

Noções fundamentais sobre controlo de força de manipuladores robóticos

Neste trabalho apresenta-se a teoria que aborda o controlo de força de manipuladores robóticos de uma forma generalizada, isto é, para qualquer tipo de tarefa e de *robot*. Neste sentido, faz-se uma introdução e análise dos tipos de controlo de força propostos, sem recorrer a um enquadramento relativo à sua utilização.

O presente artigo começa com uma introdução onde se abordam as várias classes de controlo de força e se faz uma breve referência aos sistemas de aquisição de sinais de força. De seguida, faz-se uma análise detalhada dos métodos de controlo de impedância e de controlo híbrido.

1. INTRODUÇÃO

Muitas tarefas com manipuladores robóticos requerem controlo não só da posição do manipulador, mas também da força exercida pelo seu órgão terminal num objecto. Exemplos típicos destas tarefas são a montagem, o polimento, a rebarbagem, a abertura e o fecho de uma porta e a rotação de uma manivela. Nesta perspectiva, foram desenvolvidos dois métodos para controlo de força: controlo de impedância e controlo híbrido.

O controlo de impedância tem por objectivo controlar a posição e a força através do ajuste da impedância mecânica do órgão terminal às forças externas geradas pelo contacto com o ambiente do manipulador. A impedância mecânica é uma generalização do conceito de rigidez de um mecanismo relativamente a uma força aplicada. O controlo de impedância pode ser classificado nos métodos de *impedância passiva* e *impedância activa*. No método de impedância passiva, a impedância mecânica desejada do órgão terminal é conseguida através de elementos mecânicos passivos tais como molas e amortecedores. Por outro lado, o método de impedância activa realiza a impedância mecânica desejada através dos actuadores das juntas, usando um controlo por realimentação baseado nas medidas da posição, velocidade, força de contacto e outras variáveis associadas ao órgão terminal.

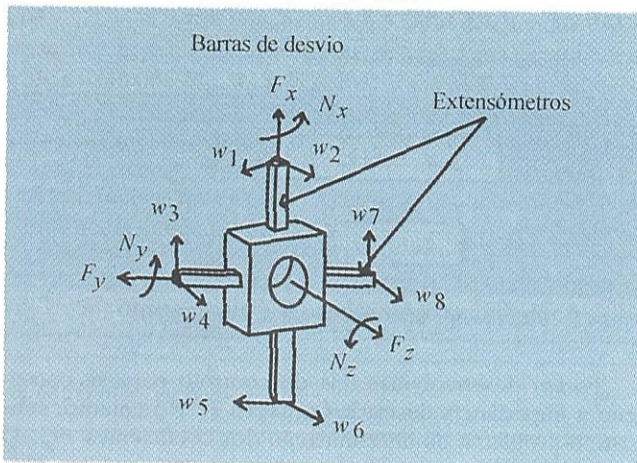
O controlo híbrido usa dois anéis distintos de realimentação, um para o controlo da posição e o outro para controlo da força. Neste método, as direcções segundo as quais a posição é controlada e as direcções segundo as quais é controlada a força, são determinadas para uma dada tarefa durante a execução do trabalho. Deste modo, as direcções segundo as quais são controladas a força e a posição dependem da tarefa e são definidas pelo utilizador. Assim, baseados nas me-



didadas de posição e de força, os actuadores das juntas aplicam correcções de modo a que as variáveis sigam as trajetórias desejadas de posição e força.

Os sensores do punho são montados entre a extremidade do braço e o órgão terminal e consistem em extensómetros que medem o desvio da estrutura mecânica devido a forças externas. Estes elementos sensores são pequenos, com elevada sensibilidade, leves e relativamente compactos. O *hardware* é geralmente construído com uma peça de metal sólida, tipicamente alumínio, de modo a reduzir a histerese e aumentar a exactidão na medida. Por exemplo, o transdutor mostrado na figura 1 usa oito pares de extensómetros de material semiconductor montados em quatro barras de desvio – um extensómetro de cada lado das barras.

Figura 1 – Transdutor de força no punho do robot



Os extensómetros nas extremidades abertas opostas das barras de desvio são ligados diferencialmente a um circuito cuja tensão de saída é proporcional à componente da força normal ao plano do extensómetro. Os oito pares de extensómetros estão orientados normalmente aos

eixos *x*, *y*, e *z* da base de coordenadas da força. Se o acoplamento entre eles for desprezível, as três componentes da força **F** e as do momento **N** podem ser determinadas, respectivamente, através da adição e subtração das tensões de saída. Isto pode ser feito pré-multiplicando as leituras dos oito transdutores por uma matriz de calibração dos sensores com dimensão 6 × 8 (Fu *et al.*, 1987).

2. CONTROLO DE IMPEDÂNCIA

2.1. Método da impedância passiva

Considere-se a tarefa de inserir uma cavilha num orifício com uma abertura de dimensão reduzida (*peg-in-hole*). Se se desejar realizar esta tarefa com um manipulador controlado apenas em posição, então é necessário que o controlo de posição seja extremamente preciso, pois a inserção da cavilha requer que o seu eixo seja alinhado quase exactamente com o eixo da cavidade. Para contornar esta dificuldade foi desenvolvido um dispositivo mecânico: o "Remote Center Compliance" (RCC). Trata-se de um dispositivo que se insere entre o punho e a mão e que apresenta uma grande elasticidade em certas direcções, o que o torna apropriado para tarefas desse tipo. Como um exemplo, na figura 2 apresenta-se um RCC tridimensional e um desenho conceptual de mão RCC.

O método de impedância passiva não requer nenhum anel de controlo de força e, deste modo, o sistema de controlo resulta muito simples. No entanto, o método é pouco versátil porque, para cada tarefa diferente é necessário desenvolver um sistema mecânico específico.

2.2. Método da impedância activa – caso de um grau de liberdade

Para ilustrar o método da impedância activa, de seguida vai ser adoptado um sistema simples com um grau de liberdade. A equação dinâmica do sistema mostrado na figura 3 é dada por

$$m_a \ddot{x} + d_a \dot{x} + k_a x = f_u + F \quad (1)$$

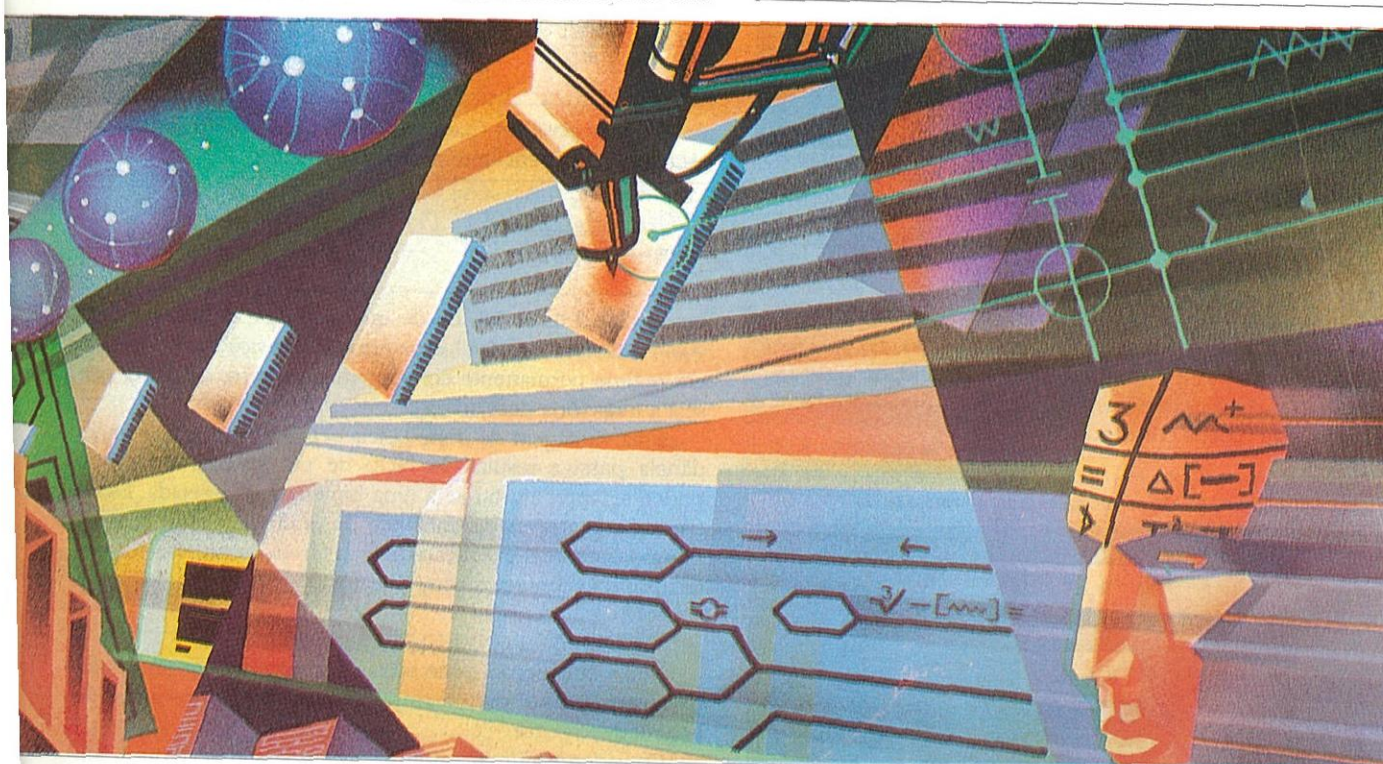
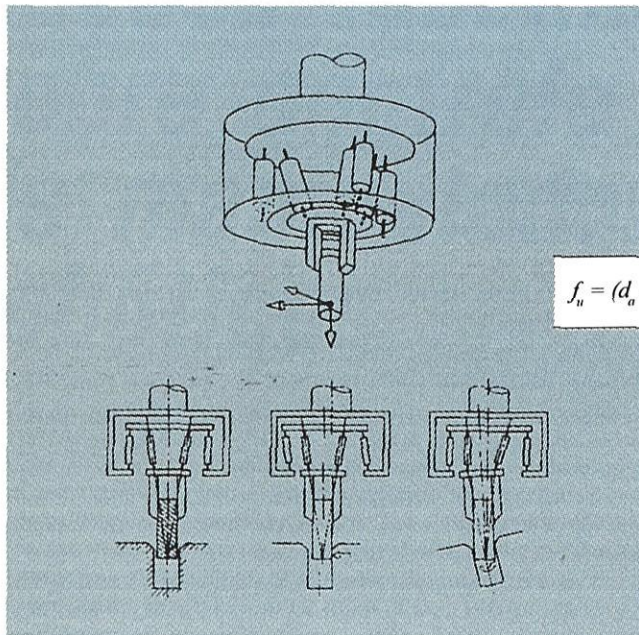
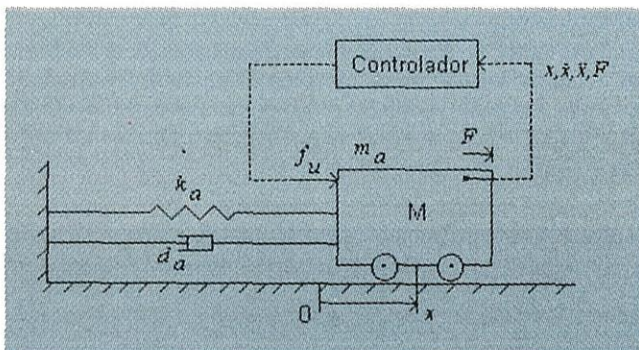


Fig. 2 - RCC tridimensional (em cima) e desenho conceptual de mão (em baixo)



onde m_a é a massa do corpo M , F é a força externa, f_u é a força de comando exercida, x é o deslocamento a partir do ponto de equilíbrio para $F=f_u=0$, k_a é a constante de elasticidade da mola e d_a é o coeficiente de amortecimento.

Figura 3 - Controlo de impedância activa de um sistema com um grau de liberdade

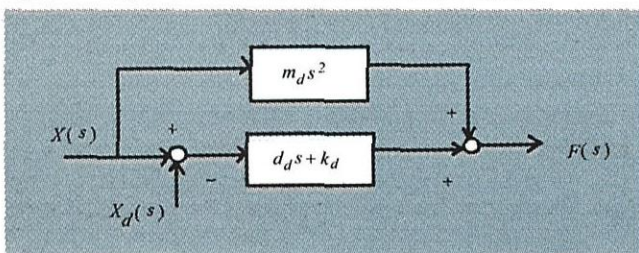


Considere-se que a impedância desejada do corpo para a força externa F obedece à expressão:

$$m_d \ddot{x} + d_d (\dot{x} - \dot{x}_d) + k_d (x - x_d) = F \quad (2)$$

onde m_d , d_d e k_d são respectivamente a massa, o coeficiente de amortecimento e o coeficiente de elasticidade desejados e x_d é a trajectória de posição desejada. A figura 4 mostra o diagrama de blocos correspondente.

Figura 4 - Diagrama de blocos correspondente à expressão (2)



Quando x , \dot{x} , e \ddot{x} são mensuráveis, pode-se utilizar a lei de controlo

$$f_u = (m_a - m_d) \ddot{x} + (d_a - d_d) \dot{x} + (k_a - k_d) x + d_d \dot{x}_d + k_d x_d \quad (3a)$$

Substituindo a equação (3a) em (1) resulta a expressão (2), mostrando, assim, que o sistema em malha fechada tem a impedância desejada.

Quando a força externa F é mensurável, a lei de controlo representada pela equação (3a) pode ser substituída por

$$f_u = (d_a - m_a m_d^{-1} d_d) \dot{x} + (k_a - m_a m_d^{-1} k_d) x - (1 - m_a m_d^{-1}) F + m_a m_d^{-1} (d_d \dot{x}_d + k_d x_d) \quad (3b)$$

Se for permitido ter a massa original m_a como a massa desejada m_d então as equações (3a) e (3b) reduzem-se a uma simples lei de realimentação de posição e velocidade:

$$f_u = (d_a - d_d) \dot{x} + (k_a - k_d) x + d_d \dot{x}_d + k_d x_d \quad (4)$$

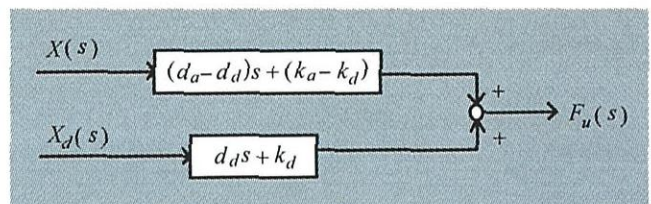


Figura 5 - Diagrama de blocos correspondente à equação (4)

Foram desenvolvidas leis de controlo para se conseguir a impedância desejada (equação 2). No entanto, subsiste o problema da determinação dos coeficientes m_d , d_d e k_d dessa equação. Quando o sistema não entra em contacto com outros objectos, ou quando se pode considerar a força externa F como sendo igual a zero, um procedimento consiste em fazer $m_d = m_a$ de modo à frequência natural

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}} \quad (5)$$

ser o maior possível (para melhorar a resposta transitória) e estabelecer o coeficiente de amortecimento

$$\zeta = \frac{d_d}{2\sqrt{m_d k_d}} \quad (6)$$

entre 0.7 e 1.0. Assim, desde que m_d , d_d e k_d sejam positivos, o sistema é estável e os erros de posição e velocidade em regime permanente convergem para zero, qualquer que seja a trajectória desejada x_d .

Uma vantagem da impedância activa em relação à impedância passiva resulta do facto de um sistema deste tipo poder, sempre, ajustar-se a uma impedância desejada. Esta é conseguida através da mudança dos valores de m_d , k_d e d_d mesmo durante a execução de uma tarefa considerando contactos e não-contactos com objectos.

2.3. Método da impedância activa - caso geral

Nesta subsecção generaliza-se a abordagem introduzida anteriormente para manipuladores com vários graus de liberdade.

Considere-se um manipulador com seis eixos e que a im-

pedância mecânica desejada para o seu órgão terminal é descrita pela equação:

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e = \mathbf{F} \quad (7)$$

onde \mathbf{y}_e é a diferença entre o valor corrente de um vector de manipulação \mathbf{y} e o seu valor desejado \mathbf{y}_d (vectores de dimensão 6×1):

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \quad (8)$$

Um exemplo típico de \mathbf{y} é o vector \mathbf{p} que expressa a posição e orientação do órgão terminal. Na equação (7), \mathbf{F} representa a força generalizada (dimensão 6×1) correspondente a \mathbf{y} . Em termos físicos, \mathbf{F} é a força externa exercida no órgão terminal pelo seu ambiente. As matrizes (6×6) \mathbf{M}_d , \mathbf{D}_d e \mathbf{K}_d são, respectivamente, a matriz de inércia, a matriz de coeficientes de amortecimento e a matriz de rigidez (matrizes simétricas e definidas não-negativas). Uma possibilidade de escolha de \mathbf{M}_d , \mathbf{D}_d e \mathbf{K}_d consiste em fazê-las diagonais e determinar os elementos da diagonal por considerações similares às do caso de um grau de liberdade. Na atribuição dos valores numéricos deve, também, ter-se em atenção as direcções nas quais é desejável uma impedância baixa ou uma impedância elevada.

O passo seguinte consiste em desenvolver uma lei de controlo que consiga obter a impedância desejada (equação 7). Suponha-se que a dinâmica do manipulador é descrita pela equação:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (9)$$

onde

$$\mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (10)$$

A relação entre \mathbf{y} e \mathbf{q} é dada pela equação cinemática:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_y(\mathbf{q}) \quad (11)$$

Diferenciando (11) resulta:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (12)$$

onde $\mathbf{J}_y = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{q}$. O momento nas juntas \mathbf{t}_p , equivalente à força externa \mathbf{F} é dado por

$$\boldsymbol{\tau}_F = \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \mathbf{F} \quad (13)$$

Logo, de (9) e (13) a equação dinâmica do manipulador com a força externa \mathbf{F} aplicada é:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \mathbf{F} \quad (14)$$

Supondo que $\mathbf{J}_y(\mathbf{q})$ é não-singular para qualquer \mathbf{q} na região considerada, das equações (12) e (14) obtém-se:

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c}_{Ny}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{J}_y^{-T}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F} \quad (15)$$

onde $\mathbf{J}_y^{-T} = (\mathbf{J}_y^T)^{-1}$ e

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_y^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_y^{-T}(\mathbf{q}) \quad (16)$$

$$\mathbf{c}_{Ny}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{M}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

Considere-se agora, uma lei de realimentação não-linear da forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \{ \mathbf{c}_{Ny}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{y}}) - \mathbf{M}_y(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d^{-1} (\mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e) + [\mathbf{M}_y(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d^{-1} - \mathbf{I}] \mathbf{F} \} \\ &= \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d^{-1} (\mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e) \\ &\quad + \{ \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{M}_d^{-1} - \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (18)$$

Neste caso, o sistema em malha fechada passa a ser descrito pela equação (7).

Se não for necessário que \mathbf{M}_d , a matriz de inércia da impedância desejada (equação 7), seja constante e independente de \mathbf{q} , e se for possível que seja igual à matriz de inércia corrente $\mathbf{M}_y(\mathbf{q})$, isto é, se a impedância desejada for descrita por

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e = \mathbf{K}_{Fd} \mathbf{F} \quad (19)$$

então, a lei de controlo (equação 18) reduz-se a:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \{ \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e - (\mathbf{K}_{Fd} - \mathbf{I}) \mathbf{F} \} \quad (20)$$

A matriz de coeficientes \mathbf{K}_{Fd} foi introduzida no lado direito da equação (19) para compensar o facto de não se poder modificar $\mathbf{M}_y(\mathbf{q})$. Por exemplo, pode-se produzir uma impedância grande (ou pequena) numa dada direcção, fazendo \mathbf{K}_{Fd} uma matriz diagonal e atribuindo um valor pequeno (ou grande) positivo ao elemento diagonal correspondente a essa direcção.

A primeira parcela do lado direito da equação (20) compensa as forças centrífuga e de Coriolis da dinâmica do manipulador. A segunda parcela compensa a não-linearidade da transformação entre $\dot{\mathbf{y}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$. Todos estes termos (excepto a força da gravidade) são funções de $\dot{\mathbf{q}}$ e são pequenos quando o manipulador se move a baixa velocidade. Quando estes termos são desprezáveis, a lei de controlo (equação 20) reduz-se a (ver figura 6):

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) [\mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e - (\mathbf{K}_{Fd} - \mathbf{I}) \mathbf{F}] \quad (21)$$

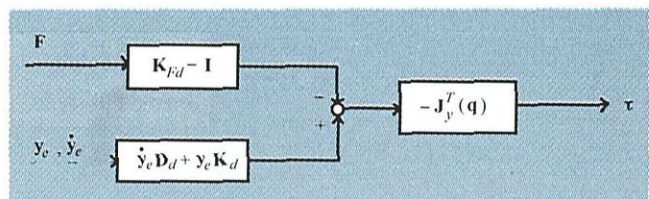


Figura 6 - Diagrama de blocos correspondente à equação (21)

Isto indica que o controlo de impedância é possível de atingir até um certo grau, por uma simples realimentação linear dos erros de posição e de velocidade, bem como da força externa. Se a força da gravidade não for desprezável, então é necessário adicionar a parcela $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ ao lado direito da equação (21) para conseguir a sua compensação, resultando:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) [\mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e - (\mathbf{K}_{Fd} - \mathbf{I}) \mathbf{F}] \quad (22)$$

Se, além disso, se considerar o caso em que $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$ e $\mathbf{K}_{rel} = \mathbf{I}$, então, fazendo-se $\mathbf{y}_e = \mathbf{J}_y(\mathbf{q})\mathbf{q}_e$ (\mathbf{q}_e é o vector erro nas juntas correspondente a \mathbf{y}_e) e assumindo que \mathbf{y}_e é pequeno, obtém-se:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_y^T(\mathbf{q}) \mathbf{K}_d \mathbf{J}_y(\mathbf{q}) \mathbf{q}_e \quad (23)$$

O controlo de impedância baseado na equação (23) é chamado *controlo de rigidez*, porque faz a matriz rigidez, expressa nas variáveis de manipulação, igual à matriz desejada \mathbf{K}_d . É também chamado *controlo acomodativo* (compliance control), porque o inverso da matriz rigidez é uma matriz de *acomodação*.

3. Controlo Híbrido

3.1. Controlo híbrido através de compensação por realimentação

O método do controlo híbrido foi desenvolvido sabendo que, em muitas tarefas que requerem um controlo de força, existem algumas direcções segundo as quais é necessário controlar a posição e outras direcções segundo as quais é necessário controlar a força. Estas direcções podem ser modificadas durante a tarefa mas, nenhuma delas, requer simultaneamente o controlo de posição e de força.

Figura 7 - Exemplo de controlo híbrido através de compensação por realimentação

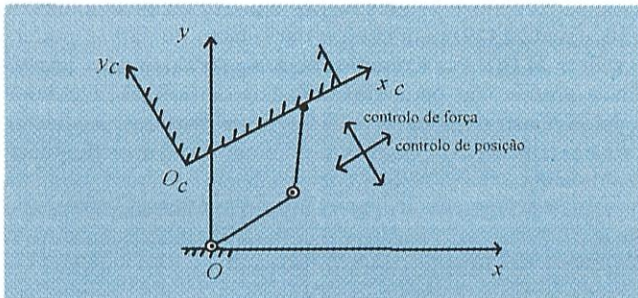
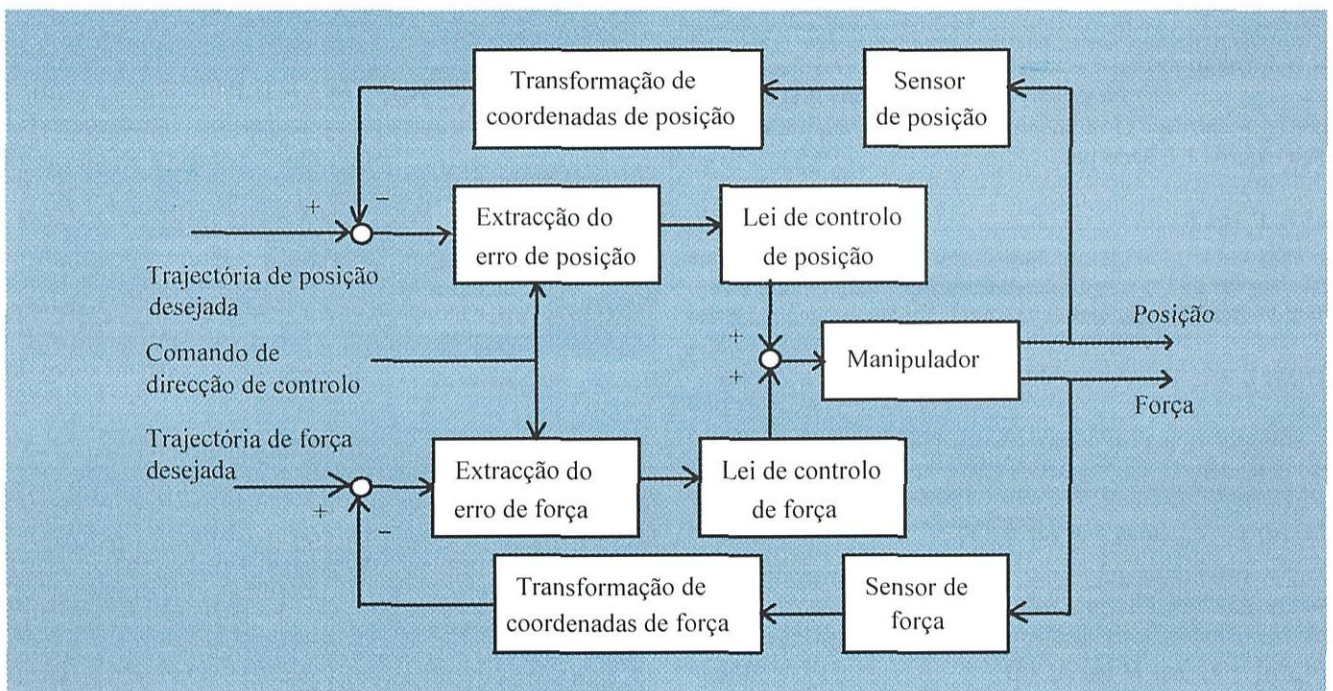


Figura 8 - Diagrama de blocos de um sistema de controlo híbrido



Considere-se uma base de coordenadas de duas dimensões $O_c x_c y_c$, de tal modo que o eixo x_c seja paralelo a uma superfície plana e o eixo y_c seja normal à superfície (ver figura 7). Neste caso, x_c é a direcção controlada em posição e y_c a direcção controlada em força. Suponha-se que existe um sensor de força no ponto terminal para medir a força de contacto, ${}^c\mathbf{f}(t)$, expressa na base O_c e que a posição do ponto terminal ${}^c\mathbf{y}(t)$, expressa na base O_c , é medida por um sensor de posição. Designando os valores desejados para a força e a posição respectivamente por ${}^c\mathbf{f}_d(t)$ e ${}^c\mathbf{y}_d(t)$, obtém-se expressões para os erros na base O_c como:

$${}^c\mathbf{y}_e(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [{}^c\mathbf{y}_d(t) - {}^c\mathbf{y}(t)] \quad (24)$$

$${}^c\mathbf{f}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [{}^c\mathbf{f}_d(t) - {}^c\mathbf{f}(t)] \quad (25)$$

Sendo \mathbf{J}_y a matriz Jacobiano de ${}^c\mathbf{y}$ com respeito a \mathbf{q} , pode-se transformar os erros (24) e (25) para o espaço de coordenadas das juntas, usando as seguintes equações:

$$\mathbf{q}_e(t) \equiv \mathbf{J}_y^{-1} {}^c\mathbf{y}_e(t) \quad (26a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{J}_y^{-1} {}^c\dot{\mathbf{y}}_e(t) \quad (26b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_e(t) = \mathbf{J}_y^T {}^c\mathbf{f}_e(t) \quad (26c)$$

Note-se que a equação (26a) é uma aproximação válida para o caso de pequenas variações de ${}^c\mathbf{y}_e$. A partir destas expressões de erro, pode-se agora calcular as forças $\boldsymbol{\tau}_p$ e $\boldsymbol{\tau}_f$ de comando das juntas. A força $\boldsymbol{\tau}_p$ destina-se a compensar o erro de posição e é dada por uma lei de controlo de posição. A força $\boldsymbol{\tau}_f$ destina-se a compensar o erro de força e é dada por uma lei de controlo de força. Aplicando a soma de $\boldsymbol{\tau}_p$ e $\boldsymbol{\tau}_f$ às juntas, a componente direccional x_c da posição desejada ${}^c\mathbf{y}_d(t)$, e a componente direccional y_c da força desejada ${}^c\mathbf{f}_d(t)$ serão objecto de um controlo apertado.

Embora sejam aplicáveis uma variedade de leis de controlo de posição e de força, um par típico consiste numa lei de controlo de posição PD (proporcional e diferencial)

$$\tau_p(t) = \mathbf{J}p_r \mathbf{q}_e(t) + \mathbf{K}_{pd} \dot{\mathbf{q}}_e(t) \quad (27)$$

e numa lei de controlo de força I (integral)

$$\tau_f(t) = \mathbf{K}_{fi} \int_0^t \tau_e(t') dt' \quad (28)$$

onde \mathbf{K}_{pp} , \mathbf{K}_{vp} e \mathbf{K}_{fi} são matrizes de ganho de realimentação. O momento de comando das juntas é dado por:

$$\tau(t) = \tau_p(t) + \tau_f(t) \quad (29)$$

O conjunto de equações (24) – (29) constitui um algoritmo de controlo híbrido para o manipulador. O eixo y_c é a direcção na qual se restringe a posição do órgão terminal. O eixo x_c é a direcção na qual se restringe a força exercida no objecto pelo órgão terminal.

A figura 8 representa o diagrama de blocos de um sistema de controlo híbrido baseado nas considerações anteriores. A função do bloco “extracção do erro de posição” consiste em detectar os erros de posição nas direcções de controlo de posição e desprezar aqueles que ocorrem nas direcções de controlo de força. O bloco “extracção do erro de força” tem a função complementar de detectar os erros de força nas direcções de controlo de força. Os blocos “lei de controlo de posição” e “lei de controlo de força” calculam as forças de comando das juntas usando os erros extraídos. No caso anterior, o sistema de controlo calcula as equações (26a), (26b), e (27) para a posição e calcula as equações (26c) e (28) para a força.

3.2. Controlo híbrido dinâmico

Nesta subsecção desenvolve-se uma abordagem para o controlo híbrido tendo em consideração a dinâmica do manipulador. Em primeiro lugar, é descrita a restrição no órgão terminal por um conjunto de hipersuperfícies nas coordenadas do órgão terminal. Em segundo lugar, derivam-se as equações básicas do controlo híbrido dinâmico a partir desta descrição de restrições e da dinâmica do manipulador. Estas equações permitem calcular as forças das juntas necessárias para se obterem as trajectórias de força e posição desejadas. Em último lugar, é apresentada uma estrutura básica do sistema de controlo híbrido dinâmico.

3.2.1. Descrição da restrição do órgão terminal

A restrição no órgão terminal causada pelo contacto com o seu ambiente exprime-se através de um conjunto de hipersuperfícies no espaço do vector posição do órgão terminal. Supõe-se que o ambiente é rígido e que, por essa razão, as hipersuperfícies são independentes da força aplicada pelo órgão terminal.

Considere-se um manipulador com seis graus de liberdade tal que a posição do órgão terminal com respeito a uma base de coordenadas fixa é representada pelo vector \mathbf{r} (de dimensão 6×1). Uma restrição do órgão terminal pode ser expressa por um conjunto de m hipersuperfícies ($m \leq 6$), da forma:

$$p_i(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

as quais são duplamente diferenciáveis e mutuamente independentes num subconjunto S do espaço Euclidiano \mathbb{R}^6 . Quando a equação (30) é unilaterial (no sentido da aproximação ser apenas efectuada por um lado), como no caso de se empurrar uma ferramenta contra a superfície de um objecto, assume-se que $p_i(\mathbf{r}) > 0$ dentro do objecto e $p_i(\mathbf{r}) < 0$ fora. A diferenciação da equação (30) com respeito ao tempo resulta:

$$\mathbf{E}_F \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (31)$$

onde

$$\mathbf{E}_F = [\mathbf{e}_{7-m}, \mathbf{e}_{8-m}, \dots, \mathbf{e}_6]^T \quad (32)$$

$$\mathbf{e}_{6-m+i} = \frac{\partial p_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (33)$$

A matriz \mathbf{E}_F é de ordem m , devido à independência considerada na equação (30). Diferenciando, de novo, a equação (31), obtém-se

$$\mathbf{E}_F \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{E}}_F \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (34)$$

Para exprimir a trajectória do órgão terminal nas superfícies de restrição dadas pela equação (30), supõe-se que existe uma função de dimensão $(6 - m)$:

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{s}(\mathbf{r}) = [s_1(\mathbf{r}), s_2(\mathbf{r}), \dots, s_{6-m}(\mathbf{r})]^T \quad (35)$$

onde $s_j(\mathbf{r})$ ($j = 1, 2, \dots, 6 - m$) são funções escalares duplamente diferenciáveis e $\{p_i(\mathbf{r}), i = 1, 2, \dots, m; s_j(\mathbf{r}), j = 1, 2, \dots, 6 - m\}$ são mutuamente independentes na região S . Se se definir

$$\mathbf{E}_p = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{6-m}]^T \quad (36)$$

onde

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial s_j(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad j = 1, 2, \dots, 6 - m \quad (37)$$

então obtém-se:

$$\dot{\mathbf{y}}_p = \mathbf{E}_p \dot{\mathbf{r}} \quad (38)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_p = \mathbf{E}_p \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{E}}_p \dot{\mathbf{r}} \quad (39)$$

Para cada \mathbf{r} na superfície restrição, os vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_6$ são linearmente independentes. O conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{6-m}\}$ representa as direcções nas quais o órgão terminal se pode mover e o conjunto $\{\mathbf{e}_{7-m}, \mathbf{e}_{8-m}, \dots, \mathbf{e}_6\}$ representa as direcções nas quais o órgão terminal tem movimento restringido. Deste modo, o sistema de coordenadas que tem a sua origem na posição corrente \mathbf{r} e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_6\}$ como sua base, pode ser chamado de *base das restrições*. Este resultado é uma generalização do sistema de coordenadas de restrição introduzida na subsecção 3.1. Faz-se $\mathbf{y}_p = \mathbf{p}(\mathbf{r})$ e denomina-se como $\mathbf{f}_p = [\mathbf{f}_p^T, \mathbf{f}_p^T]^T$ o vector força generalizada (de dimensão 6×1) correspondente a um vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_p^T, \mathbf{y}_p^T]^T$. As res-

trições naturais, em termos da base de coordenadas anterior, são dadas por $\dot{\mathbf{y}}_p = \mathbf{0}$ e $\mathbf{f}_p = \mathbf{0}$ e as restrições artificiais são dadas por $\dot{\mathbf{y}}_p = \dot{\mathbf{y}}_{pd}$ e $\mathbf{f}_p = \mathbf{f}_{pd}$. As restrições naturais são as restrições determinadas directamente da tarefa a efectuar. As restrições artificiais são aquelas que ocorrem devido às imposições do sistema de controlo. Assim, os valores de $\dot{\mathbf{y}}_{pd}$ e \mathbf{f}_{pd} são determinados pelo utilizador.

Seja \mathbf{E} uma matriz 6×6 tal que:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{E}_f \end{bmatrix} \quad (40)$$

Então, tem-se:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (41)$$

e

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{r}} \quad (42)$$

A interpretação física destas equações é:

- a componente normal da velocidade do órgão terminal relativamente à superfície de restrição é nula;
- a componente normal da aceleração do órgão terminal relativamente à superfície de restrição é determinada pela velocidade $\dot{\mathbf{r}}$.

A velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ do órgão terminal pode ser expressa também por um vector \mathbf{v} (de dimensão 6×1), consistindo nas velocidades de translacção e de rotação ao longo de cada eixo da base de coordenadas de referência. A relação entre $\dot{\mathbf{r}}$ e \mathbf{v} é:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_r \dot{\mathbf{r}} \quad (43)$$

onde \mathbf{T}_r é uma matriz de transformação (6×6) que é uma função de \mathbf{r} e que se supõe não-singular num subconjunto S.

3.2.2. Movimento do manipulador sob restrição e força de restrição

Considere-se um manipulador com n graus de liberdade e denomine-se o seu vector de juntas como \mathbf{q} . Como já se referiu anteriormente, a relação entre a posição \mathbf{r} do órgão terminal e o seu vector de juntas \mathbf{q} é

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_r(\mathbf{q}) \quad (44)$$

e diferenciando a equação (44) obtém-se

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}_r = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{q} \quad (45)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_r \dot{\mathbf{q}} \quad (46)$$

Como já se mencionou também, suponha-se que a dinâmica do braço é dada pela equação:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (47)$$

A aceleração das juntas $\ddot{\mathbf{q}}$ e a força restrição \mathbf{f}_p vão ser encontradas para o caso em que uma força de comando arbitrária $\boldsymbol{\tau}_c$ é aplicada ao manipulador no estado $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e sob a

restrição (30). Através das equações (31) e (43) obtém-se:

$$\mathbf{E}_f \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (48)$$

A força generalizada (de dimensão 6×1) correspondente a uma velocidade generalizada \mathbf{v} é dada pelas forças/momentos em cada eixo da base de coordenadas de referência. Por simplicidade, suponha-se que o contacto entre o órgão terminal e o objecto não tem atrito. Assim, pelo princípio do trabalho virtual, a força \mathbf{f} exercida na superfície pelo órgão terminal, expressa em termos da força generalizada, satisfaz a equação $\mathbf{v}^T \mathbf{f} = 0$ para qualquer velocidade \mathbf{v} realizável sob a equação (48). Deste modo, tem-se:

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{E}}_f \mathbf{f}_F \quad (49a)$$

e

$$\hat{\mathbf{E}}_f = \mathbf{E}_f \mathbf{T}_r^{-1} \quad (49b)$$

onde \mathbf{f}_F é um vector não conhecido de dimensão $m \times 1$. Na equação (49a) cada vector coluna de $\hat{\mathbf{E}}_f$ pode ser interpretado como um vector força referência, normal a cada hipersuperfície restrição. Por isso, o vector \mathbf{f}_F representa a força \mathbf{f} expressa nesses vectores força de referência. A força $-\mathbf{f}$ pode ser interpretada como sendo a força que restringe o órgão terminal à superfície. A força nas juntas $\boldsymbol{\tau}_f$ equivalente à força restrição $-\mathbf{f}$, é dada por:

$$\boldsymbol{\tau}_f = -(\mathbf{T}_r \mathbf{J}_r)^T \mathbf{f} = -\mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_f^T \mathbf{f}_F \quad (50)$$

Uma vez que $\boldsymbol{\tau}_c$ e $\boldsymbol{\tau}_f$ são aplicados às juntas através da substituição $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_f$ na equação (47) obtém-se:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_f^T \mathbf{f}_F = \mathbf{b}_1 \quad (51a)$$

onde

$$\mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\tau}_c - \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (51b)$$

Pelas equações (34) e (46) resulta:

$$\mathbf{E}_p \mathbf{J}_r \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_2 \quad (52a)$$

tal que:

$$\mathbf{b}_2 = -\mathbf{E}_p \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{E}}_p \dot{\mathbf{r}} \quad (52b)$$

Note-se que os vectores \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 podem ser calculados a partir dos valores dados \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$, isto é, a partir do estado do manipulador. Através das equações (51a) e (52a), obtém-se, finalmente:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \mathbf{b}_1 + (\mathbf{E}_f \mathbf{J}_r)^T \mathbf{K}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{E}_p \mathbf{J}_r \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}_1) \right\} \quad (53)$$

$$\mathbf{f}_F = -\mathbf{K}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{E}_p \mathbf{J}_r \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}_1) \quad (54)$$

onde

$$\mathbf{K} = (\mathbf{E}_p \mathbf{J}_r \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_f^T)^{-1} \quad (55)$$

3.2.3. Cálculo das forças de comando das juntas

Anteriormente foi derivado o movimento do manipulador e a força restrição para uma força arbitrária de comando das juntas $\boldsymbol{\tau}_c$. Agora considere-se o problema inverso. Assim, sejam $\dot{\mathbf{y}}_{pd}$ e \mathbf{f}_{pd} os valores desejados respectivamente para $\dot{\mathbf{y}}_p$ e \mathbf{f}_p .

Considere-se a seguinte lei de realimentação de estado não linear:

$$\tau_c = \tau_p + \tau_f \quad (56)$$

$$\tau_p = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (57)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_r^+ \left\{ \mathbf{J}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{E}}\mathbf{J}_r\dot{\mathbf{q}} \right) - \dot{\mathbf{J}}_r\dot{\mathbf{q}} \right\} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_r^+ \mathbf{J}_r)\mathbf{k} \quad (58)$$

$$\tau_f = \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_F^T \mathbf{u}_2 \quad (59)$$

onde \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são novos vectores de entrada, respectivamente, com dimensão $(6 - m) \times 1$ e $m \times 1$. Pode-se mostrar facilmente, usando as equações (53) a (55), que o sistema em malha fechada é um sistema linear descrito pelas fórmulas:

$$\ddot{\mathbf{y}}_p = \mathbf{u}_1 \quad (60a)$$

$$\mathbf{f}_F = \mathbf{u}_2 \quad (60b)$$

Deste modo, se os modelos dados pelas equações (30) e (47) forem correctos e se $\mathbf{y}_p(0) = \mathbf{y}_{pd}(0)$ e $\dot{\mathbf{y}}_p(0) = \dot{\mathbf{y}}_{pd}(0)$, no instante de tempo inicial $t = 0$, então as trajectórias de posição e força desejadas serão perfeitamente reproduzidas de acordo com as expressões:

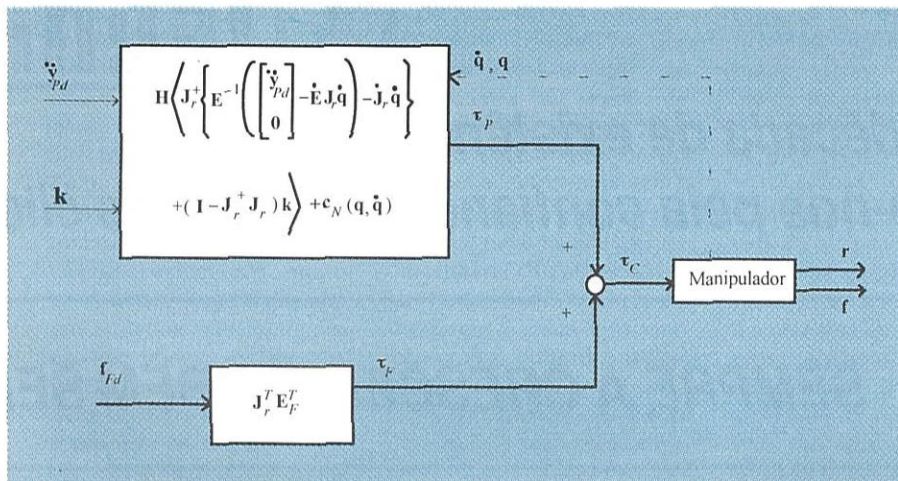
$$\mathbf{u}_1 = \ddot{\mathbf{y}}_{pd} \quad (61a)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_{Fd} \quad (61b)$$

O vector \mathbf{k} na equação (58) é uma função arbitrária do tempo. Este vector \mathbf{k} representa a arbitrariedade da aceleração das juntas que ocorre quando $n > 6$, isto é, quando se consideram manipuladores redundantes. Se $n = 6$ e a ordem de \mathbf{J}_r é 6, então o segundo termo do lado direito da equação (58) é nulo.

Com base nas considerações anteriores concluiu-se que a posição e a força podem ser controlados simultaneamente através da aplicação da soma da força τ_p (57) para se conseguir a aceleração desejada $\ddot{\mathbf{y}}_{pd}$. Isto consegue-se aplicando também, e simultaneamente, a força τ_f para se conseguir a força desejada \mathbf{f}_{Fd} como a força de comando das juntas. Para que este resultado seja atingido, tem que ser satisfeita a condição $\text{ordem}(\mathbf{J}) = 6$, ou seja, o manipulador não pode estar numa posição singular.

Figura 9 - Sistema de controlo híbrido dinâmico em malha aberta



Quando existe algum atrito entre a superfície restrição e o órgão terminal, e o seu valor exacto é conhecido, então pode-se compensar a força de atrito incluindo-a na parcela $\mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ da equação (57).

3.2.4. Estrutura básica do sistema de controlo híbrido dinâmico

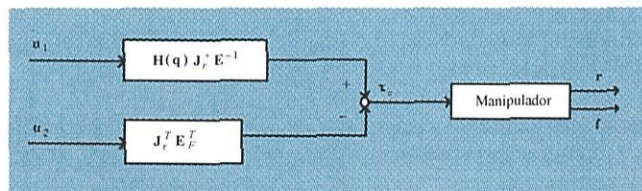
Se as equações (30) e (47) estiverem totalmente correctas, então o sistema em malha aberta da figura 9 pode produzir ao mesmo tempo a posição e a força desejadas. No entanto, devido a erros de modelização e a perturbações imprevisíveis, a resposta real deste sistema pode diferir da desejada. Assim, é necessário adicionar um compensador servo ao sistema.

Em muitas tarefas que requerem um controlo de força, é suficiente operar manipuladores a velocidades baixas. Em tais casos, podem-se desprezar os termos $\mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\dot{\mathbf{E}}\mathbf{J}_r\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{J}}_r\dot{\mathbf{q}}$, nas equações (57) e (58), e desenvolver a lei de controlo linear aproximada:

Esta lei de controlo e um compensador servo (para se aplicar na determinação de \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2) constituem um controlador híbrido simplificado (ver figura 10).

$$\tau_c = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_r^+ \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_F^T \mathbf{u}_2 \quad (62)$$

Figura 10 - Diagrama de blocos para o controlador híbrido simplificado



4. BIBLIOGRAFIA

- Asada, H. e Slotine, J. - J. E., 1986, *Robot Analysis and Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Fu, K. S., Gonzalez, R. C. e Lee, C. S. G., 1987, *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, N.Y..
- Koivo, A. J., 1989, *Fundamentals for Control of Robotic Manipulators*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Spong, M. W. e Vidyasagar, M., 1989, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Yoshikawa, T., 1987, *Dynamic Hybrid Position/Force Control of Robot Manipulators - Description of Hand Constraints and Calculation of Joint Driving Force*, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3, No. 5, pp. 386-392.
- Yoshikawa, T., 1990, *Foundations of Robotics - Analysis and Control*, The MIT Press, Cambridge - Massachusetts, London-England.

Este trabalho tem o apoio do Programa Ciência

* Eng.º Electrotécnico, Bolseiro da JNICT

** Prof. Auxiliar do Depart.º de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da FEUP