



## Fractais - Aplicações em Engenharia

**TIAGO ROBERTO FERREIRA BAPTISTA**

Setembro de 2013

# FRACTAIS – APLICAÇÕES EM ENGENHARIA

Tiago Roberto Ferreira Baptista



Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Automação

Área de Especialização de Automação e Sistemas

Departamento de Engenharia Electrotécnica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

2013



Este relatório satisfaz, parcialmente, os requisitos que constam da Ficha de Disciplina de  
Tese/Dissertação, do 2º ano, do Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de  
Computadores

Candidato: Tiago Roberto Ferreira Baptista, N° 1010665, 1010665@isep.ipp.pt

Orientação científica: Carla Pinto, cap@isep.ipp.pt

Co-orientação Científica: J. A. Tenreiro Machado, jtm@isep.ipp.pt



Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Área de Especialização de Automação e Sistemas

Departamento de Engenharia Electrotécnica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

7 de Setembro de 2013



## *Agradecimentos*

Esta jornada começou como um desafio, mas com o passar do tempo tornou-se um objetivo e uma meta a cumprir.

Agradeço a todas as pessoas que me apoiaram especialmente a Natália pela paciência e pelo apoio demonstrado que em momentos mais difíceis sempre me ajudou a ultrapassar.

No meio académico, quero expressar o meu agradecimento à professora Carla Pinto, pelo apoio incondicional demonstrado, desde o início até ao final deste trabalho, e pelo professor Tenreiro Machado agradeço também toda a disponibilidade demonstrada.

A todos um muito Obrigado...

*Tiago Baptista.*

...E também o mundo,  
Com tudo aquilo que contém,  
Com tudo aquilo que nele se desdobra  
E afinal é a mesma coisa variada em cópias iguais.

*Fernando Pessoa - Poesias de Álvaro de Campos*



## *Resumo*

Num universo despovoado de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e de medir, a geometria fractal revelou-se um instrumento poderoso no tratamento de fenómenos naturais, até agora considerados erráticos, imprevisíveis e aleatórios. Contudo, nem tudo na natureza é fractal, o que significa que a geometria euclidiana continua a ser útil e necessária, o que torna estas geometrias complementares.

Este trabalho centra-se no estudo da geometria fractal e na sua aplicação a diversas áreas científicas, nomeadamente, à engenharia.

São abordadas noções de auto-similaridade (exata, aproximada), formas, dimensão, área, perímetro, volume, números complexos, semelhança de figuras, sucessão e iterações relacionadas com as figuras fractais. Apresentam-se exemplos de aplicação da geometria fractal em diversas áreas do saber, tais como física, biologia, geologia, medicina, arquitetura, pintura, engenharia eletrotécnica, mercados financeiros, entre outras.

Conclui-se que os fractais são uma ferramenta importante para a compreensão de fenómenos nas mais diversas áreas da ciência. A importância do estudo desta nova geometria, é avassaladora graças à sua profunda relação com a natureza e ao avançado desenvolvimento tecnológico dos computadores.

### *Palavras-Chave*

Fractal, caos, não-linearidade, similaridade, dimensão, leis de potência, geometria, Natureza.



## *Abstract*

In a universe of imperfect geometric shapes, where irregular surfaces abound, hard to represent and to measure, the fractal geometry proved to be a powerful tool in the treatment of natural phenomena, so far considered erratic, unpredictable and random. However, not everything in nature is fractal, meaning that Euclidean geometry continues to be useful and necessary, which makes these complementary geometries.

This work focuses on fractal geometry and its application to several scientific areas, such as engineering.

Are addressed notions of self-similarity (accurate, statistics), shapes, size, area, perimeter, volume, complex numbers, series and iterations of functions related to the fractal figures. Examples of the application of fractal geometry in various areas of knowledge, such as physics, biology, geology, medicine, architecture, painting, computer engineering, electrical engineering, financial markets, among others, are presented.

It is concluded that the fractals are an important tool for the understanding of phenomena in the most diverse areas of science. The importance of the study of this new geometry is overwhelming, due to its deep relationship to nature and to advanced technological development of computers.

### ***Keywords***

Fractal, chaos, non-linearity, similarity, dimension, power laws, geometry, nature.



# Índice

<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	<b>I</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>III</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>V</b>
<b>ÍNDICE</b> .....	<b>VII</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	<b>IX</b>
<b>ÍNDICE DE TABELAS</b> .....	<b>XI</b>
<b>ACRÓNIMOS</b> .....	<b>XIII</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO .....	3
1.2. OBJETIVOS .....	6
1.3. CALENDARIZAÇÃO .....	6
1.4. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO .....	7
<b>2. FRACTAIS</b> .....	<b>9</b>
2.1. FRACTAIS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS .....	16
2.2. FRACTAIS EM SISTEMAS DINÂMICOS .....	34
<b>3. APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL</b> .....	<b>43</b>
3.1. NA NATUREZA .....	44
3.2. FRACTAIS CRIADOS PELO HOMEM .....	61
3.3. NOS MERCADOS FINANCEIROS .....	68
<b>4. CONCLUSÕES</b> .....	<b>71</b>
<b>REFERÊNCIAS DOCUMENTAIS</b> .....	<b>73</b>



## Índice de Figuras

Figura 1	Comparação entre dimensão euclidiana (à esquerda) e fractal (à direita).....	11
Figura 2	Exemplo de tamanhos de grelhas usados no <i>box-counting</i> .....	13
Figura 3	Couve-flor (brócolis, à esquerda) e carvalho (à direita) [20]. .....	13
Figura 4	Curva de Peano (à esquerda) e conjunto de Cantor (à direita) [30]. .....	14
Figura 5	Curva de Koch (à esquerda) e esponja de Menger (à direita) [25]. .....	14
Figura 6	Triângulo de Sierpinski, algumas iterações [27]. .....	15
Figura 7	Conjunto de Mandelbrot (à esquerda) e conjunto de Julia (à direita). .....	15
	16	
Figura 8	Borboleta de Lorenz (à esquerda) e teoria do caos (à direita) [21]. .....	16
Figura 9	Sistema circulatório [59]. .....	17
Figura 10	Rugosidades dos intestinos e do cérebro [59]. .....	18
Figura 11	Segmento de reta inicial do processo iterativo da curva de Koch. ....	18
Figura 12	1ª Iteração do processo iterativo da curva de Koch [25]. .....	18
Figura 13	2ª Iteração do processo iterativo da curva de Koch [25]. .....	19
Figura 14	n-ésima iteração do processo iterativo da curva de Koch [28]. .....	19
Figura 15	Ampliação de uma parte da curva de Koch [28]. .....	20
Figura 16	Figura inicial da ilha de Koch e os primeiros 5 passos iterativo [25]. .....	20
Figura 17	Divisão de um triângulo equilátero em nove triângulos equiláteros iguais [48]. .....	23
Figura 18	Exemplos de dimensões de objetos superfícies e sólidos [10]. .....	24
Figura 19	Apresentação de 3 iterações e respetivos intervalos que constituem o conjunto de Cantor [15]. .....	26
Figura 20	Zoom de algumas iterações do conjunto de Cantor [15]. .....	27
Figura 21	Processo iterativo do triângulo de Sierpinski (primeiras 4 iterações)[27]. .....	28
Figura 22	Tapete de Menger (à esquerda) e esponja de Menger (à direita)[3]. .....	29
Figura 23	Processo recursivo da construção da curva de Peano [28]. .....	30
Figura 24	Figura inicial (à esquerda) e geradora da curva de Hilbert (à direita) [22]. .....	32
Figura 25	Processo recursivo da construção da curva de Hilbert [22]. .....	32
Figura 26	Curva de Hilbert a 3 dimensões. À direita, as cores representam o número de iterações [22].	33
Figura 27	Exemplos de alguns conjuntos de Julia [26]. .....	36
Figura 28	Coloração dos pontos em relação à sua distância a origem. ....	38
Figura 29	Conjunto de Mandelbrot como catálogo de conjuntos de Julia. ....	39
Figura 30	Algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot [28]. .....	39
Figura 31	Jogo do Caos (as 5 primeiras iterações) [48]. .....	41

Figura 32	50000 Iterações do jogo do caos [48]. .....	41
Figura 33	Árvore que pode ser abrigo para diferentes animais (à esquerda visão superficial) e (à direita ampliação de um tronco de árvore) [18]. .....	46
Figura 34	Auto-similaridade aproximada na couve romanesca (fractal natural). .....	47
Figura 35	Auto-similaridade aproximada na estrutura das folhas. ....	47
Figura 36	Auto-semelhança aproximada na estrutura das folhas [23]. ....	47
Figura 37	Imagem de um corte transversal de um <i>Nautilus Shell Pompilius</i> [23]. ....	48
Figura 38	Foto de um satélite: Manaus, na confluência dos rios Solimões e Negro [15]. ....	51
Figura 39	Vista aérea rio Sabinoso do novo México [15]. ....	51
Figura 40	Vista aérea de lagoas no Norte do Alasca [20]. ....	52
Figura 41	Escalas de diferentes dimensões [19]. ....	53
Figura 42	Dimensões de algumas linhas costeiras [19]. ....	53
Figura 43	Método da contagem de caixas para o cálculo da dimensão de linhas costeiras. ....	54
Figura 44	Imagens pretas e brancas usadas para o cálculo da dimensão fractal [49]. ....	55
Figura 45	Ramificação no sistema respiratório e circulatório no pulmão e ampliação (à direita) [46].	55
Figura 46	Imagem de ramificações em neurónios [17]. ....	56
Figura 47	Capacidade de rugosidade numa célula de ADN. ....	56
Figura 48	Batimento cardíaco caótico [51]. ....	57
Figura 49	Análise de padrões fractais na retina humana [4] .....	58
Figura 50	Fractais presentes em relâmpagos [23]. ....	60
Figura 51	Cristais de flocos de neve [23]. ....	60
Figura 52	Auto semelhança na arte [15]. ....	62
Figura 53	Evolução da dimensão fractais nos quadros de Pollock [15]. ....	62
Figura 54	Regras para construção fractal de uma árvore (à esquerda) e um exemplo de imagem de um fractal obtido no Netlog. ....	63
Figura 55	Auto similaridade nos pormenores das treliças [15]. ....	64
Figura 56	Auto similaridade na arquitetura [16]. ....	65
Figura 57	Comparação entre o método de Poisson e fractal [15]. ....	66
Figura 58	Modelo Sierpinski (à esquerda) e curva de Koch (à direita) [66]. ....	67
Figura 59	Exemplo de uma curva dos mercados de ações com variações bruscas [34]. ....	69

## *Índice de Tabelas*

Tabela 1	Calendarização do projeto.....	6
Tabela 2	Iterações, comprimento do segmento, número de segmentos e perímetro.....	21
Tabela 3	Comportamento da curva de Koch.....	21
Tabela 4	Área e perímetro do triângulo de Sierpinski até 3ª iteração.....	28
Tabela 5	Iterações, número de segmentos, comprimento de segmentos, comprimentos da linha da curva de Peano até a 4 iteração.....	31
Tabela 6	Número de quadrados e comprimento de cada lado do quadrado.....	33
Tabela 7	Comportamento do conjunto em torno de $Z_0$ .....	35
Tabela 8	Comportamento do conjunto em torno do ponto C.....	37
Tabela 9	Tabela de dimensões fractais de alguns elementos existentes na natureza [13].....	49
Tabela 10	Os principais métodos fractais aplicados em análises de imagens médicas [13].....	58



## *Acrónimos*

SFI – Sistemas de Funções Iteradas

LP – Lei de Potência

ADN – Ácido desoxirribonucleico

GPS – Sistema de posicionamento global



# 1. INTRODUÇÃO

Muitos objetos conhecidos e que vemos no dia-a-dia, por possuírem geometria muito simples, podem ser descritos através de formas ‘ideais’, como retângulos, cilindros, cones ou esferas. A maioria dos objetos desenvolvidos pelo homem pode ser facilmente descrita por um conjunto de formas euclidianas básicas, mas o que dizer dos objetos encontrados na natureza? Quem é capaz de descrever a forma de uma árvore, de uma montanha ou de um floco de neve?

Desde que Euclides, famoso matemático da Grécia antiga, desenvolveu a hoje designada *geometria euclidiana*, prevaleceu um certo comodismo, baseado na ideia de que todos os objetos podem ser descritos através de composições de formas regulares simples. Euclides definiu a natureza como um conjunto de formas regulares básicas, como linhas, retângulos, cones e triângulos. Todavia é visível que as formas ideais de Euclides são apenas uma aproximação, na maioria dos casos grosseira da realidade dos objetos naturais [2]. Na época de Euclides, por volta de 300 A.C., e até há poucos anos atrás, isto era aceitável. Porém, os recentes avanços da tecnologia dos computadores e da matemática levaram ao surgimento de novas técnicas capazes de descrever com maior exatidão e realismo os padrões encontrados na natureza. E assim surgiu a geometria fractal. Anteriormente, matemáticos como Galileu (1564-1642), recorreram a triângulos e outras figuras euclidianas para ler a natureza, Mandelbrot, contudo utilizou outra linguagem para este

mesmo propósito: a dos fractais. Mandelbrot introduziu o termo fractal em 1977, baseado no nome latino “fractus”, derivado do verbo “frengere” que significa partir, quebrar [10]. A principal característica de um fractal é a propriedade do nível de detalhe do “rendilhado/rugosidade” gráfico que apresenta não desvanecer com a escala, sendo que, em muitos casos, uma ampliação sobre quaisquer partes do fractal revela pequenas cópias da imagem original, e isto acontece independentemente da ampliação utilizada num determinado intervalo.

Na natureza não se pode esperar encontrar um triângulo perfeito todavia, as formas fractais são muito mais verosímeis, como se fossem fruto de uma geometria mais ligada à natureza. O impacto científico da geometria fractal alastrou a outras áreas, tornando a palavra “fractal” vulgar em trabalhos de ciência ou mesmo de humanidades. As actuais aplicações dos fractais são inúmeras. Por exemplo, na realização de imagens para cenários de filme, medição das zonas costeiras (Mandelbrot (1967) [43]), descrição de árvores [42], e de culturas bacterianas [13][44], vasos sanguíneos [40], nos pulmões [46], na música onde a repetição são características gerais [9], em áreas financeiras [32], entre outras.

A facilidade com que se pode hoje criar fractais novos, usando computadores, dá ilusão de proximidade com teorias científicas elaboradas, como nunca antes sucedera. Por outro lado, as imagens, sendo absolutamente novas, não representam nenhuma realidade em particular, mas diferentes possibilidades mais ou menos plausíveis.

Neste trabalho serão descritas as várias propriedades de um fractal, far-se-á o cálculo de dimensões fractais e estudar-se-ão aplicações dos fractais em diversos campos das ciências, como a engenharia, a biologia, medicina e outras mais.

## 1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

O tema dos fractais é bastante recente, pois apenas lhe foi dada importância a partir da segunda metade do século XIX. Contudo os fractais já demonstraram ter correlação com quase todos os domínios do conhecimento e surgem constantemente novas aplicações dos mesmos. Os fractais “puros” estão presentes apenas na matemática, mas podem servir para modelar fenómenos e objetos da física, da astronomia, da sismologia, da meteorologia, da biologia, da medicina, das ciências humanas, da economia, de diversas formas de arte, da informática, da indústria e outros mais.

Fractais como os conjuntos de Cantor e de Sierpinski são gerados através de um processo de remoção de alguma parte da figura inicial enquanto os conjuntos de Koch, Peano e de Hilbert são gerados através de um processo de alteração da figura inicial.

Os seguintes fractais clássicos foram apresentados na segunda metade do século XIX, pelos matemáticos: Cantor (Georg Cantor (1859-1918) matemático russo cujos seus trabalhos ligados com a teoria dos conjuntos estão na base do aparecimento do famoso fractal conjunto de Cantor), Koch (Helge Von Koch (1870-1924) matemático sueco que introduziu em 1904 o fractal conhecido como a curva de Koch), Sierpinski (Wacław Sierpinski (1882-1969) matemático polaco que criou em 1916 o fractal que recebeu o seu nome triângulo de Sierpinski), Peano (Giuseppe Peano (1858-1932) matemático italiano, descreveu a primeira curva em 1890. Desde então, foram descobertas, por outros matemáticos, curvas que por possuírem características comuns à primeira, foram denominadas curvas de Peano) e Hilbert (David Hilbert (1862-1943), matemático alemão que criou o fractal a curva de Hilbert) investigavam objetos que punham em causa algumas das bases matemáticas da época relacionadas com a análise, álgebra e geometria.

Em meados do século XIX, não havia quase nenhuma representação gráfica dos fractais e despendia-se muito tempo em cálculos devido à inexistência de computadores na época. Por vezes, conjuntos deste tipo, com propriedades “estranhas” - curvas que não eram diferenciáveis em nenhum ponto, auto-similares, com comprimento indefinido ou que não podia ser medido, às quais o conceito de dimensão topológica parecia não se adequar - eram vulgarmente apelidados de *“monstros e de casos patológicos”*, sem interesse

matemático e eram apresentados sem qualquer suporte de imagem ou apenas acompanhados por esboços de pouca qualidade gráfica [2].

Em 1970, Benoit Mandelbrot, retomou o interesse pelas questões relacionadas com a publicação de Gaston Julia e, com a ajuda dos meios computacionais que tinha ao seu dispor na IBM, onde trabalhava, iniciou a partir de 1957, no centro de investigação Thomas J. Watson [59], o seu estudo. Contudo começou primeiramente por estudar séries temporais relacionadas com preços e posteriormente com um problema que, naquela época, preocupava os técnicos da multinacional, e que estava relacionado com o ruído das linhas telefónicas utilizadas para interligar computadores. Mandelbrot para o problema propôs um modelo baseado no conjunto de Cantor e demonstrou que não era possível eliminar os ruídos, mas poder-se-ia estabelecer um controlo dos mesmos mediante oportunas estratégias de redundância. Em 1962, Mandelbrot publicou a memória, uma das suas primeiras referências sobre séries temporais em finanças. Em 1967 publicou, sobre um tema que encontrou numa publicação do cientista britânico Lewis F. Richardson.

A sucessão de todos os seus trabalhos de investigação viria dar origem ao trabalho de 1975 intitulado. E nesse trabalho que é introduzido o termo *fractal* para identificar as classes de objetos rugosos, quebrados e aparentemente sem forma que reinam absolutamente no mundo em que vivemos. “A geometria fractal é a geometria das formas irregulares que encontramos na natureza” [3][8]. A definição de fractal ainda não está totalmente definida e precisa. Até mesmo a matemática, a mais concisa de todas as línguas, tem dificuldade em descrever um fractal [52]. A geometria fractal consiste numa extensão da geometria euclidiana tradicional. Ela não a substitui, enriquece-a, trazendo a possibilidade de descrever com precisão objetos diretamente relevantes para a compreensão do mundo real. A geometria fractal pode ser vista como um novo idioma ou uma nova linguagem, assim torna-se possível descrever a forma de uma nuvem com a mesma precisão da arquitetura de uma casa.

Mandelbrot em 1980 apresenta, o primeiro traçado detalhado do gráfico do sistema dinâmico no campo complexo denominado conjunto de Mandelbrot ( $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ , onde  $C$  é um número complexo e o parâmetro em questão) é provavelmente o fractal mais popular e, possivelmente, um dos objetos matemáticos contemporâneos visualmente mais conhecidos neste meio.

Mandelbrot juntamente com Richard F. Voss (colegas de trabalho na IBM) criaram, um sistema gráfico computacional inovador que permitiu criar imagens de fractais a cores até então nunca vistas e que foram publicadas no livro na edição de 1982. Neste mesmo livro Mandelbrot coloca os fractais num sem número de contextos científicos. Um pouco mais tarde aplicaram-se estes métodos, e outros mais avançados na criação de imagens de paisagens, montanhas, nuvens e de galáxias para filmes como os da saga *Star Wars* e em outros mais [59].

Mandelbrot, ao escrever variadíssimos artigos que lidam com a geometria de fenómenos observados em vários campos da ciência e de forma criativa, gerou um interesse sobre este assunto.

A interdisciplinaridade na geometria fractal, esta vincada nos próprios livros de Mandelbrot que discutem árvores, rios, montanhas, nuvens, pulmões, linhas de água, turbulência, economia, frequência de palavras num texto, e muitos outros tópicos interligados por conceitos geométricos.

## 1.2. OBJETIVOS

Objetivos desta dissertação são apresentar os fractais, mostrando as várias propriedades, comparar as aplicações da geometria fractal relativamente à geometria euclidiana e mostrar as várias aplicações que estes podem ter nos mais diversos campos da ciência.

## 1.3. CALENDARIZAÇÃO

A calendarização das várias fases de desenvolvimento do trabalho é na seguinte tabela (Tabela 1). As tarefas desenvolvidas consistiram no estudo de bibliografia, que teve como base artigos científicos e livros na área; na obtenção e análise de informação existente e, por fim, na elaboração do relatório final. O estudo da bibliografia foi a tarefa que se prolongou mais no tempo, dada a falta de conhecimento do mestrando sobre este assunto.

		Out.				Nov.				Dez.				Jan.				Fev.				Mar.				Abr.				Mai.				Jun.				Jul.			
ETAPAS	Semanas	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Recolha bibliografia	10 s	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Estudo da bibliografia	14 s									■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Estudo de software's Netlogo e Ultrafractal	8s																					■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
Elaboração do relatório	8 s																																	■	■	■	■	■	■	■	■

Tabela 1 Calendarização do projeto.

## **1.4. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO**

O relatório foi estruturado em 4 capítulos, nomeadamente:

1. Introdução: é realizada uma contextualização sobre os fractais e sobre a importância desta nova forma de geometria;
2. Fractais: apresentam-se os vários tipos de fractais, propriedades, características, cálculos de dimensão fractal;
3. Aplicações da geometria fractal: nos campos da geologia, biologia, física, medicina, música, engenharias, área financeira;
4. Conclusões.



## 2. FRACTAIS

Hoje em dia, com o desenvolvimento dos computadores, a aplicação prática dos fractais é cada vez maior, constituindo uma nova perspectiva de encarar a realidade e também uma ferramenta científica de enorme potencialidade e que se encontra ainda a dar os primeiros passos. No entanto, aquilo que mais contribui para a sua divulgação é certamente a espetacularidade das suas imagens que, no mínimo, se podem considerar intrigantes e bizarras.

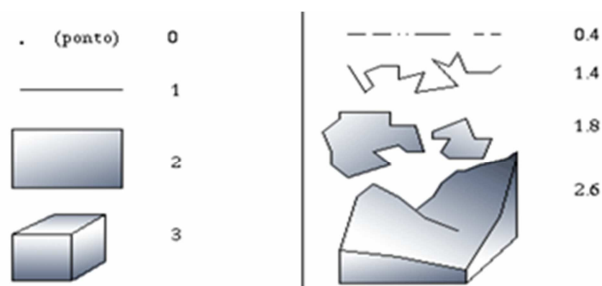
Um fractal tem como características a escala, complexidade, auto-similaridade (exata e aproximada) e dimensão. A sua definição não se enquadra nas definições clássicas da geometria euclidiana [11].

Um objeto ou figura geométrica é um fractal se apresentar uma ou mais das seguintes propriedades:

- Ter uma “estrutura fina/ rugosa”, que contém detalhe numa escala arbitrariamente pequena e quanto mais se amplia a sua imagem, mais detalhes é possível observar. Isto não ocorre com figuras geométricas convencionais, como exemplo: a circunferência, se ampliarmos suficientemente um pequeno arco da mesma e dele retirarmos um pequeno arco que também ampliaremos e repetindo sucessivamente o processo, obteremos um arco virtualmente retilíneo.

- Ser demasiado irregular para se poder descrever facilmente em termos clássicos, quer em termos globais quer ao nível da sua geometria local. Não se trata do lugar de pontos que satisfaz uma determinada condição, num dos pontos que representam o conjunto solução de uma equação simples, sendo também complicado descrever o que se passa à volta de cada um dos seus pontos.
- Possuir algum tipo de auto-similaridade (exata, aproximada) também designada, por Mandelbrot, de homotetia (propriedade das figuras geométricas que, sendo semelhantes, têm posição relativa tal, que qualquer ponto de uma delas é colinear com o ponto correspondente da outra e com um ponto fixo que se diz centro de homotetia (ou homotesia)).
  - Auto-similaridade exata: este tipo de fractal designa-se como “puro” contém cópias de si próprio a escalas tão pequenas quanto se queira. Fractais gerados por sistemas de funções iterativas geralmente apresentam auto-similaridade exata, sendo este processo muito simples e direto. O procedimento recursivo gera, em cada iteração, uma cópia ampliada dos elementos que o constitui.
  - Auto-similaridade aproximada: o fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições de fractais geralmente implicam alguma forma de auto-similaridade aproximada. Os fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem auto-similaridade aproximada, uma vez que, partes destes têm uma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica mas não são réplicas exactas. Exemplos destes são os designados: fractais na natureza.
- A dimensão fractal representa o nível de irregularidade de um objeto geométrico. A dimensão fractal de um conjunto pode ser diferente da sua dimensão topológica. O conceito de dimensão fractal está relacionado com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço e, inclusivamente pode não ser um número inteiro.

O conceito matemático de dimensão topológica de um conjunto versus dimensão fractal, está exemplificado na Figura 1. Dizemos, por exemplo, que um plano é bidimensional porque um ponto de um plano é descrito por duas coordenadas cartesianas [11].



**Figura 1** Comparação entre dimensão euclidiana (à esquerda) e fractal (à direita).

Por exemplo, a Curva de Hilbert, embora seja uma linha a uma dimensão (de dimensão topológica 1), comporta-se quase como um espaço a 2 dimensões, para um número infinito de iterações, preenche totalmente uma área.

A dimensão de Hausdorff - Besicovitch é uma dimensão que pode tomar valores não inteiros e é igual à dimensão topológica para os espaços Euclidianos  $R_n$  [48][58].

Fractais são formas complexas que não podem ser medidas apenas por dimensão topológica. A dimensão fractal surge então como uma alternativa de medição já que pode assumir valores fracionários, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma [63]. Pode-se afirmar que a dimensão fractal de um conjunto é um valor que diz o quanto densamente um conjunto ocupa o espaço métrico em que ele existe.

Para definir dimensão é necessário saber qual o método de cálculo que se utilizou. Esta pode ser calculada pelo método da auto-similaridade, tomando o limite do quociente das mudanças logarítmicas em tamanho e em escala de medida, à medida que a escala de medida se aproxima de zero (ver fórmula (1)). Se uma curva pode ser subdividida em  $N$  partes, sendo o todo  $M$  vezes maior do que cada uma delas, a dimensão de Hausdorff Besicovitch será:

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(M)} \quad (1)$$

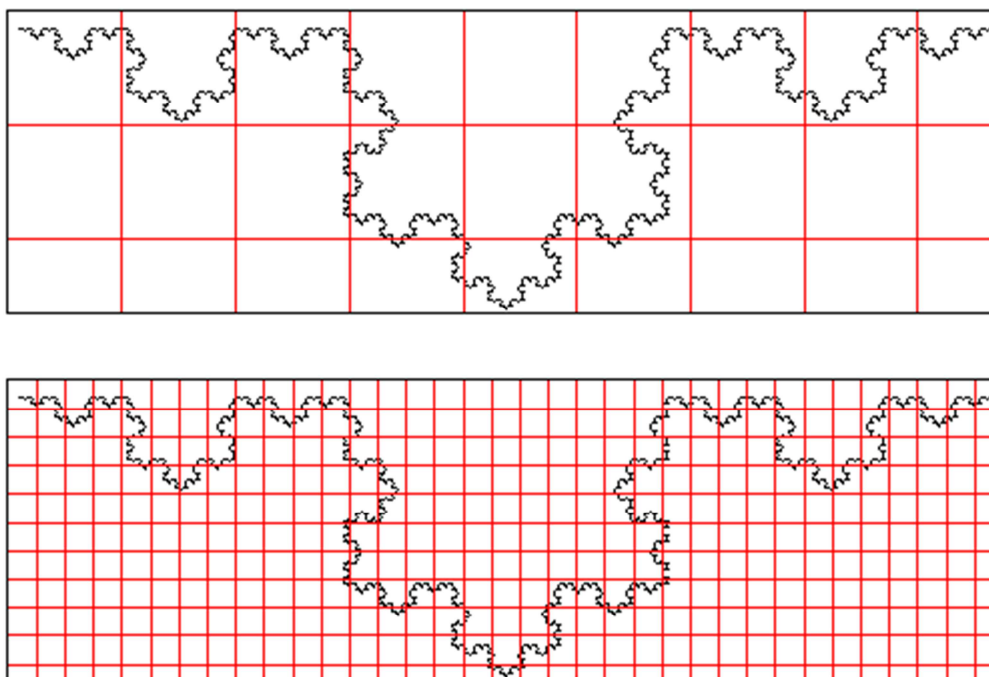
Dimensão de Hausdorff Besicovitch fórmula (2):

$$N = r^D \quad (2)$$

Um outro método de determinar a dimensão fractal de um fractal (de conjunto  $S$  no espaço euclidiano) é a determinação da chamada dimensão de contagem de células de uma grelha ou de empacotamento (*box-counting dimension or packing dimension*), que é uma dimensão que coincide em muitos casos com a dimensão de Hausdorff - Besicovitch.

O *box-counting* ou *box-dimension* é um dos métodos mais utilizados. A sua grande popularidade deve-se a sua facilidade de uso em cálculos matemáticos e em estimativas experimentais. O algoritmo para o cálculo dessa dimensão considera uma figura qualquer coberta por um conjunto de quadrados, e calcula o número de quadrados necessários para cobrir toda a figura que é representado por  $N(s)$ , sendo  $s$  a escala, ou seja, número de vezes que a imagem será dividida. Essa divisão pode ser observada na Figura 2. Imagina-se esse fractal desenhado sobre uma grelha uniformemente espaçada e conta-se o número de células de uma grelha necessários para cobrir o conjunto. A dimensão de empacotamento é calculada vendo como esse número muda à medida que fazemos uma grelha mais fina.

Na curva de Koch obtemos o seguinte resultado; medida analítica de 1.2619 e de medida experimental de 1.2268.



**Figura 2** Exemplo de tamanhos de grelhas usados no *box-counting*.

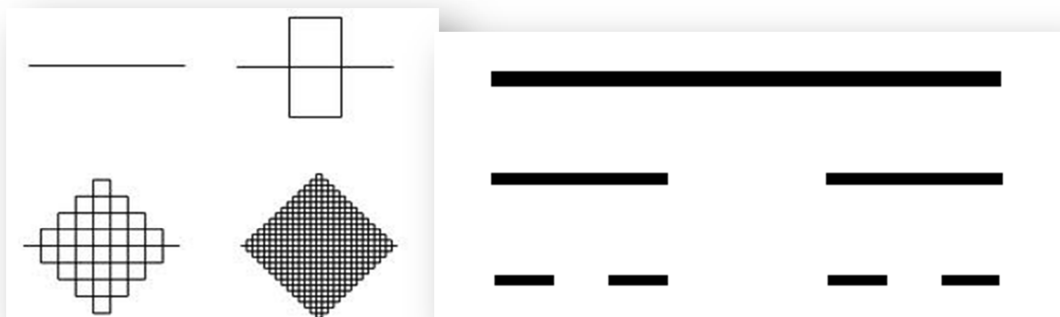
Os fractais podem ser divididos em várias categorias segundo o modo como são formados ou gerados tais como:

- A. Fractais aleatórios, gerados por processos estocásticos ao invés de determinísticos como é o caso da Figura 3 que ilustra os fractais naturais com auto-similaridade aproximada ou outro exemplo o voo de Lévy [59];

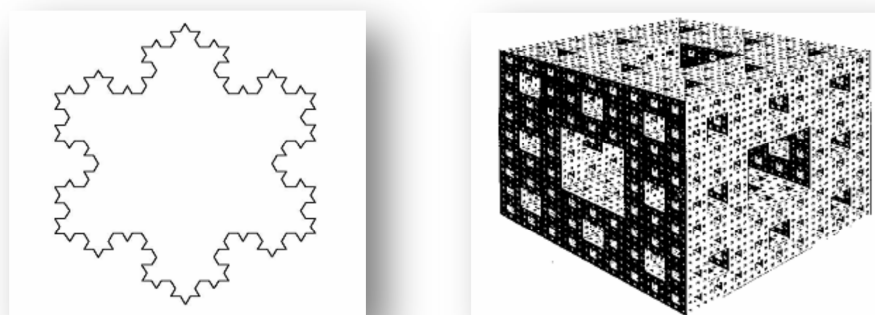


**Figura 3** Couve-flor (brócolis, à esquerda) e carvalho (à direita) [20].

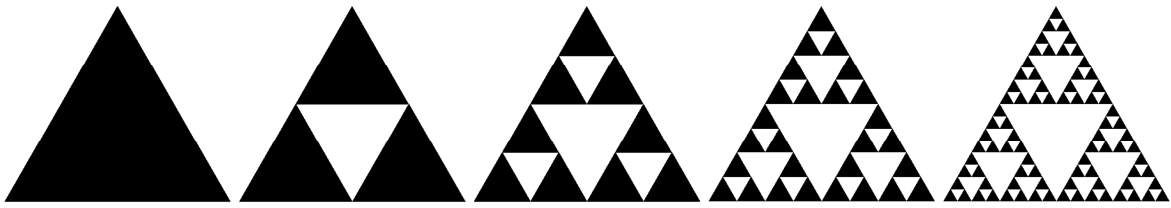
B. Ponto fixo de um sistema de funções iterativas. Um conjunto de funções é aplicado sucessivamente a um subconjunto compacto de um espaço métrico um número infinito de vezes. Estes fractais também se designam de fractais *determinísticos* ou *geométricos*, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicada a cada iteração como por exemplo a curva de Peano e conjunto de Cantor, (Figura 4), curva e “Floco de Neve” de Koch, esponja de Menger (Figura 5) e triângulo de Sierpinsky (Figura 6).



**Figura 4** Curva de Peano (à esquerda) e conjunto de Cantor (à direita) [30].

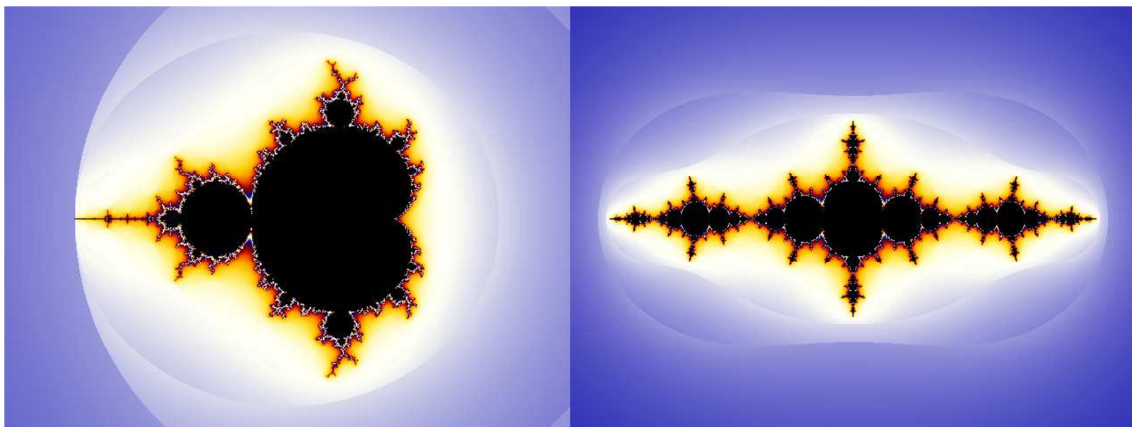


**Figura 5** Curva de Koch (à esquerda) e esponja de Menger (à direita) [25].



**Figura 6** Triângulo de Sierpinski, algumas iterações [27].

C. Fractais definidos por uma relação de recorrência, em cada ponto do espaço, estes fractais são gerados por computadores e também são chamados de fractais de fuga do tempo ou fractais em sistemas dinâmicos, como os conjuntos de Mandelbrot e Julia, (Figura 7), com a borboleta de Lorenz e o jogo do caos (Figura 8). O conjunto de Mandelbrot é um dos fractais mais conhecidos, uma figura tão complexa que seria impossível conhecê-la ao longo de uma vida inteira sem a evolução dos computadores. Matematicamente, o conjunto de Mandelbrot é caracterizado pela seguinte fórmula:  $z \rightarrow z^2 + c$  sendo  $c$  um número complexo, e é o parâmetro em questão [48].



**Figura 7** Conjunto de Mandelbrot (à esquerda) e conjunto de Julia (à direita).

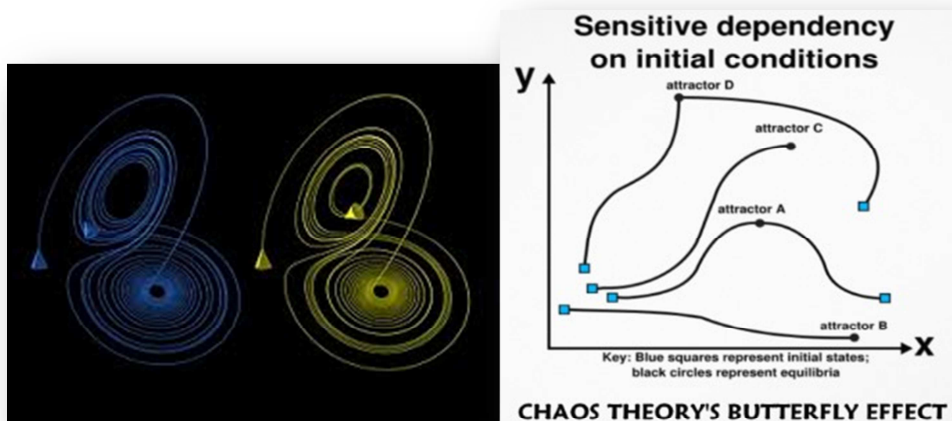


Figura 8 Borboleta de Lorenz (à esquerda) e teoria do caos (à direita) [21].

## 2.1. FRACTAIS GEOMÉTRICOS CLÁSSICOS

Nesta secção será feita uma abordagem a alguns exemplos de fractais clássicos que utilizam no seu processo de construção, o processo iterativo, o sistema de funções iteradas (*SFI*). Fractais como os conjuntos de Cantor e de Sierpinski são gerados através de um processo de remoção de alguma parte da figura inicial e conjuntos de Koch, Peano são gerados através de um processo de alteração da figura inicial.

### 2.1.1. A CURVA DE KOCH

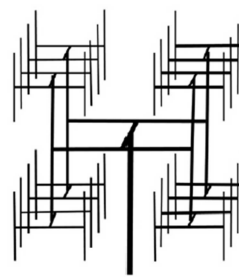
A curva de Koch ou a “ilha de Koch” baseiam-se num processo de construção, o processo recursivo, tendo a curva de Koch uma figura inicial um segmento de reta, e a ilha de Koch, um triângulo equilátero, que é composto por três desses segmentos de reta.

A curva de Koch tem várias vantagens. Por exemplo, no corpo humano, bem como na maioria dos seres vivos, superfícies enrugadas sobre si mesmo, servem para maximizar a superfície total e assim aumentar o seu desempenho funcional. O facto de mais superfície estar compactada num mesmo volume, trás a estes objetos uma dimensão não inteira. A curva de Koch parece estar entre uma linha e um polígono, devido a ser uma linha fechada de comprimento infinito. As ferramentas que permitem o cálculo da dimensão dão à curva de Koch uma dimensão aproximada de 1,26 (calculada mais abaixo), o que quer dizer a sua dimensão “foge” às dimensões euclidianas da linha, de dimensão 1.

O exemplo que se segue mostra um modelo fractal para descrever o sistema circulatório (Figura 9). A vantagem dos corpos dos animais possuírem órgãos com características fractais é para obterem estruturas mais eficientes em termos energéticos, dado ser possível fazer com mais superfície o que, em alternativa teria de ser realizado com mais volume (Figura 10). Encontra-se assim uma solução mais económica, resultando que o ser vivo em questão precisa de menos alimento [59].

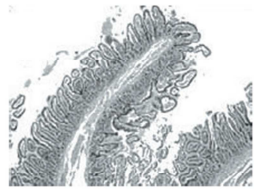


© GOULD, J; WILLIAM K.  
BIOLOGICAL SCIENCE,  
6TH ED (1996) PG. 857



© P.R.PAINTER, THEORETICAL  
BIOLOGY AND MEDICAL  
MODELLING 2005, 2:30

**Figura 9 Sistema circulatório [59].**



TECIDO INTESTINAL © X. SASTRE /  
INSTITUTO CURIE



© UNIV. DE ALABAMA, DEPT. DE  
PATOLOGIA

**Figura 10 Rugosidades dos intestinos e do cérebro [59].**

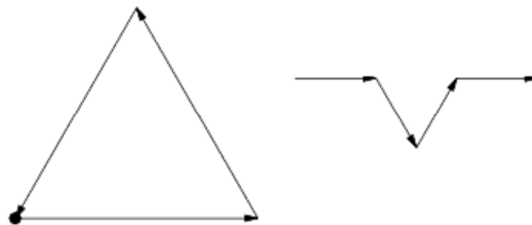
O processo iterativo da curva de Koch pode ser descrito da forma que se segue:

- 1) Começar com um segmento de reta ver (Figura 11):



**Figura 11 Segmento de reta inicial do processo iterativo da curva de Koch.**

- 2) O procedimento a efetuar na primeira iteração, sendo a regra recursiva, consiste em dividir o segmento de reta em 3 partes iguais (Figura 12), manter as duas pontas e substituir a do meio de um triângulo equilátero ao qual se removeu a base e cujos lados têm comprimento igual à terça parte do segmento inicial.



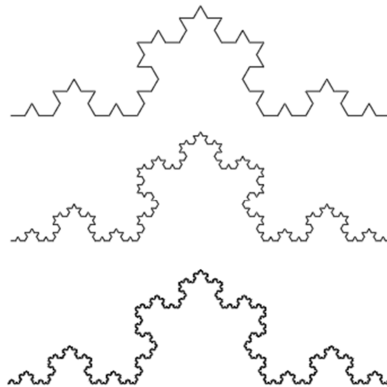
**Figura 12 1ª Iteração do processo iterativo da curva de Koch [25].**

- 3) Aplicar o procedimento descrito em 2) a cada um dos 4 segmentos obtidos da reta na iteração anterior (Figura 13).



**Figura 13** 2ª iteração do processo iterativo da curva de Koch [25].

- 4) Repetir o processo indefinidamente, aplicando o procedimento descrito em 2) a cada segmento de reta produzida na etapa anterior para obter o que designamos de curva de Koch (Figura 14).



**Figura 14** n-ésima iteração do processo iterativo da curva de Koch [28].

A construção da curva de Koch apresenta uma notória auto-similaridade em todas as escalas. Por exemplo, se fizermos ampliação sobre a curva no pequeno retângulo assinalado na imagem da Figura 15 (em cima), obtemos a imagem da mesma figura (em baixo) que é exatamente igual à curva de Koch original, podendo efetivamente ser vista como o resultado de um reescalonamento da imagem original pela razão  $\frac{1}{9}$ .

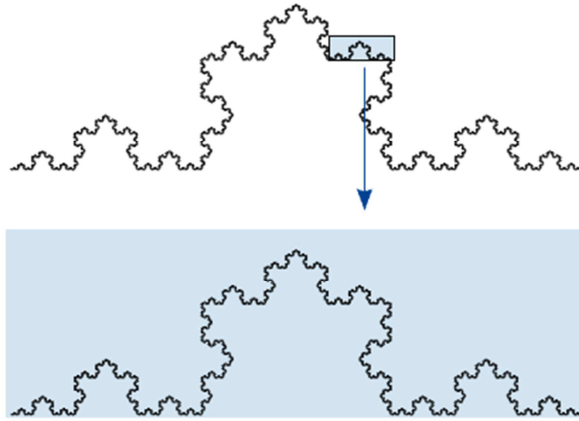


Figura 15 Ampliação de uma parte da curva de Koch [28].

De seguida, descreve-se o processo iterativo da **ilha de Koch** Figura 16 explicando o seu processo iterativo, salientando-se as várias propriedades deste fractal e que poderá ser adaptado a outros que sejam obtidos pelo mesmo processo (SFI). Segue a seguinte demonstração:

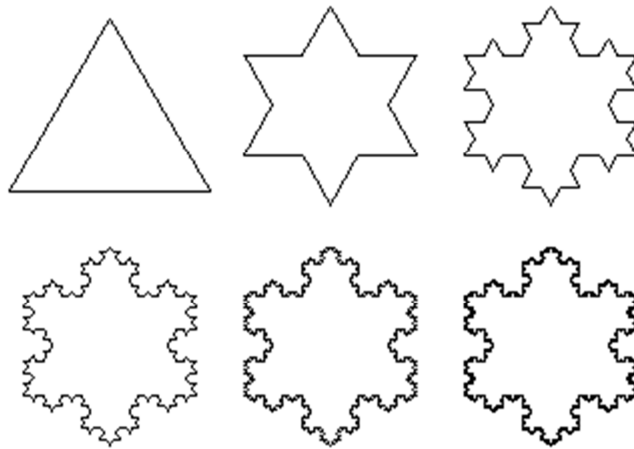


Figura 16 Figura inicial da ilha de Koch e os primeiros 5 passos iterativo [25].

A ilha de Koch é uma figura geométrica regular fechada cuja fronteira é composta por infinitos lados cada vez mais pequenos, sendo estes três vezes mais pequenos em cada iteração. Na Tabela 2 seguinte estão representados: o comprimento de cada segmento, o número dos segmentos e o perímetro da curva de Koch. Considera-se o lado do triângulo inicial gerador igual a 1 unidade.

<i>Nº iterações</i>	<i>Comprimento do segmento</i>	<i>Número de segmentos</i>	<i>Perímetro</i>
0	$1 = 3^0$	$3 \times 4^0 = 3$	1
1	$1/3 = 3^{-1}$	$3 \times 4^1 = 12$	1.33
2	$1/9 = 3^{-2}$	$3 \times 4^2 = 48$	1.77
3	$1/27 = 3^{-3}$	$3 \times 4^3 = 192$	2.37
4	$1/81 = 3^{-4}$	$3 \times 4 = 768$	3.16

**Tabela 2** Iterações, comprimento do segmento, número de segmentos e perímetro.

Na tabela abaixo é feito um resumo do comportamento da curva de Koch, relativamente a:  $N^{\circ}_{\text{segmentos Koch}}$  (nº de segmentos),  $\text{Comp}_{\text{segmentos Koch}}$  (comprimento dos segmentos),  $P_{\text{curva Koch}}$  (perímetro da curva) e por fim  $A_{\text{curva Koch}}$  (área da curva).

<i>Designação</i>	<i>Expressão</i>	<i>Comportamento da curva</i>
$N^{\circ}_{\text{segmentos Koch}}$	$3 \times 4^n$	Sucessão monótona crescente, $N \rightarrow \infty$
$\text{Comp}_{\text{segmentos Koch}}$	$3^{-n}$	Sucessão monótona decrescente, quando $N \rightarrow \infty$ , $n \rightarrow 0$
$P_{\text{curva Koch}}$	$(3 \times 4^n) \times (3^{-n})$	$P_{\text{curva Koch}} \rightarrow \infty$ , pois $N \rightarrow \infty$ . É uma progressão geométrica cujo primeiro termo é positivo de razão $>1$ . (ver fórmula (3))
$A_{\text{curva Koch}}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.7$	$A_{\text{curva Koch}}$ é finita $\approx 0.7$ . (ver a partir fórmula (7))

**Tabela 3** Comportamento da curva de Koch.

Quanto ao perímetro da curva de Koch é representada pela seguinte expressão:

$$P_{curva\ Koch} = N^{\circ}Segmentos\ koch \times Comp_{segmentos\ Koch} \quad (3)$$

$$P_{curva\ Koch} = (3 \times 4^n) \times (3^{-n}) \quad (3.1)$$

$$P_{curva\ Koch} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (3.2)$$

O resultado da expressão acima indica que,  $P_{curva\ Koch} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $P_{curva\ Koch}$  é uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é positivo, e a razão é superior a 1, sendo assim o perímetro da curva de Koch **Infinito**.

Seguindo a mesma linha de pensamento, o cálculo da  $A_{curva\ Koch}$  tendo como condições iniciais, o comprimento do lado do triângulo igual a 1 unidade, o comprimento de cada lado de cada nova figura triangular reduzida do factor de razão  $\frac{1}{3}$  e assim, a área de cada triângulo formado das sucessivas iterações, sofre redução de  $\frac{1}{9}$  [48] (ver Figura 17). Desta forma a  $A_{0-curva\ Koch}$  é traduzida pela seguinte expressão:

$$A_{0-curva\ Koch} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

Para exemplo realizando a **1ª iteração** temos 3 novos triângulos cuja área é  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}$ , logo o valor da seguinte expressão é:

$$A_{1-curva\ Koch} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \quad (5)$$

Logo na  $n$ -ésima iteração temos  $3 \times 4^{n-1}$  novos triângulos  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$  logo o valor da área da figura seguinte é:

$$A_{n\text{-curva Koch}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \quad (6)$$

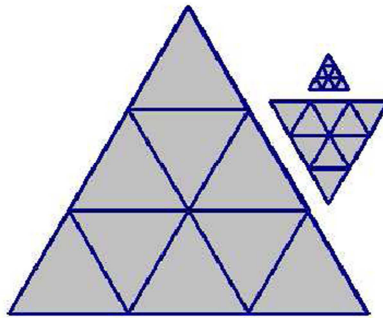


Figura 17 Divisão de um triângulo equilátero em nove triângulos equiláteros iguais [48].

Resultando a expressão como a soma entre  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  e os termos de progressão geométrica de  $B_{n-1}$ , de razão  $\frac{4}{9}$  com o primeiro termo igual a  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  e cuja soma dos  $n$  primeiros termos é:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \quad (7)$$

Logo quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $S_n = \frac{3\sqrt{3}}{20}$  e portanto a área da curva de Koch é:

$$A_{\text{curva Koch}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.7 \quad (8)$$

Desta forma conclui-se que a área da curva de Koch é **finita**.

Antes de definir a dimensão da curva de Koch segue mais umas breves explicações sobre o conceito dimensão, classificamos as linhas como objetos de dimensão 1, superfícies com dimensão 2 e sólidos com dimensão 3 (ver Figura 18). Em superfícies podemos calcular áreas que, nos casos mais simples, se obtêm multiplicando o comprimento pela largura. Nos sólidos podemos determinar volumes que, nos casos mais simples, se obtêm multiplicando comprimento, largura e altura [10].

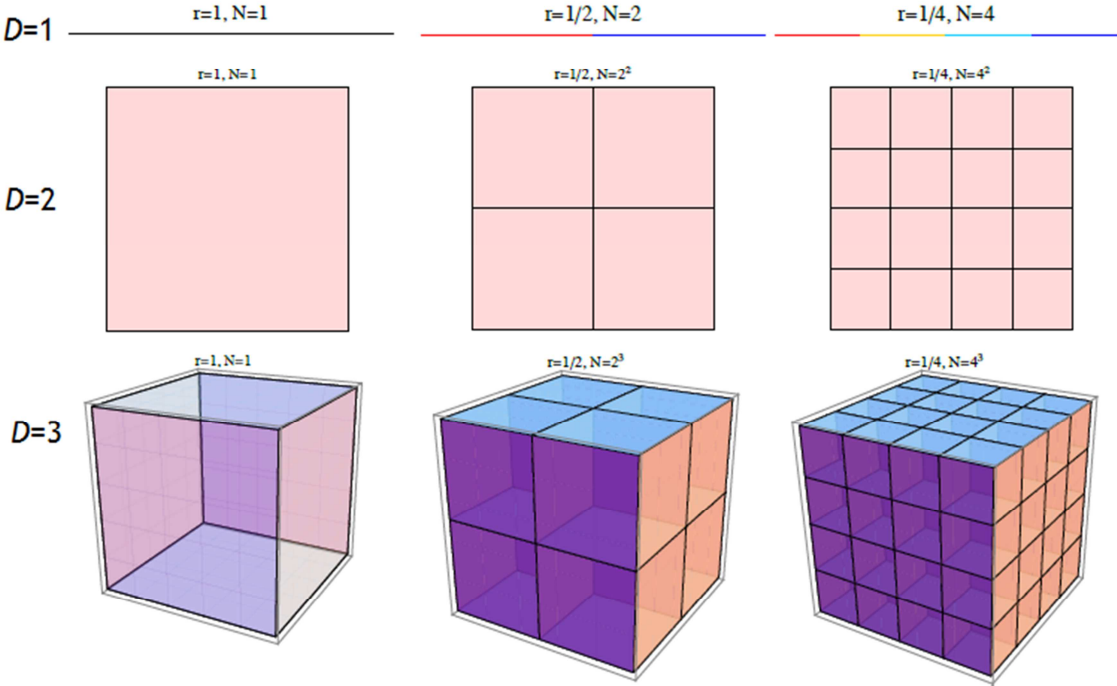


Figura 18 Exemplos de dimensões de objetos superfícies e sólidos [10].

A fórmula (9) indica o cálculo da dimensão de objetos com auto-similaridade e segue abaixo o respectivo desenvolvimento da mesma:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{L}{n}\right)}{\log N} \quad (9)$$

Onde:

- $D$ : é a dimensão do objeto;
- $n$ : número de partes iguais da iteração,  $n = 4$ ;
- $L$ : é o comprimento da linha, igual a 1 unidade;
- $N$ : comprimento de cada segmento, onde  $N = \frac{1}{3}$ ;

Substituindo os valores, a dimensão da curva de Koch tem o valor abaixo:

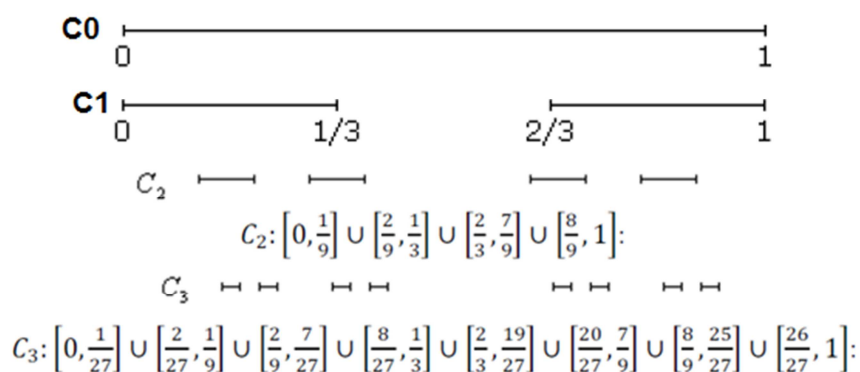
$$D = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log \frac{1}{3}} = D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2619. \quad (10)$$

### 2.1.2. O CONJUNTO DE CANTOR

O conjunto Cantor é obra do matemático George Cantor que viveu no século XIX, é considerado o precursor dos fractais e este conjunto é resultante da remoção sucessiva do terço central de um segmento de reta. Na Figura 19 pode-se visualizar as primeiras três iterações da sua construção.

Este conjunto tem algumas propriedades como:

- Tem comprimento zero, pois a cada iteração o comprimento do conjunto é  $\frac{2}{3}$  do comprimento da iteração anterior. Por exemplo se o comprimento inicial for 1, ao fim da primeira iteração é  $\frac{2}{3}$ , na segunda iteração é  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ , na terceira é  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ , pelo que o comprimento quando  $N_{\text{iteração}} \lim_{n \rightarrow \infty} = 0$ .
- O seu limite é  $+\infty$ , pois os extremos dos segmentos de reta nunca são removidos e em cada passo o número de extremos é multiplicado por 2.
- É auto-similar, isto é cada parte é uma cópia de si própria, como pode ser observado nas seguintes Figura 19 e Figura 20:



**Figura 19** Apresentação de 3 iterações e respetivos intervalos que constituem o conjunto de Cantor [15].

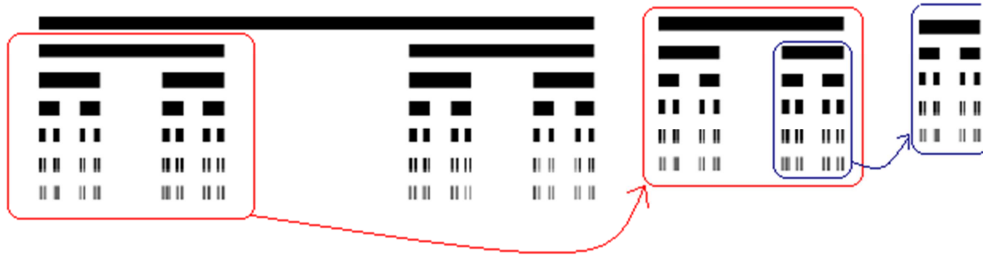


Figura 20 Zoom de algumas iterações do conjunto de Cantor [15].

Intuitivamente observa-se que estamos diante de uma infinidade de pontos, assim a dimensão fractal não será nula. Por outro lado vemos claramente que não temos uma reta devido aos “espaços” referentes aos terços centrais retirados, logo a dimensão fractal também não é 1.

Portanto a dimensão do conjunto de Cantor está compreendida entre 0 e 1. Aplicando a fórmula (11) obtemos o seguinte valor da dimensão:

$$D = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{3}} = D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309. \quad (11)$$

### 2.1.3. TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Este fractal é aproximadamente 40 anos mais jovem que o conjunto de Cantor e foi apresentado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski.

O triângulo de Sierpinski pode ser construído por diferentes formas, desde alguns processos geradores completamente distintos até mesmo pelo jogo do caos (fractal de sistema dinâmico ponto 2.2.3). A Figura 21 é o conjunto resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro, quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos iguais. Na figura seguinte pode-se visualizar as primeiras quatro iterações da sua construção [48].

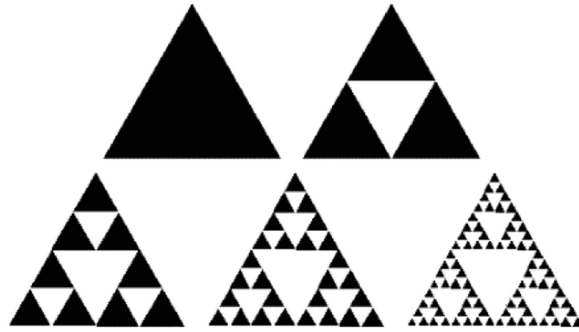


Figura 21 Processo iterativo do triângulo de Sierpinski (primeiras 4 iterações)[27].

Analisando a Tabela 4, retiramos algumas propriedades como:

- Tem área zero, pois a cada passo a área reduz-se para  $\frac{3}{4}$  resultando a progressão geométrica de razão  $< 1$  que quando  $n \rightarrow \infty$  a área do triângulo tende para zero.
- Tem perímetro infinito sendo o resultado da progressão geométrica de razão  $> 1$  que quando  $n \rightarrow \infty$  o seu resultado tende para infinito.
- É auto-similar, pois cada parte é uma cópia de si própria.

<i>Nº iterações</i>	<i>Área</i>	<i>Tendência do valor da Área</i>	<i>Perímetro</i>	<i>Tendência do valor do Perímetro</i>
0	$A$	=	$P$	=
1	$A_1 = A \times \frac{3}{4}$	↘	$P_1 = P \times \frac{3}{2}$	↗
2	$A_2 = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$	↘	$P_2 = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$	↗
3	$A_3 = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$	↘	$P_3 = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$	↗
$n$	$A_n = A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$	Razão: $\frac{3}{4} (< 1)$ , tende para valor 0	$P_n = P \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$	Razão: $\frac{3}{2} (> 1)$ , tende para valor $\infty$

Tabela 4 Área e perímetro do triângulo de Sierpinski até 3ª iteração.

Desta forma a dimensão do triângulo de Sierpinski é dada pela seguinte expressão:

$$D = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{3}} = D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850 \quad (12)$$

Figuras como o “tapete de Sierpinski” e a “esponja de Menger” Figura 22 a sua construção assemelha-se ao triângulo de Sierpinski.

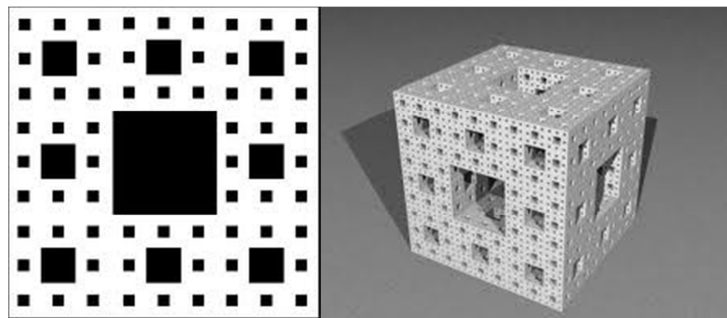
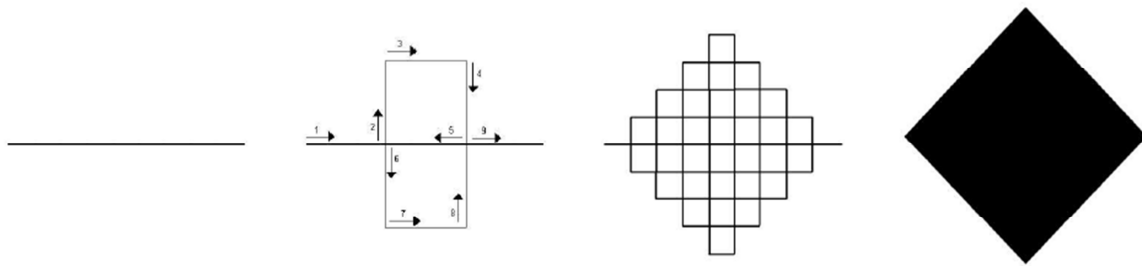


Figura 22 Tapete de Menger (à esquerda) e esponja de Menger (à direita)[3].

#### 2.1.4. CURVA DE PEANO

A curva de Peano, apresentada em 1890, é um exemplo de um fractal que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma determinada área, acabando por, gradualmente a ocupar na totalidade.

O ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento com uma unidade de comprimento. Na 1ª iteração, o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial, e colocados como indica a primeira imagem da Figura 23. Esses 9 segmentos constituem a 1ª iteração da construção recursiva da curva de Peano. Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos 9 segmentos, até ao infinito.



**Figura 23** Processo recursivo da construção da curva de Peano [28].

Observe-se que as curvas obtidas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias nos vértices dos pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Pode-se demonstrar que no limite, isto é, na curva de Peano, se passa o mesmo, dando-se o preenchimento do plano. Agora, cada segmento de reta é substituído por vários segmentos de reta com tamanho inferior e proporcional por um factor de escala 3. Repetindo-se este processo de construção da curva, observa-se no final da sua construção um quadrado completamente preenchido (Figura 23).

Observando-se a Tabela 5 verifica-se as várias propriedades da curva de Peano, a área está limitada à área do quadrado.

A dimensão da curva de Peano pode ser calculada da seguinte forma:

$$D = \frac{\log \frac{1}{9}}{\log \frac{1}{3}} = D = \frac{\log 9}{\log 3} = 2 \quad (13)$$

<i>Nº iterações</i>	<i>Número de segmentos</i>	<i>Comprimento de cada segmento</i>	<i>Perímetro</i>
0	1	1	1
1	9	$\frac{1}{3}$	$9 \times \frac{1}{3} = 3$
2	$9 \times 9 = 9^2$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$	$9^2 \times \frac{1}{3^2} = 3^2$
3	$9 \times 9 \times 9 = 9^3$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$	$9^3 \times \frac{1}{3^3} = 3^3$
4	$9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^4}$	$9^4 \times \frac{1}{3^4} = 3^4$
<i>n</i>	$9^n$	$\frac{1}{3^n}$	$3^n$
<b><i>n</i></b>	<b>Tende para <math>\infty</math></b>	<b>Tende para 0</b>	<b>Tende para <math>\infty</math></b>

**Tabela 5** Iterações, número de segmentos, comprimento de segmentos, comprimentos da linha da curva de Peano até a 4 iteração.

### 2.1.5. CURVA DE HILBERT

A curva de Hilbert preenche completamente um plano. Faz um mapa de um intervalo unidimensional para uma área bidimensional. Julgava-se impossível existir uma função deste tipo até que, em 1891, David Hilbert descobriu a sua curva. Esta curva tal como a de Peano é construída através de um processo recursivo.

A figura inicial é um quadrado unitário, ver a Figura 24 e a figura geradora consiste em dividi-lo em quatro quadrados iguais, unindo os pontos centrais de cada um desses quadrados. A curva é formada, não pelos quadrados mas sim pelos segmentos de reta formados pela ligação desses pontos centrais. Os sucessivos passos, são construídos

utilizando o processo anterior, como está descrito na Figura 25. A Figura 26 representa o modelo a 3 dimensões, à direita a cor dos segmentos significa o nível de iterações.

Observa-se na Tabela 6, as várias propriedades da curva de Hilbert.

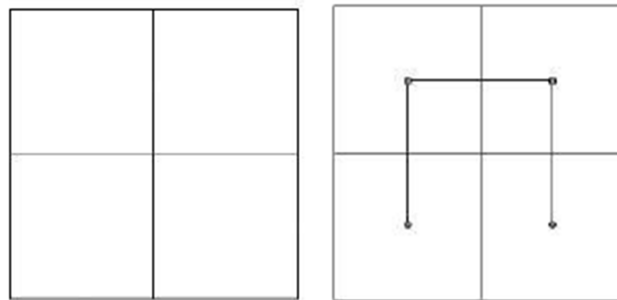
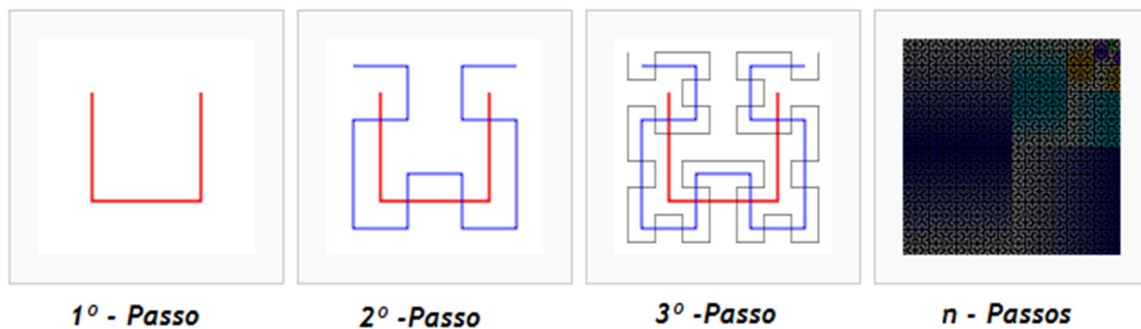


Figura 24 Figura inicial (à esquerda) e geradora da curva de Hilbert (à direita) [22].



1° - Passo

2° -Passo

3° -Passo

n - Passos

Figura 25 Processo recursivo da construção da curva de Hilbert [22].

A curva de Hilbert, tal como a de Peano, tem comprimento *infinito* limitado à área de um quadrado.

A sua dimensão é calculada da seguinte forma:

$$D = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log \frac{1}{2}} = D = \frac{\log 4}{\log 2} = 2 \quad (14)$$

<i>Nº iterações</i>	<i>Nº de quadrados</i>	<i>Comprimento do lado do quadrado</i>
0	1	1
1	4	$\frac{1}{2^0}$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{2^1}$
3	$64 = 4^3$	$\frac{1}{2^2}$
4	$256 = 4^4$	$\frac{1}{2^3}$
$n$	$4^n$	$\frac{1}{2^{n-1}}$
$n$	Tende para $\infty$	Tende para 0

Tabela 6 Número de quadrados e comprimento de cada lado do quadrado.

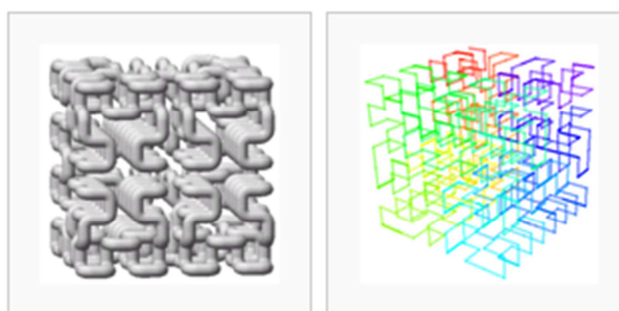


Figura 26 Curva de Hilbert a 3 dimensões. À direita, as cores representam o número de iterações [22].

## **2.2. FRACTAIS EM SISTEMAS DINÂMICOS**

Um sistema dinâmico não-linear, é um sistema não pré-determinista, onde as implicações dos seus integrantes individualmente são aleatórias e não previsíveis. Estes sistemas evoluem no domínio do tempo com um comportamento desequilibrado e aperiódico, onde o seu estado futuro é extremamente dependente de seu estado atual, e pode alterar radicalmente a partir de pequenas mudanças no presente.

Estes sistemas podem surgir em campos da ciência como na biologia, geologia, medicina, física, pintura, engenharias, mercados financeiros e em muitos mais a teoria dos sistemas dinâmicos que se baseia em teorias matemáticas, trabalha os processos com o objetivo de prever a evolução dos mesmos. Esta teoria procura, no aparente acaso, uma ordem inerente determinada por leis bem definidas [14]. Aparentemente, sistemas dinâmicos que envolvem processos complicados com um grande número de variáveis são imprevisíveis e sistemas dinâmicos com poucas variáveis são previsíveis. No entanto, existem processos simples e determinísticos que resultam em comportamentos aparentemente imprevisíveis e aleatórios. O estudo pode ser realizado com a ajuda de computadores devido à sua grande capacidade de cálculo e de representação gráfica.

### **2.2.1. CONJUNTOS DE JULIA**

No contexto de dinâmica complexa, um tópico da matemática, o conjunto de Julia que também se poderia designar por Fatou-Julia pois foram os dois matemáticos franceses Pierre Fatou e Gaston Julia que em meados de 1918 que introduziram os métodos iterativos no estudo de sistemas dinâmicos para a implementação da geometria fractal, mesmo sem o recurso do computador que nos dias de hoje é de grande utilidade para reproduzir detalhadamente o comportamento de funções iteradas [56]. O conjunto de Fatou-Julia são dois conjuntos complementares definidos por uma função. Informalmente, o conjunto de Fatou de uma função consiste nos valores com a propriedade de que todos os valores próximos comportam-se de forma similar por iterações repetidas, e o conjunto de Julia

consiste dos valores tais que uma perturbação arbitrariamente pequena pode causar mudanças drásticas na sequência de valores iterados da função, ou seja tem dependência sensível nas condições iniciais. Assim, o comportamento da função do conjunto de Fatou é dito 'regular', enquanto no conjunto de Julia ele é 'caótico'. O conjunto de Julia de uma função  $f$  é usualmente denotado  $J(f)$ , e o conjunto de Fatou denotado  $F(f)$ .

Considerando a função  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  em que  $C$  sendo número complexo e um ponto fixo do plano complexo, para cada ponto  $Z_0$  temos o seguinte comportamento (ver Tabela 7):

<i>Ponto</i>	<i>Tendência</i>	<i>Comportamento</i>
$Z_0$	Tende para $\infty$	$Z_0$ é um ponto de escape e não pertence a nenhum conjunto Julia
$Z_0$	Tende para um círculo em torno da origem $Z_0$	$Z_0$ é um ponto prisioneiro

**Tabela 7** Comportamento do conjunto em torno de  $Z_0$ .

Resumindo mesmo que para a situação de  $Z_0$  ser um ponto de escape e não pertencer a nenhum conjunto de Julia, o conjunto desses pontos designam-se conjunto de escape de  $C$ .

Contrariamente quando  $Z_0$  é um ponto prisioneiro, pertence a algum conjunto de Julia e o conjunto que esses pontos formam designa-se conjunto de prisioneiro de  $C$ . Desta forma os conjuntos completam-se e preenchem alguma parte do plano complexo. Sendo assim a fronteira do conjunto escape é simultaneamente a fronteira do conjunto prisioneiro e nesta fronteira temos o conjunto de Julia associado ao parâmetro  $C$ . O valor do ponto  $C$  determina a formação dos conjuntos de Julia, sendo associado com um conjunto de Julia em particular. Podemos ver alguns exemplos na Figura 27, em que por exemplo, para  $C = 0$  obtemos o círculo unitário. Se  $C$  pertencer ao interior do conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia obtido será **conexo** caso contrário o conjunto de será **desconexo** [48].

Os conjuntos de Julia "interessantes" correspondem aos pontos próximos à fronteira do conjunto de Mandelbrot, pontos mais internos ao conjunto de Mandelbrot correspondem a

formas geométricas relativamente simples, enquanto os pontos mais externos lembram poeira rodeada por manchas de cores.

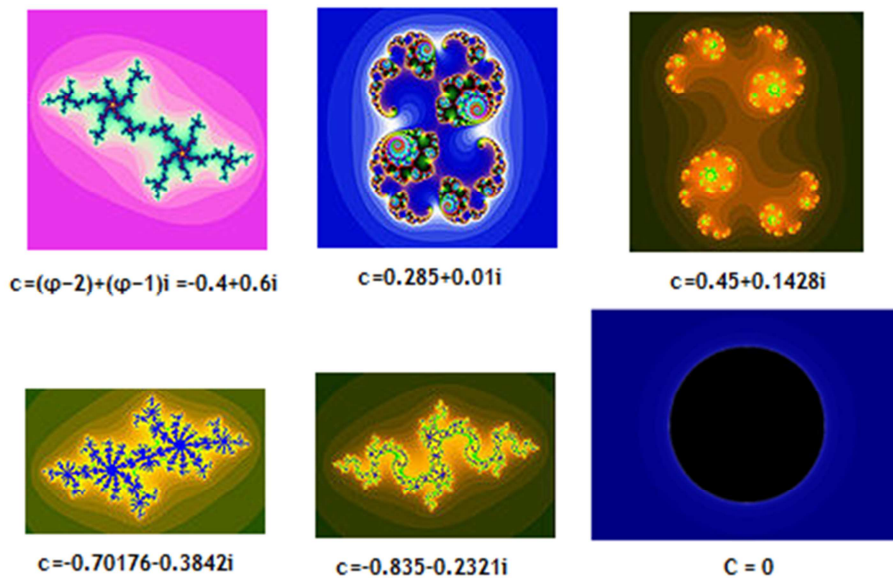


Figura 27 Exemplos de alguns conjuntos de Julia [26].

Os conjuntos de Julia têm como propriedades: repetem-se em diferentes escalas de ampliação, tendo auto-similaridade.

### 2.2.2. CONJUNTOS DE MANDELBROT

O conjunto de Mandelbrot é um conjunto matemático dos pontos cuja fronteira é uma forma fractal bidimensional distinto e facilmente reconhecível. O conjunto está intimamente relacionado com Julia pois que incluem formas igualmente complexas, e é nomeado em 1979 por Benoit Mandelbrot, após o seu estudo que o popularizou [56][59].

O modelo de Mandelbrot por ser um modelo mais simples que o de Julia e devido ao facto na época já existir recursos computacionais, Mandelbrot conseguiu fazer de seu trabalho o berço da teoria dos fractais e também foi possível encontrar relação entre o trabalho de outros pesquisadores como Koch, Julia, Cantor e entre outros, com o seu.

A construção do conjunto de Mandelbrot baseia-se na função  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  onde  $Z_n$  ( $n \in N_0$ ) e  $C$  são números complexos e  $Z_0 = 0$ . O conjunto de Mandelbrot é então definido como um conjunto de todos os números complexos  $C$  tais que após um determinado número de iterações  $Z$  não tende para infinito.

Iterando a função para cada ponto  $C$  do plano complexo, obtemos a seguinte sequência de iterações (ver fórmula (15)):

$$C \rightarrow C^2 + C \rightarrow (C^2 + C)^2 + C \rightarrow (C^2 + C)^2 + C)^2 + C \rightarrow \dots \quad (15)$$

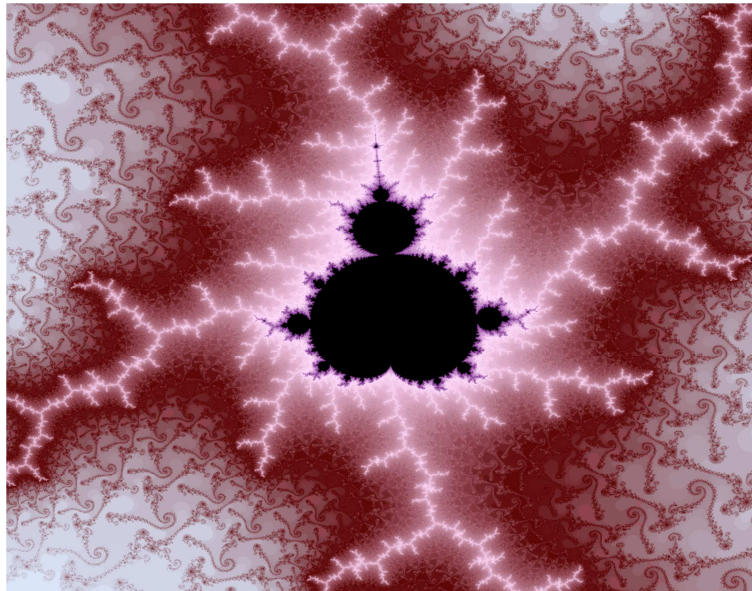
Podemos visualizar os valores de  $C$  assim como o comportamento da função na tabela abaixo:

<i>Ponto C</i> (substituído em fórmula(16))	<i>Tendência</i>	<i>Comportamento</i>
$C = 0$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$	$C = 0$ é um ponto de convergência.
$C = -1$	$0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$	$C = -1$ , função com sequência periódica limitada.
$C = i$	$0 \rightarrow i \rightarrow i - 1 \rightarrow -i \rightarrow i - 1 \rightarrow -i \rightarrow i - 1 \rightarrow \dots$	$C = i$ , função com sequência periódica limitada.
$C = -3$	$0 \rightarrow -3 \rightarrow 6 \rightarrow 33 \rightarrow 1086 \rightarrow \dots$	$C = -3$ , função com sequência periódica ilimitada.
$C = 1$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 26 \rightarrow 677 \rightarrow 458330 \rightarrow \dots$	$C = 1$ , função com sequência periódica ilimitada.

**Tabela 8** Comportamento do conjunto em torno do ponto  $C$ .

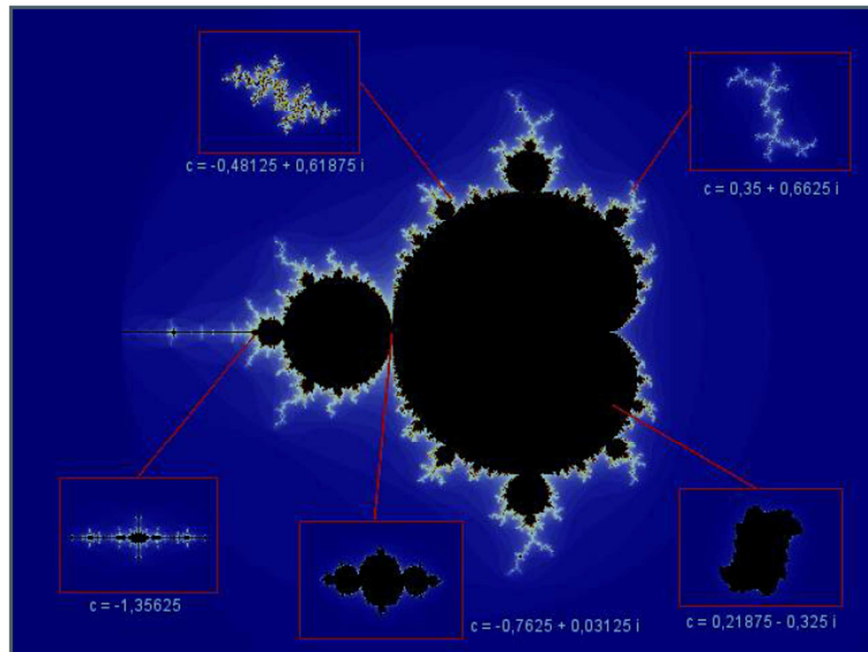
Na tabela acima, temos valores de  $C$  em que a função tem sequências periódicas e são limitadas pois permanecem dentro de um círculo em que a distância à origem mantém-se *finita*. E outros valores que a função tem, a tornam ilimitada afastando-se cada vez mais da origem.

Os conjuntos formados pelas sequências limitadas e ilimitadas preenchem o plano complexo e delimitam o conjunto de Mandelbrot por cores. Por exemplo, escolhe-se o preto para sequências limitadas e outras cores, consoante o número de iterações dos pontos, para as sequências ilimitadas [48]. Os valores fora das proximidades da origem, onde  $Z > 2$ , aplica-se uma cor e essa cor quanto mais rápido a série convergir para infinito, sendo a sua velocidade de escape, mais quente será a cor a ser aplicada a este ponto. Tomando a mesma linha de pensamento, para pontos mais próximos da origem é-lhes aplicado cores frias (Figura 28).



**Figura 28** Coloração dos pontos em relação à sua distância a origem.

No conjunto de Mandelbrot pode-se encontrar, os conjuntos de Julia, fazendo variar os valores do número complexo  $C$  (Figura 29).



**Figura 29** Conjunto de Mandelbrot como catálogo de conjuntos de Julia.

O conjunto de Mandelbrot tornou-se popular fora da matemática, tanto para seu apelo estético e como um exemplo de uma estrutura complexa, decorrente da aplicação de regras simples, sendo desta forma um dos exemplos mais conhecidos de visualização matemática. Este conjunto tem como propriedades a auto-similaridade, ver na imagem abaixo após várias ampliações mantém a forma inicial e a dimensão do seu bordo é 2.



**Figura 30** Algumas ampliações do conjunto de Mandelbrot [28].

### 2.2.3. TEORIA DO CAOS

A teoria do caos estuda o comportamento aleatório e imprevisível dos sistemas e tem como premissa, os comportamentos casuais embora aleatórios também são governados por leis. O comportamento deste tipo de sistemas, depende da dependência sensível às condições iniciais. Isso significa que pequenas variações nos estados iniciais de um sistema caótico, podem provocar enormes variações nos estados seguintes.

O processo conhecido como jogo do caos foi criado por Michael Barnsley um matemático Britânico [13][14] e é descrito através de um processo aleatório em que cada função iterada do sistema é aplicada aleatoriamente. A técnica é utilizada para criar modelos de formas naturais tais como plantas, cartografia de falhas sísmicas, nuvens, galáxias, o fenómeno atrito, a turbulência de uma massa de ar, escoamento de fluidos, as reações químicas, o crescimento de uma população, cartografia de falhas sísmicas, nuvens, galáxias, as variações do mercado financeiro são exemplos de sistemas dinâmicos não lineares sobre os quais esta 'Ciência do Caos', através do uso de formas fractais, se debruça. Esta ciência encontra-se indissociavelmente ligada aos computadores com a sua elevada velocidade de processamento e capacidades gráficas, se consegue formar imagens espetaculares intrigantes bizarras de beleza notável.

Os conjuntos invariantes de muitos sistemas dinâmicos não lineares, em particular os chamados “atractores estranhos”, têm estruturas detalhadas em todas as escalas de magnificação. É esta a ligação dos fractais à teoria do caos. Há uma ordem fractal por detrás de fenómenos aparentemente caóticos. Assim a teoria do caos não é uma teoria de desordem mas busca, no aparente acaso, uma ordem intrínseca determinada por leis precisas. Nas últimas décadas, depois de um árduo trabalho, matemáticos e físicos elaboram teorias para explicar o caos. Hoje sabe-se muito a respeito de fenómenos imprevisíveis que, ao serem compreendidos passam a ser um pouco mais previsíveis.

Para exemplificar o que acima foi escrito que a teoria do caos procura, no aparente acaso, uma ordem inerente determinada por leis bem definidas, segue o seguinte exemplo, do jogo do caos [48] que consiste em utilizar um dado cujas faces estão numeradas de 1 a 6 e um triângulo [ABC], inserido num tabuleiro. O dado funciona como gerador aleatório, fazendo corresponder as faces 1, 2 do dado ao vértice A do triângulo, 3, 4 a B e 5, 6 a C.

Iniciamos o jogo escolhendo aleatoriamente um ponto  $Z_0$  no tabuleiro (Figura 31). De seguida, lança-se o dado. Assumindo que o valor gerado é 2 verifica-se pela correspondência descrita, que corresponde ao vértice A. Define-se então  $Z_1$  como o ponto médio entre  $Z_0$  e A. Lança-se novamente o dado e suponhamos que é gerado o número 5 que corresponde ao vértice C. Define-se então  $Z_2$  como o ponto médio entre  $Z_1$  e C. Este processo repete-se indefinidamente e forma a Figura 32.

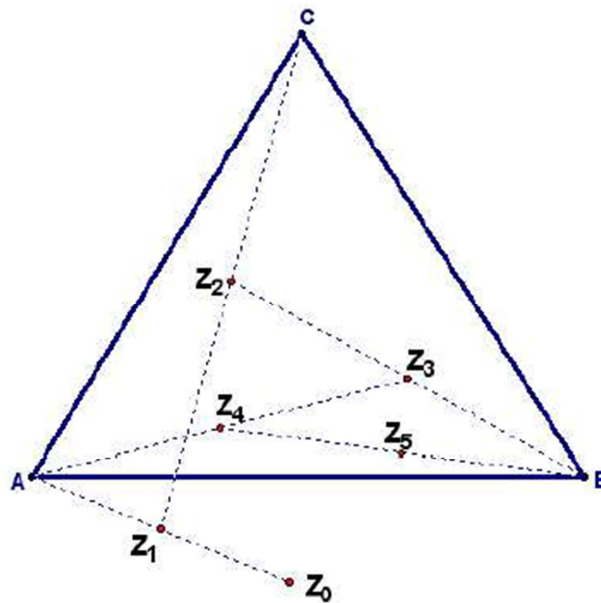


Figura 31 Jogo do Caos (as 5 primeiras iterações) [48].

Este é um exemplo de um fractal obtido a partir de um conjunto determinístico de regras.

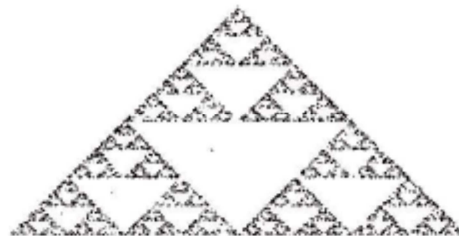


Figura 32 50000 Iterações do jogo do caos [48].



### 3. APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL

Neste capítulo vão ser expostas resumidamente algumas das aplicações da geometria fractal. Este é um assunto em constante evolução e mais aplicações irão continuar a surgir.

Durante séculos, a geometria euclidiana, serviu de base para modelação e para a compreensão da geometria da Natureza. Com o aparecimento da geometria fractal nos anos 70 do século XX por Mandelbrot, o conceito fractal foi bem recebido pela comunidade científica dos mais variados campos.

As formas encontradas nos animais e plantas chamam a atenção dos matemáticos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas-do-mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Mas além dos padrões de forma, existem os padrões de movimento, como o andar humano onde os pés tocam o solo num ritmo regular, uma cobra do deserto que se move como uma espiral de uma mola helicoidal, jogando seu corpo para frente em forma de curvas tentando minimizar seu contato com a areia quente [2]. Mas a simetria da natureza é também muitas vezes imperfeita, existindo outra categoria de padrões naturais, padrões que existem onde pensávamos que tudo era aleatório e sem forma, estes padrões são chamados de *Fractais*.

Os fractais naturais estão à nossa volta, basta observarmos as nuvens, as montanhas, os rios e seus afluentes, os sistemas de vasos sanguíneos e entre outros. O conceito de geometria fractal pode ser usado para modelar objetos naturais desde escala atômica até à escala do universo. Mas este conceito só se aplica tendo-se em conta que em cada caso a aplicação dos fractais está sempre limitada a um intervalo de escalas, fora deste a propriedade da auto-similaridade, seja ela exata ou aproximada já não se verifica.

A modelação de objetos ou fenómenos naturais com a geometria fractal assenta na noção de que é necessário aplicar aproximações que dependerão do grau de correção que se pretende nos resultados finais. Estes métodos já eram utilizados na geometria euclidiana, por exemplo o globo terrestre é em muitos casos estudado como se tratasse de uma esfera e não o é. Porém temos de ter noção que nem tudo na natureza é fractal, o que significa que a geometria euclidiana continua a ser útil e necessária, o que torna estas geometrias complementares.

Este capítulo está dividido em três grupos de aplicações: o primeiro sendo aquelas que se aplicam a objetos ou fenómenos da natureza, segundo aquelas que se aplicam a invenções Humanas, terceiro aquelas que se destinam a modelar ocorrências da ciência económico-sociais.

### **3.1. NA NATUREZA**

A ideia de descrever os fenómenos naturais através do estudo estatístico leis de escala não é recente. No entanto, tem existido um interesse mais intenso recentemente por várias áreas científicas. Um grande número de sistemas físicos tendem, a apresentar comportamentos semelhantes em diferentes escalas de observação. A principal atração da geometria fractal deriva da sua capacidade de descrever a forma irregular ou fragmentada de recursos naturais bem como de outros objetos complexos que a geometria euclidiana tradicional não consegue analisar. Este fenómeno é muitas vezes expresso por leis e dimensionamento estatísticos no domínio do tempo e caracterizado principalmente pelo comportamento de lei de potência de sistemas físicos do mundo real. Este conceito permite uma interpretação

simples, geométrico e é frequentemente encontrado numa variedade de campos, tais como geofísica, biologia ou mecânica dos fluidos. Relações que dependem da escala têm profundas implicações na fisiologia humana, na ecologia e em muitas outras subdisciplinas da biologia.

### **3.1.1. NO CAMPO DA BIOLOGIA**

Na última década, percebeu-se que alguns sistemas biológicos não têm comprimento característico ou escala de tempo, ou seja, têm propriedades de um fractal. No entanto, as propriedades fractais em diferentes sistemas biológicos têm natureza muito diferente, origem e aparência. Em alguns casos, é a forma geométrica do objeto biológico que exhibe características óbvias de um fractal, enquanto noutros casos, estas propriedades encontram-se mais subentendidas e têm de ser estudadas em função do tempo ou mapeado num gráfico. Depois de um mapeamento adequado, como um gráfico pode se assemelhar a uma paisagem montanhosa, com dentado de cumes de todas as escalas de comprimento desde muito pequenas saliências para enormes picos. Matematicamente, essas paisagens podem ser quantificadas em termos de conceitos fractais como a auto-similaridade [40][41][44].

Uma aplicação interessante dos fractais que mistura biologia e geometria é medir o contorno de habitats, para assim tentar saber como é que a irregularidade influencia, na escolha do local para viver, oferecendo abrigo e proteção contra predadores, na influência na superfície irregular das proteínas nas iterações moleculares de determinadas espécies e em estudos de variações climáticas.

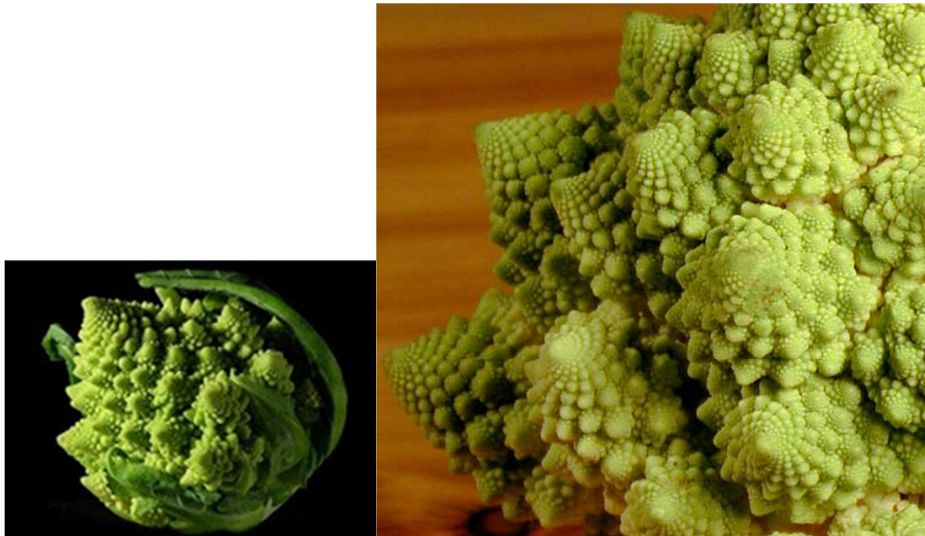
A geometria fractal propõe-se a medir superfícies complexas e irregulares como a copa de uma árvore. Cada vez que aumentamos a precisão das medições aparecem mais detalhes e curvas que têm uma importância muito grande para os animais. No entanto, cada uma delas pode ser considerada como um refúgio para os animais que vivem nela e precisam se proteger do vento e dos predadores. Acontece que nem todos os refúgios servem para todos os animais e, sim, são compatíveis com o tamanho de cada um deles ver Figura 33.



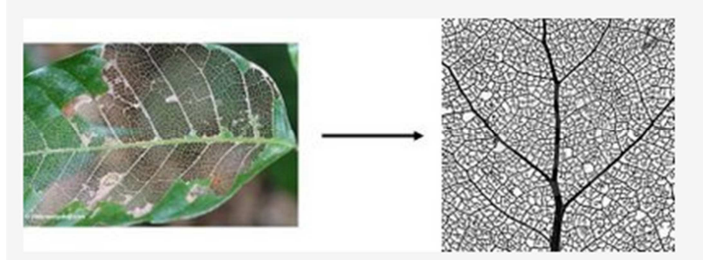
**Figura 33** **Árvore que pode ser abrigo para diferentes animais (à esquerda visão superficial) e (à direita ampliação de um tronco de árvore) [18].**

Esta geometria é designada de geometria de diferentes escalas, por exemplo: aos olhos de uma formiga, uma fresta é o local ideal para se proteger. Numa mesma árvore existem várias frestas como aquelas, que não são observadas por um gavião que pousa no mesmo galho que se encontra a formiga [2]. Quanto mais irregular e recortado forem os galhos menores os animais que nela vivem e tendem a aparecer em maior quantidade. Mas para os animais maiores que necessitam de utilizar os galhos maiores a árvore parece ser lisa, portanto, tudo depende da escala que se observa [6].

Na estrutura de plantas e de fungos, começou-se por medir a dimensão fractal do contorno de folhas de várias espécies e pensa-se que, apesar de esse valor variar bastante dentro da mesma espécie, ele pode ser a referência taxonómica. À semelhança destes, também se mediram as dimensões de sistemas de raízes e concluiu-se que a dimensão fractal de um sistema de raízes vai aumentando ao longo do tempo e varia conforme a espécie, na forragem de fungos a dimensão fractal varia entre as espécies e tende a ser maior quando há mais nutrientes, o tronco subdivide-se em vários ramos que por sua vez se dividem em ramos mais estreitos e assim por diante, o que podemos observar é a similaridade aproximada entre uma pequena fração e pela totalidade da árvore (Figura 34 e Figura 35).



**Figura 34** Auto-similaridade aproximada na couve romanesca (fractal natural).



**Figura 35** Auto-similaridade aproximada na estrutura das folhas.

A samambaia é uma antiga planta primitiva que é feita do mesmo padrão em diferentes escalas ver figura abaixo [23].

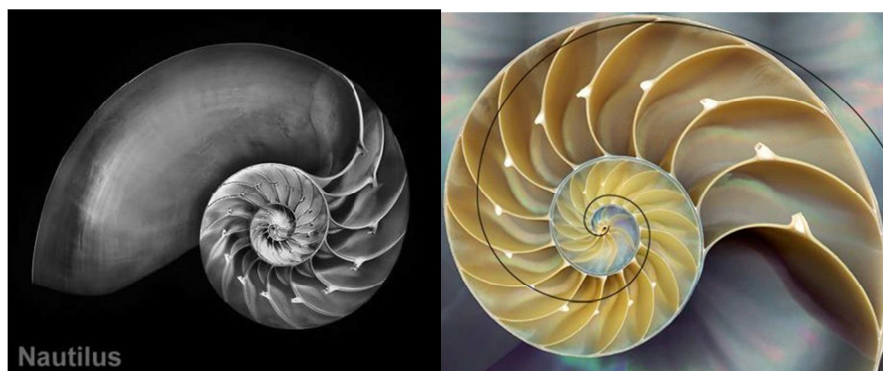


**Figura 36** Auto-semelhança aproximada na estrutura das folhas [23].

Dispersões de plantas como a diásporas e de agentes patogénicos têm dispersão com propriedades fractais. O padrão formado pelo espaço ocupado numa paisagem por espécies de plantas como diásporas adaptadas para percorrer longas distâncias terá uma dimensão fractal baixa. Estas plantas dispersam-se pela paisagem, avançando com grandes intervalos entre os diversos pontos de fixação, estabelecendo continuamente novas colónias e epicentros que se apresentam em diferentes escalas. Contrariamente, as espécies menos adaptadas a percorrer longas distâncias percorrem a paisagem estabelecendo-se nela de forma contínua, apresentando novos epicentros apenas ocasionalmente, o que origina um padrão de distribuição do espaço com dimensão fractal mais alta. Assim, fazendo a transposição deste modelo para os agentes patogénicos, conclui-se que serão difíceis de prever novas erupções de patogénicas cuja distribuição tenha dimensão fractal.

As bactérias são seres vivos interessantes do ponto de vista de fractais. Se se observar o seu crescimento em placas petri no laboratório, formam-se padrões distintos, consoante as condições impostas. Estas condições representam o que acontece na natureza e os padrões são estratégias de defesa e comunicação das bactérias. Padrões análogos são observados quando as bactérias resistem a alguns antibióticos. Seria extremamente útil compreender o fenómeno por detrás dos mesmos, para conseguir combater de forma mais eficaz estas bactérias.

Em animais como o *Nautilus Shell Pompilius* (Figura 37) é analisado em termos de sua dimensão fractal e sua forma de espiral equiangular ou seja segue um padrão logaritmo espiral. Descobertas afirmam que este ser é fractal desde o seu nascimento e que o seu crescimento é ditado por um critério de auto-similaridade [53].



**Figura 37** Imagem de um corte transversal de um *Nautilus Shell Pompilius* [23].

A Tabela 9 mostra, uma relação de várias estruturas observadas na natureza com suas correspondentes dimensões fractais, medidas com aproximações variáveis, dentro do domínio de escalas em que a propriedade de semelhança está presente (em geral, apenas em carácter estatístico).

<i>Área</i>	<i>Sistema</i>	<i>Dimensão Fractal</i>
<i>Biologia</i>	Olho humano	~1,7
	Pulmão	~2,2
	Cérebro dos mamíferos	~2,6
	Proteínas	$1.6 < d < 2.4$
<i>Geociências</i>	Linhas Costeiras	$1.2 < d < 1.4$
	Leitos de Rios	$1 < d < 1.2$
	Contornos topográficos de montanhas	$1.1 < d < 1.3$
	Objetos fragmentados (granito, carvão, basalto, quartzo, entre outros)	$2.1 < d < 2.6$
<i>Cosmologia</i>	Distribuição de galáxias no Universo	~1,2
<i>Estrutura da Matéria</i>	Nuvens projecção do perímetro	~1,35
	Aglomerados de metal em cátodo	
	Dedos viscosos (produzidos pela injeção de um líquido noutra também viscoso)	~2,43
		~1,7

**Tabela 9** Tabela de dimensões fractais de alguns elementos existentes na natureza [13].

Pode-se concluir que na complexidade de habitats, a coexistência de espécies aumentam com a dimensão fractal da paisagem e que a natureza fractal das paisagens é um índice muito importante e determinante das taxas de utilização de recursos.

### 3.1.2. NO CAMPO DA GEOLOGIA

Muitos fenômenos geológicos possuem a simetria de escala, exemplos disso são as distribuições de frequência dos tamanhos de fragmentos. Determina-se a dimensão fractal de solos, a partir da distribuição dos tamanhos das partículas que os compõem e estuda-se, a relação da sua dimensão com as suas propriedades de percolação e de retenção de água. O mesmo método também é utilizado para estudar a fragmentação do solo. Este e outros métodos utilizam-se para estimar a dimensão fractal da massa, dos poros da superfície de solos arenosos e lodosos. A relação entre a geometria fractal, do solo e a diversidade da microflora e microfauna está presente em fenômenos como: falhas geológicas, terremotos, erupções vulcânicas e depósitos minerais e de petróleo.

Uma distribuição fractal, requer que o número de objetos maiores que um determinado tamanho (magnitude), tenha uma dependência com esse tamanho que corresponde a uma lei de potência. Um exemplo interessante, já percebido em 1954, é a relação de Gutenberg-Richter entre a magnitude e a frequência dos terremotos, que leva a uma dimensão fractal de 1,8 aproximadamente.

Os fractais têm-se mostrado úteis, no estudo dos meandros dos rios e dos contornos das formações geológicas (Figura 38 e Figura 39). A dimensão fractal é uma medida da rugosidade da paisagem, e a topografia do planeta Terra é resultado de muitas influências em competição. Há evidências, por exemplo, de que o processo de erosão é invariante de escala [56].

Os sistemas fluviais têm dimensão fractal, tendo uma relação entre o comprimento do braço principal e a área drenada. O movimento das ondas do mar é vital para diversas actividades, o ciclo de vida de alguma fauna e flora marinha dependem dos ciclos das marés.

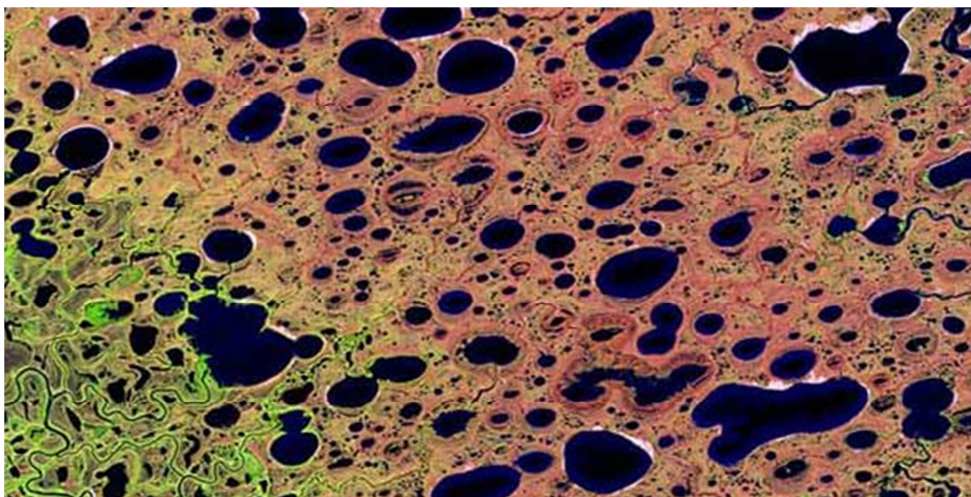


**Figura 38** Foto de um satélite: Manaus, na confluência dos rios Solimões e Negro [15].



**Figura 39** Vista aérea rio Sabinoso do novo México [15].

Corpos de água podem ser fractais, em lugares molhados com superfícies planas, as mesmas formas ocorrem numa ampla gama de escalas, a marca de um fractal Figura 40.



**Figura 40** Vista aérea de lagoas no Norte do Alasca [20].

Uma aplicação muito interessante é a utilização dos fractais na medição de linhas costeiras pois os litorais têm uma estrutura fractal comum sobre a Terra. Mais detalhes surgem quanto mais se aumenta o “Zoom” sobre a costa e o seu comprimento tende para infinito.

Pois os contornos intrincados da linha costeira que não desvanecem quando aumentamos a escala, antes pelo contrário, cada vez que aumentamos a ampliação são desvendados mais detalhes, até então despercebidos. Este fenómeno foi descrito por Richardson [55], em que observou que quanto menor for a unidade de medição usada, maior é o comprimento medido da linha costeira, já que uma unidade de medição mais pequena permite uma melhor adaptação ao rendilhado da linha da costa. Richardson realizou observações empíricas registando os comprimentos da linha costeira medidos em diferentes escalas ver Figura 41 [10]. Representou as observações num gráfico de escala logarítmica, nomeadamente, registou o logaritmo do comprimento da costa como funções do logaritmo da unidade de medição. Reparou então que tais observações apareciam praticamente alinhadas numa reta de declive negativo e valor absoluto aproximadamente 0.12. Extrapolando, as observações de Richardson sugerem que se diminuirmos a unidade de medição indefinidamente, o comprimento da linha costeira torna-se arbitrariamente grande e deverá ser regido pela seguinte fórmula:

$$L(s) = F s^{1-d} \quad (16)$$

Onde  $F$  é uma constante positiva,  $s$  é a unidade de medição e  $d$  é a dimensão da linha de costa, que no caso de Portugal continental é aproximadamente  $d = 1.12$  (Figura 42).

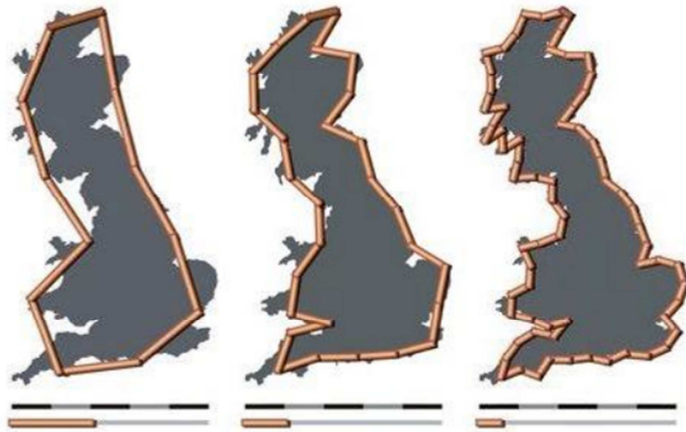


Figura 41 Escalas de diferentes dimensões [19].

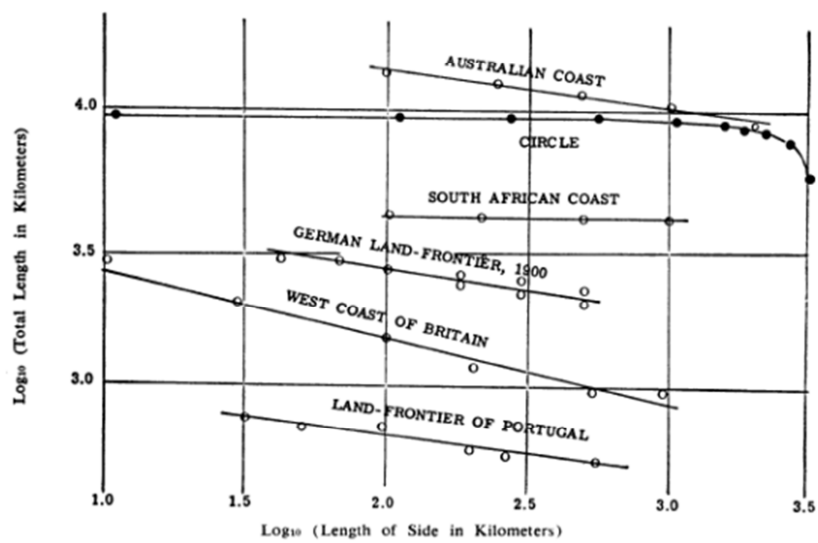
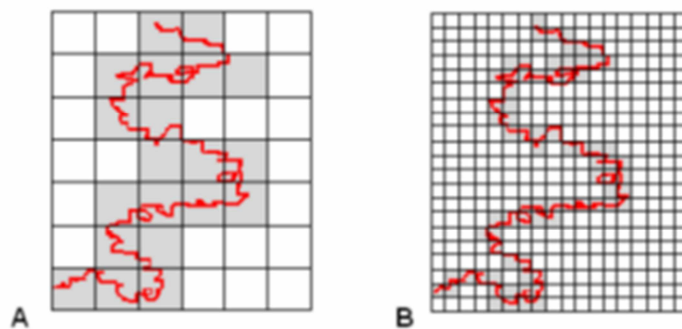


Figura 42 Dimensões de algumas linhas costeiras [19].

O cálculo da dimensão pode ser feito pelo método de “contagem de caixas” ou “box-counting” (Figura 43) ou pela curva de Koch. No entanto existe uma diferença notória entre a curva de Koch e as linhas costeiras: a curva de Koch sendo um “produto de laboratório” apresenta auto-similaridade exata enquanto as linhas costeiras exibem na terminologia sugerida por Mandelbrot de auto-similaridade estatística ou aproximada, isto é, após ampliados os segmentos das linhas costeiras são parecidos, mas não exatamente iguais, com os segmentos da linha costeira em escalas diferentes. Constata-se que, empiricamente, numa determinada gama de unidades de medição, as linhas costeiras apresentam características dos fractais (Figura 43) [43].



**Figura 43 Método da contagem de caixas para o cálculo da dimensão de linhas costeiras.**

### **3.1.3. NO CAMPO DA MEDICINA**

Nas estruturas de células, nos sistemas ramificados na fisiologia animal a dimensão fractal é usada como medida da complexidade. Por exemplo, no contorno de células neuronais em imagens bidimensionais, o valor da dimensão fractal é tido como uma medida morfológica quantitativa da complexidade celular a ter em conta (Figura 44). As ramificações da fisiologia animal [14] encontram-se em sistemas como: respiratório, circulatório [46] e nervoso pois possuem uma estrutura altamente ramificada (Figura 45) [49].

A partir da análise em termos geométricos e físicos dos sistemas de tubos conclui-se que tal rede de distribuição é melhor caracterizada por um sistema ramificado fractal para preenchimento do espaço.



Figura 44 Imagens pretas e brancas usadas para o cálculo da dimensão fractal [49].

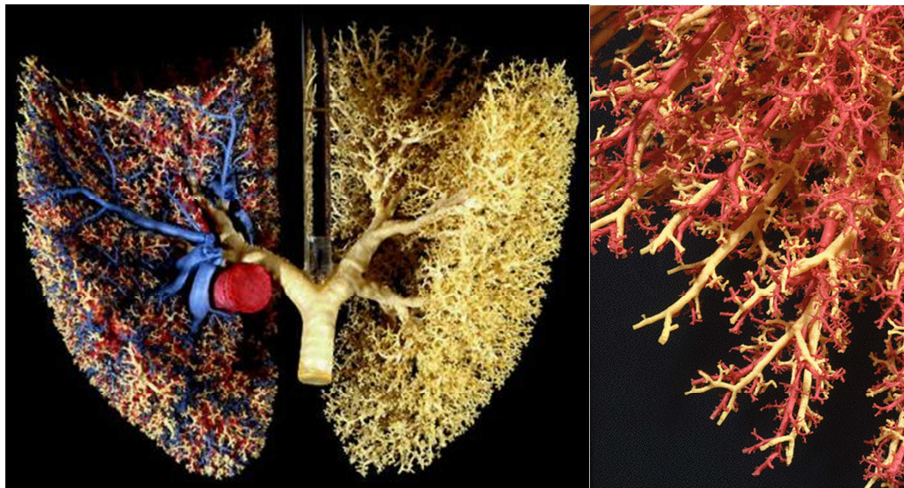


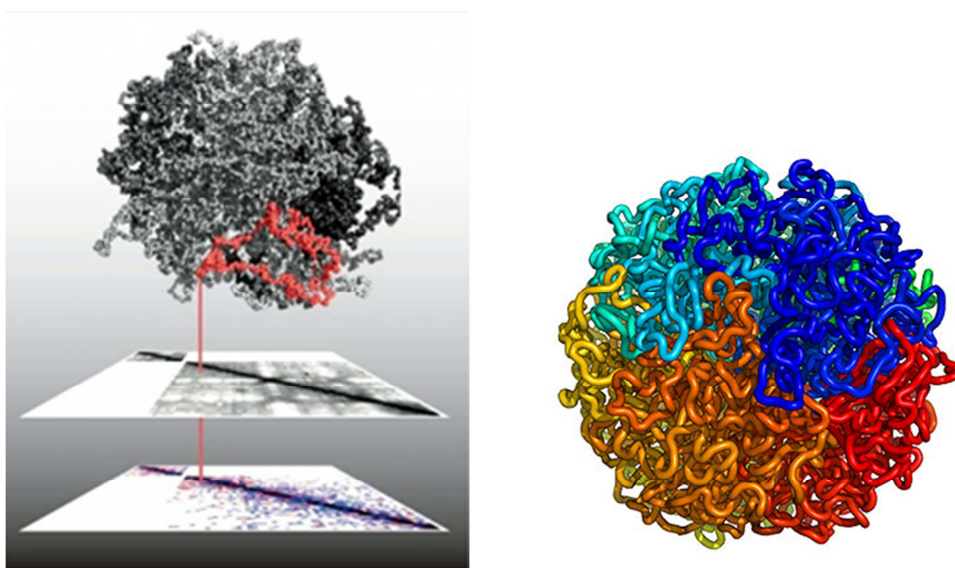
Figura 45 Ramificação no sistema respiratório e circulatório no pulmão e ampliação (à direita) [46].

As estruturas ramificadas de neurónios (Figura 46) proporcionam, mais tolerância a defeitos no crescimento e a danos. A ramificação fractal amplifica grandemente a área da superfície de um tecido quer seja para absorção (pulmão, intestino), quer seja para distribuição e colheita (vasos sanguíneos, intestino), ou para processamento de informação (nervos) [17].



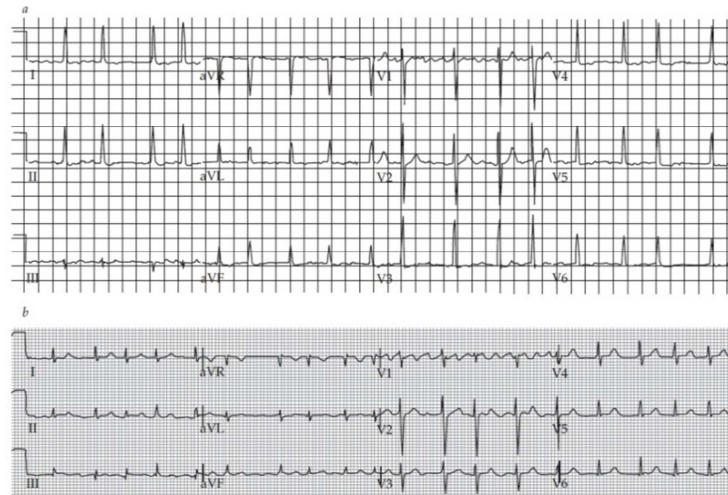
**Figura 46** Imagem de ramificações em neurónios [17].

Na Figura 47 abaixo em 3D mostra um glóbulo fractal, um arranjo denso que permite que o ADN se enrole num novelo sem interferir com a capacidade da célula em ler o próprio genoma.



**Figura 47** Capacidade de rugosidade numa célula de ADN.

No corpo humano o batimento cardíaco saudável é caótico e não regular (Figura 48), a representação gráfica de um batimento cardíaco revela auto-similaridade em diversas escalas de tempo[51].



**Figura 48 Batimento cardíaco caótico [51].**

O coração está cheio de redes fractais: as artérias e veias coronárias, as fibras que ligam as válvulas à parede do coração, os músculos cardíacos em si. A ramificação fractal faz com que a área de superfície disponível para a absorção seja muito maior, para que a transferência de tubos brônquios, vasos capilares, forro intestinal, e ductos biliares. Este modelo fractal do sistema de vasos sanguíneos permite atingir um fornecimento de oxigênio homogêneo em todo o corpo. Além disso, a redundância de estruturas fractais torna-a robusta contra lesões. Nas imagens, a análise de texturas, pode ser efetuada por vários métodos (como: através do cálculo de dimensão fractal, escala, auto-similaridade) de análise que analisam texturas baseadas na geometria fractal. Por exemplo: em imagens de ressonâncias magnéticas cardíacas e de raios-x aos ossos [13][49].

Na Figura 49 mostra-se imagens de padrões vasculares da retina humana, onde observam comportamentos fractais. A análise destes padrões pode ser útil para a detecção da mudança vascular precoce, em doenças da retina [4], e também para proporcionar conhecimento sobre a progressão da retina nos processos de doença.

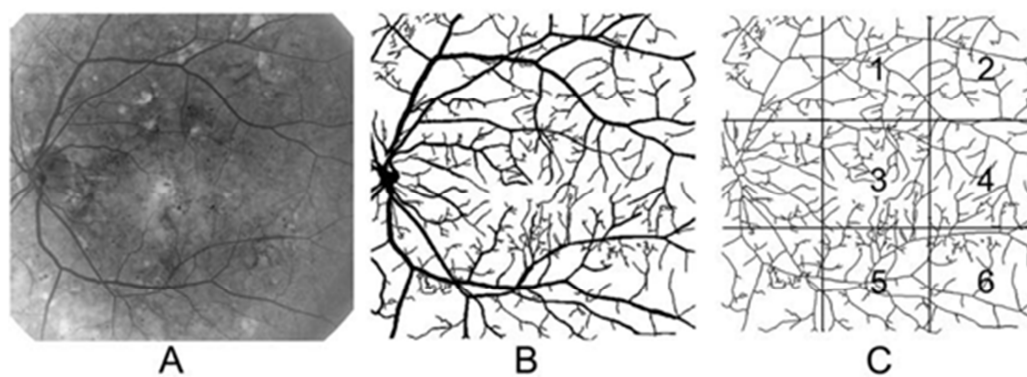


Figura 49 Análise de padrões fractais na retina humana [4]

Por fim segue abaixo Tabela 10, onde indica quais as aplicações médicas que já utilizam métodos de análise baseados em fractais [51][33].

Methods	Applications				
	Segmentation	Characterization			Others
		EEG/ECG signals	Brain images	Bone texture	
<i>Fractal</i>					
Box counting	Keller et al. (1989)	Anderson et al. (1997), Smrcka et al. (2003) and Phothisonothai and Nakagawa (2007)	Smith et al. (1993), Smith and Behar (1994), Bullmore et al. (1994), Cook et al. (1995), Soltys et al. (2001), Kedzia et al. (2002), Liu et al. (2003), Zhang et al. (2006), Gorski and Skrzat (2006) and Kalmanti and Maris (2007)	Majumdar et al. (1999), Wilkie et al. (2004) and Yasar and Akgunlu (2006)	Byng et al. (1996), Nguyen and Rangayyan (2005), Mavroforakis et al. (2006), Tanki et al. (2006) and Li et al. (2007)
Differential box counting	Chaudhuri and Sarkar (1995)	Yum and Kim (2002)	Zook and Iftekharuddin (2005) and Lopes et al. (2007a)		
Extended counting method					Sandau and Kurz (1997) and Chung et al. (2002)
Triangular prisms method			Zook and Iftekharuddin (2005)		Oczetko et al. (2001) and Imre and Bogaert (2004)
Covering blanket method	Novianto et al. (2003)		Zook and Iftekharuddin (2005)		
Variogram			Iftekharuddin et al. (2000)	Benhamou et al. (1994) and Jennane et al. (2006)	
Power spectrum				Caldwell et al. (1998), Ouyang et al. (1998), Lespessailles et al. (1998) and Majumdar et al. (1999)	
Isarithm method			Free et al. (1996)		Rangayyan and Nguyen (2005)
<i>Multifractal</i>					
Renyi's dimensions	Xia et al. (2006)	Yu et al. (2001)			Guillemet (1996)
Direct determination method of the $f(\alpha)$ singularity spectrum	Lévy-Véhel et al. (1992)	Wang et al. (2006) and Wang et al. (2007)	Takahashi et al. (2006) and Lopes et al. (2007b)		Stojic et al. (2006)
Sand box method			Stosic and Stosic (2006)		
Large-deviation multif. Spect.					
Discrete wavelet transform		Li et al. (2005) and Hsu et al. (2007)			
The WTMM method		Arneodo et al. (1998), Shimizu et al. (2004) and Popivanov et al. (2005)			Kestener et al. (2004)
Wavelet leaders					

Tabela 10 Os principais métodos fractais aplicados em análises de imagens médicas [13].

### 3.1.4. NO CAMPO DA FÍSICA

Na física dos materiais ocorrem muitas das principais aplicações dos fractais. O crescimento de estruturas sejam elas cristais ou a penetração de um fluido noutra material, assumem, com frequência, estruturas ramificadas com a propriedade de auto-similaridade.

O estudo dos meios porosos, que tem repercussões tecnológicas e económicas, mostra também a presença de fractais. Um exemplo ocorre nos trabalhos de prospecção de petróleo, pois, a rocha na qual o petróleo reside, apresenta estrutura porosa com propriedades fractais.

Outra área particular de pesquisa é a difração de ondas por superfícies fractais que permite, num processo inverso, que se adquiram informações sobre a estrutura da superfície. A superfície dos materiais é, em geral, bastante irregular e conhecendo a sua dimensão fractal pode vir a ser útil por exemplo, no estudo de fenómenos de corrosão.

O estado de qualquer sistema por mais perfeito que seja tem elementos aleatórios, por isso muitos fenómenos ou objetos naturais terão de ser modelados através de fractais aleatórios. Os percursos aleatórios ou movimentos brownianos têm grande importância na física, na química e na biologia. O movimento errático de partículas microscópicas de pólen é físico não é biológico como se pensou inicialmente. Tudo está sujeito a flutuações térmicas, moléculas, macromoléculas, vírus, partículas e outros componentes do mundo natural estão todos em constante movimento, colidindo ao acaso devido a energia térmica. O movimento de uma partícula browniana visto pelo microscópio consiste aparentemente em passos dados numa direção aleatória e com um comportamento que tem determinado valor característico. O movimento de uma partícula num dado intervalo de tempo é independente do seu movimento noutra intervalo de tempo. Aumentar a resolução do microscópio e a resolução da escala de tempo apenas produz percursos aleatórios semelhantes.

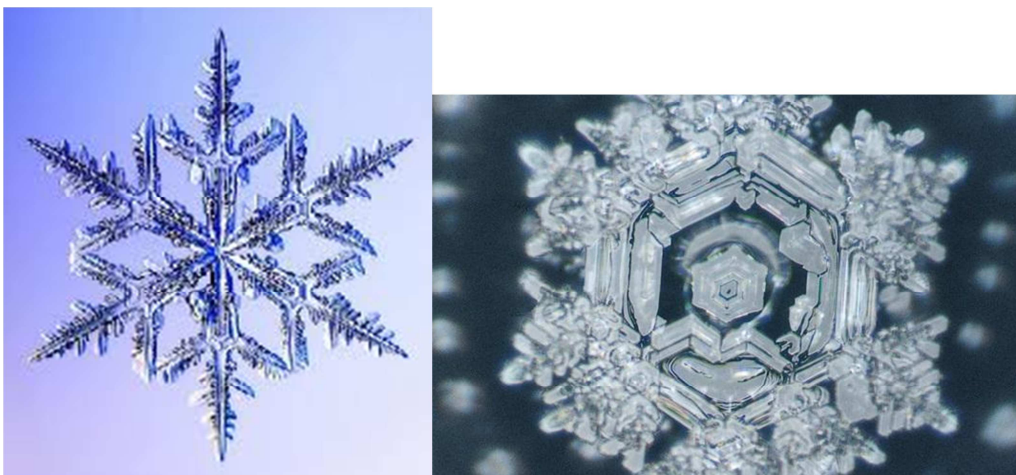
Muitas imagens atrativas e interessantes podem ser geradas, usando teorias da química e da física. O modelo de agregação por difusão limitada conduz a estruturas que exibem auto-similaridade-aproximada, constituídas por aglomerados de partículas, arborescentes e altamente ramificada. E é também compatível com a modelação de relâmpagos (Figura 50) pois esta é essencial para o desenvolvimento e teste de uma aeronave em laboratório, a

cristalização de lava, formação de cristais como os dos flocos de neve e crescimento de espaços urbanos[12][36].



**Figura 50** Fractais presentes em relâmpagos [23].

Alguns cristais como os flocos de neve podem apresentar uma estrutura fractal (Figura 51). Existem vários tipos de flocos de neve e alguns deles têm uma forma idêntica ao conjunto ilha de Koch [7].



**Figura 51** Cristais de flocos de neve [23].

## **3.2. FRACTAIS CRIADOS PELO HOMEM**

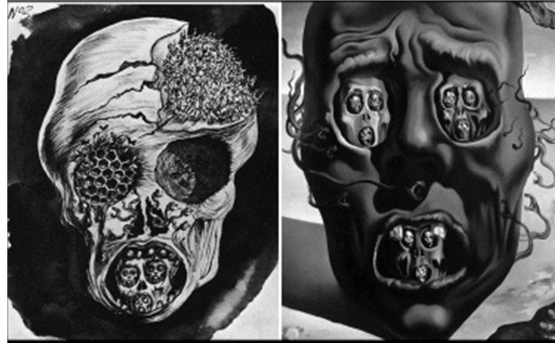
Após verificada a aplicação dos fractais, nas mais diversas áreas relacionadas com a natureza e com a evolução dos computadores, fatores que proporcionaram o maior aceleração na adaptação da natureza nos objetos criados pelo Homem através da geometria euclidiana. Desta forma os fractais começaram a ser adaptados a inúmeras experiências e projetos como na área da informática, no cinema, na indústria, na tecnologia, na arquitetura em expressões de arte.

As imagens geradas por computador foram uma das primeiras aplicações fractais. Através dos fractais pode conseguir-se realismo e beleza, ocupando pouco espaço em memória por ser fácil comprimir os dados. A geometria fractal permite simular imagens naturais não só paisagens, como também de nuvens e de plantas a até paisagens de planetas (cinema).

A seguir segue uma explanação de algumas das aplicações dos fractais criadas pelo Homem para seu proveito.

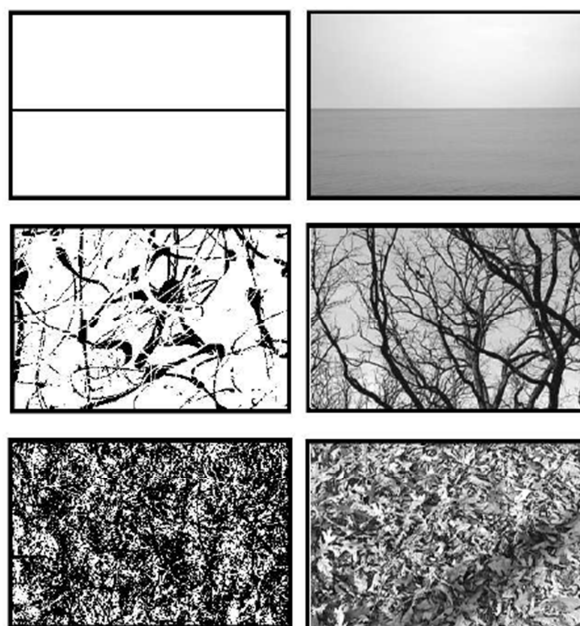
### **3.2.1. FRACTAIS NA PINTURA**

O uso de fractais na pintura pode ocorrer de várias formas. Pode-se ver, na Figura 52 uma obra do pintor Dali onde este retrata a guerra civil espanhola dos anos 40. Os olhos e a boca de cada cabeça representada contêm um rosto, cujos olhos e boca contêm cada um um rosto, e assim sucessivamente. Este é um exemplo óbvio do uso dos fractais na arte. Talvez Dali decidisse retratar os horrores infinitos da guerra e apresentou-os numa tela limitada através do conceito da auto-similaridade, embora certamente não tivesse sido alguma vez exposto a este como um conceito matemático [15].



**Figura 52 Auto semelhança na arte [15].**

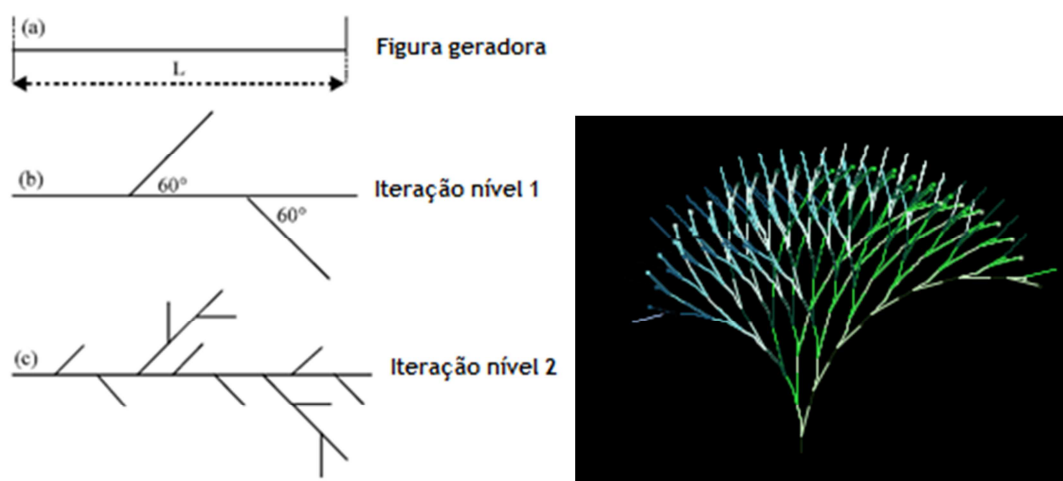
Já outro pintor Jackson Pollock usou a técnica de gotejamento e esta foi um passo importante no desenvolvimento da arte moderna, e tem sido objeto de muitas análises em crítica de arte. Devido as suas características peculiares em termos de expressão, as suas obras foram alvo de estudos matemáticos, onde se detetaram presença de padrões fractais. Estes padrões permitiram em termos artísticos proceder a avaliação de autenticidade e datação de uma obra de Pollock. A complexidade visual dos padrões fractais das suas obras é quantifica-la através do conceito de dimensão fractal. Para o cálculo deste usa-se o método de contagem de caixas dimensões, para procurar diferenças quantitativas entre essas pinturas e assim calcular a dimensão fractal. Procede-se à digitalização da pintura a ser estudada, e esta é coberta com uma grelha de quadrados de tamanho  $r$ , e conta-se o número  $N(r)$  de quadrículas, que contém parte do padrão de gotejamento (Figura 53) [48].



**Figura 53 Evolução da dimensão fractais nos quadros de Pollock [15].**

### 3.2.1.1. COMPRESSÃO DE IMAGENS

O método de sistemas de funções iteradas gerou grande entusiasmo na comunidade de computação gráfica, e também na comunidade de compressão de imagem. O processo de construção fractal de uma árvore como se pode ver na Figura 54, onde (a) é iniciador do processo nível zero, (b) a primeira iteração do processo e (c) a estrutura com dois níveis de iterações. Além disso, a natureza fractal da imagem torna escala independente pois a imagem pode ser processada numa escala maior, sem informação adicional e sem pixelização.



**Figura 54 Regras para construção fractal de uma árvore (à esquerda) e um exemplo de imagem de um fractal obtido no Netlog.**

Uma aplicação, que desperta o interesse militar é o reconhecimento de imagens. Este reconhecimento pode ser feito como premissa, que os objetos artificiais são construídos geralmente a partir de formas regulares, enquanto os objetos e paisagens naturais têm geralmente uma estrutura irregular mais próxima dos fractais. Desta forma, em fotografias aéreas pouco claras, a identificação de domínios fractais pode discernir entre objetos naturais e objetos artificiais camuflados [5][18][38].

### 3.2.2. FRACTAIS NA CONSTRUÇÃO

Os fractais foram utilizados na construção muito antes de se saber a existência do seu conceito.

Temos um exemplo, de um monumento mundialmente conhecido, a torre que Gustave Eiffel construiu em Paris, deliberadamente incorpora a ideia de uma curva fractal cheio de pontos de ramificação. A estrutura da torre não é constituída por feixes sólidos, mas sim por treliças colossais. A armação é um conjunto rígido de sub-membros interligados, aos quais não se podem deformar sem deformar pelo menos um sub-membro. A chave para a força reside nos vários pontos de ramificação. Quanto mais avançar-mos na aplicação deste princípio mais nos aproxima-mos de um ideal de Sierpinski [15].

Abaixo segue um esboço da estrutura geral da torre, juntamente com o plano de um pormenor que mostra as cintas transversais feitas de cintas cruzadas.

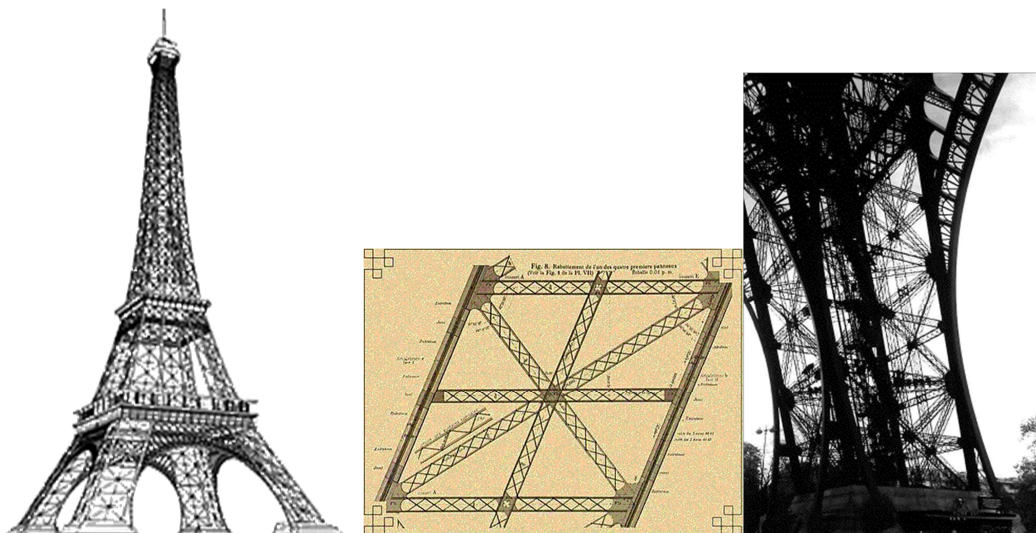


Figura 55 Auto similaridade nos pormenores das treliças [15].

No campo da arquitetura, JacSteven Holl projectou *Simmons Hall*, dormitório do MIT (Figura 56), o projecto em si foi motivado por uma esponja natural, numa forma que possui uma distribuição fractal dos furos [16].

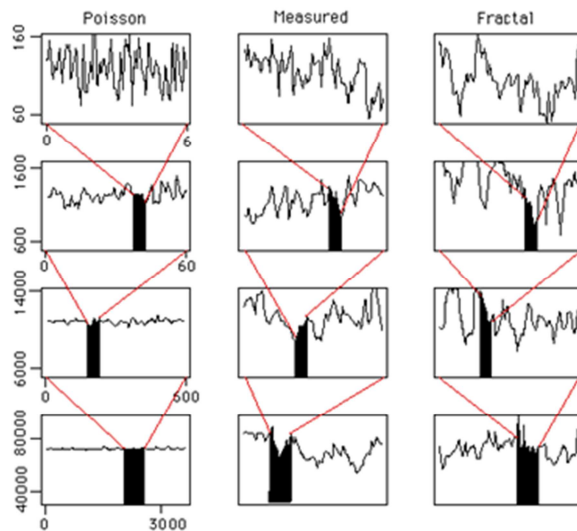


**Figura 56** Auto similaridade na arquitetura [16].

### **3.2.3. FRACTAIS NA INTERNET**

O tráfego de dados não é de todo o tráfego de voz pois é muito mais variável, tanto em duração, como em taxa de informação. Os dados são divididos em pacotes autónomos que são transmitidos de forma independente uma da outra. O controlo é por comutação de pacotes, onde os routers identificam a fonte e destino e encontram o melhor caminho para cada pacote, utilizando toda a banda disponível.

Willinger e Paxson ao estudarem o tráfego da Internet, compararam os métodos de Poisson e o Fractal, usando dados reais de uma hora de tráfego de rede de uma grande empresa (Figura 57) [1].



**Figura 57** Comparação entre o método de Poisson e fractal [15].

A longo prazo, o modelo de Poisson achata, enquanto os dados e o modelo fractal não. Pode-se concluir de imediato que é necessário fazer buffers maiores para absorver todas as flutuações em todos os prazos e que o modelo fractal modela da melhor forma o tráfego de internet medido.

### 3.2.4. FRACTAIS NA MÚSICA

Música e matemática têm um relacionamento longo e complicado desde os "platônicos de Música das Esferas", através de simetrias geométricas de Bach e as composições estocásticas de Cage. Fractais e música é outro aspeto dessa relação, embora, como alguns argumentam, mais abrangente do que a maioria. Alguns compositores contemporâneos explicitamente usam fractais para orientar suas composições, outros acham aspetos fractais nas obras de grandes compositores barrocos e clássicos.

Na composição musical, as músicas fractais são compostas, atribuindo-se, por exemplo, notas e ritmos às cores de figuras fractais emanadas de regras não lineares simples, como o conjunto de Mandelbrot. A música usual possui uma estrutura de lei de potência que é, portanto, similar àquela apresentada pelos fractais. Embora até agora nenhuma das

composições fractais tenha superado o compositor mais medíocre, elas possuem uma mistura de harmonia (ordem) e variedade (caos), que são qualidades presentes na música. De um ponto de vista mais físico, o da acústica, modos de vibração de um tambor particular, com bordas fractais, foram também estudados recentemente [67].

### 3.2.5. FRACTAIS NA TECNOLOGIA - ANTENAS

O design de uma antena é um problema, existem projetos de construção de antenas fractais que podem ser mais sensíveis a várias frequências em simultâneo, são mais eficazes num quarto comprimento de onda e são construídas com um pequeno número de iterações do processo fractal. Com o aumento do número de iterações, a menor frequência da antena fica mais baixa, e outras frequências mais altas são adicionadas. Além disso, antenas fractais podem operar eficientemente num quarto do tamanho do que os projetos mais tradicionais. Quando devidamente aproveitados todos esses recursos este modelo de antenas apresentam vantagens reais. Várias empresas já estão usando fractais para fabricar modelos compactos de antenas multifrequências em telefones móveis e hardware de comunicações militares.

Aplicações que já usam modelos compactos, multifrequências temos: antenas wireless e antenas GPS. Abaixo imagens com modelos de antenas fractais [31][57][64][62][65][66].

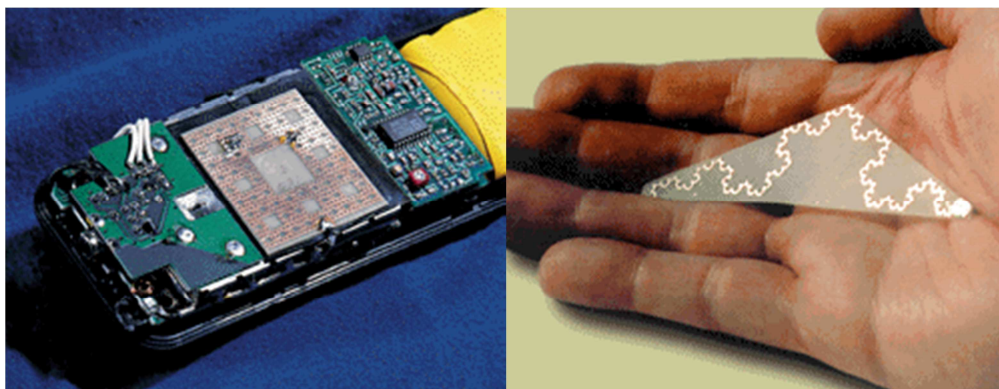


Figura 58 Modelo Sierpinski (à esquerda) e curva de Koch (à direita) [66].

Com o aumento do interesse, por esta geometria fractal existe e estão a aparecer vários estudos e novas aplicações desta em engenharia. Neste momento apenas serão indicados mais algumas aplicações além daquelas referidas acima e temos como exemplo: deteção de falhas de alta impedância em sistemas de energia, criação de micro estruturas para aplicações em condensadores aumentando a superfície e por sua vez a sua capacidade [12], na medicina para construção, de aparelhos medicinais com tamanhos cada vez mais reduzidos, mas com superfície de contato cada vez maiores para melhor tratamento. No controlo de sistemas dinâmicos de fluidos, na indústria de açúcar no processo de controlo que envolve fluído [31] e em muitas mais aplicações existem e outras aparecerão para serem estudadas.

### **3.3. NOS MERCADOS FINANCEIROS**

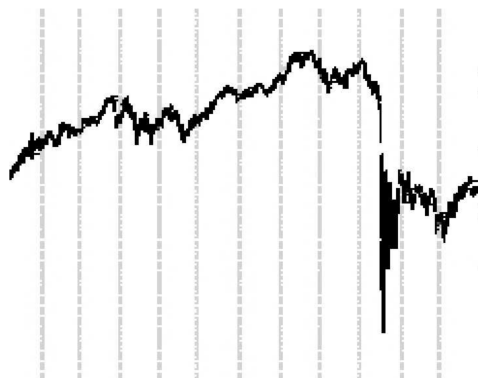
Os mercados capitais estão cada vez mais interligados e com informações partilhadas em tempo real, gerando impactos de grande magnitude, em relação ao alcance e ao montante negociado, independentemente da proximidade geográfica ou relação direta dos produtos. Com o avanço da tecnologia, os analistas têm cada vez mais recursos para acompanhar as tendências dos preços das ações e evolução dos índices, no entanto os modelos financeiros clássicos usados para a previsão não têm sido eficientes para os casos de “bolhas”, como o caso da crise do Subprime em 2008 nos Estados Unidos e repercutindo na economia mundial.

Desde 1963, Mandelbrot chamou a atenção da busca pela expansão da análise dos mercados de capitais aplicando a geometria fractal e a teoria do caos para a economia e posteriormente para as finanças. Segundo Mandelbrot, a beleza da geometria fractal é que torna possível um mercado geral, suficiente para reproduzir os padrões que caracterizam a teoria dos mercados plácidos assim como as condições de negociações tumultuadas dos recentes anos.

A geometria fractal permite a existência de um modelo, que consiga reproduzir tanto os mercados mais equilibrados como também aqueles que possuem variações drásticas

exemplo da Figura 59, que representa a curva conhecida como *Black Monday*, foi dia em que o índice Dow Jones caiu 22% . Os preços não oscilam de forma contínua e sim em todas as direções, em várias escalas de tempo e os fractais criam os mesmos padrões de variação que governam os mercados atuais.

Um modelo fractal pode ser construído a partir de dados do mercado com alguma duração, mas não levam especificamente a um preço de fechamento diário. As novas técnicas de análise auxiliam a uma criação de cenários sem deixar de considerar a volatilidade do mercado que varia ao longo do tempo e assim os analistas podem verificar os reais motivos de baixas e altas de preços questionando sua veracidade comparando o valor verificado com a expectativa a partir do método fractal [33][34][50][54][61].



**Figura 59 Exemplo de uma curva dos mercados de ações com variações bruscas [34].**

Ao longo deste capítulo foram expostas, resumidamente algumas das aplicações da geometria fractal, como se pode deparar esta geometria fomenta uma enorme interdisciplinaridade de temas. Com a constante evolução desta geometria mais temas e mais aplicações irão surgir. O próximo capítulo assenta numa apresentação, de um software que pode simular modelos naturais ou modelos criados pelo Homem, baseados em conceitos fractais.



## 4. CONCLUSÕES

Um dos aspetos que contribui bastante para a utilização dos fractais na compreensão de múltiplos fenómenos é certamente a espectacularidade das suas imagens que no mínimo, se podem considerar intrigantes e bizarras. O estudo dos fractais abre espaço à criatividade, através da atribuição de cores, dimensões e perspectivas e permite a descoberta de novas imagens. Cada imagem pode ser sucessivamente ampliada, desvendando pouco a pouco os seus 'padrões de rendilhados infinitos'. Outro aspecto importante na aplicação dos fractais, foi o interesse e entusiasmo criado na comunidade científica, que ao entender o funcionamento e aplicabilidade da geometria fractal em campos tão diversos da ciência como: biologia, geologia, astrofísica, medicina, engenharias, áreas financeiras, áreas sociais e outras mais áreas, conseguiu obter respostas para alguns em aberto.

Em regra os fractais são criados por algoritmos tipicamente muito simples, que produzem imagens arbitrariamente complexas. Apesar de os algoritmos serem muito simples, a quantidade de operações que um computador tem de realizar é de tal modo elevada que pode mesmo demorar várias horas a apresentar os resultados. Este aspecto torna os computadores indispensáveis no estudo dos fractais.

Neste trabalho mostram-se as diversas características dos fractais, tais como: noções de forma, dimensão fractal, área, perímetro, volume, números complexos, semelhança de figuras, sucessões e iterações de funções. Apresentam-se exemplos de aplicações da geometria fractal em diversas áreas do saber: biologia, geologia, física, medicina, engenharia, entre outros.

Conclui-se que os fractais são uma ferramenta importante para a compreensão de fenómenos nas mais diversas áreas da ciência. A importância do estudo desta nova geometria, é avassaladora graças à sua profunda relação com a natureza e ao avançado desenvolvimento tecnológico dos computadores.

## Referências Documentais

- [1] Adamic L. A., Lukose R. M., Puniyani A. R., Huberman B. A., *Search in Power-Law Networks*, Physical Review, Vol.64, 046135, (2001).
- [2] Alves C. M. F. S. J., *Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário*, Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências, S.A 49872P, (2007).
- [3] Assis T. A., *Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais*, Revista Brasileira de Ensino de Física, v30, nº2, ISSN: 1806-1117, pp:10, (2008).
- [4] Avakian A., Kalina R. E., Sage E.H., Rambhia A. H., Elliott K. E., Chuang E. L., Clark J. I., Hwang J. N., Parsons-Wingerter P., *The Fractal analysis of region-based vascular change in the normal and non-proliferative diabetic retina*, Current Eye Research, Vol:24, pp: 274-280, (2002).
- [5] Barrivieira R., *Compressão fractal de imagens*, Universidade Federal do Paraná, (2009).
- [6] Brown J. H., Gupta V. K., Li B., Bruce T., Restrepo C., West G. B., *The fractal Nature: power laws, ecological complexity and biodiversity*, Vol:22, Philosophical Transactions R. Soc, pp: 619-626, (2001).
- [7] Cherny A., *Scattering from generalized Cantor fractals*, Journal of Applied Crystallography, Vol. 43, pp: 790-797, (2010).
- [8] Feder J., *Fractals*, 1ª edição, Plenum Press, ISBN: 0-306-42851-2, (1988).
- [9] Foote J., *Visualizing music and audio using self-similarity*, Proceedings of the seventh ACM international conference on Multimedia, pp: 77-80, ISBN: 1-58113-151-8, (1999).
- [10] Freitas J. M., *Fronteiras Infinitas – Fractais*, Matemática no Quotidiano, Centro de Matemática da Universidade do Porto, pp: 1-74, (2012).
- [11] Fuzzo R. A., Rezende V., Santos R. S. S., *Fractais: algumas características e propriedades*, Fecilcam, pp:1-13, (2009).
- [12] Haba C.T., Loum G.L., Zoueu J.T., Asseu O., *Study of a Mos Condenser with one of his Plates of Fractional Dimension*, Asian Journal of Applied Sciences, pp: 1-11, (2011).
- [13] Havlin S., Buldyrev S. V., Golsberger A. L., Mantegna R. N., Ossasnik S. M., Stanley H. E., *Fractals in Biology and Medicine*, Chaos Solitons & Fractals, Vol.6, pp: 171-201, (1995).
- [14] Peitgen H., Jurgens H., Dietmar S., *Chaos and Fractals - New frontiers of science*, Springer- Verlag, Vol.2, ISBN: 0-387-20229-3, (2004).
- [15] <http://classes.yale.edu/fractals/>

- [16] <http://classes.yale.edu/fractals/architecture>
- [17] <http://classes.yale.edu/fractals/ca/neuralnets/>
- [18] <http://classes.yale.edu/fractals/fractrees/definitions/>
- [19] <http://classes.yale.edu/fractals/Labs/CoastlineLab/CoastlineLab.html>
- [20] <http://deumtudo2.blogspot.pt/2009/09/fractais-na-natureza-parte-ii.html>
- [21] [http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect)
- [22] [http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_curve)
- [23] <http://fractalfoundation.org/category/natural-fractals/>
- [24] <http://fractalfoundation.org/ofc/>
- [25] <http://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html>
- [26] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_de\\_julia](http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_julia)
- [27] [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sierpinsky\\_triangle\\_%28evolution%29.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sierpinsky_triangle_%28evolution%29.png)
- [28] <http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>
- [29] <http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza>
- [30] [http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl\\_f.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/exempl_f.htm)
- [31] Kearney M., Kochergin V., Petersen K., Murmu M., *Applications of engineered fractals in the sugar industry*, ASSBT, pp: 10-13, (1999).
- [32] Kimura H., *O mercado financeiro sob a óptica dos fractais*, New York: Basic Books, (2004).
- [33] Kitaoka H., Takaki R., *Fractal analysis of Human fetal lung development*, Forma, Vol.14, pp: 205-212, (1999).
- [34] Krugman P. R., *Making sense of the competitiveness debate*, Oxford review of economic policy, Vol. 12, N°3, pp: 17-25, (1996).
- [35] Kuhn T. S., *The structure of scientist revolutions*, Kindle Edition, 3ª Ed, ISBN: 13:978-0-226-45808-3, (1996).
- [36] Lantada A. D, Mosquera A., Endrino J. L., Lafont P., *Design and rapid prototyping of DLC coated fractal surfaces for tissue engineering applications*, *Journal of Physics*, pp: 1-9, (2010).
- [37] Lesmoir N. G., Rood W., *Introducing Fractals: A Graphic Guide*, Icon Books Ltd, ISBN: 978-184831-087-2, (2009).
- [38] Lopes B. D., *Dimensões fractais para certos sistemas dinâmicos discretos*, Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, (2012).
- [39] Lopes, R., Betrouni N., *Fractals and multifractals analysis*, Elsevier, Vol.13, pp: 1-16, (2009).
- [40] Losa G. A., Merlini D., Nonnenmacher T. F., Weibel E. R., *Fractals in Biology and Medicine*, Vol.4, Birkhauser Verlag, ISBN: 3-7643-7172-2, (2005).
- [41] Mandelbrot B., Frame M., *The canopy and shortest path of a self-contacting fractal tree. The mathematical intelligence*, Spring, Vol.21, pp:18-27, (1999).

- [42] Mandelbrot B., *The fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, ISBN:0-7167-1186-9, (1977).
- [43] Mandelbrot B., *How Long is the coast of Britain? Fractal market analysis: Statistical self-similarity and fractional dimension*, Science, Vol.156, n°3775, pp:636-638, (1967).
- [44] Matsuyama T, Matsushita M., *The self-similar colony morphogenesis by gram-negative rods as the experimental model of Fractal growth by a cell population*, *Applied and Environmental Microbiology*, New York, pp:1227-1232, (1992).
- [45] Miyazima S. Y., Nagamine L. T., Miyajima, H., *Power-law distribution of family names in Japanese societies*, Physica, A 278, pp: 282–288, (2000).
- [46] Nelson T. R., West B. J., Goldberger A., *The fractal lung: Universal and species-related scaling patterns*, Cellular and Molecular Life Sciences, pp: 251-254, (2011).
- [47] Newman M. E. J., *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*, Contemporary Physics Vol.46, pp: 323–351, (2005).
- [48] Nunes, R. S. R., *Geometria fractal e aplicações*, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, (2006).
- [49] Oczenetko E., Borowska M., Szarmach I., Kitlas A., Szarmach J., Radwanski A., *Fractals analysis of dental radiographic images in the irregular regions of interest*, Springer-Verlag, pp:191-199, (2010).
- [50] Krugman P. R. *The self-organizing economy*, The Bactra Review, ISBN 1-55786-698-8, (1996).
- [51] Perakakis P., *Fractals Analysis of cardiac dynamics: the application of detrended fluctuation analysis on short-term heart rate variability*, Universidade de Granada, ISBN: 978-84-692-8392-9, (2009).
- [52] Peters E. E., *Fractal Market Analysis: applying chaos theory to investment and economics*, Wiley, ISBN: 978-0-741-58524-4, (1994).
- [53] Pita A. A. C., Pita J. R. C., Galán A. S., García R. C., *Fractality in the Nautilus Pompilius Shell*, Harmonic and Fractal Image Analysis, Vol. 11, pp: 47-49, (2003).
- [54] Quang T. V., *The fractal market analysis and its application on Czech conditions*, Acta Oeconomica Pragensia, Vol.1, pp: 101-111, (2005).
- [55] Richardson L. F., *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels*, General Systems Yearbook, Vol:22 , pp:139–187, (1961).
- [56] Richter P. H., Peitgen H., *The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems*, Springer-Verlag, (1986).
- [57] Samavati H., *Fractal capacitors*, IEEE Journal of solid-state circuits, Vol.33, N°12, pp: 1-7, (1998).
- [58] Santos J. C., *Introdução à Topologia*, Faculdade de ciências da Universidade do Porto, (2011).
- [59] Santos R. C. P., Neto J. P., Silva J. N., *Os fractais + puzzle “Torres de Hanói”*, ISBN: 978-989612270-6, pp: 1-25, (2007).

- [60] Savaglio S., Carbone V., *Scaling laws and forecasting in athletic world records*, J.Sports SCI, Vol:44, pp: 477-484, (2001).
- [61] Sousa E. P. M. D., *Identificação de correlações usando a teoria dos fractais*, Instituto de Ciências Matemáticas, (2006).
- [62] Stoica A. D., Wang X., Ma D., *Power law scaling and fractal nature of medium-range order in metallic glasses*, Nature, Vol.8, pp: 30-34, (2009).
- [63] Theiler J., *Estimating fractal dimension*, Josa A, Vol. 7, pp: 1055-1073, (1990).
- [64] Tiwari A., *Fractal applications in electrical and electronics engineering*, International Journal of Engineering Science & Advanced Technology, Vol.2, pp: 406-411, (2012).
- [65] Werner D. H., Haupt R. L., Werner P. L., *Fractal antenna engineering: the theory and design of fractal antenna arrays*, IEEE Antennas and propagation Magazine, vol.41, pp: 37-59, (1999).
- [66] [www.fractena.com](http://www.fractena.com)
- [67] Yanguang C., *Zipf's law, 1/f noise and fractal hierarchy*, Elsevier, Vol.45, pp: 63-73, (2012).