dos resultados ao item 7 49
Gráfico 6: Análise dos resultados ao item 8 49
Gráfico 7: Nível de desempenho no item 1 81
Gráfico 8: Nível de desempenho no item 2 82
Gráfico 9: Nível de desempenho no item 6 84
Gráfico 10: Nível de desempenho no item 8 84
Gráfico 11: Nível de desempenho no item 9 85

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Organização do programa de matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) ... 18
Figura 2: Modelo de Kieren Behr, Lesh, Post e Silver (2005) ... 31
Figura 3: A relação entre o mundo real e o mundo matemático, segundo Lesh (1979, citado por Post, 1981 ... 36
Figura 4: Erros mais frequentes no item 1 ... 44
Figura 5: Erros mais frequentes no item 2 ... 44
Figura 6 : Erros mais frequentes no item 4 ... 46
Figura 7: Erros mais frequentes ao item 5 ... 47
Figura 8: Erros mais frequentes no item 6 ... 48
Figura 9 : Erros mais frequentes no item 8 ... 50
Figura 10: Círculos Fracionários ... 54
Figura 11: Contas de vidro ... 57
Figura 12: Círculo branco ... 58
Figura 13: Grupo de trabalho ... 59
Figura 14: Respostas do grupo da Leonor (grupo D) ... 60
Figura 15: Item 1.4 ... 60
Figura 16: Respostas do grupo do Miguel (grupo B) ... 61
Figura 17: Resposta do grupo da Mariana ao item 1.4 ... 62
Figura 18: Registo no caderno diário ... 62
Figura 19: Exemplo de um registo no caderno diário ... 62
Figura 20: Resolução dos diferentes grupos ... 64
Figura 21: Resolução dos diferentes grupos ... 64
Figura 22 : Resposta do grupo B ... 65
Figura 23: Resposta do grupo E ... 65
Figura 24: Resposta do grupo C ... 65
Figura 25: Resposta do grupo D ... 65
Figura 26. Resposta do grupo A ... 65
Figura 27: Erro cometido pelo o aluno do grupo A ... 66

Figura 28: Frações equivalentes a 1/2 66
Figura 29: A aluna sobrepõe os setores circulares 67
Figura 30: Conclusões da tarefa II.. 67
Figura 31: Modelo representado pelo o aluno do grupo D 68
Figura 32: Setor descoberto - 1/8 69
Figura 33: Representação de 4/2 pelo aluno 69
Figura 34: Resolução do modelo de piza 70
Figura 35: Os quatro modelos de piza com 3 cores 70
Figura 36: Desafio apresentado à turma 71
Figura 37: O aluno estabelece a relação entre 1/2=1/3+1/6..................................... 71
Figura 38: Novo modelo 72
Figura 39: Resposta do grupo D 73
Figura 40: Resposta do grupo A 73
Figura 41: Resposta do grupo C 74
Figura 42: Resolução do grupo E 74
Figura 43: Dois subconjuntos de 12 berlindes-grupo C.. 75
Figura 44: Dois subconjuntos de 6 berlindes... 76
Figura 45: Metade da Metade - dois subconjuntos de 3 berlindes 76
Figura 46: Três subconjuntos de 3 berlindes 78
Figura 47: Resposta à questão 4 78
Figura 48: Resolução do grupo E 80
Figura 49: Erro mais comum no item 1 82
Figura 50: Erro mais comum no item 2 82
Figura 51: Erro mais comum no item 4 83
Figura 52: Erro mais comum no item 6 84
Figura 53: Erro mais comum no item 8 85
Figura 54: Erros mais frequentes.. 86

1. INTRODUÇÃO

A presente dissertação contextualiza-se no âmbito do mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática. Embora este mestrado permitisse desenvolver estudos relacionados com as Ciências com o contributo da Matemática ou vice-versa, optamos por direcioná-la só para a matemática. Esta opção deveu-se a um trabalho realizado durante três anos de acompanhamento e coadjuvação em turmas do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) na disciplina de Matemática, no âmbito do Plano da Matemática (PM). O PM tinha como objetivo melhorar as aprendizagens e consequentemente melhorar os resultados dos alunos, na altura estava em vigor o Programa da Matemática homologado em 2007.

Ao longo de muitas reformas educativas, o tema *números racionais* era muito pouco valorizado no 1.º CEB, talvez pela sua complexidade. Mamede (2008) diz-nos que durante o 1.º CEB as frações eram abordadas no seu significado parte-todo e muito excecionalmente a fração como operador.

O atual Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) no que concerne os números racionais não negativos dá-lhe um grande relevo no ensino da matemática no 1.º CEB. Uma sólida construção do sentido de número racional é fundamental para futuras aprendizagens neste domínio.

As dificuldades com que os professores se deparam no 2.º CEB, nomeadamente no quinto ano de escolaridade, estão precisamente na compreensão do próprio conceito de fração. O relacionar parte-todo ou parte-parte, o dividir uma quantidade contínua ou uma quantidade discreta, o aplicar a fração como operador multiplicativo são dificuldades que os alunos apresentam.

Os números racionais são um tema que pela sua complexidade na aquisição cognitiva leva a que muitos investigadores se debrucem no estudo centrado no ensino e aprendizagem do tema. Daí que me despertaram para esta temática.

Tendo em conta estes fatores o estudo focou-se sobre o tema "Aprendizagem dos números racionais não negativos - um estudo com alunos do 3.º ano". A seleção do tema prende-se com a ligação com o 1.º CEB, um trabalho de coadjuvação de três com a professora titular da turma, bem como às dificuldades sentidas na compreensão dos números racionais, nas suas diferentes vertentes: representação, comparação, equivalência e operações aritméticas que lhe são associadas.

Estes alunos no seu 2.º ano de escolaridade adquiriram as seguintes aprendizagens: noção de fração parte-todo, operador, quociente, medida, representação simbólica de um numeral racional, reconhecimento da operação de divisão, identificada pelo traço de fração e representação gráfica de uma fração.

Este estudo tem como objetivos: (i) compreender como os alunos progridem na aprendizagem do conceito de número racional, (ii) analisar a qualidade das aprendizagens com a utilização do material manipulativo relativamente aos diferentes significados de fração.

Atendendo a estes objetivos foram formuladas as seguintes questões de investigação:

(i) Que processos usam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento de sentido de números racionais?

(ii) Que dificuldades revelam os alunos na compreensão do conceito de fração nos seus diferentes significados?

Para investigar estas questões o trabalho foi organizado em seis capítulos.

No capítulo seguinte, capitulo 2, na Fundamentação Teórica damos ênfase ao enquadramento curricular dos números racionais desde 1990 até 2013, bem como uma visão geral do desenvolvimento de sentido de número e sentido de número racional, às suas dificuldades inerentes à sua compreensão e focamos ainda a importância dos materiais manipulativos na aquisição de novos conceitos.

No capítulo 3, na Metodologia de Investigação descrevemos o contexto da investigação e os instrumentos e procedimento utilizados durante esta investigação;

No capítulo 4, na Unidade de Ensino apresentamos a planificação da unidade de estudo e a descrição das tarefas implementadas.

No capítulo 5, na Apresentação e Análise dos Dados procedemos à apresentação da análise qualitativa dos resultados obtidos.

No capítulo 6, apresentamos as principais conclusões da investigação.

Por fim apresentamos as referências bibliográficas à qual esta investigação se pautou e em apêndice figuram os instrumentos utilizados durante a investigação.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo faremos uma contextualização histórica dos números racionais nos programas de Matemática desde 1990 até à atualidade e ao sentido de número em particular incidência no estudo das frações.

2.1. OS NÚMEROS RACIONAIS NOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA DESDE 1990

Este subcapítulo está dividido em duas secções 2.1.1 e 2.1.2.

Na primeira secção fazemos uma abordagem cronológica, desde 1990 a 2013, dos programas curriculares de Matemática ao nível do 1.º CEB e do 2.º CEB. Focando essencialmente as ideias subjacentes a cada Programa, referindo as suas finalidades de enino da Matemática, os seus objetivos gerais, sua organização curricular e sugestões metodológicas.

Na segunda secção a fundamentação teórica está centrada na abordagem dos números racionais na Organização Curricular e Programas do Ensino Básico, desde 1990 a 2013.

2.1.1. Os Programas de Matemática desde 1990

Desde 1990 que os documentos orientadores de matemática escolar têm sofrido diversas alterações. Se do programa de 1990 para o 2007 houve um longo período e diferenças consideráveis ao nível do conteúdo dos programas, num curto espaço de tempo, de 2007 para 2013, as alterações verificadas não foram menores. As opções baseadas nos documentos orientadores influenciam mudanças na própria sociedade, que não são sempre bem vistas como é o caso das ocorridas neste último programa de matemática de 2013 (Maia, 2014).

As correntes internacionais e, consequentemente nacionais, que reclamavam por uma matemática com maior significado para o aluno enquanto cidadão ativo na sociedade, pode ser observada em diversas referências.

Schoenfeld, (1988, citado por NCTM, 2007, p.21) referiu que "a matemática faz mais sentido e é mais facilmente memorizada e aplicada, se os alunos relacionarem o conhecimento novo com o conhecimento prévio, de forma significativa". Também Skemp (1976, citado por NCTM, 2007, p. 21) defendia que quando as conceções e os conceitos estão bem consolidados são facilmente aplicados em novas situações. Ainda hoje se defende que a memorização sem compreensão promove nos alunos dificuldades na resolução de problemas, na execução de tarefas matemáticas e dificuldades em estabelecer conexões entre os conhecimentos.

A aprovação da Lei de Bases do Sistema Educativo, Lei 46 de julho de 1986, publicado a 14 de outubro, levou à necessidade de renovar os programas de matemática dos diferentes ciclos de ensino. Assim, o Seminário de Vila Nova de Milfontes, organizado pela Associação de Professores de Matemática (APM) em 1988 fomentou essa renovação em Portugal. Ponte (2003) refere que

> neste seminário destaca-se as influências das novas correntes sobre o currículo e o ensino que se tinham vindo a desenvolver internacionalmente, em especial as Normas do NCTM (1991), que já existiam em versão preliminar, bem como o livro a Experiência matemática de Philip Davis e Reuben Herst (1980/1995) (APM, 2008, p. 5).

Neste encontro foram destacadas três ideias fundamentais:

i) valorizar objetivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à Matemática;

ii) dar prioridade, na sala de aula, a tarefas ricas e desafiantes, envolvendo resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação;

iii) encarar o programa e os manuais, não como prescrições a seguir cegamente, mas como instrumentos de trabalho a usar de acordo com exigências de cada situação (APM, 2009).

O programa de 1990 veio modificar o ensino da matemática quer ao nível dos conteúdos e das metodologias, quer estrutura do próprio documento.
Desenvolver a capacidade de raciocínio, desenvolver a capacidade de comunicação e desenvolver a capacidade de resolver problemas foram as grandes finalidades do ensino da matemática, para os três ciclos. Neste programa foram enumerados oito objetivos gerais:

1. Manifestar a curiosidade e gosto pela exploração e resolução de problemas simples do universo familiar.
2. Recolher dados simples e organizá-los de forma pessoal recorrendo a diferentes tipos de representação.
3. Efetuar medições, escolhendo instrumentos adequados, para resolver problemas simples da vida corrente.
4. Fazer e utilizar estimativas em situações de cálculo ou de medição.
5. Explorar, construir e transformar modelos geométricos e estabelecer relações entre eles.
6. Explicar e confrontar as suas ideias com as dos companheiros, justificar as suas opiniões e descrever processos utilizados na realização de atividades.
7. Desenvolver estratégias pessoais de resolução de problemas e assumir progressivamente uma atitude crítica perante os resultados.
8. Resolver situações e problemas do dia-a-dia, aplicando as operações aritméticas e as noções básicas de geometria, utilizando algoritmos e técnicas de cálculo mental (Ministério da Educação (ME), 1990, p. 128).

Na Figura 1, "em esquema, representa-se a organização do programa, evidenciando os grandes blocos que integram os conteúdos e tipos de actividade a desenvolver nesta área" (ME, 2004, p. 165).

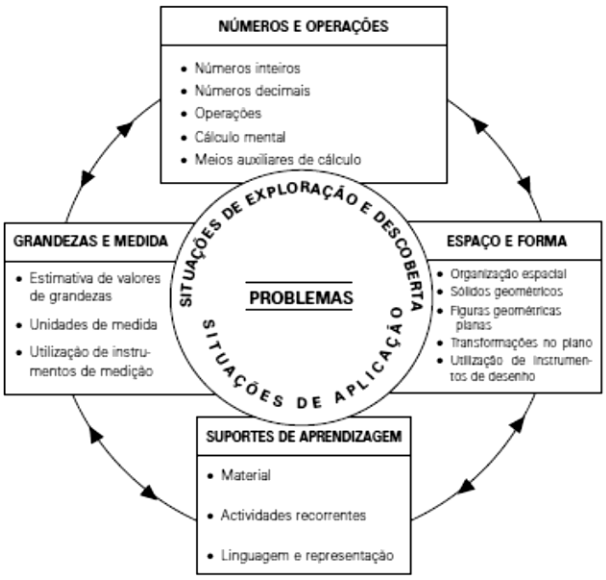


Figura 1: Organização do programa de matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB)

Assim o programa de matemática do 1.º CEB (ME, 2004), estava organizado em três grandes áreas temáticas: Números e Operações, Grandezas e Medida e Espaço e Forma.

No que diz respeito ao 2.º CEB, (ME, 1991b), as áreas temáticas eram Números e Cálculo, Geometria, Estatística e Proporcionalidade. Os temas estavam distribuídos por anos (5.º ano e 6.º ano), acompanhados pelos objetivos específicos e algumas sugestões/observações metodológicas.

Na Reorganização Curricular do Ensino Básico, a publicação do Decreto de Lei n.º 6/2001, todo o currículo nacional passou a organizar-se a partir de competências gerais, competências transversais e competências essenciais.

No Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB) (ME, 2001, p. 59)

> a competência matemática como foi caracterizada, promove a mobilização de saberes (culturais, científicos e tecnológicos) para compreender a realidade e para abordar situações e problemas. Ao mesmo tempo, proporcionar instrumentos que favorecem o uso de linguagens adequadas para expressar ideias.

Todas as orientações curriculares do ensino básico apontavam para a utilização de materiais manipuláveis ao longo de toda a escolaridade. Bem como, proporcionar a todos os alunos diversos tipos de experiências de aprendizagem: resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos.

No domínio Números e Cálculo o CNEB referia:

> -no 1.º ciclo: i) a compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações; ii) o reconhecimento dos números inteiros e decimais e de formas diferentes de os representar e relacionar, bem como a aptidão para usar as propriedades das operações em situações concretas, nomeadamente, para facilitar a realização de cálculos;
> - no 2.º ciclo: i) o reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros e racionais positivos, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações em cada um deles e a aptidão para usá-las em situações concretas; ii) a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do

problema ou da situação em estudo; iii) o reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e a aptidão para usar o raciocínio proporcional em problemas diversos. (ME, 2001, p. 61)

Contudo, apesar de todas as orientações curriculares e alterações ocorridas, os estudos internacionais, nomeadamente o Programme for International Student Assessment (PISA), indicavam deficiências significativas nas aprendizagens dos alunos portugueses. O relatório do PISA de 2003 referia que, "o desempenho dos alunos portugueses foi muito precário sempre que as questões exigiam um nível de reflexão mais elevado, processos de resolução não directos ou envolviam conceitos mais abstractos" (Canavarro, Tudella & Pires 2009, p. 1). Deste modo, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (2007) apostava na melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos. Ao longo de todo o programa era visível a transversalidade das três capacidades na aprendizagem da matemática: a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

O programa estava organizado por ciclos estruturados em quatro grandes temas: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados.

As finalidades e os objetivos gerais eram comuns aos três ciclos de ensino e o ensino da matemática era orientado por duas finalidades fundamentais:

i) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados;

ii) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Estas finalidades eram concretizadas através de nove objetivos gerais (Ponte et al., 2007, pp. 4-6):

i) Os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos de matemática;
ii) Os alunos devem desenvolver uma compreensão da matemática;
iii) Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações;
iv) Os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático;

v) Os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos;

vi) Os alunos devem ser capazes de resolver problemas;

vii) Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas;

viii) Os alunos devem ser capazes de fazer matemática de modo autónomo;

ix) Os alunos devem ser capazes de apreciar a matemática.

Os objetivos gerais contemplavam os três domínios: conhecimentos, capacidades e atitudes.

Nas orientações metodológicas do programa 2007, o professor deveria propor aos alunos experiências matemáticas como por exemplo: resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos, análogo ao referido no CNEB.

Também Ponte e Serrazina (2009, p. 3), dois dos autores do programa de Matemática de 2007, referiam que "é especialmente importante que as tarefas sejam inter-relacionadas entre si, apresentadas em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à aprendizagem do aluno".

Para além das diferenças supracitadas que distinguiam este programa do anterior, o ME apostou muito na formação dos professores, implementando projetos de Formação Contínua em Matemática e o Plano de Ação da Matemática. Estas iniciativas tinham como finalidade mudar a prática profissional dos professores e, consequentemente, melhorar as aprendizagens matemáticas dos alunos e o modo como estes encarariam a matemática.

No ano de 2013 sai o Despacho n.º 5165-A/2013 de 16 de abril ao qual são apresentadas as razões para a revogação do programa de 2007, entre as quais:

> i) o atual Programa de Matemática, tal como alguns outros diferentes disciplinas, é demasiado rígido nas indicações metodológicas que prescreve para os professores;
> ii) essas indicações, frequentemente de fundamentação puramente ideológica, retiram liberdade aos professores para atuarem de forma adequada perante as suas turmas e escolas e de acordo com a sua experiência.

Com a supressão do CNEB das Competências Essenciais, através do despacho n.º 17169/2011 de 23 de dezembro, a favor das Metas Curriculares consagradas pelo despacho n.º 5306/2012 de 18 de abril, houve uma nova reestruturação do programa da matemática. O programa de Matemática de 2007, ainda apelidado de "novo" programa, seria substituído por outro homologado em 2013.

As Metas Curriculares vinham estabelecer aquilo que era "considerado como aprendizagem essencial a realizar pelos alunos" (Ministério da Educação e Ciência (MEC), 2012, p. 3). O documento das Metas Curriculares, articulado com o programa de 2013, apoiaria a construção do conhecimento matemático, defendido pelo ME.

Assim, atualmente o ensino da Matemática é alicerçado em três grandes blocos: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Para estas finalidades serem atingidas é necessário que os alunos tenham uma visão mais ampla e aprofundada dos conceitos matemáticos.

No novo documento a construção do conhecimento está organizado por domínios. Assim, no 1.º CEB, os domínios de conteúdos são três: Números e Operações (NO), Geometria e Medida (GM) e Organização e Tratamento de Dados (OTD). Neste ciclo de ensino os alunos adquirem progressivamente o conhecimento a partir do experimental/concreto em direção à perceção abstrata dos conceitos matemáticos.

Ao nível do 2.º CEB os domínios de conteúdos são quatro: Números e Operações (NO), Geometria e Medida (GM), Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de Dados (OTD).

2.1.2. Os Números Racionais Não Negativos nos Programas de Matemática (1990, 2007, 2013)

No programa de 1990 a abordagem dos números racionais no 1.º CEB era muito elementar, trabalhava-se o conceito de metade, a terça parte, quarta parte e a notação simbólica de fração.

Com o programa de 2007 os números racionais adquirem uma importância significativa ao longo do percurso de aprendizagem no 1.º ciclo. O Quadro 1 apresenta uma abordagem dos números racionais do programa de 1990 e do programa de 2007, que nos permite estabelecer comparações em termos dos conteúdos programáticos, previstos para este ciclo de ensino.

Quadro 1: Abordagem dos números racionais na Organização Curricular e Programas (ME, 1990) e no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007)

Organização Curricular e Programas (ME, 1990)	Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al,, 2007)
A abordagem dos números racionais surgem no 2.º ano. O trabalho com estes números deve incluir materiais de apoio estruturados e não estruturados.	Os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades discretas e continuas. É nos 3.º e 4.º anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitem trabalhar outros significados das frações, quer introduzindo números representados em forma decimal. O trabalho com os racionais, deve incluir a exploração de situações que, de uma forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção.

No programa do 2.º ciclo de 1990 dava-se maior relevo ao cálculo com números representados por frações. Já no programa de matemática do 2.º CEB de 2007 a fração era usada nos seus múltiplos significados: quociente entre dois números inteiros, relação parte-todo, razão, medida e operador. Foi a altura de introduzir a representação na forma de numeral misto, sem a usar em situações de cálculo (ver Quadro2).

Em relação a este conteúdo específico, Brocardo (2010) aponta três princípios orientadores na abordagem dos números racionais:

1.º princípio: utilizar diferentes contextos e modelos a fim de aprofundar o conceito de número racional. Segundo a autora "fracções, decimais e percentagens são representações de números que só ganham sentido quando percebemos como são utilizados em diferentes contextos" (p. 17);

2.º princípio: desenvolver gradualmente as ideias subjacentes aos números racionais, tendo em conta uma evolução adequada em relação ao sentido das operações e aos diferentes significados das frações;

3.º princípio: construir significados e relações de forma a "compreender os vários conjuntos numéricos e ser capaz de efectuar cálculos usando os números nas diferentes representações" (p. 21).

Quadro 2: Os números racionais na Organização Curricular e Programas (ME, 1990) e no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007)

Organização Curricular e Programas (ME, 1990, pp. 175-177)		Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007, pp. 10,19)	
Objetivos:			
2.º ano	. Reconhecer o operador "metade de..." como inverso de " o dobro" de..."; . Utilizar a notação $1/2\,x$ e $2x$ para representar "metade de" e o "dobro de"; . Reconhecer $1\,/\,4\,x$ como inverso de $4\,x$.	1.º e 2.º anos	. Identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção; . Compreender e usar os operadores: dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo e relacioná-los, respectivamente, com a metade, a terça, a quarta e a quinta parte.
3.º ano	. Utilizar a notação $1/3\,x$, $1/5\,x$, $1/10\,x$ para representar o inverso de $3x, 5x, 10\,x$; . utilizar a notação ":" " $-$ " como outra representação;	3.º e 4.º anos	. Compreender fracções com os significados quocientes, parte-todo e operador; . Reconstruir a unidade a partir das suas partes; . Localizar e posicionar números racionais não negativos na recta numérica; . Adicionar, subtrair, multiplicar e dividir com os números racionais não negativos representados na forma decimal; .Utilizar valores de referência representados de diferentes formas (decimal, percentagem e fracção).

O atual Programa e as Metas Curriculares, ao nível do 1.º CEB, pretende que os temas em estudo sejam apreendidos de uma forma progressiva, ou seja, parte-se de um trabalho experimental e do concreto para o abstrato.

Ao longo de quatro anos de escolaridade a construção do sentido de número racional não negativo é desenvolvido a partir da abordagem: (i) da divisão da unidade; (ii) medir com frações; (iii) adicionar e subtrair números racionais; (iv) simplificar frações e (v) multiplicar e dividir números racionais (ME, 2013).

Cada abordagem apresenta diferentes níveis de desempenho (descritores) determinando a progressão dentro de cada domínio.

No domínio NO e subdomínio Números Racionais Não Negativos, as frações são introduzidas geometricamente a partir da decomposição de um segmento de reta em segmentos de igual comprimento e desde logo utilizadas para exprimir medidas de diferentes grandezas, fixadas as unidades. O subsequente tratamento das frações, assim como a construção dos números racionais positivos que elas representam, devem ser efetuados com o possível rigor e de forma cuidadosa, garantindo-se, por exemplo, que os alunos interpretem corretamente as dízimas finitas como uma mera representação de um tipo muito particular de frações, devendo evitar o recurso sistemático às dízimas sempre que pretenderem efetuar cálculos.

A representação dos números naturais e das frações numa reta numérica, surgem logo no 2.º ano de escolaridade.

O Quadro 3 apresenta os descritores relativos aos números racionais no 1.º CEB.

Quadro 3: Descritores da unidade temática Números Racionais, 1.º CEB

Programa de Matemática e Metas Curriculares (ME, 2013)	
NO- Números Racionais Não Negativos	
Descritores	
2.º ano	Dividir a Unidade . Fixar um segmento de reta como unidade e identificar $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{100} e \frac{1}{100}$ como números, iguais à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em respetivamente dois, três, quatro, cinco, dez, cem e mil segmentos de reta de igual comprimento; . Fixar um segmento de reta como unidade e representar números naturais e as frações $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10}$ por pontos de uma semirreta dada, representando o zero pela origem e de tal modo que o ponto que representa determinado número se encontra a uma distância da origem igual a esse número de unidades; . Utilizar as frações $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{100} e \frac{1}{100}$ para referir cada uma das partes de um todo dividido respetivamente em duas, três, quatro, cinco, dez, cem e mil partes equivalentes.
3.º ano	Medir com frações . Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração unitária $\frac{1}{b}$ (sendo b

	um número natural) como um número igual à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em b segmentos de reta de comprimentos iguais; . Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração $\frac{a}{b}$ (sendo *a* e *b* números naturais) como um número, igual à medida do comprimento de um segmento de reta obtido por justaposição retilínea, extremo a extremo, de *a* segmentos de reta com comprimentos iguais medindo $\frac{1}{b}$; . Utilizar corretamente os termos «numerador» e «denominador»; . Identificar «reta numérica» como a reta suporte de uma semirreta utilizada para representar números não negativos, fixada uma unidade de comprimento; . Reconhecer que frações com diferentes numeradores e denominadores podem representar o mesmo ponto da reta numérica, associar a cada um desses pontos representados por frações um «número racional» e utilizar corretamente neste contexto a expressão «frações equivalentes»; . Identificar frações equivalentes utilizando medições de diferentes grandezas; . Reconhecer que uma fração cujo numerador é divisível pelo denominador representa o número natural quociente daqueles dois; . Ordenar números racionais positivos utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas; . Ordenar frações com o mesmo denominador; . Ordenar frações com o mesmo numerador; . Reconhecer que uma fração de denominador igual ou superior ao numerador representa um número racional respetivamente igual ou inferior a e utilizar corretamente o termo «fração própria». <u>Adicionar e subtrair números racionais</u> . Identificar somas de números racionais positivos como números correspondentes a pontos da reta numérica, utilizando justaposições retilíneas extremo a extremo de segmentos de reta, e a soma de qualquer número com zero como sendo igual ao próprio número; . Identificar a diferença de dois números racionais não negativos, em que o aditivo é superior ou igual ao subtrativo, como o número racional que se deve adicionar ao subtrativo para obter o aditivo e identificar o ponto da reta numérica que corresponde à diferença de dois números positivos utilizando justaposições retilíneas extremo a extremo de segmentos de reta; . Reconhecer que é igual a 1 a soma de *a* parcelas iguais a $\frac{1}{a}$ (sendo *a* número natural); . Reconhecer que a soma de *a* parcelas iguais a $\frac{1}{b}$ (sendo *a* e *b* números naturais) é igual a $\frac{a}{b}$ e identificar esta fração como os produtos $a \times \frac{1}{b}$ e $\frac{1}{b} \times a$; . Reconhecer que a soma e a diferença de frações de iguais denominadores podem ser obtidas adicionando e subtraindo os numeradores.
4.º ano	<u>Simplificar frações</u> . Reconhecer que multiplicando o numerador e o denominador de uma dada fração pelo mesmo número natural se obtém uma fração equivalente; . Simplificar frações nos casos em que o numerador e o denominador pertençam simultaneamente à tabuada do ou do ou sejam ambos múltiplos de .

	<u>Multiplicar e dividir números racionais não negativos</u> . Estender dos naturais a todos os racionais não negativos a identificação do produto de um número *q* por um número natural *n* como a soma de *n* parcelas iguais a *q*, se *n›1*, como o próprio *q*, se *n=1* e representá-lo por *n x q* e *q x n*; . Reconhecer que $n\times\frac{a}{b}=\frac{n\times a}{b}$ e que, em particular, $b\times\frac{a}{b}=a$ (sendo *n* , *a* e *b* números naturais); . Estender dos naturais a todos os racionais não negativos a identificação do quociente de um número por outro como o número cujo produto pelo divisor é igual ao dividendo e utilizar o símbolo «:» na representação desse resultado; . Reconhecer que $a\div b=\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ (sendo *a* e *b* números naturais); . Reconhecer que $\frac{a}{b}\div n=\frac{a}{n\times b}$ (sendo *n*, *a* e *b* números naturais).

A apropriação destes descritores pelos alunos do 1.º CEB é fundamental para o complemento deste estudo no 2.º CEB.

Vários estudos e reflexões partilhados por diversos educadores e professores de Matemática referem que o programa neste domínio é muito ambicioso e que os alunos nesta faixa etária têm muitas dificuldades em adquirir as aprendizagens visadas. Por exemplo Tudella (2014) refere que "não é possível ensinar todos estes conteúdos, que são bastante complexos, sobretudo nesta faixa etária, e em tão pouco tempo".

No 2.º CEB os números racionais são trabalhados nas diferentes representações: (i) fração, (ii) numeral misto, (iii) dízima e (iv) percentagem. São ainda trabalhadas as quatro operações em situações de resolução de problemas. O trabalho desenvolvido neste ciclo de ensino poderá ficar comprometido se a compreensão dos diferentes significados de fração apresentar lacunas ou constituir um saber frágil.

2.2. Sentido de número

Na secção 2.2.1. fazemos uma breve perspetiva histórica e concetualização do sentido de número.

Na secção 2.2.2. a concetualização é focada no desenvolvimento do sentido de número racional não negativo, apresentando a fração nos seus diferentes significados. Destacamos aqui os estudos Kieren (1976, 1988), Bryant e Nunes (1997), Vergnaud (1998), Case e Moss (1999), Kerlake (1986) e Santos (2005).

2.2.1. Perspetiva histórica e concetualização

O conceito de número é uma noção matemática complexa e o processo de aquisição requer a vivência de experiências diversificadas.

Para McIntosh, Reys e Reys (1992, p. 3):

> o sentido de número diz respeito a uma compreensão pessoal geral sobre o número e operações, bem como à capacidade e compreensão para usar esta compreensão de formas flexíveis para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações. Reflecte uma propensão e uma capacidade para usar números e métodos quantitativos como meios de comunicação, processamento e interpretação de informação. Resulta numa expectativa de que os números são úteis e de que a Matemática tem uma certa regularidade.

Piaget (2010) realizou as primeiras investigações à volta do número, ou seja no desenvolvimento do conceito de número e dizia que aos 5/6 anos as crianças estão no período pré-lógico que corresponde ao seu período pré-numérico, levando-as à construção do conceito de número.

Na visão de Piaget a contagem não era valorizada e, por isso, não a considerava prioritária na construção dos conceitos numéricos. Segundo este psicólogo no início do estádio das operações concretas, a criança apenas seria capaz de hierarquizar, ordenar e enumerar. Neste estádio a criança tem a capacidade para pensar de forma lógica sobre as operações realizadas, sobre a quantidade e usa a correspondência termo-a-termo.

No estádio final, período das operações formais, a criança é capaz de lidar com noções mais complexas e raciocinar tanto dedutivamente como indutivamente.

Uma das ideias defendidas por Piaget, referidas nas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (OCEPE) é de que "as oportunidades variadas de classificação e seriação são também fundamentais para a criança vá construindo a noção de número, como correspondente a uma série (número ordinal) ou uma hierarquia (número cardinal)" (OCEPE, 2007, p. 74).

Uma boa compreensão de número leva-nos a ter sentido de número:

> A compreensão do número, passa pela tomada de consciência dos múltiplos usos do número no mundo que os rodeia. No caso dos números inteiros eles são usados para quantificar (aspecto cardinal); para medir; para calcular; para identificar; para localizar; para ordenar (aspecto ordinal) ou ainda para enumerar coisas. (Freudenthal & Walle, 1989, citado por Gonçalves, 2003, p. 20)

Para Brocardo, Serrazina e Rocha, (2008, p. 118) o sentido de número:

> diz respeito à compreensão global e flexível dos números e operações com o intuito de compreender os números e as suas relações, e desenvolver estratégias uteis e eficazes para utilizarmos no nosso dia-a-dia, na nossa vida profissional, ou como cidadãos ativos.

A expressão *sentido de número* refere-se a uma compreensão geral e intuitiva sobre números e relações, "uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo da vida" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 46).

Sowder (1992, citado por NCTM, 2000, p. 92) refere que "o sentido de número desenvolve-se à medida que os alunos compreendem a sua ordem de grandeza, desenvolvem várias formas de pensar sobre ele e de representá-lo, utilizam os números como referências e desenvolvem uma percepção exacta acerca do modo como as operações os afectam".

No que concerne aos programas do Ensino Básico, o termo *sentido de número* surge pela primeira vez no Programa de 2007 como sendo:

> a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou 1/2, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medição e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números) (p. 13) .

Neste documento há também referência à utilização de diferentes estratégias de cálculo, à estimativa e à verificação da razoabilidade dos resultados para desenvolver nos alunos o sentido de número:

> devem ser trabalhadas diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações (…) Progressivamente, os alunos devem ser capazes de utilizar as suas estratégias de modo flexível e de selecionar as mais eficazes para cada situação. É também importante que os alunos estimem resultados e ajuízem acerca da sua razoabilidade (ME, 2007, p. 14).

Os alunos, para desenvolver e construir o conceito de número racional, devem adquirir conceções que para Martinie (2007) são blocos de construção para a compreensão de número racional:

(i) raciocínio multiplicativo, trabalhar em situações multiplicativas permite desenvolver nos alunos o raciocínio proporcional. Razão e proporção são parte fundamental para o campo concetual multiplicativo;

(ii) densidade e valor da posição, a construção do conceito de número racional devem ser baseados numa forte noção de quantidade. Os números racionais são densos, ao contrário dos números inteiros, há sempre um outro número entre eles;

(iii) concetualização da unidade, o conceito de unidade é fundamental para o desenvolvimento de operações com números inteiros que conduzem para os números racionais;

(iv) partição, isto é, subdividir um todo contínuo em partes iguais. Experiências com partição permitem aos alunos discernirem a relação entre denominador e o valor da fração;

(v) equivalência e ordenação.

2.2.2.Sentido de Número Racional Não Negativo

Kieren (1976) foi o primeiro investigador a presentar que o conceito de fração como sendo composto por diferentes significados, designado por *subconstructs* e que, a sua aquisição, depende da compreensão dos mesmos. Este autor identificou, inicialmente, quatro *subconstructs* de fração: medida, razão, quociente e operador e que partiam do conceito geral de fração como parte-todo.

Nos anos seguintes, Kieren, Lesh, Post e Silver (1983) desenvolveram um modelo que liga os diferentes significados de fração com as operações básicas e resoluções de problemas (Ver Figura 2).

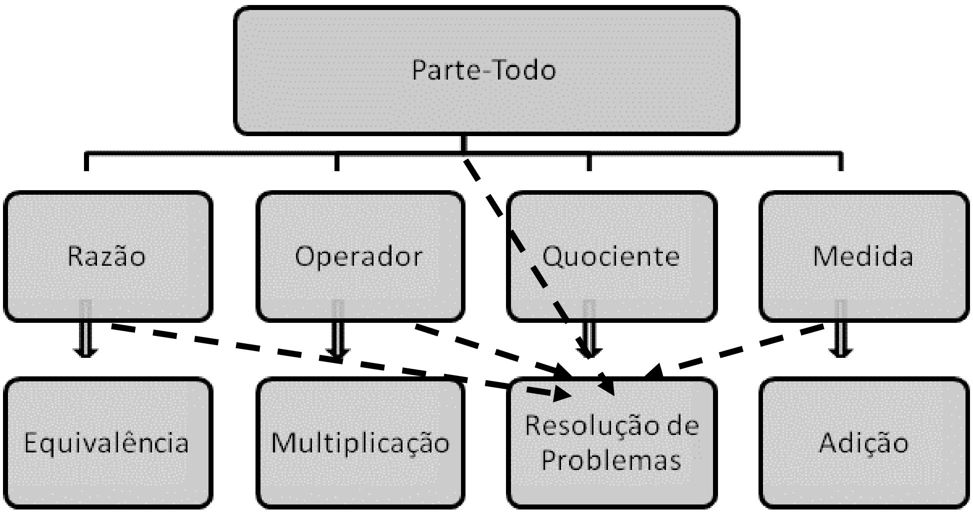


Figura 2: Modelo de Kieren Behr, Lesh, Post e Silver (2005)

Segundo este modelo, a aquisição da noção de parte-todo/partilha permite desenvolver a compreensão dos quatro significados de fração.

Além disso, a noção de razão promove a compreensão do conceito de equivalência, que levará ao processo de construção de frações equivalentes. Assim como, o significado de fração como operador e como medida desenvolve a compreensão da multiplicação e da adição de frações.

À luz de Kieren (1988) e Nunes, Bryant, Pretslik & Hunny (2003) passaremos a descrever as ideias básicas dos cinco significados possíveis que devem ser levados em consideração no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais: fração como número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Fração como número: uma fração a/b com b ≠ 0, pode assumir o significado de número e ser posicionada na reta numérica. É importante que o aluno reconheça este significado, visualizar seu posicionamento na reta numérica, e compreender que este número também pode ser representado como um decimal.

Relação parte-todo: representa um todo (contínuo ou discreto) dividido em n partes iguais, onde cada uma dessas partes é representada como 1/n. A relação parte-todo implica em um procedimento de dupla contagem, onde o denominador representa o número de partes que este todo foi dividido e o numerador quantas partes foram consideradas.

Medida: comparação entre duas grandezas, como exemplo verifica-se o cálculo da probabilidade de um evento, que é obtido através da razão entre o número de casos prováveis e o número de casos possíveis desse evento ocorrer. Assim, a probabilidade de ocorrer o tal evento varia entre 0 e 1, sendo este número, na maioria dos casos uma fração. Da mesma forma podemos abordar o conceito de percentagem.

Quociente: está presente em situações em que está envolvida a ideia de divisão e o seu resultado.

Operador multiplicativo: a fração a/b, com $b \neq 0$, atua como fator transformador de um número ao ser multiplicando por 'a' e logo em seguida, dividindo por 'b'. O número resultante deste processo pode ser maior ou menor que o número em seu estado inicial, dependendo do quociente.

A investigação aponta vários motivos para o baixo desempenho dos alunos nos tópicos relacionados com os números racionais. Especificamente, a complexidade do conceito de fração (Bezuk & Cramer, 1989), o dar mais ênfase aos procedimentos de ensino do que ensinar significados conceptuais (Moss & Case, 1999), a interferência do conhecimento de número inteiro (Lukhele, Murray & Olivier, 1999) e a influência de múltiplas representações sobre a aprendizagem de fração (Cramer, Post & delMas, 2002).

Na generalidade estas dificuldades advêm da natureza complexa das frações e modo como o processo de ensino e aprendizagem do conceito se desenvolve.

Os alunos podem até apresentar algumas habilidades em manipular os números racionais, sem necessariamente terem uma compreensão clara do conceito.

Nesta linha de pensamento Nunes e Bryant (1997, p. 191) argumentam que

> com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De facto, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.

Estes autores afirmam que esta falsa impressão de que os alunos têm algum domínio sobre o conceito de fração, advém da forma como lhes foi apresentado, ou seja, lhes foi dado a fração como um todo dividido em partes. Deste modo, é frequentemente apresentado aos alunos que o número total de partes é o denominador e as partes pintadas, o numerador. E ainda, são transmitidas algumas regras de cálculo, que os alunos mecanizam, dando assim a impressão de que sabem muito sobre frações, sem compreender o seu verdadeiro significado.

Nunes e Bryant (1997) defendem que existe uma conexão entre divisão e fração, mas em quantidades contínuas. Já Kieren (1988) sugeriu que as frações são números produzidos por divisões (números do campo dos quocientes).

Assim, devemos procurar a origem da compreensão do conceito de fração nos alunos, em contextos que propiciem situações de divisão. Repara-se que

> quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engasgam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais elas veem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola, concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação-problema (Nunes & Bryant, 1997, p. 212).

Neste sentido Vergnaud (1998) afirma que o mundo dos números racionais é uma complexa rede de conceitos com os alunos apresentarem dificuldades em compreender as diferenças entre números inteiros e números racionais.

É importante promover o desenvolvimento de sentido de número racional através das conexões entre os números naturais e os racionais pois, segundo Moseley (2005) o que pode estar a dificultar a aprendizagem dos alunos é precisamente a compartimentação destes dois tópicos do programa.

É necessário que os alunos estejam aptos em considerar e que percebam que uma fração é realmente um número composto de vários números inteiros, que desempenham várias situações da vida real, tais como: medida, razão, operador, quociente. Como Lamon (1999, p. 22) afirma que a parte mais difícil da aprendizagem das frações é compreensão de que "o que parece ser a mesma quantidade pode realmente ser representados por números diferentes".

Moss e Case (1999) defendem que

> em qualquer dos casos, constroem esquemas numéricos quantitativos globais separadamente e, à medida que vão desenvolvendo um nível mais elevado de pensamento, vão coordenando gradualmente estes "esquemas" para obterem uma compreensão do núcleo, tanto no que se refere à forma como os números em questão estão estruturados, como à notação usada para os representar (p. 124).

Quando o trabalho com frações tem consistido na divisão de figuras em partes iguais, na representação gráfica de frações e na apresentação de regras operatórias, apelando ao processo de mecanização, os alunos ficam com o conceito de número fracionário muito reduzido. Acerca do processo de dividir e pintar Nunes & Bryant (1997, p. 191) referem que

> as crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fracções. Pesquisas demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre fracções poderia ser falsa.

Santos (2005) destaca que

> a aquisição de um conceito matemático pressupõe o seu reconhecimento em diversas situações e diversos contextos. Com o conceito de número racional, isso se torna bem mais evidente, pois podemos dizer que, para construir esse importante conceito matemático, torna-se necessário explorá-lo em várias situações e em diferentes contextos (p. 3).

Em suma, muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos decorrem da: (i) incompreensão das noções de décimas e centésimas; (ii) confusão entre número de algarismos e quantidade; (iii) incompreensão do sistema de numeração decimal; (vi) falta de sentido de número; (v) representações fracionárias e decimais não entendidas (1/2 =1,2) e (vi) generalização das operações com números inteiros.

Vários investigadores apontam que estas dificuldades surgem na abordagem aplicada ao ensino deste conteúdo, pois é caracterizado por dar ênfase ao simbolismo formal (Kerslake, 1986), à linguagem matemática e à aplicação mecânica dos algoritmos (Case e Moss 1999; Nunes, Bryant, Pretslik & Hunny 2003).

2.3. A IMPORTÂNCIA DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS NA AQUISIÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Os materiais manipuláveis constituem um recurso que ajuda na aquisição e construção de conceitos matemáticos em todos os níveis de escolaridade.

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991, p. 21) recomenda um conjunto de recursos para a sala de aula que permitem criar:

> um ambiente que encoraje as crianças a explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar ideias. Têm de ouvir as crianças atentamente e guiar o desenvolvimento das suas ideias. Têm de usar frequentemente materiais manipuláveis em actividades que impliquem o raciocínio de forma a fomentar a aprendizagem de ideias abstractas.

Bezerra (1962, citado por Caldeira, 2009, pp. 223-224) define materiais didáticos como

> todo e qualquer acessório usado pelo professor para realizar a aprendizagem. São pois materiais didácticos: o quadro negro, o giz, o apagador, os livros, instrumentos, os aparelhos e todo o meio audiovisual usado pelo professor ou pelo alunos, durante a aprendizagem.

Já Reys (s.d.), citado por Serrazina & Matos, 1996, p. 193) refere o termo materiais manipuláveis, como sendo "objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia".

Serrazina (1991, p. 37) refere que os materiais manipuláveis são "objectos, instrumentos ou outros media que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem".

Assim a utilização de materiais manipuláveis é muito importante para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de fração, relações de ordem e equivalência. O objetivo principal é oferecer aos alunos experiências que lhes permitam desenvolver fortes imagens mentais de frações.

Lesh (1979, citado por Post, 1981) refere que os materiais manipuláveis são como um intermediário entre o mundo real e o mundo matemático (ver Figura 3).

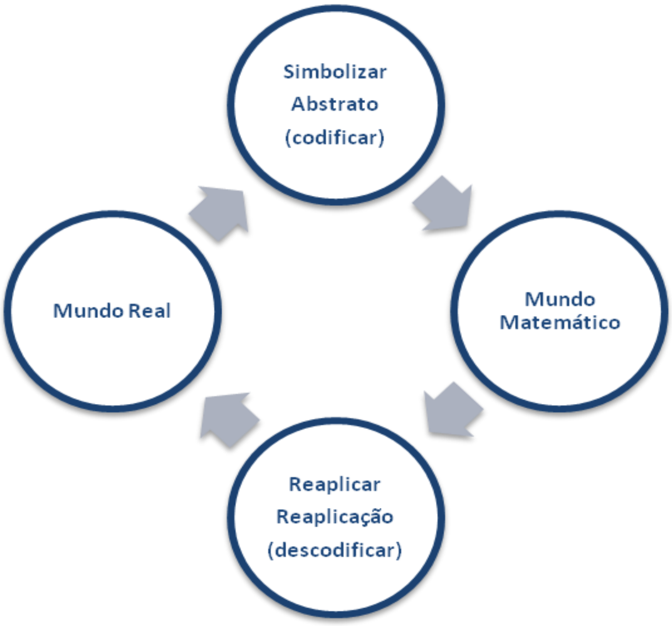


Figura 3: A relação entre o mundo real e o mundo matemático, segundo Lesh (1979, citado por Post, 1981)

A utilização dos materiais promovem a capacidade de resolver problemas, sendo estes um veículo ao qual os alunos podem modelar situações do mundo real.

Para Damas et al (2010) os materiais manipulativos devem ser utilizados “antes da fase de abstracção as crianças devem passar por situações concretas que lhes permitam, não só a construção de certos conceitos, como também uma melhor estruturação dos mesmos” (p. 5).

Relativamente aos números racionais Bezuk e Cramer (1989, pp. 156-167) referem que as primeiras experiências com materiais manipuláveis devem basear-se: (i) no conceito parte-todo, usando primeiro o modelo contínuo (círculos e dobrar papel são exemplos de algumas estratégias) e em seguida, o modelo discreto (devemos de utilizar objetos que permitem fazer contagens); (ii) incluir atividades que os alunos representam frações em modelos físicos e em diagramas; (iii) usar palavras, como por exemplo "três quartos" e depois introduzir símbolos (3/4); (iv) introduzir o "conceito de unidade" ou seja, atividades onde os alunos vão construir a unidade.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este subcapítulo está dividido em quatro subcapítulos.

No primeiro subcapítulo apresenta-se a metodologia aplicada ao estudo. Trata--se de uma metodologia qualitativa de características interpretativas, usando a estratégia de investigação-ação.

No segundo subcapítulo faz-se a contextualização da turma em estudo.

No terceiro subcapítulo descreveremos as fontes dos dados, os métodos e instrumentos de recolha, e os procedimentos de análise.

No quarto subcapítulo analisamos o pré-teste, permitindo assim, identificar as dificuldades apresentadas pela turma em estudo na compreensão da fração nos diferentes significados (parte-todo contínuo, parte-todo discreto, operador multiplicativo, medida e quociente).

A partir desta identificação apresentamos a planificação da unidade de estudo, bem como a apresentação das tarefas aplicadas na investigação.

3.1. O ESTUDO

O estudo que aqui se apresenta segue uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, de acordo com as características definidas por Bogdan e Biklen (2013).

Segundo estes autores a investigação qualitativa tem na sua essência, cinco características: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Interessa portanto "investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural" (Bogdan e Biklen, 2013, p. 16).

No estudo aqui apresentado a fonte direta de recolha dos dados foi a sala de aula, ou seja, o ambiente natural tal como está previsto por Bogdan e Biklen (2013).

A vertente interpretativa está estreitamente relacionada com o objetivo e as questões a que esta investigação pretende dar resposta.

Bento (2012) refere que "a investigação qualitativa foca um modelo fenomenológico no qual a realidade é enraizada nas percepções dos sujeitos; o objectivo é compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações em vez de através de números".

Neste estudo a estratégia de investigação utilizada foi a investigação-ação uma vez que tinha como objetivo máximo "melhorar a qualidade desenvolvida no eu interior" (Elliott, 1991, p. 69). Assim, o professor age, simultaneamente, como um ator e um investigador, para, de uma forma reflexiva, promoverem inovações educacionais (Altrichter et al. 1993, citado por Afonso, 2005).

Pereira (2004) afirma que "a investigação-ação constitui uma proposta válida e insubstituível na integração teórico-prática, indispensável à construção de um Saber Educativo" (p. 220).

Coutinho et al. (2009) sublinha a vantagem desta investigação para a prática do professor:

> a investigação-acção, mais do que uma metodologia, tende a afirmar-se como um modus faciendi intrínseco à actividade docente e ao quotidiano daquelas instituições educativas que pretendem acompanhar os sinais do tempos, comungando com as naturais vicissitudes da realidade do mundo em vez de se colocarem na cómoda posição de entidades detentoras de um saber que se vai revelando artificial e envelhecido ao deixarem-se ultrapassar por outros saberes mais mundanos mas, quem sabe, mais reflectidos, mais concretos, mais significantes e mais próximos do homem novo" (p. 376) .

Assim, este processo desenvolve-se em 3 fases: uma fase de planeamento onde há uma pesquisa e um reconhecimento dos factos, uma fase de ação e uma fase onde tenta perceber os resultados da ação desenvolvida (Afonso, 2005).

Esta estratégia de investigação permite, através de um exercício pleno de reflexão, adotar novas ações que melhorar a qualidade das aprendizagens.

3.2. CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO

O estudo foi realizado numa turma do 3.º ano de escolaridade, no Centro Escolar de Areia-Árvore, Vila do Conde, pertencente ao agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches (AEDAS).

O AEDAS é constituído por onze estabelecimentos, a Escola Secundária D. Afonso Sanches (ESDAS), a Escola Básica com 2.º e 3.º ciclo Julio-Saúl Dias (EBJSD), sete Escolas Básicas do 1.º ciclo e dois Jardins de Infância.

A investigação foi aplicada a uma turma do 3.º ano, por ser nesse ano que o estudo das frações se intensifica e aprofunda. Tal escolha se deve ainda ao facto de que, se os alunos conseguirem compreender os conceitos básicos relacionados com os números racionais na forma de fração, nos anos subsequentes não terão dificuldades, quando o tema reaparecer.

A turma é constituída por 20 alunos, 9 raparigas e 11 rapazes, cujas idades estão compreendidas entre os 8 e os 9 anos. Maioritariamente os alunos pertencem a famílias de estratos sociais médios. É uma turma heterogénea, apresentando ritmos de trabalho diferentes.

A nível de comportamento, os alunos revelam alguma instabilidade dentro da sala de aula, com dificuldades em respeitar as regras estabelecidas. Embora cada grupo tenha um porta-voz, nem sempre é fácil a sua seleção nos diferentes grupos, pois todos os alunos querem responder às questões e ir ao quadro expor as estratégias adotadas.

A proposta pedagógica desenvolver-se-á em contexto de sala de aula com todos os alunos da turma. Contudo, para foco de estudo utilizaremos os grupos já formados pela professora titular (5 grupos de 4 elementos). O Quadro 4 ilustra a constituição dos grupos.

Quadro 4: Constituição dos grupos

GRUPOS	ALUNOS
Grupo A	Inês; Joana; Hugo e Beatriz
Grupo B	Rafael; Eduardo; Miguel e Inês C.
Grupo C	João; Matilde; Hugo S. e Diogo
Grupo D	Leonor; Vasco; Guilherme e Rafael P.
Grupo E	Diana; Mariana; Pedro e Mariana C.

Durante a unidade de ensino, além das tarefas apresentadas, foram incluídos dois momentos formais de aferição dos conhecimentos dos alunos.

O primeiro momento foi a aplicação de um pré-teste, que tinha como objetivo diagnosticar as dificuldades que os alunos apresentavam no significado de fração parte-todo contínuo, parte-todo discreto, fração como medida e fração como operador multiplicativo.

No segundo momento, aplicou-se um pós-teste, permitiu aquilatar as aprendizagens adquiridas no final da realização das tarefas.

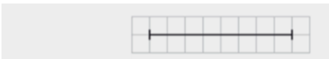
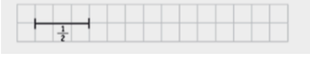
Não obstantes estes dois momentos, no decorrer da aplicação das tarefas o investigador avaliou informalmente, o que permitiu um ajuste no processo ensino e aprendizagem.

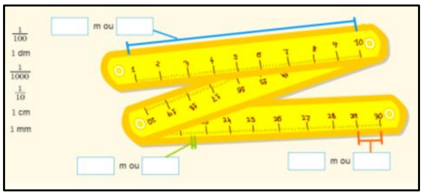
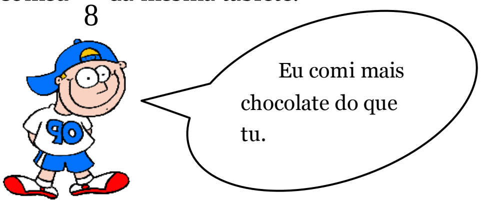
O pré-teste (ver Apêndice 1) foi validado por um conjunto de quatro especialistas da área da matemática, sendo três do 2.º CEB e um do 1.º CEB.

As sugestões de alterações, reajustes e introdução de novas questões proposta por estes especialistas, foram analisadas e consideradas aquando da reformulação do pré-teste e construção do documento final.

O pré-teste era constituído por várias questões que contemplavam o significado de fração como parte-todo contínuo, parte-todo discreto, quociente, operador multiplicativo e medida. No Quadro 5 apresentamos os enunciados dos itens que constitui o pré-teste, bem como, o objetivos a aferir das aprendizagens já adquiridas.

Quadro 5: Objetivos das questões do pré-teste

Itens	Objetivos
1. No segmento de reta $[AB]$ que representa a unidade, assinala a fração $\frac{1}{2}$. 	• Representar num segmento de reta uma fração.
2.Partindo do segmento de reta a seguir, reconstrói a unidade. 	• Reconstruir a unidade em grandezas contínuas.
3. Rodeia a parte de piza que cada aluno comeu. 	• Identificar num conjunto de imagens a fração correta.

<table>
<tr>
<td>4.Observa um trabalho que a Ana fez com o João na aula de Expressões.
Pinta $\frac{1}{5}$ de cor de rosa e $\frac{1}{10}$ de azul.
</td>
<td>• Representar graficamente uma fração num contexto discreto.</td>
</tr>
<tr>
<td>5.A Ana fez um bolo para o seu aniversário e pretende dividi-lo igualmente pelos seus 12 amigos. Que parte do bolo come cada amigo?</td>
<td>• Utilizar o conceito de fração como quociente.</td>
</tr>
<tr>
<td>6. O José tem 20 cromos. O Pedro tem a quarta parte dos cromos do José.
Quantos cromos têm os dois amigos, no total?</td>
<td>• Resolver problemas tirando partido do significado de fração como um operador multiplicativo.</td>
</tr>
<tr>
<td>7. A imagem representa um metro articulado com 30 cm. Legenda a imagem com as medidas listadas.

</td>
<td>• Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte da divisão equitativa de um todo.</td>
</tr>
<tr>
<td>8. A Luísa comeu $\frac{1}{4}$ de um chocolate e o João comeu $\frac{2}{8}$ da mesma tablete.

</td>
<td>• Comparar frações com denominadores diferentes.</td>
</tr>
</table>

O pós-teste (ver Apêndice 2) era constituído pelas mesmas questões colocadas no pré-teste, havendo a inclusão de mais um item. Este item teve a ver com a representação gráfica de 1/3 numa figura circular, (ver Figura 4).

9. A imagem representa um círculo.
Representa $\frac{1}{3}$ no círculo

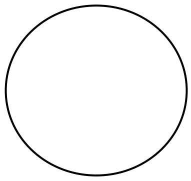


Figura 4: Questão incluída no pós-teste

3.3. Instrumentos e Procedimentos de Recolha de Dados

Para concretização deste estudo utilizamos como instrumentos de recolha a observação direta e recolha documental (produções realizadas pelos alunos).

Para facilitar o relato escrito, os dados foram recolhidos por meio de gravação áudio. Para complementar as gravações áudio foram ainda utilizadas notas de campo, diário de bordo e fotografias, que permitiram anotar situações onde se evidenciavam processos de raciocínio, possibilitando acompanhar à posteriori o trabalho desenvolvido pela turma. No Quadro 6 está registado os instrumentos e procedimentos de recolha de dados utilizados nesta investigação.

Quadro 6: Síntese de recolha de dados

Métodos de recolha	**Fontes de dados**	**Formas de registo**	**Documentos**
Observação direta	Aulas	Gravação Áudio Fotografia	Notas de campo
Recolha documental	Alunos	-	Registos produzidos pelos alunos

Neste estudo houve a preocupação de fazer uma seleção criteriosa dos dados recolhidos de modo a reter apenas os relevantes, processo fundamental para a investigação de caráter qualitativa. Tal como refere Freixo (2009, p. 146) o "objectivo desta abordagem de investigação utilizada para o desenvolvimento do conhecimento é descrever ou interpretar, mais do que avaliar. (…) é uma extensão da capacidade do investigador em dar sentido ao fenómeno".

3.4. IDENTIFICAÇÃO DAS DIFICULDADES

O ponto comum na elaboração dos itens para o pré-teste foi diagnosticar que dificuldades os alunos apresentam nos diferentes significados de fração, para elaborar e planificar as tarefas a serem aplicadas neste estudo.

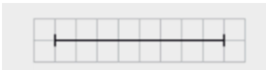
A análise quantitativa das respostas à questões do pré-teste foi feita a partir da categorização em respostas corretas, incorretas e não respondidas.

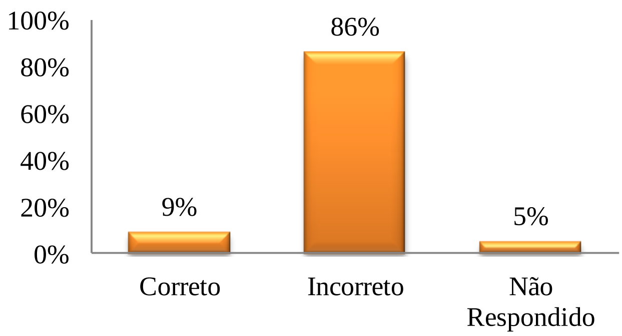
O primeiro item ilustra o descritor fixar um segmento de reta como unidade e identificar 1/2 decompondo a unidade, respetivamente, em dois segmentos de reta de igual comprimento.

Relativamente a este descritor os alunos apresentaram um nível de desempenho muito baixo (ver Gráfico 1).

Gráfico 1: Análise das respostas ao item 1

No segmento de reta $[AB]$ que representa a unidade, assinala a fração $\frac{1}{2}$.





A turma apresentou dificuldades na compreensão de fração como parte/todo contínuo, num segmento de reta e no entendimento que o ponto que representa 1/2 resulta da decomposição da unidade em dois segmentos de reta de comprimentos iguais (ver Figura 5).

Os alunos associaram o 1 do numerador como uma quadrícula do segmento de reta e assim representaram 1/2, ou dividiram o segmento de reta em segmentos de reta de comprimentos diferentes, ou seja, os alunos não possuem sequer a associação da fração à designação de meta.

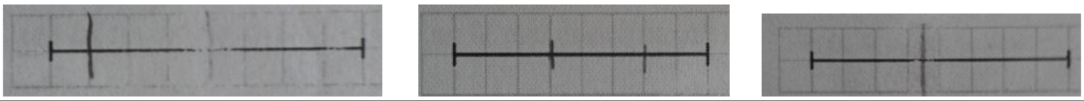


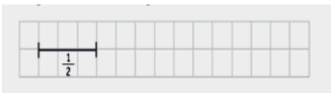
Figura 5: Erros mais frequentes no item 1

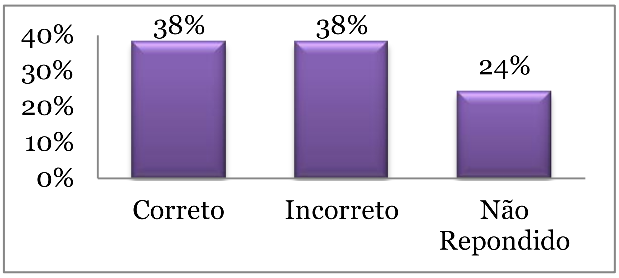
No item 2 o descritor de desempenho é fixar um segmento de reta como metade da unidade e obter essa unidade por justaposição retilínea, extremo a extremo.

A turma apresentou níveis baixos de operacionalização da meta (ver Gráfico 2) verificando-se que 38% dos alunos responderam corretamente. Praticamente um quarto dos alunos não respondem à questão.

Gráfico 2: Análise das respostas ao item 2

Partindo do segmento de reta a seguir, reconstrói a unidade.





A turma apresentou dificuldades em construir a unidade a partir da fração parte/todo. Esta dificuldade foi acrescida pelo facto de a fração estar representada por um segmento de reta (ver Figura 6). De facto, foi visível a ausência, numa parte significativa dos alunos, da relação entre parte e o todo.

O número de subconjuntos com 3 quadrículas variou de aluno para aluno não se vislumbrando a forma de raciocínio utilizado.

O erro comum foi construir segmentos de reta com 3 quadrículas.

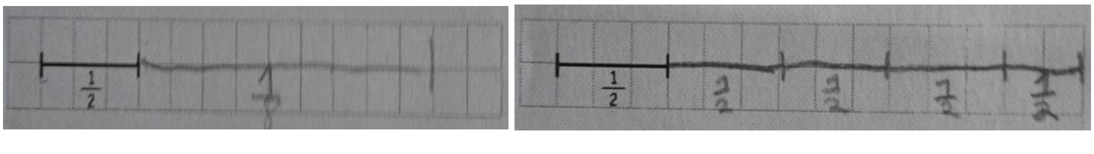


Figura 6: Erros mais frequentes no item 2

No item 3 os alunos revelaram um nível de desempenho satisfatório para o descritor “utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo”.

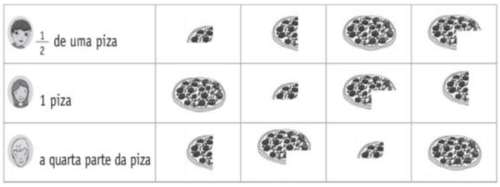
Aqui, o todo é representado por uma piza e os alunos identificaram o todo, a metade e a quarta parte (ver Quadro 4).

Os alunos conseguiram identificar com facilidade 1/2 e a unidade.

Relativamente a 1/4 da piza, os que erraram, identificaram como sendo a figura que representa 3/4 da piza.

Quadro 4: Análise das respostas ao item 3

Rodeia a parte de piza que cada aluno comeu.



	Turma		
	Correto	Incorreto	Não Realizado
$\frac{1}{2}$ de uma piza	100%	-	-
1 piza	100%	-	-
a quarta parte da piza	81%	19%	-

No item 4 a unidade está representada por 20 hexágonos, o todo como discreto, o objetivo era representar as frações 1/5 e 1/10 como parte do todo.

Os alunos revelaram um nível de desempenho para este descritor muito baixo (ver Quadro 5) com apenas 15% dos alunos a pintar corretamente 1/5 e 1/10 dos hexágonos da figura.

Quadro 5: Análise das respostas ao item 4

Observa um trabalho que a Ana fez com o João na aula de Expressões.

Pinta $\frac{1}{5}$ de cor de rosa e $\frac{1}{10}$ de azul

	Turma		
	Correto	Incorreto	Não Realizado
Pinta 1/5	15%	85%	-
Pinta 1/10	15%	85%	-

Através deste item foi possível verificar-se que o modelo discreto revelou-se mais difícil para os alunos do que o contínuo na identificação do todo e das partes. Na generalidade os alunos pintaram cinco hexágonos a rosa e dez a azul, revelando dificuldades em associar a parte com o todo e em identificar o todo (ver Figura 7). A seleção do número de hexágonos dependeu apenas do denominador.

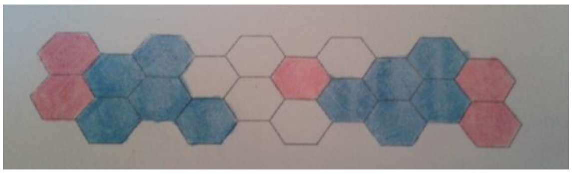
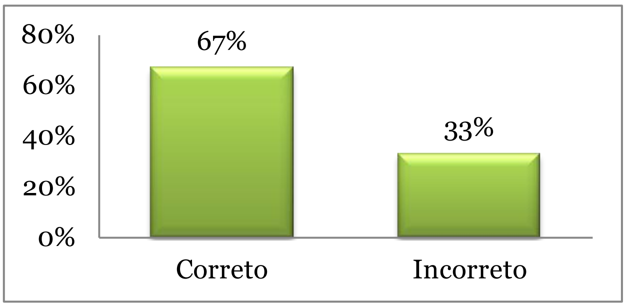


Figura 7 : Erros mais frequentes no item 4

No item 5 representa-se a fração como quociente onde temos duas variáveis (número de bolos e número de amigos) sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador. Neste caso o numerador corresponde ao bolo (um bolo) e o denominador ao número de amigos. A turma revelou um desempenho satisfatório como podemos ver no Gráfico 3 com 67% dos alunos a responderem corretamente.

Gráfico 3: Análise das respostas ao item 5

A Ana fez um bolo para o seu aniversário e pretende dividi-lo igualmente pelos seus 12 amigos. Que parte do bolo come cada amigo?



Apesar de a maior parte da turma responder corretamente ao item, alguns responderam fatias em vez de responderem em fração, associaram a fração a fatias como podemos ver na Figura 8.

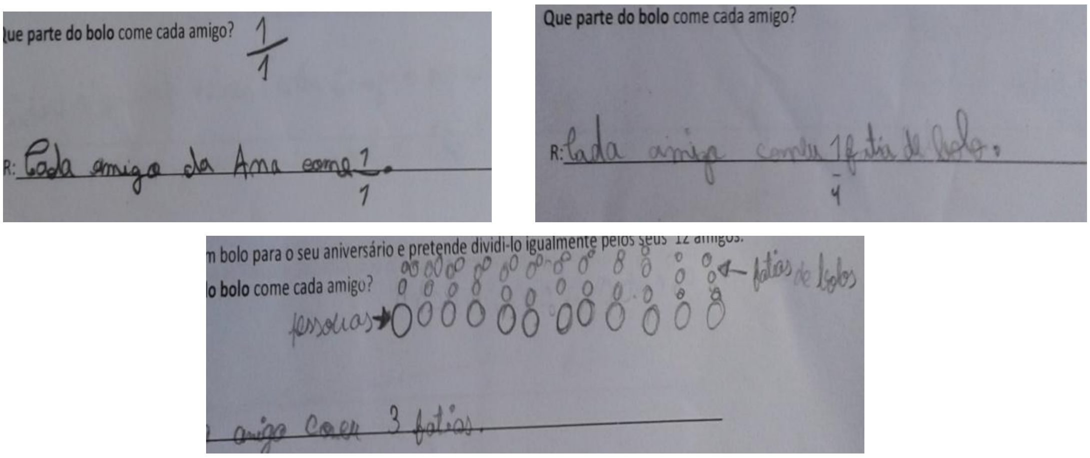
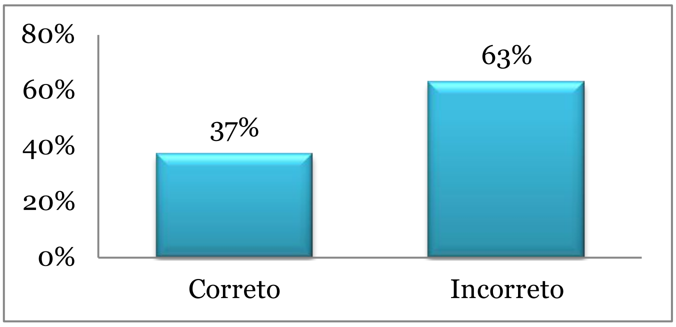


Figura 8: Erros mais frequentes ao item 5

O item 6 está associado ao conceito de fração como operador multiplicativo. Como a quantidade é discreta a turma demostrou um nível de desempenho muito baixo (ver Gráfico 4) como aconteceu no item 4.

Gráfico 4: Análise das respostas ao item 6

O José tem 20 cromos.
O Pedro tem a quarta parte dos cromos do José.
Quantos cromos têm os dois amigos, no total?



A maioria dos alunos (63%) não dividiu os 20 cromos por 4 mas multiplicaram por 4 (ver Figura 8). Mais de metade dos alunos não compreenderam o significado de fração como operador multiplicativo, nem associam a designação “quarta parte” à fração 1/4.

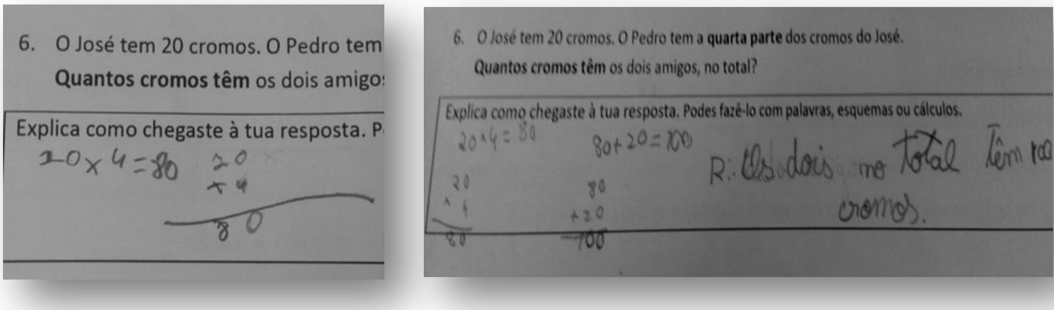
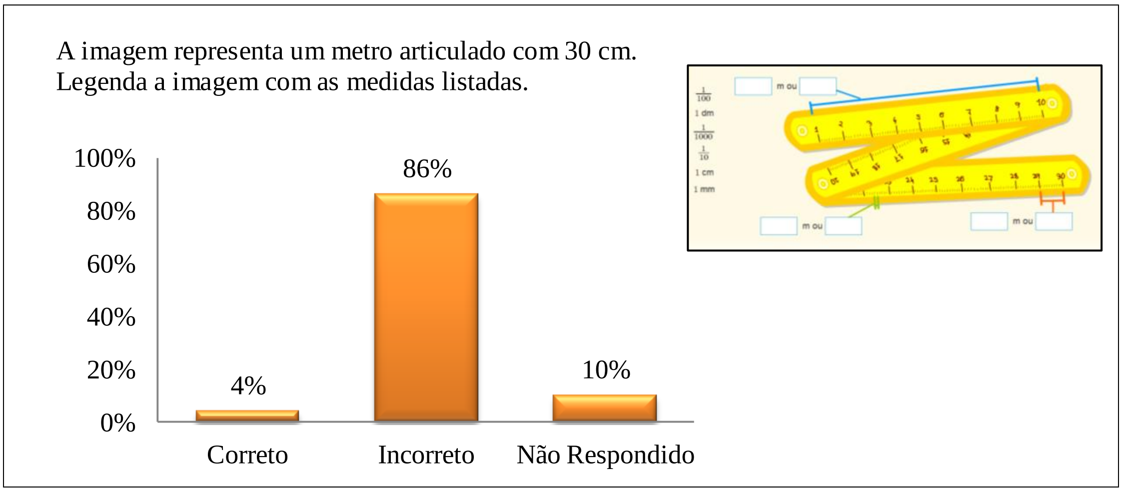


Figura 9: Erros mais frequentes no item 6

O item 7 estabelece a relação entre os submúltiplos do metro (decímetro, centímetro e milímetro) com a unidade de comprimento (metro). A turma revelou muitas dificuldades em considerar uma determinada parte como referência para medir uma outra (ver Gráfico 5). Repara-se que apenas 4% dos alunos responderam corretamente a esta questão.

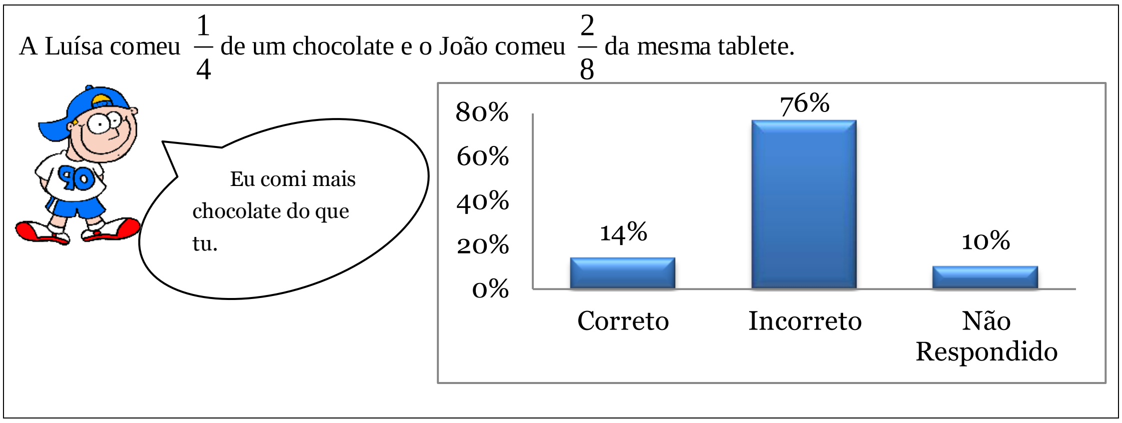
Gráfico 5: Análise dos resultados ao item 7



Relativamente ao item 8 o descritor de desempenho foi reconhecer que frações com diferentes numeradores e denominadores podem representar o mesmo ponto da reta numérica, neste caso representa a mesma quantidade de chocolate.

A turma apresentou dificuldades em perceber que 1/4 e 2/8 são frações que representam a mesma parte do todo, ou seja, são equivalentes. No Gráfico 6 podemos observar que apenas 14% dos alunos percebeu essa equivalência e 76% respondem incorretamente.

Gráfico 6: Análise dos resultados ao item 8



O todo para a maior parte dos alunos não tem o mesmo tamanho e aí incide o erro na resolução do item (ver Figura 10 - imagem da esquerda). Os alunos não compreenderam que o todo era o mesmo, apesar de ser referido no enunciado, ou identificam bem o todo mas representam mal a fração1/4 e 2/8 (ver Figura 10 – imagem da direita).

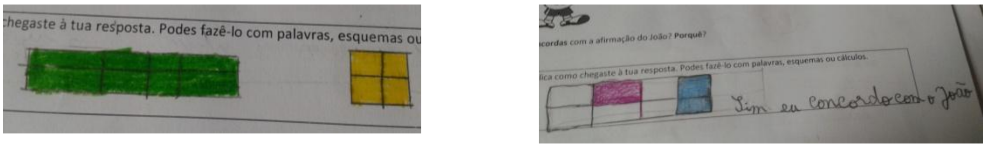


Figura 10 : Erros mais frequentes no item 8

Na globalidade os alunos apresentaram resultados pouco satisfatórios. Revelam fragilidades em representar uma fração num segmento de reta, reconstruir a unidade a partir de uma dada fração, trabalhar com unidades discretas, resolver situações problemáticas aplicando a fração como operador e como medida. Tornou-se mais fácil aos alunos identificar uma dada fração a partir de uma representação gráfica.

3.5. PLANIFICAÇÃO

A análise das respostas aos itens do pré-teste permitiu identificar as dificuldades sentidas ao nível da compreensão dos diferentes significados de fração e perante estas dificuldades estruturar um conjunto de tarefas que os levem a adquirir estes conceitos com significado.

Para este estudo foram selecionadas três tarefas. Na elaboração das tarefas houve o cuidado com a linguagem utilizada, com o tempo para sua realização e em adequar os enunciados à faixa etária dos alunos.

O estudo esteve focalizado em analisar as contribuições de uma proposta de ensino centrada na construção de conceitos, recorrendo a materiais manipulativos.

Os objetivos específicos deste estudo foram:

(i) identificar o conhecimento dos alunos sobre números racionais na forma de fração (antes do início das tarefas);

(ii) investigar a construção dos diferentes significados de frações (parte/todo contínuo, parte todo discreto, quociente, operador multiplicativo, medida e equivalência).

A planificação da unidade de ensino baseou-se no estipulado no Programa de Matemática e nas Metas Curriculares do 1.º CEB no domínio Números e Operações (ver Quadro 6).

Quadro 6: Planificação da Unidade de Ensino

DOMÍNIO: NÚMEROS E OPERAÇÕES

SUBDOMÍNIO:	OBJETIVO GERAL:
Números Racionais Não Negativos	➢ Medir Frações
CONTEÚDOS	DESCRITORES
Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas **Numerais fracionários** **Representações de frações** **Frações equivalentes**	. Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração unitária 1/b (sendo b um número natural) como um número igual à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em b segmentos de reta de comprimentos iguais. . Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração a/b (sendo *a* e *b* números naturais) como um número, igual à medida do comprimento de um segmento de reta obtido por justaposição retilínea, extremo a extremo, de *a* segmentos de reta com comprimentos iguais medindo 1/b. . Utilizar corretamente os numerais fracionários. . Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo. . Reconhecer que frações com diferentes numeradores e denominadores podem representar o mesmo ponto da reta numérica, associar a cada um desses pontos representados por frações um «número racional» e utilizar corretamente neste contexto a expressão «frações equivalentes»

Esta investigação foi composta por seis momentos de recolha e na análise dos dados. Cada momento é composto por várias etapas, conforme se pode observar no Quadro 7.

O primeiro momento da análise de dados foi realizado em novembro, e consistiu na recolha e tratamento das respostas aos itens do pré-teste, para diagnosticar as dificuldades que os alunos apresentam nos diferentes significados de fração.

O M1 contribui para a planificação das tarefas.

Os momentos M2, M3 e M4 ocorreram entre novembro e dezembro, e através dos quais se analisaram e transcreveram as aulas onde se concretizaram as tarefas e produziram-se as reflexões. Estes momentos sistematizam o processo de aplicação das tarefas.

Quadro 7: Síntese dos momentos de análise dos dados

MOMENTOS	ETAPAS
Momento 1 (M1)	-Recolha e análise das respostas do pré-teste
Momento 2 (M2)	-Transcrição da tarefa 1 -Reflexão da tarefa 1 -Análise dos documentos produzidos pelos alunos, da reflexão e das notas de campo
Momento 3 (M3)	-Transcrição da tarefa 2 -Reflexão da tarefa 2 -Análise dos documentos produzidos pelos alunos, da reflexão e das notas de campo
Momento 4 (M4)	-Transcrição da tarefa 3 -Reflexão da tarefa 3 -Análise dos documentos produzidos pelos alunos, da reflexão e das notas de campo
Momento 5 (M5)	-Recolha e análise das respostas do pós-teste
Momento 6 (M6)	-Conclusão da análise dos dados

A aplicação das tarefas na turma obedeceu à seguinte estrutura:

1- apresentação e introdução da proposta de trabalho pelo investigador;

2- resolução das tarefas nos diversos grupos (grupos de 4 elementos);

3- comunicação e discussão das resoluções/estratégias encontradas em cada grupo.

O quinto momento foi realizado em janeiro, com a aplicação do pós-teste, no qual foram analisados as respostas apresentadas pelos alunos.

O último momento, M6, consistiu na análise e organização dos dados anteriores com os temas em estudo.

3.6. TAREFAS

As tarefas inserem-se no domínio "Números e Operações" do programa de 3.º ano de escolaridade e foram apresentadas individualmente em forma de ficha em folha A4.

Foi elaborado um conjunto de três tarefas, cuja planificação teve como base as orientações curriculares para o 3.º ano. As tarefas foram executadas pelos alunos em três aulas de 120 minutos cada um contemplando três fases de desenvolvimento. O Quadro 8 apresenta essas fases.

Quadro 8: Sequência das 3 fases de desenvolvimento das tarefas

Fase 1	Apresentação da tarefa
Fase 2	Resolução da tarefa em grupos de 4 elementos
Fase 3	Discussão/reflexão final em grupo-turma

No início da realização das tarefas será sempre lido, em voz alta, o enunciado das mesmas, de modo a que os alunos percebem o que se propõe.

Durante a realização das tarefas, o papel do investigador será de mediador e de orientador, questionando e esclarecendo dúvidas, sem interferir na resolução dos alunos. Quando os trabalhos dos alunos não estarão a seguir o rumo que se pretende será necessário intervir.

Relativamente à última fase, os alunos serão sempre incentivados a expor as estratégias utilizadas, analisando-as, comparando-as entre si e identificando a mais adequada para cada situação dando assim relevo às interações com e entre os alunos.

3.6.1. Tarefa 1: Números Racionais Não Negativos

Os objetivos desta tarefa (ver Apêndice 3) são:

(i) Identificar a metade, a quarta parte, a terça parte, a sexta parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fração;

(ii) Compreender e usar os operadores: metade, a terça parte, a quarta parte, a sexta parte,...;

(iii) Compreender a fração como parte-todo contínuo.

Os alunos serão dispostos em grupos e, por cada grupo, será distribuída a tarefa (ver Quadro 9) e um conjunto de círculos fracionários (ver Figura 10).

Quadro 9: Tarefa Números Racionais

1. Observação das peças:

1.1 Une as peças da mesma cor de modo a formar círculos.

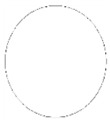
1.2 Indica o número de partes em que foi dividido o círculo:

a) verde; ☐ **b)** laranja; ☐ **c)** azul; ☐ **d)**vermelho; ☐ **e)** amarelo; ☐

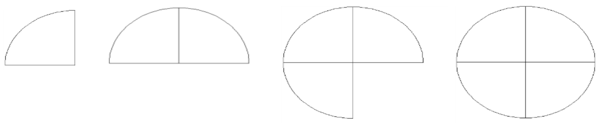
1.3 Escreve a cor da peça que representa:

metade do círculo	a sexta parte do círculo	a terça parte do círculo	a oitava parte do círculo	a quarta parte do círculo

1.4 Escreve simbolicamente a relação entre cada peça e o círculo. Observa o exemplo:

 representa $\frac{1}{2}$ 

1.5. Utilizando as peças da mesma cor, constrói todas as configurações que se podem formar num círculo. Por exemplo:



Escreve a fração correspondente a cada uma das figuras que construíste.

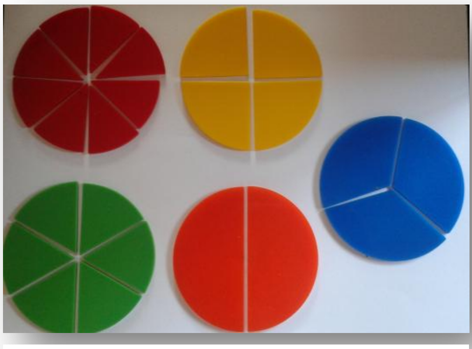


Figura 11: Círculos Fracionários

Após a resolução das propostas os alunos apresentarão as suas descobertas ao grupo turma e procedendo-se a um registo síntese no caderno diário.

No momento do registo cada aluno receberá um conjunto de setores circulares correspondente a várias partes da unidade, os quais serão colados no caderno diário e efetuada a sua legenda (ver Apêndice 4).

3.6.2. Tarefa 2: Na cozinha com frações

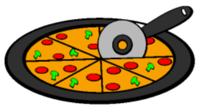
Esta tarefa (ver Figura 12 e 13) será dividida em dois momentos de exploração. A exploração centrará num contexto de reconstrução da unidade a partir de diferentes partes fracionárias.

Em ambas as explorações os alunos irão utilizar os círculos fracionários para sua realização.

A Mariana quer construir um modelo de piza com os círculos fracionários.

Ajuda a Mariana a construir esse modelo de piza de forma a utilizar apenas duas cores do círculo fracionário.

Será que consegues ajudá-la? (Desenha esse modelo)



Vais agora apresentar esse modelo à tua turma. Na tua apresentação não poderás mostrar o modelo, só podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como a quantidade de setores que o compõe.

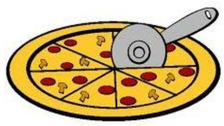
Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

Figura 12: Primeiro momento da exploração

A Mariana quer utilizar agora 3 cores do círculo fracionário para construir outro modelo de piza.

Como poderá fazê-lo?

Será que consegues ajudá-la? (Desenha esse modelo)



Desta vez os teus colegas vão fazer questões sobre o teu modelo. Serás que estás preparado para responderes?

Elabora algumas questões que gostarias de fazer ao teu colega sobre o modelo dele. O teu objetivo é reproduzi-lo. **Será que vais descobrir?**

Não poderás questionar sobre o número de setores circulares e respetivas cores.

Figura 13: Segundo momento da exploração

Os objetivos desta tarefa são:

(i) Compreender frações com os significados parte-todo;

(ii) Reconstruir a unidade a partir das suas partes;

(iii) Comparar números representados na forma de fração;

(iv) Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulários próprios.

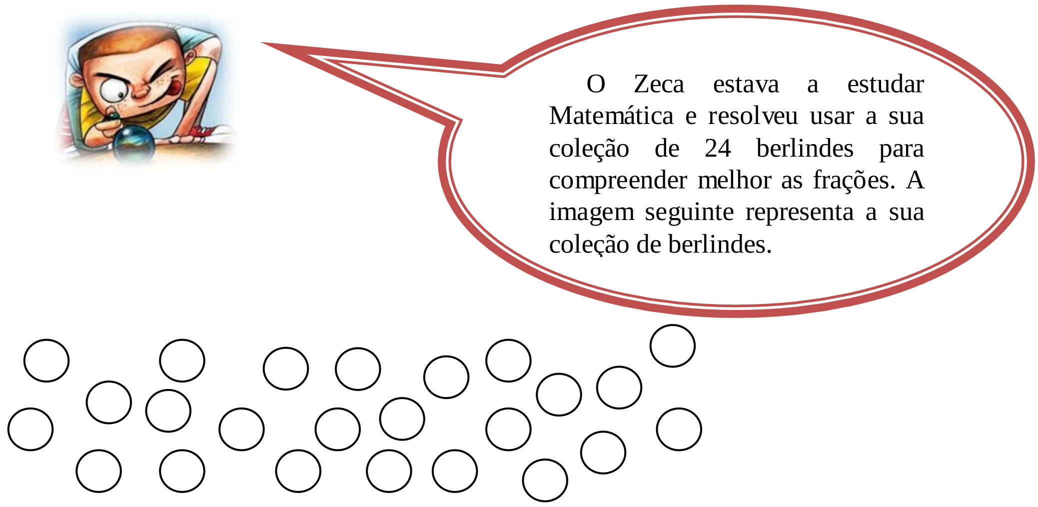
No final de cada momento, o porta-voz de cada grupo apresentará as suas resoluções.

Nesta apresentação pretende-se gerar uma dinâmica de grupo que facilite a comunicação matemática entre os alunos. Durante a apresentação à grande turma, o porta-voz do grupo lê a descrição e os outros tentam reproduzir o modelo correto.

As conclusões finais serão registadas no caderno diário dos alunos.

3.6.3. Tarefa 3: Os berlindes do Zeca

Depois de trabalharem com o significado parte-todo contínuo, surge esta tarefa (ver Figura 14) que permite aos alunos trabalharem com o significado parte-todo discreto. Aqui os alunos partem de uma situação de divisão da unidade (24 berlindes) em partes iguais.



1 – **Pinta de azul**, na figura anterior, metade dos berlindes. Quantos berlindes deves pintar?

2- Dos berlindes não pintados, pinta de vermelho metade da metade. Quantos berlindes devem pintar?

3- Dos berlindes não pintados, pinta de amarelo a terça parte. Quantos berlindes deves pintar?

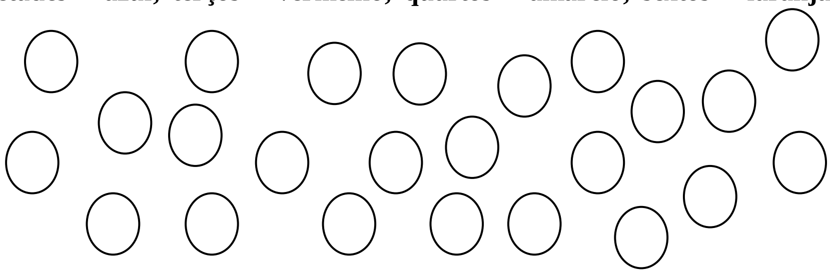
4- Que frações da coleção correspondem os berlindes **azuis, vermelhos e amarelos?**

Figura 14: Tarefa “Os berlindes do Zeca”

Esta tarefa tem a questão 5 (ver Figura 15), que coloca os alunos perante o significado de operador multiplicativo, na medida que têm de determinar a quantidade de berlindes. Assim, os alunos podem verificar que existem frações, que embora tenham termos diferentes, representam a mesma quantidade de berlindes. Desta forma os alunos desenvolvem o conceito de fração equivalente.

Ajuda o Zeca a completar o quadro da sua coleção, agora com 36 berlindes, **colocando em cada espaço o número de berlindes** correspondente a cada uma das frações. Utiliza o esquema para dividir a coleção de acordo com as frações/cores da legenda.

Legenda: metades – azul; terços – vermelho; quartos – amarelo; sextos – laranja; nonos – verde.



Um meio	Dois meios							
Um terço	Dois terços	Três terços						
Um quarto	Dois quartos	Três quartos	Quatro quartos					
Um sexto	Dois sextos	Três sextos	Quatro sextos	Cinco sextos	Seis sextos			
Um nono	Dois nonos	Três nonos	Quatro nonos	Cinco nonos	Seis nonos	Sete nonos	Oito nonos	Nove nonos

Figura 15: Item 5 da Tarefa "Os berlindes do Zeca"

Como suporte à realização desta tarefa cada grupo receberá um conjunto de 24 contas de vidro (material estruturado), que poderão manipular para a concretização da tarefa (ver Figura 16).

As conclusões finais serão registadas no caderno diário.

Figura 16: Contas de vidro

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresentar-se-á a descrição das tarefas desenvolvidas pelos alunos e a análise do pó-teste como forma de analisar as aprendizagens ocorridas.

4.1. AS TAREFAS

Neste subcapítulo estão descritos e analisados os momentos de desenvolvimento das tarefas com a turma, bem como os episódios de discussão coletiva e as principais conclusões.

4.1.1. Tarefa 1: Números Racionais Não Negativos

A realização desta tarefa revelou-se um momento de aprendizagem muito rico, uma vez que surgiram ideias-chaves sobre os números racionais que estariam um bocadinho esquecidos. Ideias-chave como por exemplo: (i) reconhecer a fração como uma divisão, (ii) o significado de numerador e denominador, (iii) a leitura de frações e (iv) a representação pictórica de uma fração.

Para iniciar a tarefa foram distribuídos os círculos fracionários a cada grupo e questionamos aos alunos no grupo-turma sobre quanto poderia valer esse círculo, (ver Figura 17).

Figura 17: Círculo branco

Aluno 1: Um!

Aluno 2: Unidade!

Aluno 3: 100.

Professora: Cem?!

Aluno 3: Por cento.

Professora: 100%? (escreve no quadro por forma a todos visualizarem)

Aluno 3: Sim, professora.

Os alunos revelaram compreender que o círculo pode tomar valores diferentes, no entanto referiram apenas a unidade (1) e 100%. Contudo, como sabemos, podemos atribuir ao círculo qualquer valor mas este tipo de propostas são menos frequentes em contexto de sala de aula o que pode justificar a ausências de respostas neste sentido.

De seguida os grupos realizaram a tarefa de forma autónoma (ver Figura 18).

Figura 18: Grupo de trabalho

Durante a sua execução, mobilizaram conhecimentos adquiridos no 2.º ano sobre os números racionais não negativos.

Assim, foi natural a utilização das representações como: 1/2; 1/3; 1/4; 1/6 e 1/8.

No pré-teste, no item 3, os alunos demonstraram não terem dificuldades em identificar alguma destas frações num modelo de piza. Os círculos como assemelham-se à piza facilmente os identificaram ou seja, a forma pode ter facilitado as respostas à proposta. Por este motivo os círculos fracionários são importantes no estudo das frações no seu sentido contínuo.

Os alunos não revelaram nenhuma dificuldade na resolução dos itens 1.2), 1.3) e 1.4) (ver Figura 19).

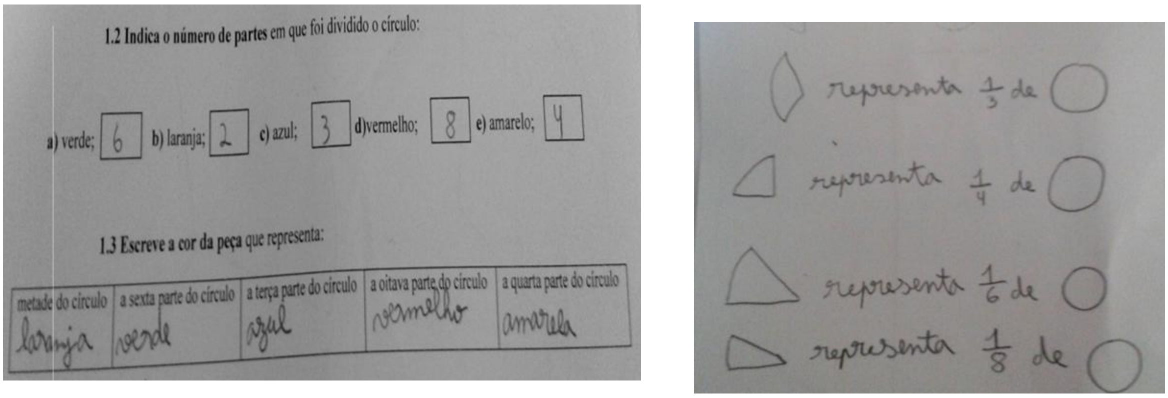


Figura 19: Respostas do grupo da Leonor (grupo D)

A manipulação dos círculos fracionários ajudou na perceção que, por exemplo, seis setores verdes completam a unidade.

Foram muitos dos alunos que no item 1.4 utilizaram as peças do círculo fracionário para rodear a fração correspondente (ver Figura 20). Ao fazê-lo permitiu comparar frações com o mesmo numerador e construir a generalização de que sendo o numerador sempre um (neste caso), quanto maior é o denominador menor é o tamanho do setor circular e o seu valor também é menor.

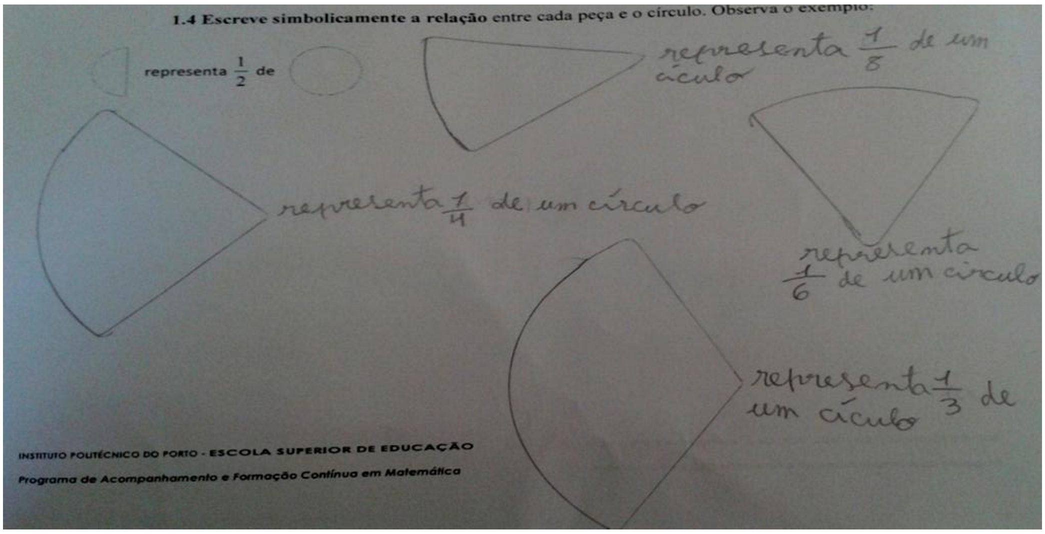


Figura 20: Respostas ao item 1.4 pelo Grupo A

Já não foi tão natural construir todas as configurações de acordo com o exemplo apresentado que se podem formar num círculo, com peças da mesma cor. O grupo B revelou dificuldade na representação de fração (noção de numerador e denominador) (ver Figura 21). Repara-se que, sendo o círculo a unidade, partes inferiores a um círculo são, para o grupo do Miguel, maiores do que a própria unidade o que revela uma grande inconsistência na compreensão de frações.

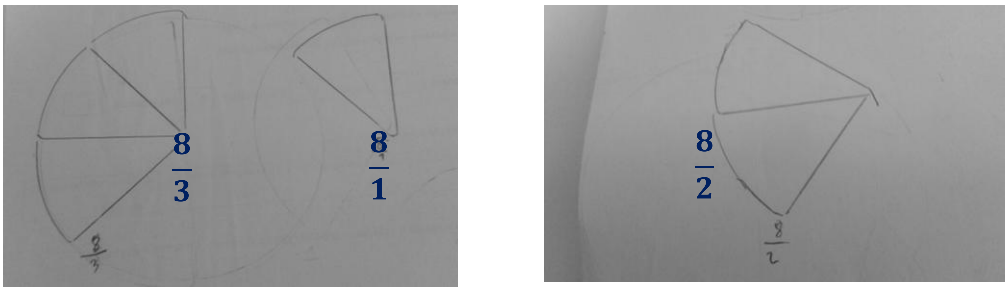


Figura 21: Respostas do grupo do Miguel (grupo B)

Os alunos identificam o numerador e o denominador mas não compreendem o significado de cada um, logo não percebem o conceito de fração.

Em discussão em grande grupo deu-se relevo à compreensão e representação de numeral racional não negativo na forma de fração.

Perante a resolução do grupo do Miguel ao item 1.4), ilustrado pela Figura 21, a professora estabeleceu o seguinte diálogo:

> Professora: O grupo do Miguel construiu as seguintes representações e designou-as por 8/2; 8/3; 8/1 e o grupo da Inês designou por 2/8; 3/8 e 1/8. Será que as duas representações estão corretas considerando o nosso círculo como unidade?
>
> Aluno do grupo da Mariana: Não professora, está certo o da Inês.
>
> Professora: Mas porquê?
>
> Aluno do grupo da Inês: Porque o disco está dividido em 8. O 8 tem que estar em baixo.
>
> Professora: Então o que representa cada setor do círculo? (Mostra à turma um setor circular)
>
> Aluno do grupo do André: Uma parte.
>
> Aluno do grupo da Inês: O de baixo é o denominador.

Foi através deste tipo de diálogo que o grupo turma compreendeu que a fração traduz uma relação entre parte-todo, em que o todo é o círculo e as partes os setores circulares.

Permitiu ainda concluir que à medida que o número de setores circulares aumentam (denominador), uma vez que a unidade é a mesma, a parte do setor que se obtém é cada vez menor. A resposta do grupo da Mariana ao item 1.4 representa bem esta ideia (ver Figura 22).

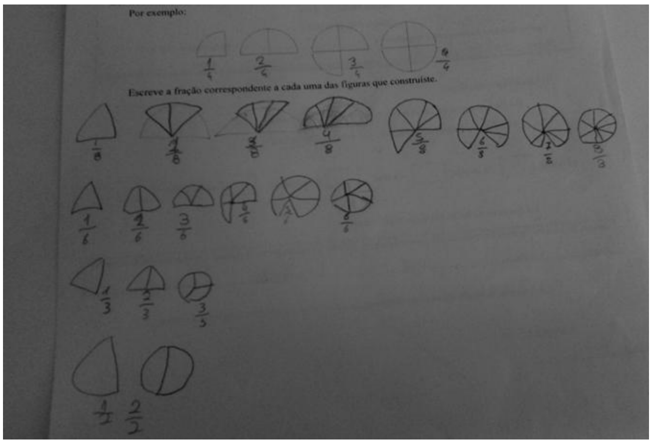
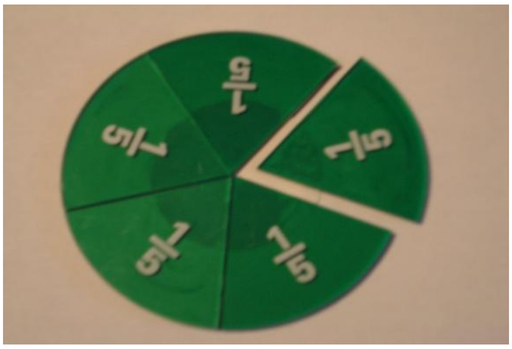


Figura 22: Resposta do grupo da Mariana ao item 1.4

No final da tarefa os alunos receberam um conjunto de círculos fracionários em papel, que colaram no caderno diário e em jeito de síntese legendaram. Como suporte a este registo, os alunos visualizavam um ppt de resumo (ver Apêndice 7 e 8), (ver Figura 23 e 24).

Figura 23: Registo no caderno diário



A unidade está dividida em 5 partes. Cada parte representa um quinto, ou seja a quinta parte da unidade.

Figura 24: Exemplo de um registo no caderno diário

4.1.2. Tarefa 2: Na cozinha com frações

Esta tarefa está dividida em dois momentos distintos. No primeiro momento é pedido aos alunos que construam a unidade com apenas duas cores distintas do círculo fracionário. A resposta é pedida na forma de representação pictórica, acompanhada por uma pequena descrição do modelo construído. Depois da distribuição da tarefa "Na cozinha com frações I" e dos círculos fracionários pelos grupos, optamos por não dar indicações, nem fazer a leitura coletiva do enunciado. Contudo, alguns alunos revelaram dificuldades de compreensão, achando que era muito difícil o que era pedido. Assim, foi necessário uma breve explicação. Nesta proposta consideramos mais uma vez o círculo como a unidade.

Aluno do grupo D: Professora não estamos a perceber o que é para fazer.

Professora: Constrói uma unidade a partir dos setores circulares, mas só podes utilizar duas cores. Por exemplo, vocês têm aqui metade do círculo (setor laranja), como posso completar o círculo? Só podem utilizar mais uma cor.

Aluno do grupo B: Podemos colocar mais do que uma peça?

Professora: Sim podem.

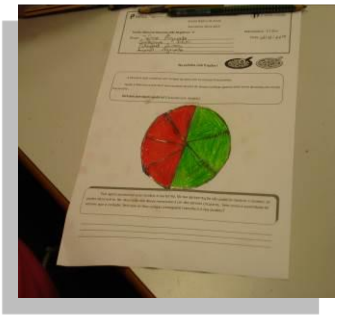
Aluno do grupo A: Ah! Então isto é fácil.

Aluno do grupo B: É construir a unidade.

Professora: Não se esqueçam de descrever o vosso modelo, aplicando as regras indicadas no enunciado da tarefa.

Após este esclarecimento, todos os alunos da turma conseguiram realizar com sucesso a construção dos diferentes modelos de piza (ver Figura 25 e 26). O modelo do grupo D permitiu estabelecer a equivalência entre 3/6 e 4/8, assim como visualizar que estas duas frações representam a metade.

O modelo do grupo B levou-nos a observar que metade do círculo (setor laranja) é equivalente a dois setores de 1/4, ou seja a 2/4 (introdução da adição com denominadores iguais).



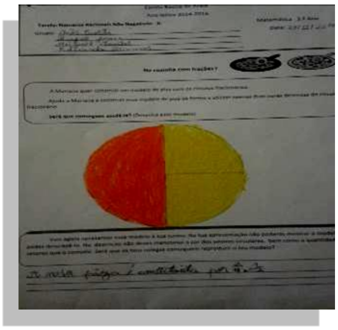
Grupo D

Grupo E

Grupo A

Figura 25: Resolução dos diferentes grupos

Grupo C

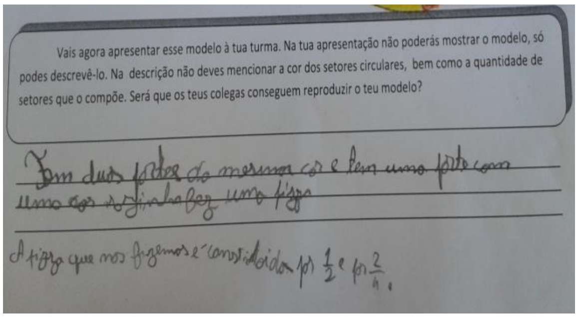


Grupo B

Figura 26: Resolução dos diferentes grupos

Apesar das dificuldades de leitura e interpretação do enunciado, os grupos revelaram facilidade em utilizar a linguagem matemática ao descrever o seu modelo, (ver Figura 27 à Figura 31). Contudo, o grupo B na sua descrição não respeitou as regras do enunciado, revelando que a piza era composta por dois setores da mesma cor e outro setor com uma única cor, identificando o respetivo modelo de piza (ver Figura 27).

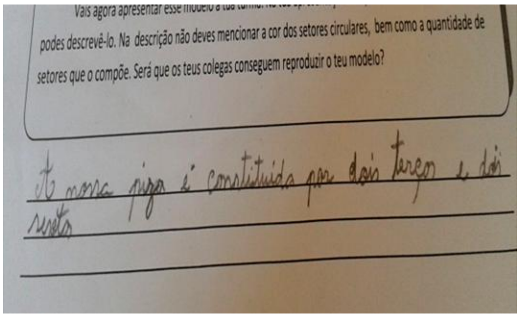
Os restantes grupos (A, C, D e E) obedeceram as regras e na sua descrição escreveram as frações que componham o seu modelo, não revelando a cor dos setores. Limitando-se assim, a fazer uma leitura da composição de cada piza em termos fracionários.



Vais agora apresentar esse modelo à tua turma. Na tua apresentação não poderás mostrar o modelo, só podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como a quantidade de setores que o compõe. Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

A pizza que nós fizemos é constituída por $\frac{1}{2}$ e por $\frac{2}{4}$.

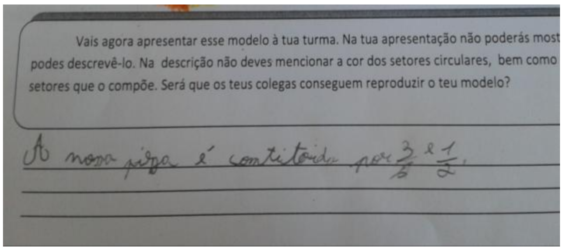
Figura 27 : Resposta do grupo B



podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como a quantidade de setores que o compõe. Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

A nossa piza é constituída por dois terços e dois sextos

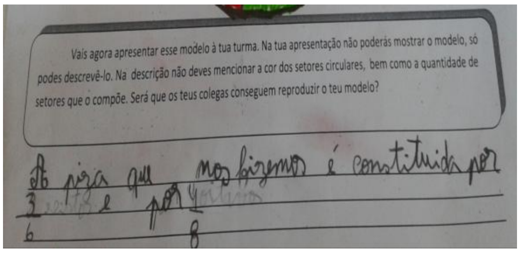
Figura 28: Resposta do grupo E



Vais agora apresentar esse modelo à tua turma. Na tua apresentação não poderás most
podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como
setores que o compõe. Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

A nossa piza é contituida por $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$.

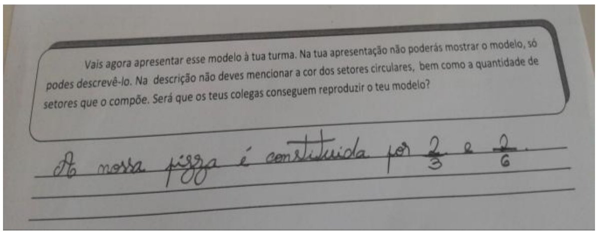
Figura 29: Resposta do grupo C



Vais agora apresentar esse modelo à tua turma. Na tua apresentação não poderás mostrar o modelo, só podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como a quantidade de setores que o compõe. Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

A piza que nós fizemos é constituída por $\frac{3}{6}$ e por $\frac{4}{8}$

Figura 30: Resposta do grupo D



Vais agora apresentar esse modelo à tua turma. Na tua apresentação não poderás mostrar o modelo, só podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como a quantidade de setores que o compõe. Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

A nossa pizza é constituida por $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{6}$.

Figura 31. Resposta do grupo A

Na discussão coletiva verificou-se que os alunos são capazes de adicionar frações com o mesmo denominador.

Aluno do grupo D: A piza que nós fizemos é constituída por 3/6 e por 4/8.
Aluno do grupo A: Professora posso ir ao quadro, eu já sei.
Professora: Sim podes.
Professora: O que vos parece? Está correto?
Aluno do grupo E: A piza está professora, mas não é 3/8.
Professora: Não?! Porquê?
Aluno do grupo E: Porque o verde está dividido em seis partes.

Professora: Pois é o círculo verde está dividido em seis partes. Qual é a parte verde representada no quadro? (pergunta dirigida ao aluno que se encontrava no quadro)

Aluno do grupo A: 3/6.

Professora: Pois é, 3/6.

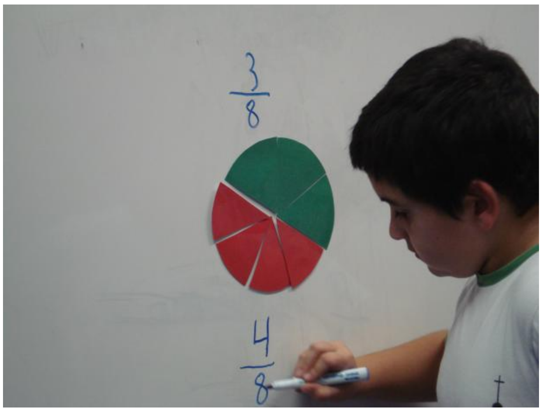


Figura 32: Erro cometido pelo o aluno do grupo A

Permitiu ainda, explicar que aquilo que haviam descoberto se chama frações equivalentes e que 1/2 é a forma mais simples para representar a metade (ver Figura 32).

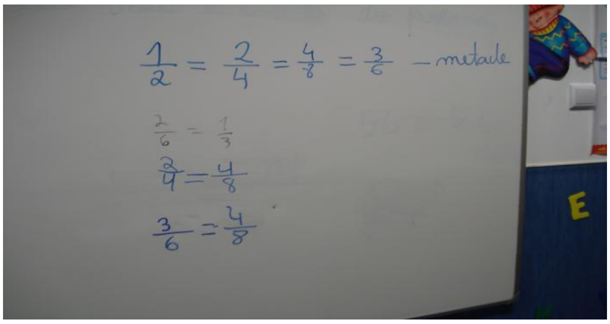


Figura 33: Frações equivalentes a 1/2

Professora: Será que 3/6 é igual a 4/8?

Aluna do grupo B: Não, não é.

Professora: Não?! Vem ao quadro, vamos verificar se é ou não. Tira os setores vermelhos e sobrepõe nos setores verdes. (ver Figura 34)

Aluna do grupo B: É, é professora. É igual.

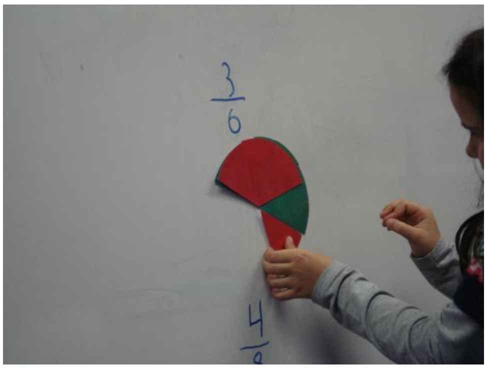


Figura 34: A aluna sobrepõe os setores circulares

Professora: Só essa conclusão que podemos tirar? Vejam bem.

Aluno do grupo C: É metade.

Professora: Metade?

Aluno do grupo C: Sim, 4/8 é metade do círculo.

Professora: E 3/6?

Aluno do grupo A: Também é.

Professora: Muito bem, é metade. 3/6 é igual a 4/8 e também é igual a 1/2.

Concluíram que, todas as frações cujo numerador é metade do denominador, representam a metade e são equivalentes (ver Figura 35).

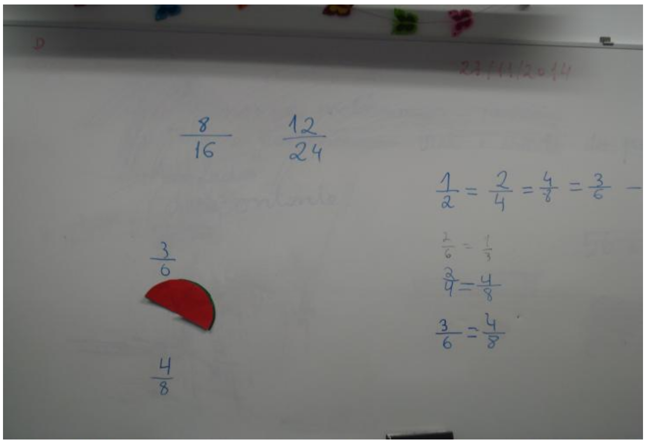


Figura 35: Conclusões da tarefa II

Perante a recetividade dos alunos à tarefa propiciámos um outro momento de descoberta e aprendizagem.

Professora: Será que podemos fazer outros modelos diferentes?

Aluno do grupo D: Sim, podemos professora. Posso ir professora?

Professora: Diz-nos como é o teu modelo de piza?

Aluno do grupo D: É constituído por 2/4 e 4/8.

Professora: Vem ao quadro representá-lo (ver Figura 36).

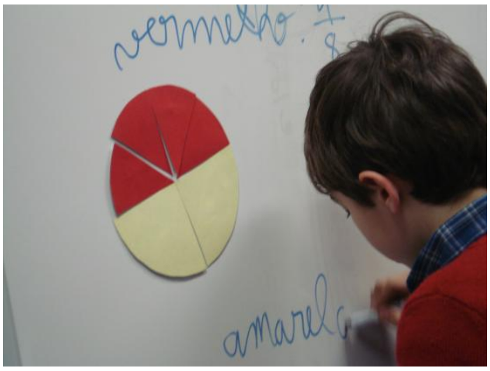


Figura 36: Modelo representado pelo o aluno do grupo D

Desta forma a turma conseguiu descobrir as oito formas diferentes de piza.

No segundo momento da tarefa, "Na cozinha com frações II", distribuímos aos alunos as duas questões que a compõe. Foi pedido que utilizassem 3 cores distintas do círculo fracionário para construir um modelo de piza, mas desta vez serão os colegas a questionar o grupo e desta forma reproduzir o modelo.

Neste momento da tarefa os alunos mostraram-se mais à vontade em representar pictoricamente o seu modelo.

De um modo geral, a turma conseguiu obter todas as representações, no entanto mostraram dificuldades em fazer questões a fim de descobrir o modelo do outro grupo.

Professora: Tens aqui os setores circulares e à medida que vais descobrindo os setores que compõe o modelo, vais colando no quadro. Vamos então à primeira questão.

Aluna do grupo A: O modelo tem 1/8?

Porta-voz do grupo D: Tem.

Aluna do grupo a: E 1/3?

Porta voz do grupo D: Não.

Aluna do grupo A: Quantos.....quantos....posso trazer a folha?

Professora: Claro, podes.

Aluna do grupo A: Quantas partes foi dividida?
Porta voz do grupo D: Seis.
Professora: Já descobriste um setor, vamos dar oportunidade de outro colega descobrir os próximos setores (ver Figura 37).

Figura 37: Setor descoberto - 1/8

Professora: Vem cá ao quadro. Faz a tua questão ao porta-voz do grupo.
Aluno do grupo E: A vossa piza tem 3/3?
Aluno do grupo C: Não pode...é a unidade. Temos no quadro já 1/8.
Professora: Muito bem. Pois já temos 1/8. Retifica a tua questão.
Aluno do grupo E: A vossa piza tem 2/3?
Porta-voz do grupo D: Não.
Aluno do grupo B: Não tem nada...
Aluno do grupo E: Ela tem 4/2?
Professora: 4/2?!!!! Podemos ter meninos?
Aluno do grupo C: Se fosse 4/2 eram duas pizas. Metade mais metade, dá uma e metade mais metade dá outra.
Professora: Sim. Vem ao quadro representar. Consegues? (ver Figura 38)
Aluno do grupo C: Sim.

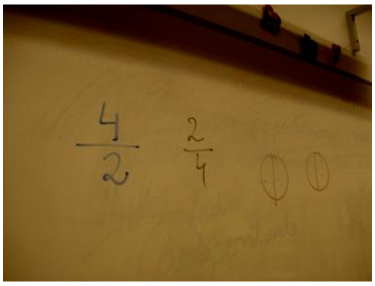


Figura 38: Representação de 4/2 pelo aluno

Com a explicação do aluno, a turma percebeu que 4/2 é diferente de 2/4 (ver Figura 39). O aluno desenha dois círculos (pizas) e divide em duas partes. E chega à conclusão que tem quatro metades de piza.

De seguida desenha um círculo e divide em quatro partes e diz que cada parte é 1/4 de piza.

Professora: Está difícil encontrar o modelo desta piza. Quem irá descobrir?!!

Aluno do grupo C: A vossa piza tem 3/6?

Porta-voz do grupo D: Sim.

Aluno do grupo E: Já sei...que fácil...eu sei...

Aluno do grupo C: Também tem 1/4?

Porta-voz do grupo D: Tem.

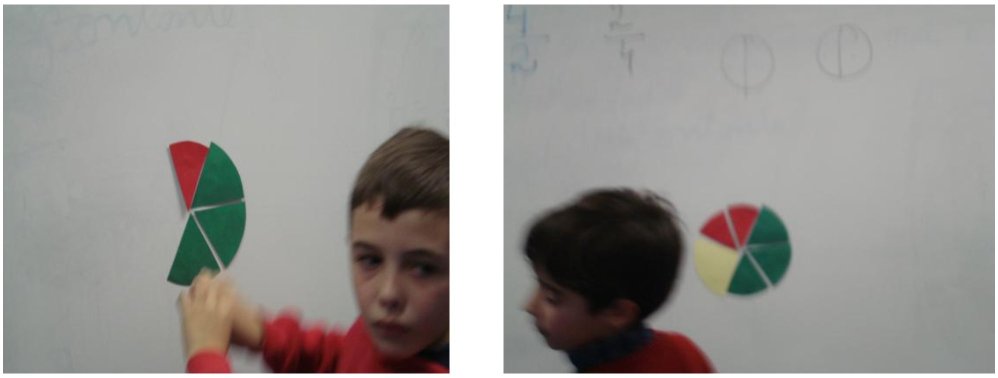


Figura 39: Resolução do modelo de piza

Seguindo esta metodologia foi possível descobrir os quatro modelos de piza com três cores (ver Figura 40).

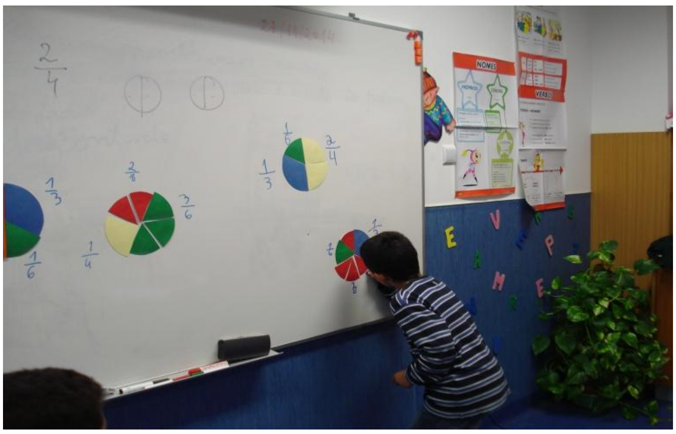


Figura 40: Os quatro modelos de piza com 3 cores

É colocado aos alunos um novo desafio, tendo como objetivo permitir estabelecer relações de equivalência entre frações.

A professora constrói um modelo de piza visualizado por todos e de seguida retira uma parte da piza. Assim é proposto aos alunos completar a piza com outros setores.

Professora: Reparem no meu modelo de piza. Como é constituída a minha piza?

Aluno do grupo E: Por 1/2 +1/4+2/8.

Professora: Sim ...isso mesmo. Vou retirar um meio (ver Figura 41).

Figura 41: Desafio apresentado à turma

Aluno do grupo A: Professora eu já sei...posso?

Professora: Sim. Vem ao quadro. Diz-nos como vais completá-lo?

Aluno do grupo A: Vou meter um terço mais um sexto.

O aluno revelou compreender a equivalência entre um meio e um terço mais um sexto. Apesar de não saber determinar a soma de duas frações com denominadores diferentes, consegue estabelecer a relação entre frações, possível pela utilização do material manipulável (ver Figura 42).

Figura 42: O aluno estabelece a relação entre 1/2=1/3+1/6

Professora: Poderemos completar de outra forma?

Aluno do grupo D: Professora eu utilizei um amarelo, um verde e um vermelho e deu.

Professora: Traduz as cores dos setores por frações. O setor amarelo representa que fração?

Aluno do grupo D: Um quarto. O verde um sexto e o vermelho um oitavo.

Professora. Muito bem. Vamos completar no quadro (ver Figura 43).

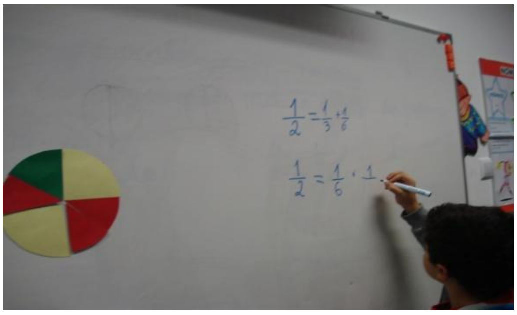


Figura 43: Novo modelo

Durante a realização da tarefa (momento I e momento II) os alunos utilizaram estratégias de visualização, reforçadas pela utilização de material manipulável.

As principais dificuldades apresentadas foram: (i) compreender o enunciado e (ii) usar uma linguagem matemática para representar os seus modelos ou elaborar questões para descobrir os modelos dos outros grupos.

Contudo mostraram alguma destreza na construção da unidade no significado parte-todo contínuo, bem como estabelecer uma relação de equivalência com a fração um meio. Esta relação de equivalência só foi possível com a utilização do material manipulável, pois sem ele dificilmente o conseguiriam.

4.1.3. Tarefa 3: Os berlindes do Zeca

Nesta tarefa os alunos utilizaram as contas de vidro para trabalharem num contexto que envolve grandezas discretas nos significados parte-todo e operador multiplicativo.

A informação da tarefa é acompanhada por uma representação pictórica, à qual os alunos responderam às quatro primeiras questões que a compõe.

Na questão número um - "pinta de azul metade dos berlindes", todos os grupos responderam corretamente que metade de 24 eram 12 berlindes. Compreenderam que o todo correspondia a 24 berlindes e metade são 12, pois podem-se constituir dois subconjuntos de 12.

As dúvidas surgem quando na questão dois solicita aos alunos quantos berlindes devem pintar para representar metade da metade dos berlindes não pintados. As dificuldades estavam em saber quantos berlindes corresponde agora o todo e quanto seria metade da metade.

Os grupos A, B, C, e D responderam 6 berlindes pois continuaram a consideraram o todo 24 berlindes (ver Figura 44).

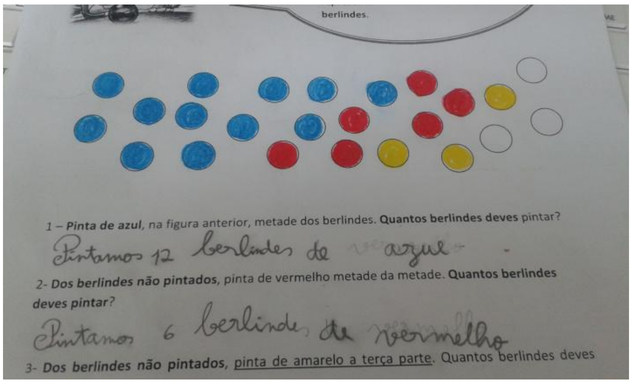


Figura 44: Resposta do grupo D

No item três "pinta a terça parte dos berlindes não pintados", ou seja pinta a terça parte de 9, pois o todo agora é nove, os grupos A, B e D responderam corretamente 3 berlindes (ver Figura 45).

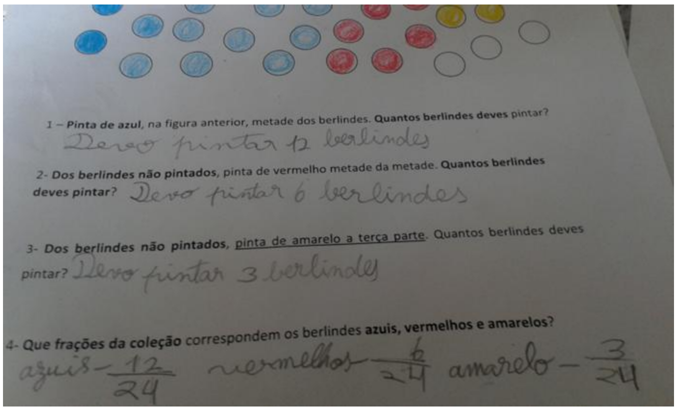


Figura 45: Resposta do grupo A

Mesmo considerando o todo 24, os alunos apresentaram dificuldades em utilizar a fração como operador multiplicativo, pois a resposta 3 berlindes indicia que a terça parte de um todo é três, qualquer que seja o todo. Eta conceção errada já foi evidenciada no pré-teste.

O grupo C respondeu 6 berlindes, considerou 24 como um todo mas também apresentou dificuldades em determinar a terça parte. Talvez esta resposta se justifica pelo facto no desenho só ter 6 berlindes para pintar (ver figura 46).

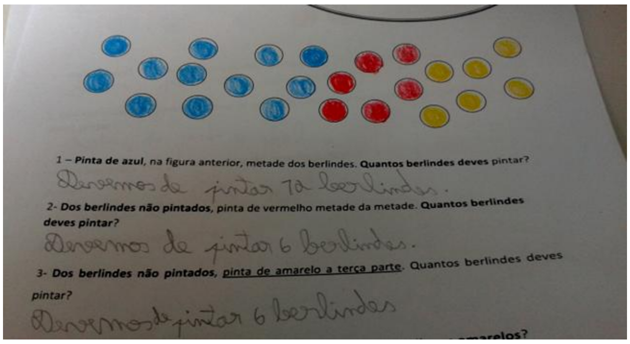


Figura 46: Resposta do grupo C

Na fase de apresentação das respostas dos diferentes grupos estabeleceu-se um diálogo professor- grupo/turma por forma a esclarecer e compreender a fração como um operador.

Só um grupo respondeu acertadamente às quatro primeiras questões, o grupo E (ver Figura 47).

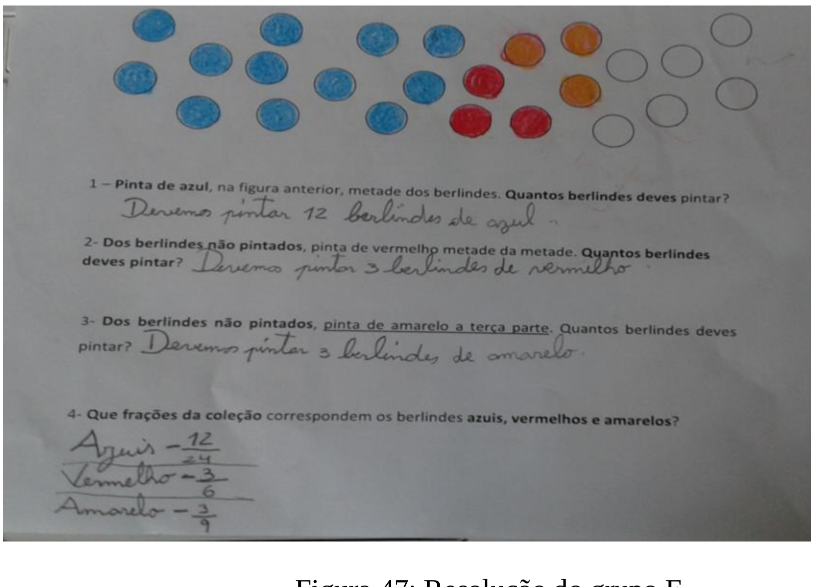


Figura 47: Resolução do grupo E

Professor: Reparem que há um grupo que se destaca, o grupo E, pelas resposta que dá, pois são diferentes. Vamos ver quem tem razão. Comecemos pela pergunta 1.

Pede-nos para pintar metade de azul, relembrem-me quanto é o todo?

Aluno do grupo A: São 24 berlindes.

Professora: Têm à vossa frente os vossos berlindes apresentam-me metade dos berlindes (ver Figura 48).

Figura 48: Dois subconjuntos de 12 berlindes-grupo C

Professora: Muito bem. Estados todos de acordo, metade de 24 é 12.

Vamos para a questão dois. Agora temos que pintar metade da metade, mas dos não pintados. Voltemos aos vossos berlindes, qual será agora o todo?

Aluno do grupo D: 24 professora.

Professora: Serão também 24 berlindes, mas eu refiro-me aos não pintados!

Aluno: Não, não professora...são 12 berlindes.

Professora: Pois são. Vamos guardar 12 dos nossos berlindes no saquinho, ficando os outros 12, os que representam os não pintados. Apresentem-me agora metade da metade.

Aluno do grupo B: Como professora? Não sabemos fazer.

Aluno do grupo E: Nós sabemos professora.

Professora: Vem o porta-voz do grupo E explicar à turma como resolveu esta questão.

Porta-voz do grupo E: Primeiro dividimos metade dos nossos berlindes.

Professora: Como o fizeram?

Porta-voz do grupo E: 12 a dividir por 2 ...são 6 berlindes e mais 6 (ver Figura 49).

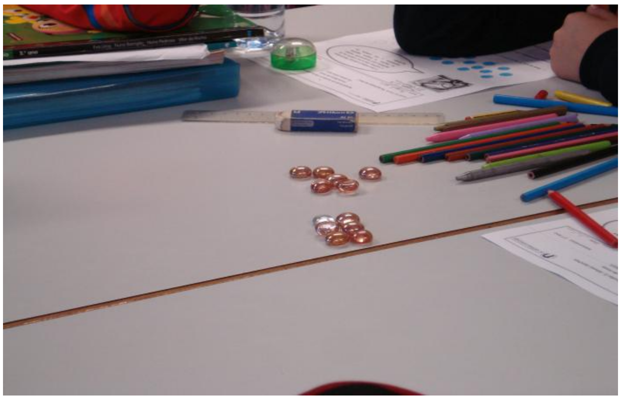


Figura 49: Dois subconjuntos de 6 berlindes

Professora: Sim temos uma parte resolvida, mas o exercício fala a metade da metade. O que falta ainda determinar?

Porta voz do grupo E: Pegamos nos seis berlindes e fizemos dois montinhos com 3 berlindes. E pintamos 3 berlindes (ver Figura 50).

Figura 50: Metade da Metade - dois subconjuntos de 3 berlindes

Após a explicação do grupo E sobre como resolveram metade da metade, o investigador orientou um diálogo a fim de generalizar que a metade da metade é a quarta parta.

Professora: Que fração representa um montinho de berlindes?

Aluno do grupo C: Um meio.

Professora. Um meio, será? Tenho quatro montinhos.

Aluno do grupo E: Não...é um quarto. Porte a unidade está agora dividida em quatro.

Professora: A unidade?!!! Quanto é o meu todo?

Vários alunos: 12 berlindes.

Aluno do grupo E: 12 a dividir por 4 dá 3 berlindes. Um quarto é 3.

Professora. E dois quartos?

Aluno do grupo D: 6.

Professora: E três quartos?

Vários alunos: 9 berlindes.

Aluno do grupo A: Oh professora eu tenho uma técnica.

Professora: Tens?!!! Então diz lá a tua técnica.

Aluno do grupo A: Divido 12 berlindes por 4 e dá 3. Pinto 3 berlindes de vermelho e já está.

Professora: Estás a dizer que metade da metade è igual à quarta parte?

Aluno do grupo A: É igual porque tenho 3, mais 3, mais 3 e mais 3.

Professora: O vosso colega fez uma grande descoberta: metade da metade é igual à quarta parte. Vamos registar no caderno esta descoberta.

Após o registo no caderno diário voltou-se à discussão grupo turma, agora sobre a questão 3.

Professora: E agora na questão três, são capazes de dizerem quantos berlindes não pintados correspondem um terço?

Silêncio na turma.

Professora: Não pintados. A terça parte quantos berlindes são?

Vários alunos: 9 berlindes.

Aluno do grupo B: 3 berlindes.

Professora: 3 berlindes?!! Como fizeste?

Aluno do grupo B: A 9 dividi por 3 e deu 3. 3 x 3 é nove (ver Figura 51).

Professora: Então o nove é a nossa unidade e a terça parte é 3.

Figura 51: Três subconjuntos de 3 berlindes

Professora: Muito bem. És capaz de traduzir a fração correspondente aos berlindes azuis, vermelho e amarelo? (ver Figura 52).

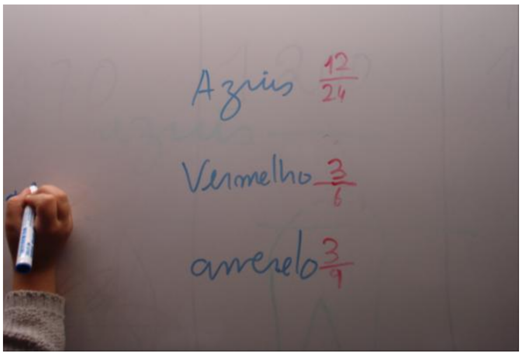


Figura 52: Resposta à questão 4

Estas três questões levaram à compreensão que uma fração é uma relação entre dois números, ou seja a quantidade que representa essa fração depende do todo considerado. Assim como, permitiu relacionar as operações multiplicação e divisão, desenvolvendo o universo multiplicativo: um meio de vinte e quatro, um quarto é metade da metade e um terço de nove.

O desenvolvimento de sentido de número está bem demarcado, sensibilizando os alunos para um novo significado de fração: 12/24 representa 12 berlindes num total de 24, 3/6 representa 3 berlindes num total de 6 e 3/9 representa 3 berlindes num total de 9. De forma não explicita a fração como razão foi focada.

No segundo momento da aula os alunos são solicitados para resolver a quinta questão da tarefa. Depois de distribuída a questão a professora explicou as suas diretrizes.

Professora: Vamos ajudar o Zeca a completar o quadro da sua coleção, agora com 36 berlindes. O seu preenchimento tem um código: metade corresponde ao azul, terça parte ao vermelho, quartos ao amarelo, os sextos a laranja e os nonos a verde.

Aluno do grupo D: Cada linha tem uma cor...

Professora. Exatamente. Podem utilizar os berlindes da vossa folha para formar os subconjuntos se assim o desejarem.

Vários alunos: É obrigatório usar professora?

Professora: Não é...só se quiserem.

Durante a sua execução os alunos não utilizaram os berlindes como material manipulativo, deixam o concreto para caminharem para o abstrato.

Os alunos mostraram um entusiasmo em descobrir a chave da tabela. Sem os berlindes para manipular o desafio aumenta e as dificuldades também.

Reparamos que nos diferentes grupos começaram por completar o último espaço de cada linha, 36 berlindes. Compreenderam que dois meios, três terços, quatro quartos, seis sextos e nove nonos representam o todo e neste caso o todo é a coleção do Zeca.

O grupo E demonstrou ter compreendido a fração como operador multiplicativo, pois resolveu corretamente a tabela e sem o auxílio do pictórico. A professora deslocou-se ao grupo para perceber que estratégia utilizou.

Professora: Já completaram a tabela?

Alunos do grupo E: Sim.

Professora: Que estratégias utilizaram para completar a tabela?

Aluno do grupo E: Primeiro completamos o último retângulo, dá sempre 36.

Professora: Sempre?!!

aluno do grupo E: Sim, porque a coleção do Zeca é 36, tem que dar no fim sempre 36.

Professora: Como completaram depois a tabela?

Aluno do grupo E: Pela tabuada.

Professora: Pela tabuada?!!! Explica melhor.

Aluno do grupo E: Os primeiros retângulos foram pela tabuada, 18 x 2 é 36, 12 x 3 é 36, 9 x 4, 6 x 6 e 4 x 9.

Professora: E os outros retângulos, como fizeram?

Aluno do grupo E: Depois somos somando. Um terço é 12, dois terços são 12 +12; um quarto é 9, dois quartos são 9 + 9, 18; um sexto é 6, dois sextos são 6+6, 12; três sextos, 6+6+6, 18...

Foi assim que fizemos professora (ver Figura 53).

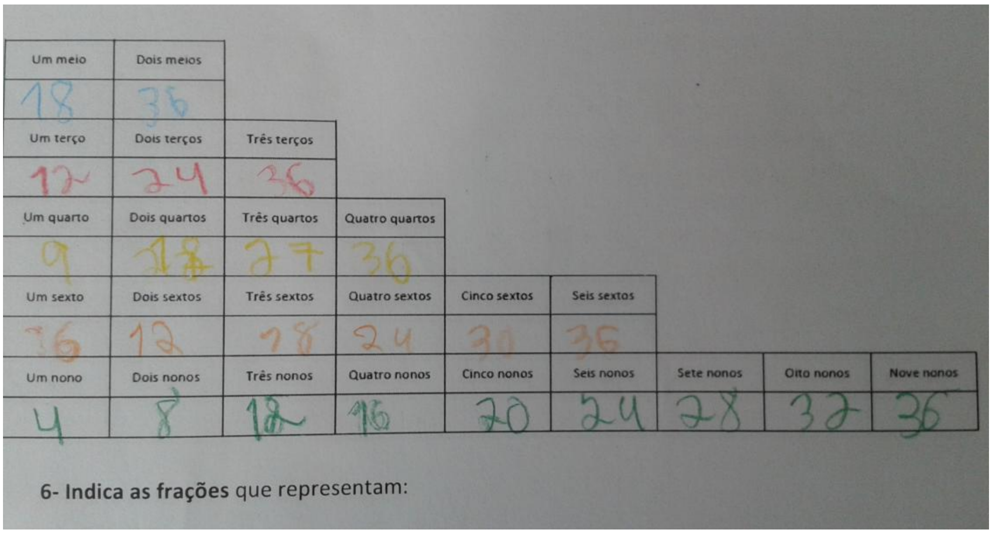


Figura 53: Resolução do grupo E

Os restantes grupos não conseguiram completar a tabela, apresentaram dificuldades em determinar os berlindes quando a unidade está dividida em quatro, seis e nove partes.

Face ao impasse que surgiu nos outros grupos a professora solicita ao porta voz do grupo E para explicar ao grupo turma como conseguiram fazer. Após sua explicação os grupos completaram a sua tabela.

Professora: Agora que o vosso colega explicou a estratégia de resolução, são capazes de responder à questão 6, "que frações representam 12berlindes",...

Aluno do grupo A: Posso ir professora?

Professora: Podes, vem cá.

Aluno do grupo A: 12 berlindes ...1/3, 2/6, 3/9.

Professora: Deixa vir outro colega.

Aluno do grupo D: 18 berlindes...1/2, 2/4, 3/6.

Aluno do grupo B: 24 berlindes...2/3, 4/6, 6/9 e 36 berlindes 2/2, 3/3, 4/4, 6/6, 9/9.

Professora: Recordam-se como se chamam estas frações que representam a mesma quantidade?

Vários alunos: Frações equivalentes.

Professora: Pois é. São frações equivalentes, 1/3 é equivalente a 2/6 e a 3/9.

Como forma de registo, os alunos copiaram para o caderno a resposta da questão seis e acrescentaram que se tratavam de frações equivalentes.

Durante a realização da tarefa os alunos revelaram pouca destreza em trabalhar a fração no seu significado parte-todo discreto. Dificultou ainda mais porque o todo era constituído por quantidades grandes (24 e 36 berlindes). Os alunos continuam muito presos ao significado de fração parte-todo contínuo.

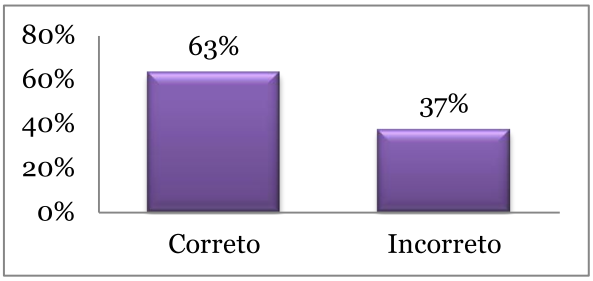
4.2. ANÁLISE DO PÓS-TESTE

Após a intervenção dos momentos M2, M3 e M4 foi aplicado o pós-teste coletivamente na sala de aula.

Em jeito de análise e em termos gerais os alunos revelaram melhor desempenho na aplicação dos significados de fração parte-todo contínuo, parte-todo discreto e a fração como operador multiplicativo. Relativamente ao significado fração como medida os alunos demonstram não terem adquirido este conceito uma vez que, nesta investigação o conceito também não foi abordado, talvez daí o fraco desempenho.

Assim no item um os alunos revelaram ter compreendido o conceito de fração parte-todo contínuo (ver Gráfico 7). No pré-teste apenas 9% tinham conseguido assinalar metade de um segmento de reta dado quando agora essa percentagem tenha subido para 63%.

Gráfico 7: Nível de desempenho no item 1

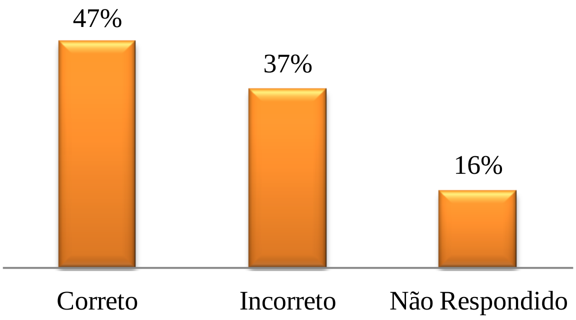


Contudo alguns continuam a demonstrar fragilidades na representação de 1/2 num segmento de reta (ver Figura 54).

Figura 54: Erro mais comum no item 1

No item dois a percentagem de sucesso também aumentou mas, mesmo assim, ficou aquém das nossas expectativas. No pré-teste acertaram 38% e no pós-teste as respostas corretas foram dadas por 47% (ver Gráfico 8).

Gráfico 8: Nível de desempenho no item 2



Das respostas incorretas, a dificuldades está, mais uma vez, na reconstrução da unidade. Alguns alunos voltaram a reproduzir n vezes, sem explicação, segmentos de reta com 3 quadrículas (ver Figura 55).

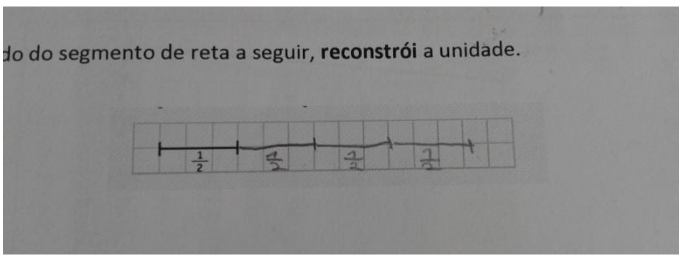


Figura 55: Erro mais comum no item 2

Relativamente ao item três todos os alunos responderam corretamente. Revelaram não terem dificuldade em identificarem a unidade, a metade e a quarta parte a partir de uma representação pictórica. Repare-se, comparativamente ao pré-teste havia alunos que não tinham sabido identificar 1/4 de piza e no pós-teste esta dificuldade foi sanada.

O item 4 melhorou significativamente (ver Quadro 15), os alunos pintam corretamente 4 hexágonos para representar um quinto de 20, mas representar uma décima de vinte, alguns alunos cometem novamente o mesmo erro e pintam dez hexágonos (ver Figura 56).

Quadro 10: Nível de desempenho no item 4

	Correto	Incorreto
Pinta 1/5	77%	23%
Pinta 1/10	68%	32%

Alguns alunos continuam a pintar erradamente 1/10 de 20 hexágonos centrando-se no denominador 10 sem relacionar com o total de hexágonos e ignorando o numerador.

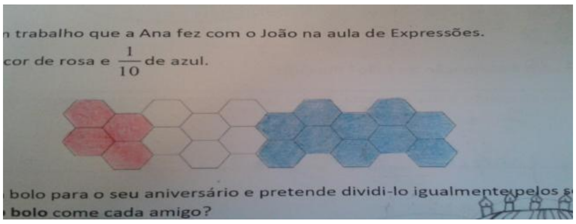
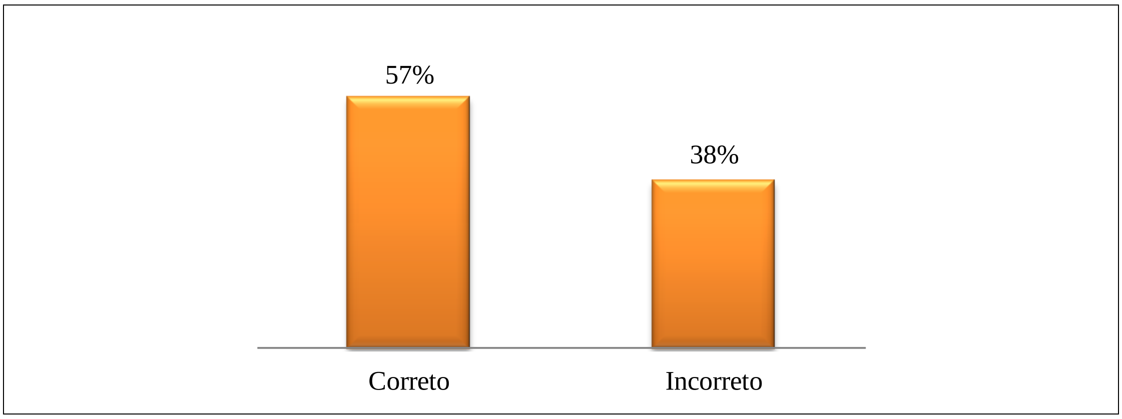


Figura 56: Erro mais comum no item 4

Os bons resultados também se fizeram sentir no item seis (ver Gráfico 9). Cinquenta e sete por cento utilizaram corretamente a fração como operador multiplicativo superando os 37% registados no pré-teste. Os erros cometidos são dos mesmo tipo do pré-teste (ver Figura 57), o que demonstra que será necessário continuar a trabalhar este conceito. Os alunos pictoricamente apresentam um raciocínio correto, mas na altura de identificar 1/4 de 20 respondem 4, porque o todo discreto está dividido em 4.

Gráfico 9: Nível de desempenho no item 6



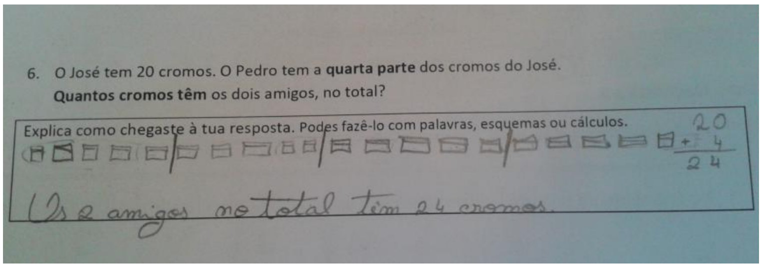
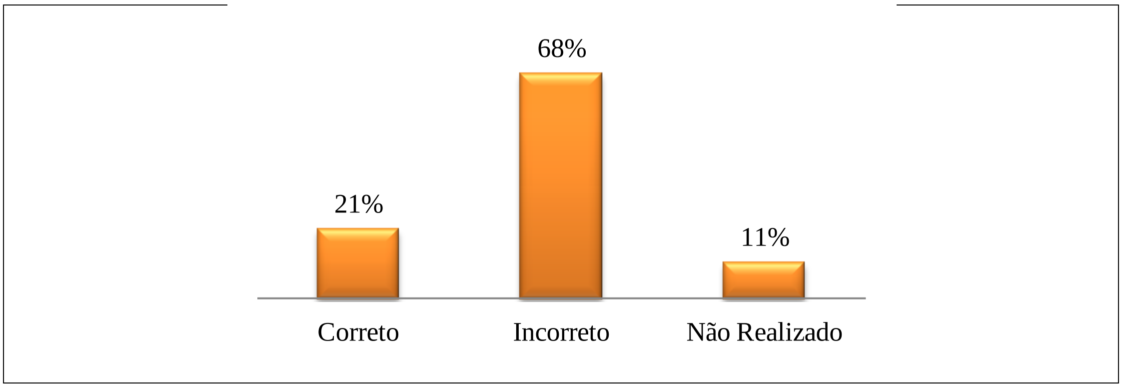


Figura 57: Erro mais comum no item 6

O item sete continua com desempenho muito fraco mas este conceito não será aqui referido porque não foi abordado na unidade de ensino nesta investigação.

A relação de equivalência proposta pelo item oito obteve algumas melhorias no seu nível de desempenho (ver Gráfico 10) mas não foram significativas, foram 14% a percentagem de respostas corretas no pré-teste para 21% no pós-teste.

Gráfico 10: Nível de desempenho no item 8



Contudo chegar à conclusão que 1/4 e 2/8 representam a mesma parte num mesmo todo nem sempre foi atingido.

Refere-se que na Figura 58 um dos grupos continua a acreditar que 1/4 é menor que 2/8.

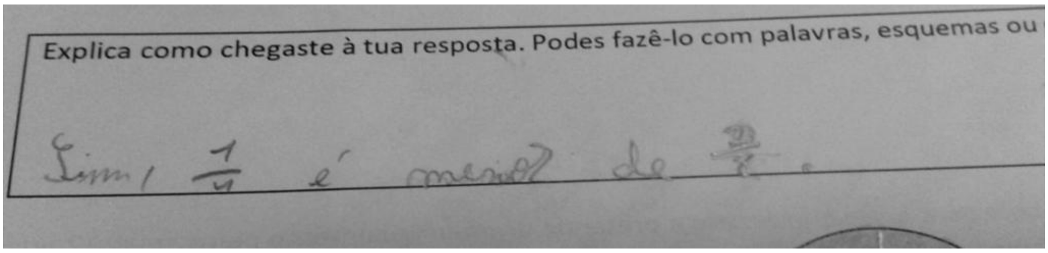
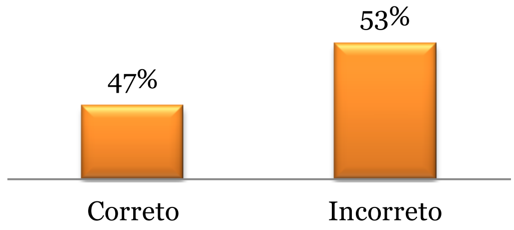


Figura 58: Erro mais comum no item 8

Relativamente ao item nove 47% dos alunos representaram corretamente 1/3 no círculo (ver Gráfico 11).

Gráfico 11: Nível de desempenho no item 9



Apesar de terem contactado com os círculos fracionários e terem visualizado a representação gráfica, alguns alunos revelaram muitas dificuldades em dividir a unidade circular em parte equivalente (ver Figura 59).

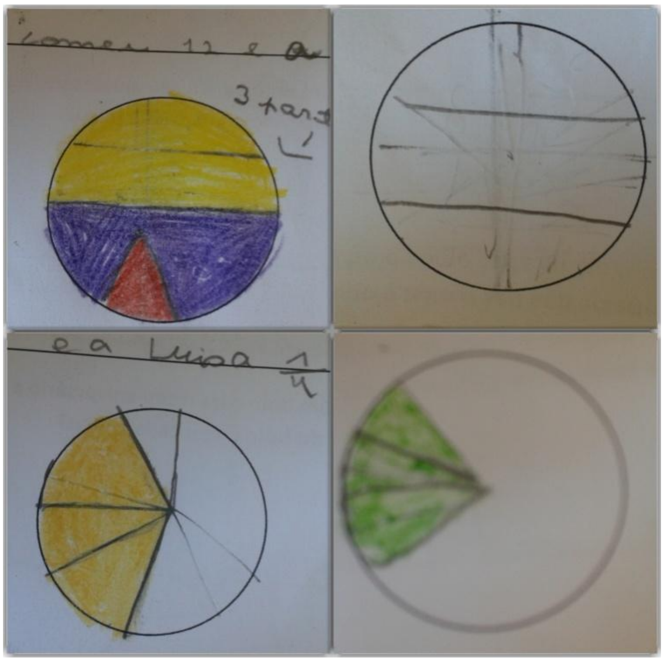


Figura 59: Erros mais frequentes

Além da análise voltada para as respostas dos alunos, foi conduzido um estudo de cada participante quanto aos dois momentos de testagem.

Considerando cada aluno individualmente, observou-se que havia aqueles que progrediam do pré-teste para o pós-teste, aqueles que mostraram uma regressão do pré-teste para o pós-teste, e outros que apresentavam uma estabilidade sem que houvesse qualquer alteração em seu desempenho nas duas ocasiões de testagem.

5. CONCLUSÃO

Para o desenvolvimento da nossa investigação tomamos como base um quadro teórico baseado nas ideias de Kieren (1988) sobre os *subconstructs* de fração, a proposta de Nunes et al. (2003) sobre os significados de frações e Santos (2005) que destaca que o conceito de número racional deverá ser explorado em várias situações e contextos diferentes.

Fizemos algumas considerações sobre a apresentação deste conteúdo nos programas de matemática desde 1990 a 2013.

Assim adotamos no nosso estudo os cinco significados de representação de fração: *parte-todo contínuo, parte-todo discreto, quociente, operador multiplicativo e medida.*

Seguimos uma metodologia qualitativa de cunho de investigação-ação.

Escolhemos investigar diferentes aspetos relacionados com o conceito de fração, daí aplicar um pré-teste a fim de diagnosticar as dificuldades, para depois servir de base para a elaboração das tarefas a serem aplicadas na investigação.

Durante a nossa intervenção abordamos os significados parte-todo contínuo e discreto, equivalência de frações, comparação e adição. A seleção pode ser justificada pelo facto de os alunos já terem abordado o tema no 2.º ano de escolaridade, ano de iniciação à construção do conceito de número racional e, por acharmos que esta exploração ser a mais apropriada para a identificação de pontos fracos relacionados com o ensino e aprendizagem.

Foi nosso objetivo propor aos alunos situações de ensino que permitissem vivenciar contextos diferentes e assim os levassem à construção do sentido de número racional.

Os autores Nunes e Bryant (1997) alertam os educadores para a grande dificuldade no ensino e aprendizagem de frações

> Com as fracções as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das fracções e ainda não a têm. Elas usam os termos fraccionários certos; falam sobre fracções coerentemente, resolvem alguns problemas fraccionários, mas diversos aspectos cruciais das fracções ainda lhes escapam. De facto, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das fracções e sem ninguém perceba (p. 191).

Esta investigação procurou dar resposta às seguintes questões: (i) Que estratégias usam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento de sentido de número racional? e (ii) Que dificuldades revelam os alunos na compreensão do conceito de fração nos seus diferentes significados? A seguir serão apresentadas as principais conclusões em função das questões em estudo.

Em todas as sessões os alunos demonstraram interesse e empenho na resolução das tarefas propostas. A motivação dos alunos contribuiu, em muito, para atingir o objetivos propostos para esta investigação.

Os alunos perante a dificuldade encontrada em desenhar todas as configurações que se podem formar um círculo (item 1.3 da tarefa 1), utilizaram como estratégia o contornar os setores circulares para resolver a questão. O facto de terem utilizado esta estratégia ajudou, aquando da discussão em grupo-turma, facilitou a comparação e ordenação de frações.

Na tarefa "Na cozinha com frações" verificou-se que alguns alunos mobilizavam conhecimentos da tarefa anterior. Segundo NCTM (1991) é muito importante estabelecer relações entre conceitos, pois funcionam como estruturas para aprendizagens futuras.

Inicialmente os alunos demonstraram dificuldades na compreensão do enunciado, para ultrapassar esta barreira foi necessário proceder à sua explicação.

Durante a resolução houve grupos que utilizaram a estratégia da tarefa um, ou seja contornavam os setores para criarem os seus modelos de piza. Como os círculos se assemelham com uma piza, talvez tenha facilitado a resolução da tarefa. Segundo Lesh (1979) é fundamental estabelecer a relação entre o mundo real e o mundo matemático. Brocardo (2010) refere que trabalhar em contextos que tenham algum significado para os alunos ajuda-os na resolução das tarefas.

Através de um processo de sobreposição dos setores circulares alguns alunos conseguiram estabelecer relações de equivalência de frações. Esta estratégia permitiu visualizarem que por exemplo 1/2 é igual a 2/4.

Na terceira tarefa demonstraram grandes dificuldades em concretizá-la, apesar de estarem em contacto com material manipulável, foi muito difícil a sua resolução. Aqui os alunos trabalharam o significado parte-todo numa grandeza discreta.

Os alunos apresentaram, ao longo da aplicação das tarefas, mais facilidade em trabalhar com unidades contínuas do que com unidades discretas. Contudo, notou-se, após algumas explicações, alguma evolução no significado parte-todo discreto.

Para uma aprendizagem significativa foi muito importante o uso de material manipulativo. A manipulação facilitou a compreensão da relação parte-todo da natureza contínua, como a discreta. Permitiu visualizarem que frações diferentes podem representar a mesma quantidade (frações equivalentes) e observar diferentes formas de representar a metade.

Os alunos com os círculos fracionários perceberam, por exemplo que 1/4+1/4 representa metade. Deste modo a adição de frações foi introduzida de uma forma natural.

O material manipulativo ajudou a conjeturar, testar e apresentar soluções aos itens propostos.

Na aplicação do pré-teste foi possível diagnosticar algumas dificuldades na compreensão do conceito de fração nos seus diferentes significados.

Um grande obstáculo na compreensão dos números racionais é quando os alunos raciocinam sobre os números fracionários como fossem números naturais. Tomamos com exemplo o item 8 do pré-teste, as frações 1/4 e 2/8 representam o mesmo número racional, mas são representações diferentes, os alunos começam por comparar os números naturais, $1 < 2\ e\ 4\ < 8, logo\ 1/4 < 2/8$, estabelecem assim uma relação errada.

Outra ideia errónea é acharem que o produto de um número natural por um número racional é sempre um número maior. No item 6 do pré-teste os alunos ficaram surpreendidos que o produto de 20 cromos por um quarto seja um número menor que vinte.

O significado parte-todo em quantidades contínuas os alunos revelaram facilidade na aquisição do conceito. As investigações de Behr, Lesh,Post e Silver (1983) e Kieren (1988) indicam que é fundamental a compreensão do significado parte-todo para adquirir aprendizagens dos números racionais mais complexas.

Este estudo confirma resultados de investigações anteriores que o significado parte-todo, nas suas vertentes contínuas e discretas, deverá ser mais trabalhado nas escolas.

A noção de fração equivalente não era dominada pelos alunos em estudo, foi proporcionado pela primeira vez situações onde este conceito foi desenvolvido. De uma forma intuitiva os alunos observaram que frações com numeradores e denominadores diferentes podem representar a mesma quantidade.

Os resultados deste estudo confirmam que a aprendizagem do número racional é muito complexa. Para que a aprendizagem seja significativa é necessário trabalhar o conceito em diferentes contextos e sempre com a utilização de material didático.

Esta investigação permitiu refletir sobre a compreensão da progressão do conceito de número racional nos alunos, como observar e analisar as aprendizagens adquiridas com a utilização do material manipulativo.

As limitações que poderemos apontar nesta investigação prende-se com o facto de ter desenvolvido apenas algumas tarefas durante o 1.º Período e não um tempo mais longo, dando tempo para os alunos interiorizarem e desenvolver os conceitos. Outra limitação diz respeito às tarefas aplicadas, embora foram elaboradas de acordo com os resultados do pré-teste, no momento de análise, os dados parece insuficientes numa investigação deste tipo.

Estas limitações são algumas recomendações para futuras investigações. Os dados deste estudo não são generalizações, mas contribuem para uma reflexão sobre o desenvolvimento da compreensão do número racional.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico*. Porto: Edições ASA

Associação de Professores de Matemática (1989). *Parecer sobre os projectos de novos programas de Matemática para o Ensino Básico*. Educação e Matemática, 9, 13-14.

Associação de Professores de Matemática (2008). *20 Anos de Temas na EeM.* Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (2009). *Renovação do Currículo de Matemática: Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (2013). *Posição da direção da Associação de Professores de Matemática (APM) sobre o despacho de revogação do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB)*. Educação e Matemática, 122, 2-3.

Beites, P. D. (2015). O Confronto do PMEB 2007 com o PMEB 2013 nas vizinhanças da demonstração. *Educação e Matemática*, 132, 13-18

Bento, A. (2012). Investigação quantitativa e qualitativa: Dicotomia ou complementaridade?. *Revista JA (Associação Académica da Universidade da Madeira*), 64, 40-43.

Behr, K., Lesh, R., Post, & Silver, (1983). Rational number concepts. In, *Acquisition of mathematical concepts and processes (pp. 91-126).* New York.

Bertoni, N. E. (2009). *Educação e Linguagem Matemática IV, Frações e Números fracionários*. Brasil.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What, When, and How? In P. Trafton (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics (pp. 156-167).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação- uma introdução à teoria e aos métodos.* Lisboa: Porto Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O sentido de número - reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática,* 109, 15-23.

Caldeira, M. F. (2009). *A importância dos Materiais para uma aprendizagem significativa da Matemática.* Tese de doutoramento. Universidade de Málaga, Espanha.

Canavarro, A. P., Tudella, C., & Pires, M. (2009).Um novo programa de Matemática para o Ensino Básico. *Educação e Matemática,* 105, 1.

Cramer, K. A, Post, T. R., & del Mas, R. C. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33 (2) 111-144.

Coutinho, C., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M., Rodrigues, C. (2009). *Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas*. Revista Psicologia Educação e Cultura , 375.

Damas, E., Oliveira, V., Nunes, R., & Silva, L. (2010). *Alicerces da matemática – guia para professores e educadores.* Porto: Areal Editores.

Decreto de Lei n.º 46/1986. *Lei de Bases do Sistema Educativo.* Ministério da Educação.

Decreto de Lei n.º6/2001. *Reorganização Curricular do Ensino Básico.* Ministério da Educação.

Despacho n.º 17169/2011. *Competências Essenciais.* Ministério da Educação.

Despacho n.º 5306/2012. *Metas Curriculares.* Ministério da Educação.

Despacho n.º 5165-A/2013 (DR n.º 74, 2.a Série, de 16 de Abril de 2013).

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change.* Philadelphia: Open University Press.

Gonçalves, M. H. (2003). *A multiplicação e divisão em alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: APM

Freixo, M. J. (2009). *Metodologia científica: fundamentos, métodos e técnicas.* Lisboa. Instituto Piaget.

Kieren, T. (1976). *Perspectives on Rational Numbers.*University of Alberta. Acedido em 22 de janeiro de 2015 em http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf#page=108

Kieren, T. (1988). *Personal Knowledge of Rational numbers: Its intuitive and formal development*. In J. Hiebert CM. Behs (Eds).

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Londres. Acedido em 25 de agosto de 2015 em http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED295826.pdf

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, N. Acedido em 20 de março de 2015 em http://ir.nmu.org.ua/bitstream/handle/123456789/134513/912cb8b302a3fb39ccce653d445e3292.pdf?sequence=1

Lesh, R. (1976). *Number and Measurement. Papers from a Research Workshop.* Washington. Acedido em 22 de janeiro de 2015 em http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf#page=108

Lukhele, R. B., Murray, H., & Olivier, A. (1999). Learners' understanding of the addition of fractions. *Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (pp. 87-97). Acedido em 4 de fevereiro de 2015 em http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/files/Fractions992.pdf

Maia, C. (2014). *As Isometrias na Inovação Curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de doutoramento, Universidade Portucalense, Portugal.

Mamede, E. (2008). *Matemática ao encontro das práticas*. Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho.

Mamede, E. (2011). Sobre o Ensino e Aprendizagem de Fracções nos níveis elementares de Ensino. *Actas Profmat 2011*, 1-6

Martinie, S. (2007). *Middle school of rational numbers knowledge – Dissertação de mestrado*. Manhattan, Kansas: Kansas State University. Acedido em 24 de agosto de 2015 em http://krex.k-state.edu/dspace/bitstream/handle/2097/281/SherriMartinie2007.pdf?sequence=1

Mcintosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Leaming of Mathematics 2 (3), 2-8 e 44.

Ministério da Educação (1990). *Programa do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação (1991a). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico — 2.º Ciclo* (vol. I). Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico — 1.º Ciclo* (4.ª ed.). Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (2007*). Orientações Curriculares de Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação e Ciência (2013*). Programa e Metas de Curriculares Matemática*. Acedido em 28 de outubro de 2014 em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Monteiro, C. e Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido de Número Racional*. Lisboa: APM.

Moseley, B. (2005). *Students early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving*. Educational Studies in Mathematics, 60, 37–69.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing Children´s Understanding of the Rational Numbers: A New Model ad an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30 (2), 122-147.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM//IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Bryant, P., Pretslik, U., & Hurry, J. (2003). The effect of situations on children´s understanding of fractions. *Bristish Society for Researche on the Leaming of Mathematics*. Oxford

Pereira, C. (2004). Desenvolvimento Psicológico e Mudança Conceptual nos Processos Formativos - Uma investigação-acção no âmbito da formação inicial de educadores/professores. Tese de doutoramento, Universidade de Coimbra, Portugal.

Piaget, J. (2010). *Seis estudos de Psicologia*. Porto. Texto Editores.

Ponte, J. P. e Serrazina, L. (2009).O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 2-6.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa. Ministério da Educação.

Post, T. (1981). *The Role of Manipulative Materials in the Learning of mathematical Concepts*. Acedido em 12 de abril de 2015 em http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/81_4.html

Programme For International Student Assessment (PISA) (2004). *Resultados do estudo Internacional-PISA 2003*. Lisboa: GAVE.

Santos, A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental*. Acedido em 14 de janeiro de 2014 em http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-06-14T13:15:30Z-3494/Publico/dissertacao_aparecido_santos.pdf

Serrazina, M. L. (1991). Aprendizagem da Matemática: a importância da utilização de Materiais. *Noesis*, 21, 37-39.

Serrazina, L., & Matos, J. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Tudella, A. C. (2014). Conferência: Evitar o desastre no Ensino da Matemática - O prejuízo que se anuncia com o PMEB homologado em 2013. *Educação e Matemática*, 126, 4-6.

Vergnaud, G. (1998). *A comprehensive theory of representation for mthematics education.* Journal of Mathematical Behavior, 167-181.

APÊNDICES

Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches

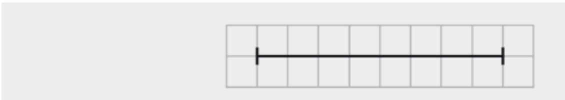
Escola Básica de Areia

Ano letivo 2014-2015

Pré-teste Matemática 3.º Ano

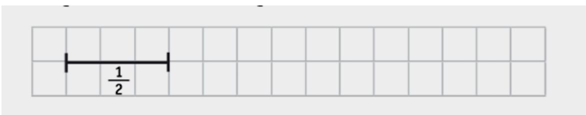
Nome: ____ Data: __ / __ / ___

1. No segmento de reta $[AB]$ que representa a unidade, assinala a fração $\frac{1}{2}$.(1)

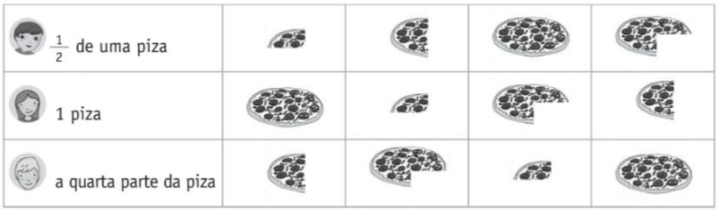


Em quantas partes dividiste o segmento de reta?______________________

2.Partindo do segmento de reta a seguir, reconstrói a unidade.(1)



3. Rodeia a parte de piza que cada aluno comeu.



4. Observa um trabalho que a Ana fez com o João na aula de Expressões.

Pinta $\frac{1}{5}$ de cor de rosa e $\frac{1}{10}$ de azul.

5. A Ana fez um bolo para o seu aniversário e pretende dividi-lo igualmente pelos seus 12 amigos.
   Que parte do bolo come cada amigo?

   R:____

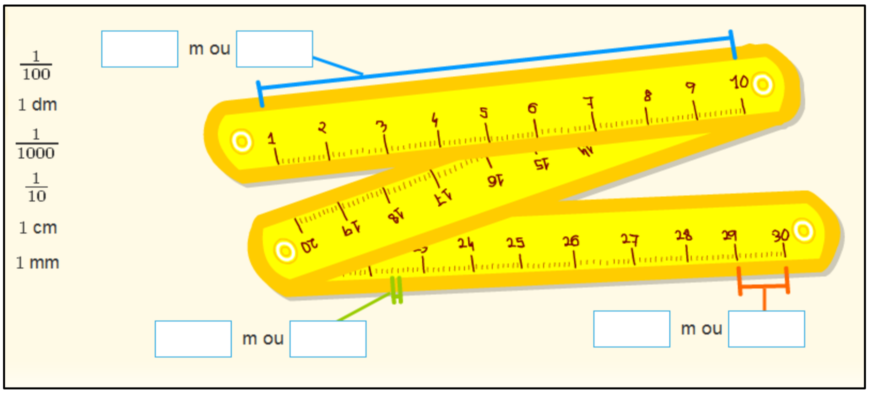
(1) Adaptado do manual " Grande Aventura" , matemática 2.º ano, Texto Editora

6. O José tem 20 cromos. O Pedro tem a quarta parte dos cromos do José.[2]

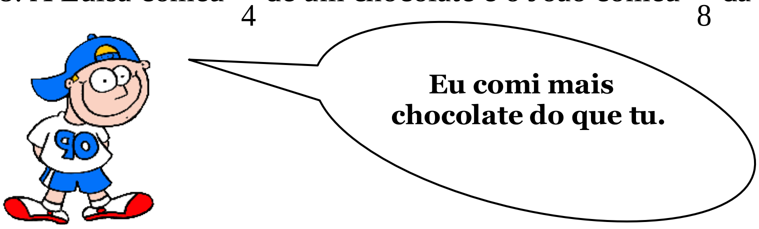
Quantos cromos têm os dois amigos, no total?

Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo com palavras, esquemas ou cálculos.

7. A imagem representa um metro articulado com 30 cm.[3]
Legenda a imagem com as medidas listadas.



8. A Luísa comeu $\frac{1}{4}$ de um chocolate e o João comeu $\frac{2}{8}$ da mesma tablete.



Concordas com a afirmação do João? Porquê?

Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo com palavras, esquemas ou cálculos.

(2) Adaptado do teste intermédio do 2.º ano, 2014
(3) Adaptado da escola Virtual, Porto Editora

Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches

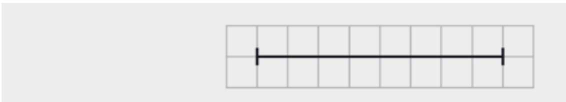
Escola Básica de Areia

Ano letivo 2014-2015

Pós-teste Matemática 3.º Ano

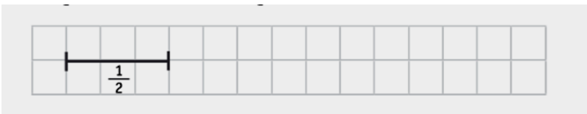
Nome: ____ Data: __ / __ / ___

1. No segmento de reta $[AB]$ que representa a unidade, assinala a fração $\frac{1}{2}$.[1]

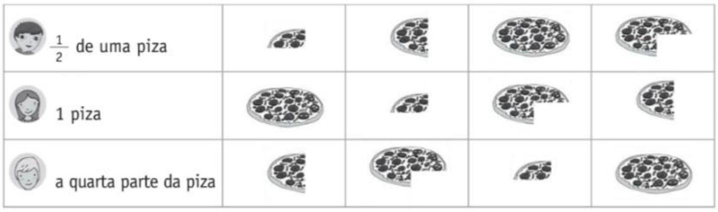


Em quantas partes dividiste o segmento de reta?______________________

2. Partindo do segmento de reta a seguir, reconstrói a unidade.[1]



3. Rodeia a parte de piza que cada aluno comeu.



4. Observa um trabalho que a Ana fez com o João na aula de Expressões.

Pinta $\frac{1}{5}$ de cor de rosa e $\frac{1}{10}$ de azul.

5. A Ana fez um bolo para o seu aniversário e pretende dividi-lo igualmente pelos seus 12 amigos.

Que parte do bolo come cada amigo?

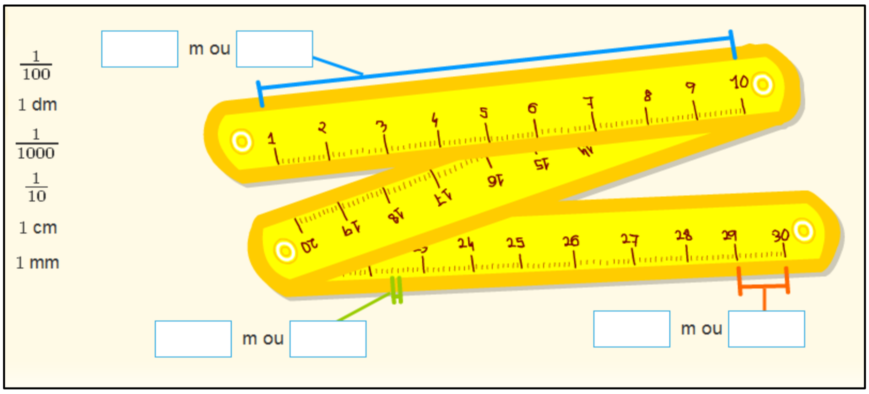
R:____

(1) Adaptado do manual " Grande Aventura" , matemática 2.º ano, Texto Editora

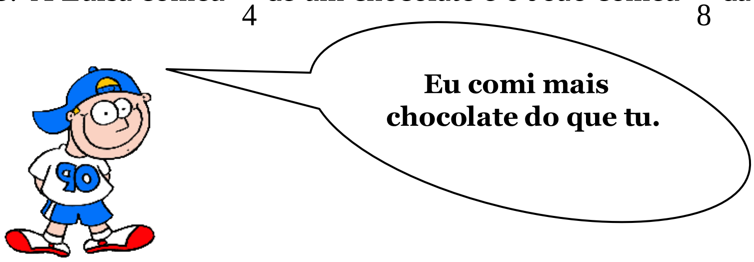
6. O José tem 20 cromos. O Pedro tem a quarta parte dos cromos do José.(2)
Quantos cromos têm os dois amigos, no total?

Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo com palavras, esquemas ou cálculos.

7. A imagem representa um metro articulado com 30 cm.(3)
Legenda a imagem com as medidas listadas.



8. A Luísa comeu $\frac{1}{4}$ de um chocolate e o João comeu $\frac{2}{8}$ da mesma tablete.

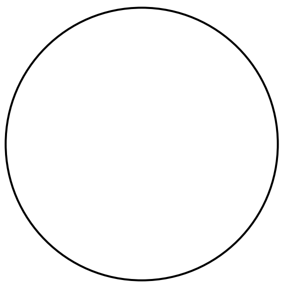


Concordas com a afirmação do João? Porquê?

Explica como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo com palavras, esquemas ou cálculos.

9. A imagem representa um círculo.

Representa $\frac{1}{3}$ no círculo.



(2) Adaptado do teste intermédio do 2.º ano, 2014
(3) Adaptado da escola Virtual, Porto Editora

Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches

Escola Básica de Areia

Ano letivo 2014-2015

Tarefa: Números Racionais Não Negativos I Matemática 3.º Ano

Nome: ____ Data: __ / __ / ___

1. Observação das peças:

1.1 Une as peças da mesma cor de modo a formar círculos.

1.2 Indica o número de partes em que foi dividido o círculo:

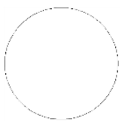
a) verde; ☐ **b)** laranja; ☐ **c)** azul; ☐ **d)**vermelho; ☐

e) amarelo; ☐

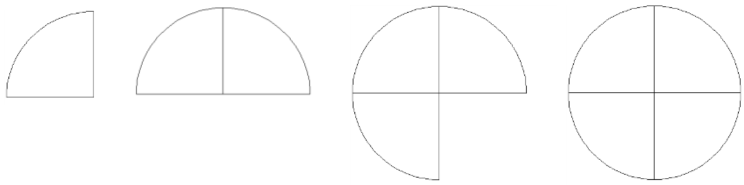
1.3 Escreve a cor da peça que representa:

metade do círculo	a sexta parte do círculo	a terça parte do círculo	a oitava parte do círculo	a quarta parte do círculo

1.4 Escreve simbolicamente a relação entre cada peça e o círculo. Observa o exemplo:

 representa $\frac{1}{2}$ de 

1.5. Utilizando as peças da mesma cor, constrói todas as configurações que se podem formar num círculo. Por exemplo:



Escreve a fração correspondente a cada uma das figuras que construíste.

Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches

Escola Básica de Areia

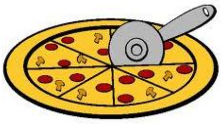
Ano letivo 2014-2015

Tarefa: Números Racionais Não Negativos - II

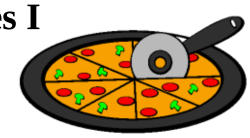
Matemática 3.º Ano Data: __ / __ / ___

Grupo: ______________________ ______________________

______________________ ______________________ ______________________



Na cozinha com frações I



A Mariana quer construir um modelo de piza com os círculos fracionários.
Ajuda a Mariana a construir esse modelo de piza de forma a utilizar apenas duas cores do círculo fracionário.
Será que consegues ajudá-la? (Desenha esse modelo)

Vais agora apresentar esse modelo à tua turma. Na tua apresentação não poderás mostrar o modelo, só podes descrevê-lo. Na descrição não deves mencionar a cor dos setores circulares, bem como a quantidade de setores que o compõe. Será que os teus colegas conseguem reproduzir o teu modelo?

____

____

____

Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches

Escola Básica de Areia

Ano letivo 2014-2015

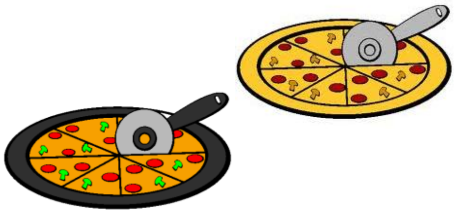
Tarefa: Números Racionais Não Negativos - II

Matemática 3.º Ano Data: __ / __ / ___

Grupo: ____________________ ____________________

____________________ ____________________ ____________________

Na cozinha com frações II



A Mariana quer utilizar agora 3 cores do círculo fracionário para construir outro modelo de piza.
Como poderá fazê-lo?
Será que consegues ajudá-la? (Desenha esse modelo)

Desta vez os teus colegas vão fazer questões sobre o teu modelo. Serás que estás preparado para responderes?
Elabora algumas questões que gostarias de fazer ao teu colega sobre o modelo dele. O teu objetivo é reproduzi-lo. Será que vais descobrir?
Não poderás questionar sobre o número de setores circulares e respetivas cores.

____

____

____

Agrupamento de Escolas D. Afonso Sanches

Escola Básica de Areia

Ano letivo 2014-2015

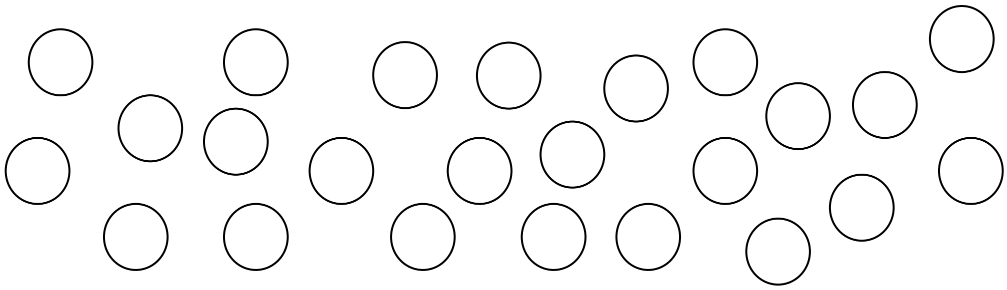
Tarefa: Os berlindes do Zeca

Matemática 3.º Ano   Data: __ / __ / ___

Grupo: ____________________ ____________________

____________________ ____________________ ____________________

O Zeca estava a estudar Matemática e resolveu usar a sua coleção de 24 berlindes para compreender melhor as frações. A imagem seguinte representa a sua coleção de berlindes.



1 – **Pinta de azul**, na figura anterior, metade dos berlindes. Quantos berlindes deves pintar? ____

2- Dos berlindes não pintados, pinta de vermelho metade da metade. Quantos berlindes deves pintar? ____

3- Dos berlindes não pintados, pinta de amarelo a terça parte. Quantos berlindes

deves pintar? ____

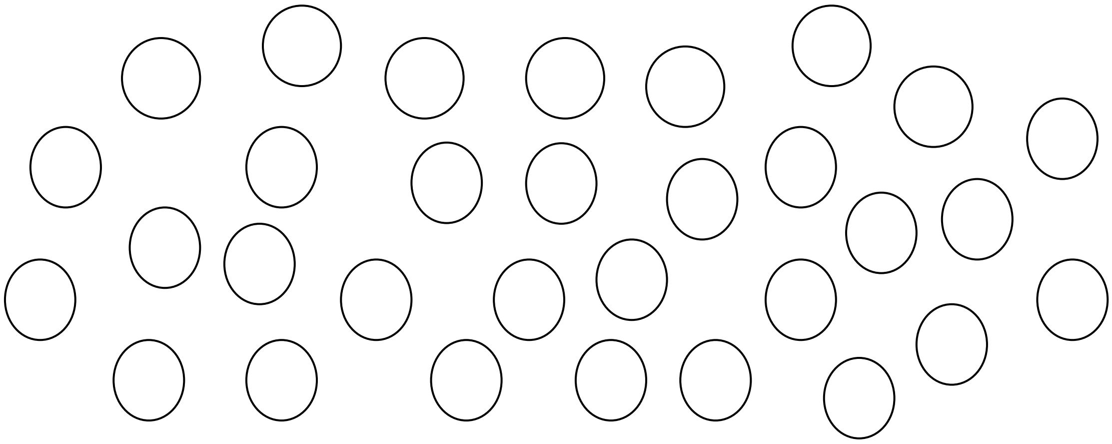
4- Que frações da coleção correspondem os berlindes **azuis, vermelhos e amarelos?**

____

____

5- Ajuda o Zeca a completar o quadro da sua coleção, agora com 36 berlindes, **colocando em cada espaço o número de berlindes** correspondente a cada uma das frações. Utiliza o esquema para dividir a coleção de acordo com as frações/cores da legenda.

Legenda: metades – azul; terços – vermelho; quartos – amarelo; sextos – laranja; nonos – verde.



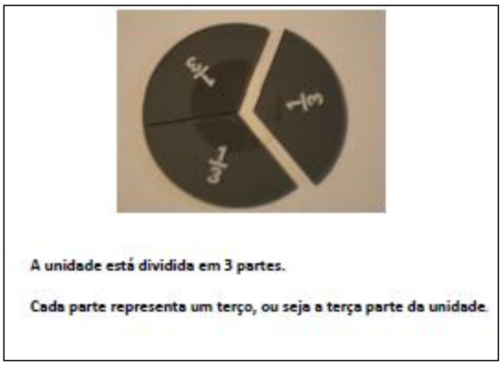
Um meio	Dois meios							
Um terço	Dois terços	Três terços						
Um quarto	Dois quartos	Três quartos	Quatro quartos					
Um sexto	Dois sextos	Três sextos	Quatro sextos	Cinco sextos	Seis sextos			
Um nono	Dois nonos	Três nonos	Quatro nonos	Cinco nonos	Seis nonos	Sete nonos	Oito nonos	Nove nonos

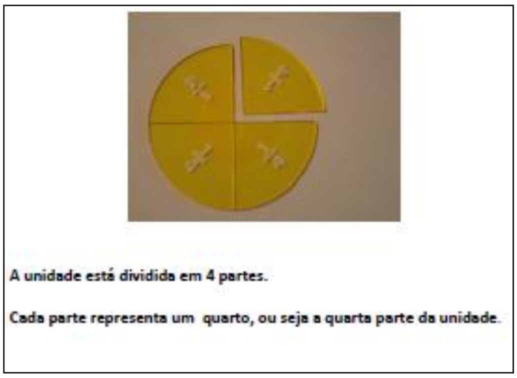
6- Indica as frações que representam:

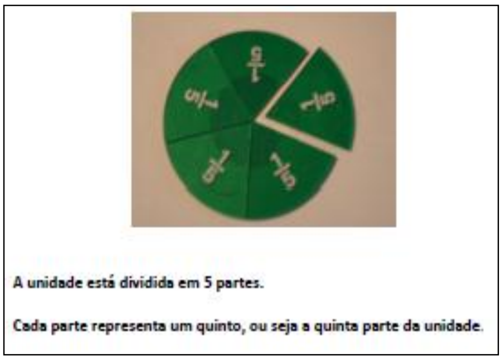
12 berlindes:
18 berlindes:
24 berlindes:
36 berlindes:

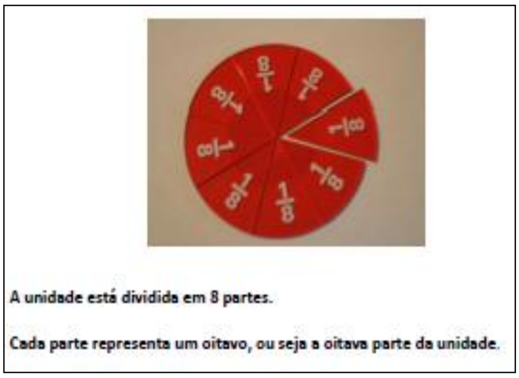
Apêndice 7

PPT









A unidade está dividida em 10 partes.

Cada parte representa um décimo, ou seja a décima parte da unidade.

A unidade está dividida em 12 partes.

Cada parte representa um doze avos.

Apêndice 8

Setores circulares