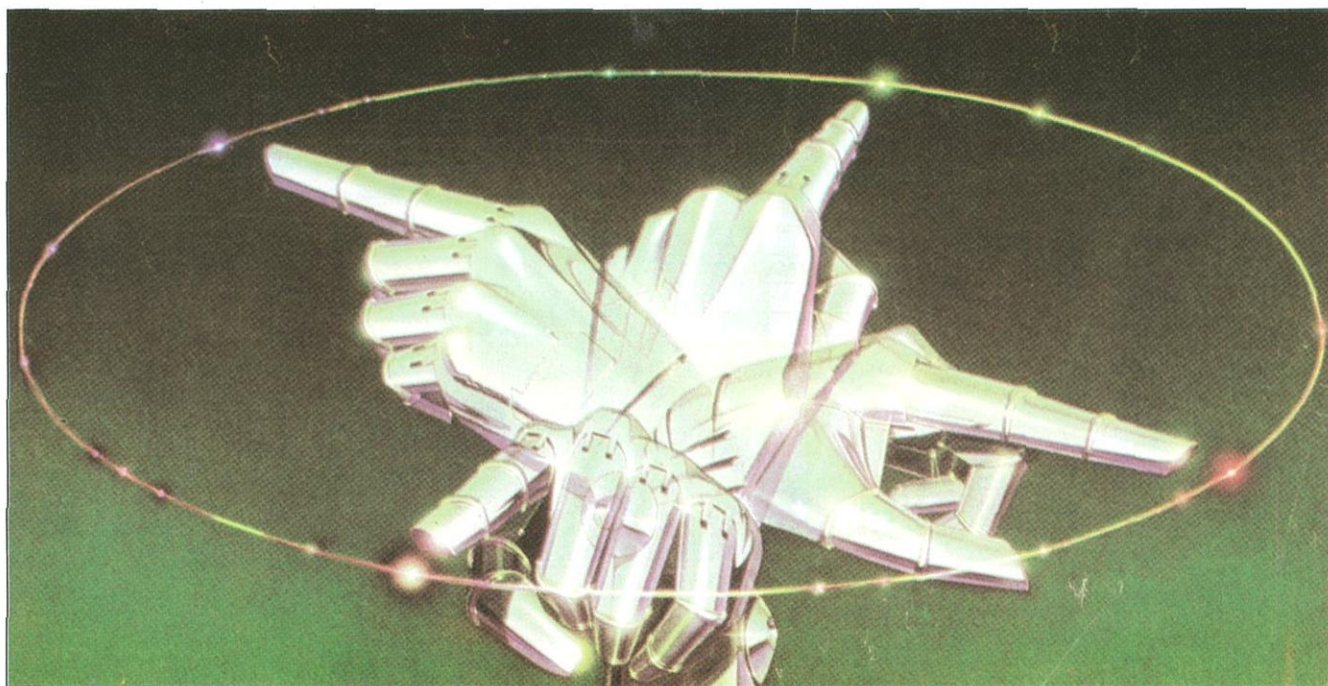


Dinâmica de Manipuladores Flexíveis

PARTE II



Neste artigo aborda-se a dinâmica directa de manipuladores robóticos com membros flexíveis. A estrutura mecânica do manipulador é composta de membros constituídos de segmentos interligados por juntas rotacionais. Os segmentos são considerados activos ou passivos. A junta rotacional que interliga o segmento activo de um membro, em relação ao membro anterior, representa um grau de liberdade activo, isto é, corresponde ao eixo onde está inserido o actuador. Os segmentos subsequentes podem apresentar deformação (torção e/ou flexão em um ou dois planos) que é compensada nas articulações fictícias dos mesmos. As juntas rotacionais que interligam esses segmentos representam os graus de liberdade passivos, ou seja, correspondem aos eixos onde são considerados os ângulos de deformação. A partir desta concepção da estrutura elabora-se a dinâmica inversa utilizando-se uma formulação numérica recursiva de Newton-Euler. Com a avaliação da dinâmica directa faz-se a simulação temporal do sistema utilizando diversos métodos de integração numérica. São apresentadas comparações relativas a eficiência e precisão do sistema, assim como alguns resultados obtidos com os métodos de integração utilizados.

4. SISTEMA DINÂMICO

Na primeira parte deste artigo definiram-se as estruturas mecânica e cinemática que caracterizam um manipulador flexível. Uma vez estabelecidos esses sistemas, nesta segunda parte apresenta-se as características fundamentais do modelo dinâmico. Desta forma, na próxima secção define-se uma forma de obtenção da matriz de massa e dos vectores envolvidos no sistema dinâmico. De seguida apresenta-se um método de resolução do sistema e propõem-se alguns algoritmos de integração numérica para a simulação.

4.1. Estabelecimento do Sistema Dinâmico

Para estabelecer a dinâmica da estrutura do manipulador, faz-se uso de um conjunto de equações dinâmicas que, simbolicamente, podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{T}_{IN} = \mathbf{T}_{EX} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T}_{IN} = \mathbf{T}_{GC} + \mathbf{T}_{FL} + \mathbf{T}_{FR} \quad (4.2)$$

Na equação (4.1) \mathbf{M} representa a matriz de inércia, a qual depende do vector posição \mathbf{q} . Trata-se de uma matriz não singular, simétrica, positiva definida e com dimensão $n_{gl} \times n_{gl}$. O vector $\ddot{\mathbf{q}}$ representa a aceleração das juntas activas e passivas, com dimensional $n_{gl} \times 1$. O vector \mathbf{T}_{IN} (com dimensão $n_{gl} \times 1$) é composto pelos vectores \mathbf{T}_{GC} (vector

com dimensão $ngl \times 1$ que depende de q e \dot{q} representando os efeitos das forças centrífugas, de Coriolis e de gravidade, \mathbf{T}_{FL} (vector com dimensão $ngl \times 1$ que depende de q) que quantifica a rigidez dos segmentos passivos dos membros da estrutura, e \mathbf{T}_{FR} (vector com dimensão $ngl \times 1$ que depende de \dot{q}) que representa as perdas por fricção nas juntas activas e passivas. Finalmente, o vector \mathbf{T}_{EX} (com dimensão $ngl \times 1$) é o vector dos binários solicitados aos actuadores.

A matriz e os vectores que definem a dinâmica do sistema (4.1) têm a seguinte forma:

- O vector \ddot{q} é representado por:

$$\ddot{q} = \left\{ \ddot{q}_{1,0,0} \quad \ddot{q}_{1,1}^T \quad \ddot{q}_{1,2}^T \quad \dots \quad \ddot{q}_{1,nseg-1}^T \quad \dots \quad \ddot{q}_{n,0,0} \quad \ddot{q}_{n,1}^T \quad \ddot{q}_{n,2}^T \quad \dots \quad \ddot{q}_{n,nseg-1}^T \right\}^T \quad (4.3a)$$

Nas análises da estrutura com os tipos T1, T2 e T3 (considerando-se flexão respectivamente no eixo dos Z, em Y e Z e em X, Y e Z) tem-se:

$$\ddot{q}_{ij} = \left\{ \ddot{\theta}_{i,j,3} \right\}^T \quad (4.3b)$$

$$\ddot{q}_{ij} = \left\{ \ddot{\theta}_{i,j,2} \quad \ddot{\theta}_{i,j,3} \right\}^T \quad (4.3c)$$

$$\ddot{q}_{ij} = \left\{ \ddot{\theta}_{i,j,1} \quad \ddot{\theta}_{i,j,2} \quad \ddot{\theta}_{i,j,3} \right\}^T \quad (4.3d)$$

A variável $\ddot{\theta}_{i,0,0}$ representa a aceleração angular da junta activa do membro i e $\theta_{i,j,k}$ representa a aceleração angular no membro i , do segmento j , do respectivo eixo de rotação k . Sendo $i = 1, \dots, n$; $j = 0, \dots, nseg - 1$ e $k = 1, 2, 3$ (i.e. rotação nos três eixos, análise do tipo T3), ou $k = 2, 3$ (i.e. rotação nos eixos dos Y e Z, análise do tipo T2) ou $k = 3$ (i.e. rotação no eixo Z, análise do tipo T1).

- Para o cálculo da matriz de inércia $M(q)$ são utilizados métodos semelhantes aos apresentados por Walker *et al* [2], para manipuladores rígidos. Desta forma, os elementos de $M(q)$ são calculados através do algoritmo da dinâmica inversa de Newton-Euler (DINE), não sendo considerados os efeitos da gravidade, das velocidades, das forças elásticas e forças externas. Considera-se o vector da aceleração com seus elementos iguais a zero com excepção do elemento $\ddot{\theta}_{i,j,k} = 1$. Assim, os $ngl \times ngl$ elementos dessa matriz são obtidos calculando-se os vectores de cada coluna, como no primeiro método; os elementos da diagonal principal para baixo, a partir do seu último elemento, como no segundo método, ou da diagonal principal para cima, a partir do último elemento, como no terceiro método.
- O vector $\mathbf{T}_M(q, \dot{q})$, definido em (4.1), é obtido considerando-se todos os elementos do vector aceleração \ddot{q} iguais a zero. Assim, neste vector são considerados os efeitos da gravidade, das velocidades, das forças elásticas e forças externas aplicadas no referencial da mão. Como definido em (4.2), esse vector representa a soma de três vectores:

- \mathbf{T}_{GC} é o vector (com dimensão $ngl \times 1$) dos efeitos das forças centrífugas, Coriolis e de gravidade. Este vector é obtido utilizando-se o algoritmo recursivo da DINE, sendo que os elementos do vector aceleração \ddot{q} são considerados iguais a zero. Desta forma, neste vector são avaliados os efeitos da gravidade, das velocidades e das forças externas. Este vector apresenta a seguinte configuração:

$$\mathbf{T}_{GC} = \left\{ \mathbf{gc}_{1,0}^T \quad \mathbf{gc}_{1,1}^T \quad \mathbf{gc}_{1,2}^T \quad \dots \quad \mathbf{gc}_{1,nseg-1}^T \quad \dots \quad \mathbf{gc}_{n,0}^T \quad \mathbf{gc}_{n,1}^T \quad \mathbf{gc}_{n,2}^T \quad \dots \quad \mathbf{gc}_{n,nseg-1}^T \right\}^T \quad (4.4)$$

Note-se que na sub-rotina elaborada para o cálculo de $\mathbf{T}_{GC}(q, \dot{q})$, pode-se avaliar os efeitos da gravidade, independentemente, fazendo-se $\dot{q}(t) = 0$

- \mathbf{T}_{FL} é o vector (com dimensão $ngl \times 1$) das forças elásticas actuantes nos segmentos flexíveis dos membros da estrutura. Este vector tem a estrutura:

$$\mathbf{T}_{FL} = \left\{ 0 \quad \mathbf{fl}_{1,1}^T \quad \mathbf{fl}_{1,2}^T \quad \dots \quad \mathbf{fl}_{1,nseg-1}^T \quad \dots \quad 0 \quad \mathbf{fl}_{n,1}^T \quad \mathbf{fl}_{n,2}^T \quad \dots \quad \mathbf{fl}_{n,nseg-1}^T \right\}^T \quad (4.5a)$$

- Na análise de tipo T1: $\mathbf{fl}_{ij} = \left\{ fl_{i,j,3} \right\}^T$ (4.5b)

- Na análise de tipo T2: $\mathbf{fl}_{ij} = \left\{ fl_{i,j,2} \quad fl_{i,j,3} \right\}^T$ (4.5c)

- Na análise de tipo T3: $\mathbf{fl}_{ij} = \left\{ fl_{i,j,1} \quad fl_{i,j,2} \quad fl_{i,j,3} \right\}^T$ (4.5d)

$$fl_{i,j,1} = \frac{MTR_{ij} MPX_{ij}}{CSEG_{ij}} \quad \theta_{i,j,1} fl_{i,j,2} = \frac{MET_{ij} MIY_{ij}}{CSEG_{ij}} \quad \theta_{i,j,2} fl_{i,j,3} = \frac{MET_{ij} MIZ_{ij}}{CSEG_{ij}} \quad \theta_{i,j,3} \quad (4.5e)$$

e MTR_{ij} é o módulo de elasticidade transversal do segmento j do membro i .

MET_{ij} é o módulo de elasticidade normal do segmento j do membro i .

MPX_{ij} é o momento polar da área definida por YZ do segmento j do membro i .

MIY_{ij} é o momento de inércia da área definida por XZ do segmento j do membro i .

MIZ_{ij} é o momento de inércia da área definida por XY do segmento j do membro i .

- O vector $\mathbf{T}_{FR}(\dot{q})$ (com dimensão $ngl \times 1$) representa o vector das perdas por atrito nas juntas activas e passivas. Este vector tem a estrutura:

$$\mathbf{T}_{FR} = \left\{ \mathbf{fr}_{1,0}^T \quad \mathbf{fr}_{1,1}^T \quad \mathbf{fr}_{1,2}^T \quad \dots \quad \mathbf{fr}_{1,nseg-1}^T \quad \dots \quad \mathbf{fr}_{n,0}^T \quad \mathbf{fr}_{n,1}^T \quad \mathbf{fr}_{n,2}^T \quad \dots \quad \mathbf{fr}_{n,nseg-1}^T \right\}^T \quad (4.6a)$$

Considerando-se o atrito apenas nas juntas activas da estrutura segundo os modelos de atrito viscoso e de Coulomb [10], pode escrever-se:

$$\mathbf{fr}_{ij} = \gamma_{vij} \dot{\theta}_{i,j,0} \gamma_{cij} \text{sgn}(\dot{\theta}_{i,j,0}) \quad \text{para } j = 0 \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{fr}_{ij} = 0 \quad \text{para } j > 0 \quad (4.6c)$$

em que γ_{vij} é a constante de atrito viscoso e γ_{cij} é a constante de Coulomb na junta activa do membro i e

$$\text{sgn}(\dot{\theta}_{i,j,0}) = \begin{cases} 1 & \text{para } \dot{\theta}_{i,j,0} > 0 \\ 0 & \text{para } \dot{\theta}_{i,j,0} = 0 \\ -1 & \text{para } \dot{\theta}_{i,j,0} < 0 \end{cases} \quad (4.6d)$$

As sub-rotinas da DINE elaboradas para o cálculo dos elementos de $M(q)$ e $\mathbf{T}_{GC}(q, \dot{q})$ foram optimizadas, sem perda de generalidade, tendo em vista a eliminação de operações redundantes, tais como, produtos por zero e pela unidade e de somas com zero.

Por último, vector \mathbf{T}_{EX} (com dimensão $ngl \times 1$) apresentado em (4.1), é o vector dos binários solicitados aos actuadores. Ele apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{T}_{EX} = \left\{ EX_{1,0} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad EX_{n,0} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T \quad (4.7)$$

Definidos os vectores e a matriz do sistema (4.1), apresenta-se na secção seguinte uma forma de resolução do sistema para simulação.

4.2. Resolução do Sistema Dinâmico

Na resolução do sistema dinâmico (4.1), utilizam-se os seguintes passos para sua simulação (Fig. 4.1):

1 - Estabelecimento do incremento de tempo Δt , do tempo inicial t_0 e do tempo final t_f de simulação.

2 - Definição das condições iniciais: $q(t_0)$, $\dot{q}(t_0)$.

3 - Definição das trajectórias desejadas: $q_d(t_f)$, $\dot{q}_d(t_f)$ e $\ddot{q}_d(t_f)$.

4 - A partir do estado $\{q(t) \quad \dot{q}(t)\}$ calcula-se a matriz de massa $M(q)$ e o vector $T_{IN}(q, \dot{q})$.

5 - Considerando-se as solicitações de controlo nas juntas, com (4.7) obtém-se T_{EX} .

6 - Resolução das equações (4.1) na forma:

$$M \ddot{q} = T_{EX} - T_{IN} \quad (4.8)$$

7 - O vector aceleração $\ddot{q}(t)$ pode ser obtido método de decomposição LU do sistema (4.8). A sub-rotina estruturada para esse fim tem características idênticas a elaborada por Press *et. al.* [11]. Note-se que utilizando essa metodologia não há necessidade de fazer a inversão de $M(q)$ economizando-se, assim, o tempo de processamento correspondente.

8 - Com o vector aceleração $\ddot{q}(t)$, podem estimar-se os vectores $q(t + \Delta t)$ e $\dot{q}(t + \Delta t)$ através de um método de integração.

9 - Regressar ao ponto 4.

A aplicação de alguns dos métodos de integração ao sistema definido em (4.8) são descritos na secção a seguir.

4.3. Métodos de Integração do Sistema Dinâmico

Entre os vários métodos disponíveis foram utilizados três métodos numéricos para integrar o vector aceleração obtido a partir da resolução do sistema (4.8) e assim obter os vectores de velocidade e de deslocamento do passo seguinte. Deste modo, pode fazer-se a comparação entre a precisão e o esforço computacional a fim de concluir sobre a metodologia mais apropriada para as análises do presente trabalho.

Um procedimento simples de integração [10-12] consiste no método de Euler, ou método de segunda ordem de Runge-Kutta (RK2), em que se considera a aceleração $\ddot{q}(t)$ constante no intervalo $[t, t + \Delta t]$. Neste caso, a velocidade e o deslocamento são calculadas por:

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \Delta t \ddot{q}(t) \quad (4.9a)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}(t) \quad (4.9b)$$

Para o procedimento de integração acima referido, Δt deve ser estabelecido de forma a que não viole a condição

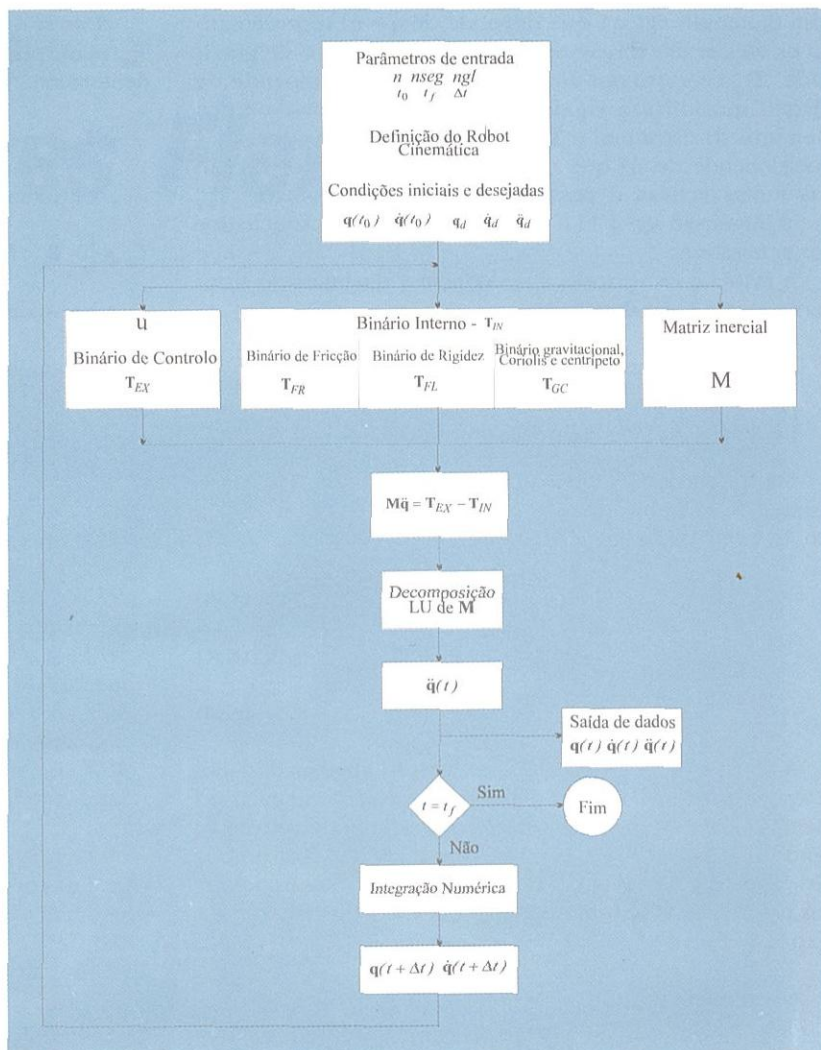


Figura 5 - Fluxograma de simulação do sistema

de aceleração constante no intervalo $[t, t + \Delta t]$.

Um procedimento bastante eficiente e muito utilizado [13] é o método de quarta ordem da formulação de Runge-Kutta (RK4), em que é necessária a avaliação de quatro vectores de funções paramétricas. Outro método ainda mais preciso, é o método Runge-Kutta de décima ordem (RK10) que necessita de dezassete vectores paramétricas [14].

1 - Conhecida a aceleração no instante t , pode-se estabelecer o primeiro estágio de cálculo dos vectores paramétricos do método:

$$K_1 = \Delta t \ddot{q}(t) \quad (4.10a)$$

$$L_1 = \Delta t \dot{q}(t) \quad (4.10b)$$

Neste caso, os vectores auxiliares q_{aux} e \dot{q}_{aux} de cada passo vêm:

$$\dot{q}_{aux}(t) = \dot{q}(t) + \sum_{j=2}^i a_{ij-1} K_{j-1} \quad (4.11a)$$

$$q_{aux}(t) = q(t) + \sum_{j=2}^i a_{ij-1} L_{j-1} \quad (4.11b)$$

Há a necessidade de recalculer e sistema para as condições de q_{aux} e \dot{q}_{aux} em cada passo. Assim, deve-se reavaliar

$M(q_{aux})$ e $T_{IN}(q_{aux}, \dot{q}_{aux})$ para obter o vector aceleração $\ddot{q}_{aux}(t)$ nessas condições. Dessa forma, pode-se calcular os vectores paramétricos K_{i+1} e L_{i+1} da forma:

$$K_{i+1} = \Delta t \ddot{q}_{aux}(t) \tag{4.12a}$$

$$L_{i+1} = \Delta t \dot{q}_{aux}(t) \tag{4.12b}$$

Possuindo-se todos os vectores paramétricos, a valor aproximação dos vectores $\dot{q}(t + \Delta t)$ e $q(t + \Delta t)$, são estabelecidos da seguintes forma:

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \sum_{i=1}^s b_i K_i \tag{4.13a}$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \sum_{i=1}^s b_i L_i \tag{4.13b}$$

em que i varia de acordo com a ordem do método de Runge-Kutta utilizado (Rk*i*). Para um estabelecimento coerente de Δt nos métodos acima referidos estabelece-se heurísticamente, um valor inicial e verifica-se a convergência nos resultados obtidos. Deve-se tomar em consideração que o valor inicial deve ser, por um lado, suficientemente grande para um cálculo rápido e, por outro lado, suficientemente pequeno para haver uma convergência da simulação. No compromisso entre esses dois factores deve, também, considerar-se a acumulação de erros de arredondamento por iteração.

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Na elaboração do modelo matemático da estrutura mecânica genérica foi considerado que a deformação dos membros fica restrita as variações angulares nas juntas passivas, pelo que os segmentos podem ser considerados rígidos. Dessa forma, foi possível elaborar um modelo semelhante ao método recursivo de Newton-Euler utilizado para sistemas rígidos na resolução da dinâmica inversa. A partir de adaptações desse método, estabelece-se o sistema dinâmico com um número qualquer de membros e segmentos. Assim, o modelo desenvolvido pode ser aplicado para vários níveis de precisão seleccionando-se um número adequado de segmentos por membro. O modelo dinâmico resultante é altamente não linear e complexo, pois há a considerar a variação da inércia efectiva do sistema com a configuração do manipulador. Foram propostos três tipos de análise da estrutura para avaliar a necessidade da inclusão dos efeitos de deformação elástica por torção e flexão.

Com relação aos métodos de integração, os resultados apresentados nessas simulações mostraram, como era de se esperar, que os métodos de RK4 e RK10 tem uma eficiência muito superior ao método de Euler. Pelas simplificações impostas aos sistemas analisados não se justificou a utilização do método de RK10. O método de RK4 mostrou-se eficiente para todos os casos analisados.

Realizaram-se várias simulações com a estrutura com um e dois membros variando-se o número de segmentos por membro. O exemplo de simulação mostrado na figura 6 representa a resposta temporal do deslocamento e da velocidade de um sistema com a configuração do manipulador. Foram propostos três tipos de análise da estrutura para avaliar a necessidade da inclusão dos efeitos de deformação elástica por torção e flexão.

Com relação aos métodos de aos métodos de integração, os resultados apresentados nessas simulações mostraram, como era de se esperar, que os métodos de RK4 e RK10 tem uma eficiência muito superior ao método de Euler. Pelas sim-

plificações impostas aos sistemas analisados não se justificou a utilização do método de RK10. O método de RK4 mostrou-se eficiente para todos os casos analisados.

Realizaram-se várias simulações com a estrutura com um e dois membros variando-se o número de segmentos por membro. O exemplo de simulação mostrado na figura 6 representa a resposta temporal do deslocamento e da velocidade de um sistema simplificação em que considera-se que o gdl do primeiro membro é fixo, os vectores de controlo das juntas activas, das perdas por fricção e das acções de forças e/ou momentos externos aplicados no referencial terminal da estrutura são con-

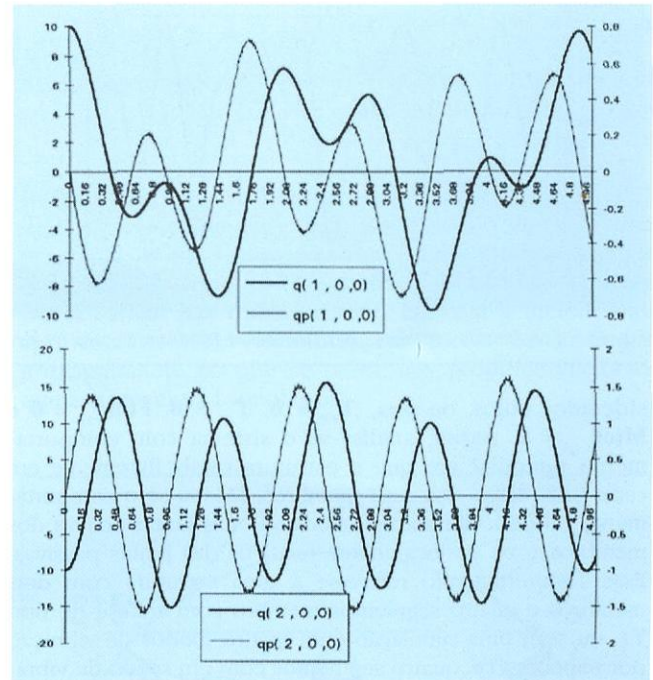


Figura 6a – Resposta dos gdl's activos da estrutura

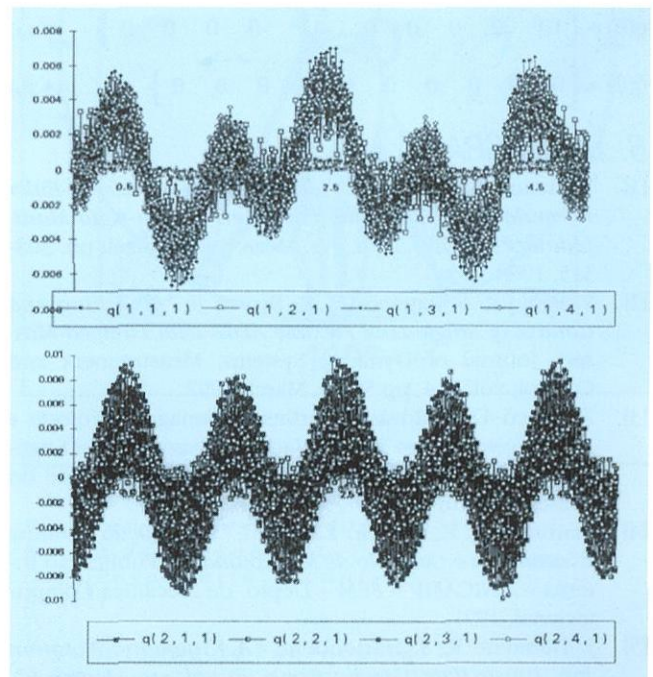


Figura 6b – Resposta dos gdl's passivos da estrutura

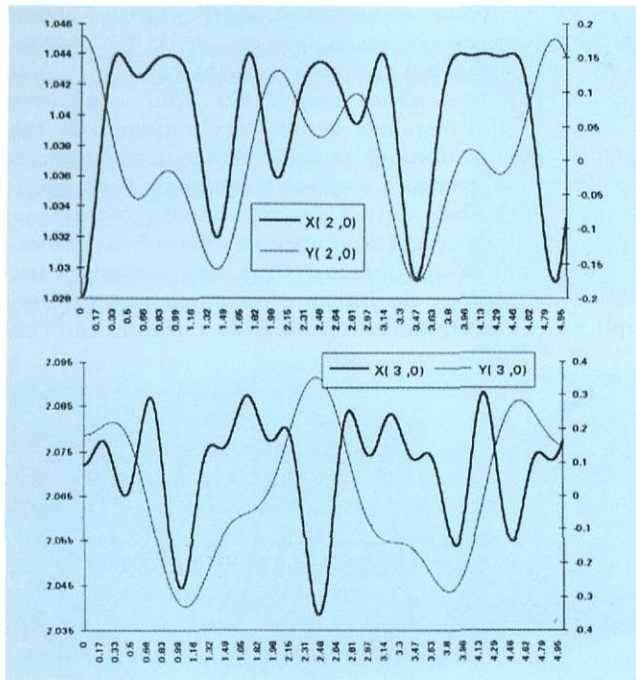


Fig. 6c - Coordenadas cartesianas dos referenciais terminais de cada membro

siderados nulos, ou seja, $T_{EX} = 0$, $T_{FR} = 0$, $F_{tot_{n,1,0}} = 0$ e $M_{tot_{n,1,0}} = 0$. Assim, analisa-se o sistema com comportamento pendular em que a estrutura oscila livremente em cada junta activa dos seus membros. Mostra-se o comportamento do deslocamento e velocidade nas juntas activas dos membros e os deslocamentos relativos das juntas passivas. Esse comportamento refere-se a uma estrutura com dois membros e quatro segmentos/membro com análise do tipo T1, ou seja, uma simulação com quatro modos de vibração por membro (i.e. quatro segmentos com um modo de vibração em cada). Esses modos são considerados nos planos XY dos segmentos, ou seja, rotação nos eixos Z dos mesmos, com as seguintes condições iniciais:

$$q(0) = \begin{Bmatrix} 10^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (5.1a)$$

$$\dot{q}(0) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (5.1b)$$

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Y. Huang, C. S. G. Lee; "Generalisation of Newton-Euler Formulation of Dynamic Equations to Non-rigid Manipulators", ASME J. Dyn. Sys. Meas. and Control; pp. 308-315, 1988.
- [2] V. Feliu, K. S. Rattan e H. B. Brown Jr; "Modelling and Control of Single-Link Flexible Arms with Lumped Masses", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 114, pp 59-69, March 1992.
- [3] Zampieri D.E., Rosário Martins, Saramago; "Projecto e Modelagem de um Manipulador", Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Natal, Rio Grande do Norte, pp. 9-16, 1991.
- [4] Martins J. L. F., Rosário Zampieri, "Concepção, Análise Cinemática e Controlo de Manipulador", Publicação Interna - UNICAMP - FEM - Depto. de Mecânica Computacional, 1991.
- [5] J. Denavit R. S. Hartenberg; "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", ASME - J. of Applied Mechanics, vol. 22, pp. 215-221, June 1955.

- [6] R. Judd, e D. Falkenburg; "Dynamics of Non-rigid Articulated Robot Linkages"; IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-30 n.º 5, pp. 499-502, 1985.
- [7] J. O. King, V. G. Gourishankar e R. E. Rink; "Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulators Using Angular Velocities Instead of Transformation Matrices". IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol SMC-17 n.º 11, pp. 1059-1068, 1987.
- [8] J. J. Murray and C. P. Neuman, "Linearization and Sensitivity Models on the Newton-Euler Robot Model", ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, vol. 108, pp. 272-276, Setembro 1986.
- [9] M. W. Walker and D. E. Orin, "Efficient Dynamic Simulation of Robot Mechanisms", ASME J. of Dynamic Systems Measurement and Control, vol. 104, pp. 205-211, 1982.
- [10] J. J. Craig; "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", Addison-Wesley Pub. Company, 1989.
- [11] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky e W. T. Vetterling; "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, 1988.
- [12] T. Yoshikawa; "Foundations of Robotics: Analysis and Control", MIT Press Cambridge, 1990.
- [13] J. A. T. Machado e A.M.S.F. Galhano; "Customised Direct Dynamics of Robot Manipulators", IEEE Int. Conference on Systems, Man, and Cybernetics, França, 1993.
- [14] E. Hairer, "A Runge-Kutta Method of Order 10", J. Ins. Maths Applics 21, pp. 47-59, 1978.

APÊNDICE: DINÂMICA INVERSA PELO MÉTODO DE NEWTON-EULER

A base para o estabelecimento da dinâmica inversa do manipulador com membros flexíveis, consiste em fazer a aproximação da deformação devido a flexão e torção, através da divisão de cada membro em pequenos segmentos rígidos. Estes segmentos são conectados entre si por juntas passivas, nas quais se considera a recuperação elástica devido a essa deformação. Dessa forma, a formulação geral do método recursivo de Newton-Euler, para o cálculo da dinâmica inversa, pode ser escrito da seguinte forma:

Processo iterativo de baixo para cima, ou seja $i = 1, \dots, n$ e $j = 0, \dots, n_{seg} - 1$.

1. Velocidade angulares ($w_{i,j}$)

- Segmento rígido: velocidade angular do membro i no segmento $j = 0$.

$$w_{i,0} = rot_i w_{i-1,nseg} + \dot{q}_{i,0} \quad (1.1)$$

$$\dot{q}_{i,0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{i,0,0} \end{Bmatrix}^T \quad (1.2)$$

- Segmento flexível: velocidade angular do membro i no segmento $j > 0$.

$$w_{i,j} = rlin_{i,j} w_{i,j-1} + \dot{q}_{i,j} \quad (1.3)$$

Os vectores rot_i e $rlin_{i,j}$ são estabelecidas por (3.1) e (3.2) respectivamente.

- Na análise tipo T1: $\dot{q}_{i,j} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{i,j,3} \end{Bmatrix}^T \quad (1.4)$

- Na análise tipo T2: $\dot{q}_{i,j} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{\theta}_{i,j,2} & \dot{\theta}_{i,j,3} \end{Bmatrix}^T \quad (1.5)$

- Na análise tipo T3: $\dot{q}_{i,j} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{i,j,1} & \dot{\theta}_{i,j,2} & \dot{\theta}_{i,j,3} \end{Bmatrix}^T \quad (1.6)$

2. Acelerações angulares ($\dot{w}_{i,j}$)

- Segmento rígido: aceleração angular do membro i no segmento $j = 0$.

$$\dot{w}_{i,0} = \text{rot}_i \dot{w}_{i-1, nseg-1} + (\text{rot}_i w_{i-1, nseg-1}) \times \dot{q}_{i,0} + \ddot{q}_{i,0} \quad (1.7)$$

- Segmento flexível: acelerações angular do membro i no segmento $j > 0$.

$$\dot{w}_{i,j} = \text{rlin}_i \dot{w}_{i,j-1} + (\text{rlin}_i w_{i,j-1}) \times \dot{q}_{i,j} + \ddot{q}_{i,j} \quad (1.9)$$

• Na análise tipo T1: $\ddot{q}_{i,j} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta}_{i,j,3} \end{Bmatrix}^T$ (1.10)

• Na análise tipo T2: $\ddot{q}_{i,j} = \begin{Bmatrix} 0 & \ddot{\theta}_{i,j,2} & \ddot{\theta}_{i,j,3} \end{Bmatrix}^T$ (1.11)

• Na análise tipo T3: $\ddot{q}_{i,j} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{i,j,1} & \ddot{\theta}_{i,j,2} & \ddot{\theta}_{i,j,3} \end{Bmatrix}^T$ (1.12)

3. Acelerações lineares ($v_{loc,i,j}$)

- Aceleração linear do membro i no segmento $j = 0$.

$$v_{loc,i,j} = \text{rot}_i \left\{ v_{loc,i-1, nseg-1} + \dot{w}_{i-1, nseg-1} \times v_{loc,i,j} + w_{i-1, nseg-1} \times (w_{i-1, nseg-1} \times v_{loc,i,j}) \right\} \quad (1.13)$$

- Aceleração linear do membro i no segmento $j > 0$.

$$v_{loc,i,j} = \text{rlin}_i \left\{ v_{loc,i,j-1} + \dot{w}_{i,j-1} \times v_{loc,i,j} + w_{i,j-1} \times (w_{i,j-1} \times v_{loc,i,j}) \right\} \quad (1.14)$$

4. Acelerações lineares dos centros de massa ($v_{cg,i,j}$)

- Aceleração linear do CM do membro i no segmento $j \geq 0$.

$$v_{cg,i,j} = v_{loc,i,j} + \dot{w}_{i,j} \times v_{cg,i,j} + w_{i,j} \times (w_{i,j} \times v_{cg,i,j}) \quad (1.15)$$

5. Forças e momentos aplicados nos centros de massa

- Força no CM do membro i no segmento $j \geq 0$.

$$F_{loc,i,j} = m_{i,j} v_{cg,i,j} \quad (1.16)$$

onde $m_{i,j}$ corresponde a massa do segmento j do membro i .

- Momento no CM do membro i no segmento $j \geq 0$.

$$M_{loc,i,j} = I_{i,j} + w_{i,j} \times (I_{i,j} w_{i,j}) \quad (1.17)$$

onde $I_{i,j}$ corresponde a matriz de inércia no CM do segmento j do membro i . Processo iterativo de cima para baixo, ou seja $i = n, \dots, 1$ e $j = nseg - 1, \dots, 0$.

6. Forças e momentos aplicados nas juntas activas e passivas

- Força do membro i na junta passiva do segmento $j = nseg - 1$

$$F_{tot,i,j} = F_{loc,i,j} + \text{rot}_{i+1,0} F_{tot,i+1,0} \quad (1.18)$$

- Força do membro i na junta do segmento $0 \leq i < nseg - 1$

$$F_{tot,i,j} = F_{loc,i,j} + \text{rlin}_{i,j+1} F_{tot,i,j+1} \quad (1.19)$$

- Momento na junta passiva do membro i na junta do segmento $j = nseg - 1$

$$M_{tot,i,j} = \text{rot}_{i+1,0} M_{tot,i+1,0} + v_{loc,i,j} \times \text{rot}_{i+1,0} F_{tot,i+1,0} + v_{cg,i,j} \times F_{loc,i,j} + M_{loc,i,j} \quad (1.20)$$

- Momento do membro i na junta do segmento $0 \leq j < nseg - 1$

$$M_{tot,i,j} = \text{rlin}_{i,j+1} M_{tot,i,j+1} + v_{loc,i,j} \times \text{rlin}_{i,j+1} F_{tot,i,j+1} + v_{cg,i,j} \times F_{loc,i,j} + M_{loc,i,j} \quad (1.21)$$

7. Valores dos elementos dos binários relacionados com as juntas activas e passivas

Elemento do binário correspondente no membro i na junta do segmento $j = 0$

$$B_{tot,i,0} = M_{tot,i,0,3} \quad (1.22)$$

Elemento do binário necessário no membro i na junta do segmento $0 \leq j < nseg - 1$

• Na análise do tipo T1: $B_{tot,i,j,1} = M_{tot,i,j,3}$ (1.23)

• Na análise do tipo T2: - para o eixo Y: $B_{tot,i,j,1} = M_{tot,i,j,2}$ (1.24)

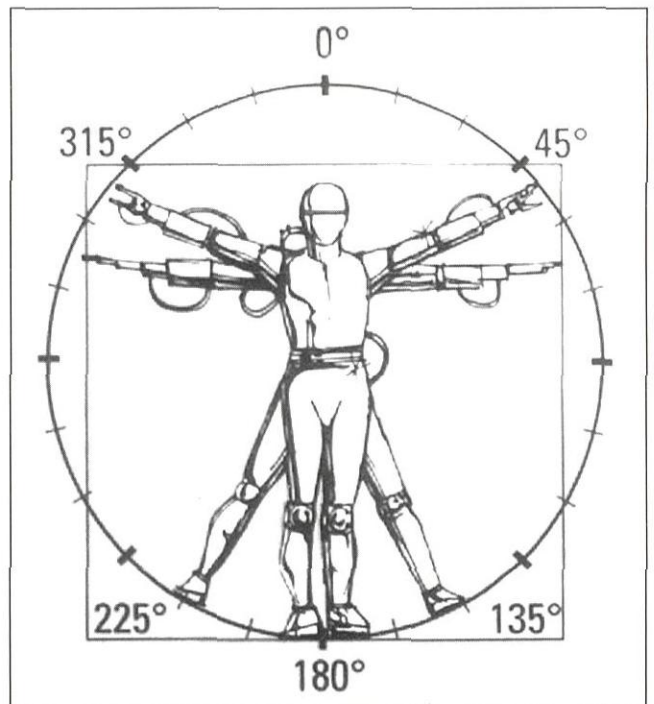
- para o eixo Z: $B_{tot,i,j,2} = M_{tot,i,j,3}$ (1.25)

• Na análise do tipo T3: - para o eixo X: $B_{tot,i,j,1} = M_{tot,i,j,1}$ (1.26)

- para o eixo Y: $B_{tot,i,j,2} = M_{tot,i,j,2}$ (1.27)

- para o eixo Z: $B_{tot,i,j,3} = M_{tot,i,j,3}$ (1.28)

Note-se que há a possibilidade de fazer algumas simplificações, sem perda de generalidade, tendo em vista uma programação mais compacta das variáveis independentes relacionadas com o tipo de análise realizada na estrutura. Dessa forma, nas rotinas elaboradas com a metodologia apresentada, essas simplificações foram consideradas, principalmente no que se refere aos produtos vectoriais que aparecem na formulação.



* Universidade Federal Fluminense; Centro Tecnológico - Escola de Engenharia; Dep. Engenharia Mecânica; Brasil

** Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto; Departamento de Engenharia Electro-técnica e Computadores