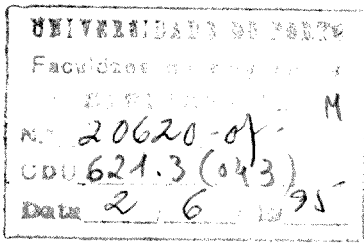


670530  
74

Elu

Maria Isabel Coutinho Vieira  
Licenciada em Matemática Aplicada,  
pela  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

**Refinamento de Valores Próprios de Operadores  
Integrais e Diferenciais**



N.º 34811

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Porto 1991

043 M  
✓ 7/60  
8-2

Tese submetida para satisfação parcial dos requisitos do programa de  
Mestrado  
em  
Engenharia Electrotécnica e de Computadores  
Perfil de Sistemas

Tese realizada sob a supervisão da  
**Professora Doutora Maria Filomena Dias d' Almeida**  
Professora Associada do Departamento de Mecânica da Faculdade de  
Engenharia da Universidade do Porto

Aos meus pais

## **Agradecimentos**

Um muito obrigado a todos quantos contribuíram – e foram muitos – , para a elaboração da presente dissertação.

Em primeiro lugar os meus agradecimentos e o meu reconhecimento à Professora Doutora Filomena Dias d'Almeida. Não só os seus ensinamentos, como também a sua simpatia e o seu companheirismo foram determinantes para levar a bom termo esta tarefa .

Aos Professores, de quem sempre obtive apoio e ensinamentos.

Aos Serviços e Departamentos, com os quais foi necessário trabalhar, as suas abertura e disponibilidade.

Aos Colegas, pelos seu acolhimento e colaboração. Sem esquecer todos os outros, queria expressar o meu reconhecimento à Maria do Rosário Pinho, à Maria Antónia Carravilla e ao António Paulo Moreira, os quais, para além de bons Colegas de Mestrado, posso agora incluir na minha lista de Amigos.

Enfim, aos Amigos, pelas suas palavras de ânimo e compreensão, ao longo do período necessário à realização deste trabalho.

E só assim foi possível terminá-lo.

" Um trabalho matemático é, para quem o sabe ler, o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir, um quadro para quem o sabe ver, uma ode para quem a sabe sentir... "

Gomes Teixeira

## Resumo

Descreve-se aqui a implementação de um método de refinamento de valores próprios, com qualquer multiplicidade algébrica, de operadores lineares ( integrais ou diferenciais ) compactos definidos em espaços de Banach.

O método de refinamento utilizado é baseado no desenvolvimento em séries de perturbação e foi anteriormente tratado em trabalhos de Ahues [ 1 ], d'Almeida [ 4 ], Chatelin [ 10 ] e Lemordant [ 18 ].

Salienta-se, a adaptação do método para valores próprios com multiplicidade algébrica maior do que um, pois, esta generalização envolve pormenores de programação que diferem dos do caso de multiplicidade um.

Faz-se uma breve descrição teórica para apresentar e justificar as opções correspondentes do programa.

Mostra-se a eficácia do programa com aplicação a vários exemplos concretos da literatura específica.

## **Abstract**

The implementation of a refinement method to evaluate the eigenvalues, with arbitrary algebraic multiplicity, of compact linear operators ( integral or differential ) defined in a Banach space is described.

The method used is based on the perturbation series development. It has been studied by various authors namely Ahues [ 1 ], d'Almeida [ 4 ] , Chatelin [ 10 ] and Lemordant [ 18 ] .

The extension to multiplicity greater than one is emphasized. In this case the implementation involves some details that differ from the case of multiplicity one.

A short theoretical description is presented to justify the program used.

The efficiency of the program is shown by testing various examples known from the literature.

## NOTAÇÕES

$\bar{\alpha}$  = conjugado do número complexo  $\alpha$

$C[a, b]$  = classe das funções contínuas no intervalo  $[a, b]$

$C^p[a, b]$  = classe das funções de  $C[a, b]$  com derivada de ordem  $p$  contínua em  $[a, b]$

$M^\perp$  = complemento ortogonal de  $M$

$\dim M$  = dimensão algébrica do espaço  $M$

$(A)_{ij}$  = elemento  $i, j$  da matriz  $A$

$A^{-1}$  = matriz inversa de uma matriz quadrada  $A$

$A^T$  = matriz transposta de uma matriz  $A$

$A^H$  = matriz transposta conjugada de uma matriz  $A$

$\det A$  = determinante de uma matriz quadrada  $A$

$I$  = matriz identidade de ordem  $n$

$\|\cdot\|_X$  = norma em  $X$  (sendo  $X$  um espaço de Banach)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  = sucessão de termo geral  $x_n$

$T_n \rightarrow T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  de modo pontual

$T_n \xrightarrow{u} T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  de modo uniforme

$T_n \xrightarrow{cc} T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  de modo colectivamente compacto

$\text{Ker } T$  = núcleo ( ou 'kernel' ) do operador linear  $T$

$\text{Dom } T$  = domínio do operador linear  $T$

$T|_B$  = restrição do operador  $T$  ao conjunto  $B \subseteq \text{Dom } T$

$\mathfrak{L}(X, Y)$  = espaço dos operadores lineares contínuos com domínio  $X$  e valores em  $Y$

$1_X$  = operador identidade do espaço  $X$

$X^*$  = espaço adjunto do espaço  $X$

$\lim$  = limite de uma função ou de uma sucessão

sse – se e só se

.>>. – muito maior do que

.<<. – muito menor do que

$\min_{x \in A} f(x)$  – valor mínimo de  $f$  em  $A$

$\max_{x \in A} f(x)$  – valor máximo de  $f$  em  $A$

$\inf_{x \in A} f(x)$  – maior dos limites inferiores do conjunto  $f(A)$

$\sup_{x \in A} f(x)$  – menor dos limites superiores do conjunto  $f(A)$

$\frac{df}{dx}$  – derivada da função  $f$  em ordem a  $x$

$f', f^{(n)}$  – primeira derivada e derivada de ordem  $n$  da função  $f$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  – derivada parcial da função  $f$  em ordem a  $x$

# Índice

Capítulo I : Introdução .....	1
Capítulo II : Preliminares .....	6
1. Algumas definições e resultados .....	7
1.1. Álgebra linear .....	7
1.2. Espaços de Banach .....	9
1.3. Operadores definidos em espaços de Banach .....	10
1.4. Convergência de operadores lineares .....	13
1.5. Teoria espectral .....	13
2. Apresentação do problema .....	17
3. Métodos de discretização .....	19
3.1. Métodos de projecção .....	20
Método de Galerkin .....	20
Método de colocação .....	22
Método de Sloan .....	24
3.2. Métodos de quadratura aproximada .....	27
Método de Fredholm .....	29
Método de Nyström .....	31
4. Método de refinamento por séries de perturbação .....	33
Capítulo III : Exemplos Numéricos .....	39
1. O problema a resolver .....	40
2. Detalhes de implementação .....	42
3. Apresentação dos núcleos usados .....	48
4. Apresentação dos resultados .....	53
5. Análise dos resultados .....	54

Capítulo IV : Alguns Algoritmos .....	99
Capítulo V : Conclusões .....	108
Apêndice A .....	114
Referências Bibliográficas .....	179

## **Capítulo Um : Introdução**

A presente dissertação surge como continuação do trabalho da tese de doutoramento de Filomena d'Almeida [ 4 ] , referente ao refinamento de valores próprios e vectores próprios.

Este problema tem vindo a ser estudado mais intensamente desde os anos 80, embora o método de refinamento baseado nas séries de perturbação, proposto por Chatelin que aqui é particularmente estudado, tenha origem no trabalho de Kato [ 17 ] que é anterior.

Nos trabalhos de Ahues [ 1 ] , Ahues e al. [ 2 ] , d'Almeida [ 4 ] e Chatelin [ 10 ] são propostas e estudadas outras fórmulas de refinamento baseadas na correcção do resíduo.

Em qualquer dos trabalhos referidos e também em Lemordant [ 18 ] , são dadas indicações sobre a aplicabilidade ao caso em que os valores próprios têm multiplicidade algébrica maior do que um , embora os exemplos tratados sejam com valores próprios de multiplicidade algébrica igual a um .

Os trabalhos de Ahues e al. [ 3 ] e d'Almeida [ 6 ] , referem mais especificamente as adaptações ao caso de valores próprios múltiplos, em Ahues e al. [ 3 ] para as fórmulas de refinamento baseadas na correcção do resíduo e, em d'Almeida [ 6 ] , para o caso de refinamento por séries de perturbação, mas sem implementação numérica.

Em d'Almeida [ 4 ] descreve-se, entre outros, um programa para o método de refinamento por séries de perturbação para valores próprios de multiplicidade um . O objectivo fundamental da presente dissertação é generalizá-lo ao caso de valores próprios de multiplicidade  $m$  , o que implica a compreensão aprofundada do método em causa e do programa referido. Esta generalização não é tão directa como poderia parecer à primeira vista, porque no caso da multiplicidade ser um há muitas simplificações das fórmulas de refinamento, que foram usadas no programa de d'Almeida [ 4 ] e que não podem ser mantidas aqui.

Este problema deve ter como caso particular o da multiplicidade  $m_a = 1$  e, por isso, foram testados também os exemplos de d'Almeida [ 4 ] , para ver se, após as alterações introduzidas, ainda funciona no caso particular da multiplicidade  $m_a = 1$  .

Assim, propomo - nos resolver o problema de valores próprios ( 1 ) :

$$T \phi = \lambda \phi$$

onde :

$T$  é um operador linear compacto, contínuo, definido num espaço de Banach  $B$  , sobre o corpo complexo  $\mathbb{C}$  ;

$\phi \in B \setminus \{0\}$  é um vector próprio de  $T$  associado a  $\lambda$  ;

$\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio de  $T$  , com multiplicidade algébrica  $m_a$  .

A sua resolução é conseguida pela discretização do operador  $T$  num espaço de dimensão finita  $B_n$  pela resolução do correspondente problema matricial de valores próprios ( 2 ) :

$$TAUN \ u_n = \lambda_n u_n ,$$

onde :

$TAUN$  é uma matriz de ordem  $n$  , que representa uma aproximação de  $T$  num espaço de dimensão finita  $B_n \subset B$  ;

$u_n \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  , é um vector próprio de  $TAUN$  associado a  $\lambda_n$  ;

$\lambda_n \in \mathbb{C}$  , é um valor próprio de  $TAUN$  com multiplicidade  $m_a$  .

De notar que para  $n$  suficientemente grande, temos a garantia ( ver capítulo 1 ou d'Almeida [ 4 ] ou Chatelin [ 10 ] ) que a solução do problema ( 2 ) tende para a do problema ( 1 ) .

Os métodos de refinamento surgem como alternativa aos métodos de discretização. Estes últimos consistem em discretizar o operador  $T$  e

resolver o problema de valores próprios matricial correspondente. Caso a solução obtida ainda não tenha um erro inferior à tolerância pretendida, tem de se fazer uma nova discretização mais fina, isto é, para um valor de  $n$  maior.

Os métodos de refinamento partem de uma solução  $\lambda_n, u_n$ , obtida através de um problema matricial de valores próprios com  $n$  pequeno. Por meio de um processo iterativo, a solução vai sendo melhorada até ser obtida com a precisão imposta. Consegue-se, assim, uma solução correspondente à que seria obtida por meio de uma discretização para um maior valor de  $n$ . Desta forma, evita-se a resolução de um problema matricial de valores próprios de grande dimensão, sendo apenas usada a matriz de discretização mais fina para efectuar multiplicações por vectores.

O desenvolvimento deste trabalho está feito da maneira seguinte :

No Capítulo 2 sintetizam-se os conceitos teóricos fundamentais, para um melhor entendimento do problema a tratar. Explica-se este problema e descrevem-se alguns dos métodos possíveis para a sua resolução.

No Capítulo 3 apresentam-se e discutem-se diversos exemplos com os quais se pretende demonstrar a eficiência do método de refinamento utilizado. Em quase todos os exemplos estudados são já conhecidos os valores teóricos dos elementos próprios, o que permite ilustrar a variação do número de iterações com os parâmetros de controlo do erro. Por outro lado, fazem-se testes para dois valores distintos de  $n$  :  $n = 10$  e  $n = 12$ .

No Capítulo 4 descrevem-se sucintamente as diversas componentes do programa utilizado : BOUQSL , começando por se apresentar um esquema

de descrição deste, no qual se visualizam as interações entre os vários subprogramas. Faz - se ainda uma referência especial aos subprogramas CHAFNY , SIGMAN e PNX , por constituírem a base do método de refinamento utilizado.

No Capítulo 5 resumem-se as conclusões sobre os resultados obtidos. Estes são ainda comparados com os de outro autor : d'Almeida [ 4 ] . Apontam - se, também, alguns problemas deixados em aberto.

No Apêndice A apresentam-se os quadros exaustivos com os resultados completos, obtidos para cada um dos exemplos escolhidos. Em cada um dos referidos quadros acrescenta-se uma breve descrição do comportamento do método iterativo.

## **Capítulo Dois : Preliminares**

# 1. Algumas definições e resultados (\*)

## 1.1. Álgebra Linear

Seja  $A$  uma matriz real ou complexa de ordem  $n$ .

▲ Traço de uma matriz  $A$ :  $\text{tr } A$ , é a soma dos elementos da diagonal principal dessa matriz.

▲ Uma matriz  $A$  diz-se singular sse  $\det A = 0$ .

Consideremos o **problema de valores próprios** :

Encontrar  $\lambda \in \mathbb{C}$ , com  $\phi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , tal que :

$$A \phi = \lambda \phi .$$

▲  $\lambda$  é chamado valor próprio de  $A$ ;  $\phi$  é um vector próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ ;  $\lambda$  e  $\phi$  são os elementos próprios de  $A$ .

▲ Polinómio característico :  $\pi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .

◆  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio de  $A$  sse a matriz  $A - \lambda I$  é singular. Logo qualquer valor próprio  $\lambda$  de  $A$  é uma raiz do polinómio característico.

Seja  $\bar{\lambda}$  um valor próprio de  $A^H$ ; então existe  $\psi \neq 0$  tal que :

$$A^H \psi = \bar{\lambda} \psi ,$$

onde  $\psi$  é um vector próprio de  $A^H$  associado a  $\bar{\lambda}$ , ou seja,

$$\psi^H A = \lambda \psi^H .$$

Nestas condições,  $\psi$  chama-se vector próprio à esquerda de  $A$  associado a  $\lambda$ .

---

(\*) Neste capítulo as definições serão assinaladas com ▲ e os resultados com ◆.

▲ Multiplicidade algébrica de um valor próprio  $\lambda$ ,  $m_\lambda$ , é a multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinómio característico.

▲ Espaço próprio:  $E_\lambda$ , é o conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio  $\lambda$  e do vector nulo, isto é,

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)x = 0\}.$$

▲ Multiplicidade geométrica de um valor próprio  $\lambda$ :  $m_g$ , é a dimensão do espaço próprio a ele associado.

◆ Prova-se que:  $1 \leq m_g \leq m_\lambda$ .

▲ Uma matriz diz-se defectiva se a multiplicidade algébrica dos seus valores próprios não coincide com a multiplicidade geométrica.

Supondo que a matriz defectiva  $A$  tem ordem  $n$ , então é porque ela tem apenas  $s$  ( $s < n$ ) vectores próprios linearmente independentes. É preciso então juntar  $n - s$  vectores, vectores principais, de forma a obter um conjunto de geradores do espaço.

A cadeia de vectores principais  $x_k$  é definida por:

$$(A - \lambda I)x_k = x_{k-1}$$

onde  $x_0 = 0$ ,

$x_1$  é o vector próprio associado a  $\lambda$ ,

$k = 1, \dots, h$ , sendo  $h$  a altura da cadeia.

▲ Uma equação de Sylvester é uma equação matricial da forma:

$$AX + XB = C,$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes reais tais que  $A: m \times m$ ,  $B: n \times n$ ,  $C: m \times n$ .

A equação tem uma única solução sse os valores próprios de  $A$ :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

e os valores próprios de  $B$ :

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

verificarem a condição:

$$\alpha_i + \beta_j \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

## 1.2. Espaços de Banach

Seja  $E$  um espaço vectorial sobre um corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

▲ Um operador linear é uma transformação linear de  $E$  em  $E$ .

▲ Uma norma em  $E$  é uma função  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$(iii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

▲ Um produto interno em  $E$  é uma função de duas variáveis  $(x, y)$ , para as quais se verificam as seguintes condições :

$$(i) \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad \forall x, y, z \in E \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

$$(ii) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad \forall x, y \in E$$

$$(iii) \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

▲ Um espaço normado é um espaço vectorial sobre o qual está definida uma norma.

▲ Uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diz-se de Cauchy sse

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

▲ Um espaço completo é um espaço vectorial em que toda a sucessão de Cauchy é convergente.

▲ Um espaço de Banach :  $B$ , é um espaço normado completo.

▲ Um espaço de Hilbert :  $H$ , é um espaço completo com um produto interno e em que a norma deriva do produto interno.

◆ Num espaço de Banach um subconjunto é completo sse é fechado.

◆ Num espaço linear normado qualquer subespaço de dimensão finita é completo.

### 1.3. Operadores definidos em espaços de Banach

Seja  $T$  um operador definido num espaço de Banach complexo,  $B$ .

▲  $1_B$  é o operador identidade em  $B$ .

▲ Uma curva é uma função contínua  $\gamma$  definida num intervalo  $[a, b]$ .

Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  a curva diz-se fechada.

Uma curva fechada diz-se simples se para qualquer par de valores  $t_1 \neq t_2$  pertencentes ao intervalo semi aberto  $]a, b]$ . Isto significa que valores distintos de  $t$  são transformados em pontos distintos da curva, excepto para os extremos do intervalo  $[a, b]$ . Um exemplo de uma curva fechada simples é o círculo.

▲ Uma curva de Jordan  $\Gamma$  é uma curva fechada simples que pertence ao espaço. Qualquer curva de Jordan decompõe o espaço em dois conjuntos abertos, conexos e disjuntos, que têm a curva  $\Gamma$  por fronteira comum. Assim sendo, uma curva de Jordan associada ao valor próprio  $\lambda$ ,  $\Gamma(\lambda)$ , isola o valor próprio do resto do espectro.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vectoriais normados e  $S$  um subconjunto de  $X$ .

▲ Complemento ortogonal de  $S$  :

$$S^\perp = \{ s' \in B : (s', s) = 0, \forall s \in S \}.$$

◆  $S^\perp$  é um subespaço fechado.

▲  $S$  diz-se relativamente compacto sse  $\bar{S}$  ( fecho topológico de  $S$  ) é compacto.

▲  $\mathfrak{L}(X, Y)$  é o espaço dos operadores lineares contínuos com domínio  $X$  e valores em  $Y$ . Se  $Y$  coincidir com  $X$ , denota-se apenas por  $\mathfrak{L}(X)$ .

▲ Um operador  $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$  diz-se compacto sse transforma cada subconjunto limitado de  $X$  num subconjunto relativamente compacto de  $Y$ . O que é o mesmo que dizer que  $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$  é compacto sse a imagem  $\{Tx_n\}$  de qualquer sucessão limitada  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  tem uma subsucessão convergente em  $Y$ .

◆ Operadores lineares contínuos em espaços de Banach de dimensão finita são compactos.

▲ Um operador  $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$  é limitado sse

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in \text{Dom } T} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty.$$

◆ Se  $T$  é um operador linear de  $X$  em  $Y$  então :

$T$  é contínuo  $\Leftrightarrow T$  é limitado.

▲ Um operador limitado de domínio  $D \subset X$  é fechado sse  $D$  é fechado.

▲ Seja  $T$  o operador integral de Fredholm compacto, definido em  $B = C[a, b]$  e de núcleo  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , contínuo no seu domínio tal que :

$$\forall x \in C[a, b] \quad \forall t \in [a, b], \quad Tx(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds.$$

◆ Se o núcleo  $K(t, s)$  é contínuo no seu domínio então o operador integral de Fredholm é compacto.

▲ Um operador limitado  $P \in \mathfrak{L}(B)$  é uma projectão sse  $P^2 = P$ . Associada a  $P$  temos a decomposição :

$$B = M \oplus N,$$

onde :  $M = PB = \text{Ker} ( 1_B - P )$  e

$N = \text{Ker} P = (1_B - P) B$  , são subespaços fechados de  $B$  .

▲ Seja  $M$  um subespaço fechado de um espaço de Hilbert  $H$  . A decomposição  $H = M \oplus M^\perp$  define a projectão ortogonal de  $H$  sobre  $M$  na direcção de  $M^\perp$  .

Seja  $P$  uma projectão, isto é,  $P : B \rightarrow B_n$  tal que  $P^2 = P$  , com :

$$\text{Im} ( P ) = B_n \text{ e } \text{Ker} ( P ) = \{ x \in B : P ( x ) = 0 \} .$$

Então podemos ter a decomposição :  $B = B_n \oplus \text{Ker} ( P )$  , se  $B$  tem dimensão finita. Se não, consideremos a decomposição  $B = M \oplus N$  . Existe uma e uma só projectão sobre  $M$  segundo  $N$  tal que  $\forall x \in N$  ,  $P ( x ) = 0$  e  $\forall x \in M$  ,  $P ( x ) = x$  . Tal projectão é ortogonal sse

$$\| x - P x \|_2 = \min_{y \in M} \| x - y \|_2 .$$

◆ Também se pode falar em projectões oblíquas num espaço de Hilbert; nesse caso verifica-se que :

$$\| P \| \geq 1 \text{ se } P \neq 0$$

e que

$$\| P \| = 1 \text{ sse } P \text{ é uma projectão ortogonal.}$$

▲ Uma forma semilinear é uma função  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  tal que :

$$f ( \alpha x + \beta y ) = \bar{\alpha} f ( x ) + \beta f ( y ) , \forall x, y \in B \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

$f ( x )$  identifica-se com o produto escalar definido em  $B^* \times B$  :  $\langle f , x \rangle$  , que se designa por forma sesquilinear, ou seja, é uma função linear na primeira variável e semilinear na segunda .

▲ Espaço adjunto :  $B^*$  , é o conjunto das formas semilineares sobre  $B$  .

◆ Seja  $B$  um espaço de Banach e  $T$  um operador compacto de  $B \rightarrow B$  . Para cada valor próprio  $\lambda$  de  $T$  só há um número finito de vectores próprios linearmente independentes.

Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Então podemos definir um operador adjunto  $T^* : H \rightarrow H$  que será compacto e para o qual se tem :

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad \forall x, y \in H.$$

◆ Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $T$  um operador compacto de  $B \rightarrow B$ . Se  $\lambda$  é um valor próprio de  $T$ , então  $\bar{\lambda}$  é um valor próprio de  $T^*$  e  $\text{Ker}(T - \lambda 1_H)$  e  $\text{Ker}(T^* - \bar{\lambda} 1_H)$  têm a mesma dimensão.

◆ Se  $T = T^*$  então todos os valores próprios são reais e os correspondentes vectores próprios formam um conjunto ortonormal.

#### 1.4. Convergência de Operadores Lineares

Seja  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de operadores lineares pertencentes a  $\mathfrak{L}(X, Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  são dois espaços vectoriais normados.

▲  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  de modo pontual, e representa-se por  $T_n \rightarrow T$ , sse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n x = Tx, \quad \forall x \in X$ .

▲  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  de modo uniforme ou em norma, e representa-se por  $T_n \xrightarrow{u} T$ , sse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$ .

▲  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  de modo colectivamente compacto, e representa-se por  $T_n \xrightarrow{cc} T$ , sse  $T_n$  converge para  $T$  de modo pontual e o conjunto  $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (T - T_n)C$ , sendo  $C$  a bola unitária em  $X$ , tem fecho compacto em  $X$ .

#### 1.5. Teoria Espectral

▲ Conjunto resolvente do operador  $T$  :

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : (T - z|_B)^{-1} \in \mathfrak{L}(B)\}.$$

▲ Operador resolvente :  $R(T, z) = (T - z|_B)^{-1}$ , para  $z \in \rho(T)$  ;  
 $R(T, z)$  tem domínio  $B$  e contradomínio  $\text{Dom } T$  para  $z \in \rho(T)$ .

Quando não houver ambiguidade denota-se apenas por  $R(z)$ .

▲ Espectro do operador  $T$  : é o conjunto dos valores  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que  
 $(T - \lambda I)$ :

( i ) não tem inverso : espectro pontual ou valor próprio ;

( ii ) tem inverso não contínuo com domínio denso em  $B$  :  
espectro contínuo ;

( iii ) tem inverso com domínio não denso em  $B$  : espectro residual .

◆ O espectro de  $T$  :  $\sigma(T)$  é o conjunto complementar em  $\mathbb{C}$  de  $\rho(T)$ .

◆ Os operadores compactos só têm espectro pontual formado por valores próprios com multiplicidade finita em número finito ou por uma sucessão de valores próprios convergente para zero.

◆ Se  $B$  é um espaço de dimensão finita, então o espectro de  $T$  coincide com o conjunto dos valores próprios de  $T$ .

◆ Uma consequência deste resultado é que o espectro de uma matriz é o conjunto dos seus valores próprios.

▲ Raio espectral do operador  $T$  :  $r_\sigma(T) = \inf \{ \|T^k\|_B^{1/k} : k \in \mathbb{N} \}$ .

▲ Projectão espectral do operador  $T$  associada ao valor próprio  $\lambda$  :

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\lambda)} R(z) dz \in \mathfrak{L}(B).$$

▲ Subespaço invariante maximal do operador  $T$  associado ao valor próprio  $\lambda$  :  $M = PB$  e é tal que  $\dim M = \dim PB = m_\lambda$ .

▲ Resolvente reduzida :  $S(\lambda) = S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{R(z)}{z - \lambda} dz$  .

$$S = \lim_{z \rightarrow \lambda} R(z) (1 - P).$$

Nota :  $(T - \lambda I) S = S (T - \lambda I) = 1 - P$  e  $SP = PS = 0$ .

Consideremos o problema de valor fronteira para a equação diferencial linear ordinária de ordem  $p$ ,  $p \geq 2$ ,  $a \leq t \leq b$  :

$$[L(x)](t) = a_0(t)x^{(p)}(t) + a_1(t)x^{(p-1)}(t) + \dots + a_p(t)x(t) = f(t)$$

onde as funções  $a_0, a_1, \dots, a_p, f$  são contínuas em  $[a, b]$ , e onde a função  $x$  está sujeita a  $p$  condições fronteira lineares homogêneas :

$$\mathcal{L}_k(x) = \sum_{i=0}^{p-1} [a_{ik}x^{(i)}(a) + b_{ik}x^{(i)}(b)] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

onde  $a_{ik}$  e  $b_{ik}$  são constantes reais ou complexas.

As formas lineares  $\{\mathcal{L}_k\}_{k=1}^p$  em  $x(a), \dots, x^{(p-1)}(a), x(b), \dots, x^{(p-1)}(b)$ ,

são supostas ser independentes.

$L^\infty[a, b]$  é o conjunto  $\{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \|x\|_\infty < \infty\}$ , onde :

$$\|x\|_\infty = \inf_{y=x} \sup_{t \in [a, b]} |y(t)|.$$

Seja

$D = \{\text{funções } x \in L^\infty(a, b) : x \in C^{p-1}(a, b), x^{(p)} \in L^\infty(a, b) \text{ e } \mathcal{L}_k(x) = 0, k = 1, \dots, p\}$ .

O problema  $(L, \mathcal{L}_k) = \{L(x), \mathcal{L}_k(x) = 0, k = 1, \dots, p\}$  está associado ao operador diferencial  $T$  em  $X = L^\infty(a, b)$ , com domínio,  $D$ , definido por :  $x \mapsto Tx = L(x)$ .

▲ Uma função de Green do problema  $(L, \mathcal{L}_k)$  é uma função  $g(t, s)$  definida para  $s, t \in [a, b]$  tal que :

(i)  $g(t, s)$  é contínua e tem derivadas parciais em  $t$  até à ordem  $p-2$ , para algum  $s$  fixado em  $[a, b]$ ;

(ii)  $\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} g(t, s)$  é descontínua em  $t = s$  tal que :

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} g(t, s)|_{t=s^+} - \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} g(t, s)|_{t=s^-} = \frac{1}{a_0(s)};$$

- ( iii ) Em cada intervalo  $[ a , s [ e ] s , b ]$  a função  $t \mapsto g_s(t) = g(t, s)$  é uma solução da equação  $L(g_s) = 0$  ;
- ( iv )  $g(t, s)$  verifica as condições fronteira  $\mathcal{L}_k(g_s) = 0, k = 1, \dots, p$ , para qualquer  $s$  fixado em  $[ a , b ]$ .

◆ Se  $g(t, s)$  é uma função de Green associada ao problema de valor fronteira :

$$(P) = [ L(x) = f, \mathcal{L}_k(x) = 0, k = 1, \dots, p ] ,$$

a sua solução é dada por :

$$x(t) = \int_a^b g(t, s) f(s) ds, a \leq t \leq b.$$

Demonstração: ver Chatelin [ 10 ] ou Yosida [ 24 ] ou Kato [ 17 ] ou Roach [ 21 ].

## 2. Apresentação do problema

Consideremos o problema de valores próprios

$$T \phi = \lambda \phi \quad (1)$$

onde :

$T$  é um operador linear compacto, contínuo, definido num espaço de Banach  $B$ , sobre o corpo complexo  $\mathbb{C}$  ;

$\phi \in B \setminus \{0\}$  é um vector próprio de  $T$  associado a  $\lambda$  ;

$\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio de  $T$ , com multiplicidade algébrica  $m_\lambda$ .

Vamos tratar apenas o caso em que o operador  $T$  é um operador linear contínuo num espaço de Banach  $B$ . Para o caso de  $T$  ser um operador fechado de domínio  $D$ , denso em  $B$ , pode-se tratar de uma maneira semelhante ( ver Chatelin [ 10 ] ). Há vários operadores que, não sendo contínuos, têm propriedades, por exemplo, o resolvente ser compacto, que em alguns aspectos compensam o facto de não serem contínuos, mas, sendo fechados, têm especial interesse na aplicação a equações diferenciais. Um exemplo ( ver Atkinson [ 7 ] ) de um operador integral não compacto:

$$T \phi (s) = \int_0^s \frac{\phi (t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{com} \quad T \phi (0) = \frac{\pi}{2} \phi (0).$$

É um operador limitado de  $C[0,1]$  em  $C[0,1]$  tal que  $\| T \| = \frac{\pi}{2}$ . Mas não é compacto visto que os seus valores próprios não formam um conjunto discreto.

Vamos considerar em  $B$  a norma do espaço de Banach :  $\| \cdot \|_B$  e em  $\mathfrak{B}(B)$  a norma a ele subordinada definida por :

$$\| T \| = \sup \{ \| T b \|_B : b \in B \text{ e } \| b \|_B = 1 \}.$$

A resolução tradicional do problema de valores próprios ( 1 ) faz-se por discretização do operador  $T$  num espaço de dimensão finita  $B_n$ . Então, neste espaço,  $T$  pode ser representado por uma matriz :  $TAUN$  .

Fixando uma base para  $B_n$  ,  $\mathfrak{B} = \{ e_i \}_{i=1}^n$  e, considerando o problema matricial de valores próprios correspondente :

$$TAUN u_n = \lambda_n u_n \quad (2)$$

onde :

$TAUN$  é uma matriz de ordem  $n$  ;

$u_n \in \mathbb{C}^n \setminus \{ 0 \}$  , é um vector próprio de  $TAUN$  associado a  $\lambda_n$  ;

$\lambda_n \in \mathbb{C}$  , é um valor próprio de  $TAUN$  com multiplicidade  $m_n$  ,

para  $n$  suficientemente grande, a solução deste problema aproxima a solução do problema inicial. Os cálculos em  $B$  serão aproximados por cálculos efectuados no subespaço  $B_n \subset B$  .

A necessidade de usar métodos de refinamento para obter soluções aproximadas, surge sobretudo nos casos em que  $T$  é um operador integral, pois nesse caso a matriz obtida da discretização,  $TAUN$  , é densa, o que faz com que o custo do problema ( 1 ) aumente com  $n$  .

Os métodos de refinamento partem de uma solução  $\lambda_n, u_n$  obtida por uma discretização grosseira do operador  $T$  , num subespaço de dimensão finita  $n$  . Esta solução, que é uma aproximação dos elementos do problema ( 1 ) , irá ser melhorada iterativamente, sem ser necessário resolver o problema para discretizações mais finas do operador  $T$  , isto é, sem que o custo do problema aumente.

### 3. Métodos de discretização

Pretendemos resolver o problema de valores próprios ( 1 )

$$T \phi = \lambda \phi .$$

Para isso vamos aproximar o operador  $T$  por um método de discretização. Começemos então por fazer uma breve descrição destas técnicas.

Os métodos clássicos de discretização dividem-se em duas classes :

Métodos de Projecção  
e Métodos de Quadratura Aproximada.

Nos métodos de projecção encontram-se os métodos de Galerkin, colocação e Sloan, enquanto que nos métodos de quadratura aproximada estão incluídos os métodos de Fredholm e de Nyström.

Sejam :

$B$  um espaço de Banach complexo ;

$B_n$  um subespaço de  $B$  de dimensão finita ;

$(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de projecções de  $B$  sobre  $B_n = \pi_n B$ , tal que  $\pi_n \rightarrow 1$  ;

$T$  um operador linear compacto limitado em  $B$  ;

$T_n$  discretização do operador  $T$ , também definido em  $B$  ;

$\mathfrak{B} = \{ e_i \}_{i=1}^n$  uma base ortonormal de  $B_n$ .

### 3.1. Métodos de Projecção

Os métodos de projecção aproximam o problema de valores próprios ( 1 ) por um problema de dimensão finita da forma :

$$\pi_n T \phi_n = \lambda_n \phi_n \quad (3)$$

onde

$\phi_n \in B_n$  e  $\phi_n \neq 0$  é uma aproximação do vector próprio  $\phi$  ;

$\lambda_n \in \mathbb{C}^n$  é a aproximação do valor próprio  $\lambda$  .

Os diversos métodos de projecção consistem na determinação de  $\lambda_n$  e  $\phi_n$  de forma a que as aproximações sejam convergentes para os elementos próprios  $\lambda$  e  $\phi$  do problema inicial ( 1 ) .

#### MÉTODO DE GALERKIN

Comecemos por supor que  $B$  é um espaço de Hilbert no qual a norma depende do produto interno :  $( , )$  , e que  $( \pi_n )_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de projecções ortogonais de  $B$  sobre  $B_n$  :

$$\pi_n x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i , \quad \forall x \in B.$$

Este método consiste em, a partir da expressão ( 3 ) , determinar  $\lambda_n^G$  e  $\phi_n^G$  ,

por forma a que o resíduo  $r$  seja ortogonal ao subespaço  $B_n$  , que tem como base  $\mathfrak{B} = \{ e_i \}_{i=1}^n$  , isto equivale a dizer que o resíduo é ortogonal a

cada um dos elementos dessa base. Uma vez que o resíduo é definido por :

$$r = ( T - \lambda_n^G 1_B ) \phi_n^G ,$$

então a condição a impôr, para determinar  $\lambda_n^G$  e  $\phi_n^G$  , é que :

$$((T - \lambda_n^G 1_B) \phi_n^G, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Em termos de projecção é equivalente a dizer que o resíduo tem projecção nula em  $B_n$ , isto é,

$$\pi_n \left[ (T - \lambda_n^G 1_B) \phi_n^G \right] = 0.$$

Simplificando, vem que :

$$\pi_n \left[ (T - \lambda_n^G 1_B) \phi_n^G \right] = 0 \Leftrightarrow (\pi_n T \pi_n) \phi_n^G = \lambda_n^G \phi_n^G.$$

Note-se que :  $\phi_n^G = \pi_n \phi_n^G$ .

Na aproximação de Galerkin temos :

$T : B \rightarrow B$  em que  $B$  tem dimensão infinita ;

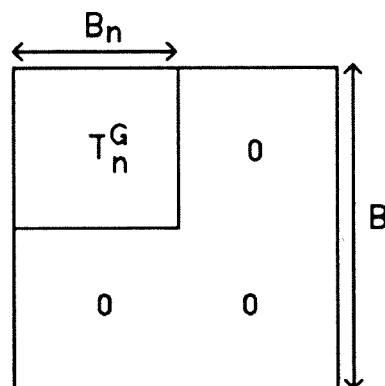
$T_n^G : B \rightarrow B$  em que contradomínio de  $T_n^G$  é  $B_n$ , que tem

dimensão finita ;

$\pi_n$  é uma projecção sobre  $B_n$  ;

$T_n^G = \pi_n T \pi_n : B \rightarrow B$ .

Esquemáticamente :



No caso de  $B$  ser um espaço de Banach,  $T$  não ser um operador autoadjunto e  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ser uma sucessão de projecções oblíquas de  $B$

sobre  $B_n$ ,  $\pi_n x = 0$ ,  $\forall x \in B^\perp$ , a solução aproximada  $\lambda_n, \phi_n$  obtém-se da expressão (3), impondo a condição de que a projecção do resíduo sobre  $B_n$  é nula, ou seja, que :

$$\pi_n \left[ (T - \lambda_n^G 1_B) \phi_n^G \right] = 0.$$

O método de Galerkin é um caso particular de um método de projecção, pois, se

$$\pi_n x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \quad , \quad \forall x \in B.$$

então  $\phi_n^G \in B_n$  é determinado através da expressão :

$$((T - \lambda_n^G 1_B) \phi_n^G, e_i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

que satisfaz a equação :

$$\pi_n \left[ (T - \lambda_n^G 1_B) \phi_n^G \right] = 0 ,$$

o que prova que o método de Galerkin é um método de projecção.

No caso da projecção ser uma projecção de interpolação, o método designa-se por método de colocação.

## MÉTODO DE COLOCAÇÃO

Sejam  $B = C[a, b]$  e  $\{t_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  uma partição do intervalo  $[a, b]$  tal que :

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b ,$$

e  $\mathfrak{B} = \{e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)\}$  uma base de funções contínuas em  $[a, b]$  tais que  $\det [e_i(s)] \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ou seja, as funções  $e_i$  são linearmente independentes.

O método de colocação consiste em encontrar  $\lambda_n, \phi_n$  tais que :

$$\lambda_n = (T \phi_n, \phi_n) \quad \phi_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i(s)$$

sendo os coeficientes  $\alpha_i$  determinados de forma a que o resíduo, nos pontos da partição, seja nulo, isto é :

$$r(t_k) = T \phi_n(t_k) - \lambda_n \phi_n(t_k) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

e, tornando-o pequeno nos outros pontos do intervalo  $[a, b]$ , se  $n$  for suficientemente grande.

Obtém-se assim o sistema linear :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i [T(e_i)(t_k) - \lambda e_i(t_k)] = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

O método de colocação é um caso particular de um método de projecção em que esta é a projecção de interpolação, pois tem-se que :

$$\pi_n x(s) = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j(s), \quad \forall x \in C[a, b] \quad \forall s \in [a, b]$$

onde os coeficientes  $\beta_j$  são tais que :

$$\sum_{j=1}^n \beta_j e_j(t_k) = x(t_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Como

$$T_n \phi_n(t_k) = \lambda_n \phi_n(t_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n,$$

e

$$\pi_n x = \pi_n y \Leftrightarrow x(t_k) = y(t_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n,$$

então :

$$\begin{aligned} \pi_n T \phi_n &= \lambda_n \phi_n \\ \Leftrightarrow \pi_n (T_n \phi_n - \lambda_n \phi_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow T_n &= \pi_n T \pi_n. \end{aligned}$$

## MÉTODO DE SLOAN ou GALERKIN ITERADO

Seja  $\lambda_n, \phi_n$  uma solução aproximada de (1), obtida pelo método de Galerkin.

▲ Define-se vector próprio iterado  $\phi_n^S$  de  $\phi_n^G$  por :

$$\phi_n^S = \frac{1}{\lambda_n} T \phi_n^G.$$

$\phi_n^S$  ainda é um vector próprio aproximado do problema uma vez que verifica a igualdade :

$$T_n^S \phi_n^S = \lambda_n \phi_n^S,$$

sendo  $T_n^S = T \pi_n$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned} T_n^S \phi_n^S &= T \pi_n \phi_n^S \\ &= \frac{1}{\lambda_n} T \pi_n T \phi_n^G \\ &= \frac{1}{\lambda_n} T \pi_n T \pi_n \phi_n^G \end{aligned}$$

mas como,  $T_n^G = \pi_n T \pi_n$  :

$$T_n^S \phi_n^S = \frac{1}{\lambda_n} T T_n^G \phi_n^G$$

e, pelo facto de  $T_n^G \phi_n^G = \lambda_n \phi_n^G$ , vem que :

$$\begin{aligned} T_n^S \phi_n^S &= \frac{1}{\lambda_n} T \lambda_n \phi_n^G \\ &= \lambda_n \frac{1}{\lambda_n} T \phi_n^G = \lambda_n \phi_n^S. \end{aligned}$$

No método de Sloan,  $T$  vai ser aproximado por  $T_n^S = T \pi_n$ , de modo que

$\lambda_n, \phi_n^S = \frac{1}{\lambda_n} T \phi_n^G$  é solução de  $T_n^S \phi_n^S = \lambda_n \phi_n^S$ .

As soluções  $\phi_n^S$  obtidas pelo método de Sloan diferem das do método de Galerkin  $\phi_n^G$  mas as suas projecções sobre  $B_n$  coincidem, isto é,

$$\pi_n \phi_n^G = \pi_n \phi_n^S.$$

A solução  $\phi_n^G$  está totalmente contida em  $B_n$ , mas as soluções  $\phi_n^S$  têm uma componente importante fora de  $B_n$ .

Note-se que :  $\phi_n^S \neq \pi_n \phi_n^S$ .

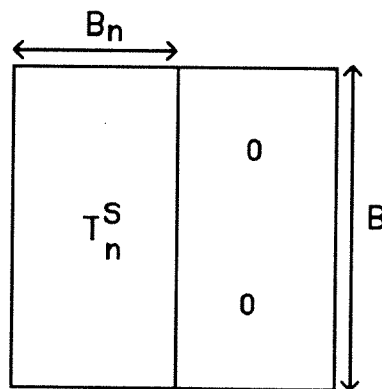
Na aproximação de Sloan, temos:

$T : B \rightarrow B$ , em que  $B$  tem dimensão infinita

$\pi_n : \text{proj } B \rightarrow B_n$

$T_n^S = T \pi_n : B \rightarrow B$ .

Esquemáticamente :



◆ Um teorema que garante a convergência destes métodos é :

Se  $T$  é um operador compacto e  $\pi_n \rightarrow 1$ , então :

$$T_n^G \xrightarrow{\infty} T$$

$$T_n^C \xrightarrow{\infty} T$$

$$T_n^S \xrightarrow{\infty} T.$$

Demonstração: ver Chatelin [ 10 ].

◆ Um teorema sobre a análise do erro :

Sejam  $B$  um espaço de Banach,  $T$  um operador limitado de  $B$  em  $B$ , e  $\pi_n$  uma projecção de  $B$  em  $B_n$ . Suponhamos que  $(T - z|_B)^{-1}$  existe em  $B$  e que se verifica a condição :

$$\|T - \pi_n T\| < \frac{1}{\|(T - z|_B)^{-1}\|},$$

porque  $\pi_n \rightarrow 1$  e  $T$  é compacto.

Então  $(\pi_n T - z|_B)^{-1}$  existe em  $B$  e :

$$\|(\pi_n T - z|_B)^{-1}\| \leq \frac{\|(T - z|_B)^{-1}\|}{1 - \|(T - z|_B)^{-1}\| \cdot \|T - \pi_n T\|}.$$

Para

$$(T - z|_B)x = y \quad \text{e} \quad (\pi_n T - z|_B)x_n = \pi_n y$$

tem-se que :

$$\|x - x_n\| \leq |z|_B \cdot \|(\pi_n T - z|_B)^{-1}\| \cdot \|x - \pi_n x\|.$$

Demonstração: ver Atkinson [ 7 ].

O método de colocação é pouco competitivo devido ao grande custo que a integração numérica acarreta. O método de Sloan deve ser preferido relativamente ao método de Galerkin uma vez que usa mais informação e conseqüentemente leva a melhores resultados, daí que nos exemplos apresentados nesta dissertação se tenha usado apenas o método de Sloan.

### 3.2. Métodos de Quadratura Aproximada

Comecemos por fazer uma breve síntese das regras de quadratura numérica baseadas em pontos equiespaçados no intervalo  $[a, b]$ , relembrando o modo de obtenção das fórmulas de Newton Cotes.

Para calcular  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ , aproxima-se  $I(f)$  por  $I(p_k)$ , onde  $p_k(x)$  é o polinómio de grau menor ou igual a  $k$  interpolador de  $f(x)$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

Escrevendo esta aproximação como uma soma pesada :

$$I(p_k) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_k f(x_k),$$

deduz-se  $w_k = I(\ell_k)$ , onde  $\ell_k(x)$  é o polinómio básico de Lagrange de grau  $k$ .

Supondo  $f(x)$  suficientemente regular num intervalo  $[c, d]$  que contém  $a$  e  $b$ , o erro de interpolação polinomial é dado por :

$$E(f) = I(f) - I(p_k) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_k, x] \xi_k(x) dx$$

que corresponde ao erro de integração e onde :

$$\xi_k(x) = \prod_{j=0}^k (x - x_j).$$

Particularizando o número de pontos de interpolação e a sua posição, obtêm-se as diversas fórmulas de quadratura mais conhecidas.

Por exemplo, para  $k = 0$ , vem :

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0)$$

$$I(p_0) = (b - a) f(x_0)$$

e escolhendo  $x_0 = a$ ,

$$I(f) \approx R = (b - a) f(a) \quad (\text{regra do rectângulo}),$$

cujo erro é :

$$\exists \eta \in (a, b) \quad ER = f'(\eta) \int_a^b (x-a) dx = \frac{f'(\eta)(b-a)^2}{2}.$$

Se escolhermos, ainda com  $k = 0$ ,  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , esta aproximação é dada

por :

$$I(f) \approx M = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{regra do ponto médio}).$$

O erro da regra do ponto médio pode ser calculado através de :

$$\exists \eta \in (a, b) \quad EM = f''(\eta) \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Sendo  $k = 1$ ,  $x_0 = a$  e  $x_1 = b$

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x](x-x_0)(x-x_1).$$

$$I(f) \approx T = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (\text{regra do trapézio}).$$

O erro da regra do trapézio pode ser calculado através de :

$$\exists \eta \in (a, b) \quad ET = -f''(\eta) \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Se  $k = 2$ , com a escolha dos pontos de interpolação  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ,

$x_2 = b$  e após alguma manipulação algébrica chega-se a :

$$I(f) \approx S = \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} \quad (\text{regra de Simpson}).$$

O erro desta fórmula é dado por :

$$\exists \eta \in (a, b) \quad ES = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{(4)}(\eta)}{90}.$$

Se  $k = 3$ , com a escolha dos pontos de interpolação  $x_0 = x_1 = a$ ,

$x_2 = x_3 = b$ , a aproximação é dada por :

$$I(f) \approx CT = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12} [f'(a) - f'(b)] \quad (\text{regra do trapézio$$

corrigida)

O erro desta regra é dado por :

$$\exists \eta \in (a, b) \quad E^{CT} = f^{(4)}(\eta) \frac{(b-a)^5}{720}.$$

Seja  $\{x_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  uma partição regular de  $[a, b]$ .

Por aplicação de uma qualquer fórmula anterior a cada um dos subintervalos da partição obtêm-se as correspondentes fórmulas de quadratura composta.

Os métodos de quadratura aproximam o problema de valores próprios (1)

$T\phi = \lambda\phi$ , onde :

$$B = C[a, b];$$

$T$  é um operador integral de Fredholm compacto tal que :

$$\forall x \in C[a, b] \quad \forall t \in [a, b], \quad Tx(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds;$$

$\lambda$  e  $\phi$  são os elementos próprios ;

por uma das regras de quadratura numérica descritas anteriormente, com pesos  $w_j, j = 1, 2, \dots, n$ .

Seja  $\{t_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  uma partição regular de  $[a, b]$ .

## MÉTODO DE FREDHOLM

A aproximação do problema (1) é feita buscando :

$$\phi_n \in B_n,$$

sendo :

$$T\phi_n(s) = \int K(s, t)\phi_n(t) dt$$

aproximado, aplicando uma das regras de quadratura anteriormente descritas. Obtém-se assim :

$$\begin{aligned} T_n \phi_n(s) &= \sum_{j=1}^n w_j K(s, t_j) \phi_n(t_j) \\ &= \lambda_n \phi_n(s) \end{aligned}$$

Uma vez que  $\phi_n \in B_n$  e, como  $\mathfrak{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$  é uma base de  $B_n$ , então

podemos escrever  $\phi_n$  como combinação linear dos elementos da base :

$$\phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \quad (4)$$

Se  $\phi_n \in B_n$  então também  $\lambda_n \phi_n \in B_n$ , ou seja,

$$T_n^F \phi_n(s) = \sum_{j=1}^n w_j K(s, t_j) \phi_n(t_j) \in B_n. \quad (5)$$

Escrevendo  $T_n^F \phi_n(s)$  como combinação linear dos elementos da base  $\mathfrak{B}$  :

$$T_n^F \phi_n(s) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i, \quad (6)$$

onde os coeficientes  $\beta_i$  são determinados pela condição de interpolação :

$$T_n^F \phi_n(t_k) = \lambda_n \phi_n(t_k),$$

onde  $t_k$  são os pontos da partição.

Igualando (5) a (6), vem que :

$$\sum_{j=1}^n w_j K(t_k, t_j) \phi_n(t_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i(t_k) \quad (7)$$

Se  $\det \{e_i(t_k)\} \neq 0$ , isto é,  $e_i$  toma o valor 1 nos pontos da partição e 0 nos outros pontos, ( por exemplo, se considerássemos a base dos polinómios, então  $\det \{e_i(t_k)\}$  seria um determinante de Vandermonde, logo, não nulo ) e então os coeficientes  $\beta_i$  ficam automaticamente definidos a partir da expressão anterior (7) :

$$\beta_k = \sum_{j=1}^n w_j K(t_k, t_j) \phi_n(t_j).$$

Assim, a aproximação  $T_n^F \phi_n$  é dada por :

$$T_n^F \phi_n = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n w_j K(t_k, t_j) \phi_n(t_j) \right] e_i$$

e  $\phi_n$  é determinado por :

$$T_n^F \phi_n = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n w_j K(t_k, t_j) \phi_n(t_j) \right] e_i = \lambda_n \phi_n \quad (8)$$

e, como por (4),

$$\phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

sendo  $\alpha_i$  tal que :

$$\phi_n(t_i) = \alpha_i,$$

a solução da equação (8) é (3), sendo o vector  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  a solução do problema matricial :

$$\tau_n^F \alpha = \lambda_n \alpha$$

onde  $\tau_n^F$  é a matriz :

$$\tau_n^F = (w_j K(t_i, t_j))_{i,j=1}^n.$$

## MÉTODO DE NYSTRÖM

Vamos aproximar o problema de valores próprios (1), aplicando uma das regras de quadratura descritas a  $T \pi_n \phi$  sendo  $\pi_n$  uma projecção sobre  $B_n$ .

$$\begin{aligned} T_n^N \phi_n^N(s) &= \sum_{j=1}^n w_j K(s, t_j) \phi_n^N(t_j) \\ &= \lambda_n \phi_n^N(s). \end{aligned}$$

$\phi_n^N$  é determinado de modo que a aproximação de Nyström coincida com a de Fredholm nos pontos da partição  $t_k$  :

$$\phi_n^N(t_k) = \phi_n^F(t_k);$$

sendo seguidamente calculada nos outros pontos através da expressão :

$$\phi_n^N(s) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j=1}^n w_j K(s, t_j) \phi_n^N(t_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

(Porque  $\pi_n T_n^N = T_n^F$ , logo  $\lambda_n^F = \lambda_n^N$ ).

Uma relação entre os operadores de cada um destes dois métodos é dada pelo seguinte resultado :

◆ Dada uma fórmula de integração numérica  $I_n$  e a base  $\mathfrak{B}$  do espaço  $B_n$  e a partição  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , se  $\pi_n x = \sum_{i=1}^n x(t_i) e_i$  então :

$$T_n^F = \pi_n T_n^N \quad \text{e} \quad \phi_n^N = \frac{1}{\lambda_n} T_n^N \phi_n^F.$$

Demonstração: ver Atkinson [ 7 ].

◆ Um teorema que garante a convergência destes métodos é :

Se  $T$  é um operador compacto e  $\pi_n \rightarrow 1$  então :

$$T_n^N \xrightarrow{\text{cs}} T \text{ em } C[a, b]$$

$$T_n^F \xrightarrow{\text{cs}} T \text{ em } C[a, b]$$

$$\|T_n^N - T\|_\infty > \|T\|_\infty.$$

Demonstração: ver Chatelin [ 10 ] ou Atkinson [ 7 ].

A solução de Nyström será muitas vezes significativamente melhor do que a solução de Fredholm, daí que nos exemplos apresentados nesta dissertação apenas se tenha usado o método de Nyström.

## 4. Método de Refinamento por Séries de Perturbação ( método de Chatelin )

Este método de refinamento baseia-se no desenvolvimento em série de perturbação de Rayleigh-Schrödinger, proposto por Chatelin [ 10 ] , dos elementos próprios aproximados de um problema de valores próprios da forma :

$$T \phi = \lambda \phi \quad (1)$$

onde :

$T$  é um operador linear compacto, integral, contínuo, definido num espaço de Banach complexo :  $B$  , com domínio  $D$  contido em  $B$  ;

$\phi \in B \setminus \{0\}$  é um vector próprio de  $T$  associado a  $\lambda$  ;

$\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio de  $T$  , com multiplicidade algébrica  $m_a$  .

Seja  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sucessão de aproximações de  $T$  , obtida por algum dos métodos de discretização descritos anteriormente, convergente para  $T$  de modo colectivamente compacto ou em norma.

A partir da discretização  $T_n$  obtemos uma solução  $\lambda_n, \phi_n$  que vai ser usada como valor inicial de um processo iterativo.

Consideremos uma curva de Jordan,  $\Gamma(\lambda)$  , que separa  $m_a$  valores próprios de  $T$  do resto do seu espectro.

Suponhamos  $n$  suficientemente grande por forma a que os elementos próprios de  $T_n$  :  $\lambda_n$  e  $\phi_n$  sejam aproximações iniciais de  $\lambda$  e  $\phi$  , que vão ser refinados com base no desenvolvimento em série de perturbação de  $\lambda$  e  $\phi$ .

A  $T_n$  , discretização do operador  $T$  , vamos associar  $R_n, P_n$  e  $M_n$  que são o operador resolvente, a projecção espectral e o subespaço invariante maximal, respectivamente.

Pelo facto de  $T_n$  ser uma aproximação colectivamente compacta ou em norma do operador  $T$  tem-se que, para  $n$  suficientemente grande,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \Gamma(\lambda)} r_{\sigma}((T - T_n)R(z)) = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(T - T_n)T\|_B = 0$$

$R_n(z)$  é limitado uniformemente em  $n$  e

$$z \in \rho(T)$$

$P_n$  existe em  $\mathfrak{L}(B)$  e

$$P_n \xrightarrow{cc} P$$

$$\dim M_n = ma$$

e  $T_n$  tem  $ma$  valores próprios:  $\mu_1, \dots, \mu_{ma}$  no interior da curva de Jordan  $\Gamma(\lambda)$  (ver Chatelin [10]).

Sejam  $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{ma} \sum_{i=1}^{ma} \mu_i$ , a média aritmética desses valores próprios,

$\Phi_n = \{\phi_{n1}, \dots, \phi_{nma}\}$ , uma base de  $M_n$  e

$\Psi_n = \{\psi_{n1}, \dots, \psi_{nma}\}$ , uma base de  $M_n^*$ .

Seja  $X$  o espaço produto  $B^{ma}$  com a norma definida por :

$$\|x\|_X = \|(x_1, \dots, x_{ma})\|_X = \left( \sum_{i=1}^{ma} \|x_i\|_B^2 \right)^{1/2}, \quad \forall x_1, \dots, x_{ma} \in B$$

(ver d'Almeida [6] e Ahues [1]).

▲ Define-se matriz de Gram associada a  $x \in X$  e  $y \in X^* = (B^*)^{ma}$ ,

com  $x = (x_1, \dots, x_{ma})$  e  $y = (y_1, \dots, y_{ma})$  por :

$$\langle x, y \rangle = \left( \overline{y_i(x_j)} \right)_{i,j=1}^{ma} \in X^{\max ma}.$$

Podemos agora escolher a base  $\psi_n$  de forma a que se verifique a condição  $\langle \varphi_n, \psi_n \rangle = I_{ma}$ .

Suponhamos que  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{T}_n$  e  $\tilde{P}_n$  são os prolongamentos naturais de  $T$ ,  $T_n$  e  $P_n$  a  $X$ , respectivamente, definidos por :

$\tilde{T}$  é tal que  $\tilde{T}x = (Tx_1, \dots, Tx_{ma}) \in X$ .

A norma associada à norma de  $X$  em  $\mathfrak{B}(X)$  vai ser definida por :

$$\|\tilde{T}\| = \sup \{ \|\tilde{T}x\|_X : x \in X \text{ e } \|x\|_X = 1 \}.$$

$\tilde{T}_n$  é tal que  $\tilde{T}_n \varphi_n = \varphi_n \theta_n$ , onde  $\theta_n = \langle \tilde{T} \varphi_n, \psi_n \rangle$ .

$\tilde{P}_n$  é tal que  $\tilde{P}_n x = \varphi_n \langle x, \psi_n \rangle$ ,  $\forall x \in X$ .

A resolvente reduzida de  $T_n : \Sigma_n$  é o prolongamento do operador resolvente reduzido de  $B$  a  $X$ . Define-se por :

$$\Sigma_n = G_n^{-1} (1_X - \tilde{P}_n)$$

onde  $G_n : X \rightarrow X$

$$x \mapsto (1_X - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n x - x \theta_n.$$

Consideremos agora uma família de operadores, em  $B$ ,  $T(t)$  tal que :

$T(t) = T_n + t(T - T_n)$ ,  $t \in D$ , onde  $D$  é o disco de convergência,  $D \subset \mathbb{C}$ .

▲ Chamam-se séries de Rayleigh-Schrödinger às expansões em série de  $\lambda(t)$  e  $\phi(t)$  dadas por :

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k t^k \quad \phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k t^k$$

que existem nas condições acima impostas ( ver Kato [ 17 ] e Chatelin [ 10 ] ).

O operador resolvente de  $T(t)$  será dado por :

$$R(t, z) = (T(t) - z|_B)^{-1}, \quad z \in \Gamma(\lambda)$$

$$= R_n(z) \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ -t(T - T_n) R_n(z) \right]^k.$$

A projecção espectral será dada por:

$$\begin{aligned} P(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\lambda)} R(t, z) dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \int_{\Gamma(\lambda)} R_n(z) \left[ (T - T_n) R_n(z) \right]^k dz \end{aligned}$$

( ver d' Almeida [ 6 ] ).

O subespaço invariante maximal será dado por :

$$M(t) = P(t) B \quad \text{e} \quad \dim M(t) = \dim P(t) B = ma.$$

Logo a família  $T(t)$  tem exactamente  $ma$  valores próprios, incluindo as multiplicidades, no interior da curva de Jordan  $\Gamma(\lambda)$ , a saber :  $\alpha_1, \dots, \alpha_{ma}$ .

Designemos por :

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{1}{ma} \sum_{k=1}^{ma} \alpha_k$$

a média aritmética desses valores próprios.

Como  $\hat{\lambda}(t)$  é uma função analítica de  $t$  pode-se escrever na forma :

$$\hat{\lambda}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{v}_k t^k.$$

Sejam  $\tilde{T}(t)$ ,  $\tilde{R}(t, z)$  e  $\tilde{P}(t)$  os prolongamentos naturais de  $T(t)$ ,  $R(t)$  e  $P(t)$  a  $X$ . Seja  $\varphi(t)$  a base de  $M(t)$  normalizada por  $\tilde{P}_n \varphi = \varphi_n$ , expressa à custa da projecção oblíqua  $\tilde{Q}(t)$ , sobre  $M(t)$  ao longo de  $\{\psi_n\}$  tal que :

$$\forall x \in X, \tilde{Q}(t)x = \varphi(t) \langle x, \psi_n \rangle, \text{ de forma a :}$$

$$\varphi(t) = \tilde{Q}(t) \varphi_n \quad (9).$$

Sendo verificadas as condições ( ver Ahues [ 3 ] e d' Almeida [ 6 ] ) :

$$r_\sigma[(P(t) - P_n) P_n] < 1 \text{ e } n \text{ suficientemente grande,}$$

o que acontece para  $t$  numa vizinhança de  $1$ , se  $T_n$  for uma aproximação colectivamente compacta de  $T$ , então :

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{P}(t) (\tilde{P}_n \tilde{P}(t)|_{M_n})^{-1} \tilde{P}_n$$

é uma função analítica de  $t \in D$ , isto é,

$$\tilde{Q}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{Q}_k t^k \quad (10)$$

onde  $\tilde{Q}_k$  é solução de :

$$\begin{cases} \tilde{Q}_0 = \tilde{P}_n \\ (1_x - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \tilde{Q}_k - \tilde{Q}_k \tilde{T}_n \tilde{P}_n = b_k \\ \tilde{P}_n \tilde{Q}_k = \tilde{Q}_k (1_x - \tilde{P}_n) = 0, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

com :

$$b_k = (1_x - \tilde{P}_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \tilde{Q}_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{Q}_j (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \tilde{Q}_{k-j-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{Q}_j \tilde{T}_n \tilde{Q}_{k-j}.$$

De (9) e (10) vem que:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{Q}_k \varphi_n t^k.$$

Para  $t=1 \in D$  uma aproximação melhor de  $\hat{\lambda}$  e  $\varphi$  será dada por :

$$\hat{\lambda}_i = \sum_{k=0}^i \hat{v}_k \quad \varphi^{(i)} = \sum_{k=0}^i \tilde{Q}_k \varphi_n = \sum_{k=0}^i \eta_k$$

onde  $\hat{\lambda}_0 = \hat{v}_0 = \hat{\lambda}_n$ ,

$$\varphi^{(0)} = \varphi_n = \eta_0$$

e, para  $k \geq 1$ , tem-se :

$$\hat{v}_k = \frac{1}{ma} \text{tr}(v_k), \quad \text{com } v_k = \langle y_k, \psi_n \rangle,$$

$$y_k = \tilde{T}_n \tilde{Q}_k \varphi_n + (\tilde{T} - \tilde{T}_n) \tilde{Q}_{k-1} \varphi_n = \tilde{T}_n \eta_k + (\tilde{T} - \tilde{T}_n) \eta_{k-1}$$

e  $\eta_k = \tilde{Q}_k \varphi_n$  é a solução da seguinte equação de Sylvester:

$$\begin{cases} (1_x - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \eta_k - \tilde{Q}_k \tilde{T}_n \tilde{P}_n \varphi_n = (1_x - \tilde{P}_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \eta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{Q}_j y_{k-j} \\ \tilde{P}_n \eta_k = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1x - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \eta_k - \eta_k \theta_n = (1x - \tilde{P}_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \eta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{Q}_j \varphi_n \langle y_{k-j}, \Psi_n \rangle \\ \tilde{P}_n \eta_k = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1x - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \eta_k - \eta_k \theta_n = (1x - \tilde{P}_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \eta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j v_{k-j} \\ \tilde{P}_n \eta_k = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \eta_k = \Sigma_n [ (1x - \tilde{P}_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}) \eta_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j v_{k-j} ],$$

se  $\max |\mu_i - \hat{\lambda}_n| < \text{dist}(\hat{\lambda}_n, \sigma(T_n) - \{\mu_i\}_{i=1}^m)$ .

O facto de  $\lambda$  e  $\phi$  serem funções analíticas é que garante o método numérico de refinamento de  $\lambda_n$  e  $\phi_n$  que consiste no cálculo das somas parciais das séries de potências de  $\lambda$  e  $\phi$ .

Na prática o operador  $T$  vai ser aproximado por  $T_m$ , definido num subespaço  $B_m$  de dimensão finita tal que  $m \gg n$ . O teorema seguinte garante a aplicabilidade do método para  $T_m$  em vez de  $T$ .

◆ Seja  $T_m$  uma aproximação do operador  $T$  e  $\lambda_m$  e  $\phi_m$  os seus elementos próprios, sendo  $\phi_m$  normalizado por  $P_n \phi_m = \phi_n$ , onde  $P_n$  é a projecção espectral associada a  $T_n$ . Se  $T$  for um operador compacto tal que  $T_n \xrightarrow{cs} T$ , então :

$$\sum_{i=0}^k v_n^i \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^k \eta_n^i$$

convergem para  $\lambda_m$  e  $\phi_m$ , respectivamente, para qualquer  $n$  suficientemente grande.

Demonstração: ver Chatelin [ 10 ].

## **Capítulo Três : Exemplos Numéricos**

## 1. O Problema a resolver

Queremos resolver o problema de valores próprios ( 1 ) :

$$T \phi = \lambda \phi$$

onde :

$T$  é um operador linear compacto, contínuo, definido num espaço de Banach  $B$ , sobre o corpo complexo  $\mathbb{C}$  ;

$\phi \in B \setminus \{0\}$  é um vector próprio de  $T$  associado a  $\lambda$  ;

$\lambda \in \mathbb{C}$  é um valor próprio de  $T$ , com multiplicidade algébrica  $m_\lambda$ .

Para isso vamos discretizar o operador  $T$  num subespaço de  $B$  de dimensão finita  $B_n$ .

Seja  $\mathfrak{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$  uma base de  $B_n$ .

Então, em  $B_n$ , a projecção de cada aproximação de  $T$  pode ser representada por uma matriz :  $TAUN$ .

Transformamos assim, o problema de valores próprios ( 1 ) num problema matricial de valores próprios da forma ( 2 ) :

$$TAUN u_n = \lambda_n u_n$$

onde :

$TAUN$  é uma matriz de ordem  $n$  ;

$u_n \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , é um vector próprio de  $TAUN$  associado a  $\lambda_n$  ;

$\lambda_n \in \mathbb{C}$ , é um valor próprio de  $TAUN$  com multiplicidade  $m_{\lambda_n}$ .

A solução  $\lambda_n, u_n$  obtida do problema matricial de valores próprios vai servir de ponto de partida de um método iterativo para o refinamento dos elementos próprios.

Como  $B$  não tem dimensão finita, vamos substituir  $T$  por  $T_m$ , restrição de  $T$  a  $B_m$ , sendo  $B_m$  um subespaço de dimensão finita  $m \gg n$ . A matriz que representa  $T$  em  $B_m$  denota-se por  $TAUM$ .

Esta substituição implica a convergência do método de refinamento para  $\lambda_m$  e  $\phi_m$  em vez de  $\lambda$  e  $\phi$ , mas  $\lambda_m$  e  $\phi_m$  não precisam de ser calculados directamente.

Como os operadores  $T_n^S$  e  $T_n^N$  são definidos em  $B$  por  $T\pi_n$ , então  $T$  e  $B$  substituem - se, respectivamente, por  $T_m$  e  $B_m$ . A representação matricial " correspondente " de  $T_n^S$  e  $T_n^N$  será de dimensão  $m \times n$  e designada por TAUNN no programa.

Nos exemplos tratados usou-se sempre  $m = 10$  e  $n = 10$  ou  $12$ .

## 2. Detalhes de implementação

Os cálculos foram feitos no Cyber 170/720 do Centro de Informática da Universidade do Porto ( C.I.U.P. ), em Fortran 77 , usando precisão simples em que os números reais são representados com 48 bits para a mantissa, 11 bits para o expoente e um bit de sinal, o que corresponde a 14 casas decimais.

Usou-se como auxiliar a biblioteca de subprogramas IMSL ( do C.I.U.P. ), [ 14 ] , nomeadamente através do subprograma EIGRF e seus dependentes para a determinação dos valores próprios e vectores próprios iniciais  $(\lambda_n, u_n)$  pelo método QR .

O operador  $T$  é um operador integral de Fredholm definido em  $B$  tal que :

$$\forall x \in X \quad \forall s \in [0, 1] , \quad T x(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

onde  $K(s, t) \in C([0, 1] \times [0, 1])$ .

Foram testados vários operadores que irão ser descritos mais tarde.

O espaço de Banach escolhido foi  $B = C[0, 1]$ .

Para subespaço  $B_n$  consideramos o subespaço das funções contínuas parcelarmente lineares de dimensão finita  $n$  . A base desse subespaço é a base  $\mathfrak{B} = \{ e_i^{(n)} : i = 1, 2, \dots, n \}$  das funções chapéu definidas por :

$$e_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h} (t - t_1) , & \text{se } t \in [t_1, t_2] \\ 0 , & \text{se não} \end{cases}$$

$$e_i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h} |t - t_i| , & \text{se } t \in [t_{i-1}, t_{i+1}] \\ 0 , & \text{se não} \end{cases} \quad i = 2, \dots, n - 1$$

$$e_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h}(t_n - t) & , \quad \text{se } t \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & , \quad \text{se não} \end{cases} \quad , \text{ onde } h = \frac{1}{n-1}.$$

As discretizações do operador  $T$  foram feitas pelos métodos de Sloan ou de Nyström. Não se usaram os outros métodos descritos no capítulo anterior visto estes serem aqueles que dão melhores resultados.

O método de refinamento usado foi o de desenvolvimento em séries de perturbação de Rayleigh - Schrödinger ( método de Chatelin ).

No caso em que a aproximação inicial é feita pelo método de Nyström, a fórmula de quadratura numérica usada, é a dos trapézios em cada um dos subintervalos da partição .

Seja  $\Delta_n$  uma partição de  $[0, 1]$  tal que :

$$\Delta_n = \left\{ t_i^n : t_i^n = \frac{i-1}{n-1}, i = 1, \dots, n \right\} .$$

e  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sucessão de projecções de  $B$  em  $B_n$  tal que  $\pi_n \rightarrow 1$ , em  $B$ ; neste caso,  $\pi_n$  é a projecção de interpolação linear nos  $n - 1$  subintervalos da partição  $\Delta_n$ .

Seja  $T_n^\alpha$  a aproximação inicial de  $T$  onde  $\alpha$  designa o método de discretização usado ;  $\alpha \in \{ S, N \}$ .

Seja  $p$  o prolongamento de  $\mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{C}^m$  e  $r$  a restrição de  $\mathbb{C}^m$  a  $\mathbb{C}^n$ . Suponhamos que  $m - 1$  é múltiplo de  $n - 1$ , isto é,  $m - 1 = k(n - 1)$ .

▲ Para cada  $x = (x_i) \in \mathbb{C}^n$ ,  $px$  é o vector de  $\mathbb{C}^m$  cujas componentes  $(px)_j$  se obtêm por interpolação linear parcelar das componentes de  $x$  em cada subintervalo  $\left[ t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)} \right]$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$(px)_j = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \left( t_j^{(m)} - t_i^{(n)} \right).$$

▲ Para cada  $x = (x_i) \in \mathbb{C}^m$ ,  $rx$  é o vector de  $\mathbb{C}^n$  de componentes  $(rx)_j$  tais que :

$$(rx)_j = x_k, \quad k = \frac{m-1}{n-1} (j-1) + 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Nota :  $rp = I_n$  e  $pr$  é a matriz representativa de  $\pi_n|_{B_n}$  na base  $\mathcal{B}$ .

Uma vez que o método de refinamento é iterativo tivemos que impôr algumas condições para que o processo tivesse fim.

Impôs-se uma tolerância na solução encontrada :  $TOL = 1.0 \times 10^{-11}$  que é ligeiramente menor do que a precisão máquina para que fiquem algumas casas decimais de margem para os erros de arredondamento.

Foram usados três critérios de paragem (c.p.) .

O primeiro critério de paragem é dado pela norma - infinito do resíduo.

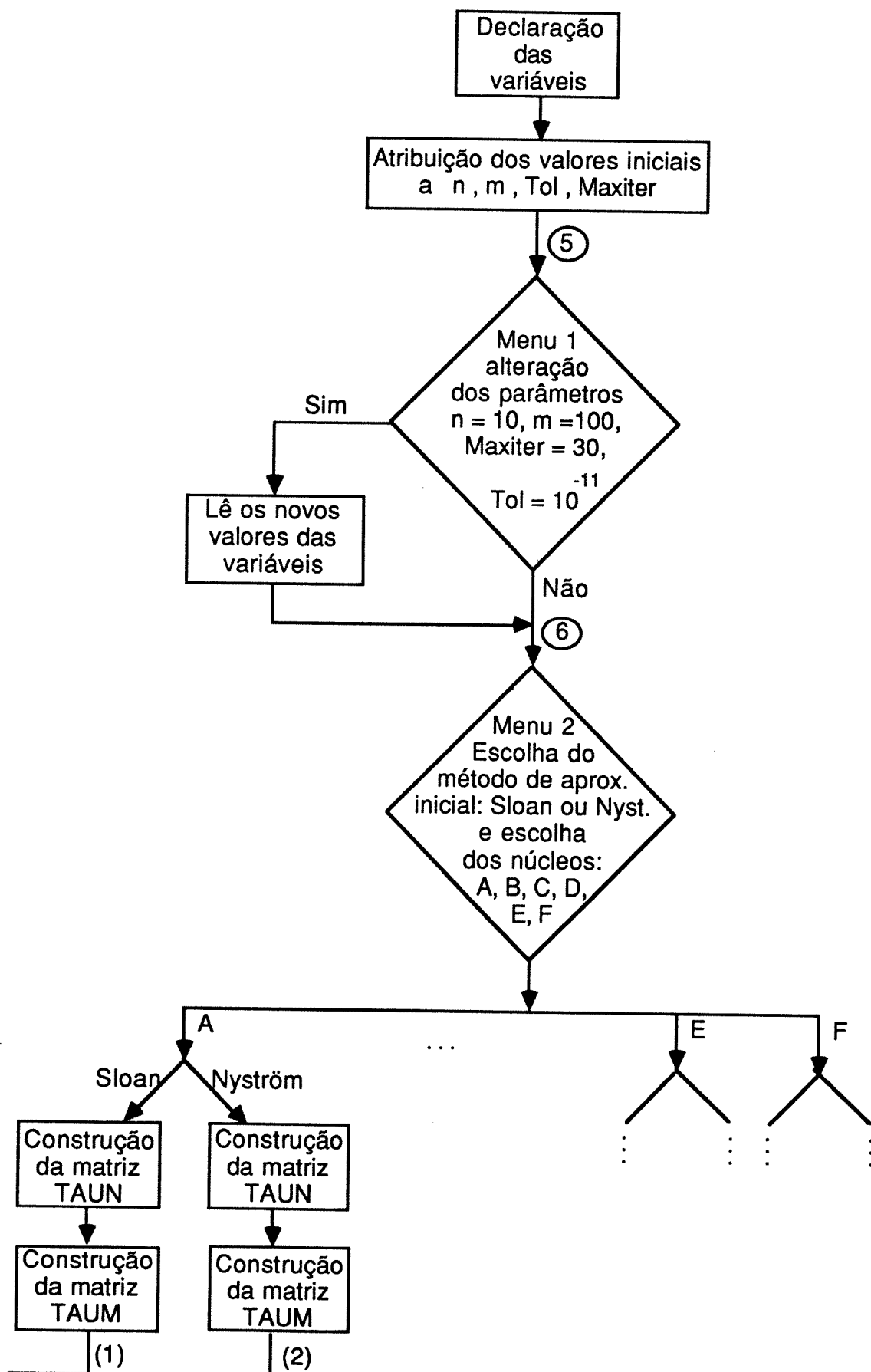
O segundo critério de paragem é dado pelo valor absoluto da diferença entre o valor próprio exacto ( é tomado como sendo o valor próprio correspondente da matriz de discretização obtida para  $m = 100$  : TAUM ) e o valor próprio refinado, em cada iteração : LK .

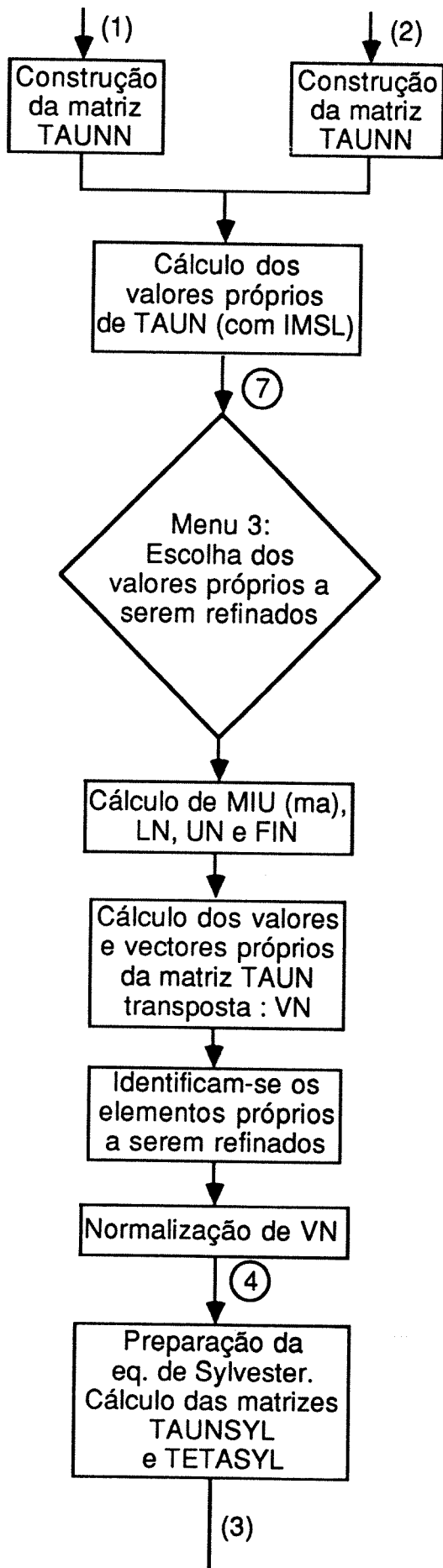
O terceiro critério de paragem é dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos do valor próprio a ser refinado, ou seja,  $\frac{|L_k - L_{k-1}|}{|L_k|}$ .

Foi também introduzido um limite máximo no número de iterações para que o programa tenha um fim se a tolerância não for encontrada "suficientemente" depressa : MAXITER = 30.

Tomou-se  $m = 100$  devido a problemas de tempo de execução. Embora este não tenha sido medido, é óbvio que um aumento de  $m$  levaria a uma demora da execução. Note-se, porém, que o que pesa mais é a discretização do operador e isso só é feito uma única vez.

O programa utilizado tem a seguinte estrutura:





tais que :

$$TAUN \times UN = MIU(i) \times UN$$

$$LN = \frac{1}{ma} \sum_{i=1}^{ma} MIU(i)$$

$$FIN = \frac{1}{LN} \times TAUM \times UN$$

( ver pg 34 )

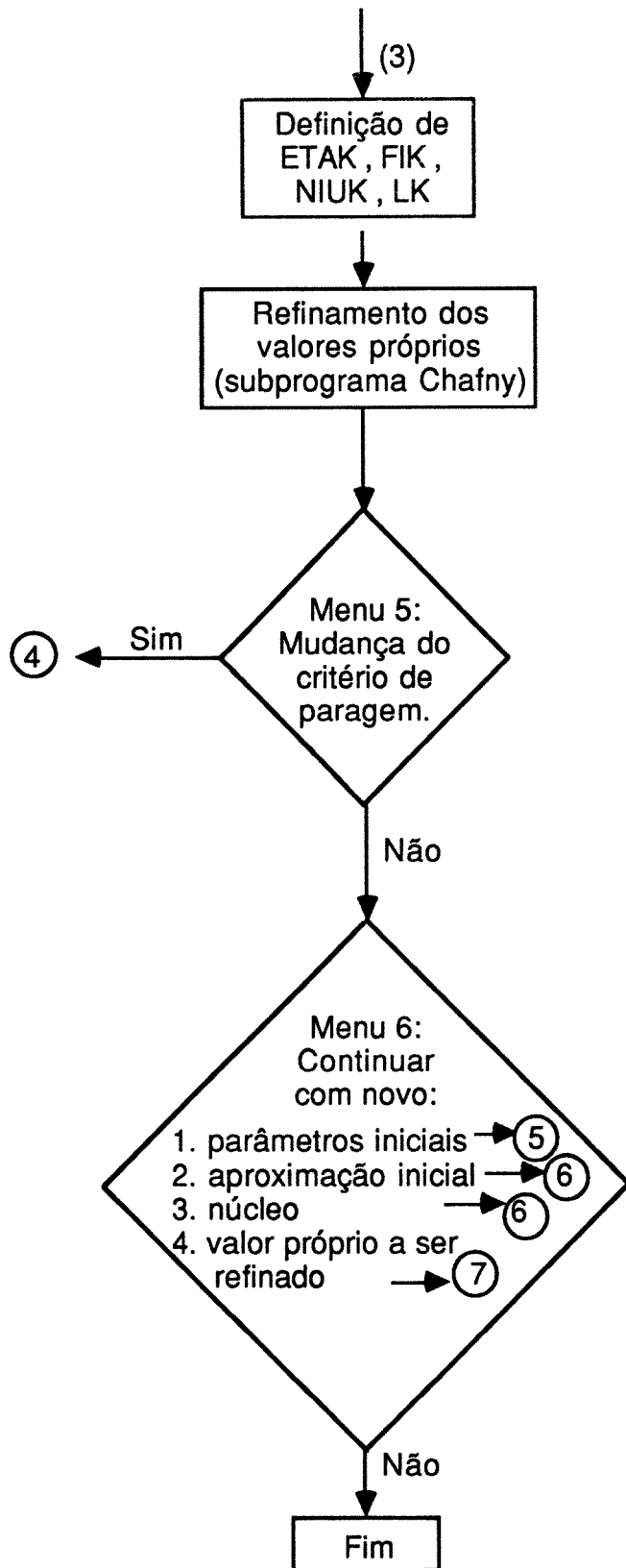
tal que :

$$\langle UN, VN \rangle = I_{ma}$$

Equação de Sylvester :

$$TAUNSYL \times X - X \times TETASYL = C$$

$n \times n$                        $ma \times ma$



ver definições de :

$$\eta_k \quad \varphi_k \quad \psi_k \quad \lambda_k$$

na pg 37 .

confrontar com eq. do capítulo 2.4. .

### 3. Apresentação dos núcleos usados

Utilizaram-se vários operadores sobre os quais foram feitos vários testes dos métodos anteriormente considerados, para refinamento dos primeiros valores próprios, com diferentes discretizações e critérios de paragem.

Escolheram-se alguns exemplos clássicos; nos núcleos: A , B , C e D a multiplicidade algébrica dos valores próprios é 1 , enquanto que nos núcleos E e F a multiplicidade algébrica é 2 . Poder - se - iam arranjar outros exemplos com multiplicidade algébrica maior.

#### Núcleo A

É definido pela expressão :

$$K(s, t) = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ (1-s)t, & 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases}$$

e corresponde ao núcleo de Green da equação diferencial :

$$L(y) = -y'' = 0$$

com as condições fronteira :

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{ver Ahues [ 1 ] e d' Almeida [ 4 ]}).$$

Os valores próprios do operador  $T$  , associado ao núcleo  $A$  são conhecidos analiticamente e formam um conjunto numerável, a saber :

$$\{ (k\pi)^{-2}, k \in \mathbf{N} \}.$$

Os vectores próprios correspondentes são :

$$\{ \phi^{(n)} = c_n \text{sen} (k\pi t), k \in \mathbf{N} \},$$

onde  $c_n$  é uma constante de normalização dependente da ordem  $n$  da aproximação inicial e do tipo da discretização  $\alpha \in \{ N, S \}$  usada para obter

essa aproximação inicial  $T_n^\alpha$ , de modo que  $P_n^\alpha \phi^{(n)} = \phi_n$  ( ver d' Almeida [ 4 ] ).

Calculando os cinco primeiros valores próprios teóricos obtém-se:

0.101 321 183 642 3  
 0.025 330 295 910 58  
 0.011 257 909 293 59  
 0.006 332 573 977 645  
 0.004 052 847 345 693 .

#### Núcleo B

É definido pela expressão :

$$K(s, t) = \begin{cases} \alpha ( e^{u(1-t)\varepsilon^{-1}} - 1 ) ( 1 - e^{us\varepsilon^{-1}} ), & \text{se } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \alpha ( e^{u(1-t)\varepsilon^{-1}} - e^{u\varepsilon^{-1}} ) ( 1 - e^{u(s-1)\varepsilon^{-1}} ), & \text{se } 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases}$$

com  $\alpha = [ u ( 1 - e^{u\varepsilon^{-1}} ) ]^{-1}$ .

B1)  $u = -1$  e  $\varepsilon = 1$

B2)  $u = 1$  e  $\varepsilon = 0,05$

É o núcleo de Green da equação de convecção - difusão unidimensional no estado estacionário :

$$-\varepsilon y'' + u y' = f \quad , \quad \text{em } ]0, 1[$$

com as condições fronteira :

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{ ver Ahues e al. [ 2 ] },$$

e onde  $\varepsilon$  é uma constante positiva associada ao inverso da viscosidade e  $u$  representa a velocidade de difusão, que se supõe constante.

Os valores próprios deste operador são conhecidos analiticamente e formam um conjunto numerável, a saber :

$$\left\{ \frac{4\varepsilon}{(2k\pi\varepsilon)^2 + u^2}, k \in \mathbf{N} \right\}.$$

As funções próprias correspondentes são :

$$\{ \phi^{(n)} = c_n e^{0,5ut\varepsilon^{-1}} \text{sen} (k\pi t), t \in [0, 1], k \in \mathbf{N} \},$$

onde  $c_n$  é uma constante de normalização relacionada com a aproximação inicial  $T_n^\alpha$ , de modo que  $P_n^\alpha \phi^{(n)} = \phi_n$ .

Calculando os cinco primeiros valores próprios teóricos obtém-se :

para o núcleo B1

para o núcleo B2

0,098 818 092 127 42

0,182 033 967 529 3

0,025 170 899 328 5

0,143 391 360 065

0,011 226 313 089 97

0,105 917 370 688 8

0,006 322 564 450 867

0,077 545 327 347 82

0,004 048 745 108 825 33

0,057 680 087 828 39 .

### Núcleo C

É definido pela expressão :

$$K(s, t) = 2 | \text{sen} (10\pi t) - \text{sen} (10\pi s) |^{1/2} \quad s, t \in [0, 1].$$

É contínuo em  $[0, 1] \times [0, 1]$  mas as suas derivadas parciais são ilimitadas no conjunto :

$$\{(s,t) \in [0,1] \times [0,1] : t = s + 0.2k ; k = 0, \pm 1, \dots, \pm 5 \text{ ou } t = 0.1k - s ; k = 1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Os elementos próprios do operador  $T$  com este núcleo não são conhecidos analiticamente ( ver Ahues [ 1 ] e d' Almeida [ 4 ] ).

### Núcleo D

É definido pela expressão :

$$K(s, t) = \exp(st) \quad s, t \in [0, 1].$$

### Núcleo E

É definido pela expressão :

$$K(s, t) = 0.25 - 0.5 |t - s| \quad s, t \in [0, 1].$$

Os valores próprios teóricos são dados por :  $\{ [(2k-1) \pi]^2, k \in \mathbb{N} \}$ .

Calculando os cinco primeiros valores próprios teóricos obtém-se:

0.101 321 183 642 3

0.011 257 909 293 59

0.004 052 847 345 693

0.002 067 779 258 007

0.001 250 878 810 399 .

Os valores próprios deste núcleo têm multiplicidade 2 ( ver Ahues e al. [ 3 ] ).

### Núcleo F

É definido pela expressão :

$$K(s, t) = \begin{cases} 0.5 t, & \text{se } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ s - 0.5 t, & \text{se } 0 \leq t < s \leq 1 . \end{cases}$$

Os valores próprios teóricos são iguais aos do núcleo E , logo, dados por :

$$\{ [(2k-1) \pi]^{-2}, k \in \mathbf{N} \} .$$

Calculando os cinco primeiros valores próprios teóricos obtém-se :

0.101 321 183 642 3

0.011 257 909 293 59

0.004 052 847 345 693

0.002 067 779 258 007

0.001 250 878 810 399 .

Os valores próprios deste núcleo têm multiplicidade 2.

A diferença entre os núcleos E e F , está em que este último núcleo é defectivo. Uma vez que não tem um número suficiente de vectores próprios foi preciso calcular os respectivos vectores principais ( ver Ahues e al. [ 3 ] ) .

#### 4. Apresentação dos Resultados

Sobre os núcleos apresentados foram feitos vários testes com vista ao refinamento dos três maiores valores próprios, usando três critérios de paragem, com dois métodos de obter a aproximação inicial : Nyström e Sloan e para dois valores de  $n$  :  $n = 10$  e  $n = 12$ .

Os testes escolhidos estão representadas esquematicamente no seguinte quadro :

Aprox. Inicial		Nyström						Sloan					
Núcleo		n=10			n=12			n=10			n=12		
A	1 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	2 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	3 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
B1	1 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	2 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	3 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
B2	1 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	2 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	3 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
C	1 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP						
	2 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP						
	3 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP						
D	1 <sup>o</sup> vp							1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	2 <sup>o</sup> vp							1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	3 <sup>o</sup> vp							1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
E	1 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	2 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	3 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
F	1 <sup>o</sup> vp										1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	2 <sup>o</sup> vp										1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP
	3 <sup>o</sup> vp	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP	1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP				1 <sup>o</sup> CP	2 <sup>o</sup> CP	3 <sup>o</sup> CP

Os resultados completos destes testes estão dados nos quadros do Apêndice A .

## 5. Análise dos Resultados

Com base nos quadros do apêndice A construíram-se as seguintes tabelas que contêm o número de iterações necessárias para atingir a tolerância previamente fixada :  $TOL = 1 \times 10^{-11}$  , ou, caso isso não aconteça, é porque foi igualado o número máximo de iterações :  $MAXITER = 30$  .

			Nyström			Sloan		
Núcleo	vp	n	1º CP	2º CP	3º CP	1º CP	2º CP	3º CP
A	1º	10	10	11	13	10	11	13
A	1º	12	9	9	12	9	10	12
A	2º	10	14	15	21	14	15	22
A	2º	12	13	14	18	14	14	16
A	3º	10	25	23	30	26	27	30
A	3º	12	20	19	25	21	20	28

			Nyström			Sloan		
Núcleo	vp	n	1º CP	2º CP	3º CP	1º CP	2º CP	3º CP
B1	1º	10	10	11	13	10	10	13
B1	1º	12	9	9	12	9	10	12
B1	2º	10	14	15	21	17	15	22
B1	2º	12	13	14	18	14	14	16
B1	3º	10	25	23	30	26	27	30
B1	3º	12	20	19	25	21	20	28

			Nyström			Sloan		
Núcleo	vp	n	1º CP	2º CP	3º CP	1º CP	2º CP	3º CP
B2	1º	10	30	30	30	30	30	30
B2	1º	12	26	25	26	30	30	30
B2	2º	10	30	30	30	30	30	30
B2	2º	12	30	29	30	30	30	30
B2	3º	10	30	30	30	30	30	30
B2	3º	12	30	30	30	30	29	30

			Nyström			Sloan		
Núcleo	vp	n	1º CP	2º CP	3º CP	1º CP	2º CP	3º CP
E	1º	10	10	11	13	10	11	13
E	1º	12	9	9	12	9	10	12
E	2º	10	25	23	30	26	27	30
E	2º	12	20	19	25	21	20	28
E	3º	10	30	30	30	30	30	30
E	3º	12	30	30	30	30	30	30

Comparando as aproximações iniciais pelo método de Nyström e Sloan podemos concluir que o número de iterações é praticamente igual em ambos os casos. O de Sloan parece ser ligeiramente pior, o que aparentemente

contraria a teoria, visto que as integrações são mais precisas. Mas essa conclusão não se pode tirar, uma vez que o primeiro critério de paragem usa matrizes diferentes ( TAUM / Nyström e TAUM / Sloan ) para calcular o resíduo; o segundo critério de paragem está a comparar com vários  $\lambda_{100}$  obtidos, por métodos diferentes. De um modo geral, os critérios de paragem 1 e 2 são mais exigentes para a aproximação inicial de Sloan. Por outro lado, se tivéssemos utilizado o valor próprio teórico no segundo critério de paragem nunca teríamos obtido uma solução com um erro inferior à tolerância dada, devido ao erro de discretização correspondente a  $m = 100$ , em qualquer dos métodos. Neste caso, o método de Sloan tinha vantagem.

O primeiro critério de paragem é melhor porque faz intervir os dois elementos próprios. Mas, dependendo do problema de valores próprios, podemos ter um resíduo pequeno e um valor próprio ( ou vector próprio ) com um coeficiente de condicionamento elevado e nesse caso, não temos garantia de que o seu erro relativo seja pequeno.

O segundo critério de paragem só faz sentido como confirmação, visto que implica o cálculo de  $\lambda_{100}$ , que é o que queremos evitar com o método de refinamento. Verifica-se, no entanto, que o número de iterações é praticamente igual ao obtido com o primeiro critério de comparação.

O terceiro critério de paragem mede a estabilização dos valores próprios obtidos em cada iteração. Por isso, não é de admirar que o número de iterações deste seja diferente dos outros critérios de paragem. Nos exemplos testados nesta dissertação, este critério exigiu mais iterações do que os outros.

Quando o número de iterações é 30 pode significar que não foi atingida a tolerância dentro do limite máximo de iterações e, nesse caso, pode diferir a distância à tolerância exigida. É o que acontece no núcleo B2 em quase

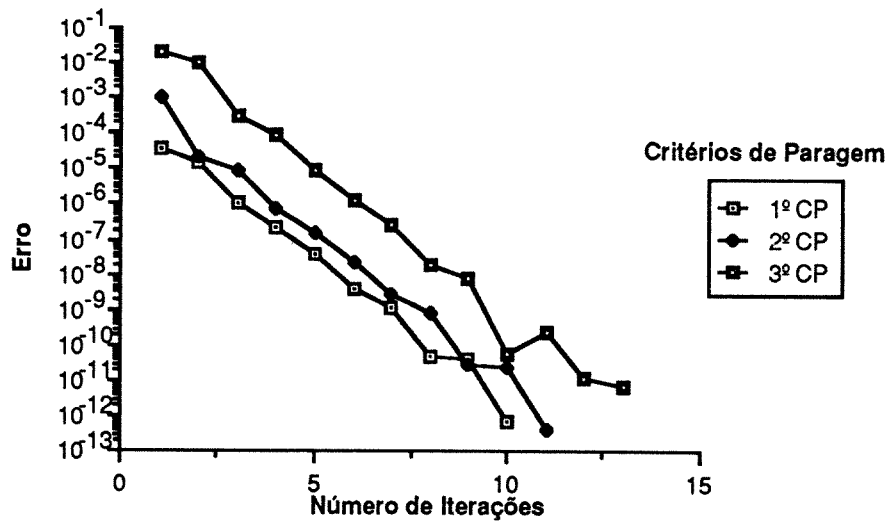
todos os casos. A distância da solução refinada em relação ao  $\lambda_{100}$  pode ser examinada nos quadros do apêndice A .

Saliente-se também o facto de para  $n = 12$  serem necessárias menos iterações do que para  $n = 10$  . Isto é de esperar, pois, para  $n = 12$  , a discretização é mais fina, logo, à partida, há uma melhor aproximação.

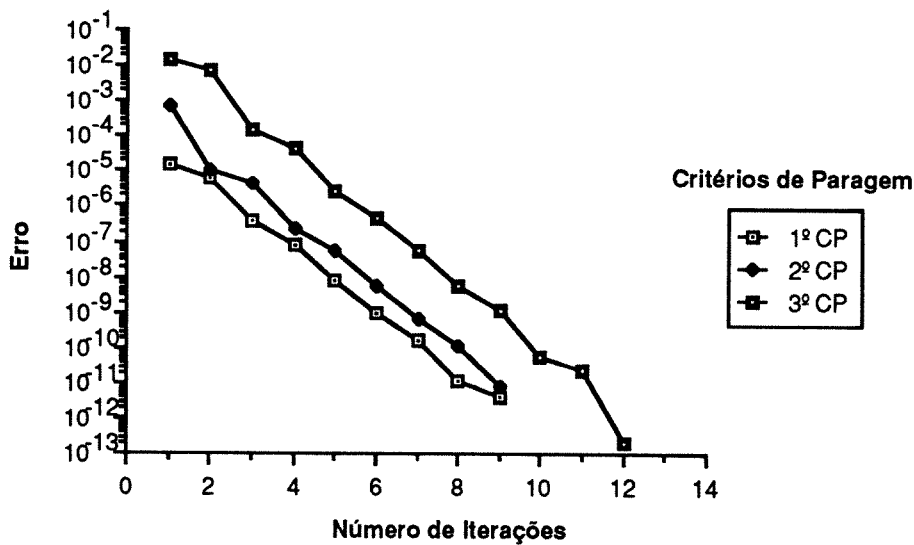
De uma maneira geral, para os núcleos A e B1 tudo correu bem, isto é, os valores próprios foram encontrados com a precisão desejada. O mesmo já não aconteceu com o núcleo B2 , pois, para  $n = 10$  , os valores próprios nunca foram encontrados ao fim das 30 iterações e, para  $n = 12$  , apenas foram encontrados cinco vezes, sempre muito próximo do limite máximo de iterações. Este é um exemplo em que faria sentido aumentar o número máximo de iterações permitidas para ver se o método consegue determinar LK com um erro maior do que a tolerância imposta, ou ,então, diminuir essa tolerância. O núcleo E também teve um comportamento normal, excepto para o terceiro valor próprio em que apenas no segundo critério de paragem o erro ultrapassou a tolerância, no método de Sloan e para  $n = 12$  . Também aqui faria sentido aumentar o número máximo de iterações permitidas.

Os gráficos a seguir apresentados mostram a evolução dos três critérios de paragem ao longo das iterações, para cada um dos exemplos considerados. Escolheu-se para eixo das abcissas o número de iterações efectuadas e para eixo das ordenadas os valores do erro obtido em cada um dos critérios de paragem. No segundo eixo usou-se a escala logarítmica, pois de outra forma, como os valores são muito pequenos, dificilmente se diferenciavam.

Núcleo A, Aprox. Nyström, 1<sup>av</sup>, n=10

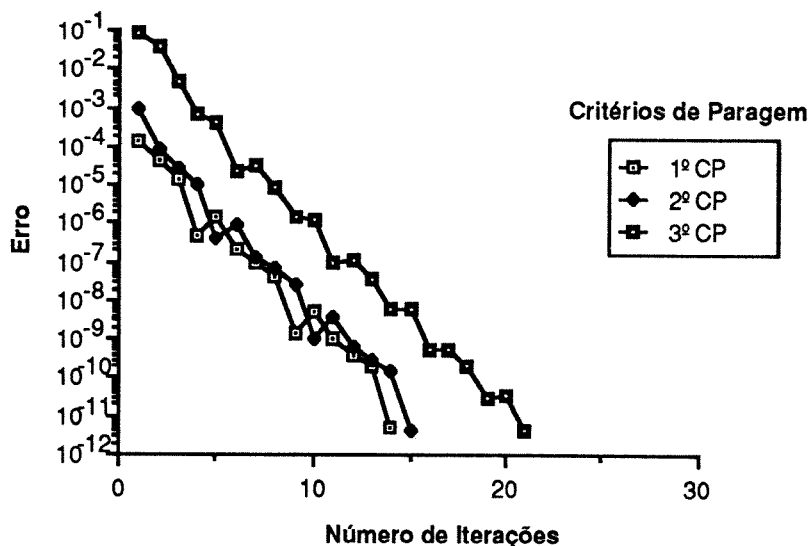


Núcleo A, Aprox. Nyström, 1<sup>av</sup>, n=12

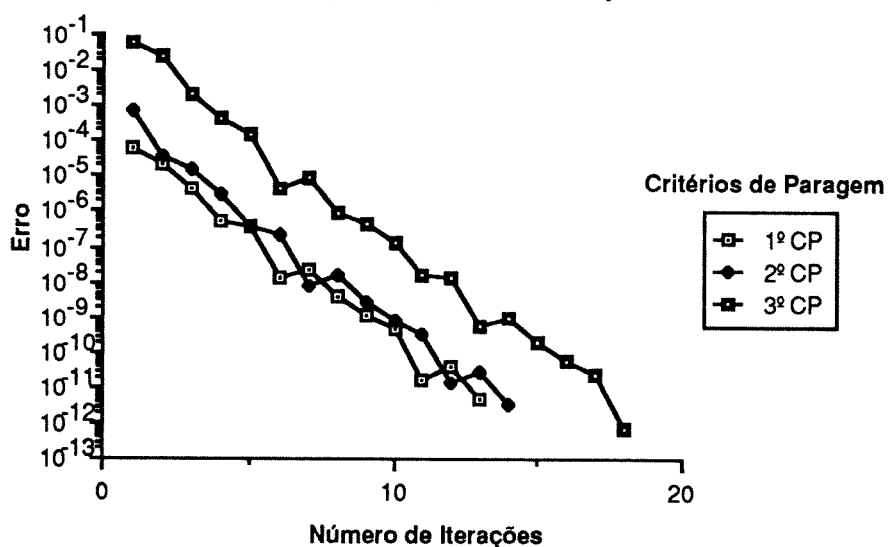


Nos dois gráficos o 1º e 2º critérios de paragem têm um comportamento semelhante. O 3º obteve erros maiores e precisou de mais iterações, sem, no entanto, ter atingido metade do limite das iterações para ultrapassar a tolerância pretendida. Saliente - se o facto de para  $n = 12$  ser necessário um menor número de iterações do que para  $n = 10$ .

Núcleo A, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=10

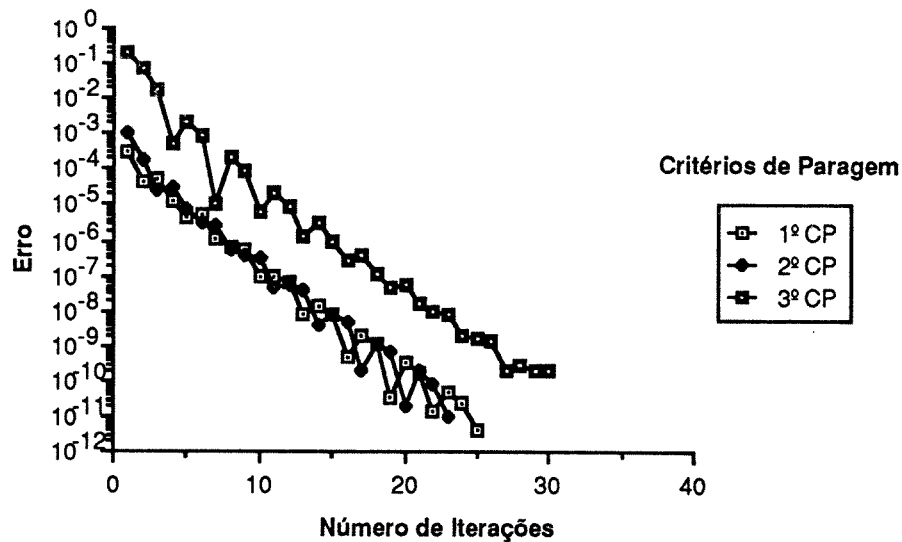


Núcleo A, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=12

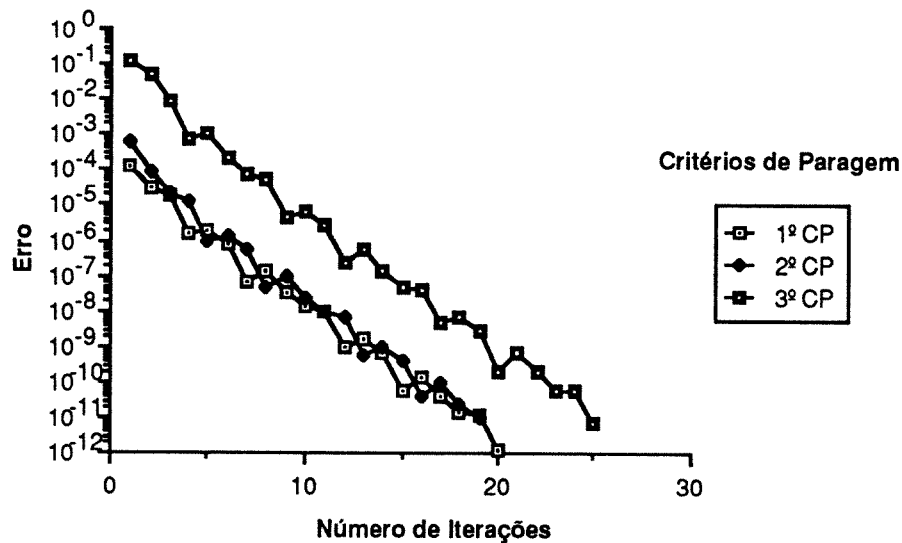


Nos dois gráficos o 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> critérios de paragem têm um comportamento semelhante, estando o 3<sup>o</sup> ligeiramente mais distanciado. Todos três ultrapassam a tolerância exigida em menos iterações do que o limite imposto, sendo o caso de  $n = 12$  mais eficiente do que o de  $n = 10$ . Note - se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo zigzague nos valores dos erros obtidos pelos critérios de paragem.

Núcleo A, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=10

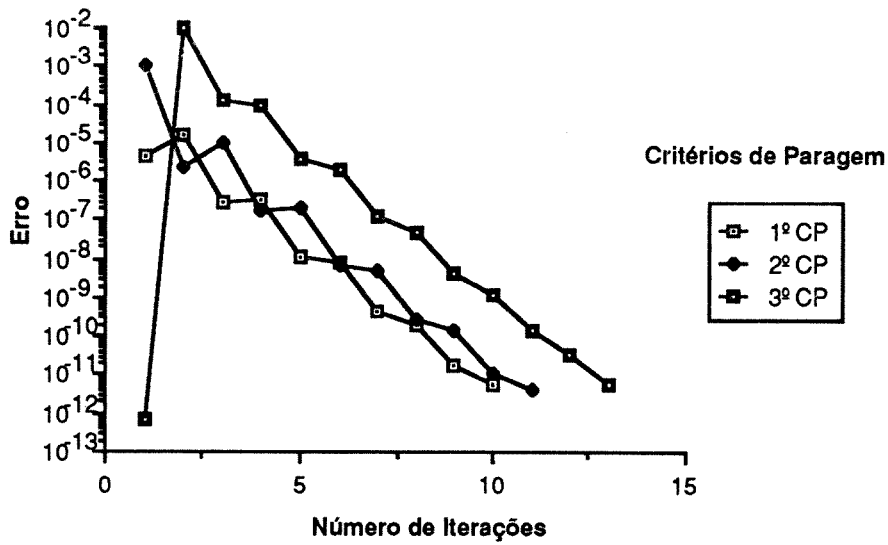


Núcleo A, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=12

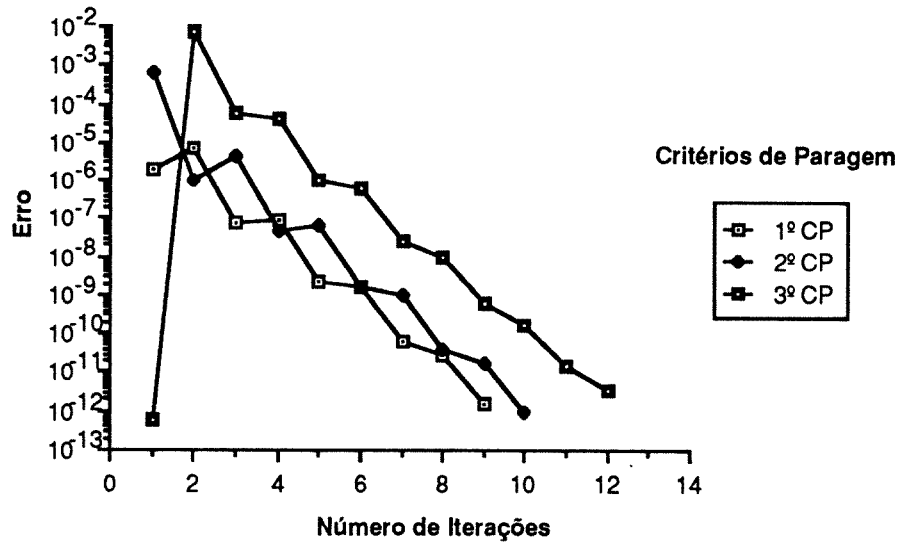


Para  $n = 10$  os erros obtidos através dos dois primeiros critérios de paragem ultrapassam a tolerância imposta ao fim de 25 e 23 iterações, respectivamente. O 3<sup>o</sup> critério de paragem, ao fim de 30 iterações, não consegue atingir essa mesma tolerância. Para  $n = 12$  os três critérios conseguem um erro menor do que a tolerância imposta em menos de 30 iterações sendo, no entanto, o 3<sup>o</sup> critério mais lento. Comparando os dois gráficos podemos concluir que para  $n = 12$  os resultados são melhores, pois até o 3<sup>o</sup> critério ultrapassa a tolerância exigida. Note - se que os valores dos erros oscilam entre cada dois iterados.

Núcleo A, Aprox. Sloan, 1<sup>ª</sup>vp, n=10

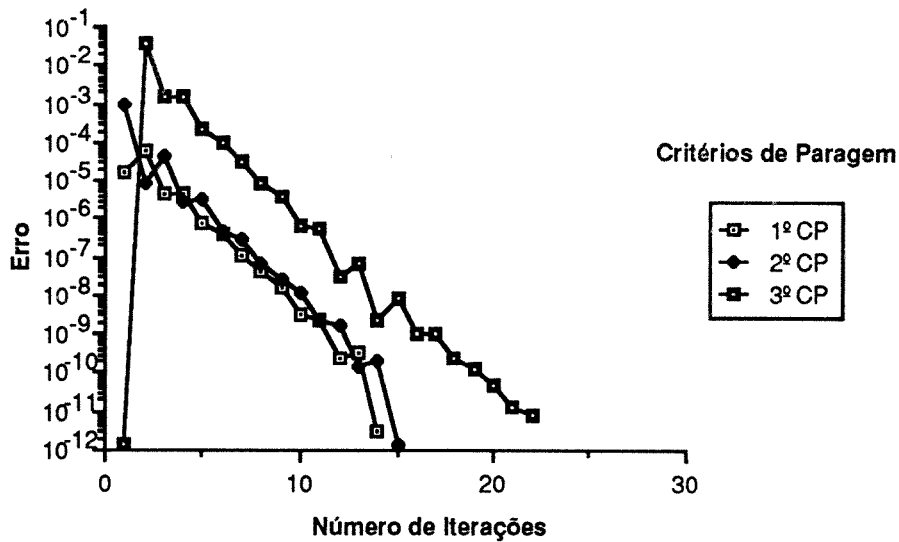


Núcleo A, Aprox. Sloan, 1<sup>ª</sup>vp, n=12

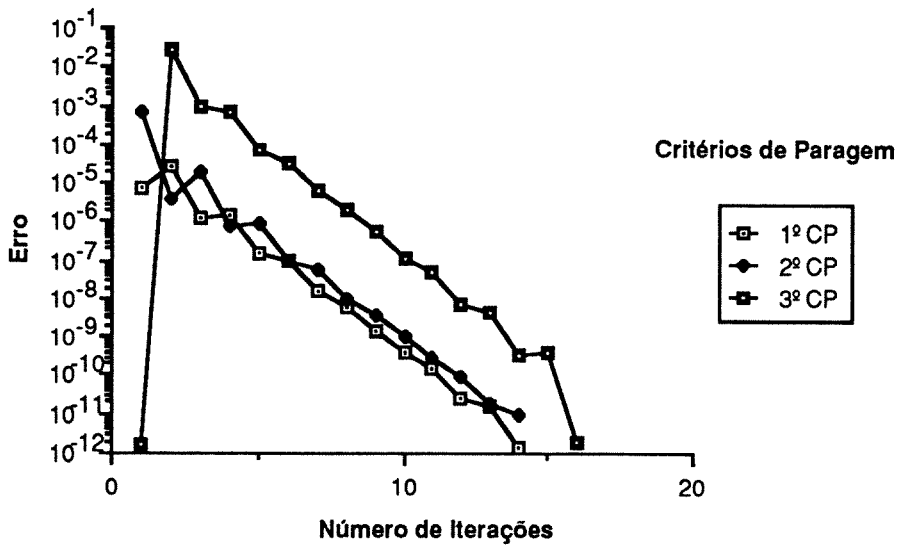


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ . Note-se ainda que o 3<sup>º</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno, o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

Núcleo A, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=10

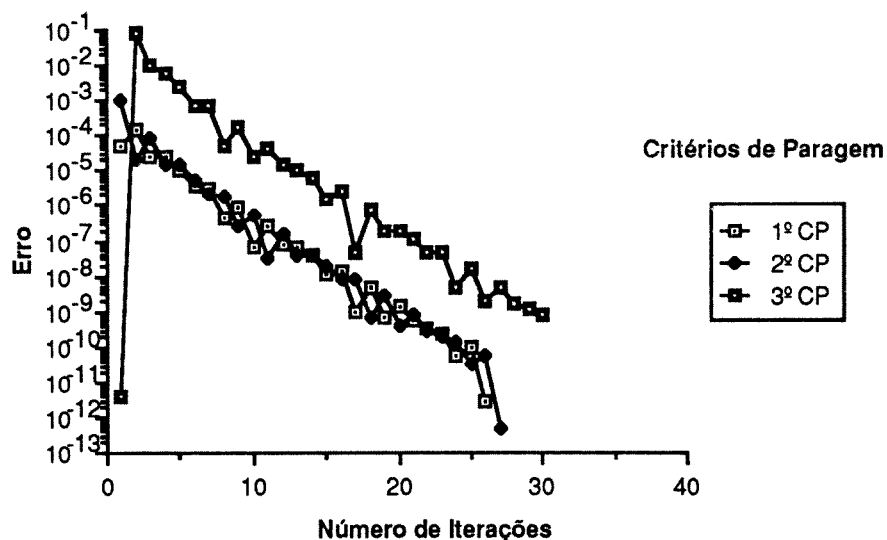


Núcleo A, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=12

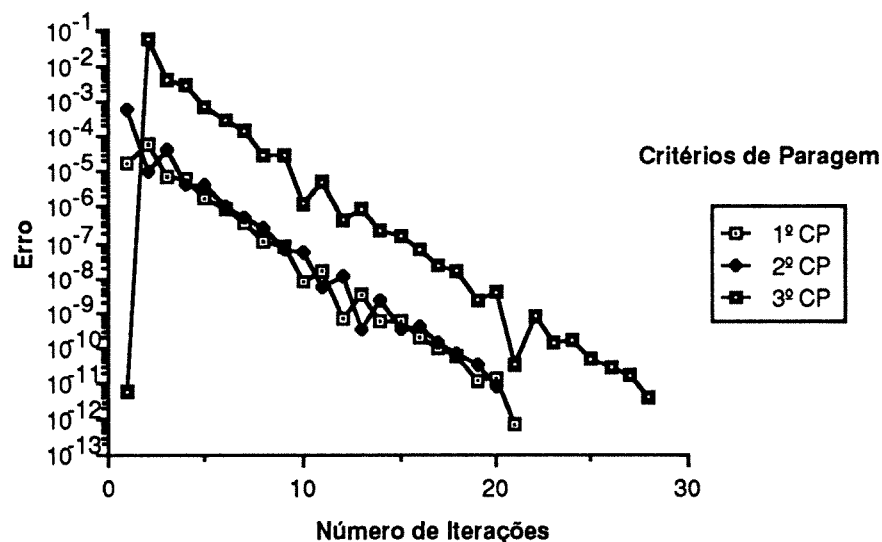


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ . Note-se ainda que o 3<sup>o</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno, o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

Núcleo A, Aprox. Sloan, 3<sup>º</sup>vp, n=10

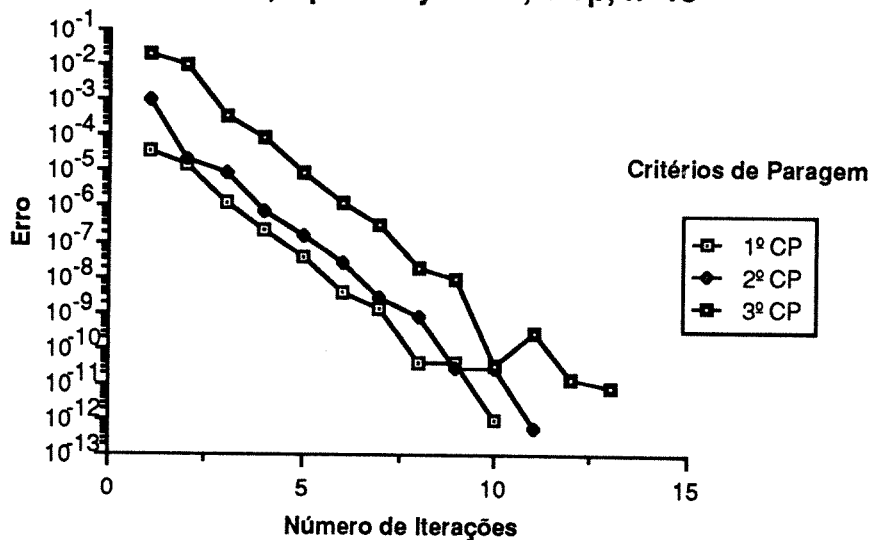


Núcleo A, Aprox. Sloan, 3<sup>º</sup>vp, n=12

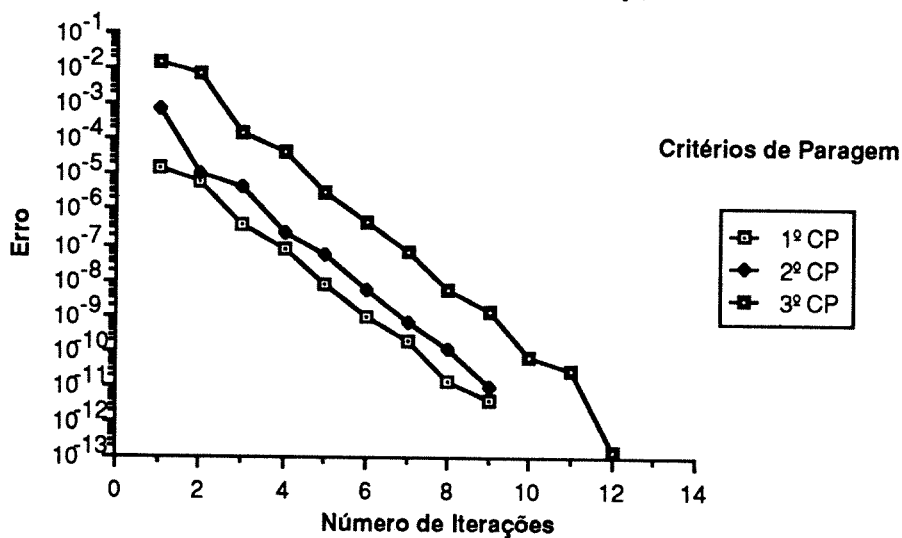


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ ; embora o 3<sup>º</sup> critério não tenha atingido essa tolerância para  $n = 10$ , para  $n = 12$  já conseguiu. Note-se ainda que o 3<sup>º</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno, o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

Núcleo B1, Aprox. Nyström, 1<sup>av</sup>, n=10

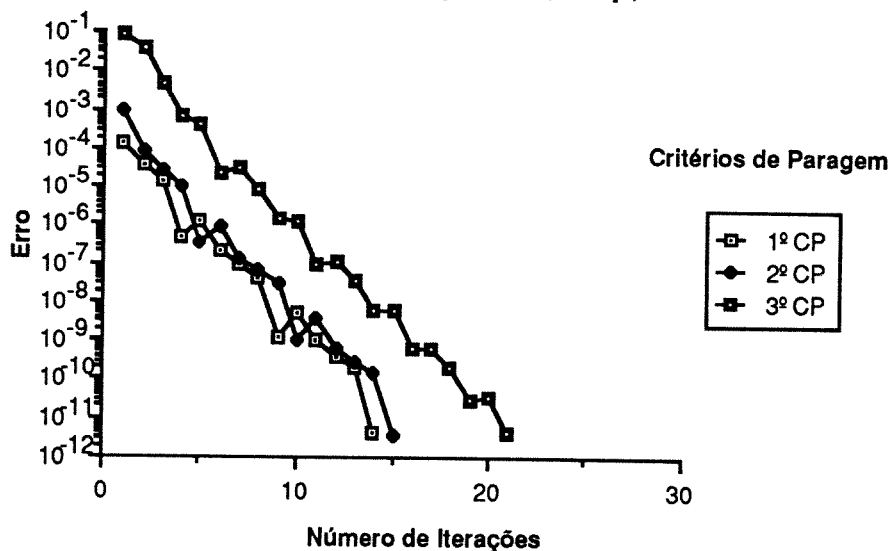


Núcleo B1, Aprox. Nyström, 1<sup>av</sup>, n=12

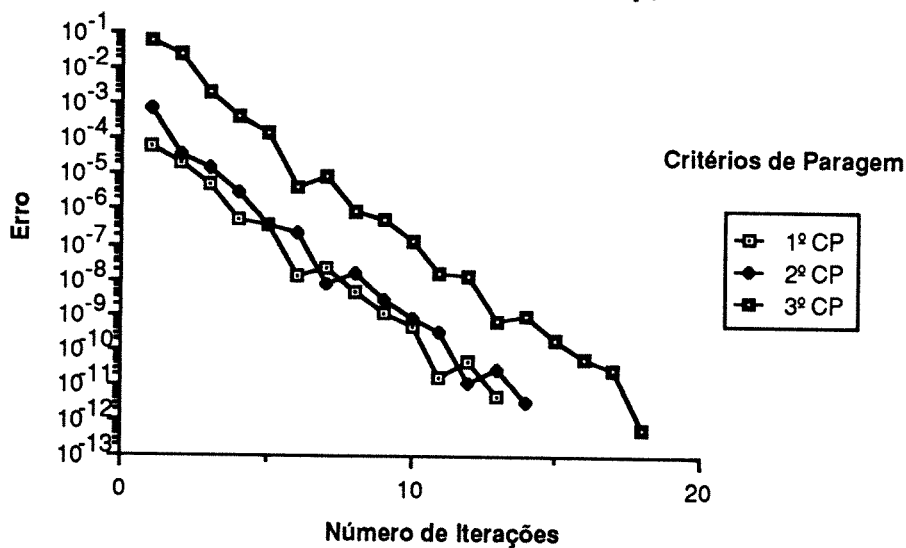


Nos dois gráficos o 1º e 2º critérios de paragem têm um comportamento semelhante, estando o 3º ligeiramente mais distanciado. Todos três ultrapassam a tolerância exigida em menos iterações do que o limite imposto, sendo o caso de  $n = 12$  mais eficiente do que o de  $n = 10$ .

Núcleo B1, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=10

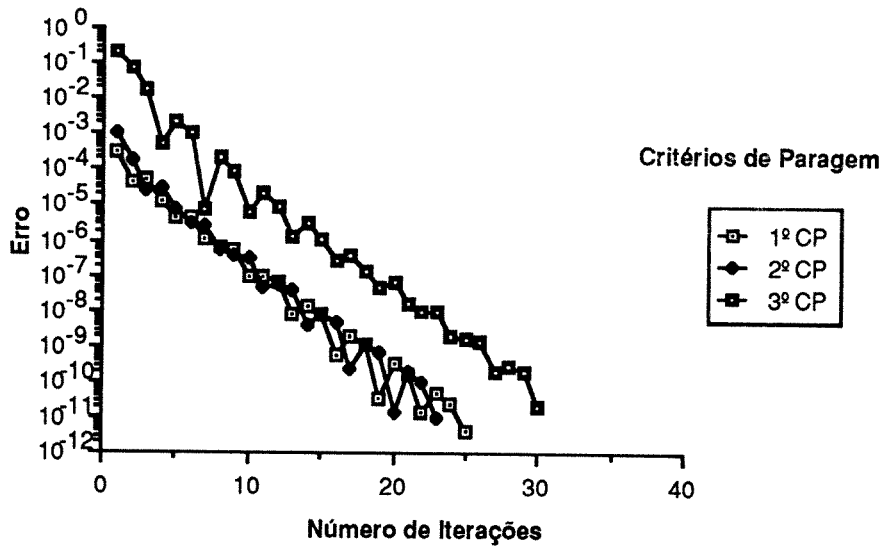


Núcleo B1, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=12

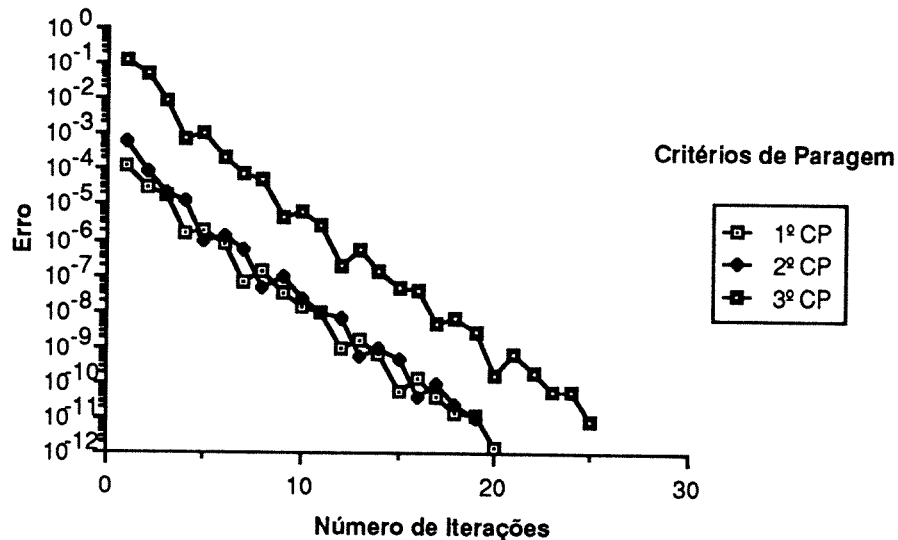


Nos dois gráficos o 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> critérios de paragem têm um comportamento semelhante, estando o 3<sup>o</sup> ligeiramente mais distanciado. Todos três ultrapassam a tolerância exigida em menos iterações do que o limite imposto, sendo o caso de  $n = 12$  mais eficiente do que o de  $n = 10$ .

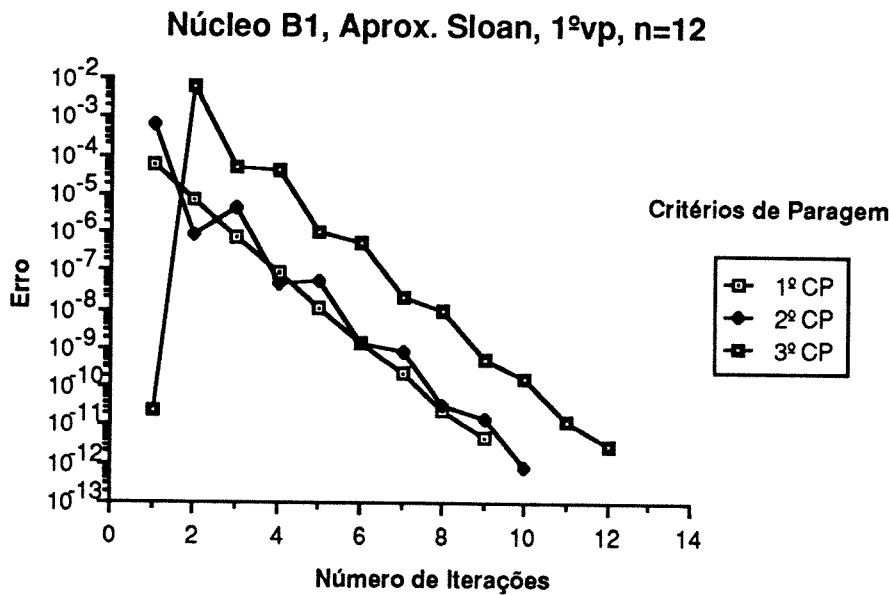
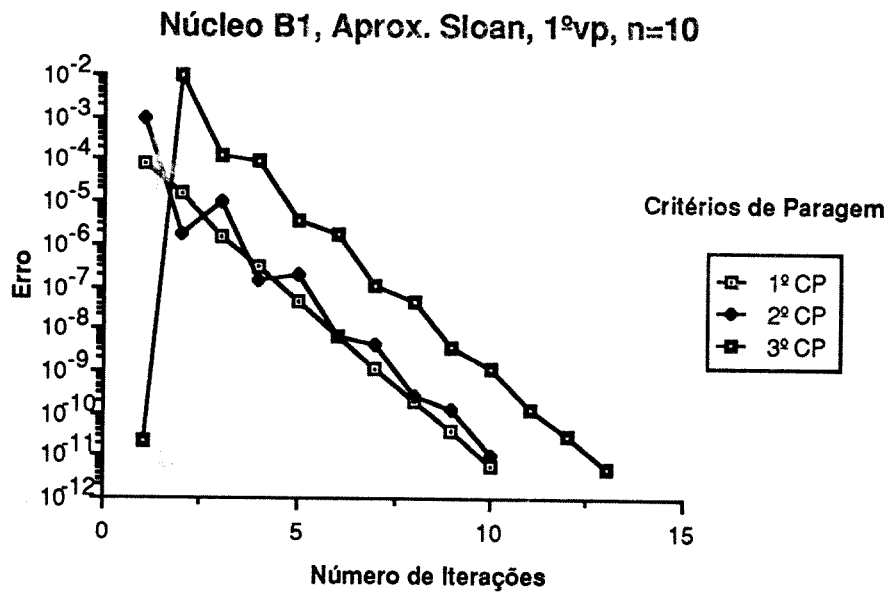
Núcleo B1, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=10



Núcleo B1, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=12

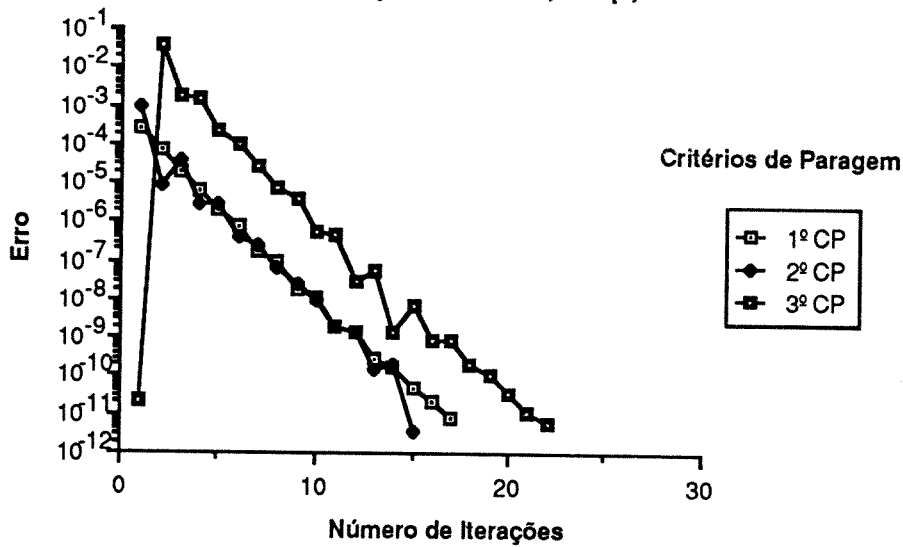


Para  $n = 10$  os erros obtidos pelos dos dois primeiros critérios de paragem ultrapassam a tolerância imposta ao fim de 25 e 23 iterações, respectivamente. O 3<sup>o</sup> critério de paragem, ao fim de 30 iterações, não consegue atingir essa tolerância, mas bastaria mais uma iteração para que isso acontecesse. Para  $n = 12$  os três critérios conseguem um erro menor do que a tolerância imposta em menos de 30 iterações. Comparando os dois gráficos podemos concluir que para  $n = 12$  os resultados são melhores, pois até o 3<sup>o</sup> critério ultrapassa a tolerância exigida. Note - se que os valores oscilam entre cada dois iterados.

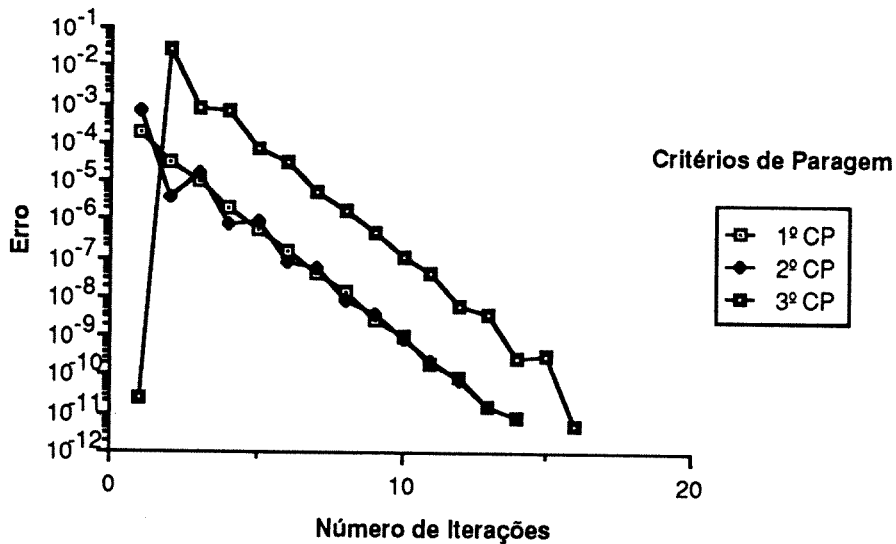


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ . Note-se ainda que o 3<sup>º</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno, o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

Núcleo B1, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=10

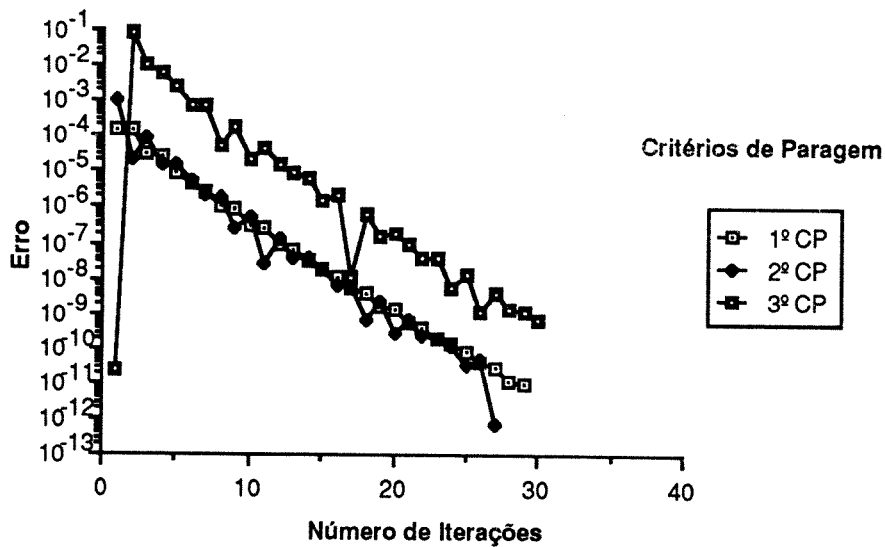


Núcleo B1, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=12

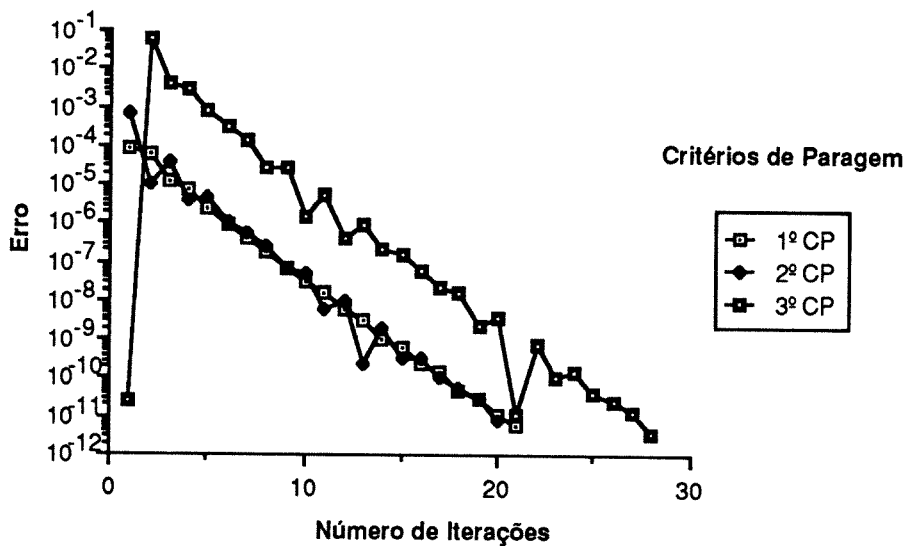


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ . Note-se ainda que o 3º critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno, o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

Núcleo B1, Aprox. Sloan, 3<sup>º</sup>vp, n=10

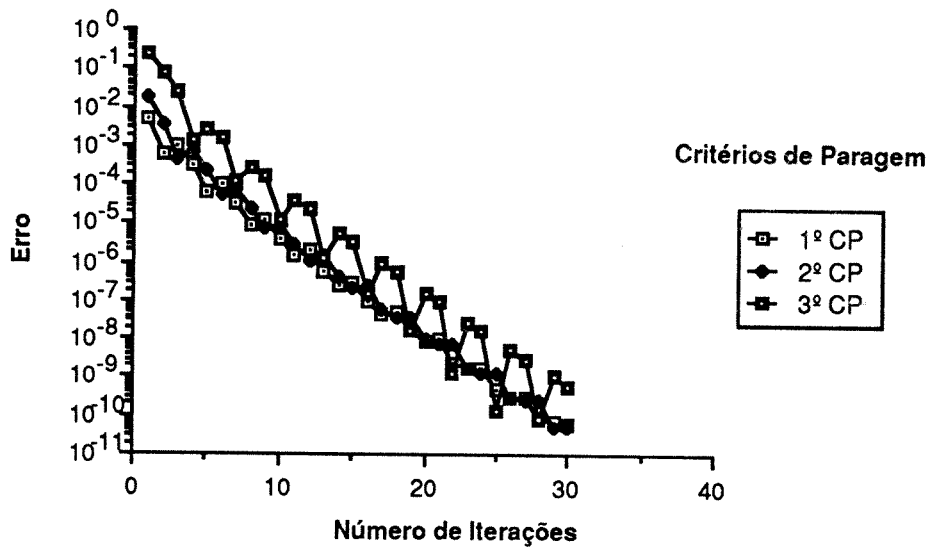


Núcleo B1, Aprox. Sloan, 3<sup>º</sup>vp, n=12

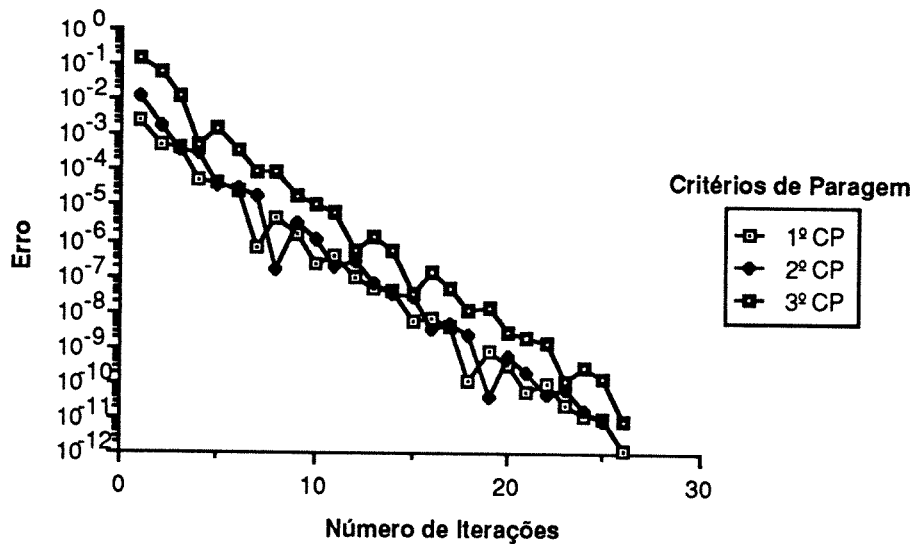


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é atingida mais rapidamente do que para  $n = 10$ ; embora o 3<sup>º</sup> critério não tenha alcançado essa tolerância para  $n = 10$ , para  $n = 12$  já conseguiu. Note-se ainda que o 3<sup>º</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno, o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

Núcleo B2, Aprox. Nyström, 1<sup>o</sup>vp, n=10



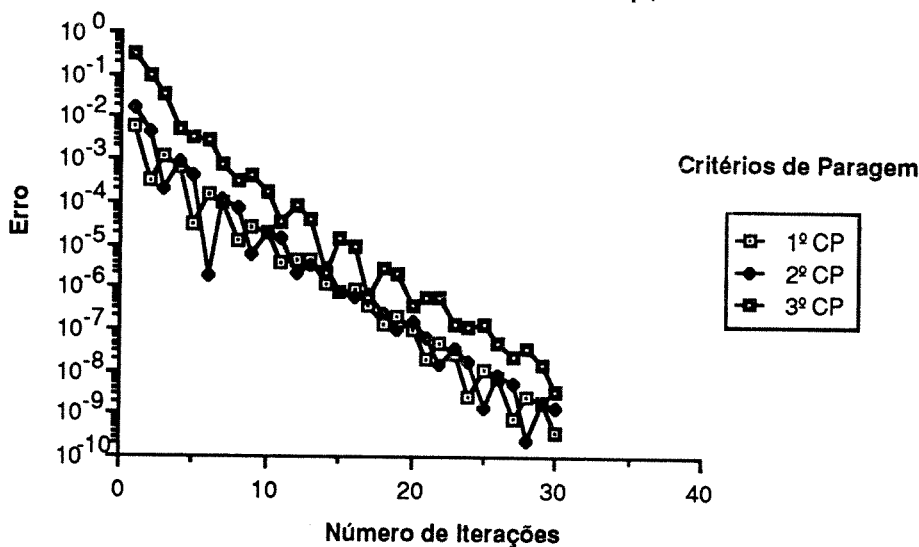
Núcleo B2, Aprox. Nyström, 1<sup>o</sup>vp, n=12



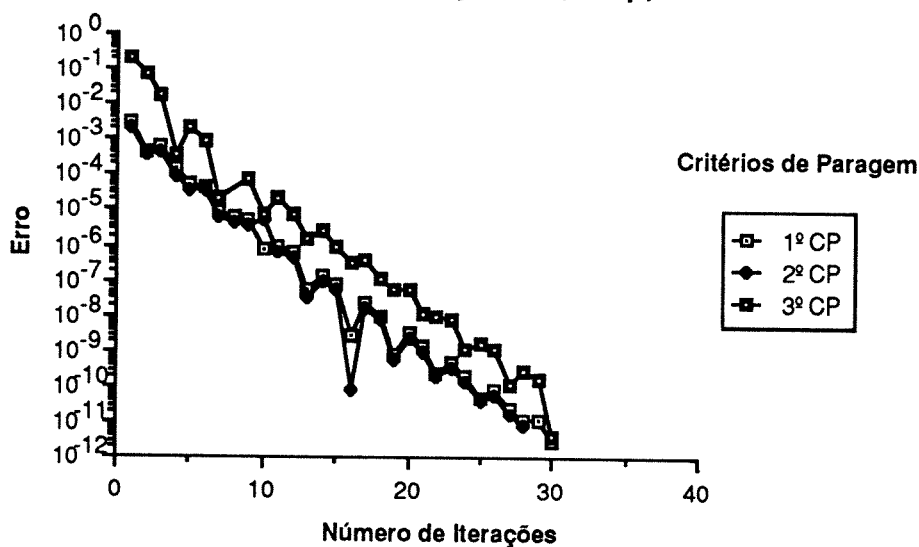
Para  $n = 10$  os três critérios andam muito perto e todos param ao fim das 30 iterações sem terem alcançado a tolerância pedida. Para  $n = 12$  os três critérios ultrapassam a tolerância pedida ao fim de 25 ou 26 iterações.

Este é um bom exemplo para mostrar que um aumento do valor de  $n$  pode levar à convergência deste processo iterativo, dentro do número máximo de iterações permitidas. Note - se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo zigzague nos valores dos erros obtidos pelos critérios de paragem.

Núcleo B2, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=10

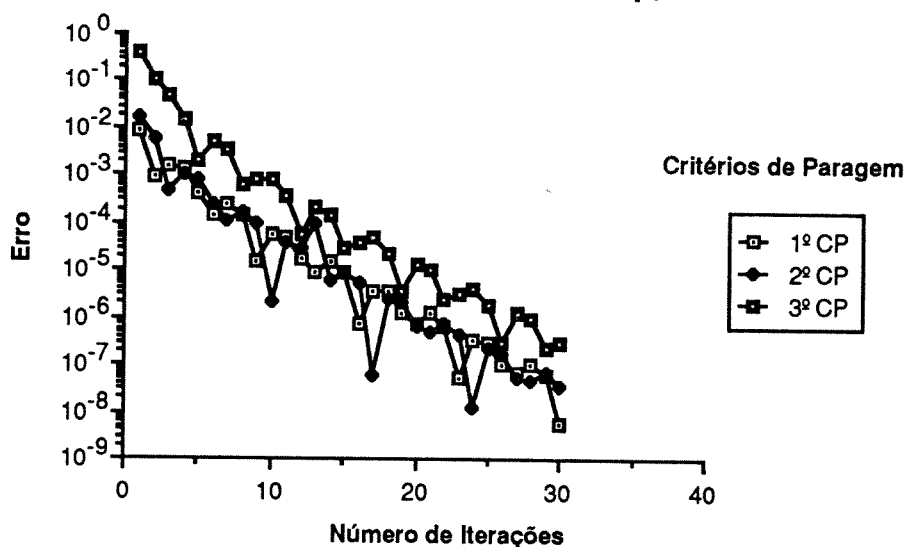


Núcleo B2, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=12

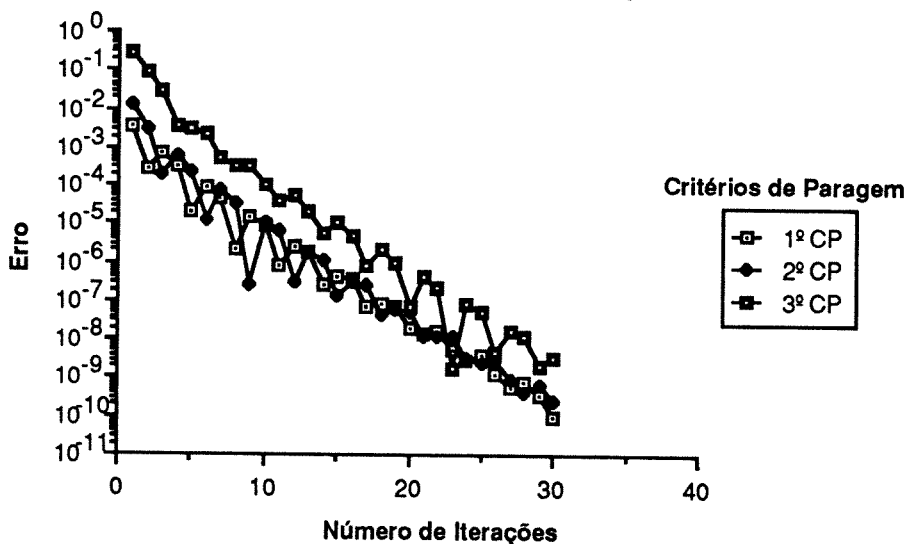


Para  $n = 10$  os 3 critérios param ao fim das 30 iterações, sem terem alcançado a tolerância pedida. Para  $n = 12$  os 3 critérios ultrapassam essa tolerância mesmo no limite das iterações. Comparando com o mesmo exemplo mas para o 1<sup>o</sup> valor próprio podemos concluir que é semelhante embora a tolerância conseguida para  $n = 10$  pelo 2<sup>o</sup> valor próprio tenha sido inferior e para  $n = 12$  tenham sido necessárias mais iterações. É um bom exemplo para mostrar que um aumento de  $n$  pode levar à convergência do processo iterativo, dentro do  $n^o$  máximo de iterações permitidas. Note-se que os valores dos erros oscilam entre cada dois iterados.

Núcleo B2, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=10

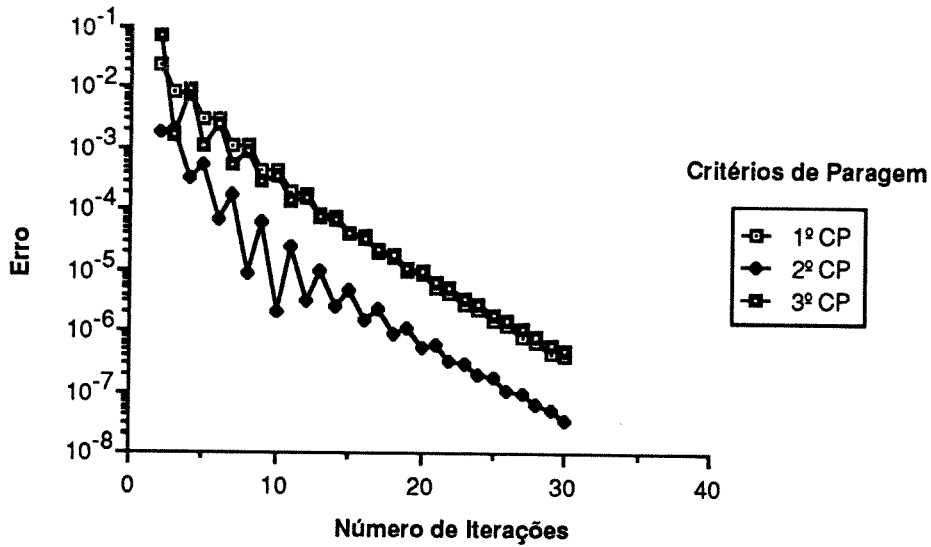


Núcleo B2, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=12

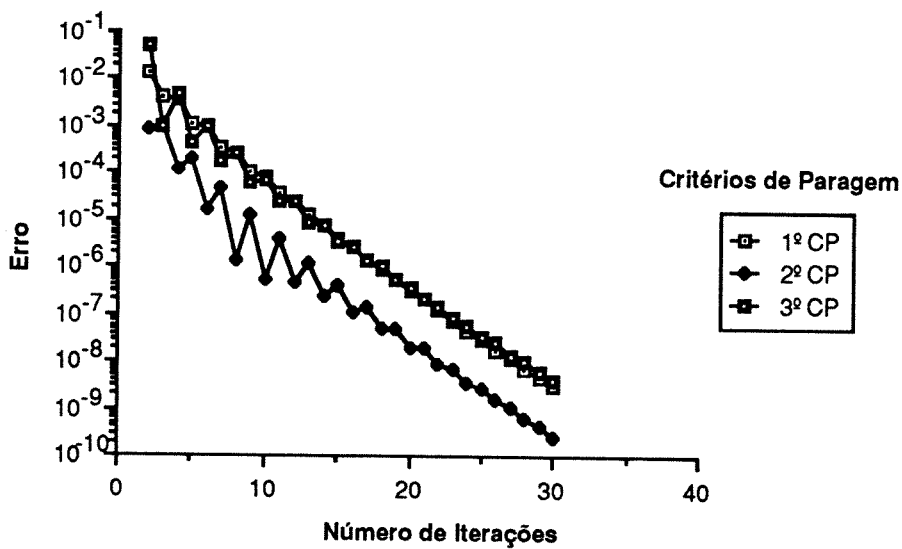


Os três critérios têm um comportamento semelhante mas em nenhum caso há convergência, ao fim do número máximo de iterações imposto. Claro que para  $n = 12$  ficou mais perto. Neste caso, valia a pena aumentar o número máximo de iterações para ver se realmente o método consegue ultrapassar a tolerância exigida. Note-se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo ziguezague nos valores dos erros obtidos pelos critérios de paragem.

Núcleo B2, Aprox. Sloan, 1<sup>º</sup>vp, n=10

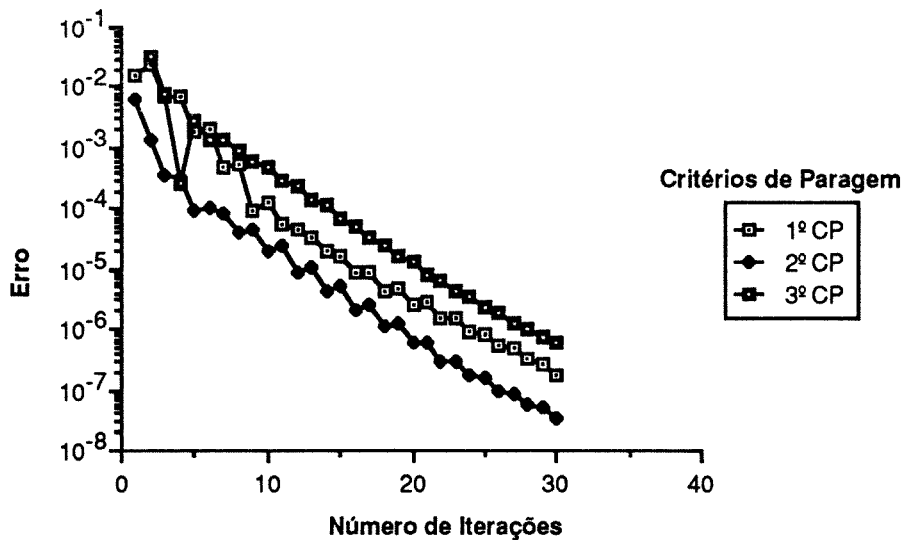


Núcleo B2, Aprox. Sloan, 1<sup>º</sup>vp, n=12

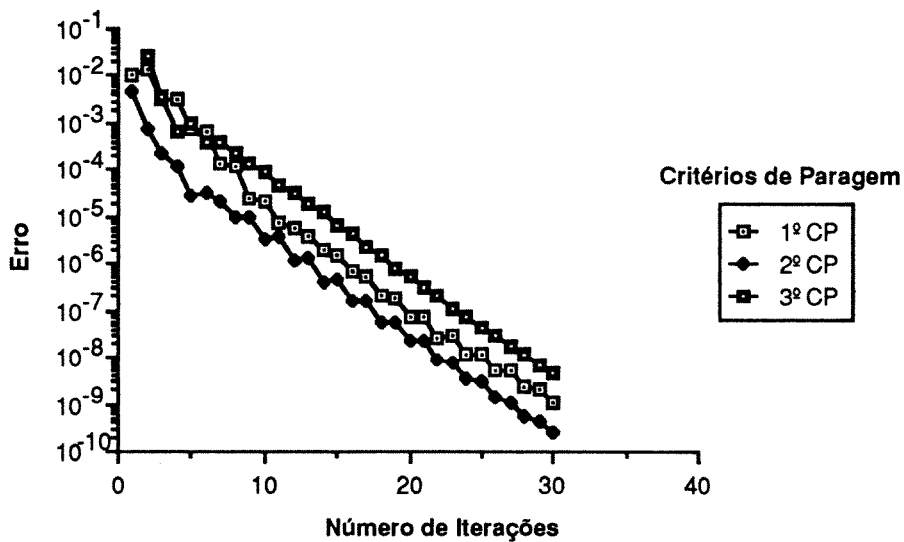


Os três critérios têm um comportamento semelhante mas em nenhum caso há convergência, dentro do número máximo de iterações imposto. Claro que para  $n = 12$  ficou mais perto. Neste caso, valia a pena aumentar o número máximo de iterações para ver se realmente o método consegue ultrapassar a tolerância exigida.

Núcleo B2, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=10

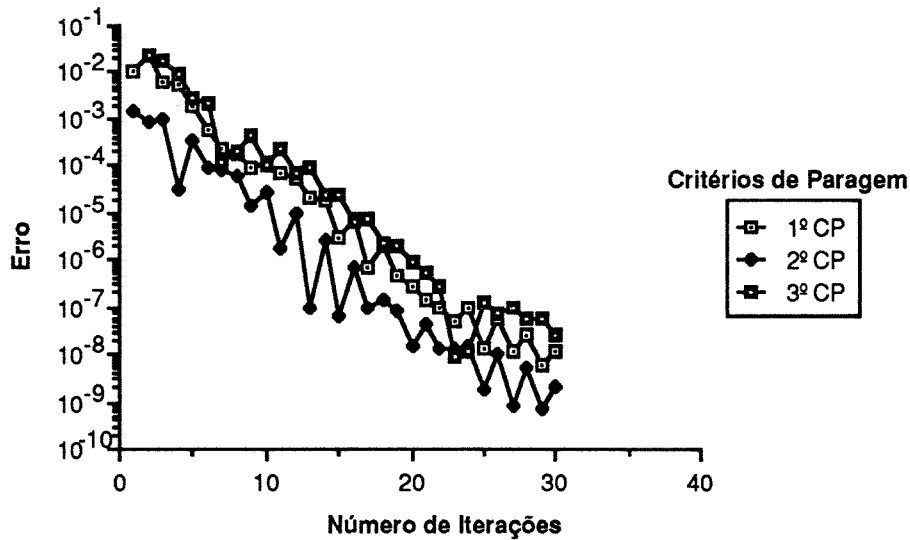


Núcleo B2, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=12

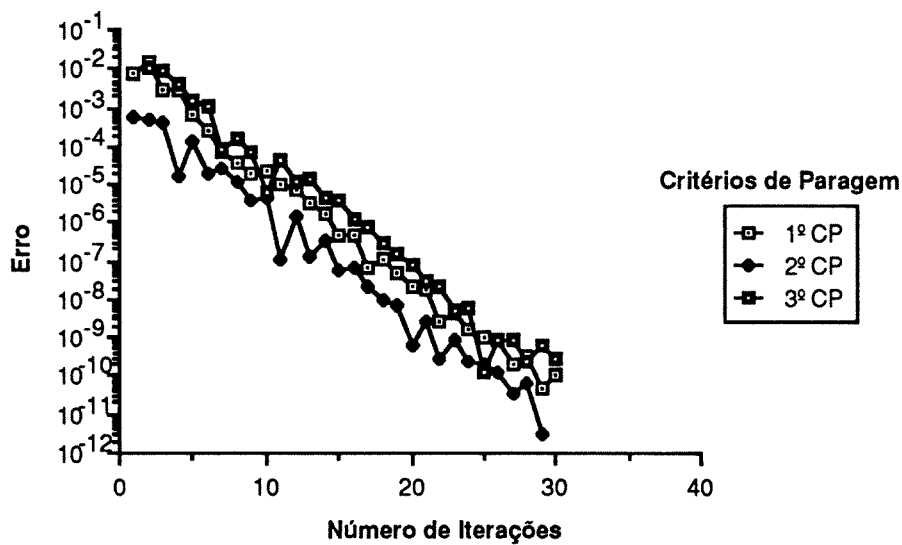


Os três critérios têm um comportamento semelhante mas em nenhum caso há convergência, dentro do número máximo de iterações imposto. Claro que para  $n = 12$  ficou mais perto. Neste caso, valia a pena aumentar o número máximo de iterações para ver se realmente o método consegue ultrapassar a tolerância exigida.

Núcleo B2, Aprox. Sloan, 3<sup>o</sup>vp, n=10



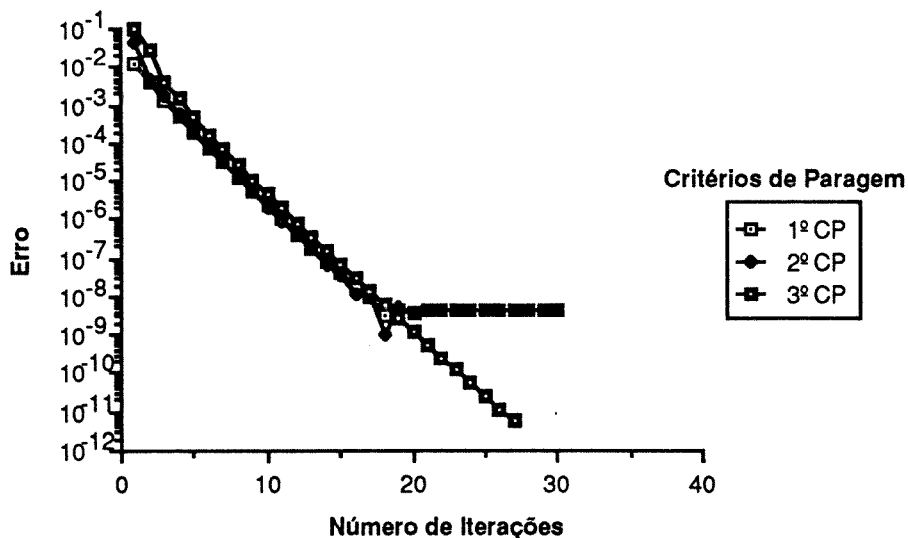
Núcleo B2, Aprox. Sloan, 3<sup>o</sup>vp, n=12



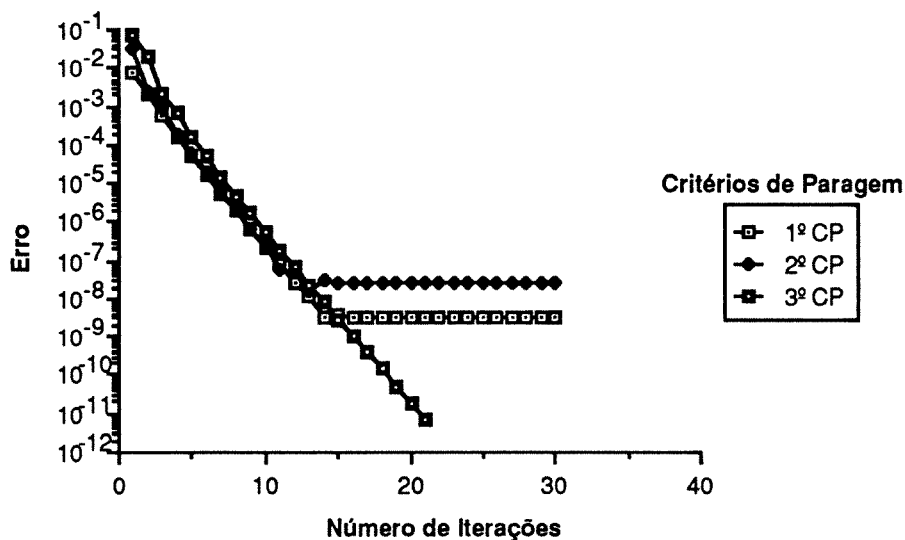
Os três critérios de paragem têm um comportamento semelhante só é ultrapassada a tolerância no 2<sup>o</sup> critério para  $n = 12$ . Claro que para  $n = 12$  ficou mais perto.

Note-se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo zigzague nos valores dos erros obtidos pelos três critérios de paragem.

Núcleo C, Aprox. Nyström, 1<sup>av</sup>, n=10

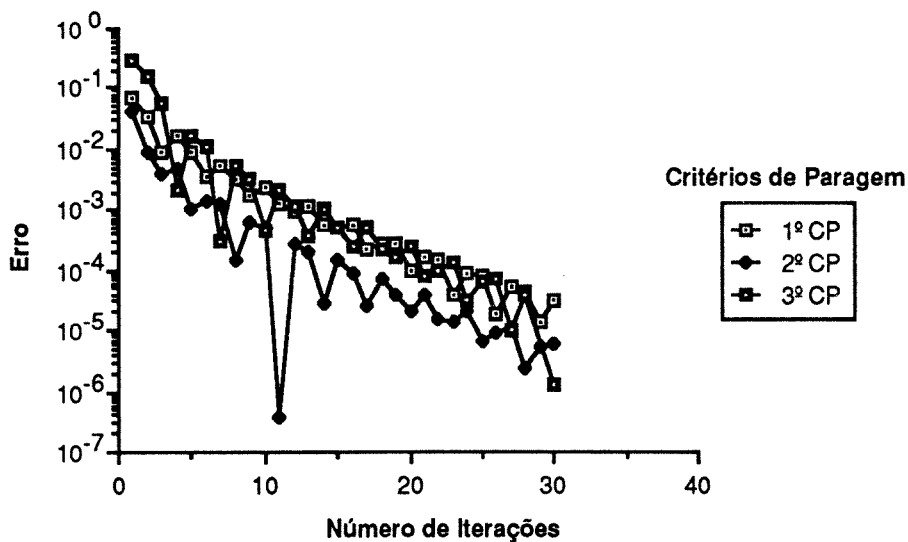


Núcleo C, Aprox. Nyström, 1<sup>av</sup>, n=12

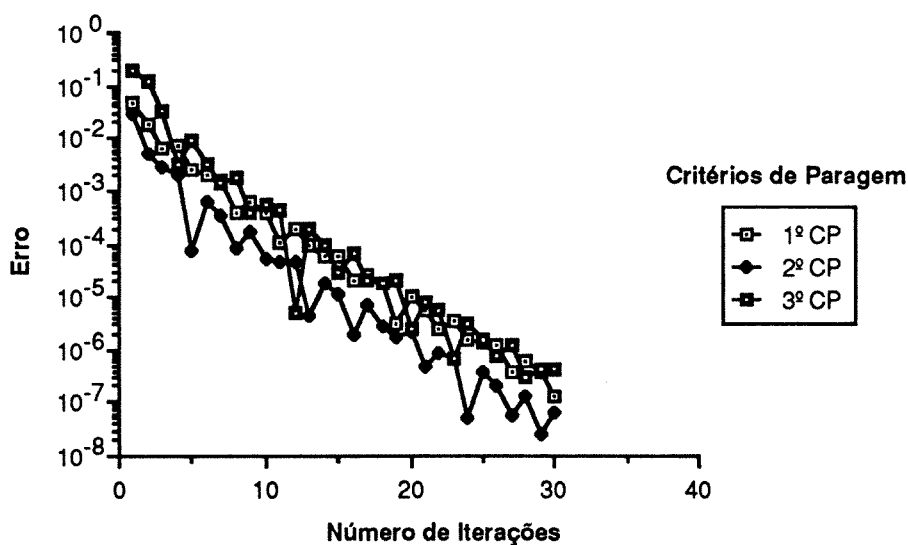


Quer para  $n = 10$  quer para  $n = 12$  os dois primeiros critérios de paragem chegam sempre ao mesmo valor para o erro, embora no segundo caso estes valores estejam mais perto do valor da tolerância. Isto significa que o processo iterativo não conseguiu evoluir. Por isso, neste caso, não é conveniente aumentar o número máximo de iterações, mas sim o valor de  $n$ . Em ambos os casos o 3º critério conseguiu ultrapassar a tolerância imposta em menos de 30 iterações, o que seria de esperar tendo em consideração que os valores de  $LK$  obtidos a partir da iteração 20 e 14, respectivamente, são praticamente constantes.

Núcleo C, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=10

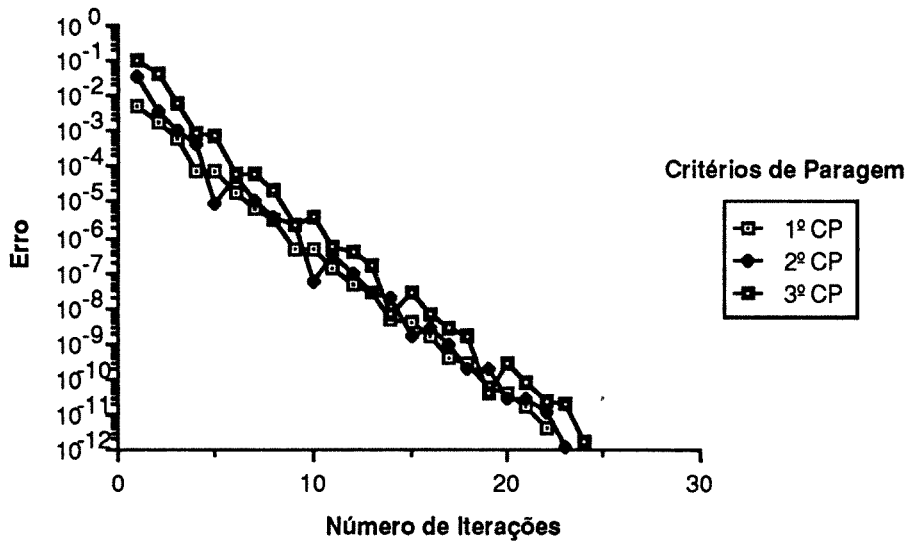


Núcleo C, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=12

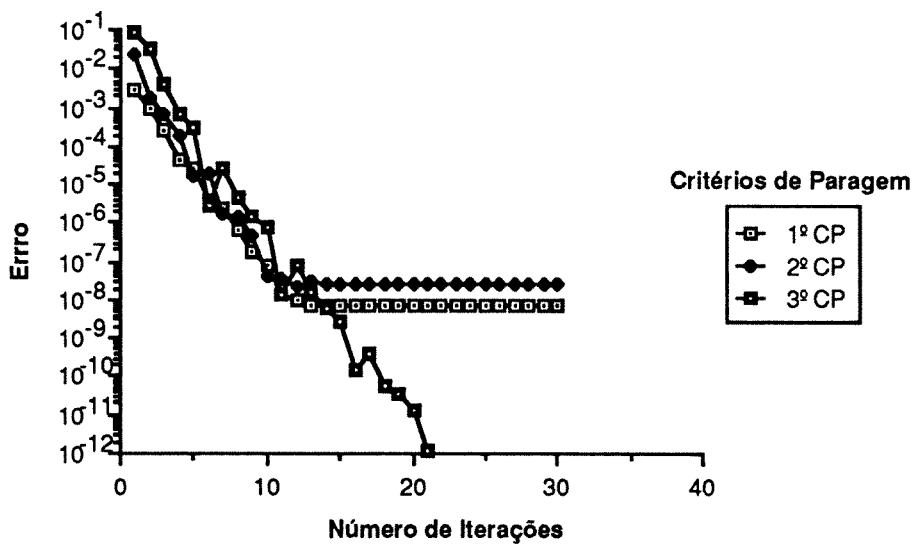


Os três critérios têm um comportamento semelhante mas em nenhum caso há convergência, dentro do número máximo de iterações previamente imposto. Claro que para  $n = 12$  ficou mais perto. Neste caso, valia a pena aumentar o número máximo de iterações para ver se realmente o método consegue ultrapassar a tolerância exigida.

Núcleo C, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=10

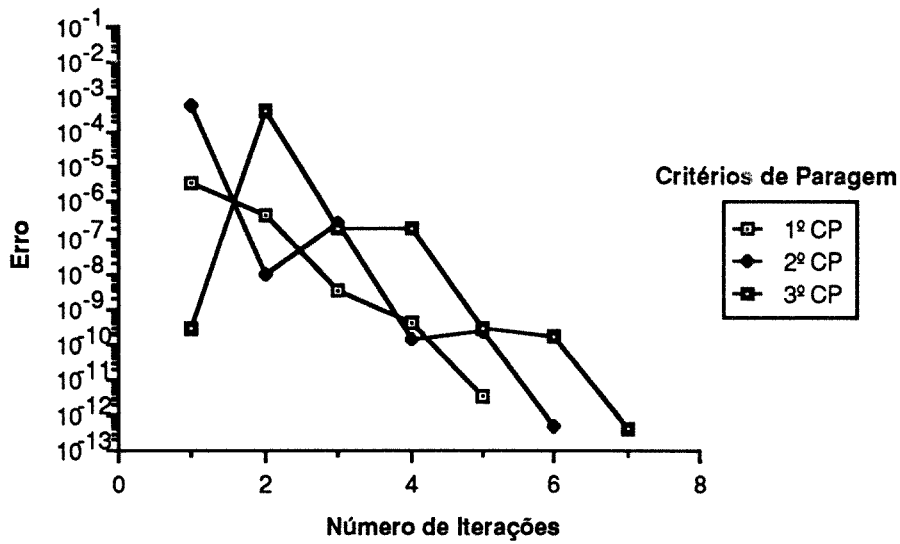


Núcleo C, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=12

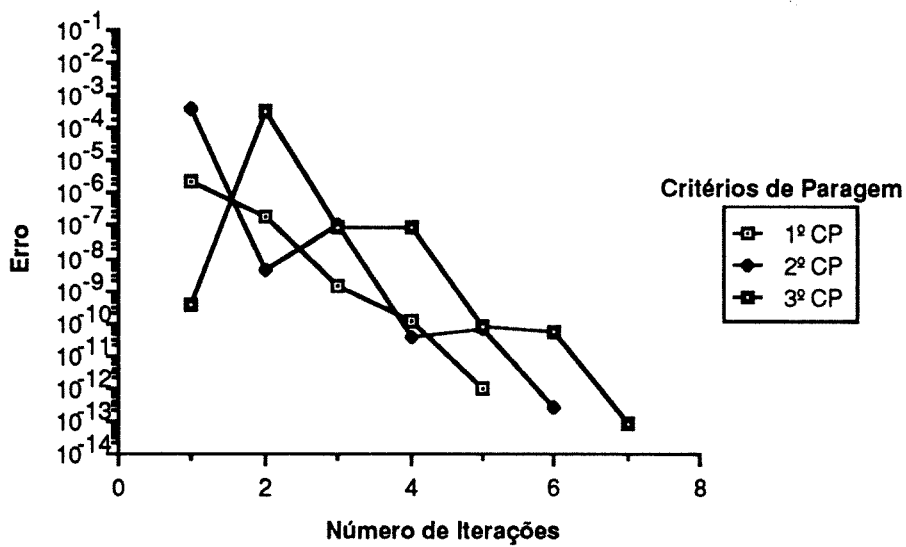


No caso de  $n = 10$  os três critérios de paragem conseguem obter um erro inferior à tolerância imposta antes de atingirem o número máximo de iterações. Mas para  $n = 12$  isso não acontece, o que é estranho pois como o valor de  $n$  é maior, a discretização é mais fina, e ainda deveria dar melhores resultados, tal como aconteceu com todos os outros exemplos.

Núcleo D, Aprox. Sloan, 1<sup>o</sup>vp, n=10

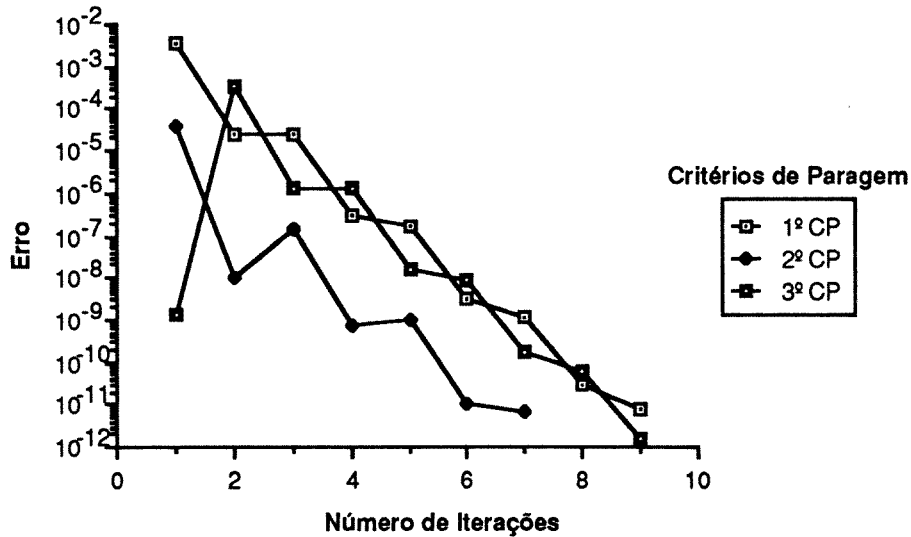


Núcleo D, Aprox. Sloan, 1<sup>o</sup>vp, n=12

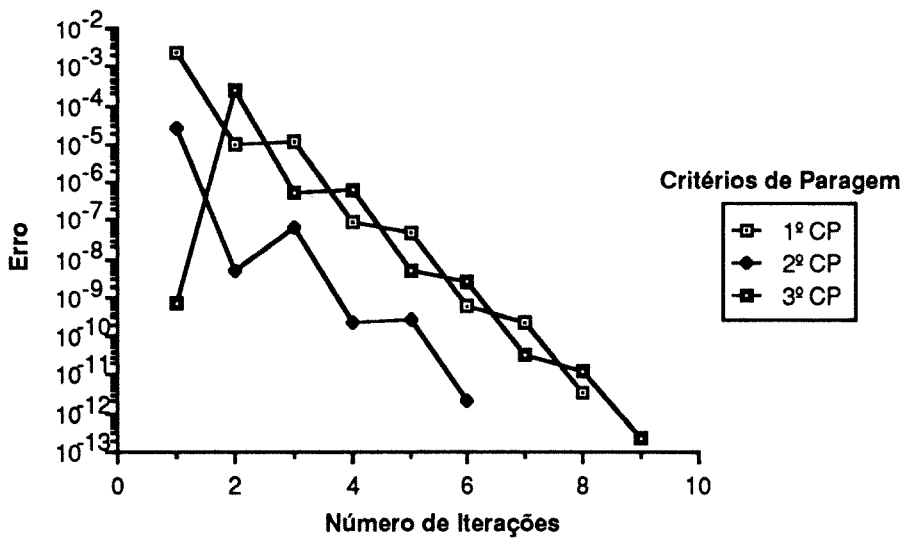


Os três critérios de paragem atingiram um erro inferior à tolerância imposta muito rapidamente : 5, 6 e 7 iterações respectivamente, quer para  $n = 10$  quer para  $n = 12$ .

Núcleo D, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=10

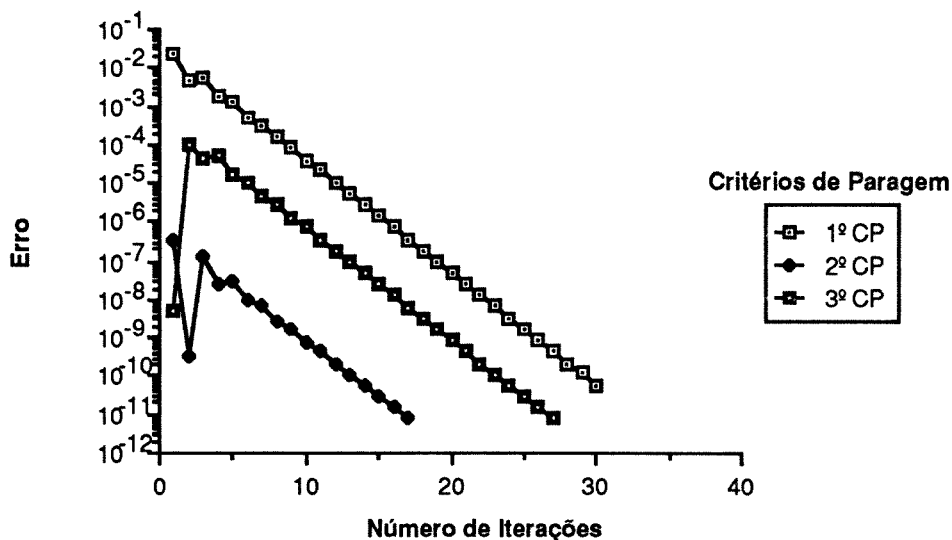


Núcleo D, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=12

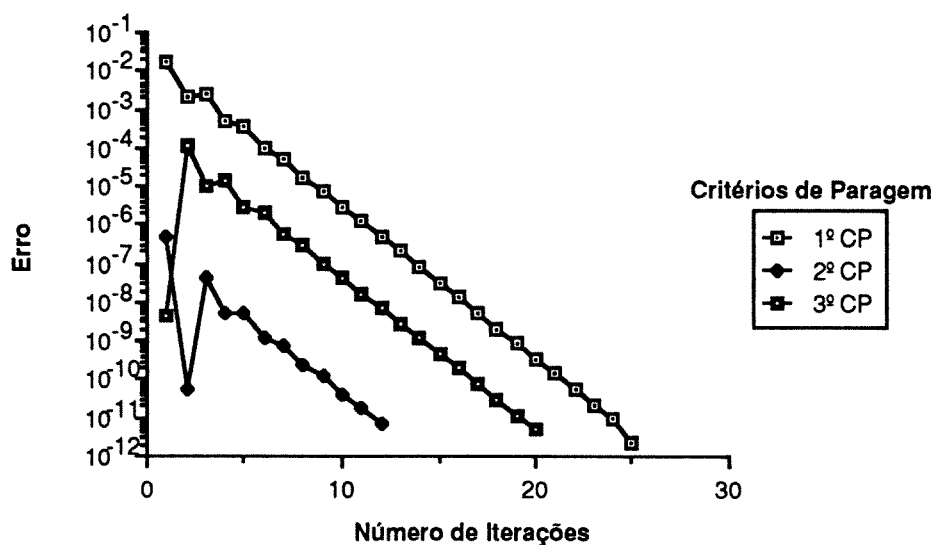


Nos três critérios de paragem a tolerância exigida é ultrapassada muito rapidamente. Mas se compararmos com o exemplo anterior podemos ver que, neste caso, são precisas mais algumas iterações para conseguir a mesma precisão. Isto é explicável pelo facto de o segundo valor próprio ser mais pequeno do que o primeiro.

Núcleo D, Aprox. Sloan, 3<sup>o</sup>vp,  $n=10$

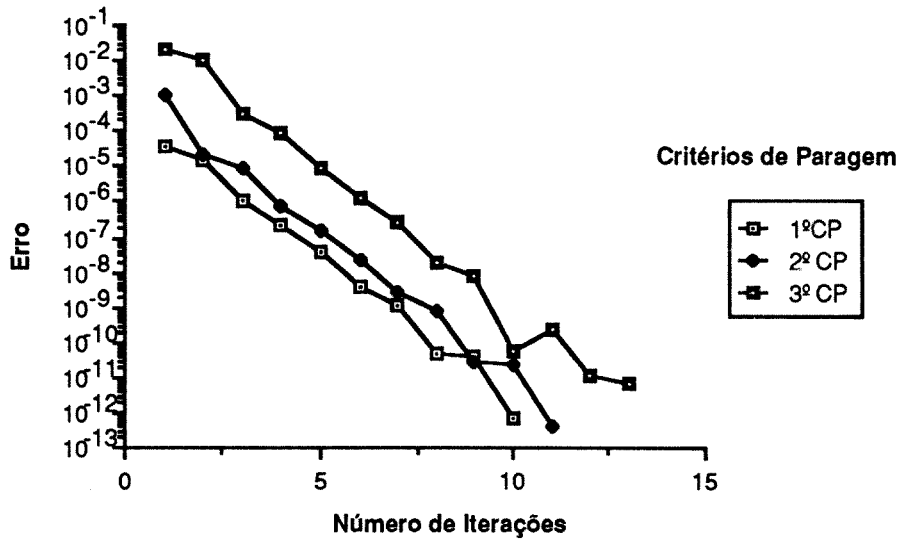


Núcleo D, Aprox. Sloan, 3<sup>o</sup>vp,  $n=12$

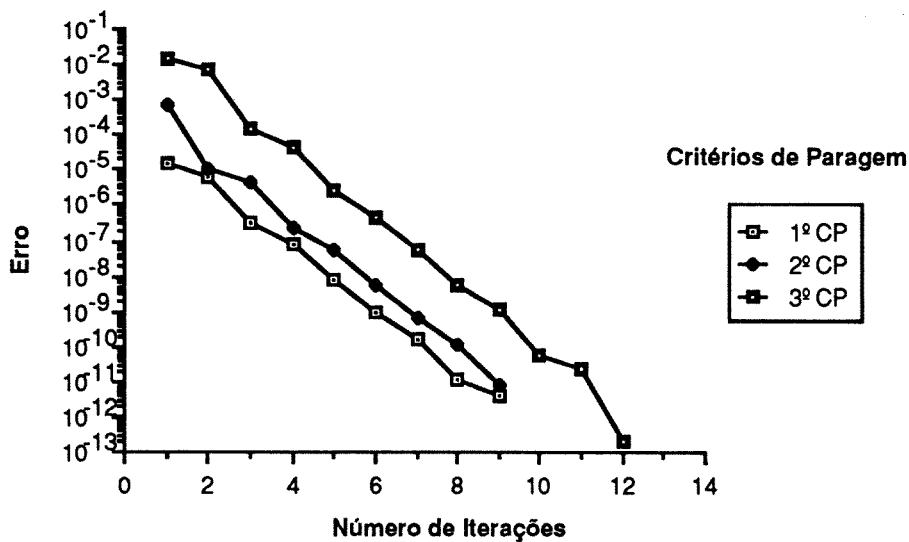


Nos três critérios de paragem a tolerância exigida é obtida em todos os casos, no entanto, o 2º critério, é o mais rápido. Comparando com os dois últimos exemplos podemos observar que, neste caso, são precisas mais iterações para conseguir a mesma precisão. Isto é explicável pelo facto deste exemplo ser relativo ao terceiro valor próprio, logo mais pequeno do que os anteriores.

Núcleo E, Aprox. Nyström, 1<sup>o</sup>vp, n=10

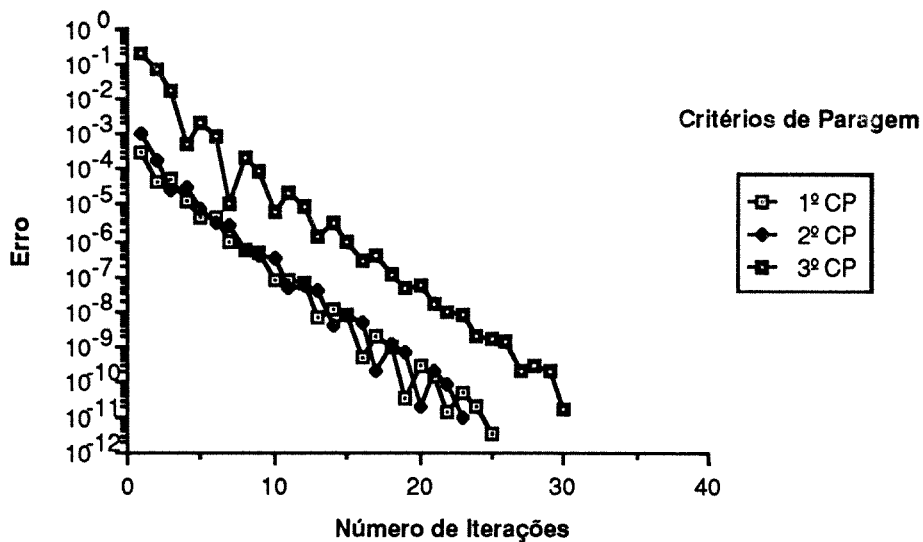


Núcleo E, Aprox. Nyström, 1<sup>o</sup>vp, n=12

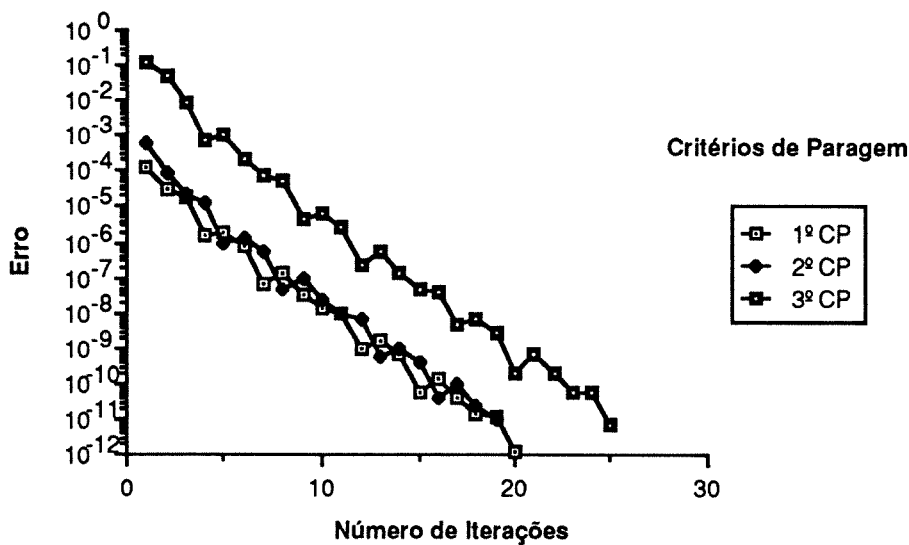


Nos dois gráficos o 1º e 2º critérios de paragem têm um comportamento semelhante. O 3º obteve erros maiores e, conseqüentemente, precisou de mais iterações, sem, no entanto, ter atingido metade do limite das iterações para ultrapassar a tolerância pretendida. Saliente - se o facto de para  $n = 12$  ser necessário um menor número de iterações do que para  $n = 10$ .

### Núcleo E, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=10

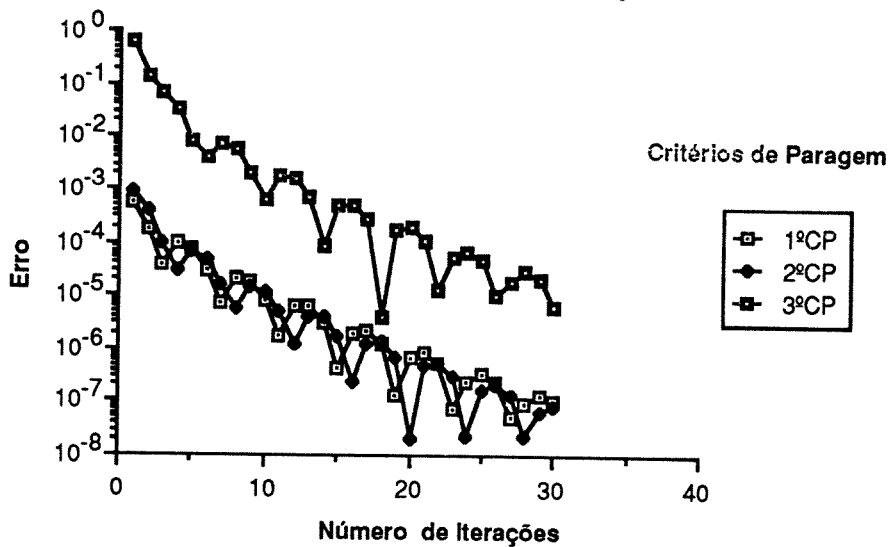


### Núcleo E, Aprox. Nyström, 2<sup>o</sup>vp, n=12

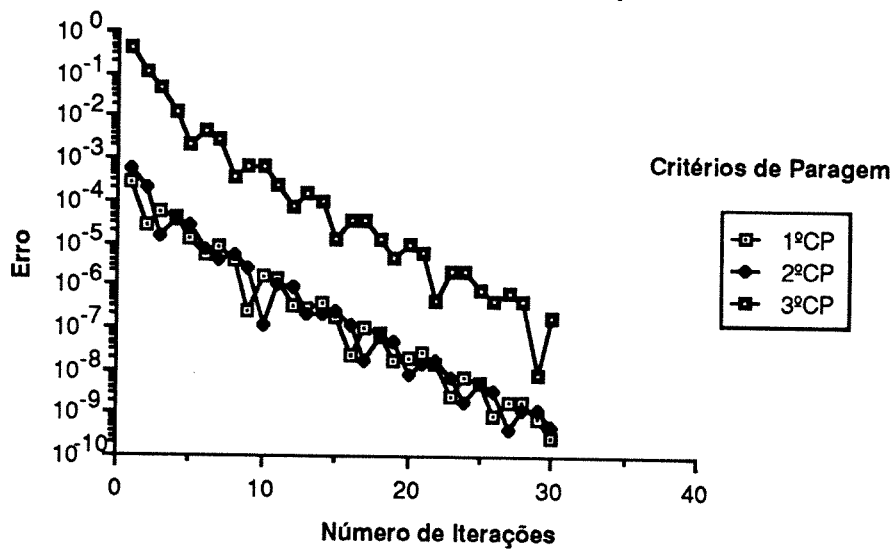


Para  $n = 10$  os erros obtidos pelos dois primeiros critérios de paragem ultrapassam a tolerância imposta ao fim de 25 e 23 iterações, respectivamente. O 3<sup>o</sup> critério, ao fim de 30 iterações, não consegue ainda atingir essa mesma tolerância, mas bastaria mais uma iteração para que isso acontecesse. Para  $n = 12$  os critérios conseguem um erro menor do que a tolerância imposta em menos de 30 iterações sendo, no entanto, o 3<sup>o</sup> critério mais lento. Comparando os dois gráficos podemos concluir que para  $n = 12$  os resultados são melhores, pois até o 3<sup>o</sup> critério ultrapassa a tolerância exigida. Note - se que os valores do erro oscilam entre cada dois iterados.

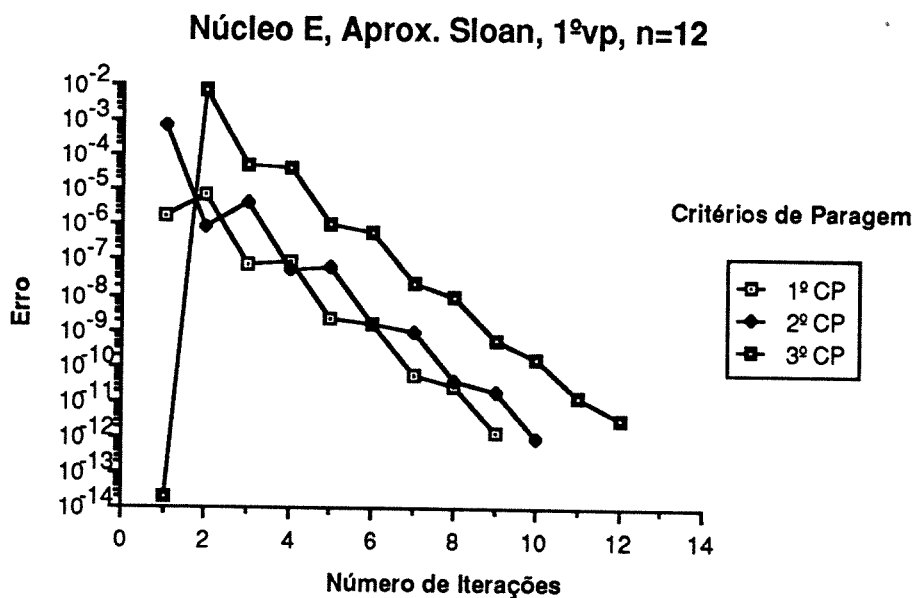
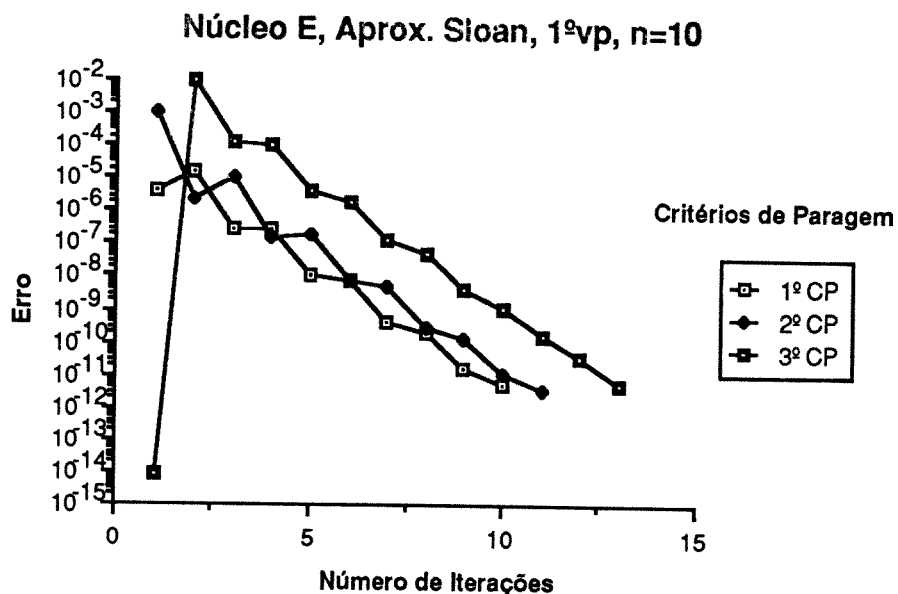
Núcleo E, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=10



Núcleo E, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=12

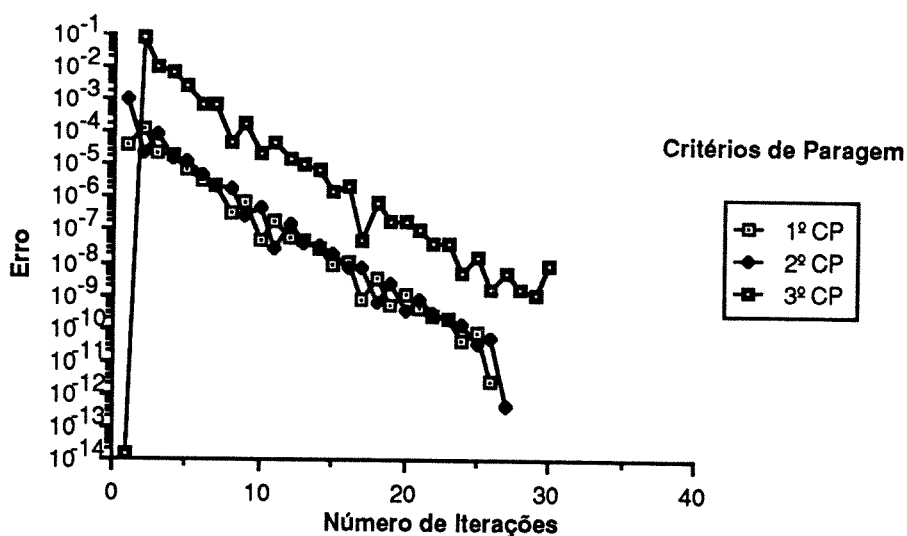


Nos dois gráficos o 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> critérios de paragem têm um comportamento semelhante estando o 3<sup>o</sup> ligeiramente mais distanciado. Nenhum dos três atinge a tolerância exigida, no entanto, o caso de  $n = 12$  fica mais perto. Note-se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo zigzague nos valores dos erros obtidos pelos três critérios de paragem.

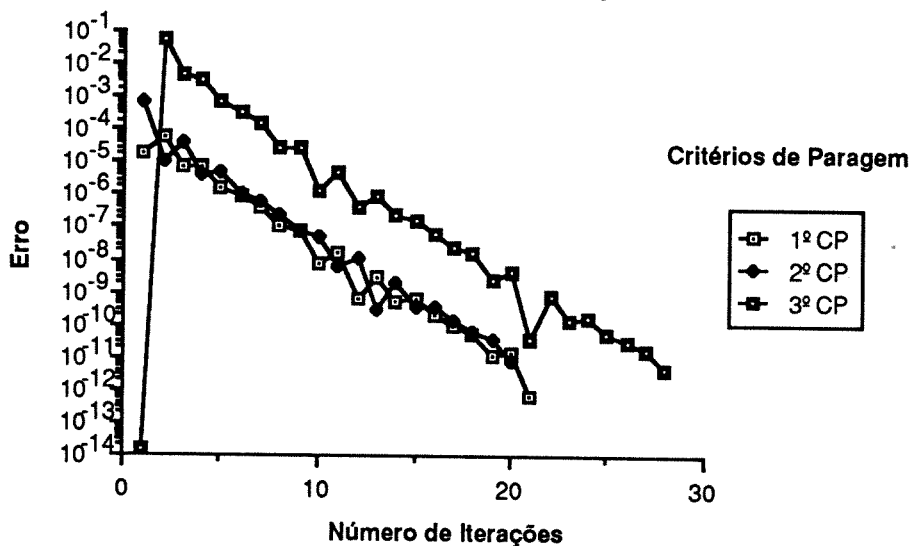


Os dois casos são muito semelhantes, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ . Note-se ainda que o 3<sup>o</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

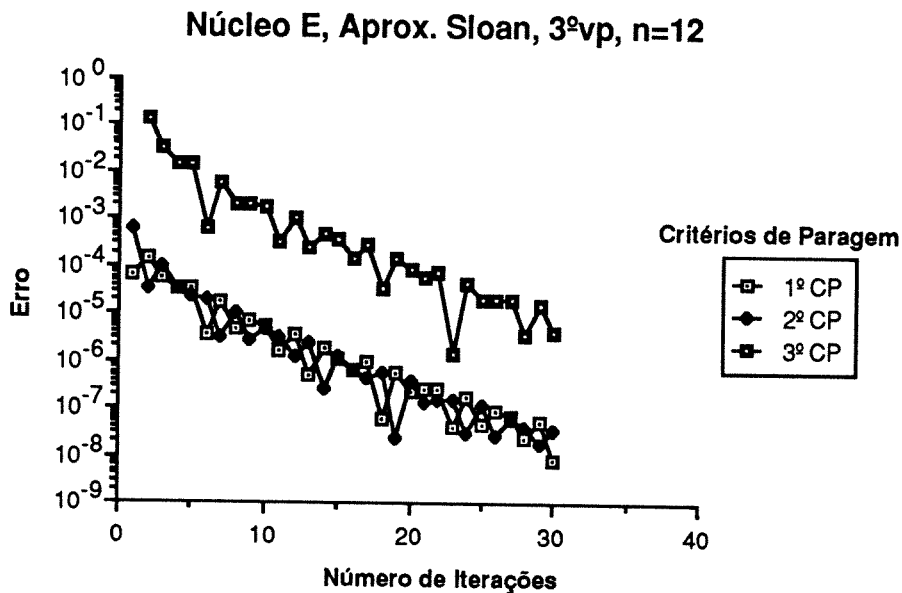
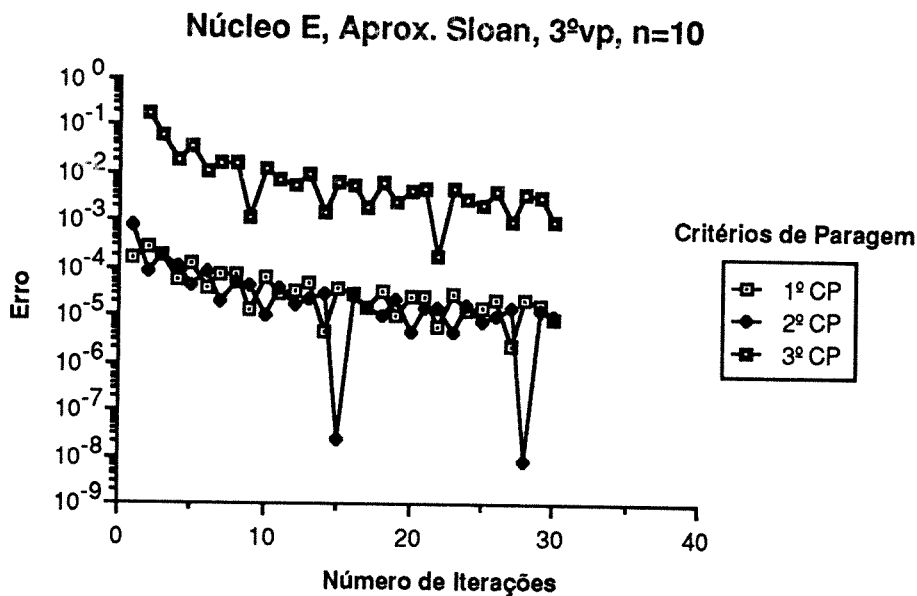
Núcleo E, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=10



Núcleo E, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=12

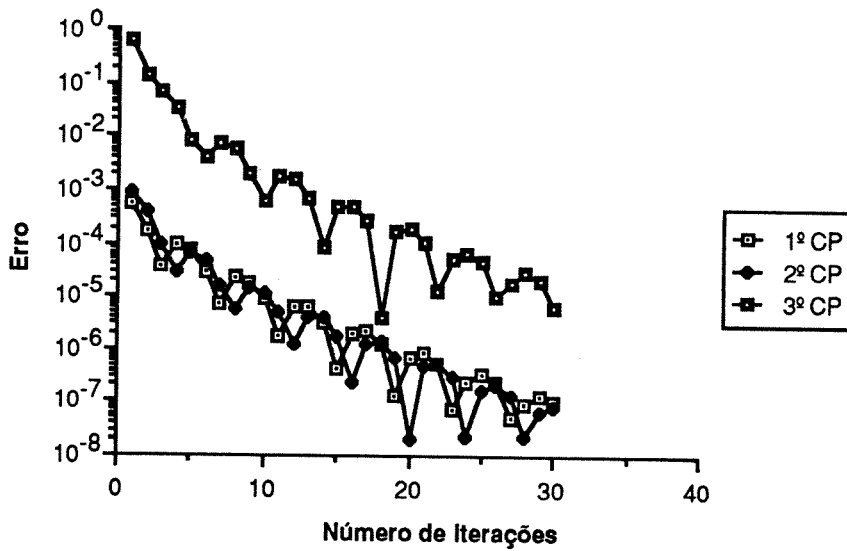


Os dois casos têm um comportamento semelhante, apenas para  $n = 12$  a tolerância é ultrapassada mais rapidamente do que para  $n = 10$ ; embora o 3<sup>o</sup> critério não a tenha atingido para  $n = 10$ , para  $n = 12$  já conseguiu. Note-se ainda que o 3<sup>o</sup> critério na primeira iteração tem um erro muito pequeno o que não é significativo se atendermos ao facto deste critério ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos. Assim, o que aconteceu foi que a primeira iteração deu um valor muito próximo do inicial e daí que o erro seja tão pequeno.

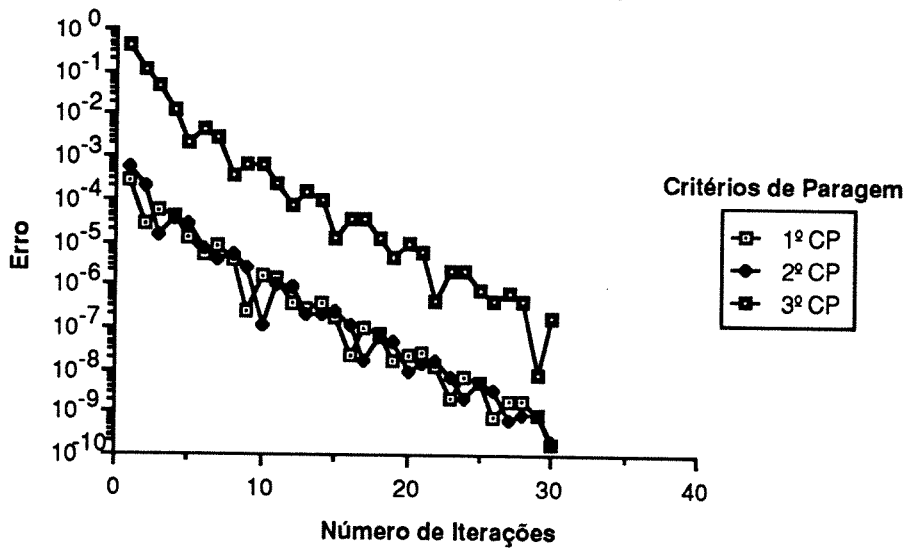


Em qualquer dos três critérios de paragem o valor do erro fica muito longe da tolerância pedida, ao fim do número máximo de iterações considerado. Este seria um exemplo para o qual se devia aumentar o valor de  $n$  e não o número máximo de iterações. Note - se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo zigzague nos valores dos erros obtidos pelos critérios de paragem.

Núcleo F, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=10

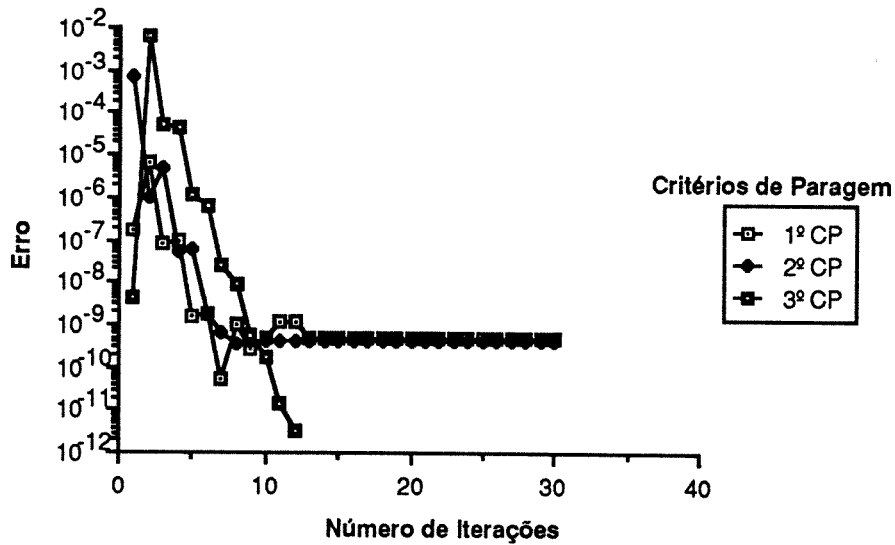


Núcleo F, Aprox. Nyström, 3<sup>o</sup>vp, n=12



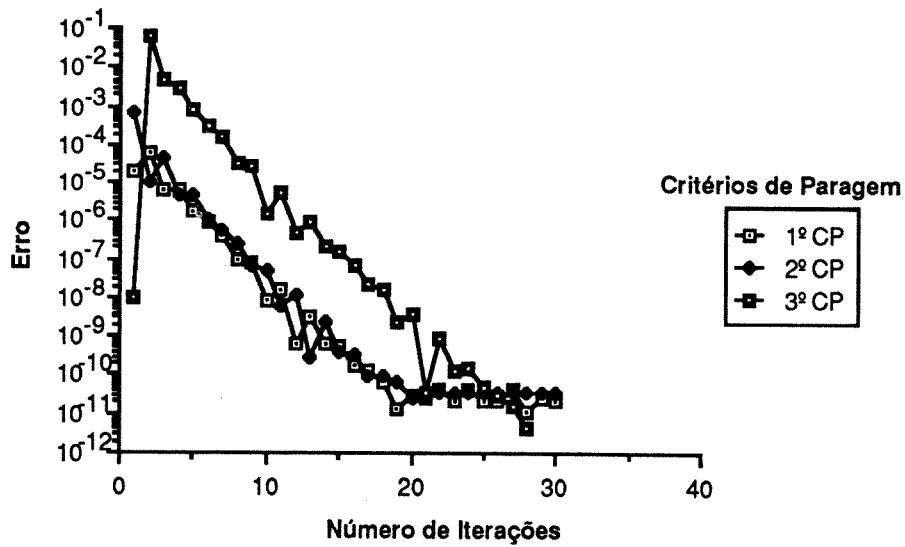
Nos dois gráficos o 1º e 2º critérios de paragem têm um comportamento semelhante estando o 3º ligeiramente mais distanciado. Nenhum dos três atinge a tolerância exigida, no entanto, o caso de  $n = 12$  fica mais perto. Note-se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo ziguezague nos valores do erro obtidos pelos três critérios de paragem.

Núcleo F, Aprox. Sloan, 1<sup>o</sup>vp, n=12

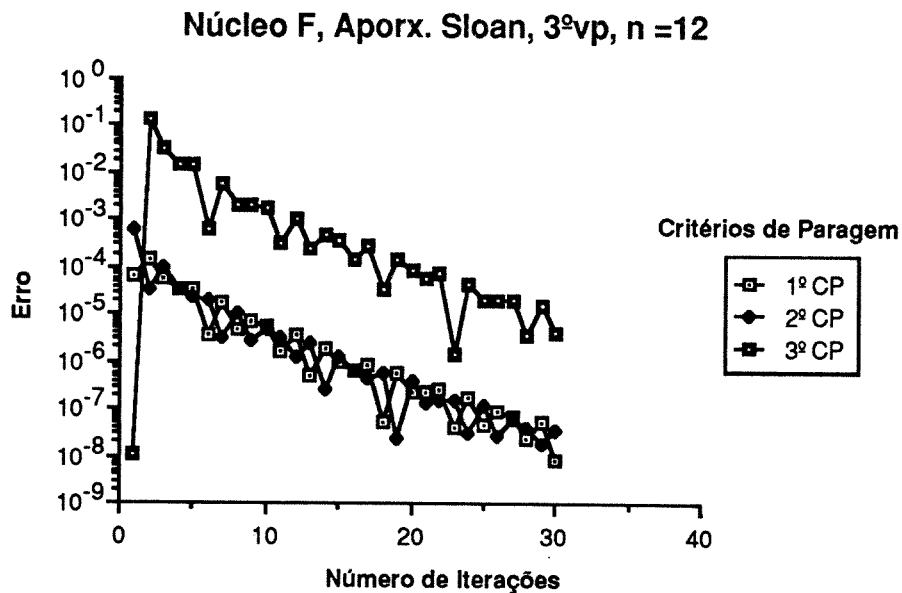


É um exemplo particular onde a tolerância exigida deveria ter sido  $1 \times 10^{-8}$ . Este valor foi ultrapassado ao fim de cinco iterações para os dois primeiros critérios e ao fim de sete para o 3º critério de paragem. A partir da iteração quatorze o processo iterativo não conseguiu evoluir mais. Consequentemente, os erros obtidos pelos dois primeiros critérios de paragem mantiveram-se constantes.

### Núcleo F, Aprox. Sloan, 2<sup>o</sup>vp, n=12



Os dois primeiros critérios de paragem não conseguiram obter um erro inferior à tolerância pretendida, em menos de 30 iterações. O 3º critério de paragem apenas o conseguiu ao fim de 28 iterações.



Nenhum dos três critérios de paragem consegue obter um valor para o erro superior à tolerância imposta, dentro do limite de iterações considerado. Os dois primeiros critérios de paragem têm um comportamento semelhante, enquanto que o 3º critério se encontra mais distanciado. Note-se que os valores oscilam entre cada dois iterados, isto é, há um certo zigzague nos valores dos erros obtidos pelos três critérios de paragem.

Analisemos, em seguida, as diferenças entre : o valor próprio teórico, quando conhecido, o valor próprio da matriz TAUM :  $\lambda_{100}$  , valor próprio da matriz TAUN : LN , e o valor próprio obtido na última iteração : LK .

	A, Nyst., 1 <sup>o</sup> vp, n=10	A, Nyst., 1 <sup>o</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.101 321 183 642 3	0.101 321 183 642 3
λ 100	0.101 329 686 604 2	0.101 329 686 604 2
LN	0.102 356 288 510 9	0.102 012 706 774 2
LK	0.101 329 686 604 3	0.101 329 686 604 3

	A, Nyst., 2 <sup>o</sup> vp, n=10	A, Nyst., 2 <sup>o</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.025 330 295 910 58	0.025 330 295 910 58
λ 100	0.025 338 800 157 02	0.025 338 800 157 02
LN	0.026 384 667 192 63	0.026 030 383 407 3
LK	0.025 338 800 156 91	0.025 338 800 157 08

	A, Nyst., 3 <sup>o</sup> vp, n=10	A, Nyst., 3 <sup>o</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.011 257 909 293 59	0.011 257 909 293 59
λ 100	0.011 266 415 681 65	0.011 266 415 681 65
LN	0.012 345 679 012 34	0.011 972 649 337 16
LK	0.011 266 415 680 91	0.011 266 415 681 79

	A, Sloan, 1 <sup>o</sup> vp, n=10	A, Sloan, 1 <sup>o</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.101 321 183 642 3	0.101 321 183 642 3
λ 100	0.101 312 681 536 6	0.101 312 681 536 6
LN	0.100 298 675 342 2	0.100 635 296 305 9
LK	0.101 312 681 536 5	0.101 312 681 536 7

	A, Sloan, 2 <sup>o</sup> vp, n=10	A, Sloan, 2 <sup>o</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.025 330 295 910 58	0.025 330 295 910 58
λ 100	0.025 321 795 089 48	0.025 321 795 089 48
LN	0.024 327 054 023 91	0.024 652 972 938 98
LK	0.025 321 795 089 42	0.025 321 795 090 4

	A, Sloan, 3 <sup>o</sup> vp, n=10	A, Sloan, 3 <sup>o</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.011 257 909 293 59	0.011 257 909 293 59
λ 100	0.011 249 410 614 11	0.011 249 410 614 11
LN	0.010 288 065 843 62	0.010 595 238 868 84
LK	0.011 249 410 619 34	0.011 249 410 614 08

Observando os valores obtidos pelos dois métodos de discretização implementados : Sloan e Nyström, conclui - se que o erro absoluto entre o valor próprio teórico e  $\lambda_{100}$  é da ordem de  $8,5 \times 10^{-6}$  em todos os seis quadros, ou seja, que têm 5 casas decimais comuns. Isso significa que o erro de discretização é dessa ordem. LN é uma aproximação grosseira pois só coincide com  $\lambda_{100}$  em 2 ou 3 casas decimais. O número de casas decimais comuns, entre LK e  $\lambda_{100}$ , varia de 10 a 13, o que demonstra que o processo iterativo da determinação de LK está a tender para  $\lambda_{100}$ .

Comparando os casos de  $n = 10$  e  $n = 12$ , nota - se que os valores de LK são melhores no segundo caso, excepto para o método de Sloan segundo valor próprio, mas mesmo aí a diferença não é significativa. Também os valores iniciais : LN, não diferem muito.

	B1, Nyst., 1 <sup>ª</sup> vp, n=10	B1, Nyst., 1 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.098 818 092 127 42	0.098 818 092 127 42
λ 100	0.098 826 595 085 68	0.098 826 595 085 68
LN	0.099 853 142 526 14	0.099 509 591 080 87
LK	0.098 826 595 085 75	0.098 826 595 085 75

	B1, Nyst., 2 <sup>ª</sup> vp, n=10	B1, Nyst., 2 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.025 170 899 328 5	0.025 170 899 328 5
λ 100	0.025 179 403 571 32	0.025 179 403 571 32
LN	0.026 225 211 282 19	0.025 870 961 214 89
LK	0.025 179 403 571 2	0.025 179 403 571 38

	B1, Nyst., 3 <sup>ª</sup> vp, n=10	B1, Nyst., 3 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.011 226 313 089 997	0.011 226 313 089 997
λ 100	0.011 234 819 474 41	0.011 234 819 474 41
LN	0.012 314 014 656 04	0.011 941 024 995 72
LK	0.011 234 819 473 64	0.011 234 481 947 455

	B1, Sloan, 1 <sup>ª</sup> vp, n=10	B1, Sloan, 1 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.098 818 092 127 42	0.098 818 092 127 42
λ 100	0.098 810 010 050 67	0.098 810 010 050 67
LN	0.097 845 396 177 85	0.098 165 773 392 04
LK	0.098 810 010 050 57	0.098 810 010 050 69

	B1, Sloan, 2 <sup>ª</sup> vp, n=10	B1, Sloan, 2 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.025 170 899 328 5	0.025 170 899 328 5
λ 100	0.025 162 505 443 12	0.025 162 505 443 12
LN	0.024 179 620 832 6	0.024 501 792 903 01
LK	0.025 162 505 443 07	0.025 162 505 443 86

	B1, Sloan, 3 <sup>ª</sup> vp, n=10	B1, Sloan, 3 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.011 226 313 089 997	0.011 226 313 089 997
λ 100	0.011 217 862 064 23	0.011 217 862 064 23
LN	0.010 261 335 679 03	0.010 567 080 651 18
LK	0.010 112 178 620 688 2	0.011 217 862 064 21

Observando os valores obtidos pelos dois métodos de discretização implementados : Sloan e Nyström, conclui - se que o erro absoluto entre o valor próprio teórico e  $\lambda_{100}$  é da ordem de  $8,5 \times 10^{-6}$  em todos os seis quadros, ou seja, que têm 5 casas decimais comuns. Isso significa que o erro de discretização é dessa ordem. LN é uma aproximação grosseira pois só coincide com  $\lambda_{100}$  em 2 ou 3 casas decimais. O número de casas decimais comuns, entre LK e  $\lambda_{100}$ , varia de 11 a 13, o que demonstra que o processo iterativo da determinação de LK está a tender para  $\lambda_{100}$ , excepto para o 3º valor próprio que no método de Nyström, para  $n = 12$ , apenas coincidem em 6 casas, e no método de Sloan, para  $n = 10$ , apenas coincidem em 2 casas decimais.

Comparando os casos de  $n = 10$  e  $n = 12$ , nota - se que os valores de LK são melhores no segundo caso. Os valores iniciais : LN, não diferem muito.

	B2, Nyst., 1 <sup>ª</sup> vp, n=10	B2, Nyst., 1 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.182 033 967 529 3	0.182 033 967 529 3
λ 100	0.182 203 997 784 96	0.182 203 997 784 96
LN	0.202 313 114 782 2	0.195 674 807 115 2
LK	0.182 203 997 8	0.182 203 997 856 6

	B2, Nyst., 2 <sup>ª</sup> vp, n=10	B2, Nyst., 2 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.143 391 360 065	0.143 391 360 065
λ 100	0.143 561 416 055 8	0.143 561 416 055 8
LN	0.164 019 440 562 6	0.157 192 522 280 8
LK	0.143 561 417 444 4	0.143 561 416 047 1

	B2, Nyst., 3 <sup>ª</sup> vp, n=10	B2, Nyst., 3 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.105 917 370 688 8	0.105 917 370 688 8
λ 100	0.106 087 469 477 4	0.106 087 469 477 4
LN	0.127 147 579 348 9	0.119 992 264 617 3
LK	0.106 087 432 633	0.106 087 469 723 3

	B2, Sloan, 1 <sup>ª</sup> vp, n=10	B2, Sloan, 1 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.182 033 967 529 3	0.182 033 967 529 3
λ 100	0.182 173 318 338 4	0.182 173 318 338 4
LN	0.196 991 307 322 9	0.192 437 426 401 4
LK	0.182 173 282 595	0.182 173 318 074 1

	B2, Sloan, 2 <sup>ª</sup> vp, n=10	B2, Sloan, 2 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.143 391 360 065	0.143 391 360 065
λ 100	0.143 464 935 331 4	0.143 464 935 331 4
LN	0.149 739 341 584 3	0.148 140 573 753 5
LK	0.143 464 969 347 1	0.143 464 935 575 2

	B2, Sloan, 3 <sup>ª</sup> vp, n=10	B2, Sloan, 3 <sup>ª</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.105 917 370 688 8	0.105 917 370 688 8
λ 100	0.105 927 177 662 6	0.105 927 177 662 6
LN	0.104 437 469 703 6	0.105 384 543 065 3
LK	0.105 927 179 840 4	0.105 927 177 688 1

Observando os valores obtidos pelos dois métodos de discretização implementados : Sloan e Nyström, conclui-se que o erro absoluto entre o valor próprio teórico e  $\lambda_{100}$  é da ordem de  $1,7 \times 10^{-4}$  nos três primeiros quadros e de  $1,4 \times 10^{-4}$ ,  $7,3 \times 10^{-5}$  e  $1,0 \times 10^{-5}$ , respectivamente nos três restantes, ou seja, que têm 3 ou 4 casas decimais comuns. Isso significa que o erro de discretização é dessa ordem. LN é uma aproximação grosseira pois só coincide com  $\lambda_{100}$  em 0 ou 1 casa decimal. O número de casas decimais comuns, entre LK e  $\lambda_{100}$ , varia de 6 a 10, o que demonstra que o processo iterativo da determinação de LK está a tender para  $\lambda_{100}$ .

Comparando os casos de  $n = 10$  e  $n = 12$ , nota-se que os valores de LK são melhores no segundo caso. Também os valores iniciais : LN, não diferem muito.

	E, Nyst., 1 <sup>º</sup> vp, n=10	E, Nyst., 1 <sup>º</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.101 321 183 642 3	0.101 321 183 642 3
λ 100	0.101 329 686 604 2	0.101 329 686 604 2
LN	0.102 356 288 510 9	0.102 012 706 774 2
LK	0.101 329 686 604 2	0.101 329 686 604 2

	E, Nyst., 2 <sup>º</sup> vp, n=10	E, Nyst., 2 <sup>º</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.011 257 909 293 59	0.011 257 909 293 59
λ 100	0.011 266 415 681 65	0.011 266 415 681 65
LN	0.012 345 679 012 34	0.011 972 649 337 16
LK	0.011 266 415 680 9	0.011 266 415 681 79

	E, Nyst., 3 <sup>º</sup> vp, n=10	E, Nyst., 3 <sup>º</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.004 052 847 345 693	0.004 052 847 345 693
λ 100	0.004 061 360 592 71	0.004 061 360 592 71
LN	0.005 259 531 453 832	0.004 817 888 415 65
LK	0.004 061 446 721 678	0.004 061 360 116 228

	E, Sloan, 1 <sup>º</sup> vp, n=10	E, Sloan, 1 <sup>º</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.101 321 183 642 3	0.101 321 183 642 3
λ 100	0.101 312 681 536 7	0.101 312 681 536 7
LN	0.100 298 675 342 2	0.100 635 296 305 9
LK	0.101 312 681 536 6	0.101 312 681 536 7

	E, Sloan, 2 <sup>º</sup> vp, n=10	E, Sloan, 2 <sup>º</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.011 257 909 293 59	0.011 257 909 293 59
λ 100	0.011 249 410 614 15	0.011 249 410 614 15
LN	0.010 288 065 843 62	0.010 595 238 868 84
LK	0.011 249 410 619 38	0.011 249 410 614 11

	E, Sloan, 3 <sup>º</sup> vp, n=10	E, Sloan, 3 <sup>º</sup> vp, n=12
VP Teórico	0.004 052 847 345 693	0.004 052 847 345 693
λ 100	0.004 044 355 525 2	0.004 044 355 525 2
LN	0.003 201 918 285 108	0.003 440 477 947 331
LK	0.004 054 137 564 577	0.004 044 319 965 985

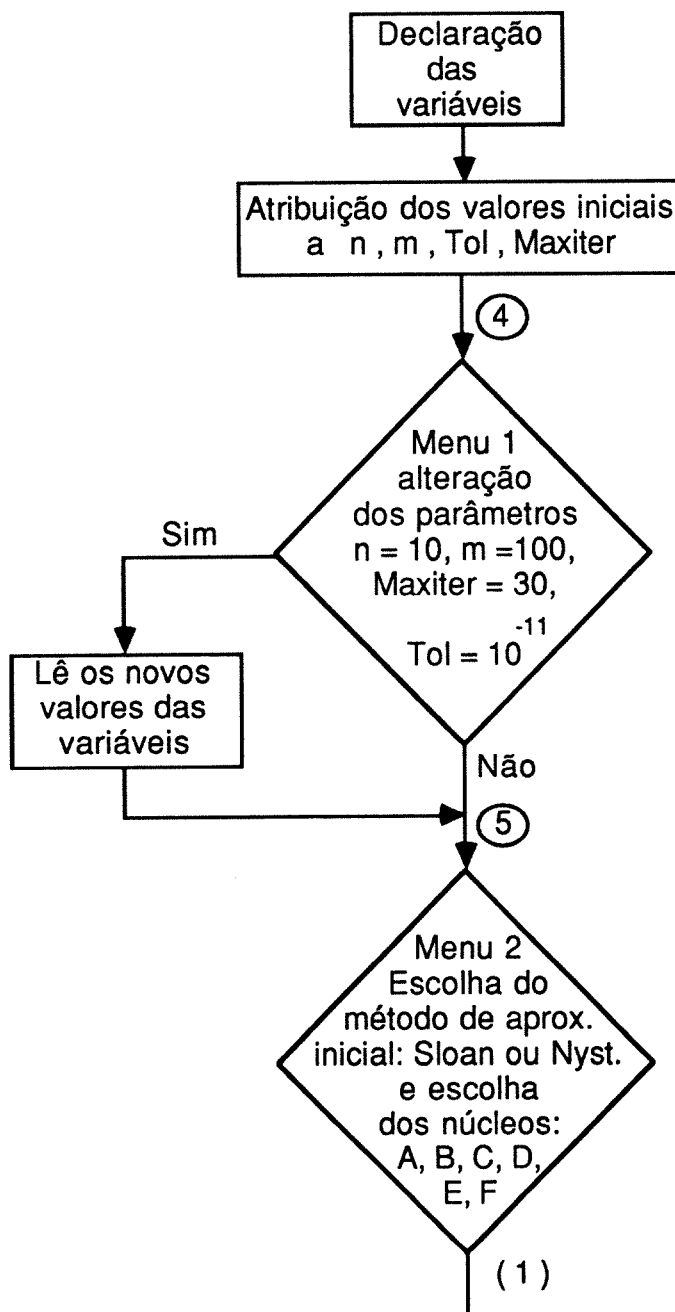
Observando os valores obtidos pelos dois métodos de discretização implementados : Sloan e Nyström, conclui - se que o erro absoluto entre o valor próprio teórico e  $\lambda_{100}$  é da ordem de  $8,5 \times 10^{-6}$  em todos os seis quadros, ou seja, que têm 5 casas decimais comuns. Isso significa que o erro de discretização é dessa ordem. LN é uma aproximação grosseira pois só coincide com  $\lambda_{100}$  em 2 ou 3 casas decimais. O número de casas decimais comuns, entre LK e  $\lambda_{100}$ , varia de 11 a 13, o que demonstra que o processo iterativo da determinação de LK está a tender para  $\lambda_{100}$ .

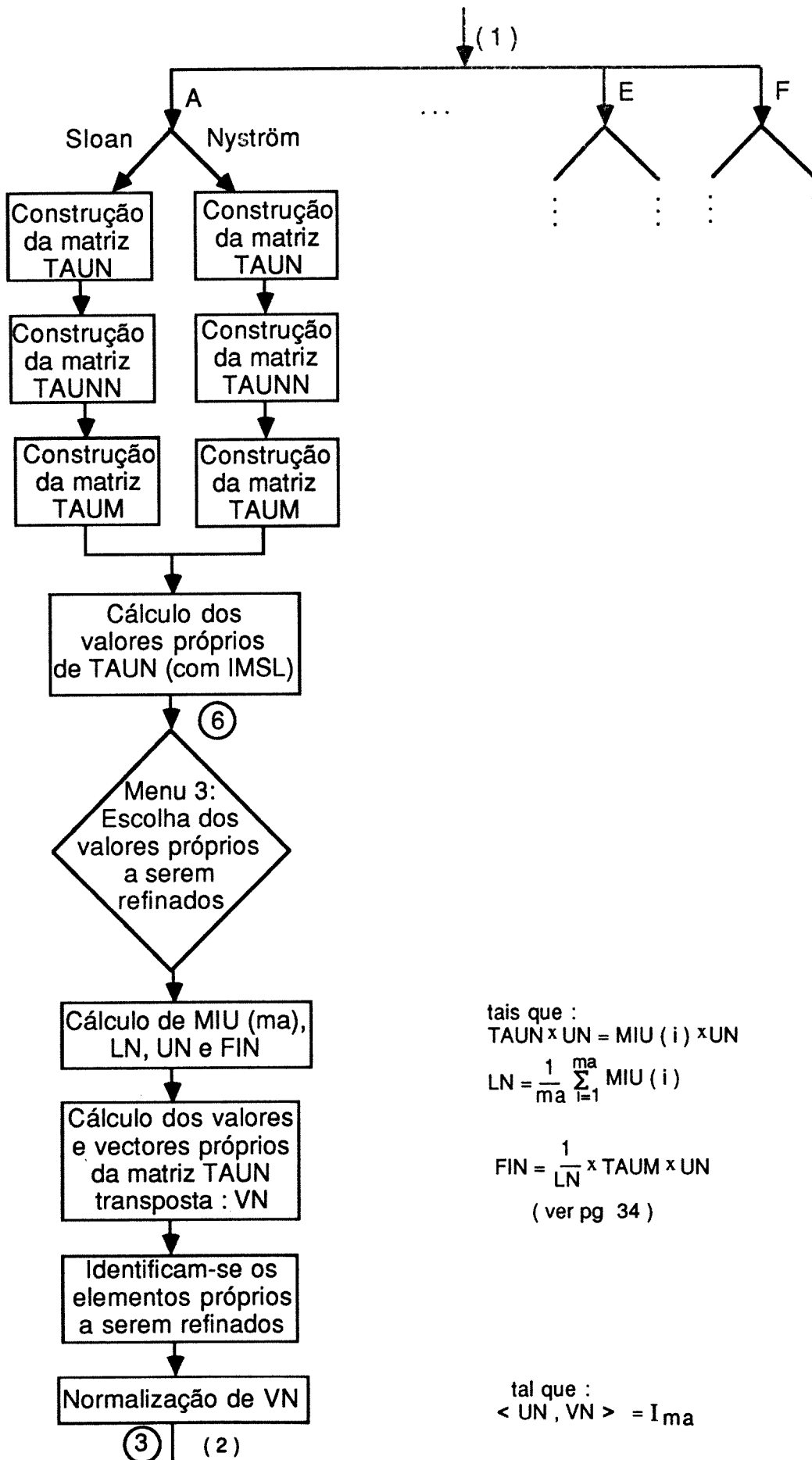
Comparando os casos de  $n = 10$  e  $n = 12$ , nota - se que os valores de LK são melhores no segundo caso. Também os valores iniciais : LN, não diferem muito.

## **Capítulo Quatro : Alguns Algoritmos**

Neste capítulo, vamos explicar o programa implementado para testar os exemplos apresentados na capítulo três. Começamos com um esquema do programa principal. Este é constituído por vários subprogramas, dos quais apenas vamos destacar aqueles que estão directamente ligados com o método de refinamento usado.

O programa utilizado tem a seguinte estrutura:





tais que :

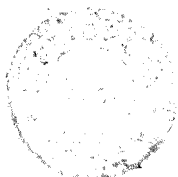
$$TAUN \times UN = MIU(i) \times UN$$

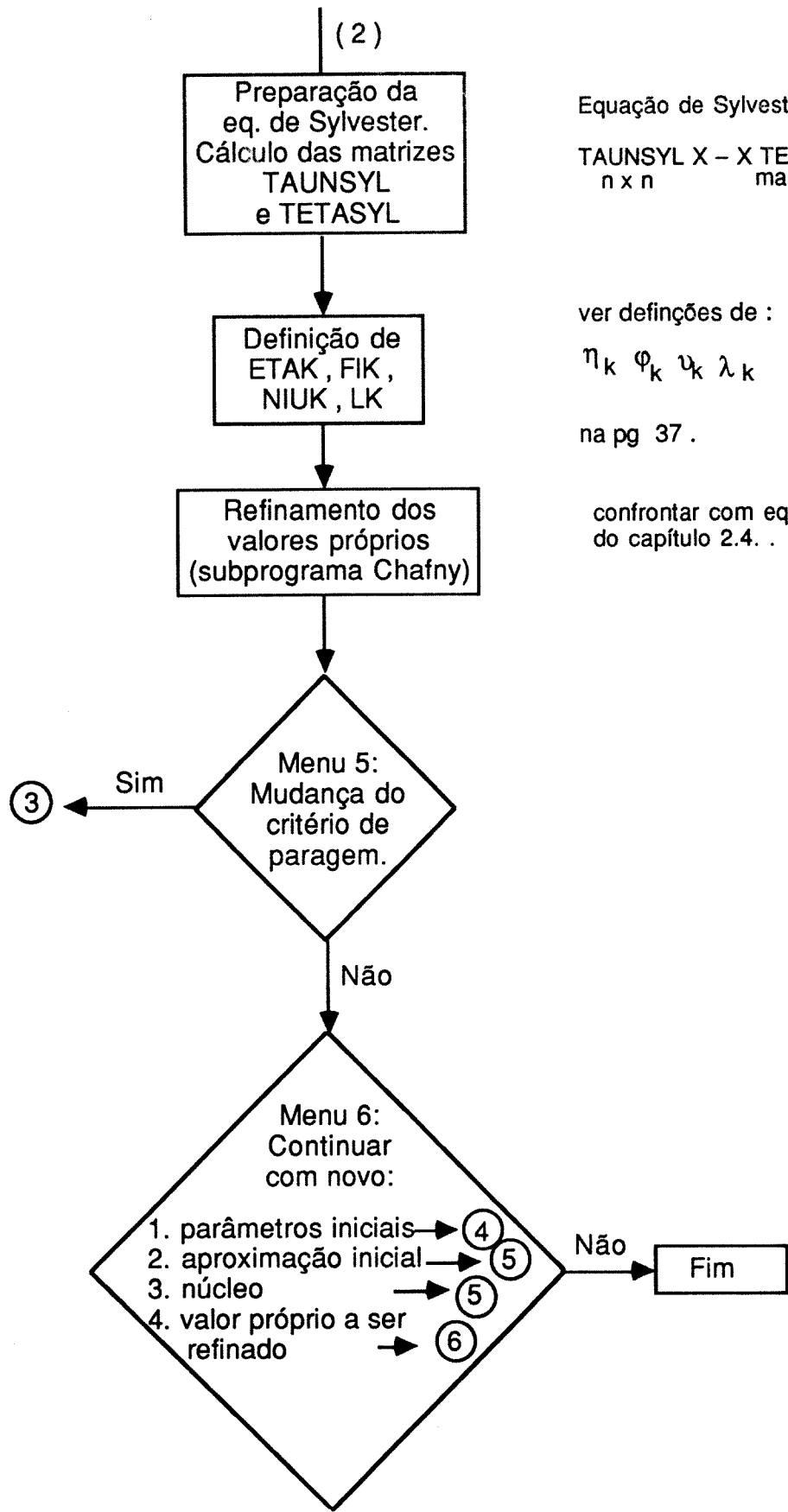
$$LN = \frac{1}{ma} \sum_{i=1}^{ma} MIU(i)$$

$$FIN = \frac{1}{LN} \times TAUM \times UN$$

( ver pg 34 )

tal que :

$$\langle UN, VN \rangle = I_{ma}$$




Equação de Sylvester :

$$\begin{matrix} \text{TAUNSYL} & X & - & X & \text{TETASYL} & = & C \\ n \times n & & & & m_a \times m_a & & \end{matrix}$$

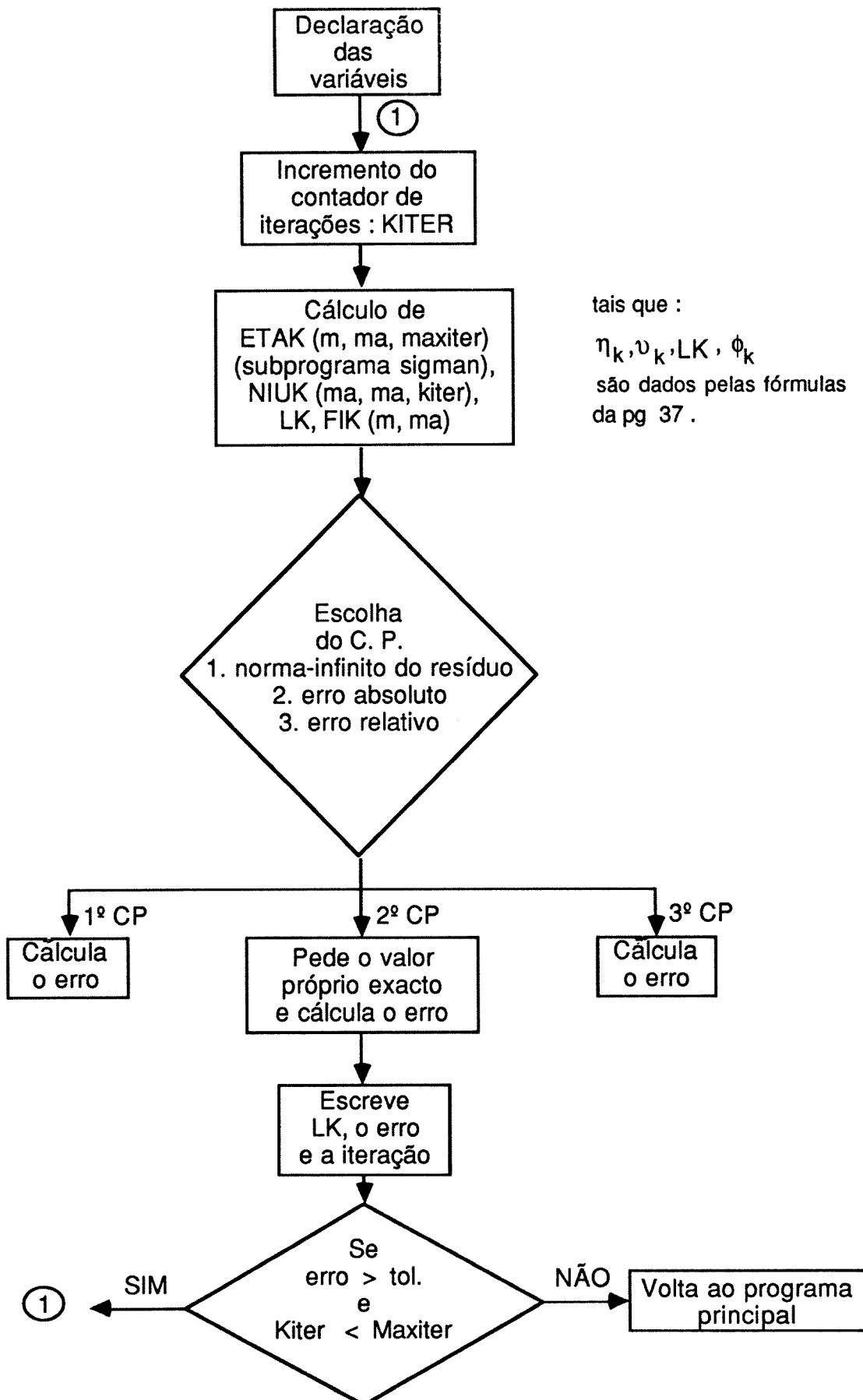
ver definições de :

$$\eta_k \quad \varphi_k \quad \nu_k \quad \lambda_k$$

na pg 37 .

confrontar com eq.  
do capítulo 2.4. .

# Diagrama do subprograma CHAFNY



O objectivo do subprograma SIGMAN é o cálculo da resolvente reduzida. Já vimos no capítulo dois que ela é dada por :

$$\Sigma_n = G_n^{-1} (1_X - \tilde{P}_n)$$

onde  $G_n: X \rightarrow X$

$$x \mapsto (1_X - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n x - x \theta_n.$$

Queremos então calcular  $\Sigma_n w = y$ , onde  $w$  e  $y$  são elementos de  $X$ , ou seja,  $w$  é a variável de entrada e  $y$  é a variável de saída, do subprograma. Que é equivalente a resolver :

$$(1_X - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n y - y \theta_n = (1_X - \tilde{P}_n) w = w - \phi_n \langle \text{rest } w, v_n \rangle.$$

Esquemáticamente :

$\pi_n (1_X - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n$	0
$(1_X - \pi_n) (1_X - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n$	0

$\pi_n y$
$(1_X - \pi_n) y$

 $-$ 
  

$\pi_n y$	$\theta_n$
$(1_X - \pi_n) y$	

 $=$ 

$\pi_n w$
$(1_X - \pi_n) w$

 $-$ 

$\pi_n \phi_n \langle \text{rest } w, v_n \rangle$
$(1_X - \pi_n) \phi_n \langle \text{rest } w, v_n \rangle$

Atendendo a que :

$$\pi_n \phi_n = (\text{rest } \tilde{T}_n u_n) \theta_n^{-1} = u_n,$$

obtém-se o seguinte sistema :

$$\begin{cases} \pi_n (1 - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \pi_n y - \pi_n y \theta_n = \pi_n w - u_n \langle \text{rest } w, v_n \rangle \\ (1 - \pi_n) (1 - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \pi_n y - (1 - \pi_n) y \theta_n = (1 - \pi_n) w - (1 - \pi_n) \phi_n \langle \text{rest } w, v_n \rangle \end{cases}$$

⇔

$$\begin{cases} (1 - \mathfrak{P}_n) \text{TAUN rest } y - \text{rest } y \theta_n = \pi_n w - u_n < \text{rest } w, v_n > \\ (1 - \pi_n) y \theta_n = (1 - \pi_n)(1 - \tilde{P}_n) \tilde{T}_n \pi_n y - (1 - \pi_n) w + (1 - \pi_n) \phi_n < \text{rest } w, v_n > \end{cases}$$

onde  $\mathfrak{P}_n = P_n^G | B_n$ .

A primeira equação deste sistema é uma equação de Sylvester que vai ter como solução  $\pi_n y$  que vai ser substituída na segunda equação.

O algoritmo correspondente é dado por :

1º) Declaração das variáveis

2º) *Comentário : resolução da 1ª equação do sistema ( equação de Sylvester) , começando pelo segundo membro.*

3º)  $\text{work} := \text{work} - \text{rest prol } w$

4º) *Comentário : resolução da equação de Sylvester ( à custa do subprograma AXPXB ) .*

5º) *Comentário : resolução da 2ª equação do sistema começando pelo segundo membro.*

6º)  $Y := (1 - \pi_n) \phi_n < \text{rest } w, v_n >$

7º)  $Y := Y - (1 - \pi_n) w$

8º)  $Y := (Y + (1 - \pi_n) \text{TAUNN res } w) \theta_n^{-1}$

9º) *Comentário : a resolvente reduzida é a soma da solução da 1ª equação coma a solução da 2ª ( depois de prolongada ) .*

A projecção usada é calculada pelo subprograma PNX. Já vimos, no capítulo dois, como a calcular :

seja  $x$  a variável que queremos projectar. Então

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n x &= \phi_n \langle x, \psi_n \rangle \quad \forall x \in X \\ &= \phi_n \langle x, \text{rest}^H v_n \rangle \\ &= \phi_n \langle \text{rest } x, v_n \rangle\end{aligned}$$

O algoritmo correspondente é dado por :

1º) Declaração das variáveis

2º) *Comentário* : faz-se a restrição da variável  $x$ , e coloca-se numa variável  $\text{rest}x$

3º) chama subprograma GRAM ( $\text{rest}x, v_n, \text{guv}$ )

4º) faz o produto da matriz  $\phi_n$  pela matriz de Gram :  $\text{guv}$ .

A matriz de Gram :  $\text{guv}$ , é construída pelo subprograma GRAM e tem como variáveis de entrada  $u_n$  e  $v_n$  e como variável de saída  $\text{guv}$ .

A resolução da equação de Sylvester é feita pelo subprograma AXPXB cuja descrição é feita em Bartels e al. [ 8 ]. O objectivo deste subprograma é a resolução da equação matricial :

$$A X + X B = C$$

onde  $A$  é uma matriz real de ordem  $n \times n$ ,  $B$  é uma matriz real de ordem  $m \times m$  e  $C$  é uma matriz real de ordem  $n \times m$ .

A obtenção da solução desta equação baseia-se na redução de Schur à

forma triangular, à custa de transformações de semelhança ortogonais, das matrizes  $A$  e  $B$ . Assim,  $A = U^T A U$  e  $B = V^T B V$  onde  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias. As matrizes  $A$  e  $B$  são reduzidas à forma de Hessenberg superior, pelo método de Householder, que em seguida é transformada na forma canónica de Schur, pelo método QR.

O cálculo do resíduo é feito pelo subprograma com o mesmo nome.

O algoritmo correspondente é dado por :

1º) Declaração das variáveis

2º)  $\text{residuo} := \text{TAUM} \times \text{FIK}$

3º) *comentário* : faz a projecção da variável *residuo* e chama o subprograma *PNX* com variável de entrada *residuo* e variável de saída *proj*

4º)  $\text{residuo} := \text{residuo} - \text{proj}$

5º)  $\text{anorm} := 0$ .

$\text{aux} := |\text{residuo}|$

se ( $\text{aux} > \text{anorm}$ ) então  $\text{anorm} := \text{aux}$

6º) volta ao subprograma *CHAFNY*.

## **Capítulo Cinco : Conclusões**

Face aos resultados obtidos podemos concluir que o programa funcionou bem quer para o caso de valores próprios de multiplicidade um quer para multiplicidade dois.

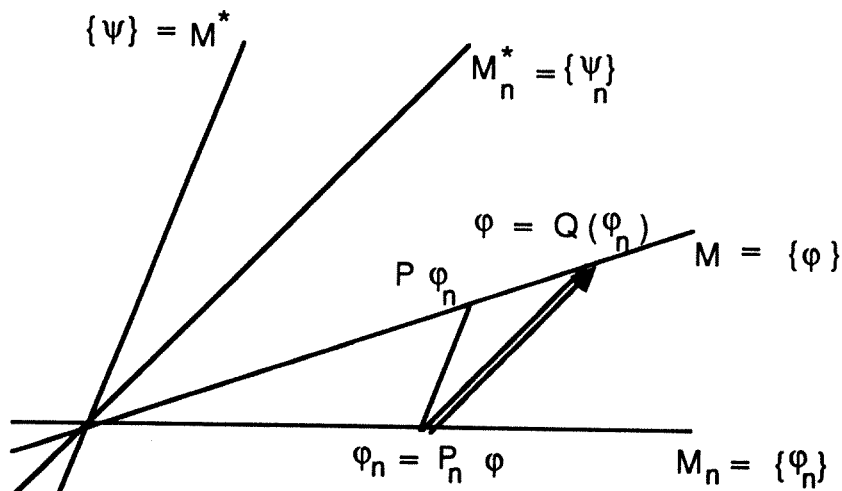
Em resumo e, comparando os três critérios de paragem implementados, podemos concluir que, de uma maneira geral, o primeiro ( dado pela norma-infinity do resíduo ) é o mais rápido. O segundo ( dado pelo erro absoluto com  $\lambda_{100}$  ) tem um comportamento semelhante. O terceiro é o pior, o que é explicável pelo facto deste ser dado pelo erro relativo entre dois iterados consecutivos, pois oscila entre cada duas iterações. Talvez fizesse sentido calculá-lo de duas em duas iterações.

Comparando os dois valores de  $n$  utilizados :  $n = 10$  e  $n = 12$  , foi notória a sua diferença. Para  $n = 12$  é conseguida uma precisão maior, de cerca de um algarismo significativo e é obtida num menor número de iterações. Esta conclusão já era esperada uma vez que para  $n = 12$  há um conjunto de informação maior, pois a discretização é mais fina. Por exemplo, no núcleo  $A$  com a aproximação inicial de Nyström, para o terceiro valor próprio e para  $n = 10$  , com o terceiro critério de paragem não se conseguiu atingir a precisão imposta, mas, para  $n = 12$  esta já foi obtida.

Comparando os três valores próprios escolhidos para serem refinados, podemos concluir que o maior quase sempre foi encontrado com a precisão imposta, enquanto que o terceiro poucas vezes foi calculado com essa precisão, em menos de trinta iterações. Constatamos, assim, uma perda de precisão à medida que se tenta determinar um valor próprio menor, pois o seu erro relativo é maior.

Comparando os dois métodos de discretização implementados : Nyström e Sloan, podemos observar que não há uma diferença significativa entre ambos. Isto, à primeira vista, pode parecer estranho, uma vez que o método de Sloan deveria ser melhor, já que não implica o uso de uma regra de quadratura. O que está a acontecer é que os dois primeiros critérios de paragem são mais exigentes, quando a aproximação inicial é feita pelo método de Sloan.

Uma vez que os núcleos  $A$ ,  $B$  e  $C$  já foram testados em d'Almeida [ 4 ], podemos também comparar os valores obtidos. Por exemplo, para o núcleo  $A$ , aproximação inicial feita pelo método de Sloan e para o 1º valor próprio o que foi obtido em duas iterações em d'Almeida [ 4 ] demorou sete nesta dissertação ( para uma tolerância de  $5 \times 10^{-10}$  ). Parece estranho, mas a explicação reside no facto de que, neste caso, a normalização do valor próprio que se procura é diferente.



Note-se que  $\varphi_n \neq P_n \varphi$  onde  $P$  é a projecção .

Assim, no cálculo de  $NIUK$  existe uma parcela que teoricamente devia ser nula, mas na prática tal não acontece. No caso de  $m_a = 1$  esta parcela nem sequer é calculada : é considerada nula logo à partida. Não sendo possível fazer isso aqui há uma perda de precisão e consequentemente um aumento do número de iterações. O mesmo acontece para os casos do núcleo  $B1$  , aproximação inicial feita pelo método de Sloan, 1º valor próprio, onde o que aqui foi conseguido em oito iterações em d'Almeida [ 4 ] foi obtido em apenas três iterações. Analogamente para o núcleo  $B2$  , aproximação inicial feita pelo método de Sloan, 3º valor próprio, onde aqui não se conseguiu atingir a tolerância imposta, mas em d'Almeida [ 4 ] isso foi conseguido em dezasseis iterações.

O mesmo já não acontece para os exemplos obtidos, utilizando a aproximação inicial feita pelo método de Nyström. Nestes casos, por exemplo, no núcleo  $B2$  para o 1º e 3º valores próprios, os resultados já são compatíveis, assim como no caso do núcleo  $C$  , aproximação inicial feita pelo método de Nyström para o 1º valor próprio.

Se compararmos ainda  $LK$  ,  $\lambda_{100}$  ,  $LN$  e o valor próprio teórico podemos concluir que :

$LN$  é uma aproximação grosseira do valor próprio teórico, mas serve de ponto de partida para o método iterativo de refinamento que dá como resultado  $LK$  , que mostra estar a tender para  $\lambda_{100}$  .

De uma maneira geral, para os núcleos  $A$  e  $B1$  , os valores próprios foram encontrados com a precisão desejada. O mesmo já não aconteceu com o núcleo  $B2$  , pois, para  $n = 10$  , os valores próprios nunca foram encontrados ao fim das 30 iterações e, para  $n = 12$  , apenas foi encontrado cinco vezes, sempre muito próximo do limite. Este é um exemplo em que faria

sentido aumentar o número máximo de iterações permitidas, para se ver se o método atinge a tolerância, ou então, diminuir essa tolerância. O núcleo E também teve um comportamento normal, excepto para o terceiro valor próprio. Neste caso, apenas no 2º critério de paragem, pelo método de Sloan e para  $n = 12$ , o erro obtido foi maior do que a tolerância imposta. Logo faria sentido aumentar o número máximo de iterações permitidas.

No caso dos núcleos A e E, o erro de discretização dos métodos de Nyström e Sloan coincidem, porque os núcleos são suaves. No núcleo B2, como tal não acontece, o erro de discretização pelo método de Sloan já é menor, ou seja, já se nota o peso do erro da integração numérica usada pelo método de Nyström.

Quando a tolerância, previamente imposta, não é atingida no final do número máximo de iterações considerado, várias hipóteses podíamos usar para melhorar os resultados: aumentar o número máximo de iterações, considerar as variáveis em dupla precisão, ou aumentar o valor de  $n$ .

Esta última hipótese não é tão fácil como pode parecer, pois o valor de  $n$  tem de ser tal que  $m - 1$  seja múltiplo de  $n - 1$ . Por exemplo, no caso usado de  $m = 100$ , para além de  $n = 10$  e  $n = 12$ , o valor seguinte de  $n$  é 34, que já é muito grande. No entanto, se escolhermos, por exemplo,  $m = 121$ , já temos mais divisores de  $m - 1$  e, conseqüentemente, mais valores para  $n$ , por exemplo, 11, 13, 16, 21 e 25.

Mas a escolha entre as hipóteses deve ser feita, tendo em conta o custo que acarreta o aumento de  $n$ , ou do número máximo de iterações.

O custo do algoritmo do método de refinamento implementado na presente dissertação, para as aproximações iniciais feitas pelos métodos de Sloan e Nystöm, é dado por (ver d'Almeida [4]):

$$k m^2 + \frac{3k + k^2}{2} m + (2k + 1) m n + \frac{n^3}{3} + \left(\frac{1}{2} + k\right) n^2 + (1 + 5k) n + k$$

onde  $k$  é o número de iterações.

Atendendo a que  $m \gg n$ , a primeira parcela é a mais cara. Por isso, um aumento do número de iterações faz com que o custo aumente consideravelmente, enquanto que um aumento no valor de  $n$  tem menos peso.

Os custos do método de refinamento são sobretudo devidos à construção das matrizes  $TAUM$  e  $TAUN$ .

Nesta dissertação poderíamos ainda ter implementado os outros métodos de discretização referidos, embora, teoricamente, já saibamos que os de Nyström e de Sloan são os melhores e, por isso, foram apenas estes os escolhidos. Outra ideia seria usar o método de Nyström com a regra de Simpson, em vez da regra dos trapézios, para ver se, diminuindo o erro da quadratura, se obtêm melhores resultados. Os outros métodos de refinamento referidos em Ahues [ 1 ], Ahues e al. [ 2 ], Ahues e al. [ 3 ] e d'Almeida [ 4 ] também poderiam ser testados com os exemplos utilizados, permitindo assim fazer um estudo comparativo mais completo de todos os métodos nos diferentes casos. Também há interesse em testar novos exemplos, nomeadamente com valores próprios de multiplicidades superiores a dois, ou exemplos com operadores diferenciais de resolvente compacta.

Os métodos implementados são aplicáveis a problemas de Engenharia onde apareçam equações integrais, ou mesmo diferenciais, cujo operador resolvente seja compacto.

**Apêndice A**

Apresentam-se nos quadros seguintes os resultados obtidos a partir método iterativo aplicado ao refinamento de valores próprios de multiplicidade  $m$ .

Para cada exemplo, está mencionado o núcleo ( A , B , C , D , E ou F ) , o método utilizado para obter a aproximação inicial do valor próprio ( Nyström ou Sloan ) e qual o valor próprio escolhido a ser refinado ( 1º , 2º ou 3º ) .

Na primeira linha encontra-se, sempre que é conhecido, o valor próprio teórico correspondente. Na segunda linha, o valor próprio da matriz de discretização obtida para  $m = 100$  , TAUM , que está designado por  $\lambda_{100}$  . Segue-se o valor próprio, ou par de valores próprios, da matriz de discretização, TAUN e TAUNT , obtida para  $n = 10$  , escolhidos para serem refinados. Menciona-se também, o número respectivo desses valores próprios no conjunto de todos os dessas matrizes.

Aparecem então, para cada iteração , KITER , o valor próprio refinado , LK , e o valor do erro em cada um dos três critérios de paragem. A tolerância imposta em todos os exemplos foi :  $TOL = 1.0 \times 10^{-11}$  .

A mesma estrutura é usada no caso de  $n = 12$  .

No fim de cada quadro faz-se uma breve análise sobre o evoluir do processo iterativo, comparando o número de casas decimais correctas de LK , em cada iteração, com as correspondentes de  $\lambda_{100}$ .

Núcleo A – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 2			
<b>n=10</b>	0. 1 0 2 3 5 6 2 8 8 5 1 0 9			
	0. 1 0 2 3 5 6 2 8 8 5 1 0 9	1\1		
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 0 0 3 1 5 6 8 0 4 0 9 7	3.5E-5	1.0E-3	2.0E-2
2	0. 1 0 1 3 0 7 2 0 1 7 8 7	1.4E-5	2.2E-5	9.8E-3
3	0. 1 0 1 3 3 9 0 0 8 9 3 7 9	1.1E-6	9.3E-6	3.1E-4
4	0. 1 0 1 3 3 0 4 2 6 1 5 5 9	2.3E-7	7.4E-7	8.5E-5
5	0. 1 0 1 3 2 9 5 3 4 6 8 9 7	3.7E-8	1.5E-7	8.8E-6
6	0. 1 0 1 3 2 9 6 6 2 4 6 1 1	3.8E-9	2.4E-8	1.3E-6
7	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 9 1 6 1 7	1.2E-9	2.6E-9	2.6E-7
8	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 7 3 7 7 7	4.4E-11	7.7E-10	1.8E-8
9	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 5 7 4 4	3.7E-11	3.0E-11	7.9E-9
10	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 5 8 0 2	7.2E-13	2.4E-11	5.8E-11
11	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 3 8		4.3E-13	2.3E-10
12	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 9			1.1E-11
13	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 3			6.5E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. Na quinta iteração já há 6 , sendo a sétima obtida na iteração seguinte. Na iteração nove há 9 casas decimais correctas, conseguindo-se mais duas na iteração onze. O processo termina na iteração treze com 12 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 2			
<b>n=12</b>	0. 1 0 2 0 1 2 7 0 6 7 7 4 2	1\1		
	0. 1 0 2 0 1 2 7 0 6 7 7 4 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 0 0 6 5 2 3 0 1 3 7 3 4	1.6E-5	6.8E-4	1.4E-2
2	0. 1 0 1 3 1 9 6 0 0 6 5 7 7	6.5E-6	1.0E-5	6.6E-3
3	0. 1 0 1 3 3 3 9 6 6 9 5 6 1	3.5E-7	4.3E-6	1.4E-4
4	0. 1 0 1 3 2 9 9 1 1 6 9 3 4	7.6E-8	2.3E-7	4.0E-5
5	0. 1 0 1 3 2 9 6 3 6 4 5 5	7.7E-9	5.0E-8	2.7E-6
6	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 1 5 5 4 2	1.0E-9	5.1E-9	4.5E-7
7	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 7 2 6 7 7	1.7E-10	6.6E-10	5.6E-8
8	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 7 1 7 1	1.2E-11	1.1E-10	5.4E-9
9	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 5 9 5 9	3.8E-12	8.3E-12	1.2E-9
10	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 1 7			5.8E-11
11	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 3			2.5E-11
12	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 3			2.0E-13

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há também 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. Na quarta, outras duas e na quinta é conseguida mais uma, logo seguida de outra na sexta iteração. Na oitava é determinada a nona casa decimal correcta, e na décima mais duas. O processo termina na iteração doze com 12 casas decimais correctas, obtidas na iteração anterior.

Núcleo A – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 3 3 0 2 9 5 9 1 0 5 8			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 7 0 2			
<b>n=10</b>	0. 0 2 6 3 8 4 6 6 7 1 9 2 6 3	2\2		
	0. 0 2 6 3 8 4 6 6 7 1 9 2 6 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 2 4 3 4 4 0 5 9 0 9 1 4 2	1.3E-4	9.9E-4	8.4E-2
<b>2</b>	0. 0 2 5 2 5 2 7 0 4 0 6 4 2 3	4.0E-5	8.6E-5	3.6E-2
<b>3</b>	0. 0 2 5 3 6 5 5 7 3 4 4 7 5 5	1.5E-5	2.7E-5	4.4E-3
<b>4</b>	0. 0 2 5 3 4 8 3 3 2 2 3 0 7 2	5.0E-7	9.5E-6	6.8E-4
<b>5</b>	0. 0 2 5 3 3 8 4 2 2 9 3 2 9 5	1.4E-6	3.8E-7	3.9E-4
<b>6</b>	0. 0 2 5 3 3 7 8 9 5 6 1 7 6 8	2.2E-7	9.0E-7	2.1E-5
<b>7</b>	0. 0 2 5 3 3 8 6 5 9 3 6 5 6 5	9.5E-8	1.4E-7	3.0E-5
<b>8</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 6 4 0 1 6 1 8	4.3E-8	6.4E-8	8.1E-6
<b>9</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 2 8 4 6 2 2 5	1.4E-9	2.8E-8	1.4E-6
<b>10</b>	0. 0 2 5 3 3 8 7 9 9 0 2 5 2 9	5.3E-9	1.1E-9	1.2E-6
<b>11</b>	0. 0 2 5 3 3 8 7 9 6 6 6 5 4 1	9.8E-10	3.5E-9	9.3E-8
<b>12</b>	0. 0 2 5 3 3 8 7 9 9 5 3 1 5 5	4.2E-10	6.3E-10	1.1E-7
<b>13</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 4 3 9 4 7	2.1E-10	2.8E-10	3.6E-8
<b>14</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 2 9 6 2 2	5.0E-12	1.4E-10	5.7E-9
<b>15</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 3 0 1		4.0E-12	5.7E-9
<b>16</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 3 8 5 7			5.7E-10
<b>17</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 3 3 6			5.8E-10
<b>18</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 8 5 6			2.1E-10
<b>19</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 7 8 5			2.8E-11
<b>20</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 7 0 1			3.3E-11
<b>21</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 6 9 1			4.0E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma, seguida de outra na terceira. Na quinta iteração já há 6 , sendo a sétima obtida na iteração oito. Na treze há 9 casas decimais correctas, conseguindo-se mais duas na iteração quinze, sendo a seguinte obtida na iteração dezanove. O processo termina na iteração vinte e um com 11 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 3 3 0 2 9 5 9 1 0 5 8			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 7 0 2			
<b>n=12</b>	0. 0 2 6 0 3 0 3 8 3 4 0 7 3	2\2		
	0. 0 2 6 0 3 0 3 8 3 4 0 7 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 2 4 6 6 9 9 7 8 0 0 6 4 9	6.0E-5	6.7E-4	5.5E-2
<b>2</b>	0. 0 2 5 2 9 9 6 1 2 4 0 0 4 4	2.1E-5	3.9E-5	2.5E-2
<b>3</b>	0. 0 2 5 3 5 2 6 7 3 2 1 6 6 4	4.8E-6	1.4E-5	2.1E-3
<b>4</b>	0. 0 2 5 3 4 1 9 2 3 2 4 1 6 2	5.1E-7	3.1E-6	4.2E-4
<b>5</b>	0. 0 2 5 3 3 8 4 5 1 5 7 9 3 9	3.5E-7	3.5E-7	1.4E-4
<b>6</b>	0. 0 2 5 3 3 8 5 7 0 6 2 8 0 2	1.3E-8	2.3E-7	4.7E-6
<b>7</b>	0. 0 2 5 3 3 8 7 9 2 3 2 7 2 6	2.2E-8	7.8E-9	8.7E-6
<b>8</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 1 4 9 6 8 2 1	4.1E-9	1.5E-8	8.9E-7
<b>9</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 2 8 0 6 1 9	1.1E-9	2.6E-9	4.8E-7
<b>10</b>	0. 0 2 5 3 3 8 7 9 9 4 1 8 3 5	4.8E-10	7.4E-10	1.3E-7
<b>11</b>	0. 0 2 5 3 3 8 7 9 9 8 4 3 3 2	1.7E-11	3.1E-10	1.7E-8
<b>12</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 6 9 7 6	4.1E-11	1.3E-11	1.3E-8
<b>13</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 8 4 5	4.8E-12	2.7E-11	5.8E-10
<b>14</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 6 0 1		3.1E-12	9.6E-10
<b>15</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 5 1 7			1.9E-10
<b>16</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 6 4 8			5.2E-11
<b>17</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 7 1			2.5E-11
<b>18</b>	0. 0 2 5 3 3 8 8 0 0 1 5 7 0 8			6.7E-13

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma, seguindo-se outra na terceira iteração. Na quinta iteração já há 6, sendo a sétima obtida na oito. Na iteração doze há 10 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na iteração quinze. O processo termina na iteração dezoito com 13 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 6 5			
<b>n=10</b>	0. 0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 2 3 4	3\3		
	0. 0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 2 3 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 3 0 5 0 7 0 9 1 1 1 3	3.2E-4	9.6E-4	2.0E-1
2	0. 0 1 1 0 8 6 7 4 1 8 6 5 6	4.4E-5	1.8E-4	7.1E-2
3	0. 0 1 1 2 9 3 5 0 6 5 7 5 5 4	5.7E-5	2.7E-5	1.8E-2
4	0. 0 1 1 2 9 8 8 8 2 4 1 0 7 7	1.4E-5	3.2E-5	4.8E-4
5	0. 0 1 1 2 7 4 2 0 0 5 0 1 9 4	4.8E-6	7.8E-6	2.2E-3
6	0. 0 1 1 2 6 3 5 3 2 9 2 2 3 1	4.9E-6	2.9E-6	9.5E-4
7	0. 0 1 1 2 6 3 6 4 4 0 4 8 8 7	1.1E-6	2.8E-6	9.9E-6
8	0. 0 1 1 2 6 5 8 4 2 2 6 4 3 1	6.3E-7	5.7E-7	2.0E-4
9	0. 0 1 1 2 6 6 7 8 8 3 2 7 8 6	5.3E-7	3.7E-7	8.4E-5
10	0. 0 1 1 2 6 6 7 1 7 8 2 6 6 2	9.2E-8	3.0E-7	6.3E-6
11	0. 0 1 1 2 6 6 4 6 3 6 6 3 6 7	9.0E-8	4.8E-8	2.3E-5
12	0. 0 1 1 2 6 6 3 6 2 9 5 7 5 5	6.5E-8	5.3E-8	8.9E-6
13	0. 0 1 1 2 6 6 3 7 8 8 4 4 6 7	7.7E-9	3.7E-8	1.4E-6
14	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 1 8 7 7 5 3	1.3E-8	3.8E-9	2.9E-6
15	0. 0 1 1 2 6 6 4 2 3 5 2 0 7	8.5E-9	7.8E-9	1.0E-6
16	0. 0 1 1 2 6 6 4 2 0 4 5 1 2 6	4.9E-10	4.8E-9	2.7E-7
17	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 8 7 6 6 1	2.1E-9	1.9E-10	4.1E-7
18	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 4 4 8 1 0 7	1.1E-9	1.2E-9	1.2E-7
19	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 0 4 2 9 9	3.6E-11	6.4E-10	5.0E-8
20	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 7 0 0 8 3	3.3E-10	1.9E-11	5.8E-8
21	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 8 6 8 9 5	1.6E-10	1.9E-10	1.5E-8
22	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 7 6 8 6 5	1.4E-11	8.7E-11	8.9E-9
23	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 7 1 8 5	5.2E-11	9.8E-12	8.6E-9
24	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 5 2 1	2.2E-11		1.8E-9
25	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 6 9 7 5	4.0E-12		1.6E-9
26	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 4 1 9			1.3E-9
27	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 6 3 5			1.9E-10
28	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 3 2 8			2.7E-10
29	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 1 1			1.9E-10
30	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 0 9 1			1.8E-10

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma e na terceira outra. Na sexta iteração há 5 , sendo a sexta obtida na nove. Na iteração quatorze há 8 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na dezassete, que é mantida até à iteração vinte e três, onde é obtida outra. O processo termina na iteração trinta com 11 casas decimais correctas, que vêm desde a iteração vinte e seis.

Núcleo A – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 12

Teórico	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 6 5			
n=12	0. 0 1 1 9 7 2 6 4 9 3 3 7 1 6			3\3
	0. 0 1 1 9 7 2 6 4 9 3 3 7 1 6			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 0 1 0 6 1 2 2 4 3 9 3 6 3 5	1.3E-4	6.5E-4	1.3E-1
2	0. 0 1 1 1 8 2 5 0 3 3 5 1 1 7	3.0E-5	8.4E-5	5.1E-2
3	0. 0 1 1 2 8 6 7 5 9 4 2 6 3 4	1.9E-5	2.0E-5	9.2E-3
4	0. 0 1 1 2 7 8 7 0 5 4 2 4 4 1	1.5E-6	1.2E-5	7.1E-4
5	0. 0 1 1 2 6 7 3 1 6 1 3 5 8 9	2.0E-6	9.0E-7	1.0E-3
6	0. 0 1 1 2 6 5 0 9 2 2 4 4 4 3	7.9E-7	1.3E-6	2.0E-4
7	0. 0 1 1 2 6 5 9 0 8 6 9 6 3 3	6.4E-8	5.1E-7	7.2E-5
8	0. 0 1 1 2 6 6 4 6 2 2 3 8 1 4	1.4E-7	4.7E-8	4.9E-5
9	0. 0 1 1 2 6 6 5 0 9 2 4 1 0 6	3.4E-8	9.4E-8	4.2E-6
10	0. 0 1 1 2 6 6 4 3 7 1 9 0 9	1.3E-8	2.2E-8	6.4E-6
11	0. 0 1 1 2 6 6 4 0 6 7 8 2 1 2	1.0E-8	8.9E-9	2.7E-6
12	0. 0 1 1 2 6 6 4 0 9 1 3 4 8 6	9.4E-10	6.5E-9	2.1E-7
13	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 1 2 8 0 7	1.5E-9	5.5E-10	5.3E-7
14	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 6 6 7 2 5 1	6.6E-10	9.9E-10	1.4E-7
15	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 6 1 0 8 1 4	5.5E-11	4.3E-10	5.0E-8
16	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 4 0 5 5	1.4E-10	4.1E-11	4.2E-8
17	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 5 8 8 4 8	3.7E-11	9.3E-11	4.6E-9
18	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 5 8 1 7	1.4E-11	2.3E-11	6.2E-9
19	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 9 1 4 6	1.2E-11	9.8E-12	3.0E-9
20	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 9 4 7	1.3E-12		1.8E-10
21	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 2 4 2			6.3E-10
22	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 0 3 9			1.8E-10
23	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 0 8			6.0E-11
24	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 7			5.6E-11
25	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 7 9			7.3E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas na segunda iteração consegue-se mais uma, logo seguida de outra. Na quinta iteração já há 5, que se mantêm até à oitava onde são conseguidas mais duas. Na iteração treze há 9 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na dezasseis. Na iteração vinte há 11. O processo termina na iteração vinte e cinco com 12 casas decimais correctas que já vêm desde a iteração vinte e três.

Núcleo A – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 6			
<b>n=10</b>	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2			
	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2		1\3	
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 1	4.0E-6	1.0E-3	6.4E-13
<b>2</b>	0. 1 0 1 3 1 0 5 3 7 6 4 0 6	1.6E-5	2.1E-6	1.0E-2
<b>3</b>	0. 1 0 1 3 2 2 9 0 5 0 0 3 9	2.7E-7	1.0E-5	1.2E-4
<b>4</b>	0. 1 0 1 3 1 2 8 4 9 8 0 6 5	3.1E-7	1.7E-7	9.9E-5
<b>5</b>	0. 1 0 1 3 1 2 4 7 7 3 9 6 8	1.2E-8	2.0E-7	3.7E-6
<b>6</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 7 4 1 6 7 5	7.7E-9	7.4E-9	1.9E-6
<b>7</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 6 5 6 5 2	4.6E-10	5.0E-9	1.2E-7
<b>8</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 8 3 1 1	2.1E-10	2.9E-10	4.7E-8
<b>9</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 4	1.8E-11	1.4E-10	4.3E-9
<b>10</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 2 5 2	5.9E-12	1.1E-11	1.2E-9
<b>11</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 4 0 6		4.0E-12	1.5E-10
<b>12</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 7 1			3.4E-11
<b>13</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 5			5.5E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais três. Na quarta iteração já há 6 , sendo a sétima obtida na iteração seis. Na iteração sete há 8 casas decimais correctas, conseguindo-se outra na iteração oito e mais uma na dez. Na iteração doze há 12 casas decimais correctas. O processo termina na iteração treze com 13 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Sloan – 1º vp -- n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 6			
<b>n=12</b>	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9	<b>1\3</b>		
	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 8	1.8E-6	6.8E-4	6.2E-13
<b>2</b>	0. 1 0 1 3 1 1 7 2 9 0 1 6	6.9E-6	9.5E-7	6.7E-3
<b>3</b>	0. 1 0 1 3 1 7 2 3 2 8 3 6 7	8.0E-8	4.6E-6	5.4E-5
<b>4</b>	0. 1 0 1 3 1 2 7 3 1 3 8 4 6	9.2E-8	5.0E-8	4.4E-5
<b>5</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 2 0 7 7 3 6	2.3E-9	6.1E-8	1.1E-6
<b>6</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 0 0 8 0 2	1.5E-9	1.5E-9	5.9E-7
<b>7</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 2 5 4 1 9	6.0E-11	1.0E-9	2.4E-8
<b>8</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 7 5 5	2.8E-11	3.9E-11	9.5E-9
<b>9</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 1 8 2	1.6E-12	1.8E-11	5.7E-10
<b>10</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 5 6		9.7E-13	1.7E-10
<b>11</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 7			1.4E-11
<b>12</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 7			3.3E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais três. Na quarta iteração já há 6, sendo obtida mais uma em cada iteração até à oito onde há 10 casas decimais correctas, conseguindo-se mais duas na iteração dez. O processo termina na iteração doze com 13 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 3 3 0 2 9 5 9 1 0 5 8			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 9 4 8			
<b>n=10</b>	0. 0 2 4 3 2 7 0 5 4 0 2 3 9 1	2\4		
	0. 0 2 4 3 2 7 0 5 4 0 2 3 9 1			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 2 4 3 2 7 0 5 4 0 2 3 8 8	1.7E-5	9.9E-4	1.3E-12
2	0. 0 2 5 3 1 2 5 5 3 3 4 4 1 1	6.1E-5	9.2E-6	3.9E-2
3	0. 0 2 5 3 6 1 9 6 8 6 8 0 1 5	4.4E-6	4.0E-5	1.5E-3
4	0. 0 2 5 3 2 4 5 6 2 6 7 0 3 3	4.7E-6	2.8E-6	1.5E-3
5	0. 0 2 5 3 1 8 6 8 5 6 4 4 5	7.4E-7	3.1E-6	2.3E-4
6	0. 0 2 5 3 2 1 3 1 8 1 9 0 0 4	4.2E-7	4.8E-7	1.0E-4
7	0. 0 2 5 3 2 2 0 7 7 8 8 9 3 3	1.1E-7	2.8E-7	3.0E-5
8	0. 0 2 5 3 2 1 8 6 9 3 3 1 3 3	3.9E-8	7.4E-8	8.2E-6
9	0. 0 2 5 3 2 1 7 6 8 6 2 2 9 2	1.7E-8	2.6E-8	4.0E-6
10	0. 0 2 5 3 2 1 7 8 4 0 3 3 7 1	3.4E-9	1.1E-8	6.1E-7
11	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 7 4 1 0 9 9	2.4E-9	2.3E-9	5.3E-7
12	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 6 6 8 5 5 1	2.3E-10	1.6E-9	2.9E-8
13	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 4 9 2 9 3 1	3.4E-10	1.6E-10	6.9E-8
14	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 4 8 6 5 6 6	3.2E-12	2.2E-10	2.5E-9
15	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 9 0 8 9		1.4E-12	8.9E-9
16	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 1 1 9 8 8			1.1E-9
17	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 9 2 0 4			1.1E-9
18	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 5 5 1			2.6E-10
19	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 8 7 6			1.3E-10
20	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 9 9 7			4.8E-11
21	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 9 6 3			1.4E-11
22	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 9 4 2			8.1E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. Na quarta iteração já há 5, sendo obtida mais uma na seis. Na iteração nove há 7 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na iteração onze. Na iteração quinze há 10 casas decimais correctas, obtendo-se mais uma na iteração dezoito e outra na vinte. O processo termina na iteração vinte e dois com 13 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 3 3 0 2 9 5 9 1 0 5 8			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 8 9 4 8			
<b>n=12</b>	0. 0 2 4 6 5 2 9 7 2 9 3 8 9 8			
	0. 0 2 4 6 5 2 9 7 2 9 3 8 9 8		2\4	
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 2 4 6 5 2 9 7 2 9 3 8 9 4	7.4E-6	6.7E-4	1.6E-12
<b>2</b>	0. 0 2 5 3 1 7 7 8 6 2 5 4 6 3	2.7E-5	4.0E-6	2.6E-2
<b>3</b>	0. 0 2 5 3 3 9 7 9 7 4 9 7 7 8	1.3E-6	1.8E-5	8.7E-4
<b>4</b>	0. 0 2 5 3 2 2 6 0 8 1 4 9 7 3	1.4E-6	8.1E-7	6.8E-4
<b>5</b>	0. 0 2 5 3 2 0 8 5 2 2 5 2 3 5	1.5E-7	9.4E-7	6.9E-5
<b>6</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 0 1 0 3 2 9 4	8.9E-8	9.4E-8	3.4E-5
<b>7</b>	0. 0 2 5 3 2 1 8 5 4 4 8 4 8 7	1.5E-8	5.9E-8	6.1E-6
<b>8</b>	0. 0 2 5 3 2 1 8 0 4 9 7 0 5	6.0E-9	9.9E-9	2.0E-6
<b>9</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 1 0 9 5 7 5	1.5E-9	4.0E-9	5.5E-7
<b>10</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 4 0 8 9 2	4.0E-10	1.0E-9	1.2E-7
<b>11</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 3 5 9 4 1	1.5E-10	2.7E-10	5.0E-8
<b>12</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 1 8 8 5 4	2.6E-11	9.9E-11	6.7E-9
<b>13</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 7 2 1 1	1.5E-11	1.7E-11	4.6E-9
<b>14</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 7 9 8 4	1.4E-12	9.6E-12	3.1E-10
<b>15</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 9 0 4 5			4.2E-10
<b>16</b>	0. 0 2 5 3 2 1 7 9 5 0 9 0 4			1.9E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. Na quarta iteração há 5, sendo na seis obtidas mais duas. Na iteração nove há 8 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na iteração onze e outra na treze. O processo termina na iteração dezasseis com 10 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 1 1			
<b>n=10</b>	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2	<b>3\5</b>		
	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 5 8	5.0E-5	9.6E-4	3.8E-12
2	0. 0 1 1 2 2 6 0 7 0 9 8 8 9 5	1.5E-4	2.3E-5	8.4E-2
3	0. 0 1 1 3 3 6 2 1 1 1 4 2 1 8	2.7E-5	8.7E-5	9.7E-3
4	0. 0 1 1 2 6 3 9 2 4 3 1 8 3 6	2.4E-5	1.5E-5	6.4E-3
5	0. 0 1 1 2 3 5 3 9 5 1 4 6 9 5	9.8E-6	1.4E-5	2.5E-3
6	0. 0 1 1 2 4 3 9 9 7 6 7 6 9 2	3.9E-6	5.4E-6	7.7E-4
7	0. 0 1 1 2 5 1 7 4 0 3 0 0 6 8	3.2E-6	2.3E-6	6.9E-4
8	0. 0 1 1 2 5 1 1 9 2 2 8 7 3 1	4.3E-7	1.8E-6	4.9E-5
9	0. 0 1 1 2 4 9 1 3 6 9 4 5 5 9	9.5E-7	2.7E-7	1.8E-4
10	0. 0 1 1 2 4 8 8 7 0 4 1 8 6 6	6.9E-8	5.4E-7	2.4E-5
11	0. 0 1 1 2 4 9 3 8 0 3 1 1 9 8	2.6E-7	3.0E-8	4.5E-5
12	0. 0 1 1 2 4 9 5 6 0 7 8 4 5 3	7.4E-8	1.5E-7	1.6E-5
13	0. 0 1 1 2 4 9 4 5 0 3 5 7 1 6	6.3E-8	4.0E-8	9.8E-6
14	0. 0 1 1 2 4 9 3 7 3 6 3 3 0 5	3.6E-8	3.7E-8	6.8E-6
15	0. 0 1 1 2 4 9 3 9 0 7 1 3 4 2	1.2E-8	2.0E-8	1.5E-6
16	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 7 8 8 2 5 9	1.4E-8	7.3E-9	2.4E-6
17	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 8 4 0 6 7	8.7E-10	7.8E-9	4.7E-8
18	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 9 9 7 5 7	4.6E-9	6.4E-10	7.5E-7
19	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 7 9 8 0 8 3	7.2E-10	2.6E-9	1.8E-7
20	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 2 5 0 7 8	1.4E-9	3.6E-10	2.0E-7
21	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 1 3 9 2 3 2	5.3E-10	7.8E-10	1.0E-7
22	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 0 2 9 6	3.3E-10	2.9E-10	4.4E-8
23	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 4 2 0 6 5	2.5E-10	1.9E-10	4.3E-8
24	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 4 7 5 7 8	5.5E-11	1.4E-10	4.9E-9
25	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 4 8 1 6	9.6E-11	3.4E-11	1.5E-8
26	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 6 7 9 9	2.7E-12	5.4E-11	1.8E-9
27	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 5 8		4.7E-13	4.7E-9
28	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 9 6			1.7E-9
29	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 0 9 9 2			1.2E-9
30	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 9 3 4			8.4E-10

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas e na sexta mais uma. Na iteração nove há 6 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na iteração treze outra na dezasseis e outra na vinte. Na iteração vinte e cinco há 10 casas decimais correctas, obtendo-se mais duas na iteração vinte e sete. O processo termina na iteração trinta com 11 casas decimais correctas.

Núcleo A – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 12

Teórico	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 1 1			
n=12	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4	3\5		
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 7 8	1.8E-5	6.5E-4	5.5E-12
2	0. 0 1 1 2 3 9 6 3 3 5 9 0 7 5	6.0E-5	9.8E-6	5.7E-2
3	0. 0 1 1 2 8 8 9 8 5 7 2 4 4 1	6.9E-6	4.0E-5	4.4E-3
4	0. 0 1 1 2 5 3 6 4 1 9 7 8 8	6.8E-6	4.2E-6	3.1E-3
5	0. 0 1 1 2 4 9 3 8 1 3 1 1 4	1.7E-6	4.5E-6	7.7E-4
6	0. 0 1 1 2 4 8 3 3 3 0 1 5 6 2	8.5E-7	1.1E-6	3.0E-4
7	0. 0 1 1 2 4 9 9 7 9 2 8 5 2 1	3.8E-7	5.7E-7	1.5E-4
8	0. 0 1 1 2 4 9 6 5 6 6 1 1 4 4	1.0E-7	2.5E-7	2.9E-5
9	0. 0 1 1 2 4 9 3 4 2 3 5 8 5 6	8.2E-8	6.8E-8	2.8E-5
10	0. 0 1 1 2 4 9 3 5 7 5 7 8 5 8	8.1E-9	5.3E-8	1.4E-6
11	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 6 4 4 7 6 1	1.7E-8	5.8E-9	5.2E-6
12	0. 0 1 1 2 4 9 4 2 1 5 0 8 3 2	6.6E-10	1.1E-8	4.5E-7
13	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 3 0 1 9	3.2E-9	3.2E-10	9.4E-7
14	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 8 4 9 2 4 6	5.7E-10	2.1E-9	2.2E-7
15	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 2 6 1 0 9	5.8E-10	3.5E-10	1.6E-7
16	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 9 9 6 3	2.0E-10	3.9E-10	6.6E-8
17	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 7 4 0 5 9	9.4E-11	1.3E-10	2.3E-8
18	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 5 1 0 7	5.5E-11	6.3E-11	1.7E-8
19	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 8 5 6	1.2E-11	3.6E-11	2.4E-9
20	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 2 2 5 3	1.4E-11	8.4E-12	3.9E-9
21	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 2 2 9 3	7.2E-13		3.6E-11
22	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 3 5 4			8.3E-10
23	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 2 1 1			1.3E-10
24	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 3 9 5			1.6E-10
25	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 5 3			5.1E-11
26	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 2 1			2.9E-11
27	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 0 3			1.6E-11
28	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 0 8			4.1E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas assim como na quinta. Na iteração onze há 8 casas decimais correctas, conseguindo-se mais uma na treze, outra na vinte e outra na vinte e dois. O processo termina na iteração vinte e oito com 12 casas decimais correctas, que já vêm desde a vinte e cinco.

Núcleo B1 – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 9 8 8 1 8 0 9 2 1 2 7 4 2			
$\lambda_{100}$	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 5 6 8			
<b>n=10</b>	0. 0 9 9 8 5 3 1 4 2 5 2 6 1 4			
	0. 0 9 9 8 5 3 1 4 2 5 2 6 1 4	1\1		
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 9 7 8 1 2 9 5 7 6 4 8 7 9	3.5E-5	1.0E-3	2.1E-2
2	0. 0 9 8 8 0 3 5 5 9 5 4 9 7 4	1.4E-5	2.3E-5	1.0E-2
3	0. 0 9 8 8 3 6 1 2 5 6 6 0 9 6	1.2E-6	9.5E-6	3.3E-4
4	0. 0 9 8 8 2 7 3 7 0 7 0 6 6 9	2.3E-7	7.8E-7	8.9E-5
5	0. 0 9 8 8 2 6 4 3 6 8 3 5 1 7	3.9E-8	1.6E-7	9.4E-6
6	0. 0 9 8 8 2 6 5 6 9 1 9 0 2 2	3.9E-9	2.6E-8	1.3E-6
7	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 7 7 7 7 2 6	1.3E-9	2.7E-9	2.9E-7
8	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 9 3 3 1	4.3E-11	8.5E-10	1.9E-8
9	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 5 5 3 1	4.0E-11	3.0E-11	8.8E-9
10	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 5 8 8 7	9.4E-13	2.7E-11	3.6E-11
11	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 5 0 9		5.9E-13	2.7E-10
12	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 6 4 9			1.4E-11
13	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 5 7 5			7.5E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. A partir da quatro é obtida uma casa decimal de iteração em iteração até à dez. O processo termina na iteração treze com 12 casas decimais correctas, que já vêm desde a onze.

Núcleo B1 – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 9 8 8 1 8 0 9 2 1 2 7 4 2			
$\lambda_{100}$	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 5 6 8			
<b>n=12</b>	0. 0 9 9 5 0 9 5 9 1 0 8 0 8 7	1\1		
	0. 0 9 9 5 0 9 5 9 1 0 8 0 8 7			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 9 8 1 4 9 3 7 5 3 3 9 7 8	1.6E-5	6.8E-4	1.4E-2
<b>2</b>	0. 0 9 8 8 1 6 2 5 9 3 2 4 2 9	6.5E-6	1.0E-5	6.7E-3
<b>3</b>	0. 0 9 8 8 3 0 9 7 5 3 6 7 1 9	3.6E-7	4.4E-6	1.5E-4
<b>4</b>	0. 0 9 8 8 2 6 8 3 1 3 4 1 0 3	7.8E-8	2.4E-7	4.2E-5
<b>5</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 4 2 6 6 8 4 8	8.1E-9	5.2E-8	2.9E-6
<b>6</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 8 9 6 6 0 0 3	1.0E-9	5.4E-9	4.8E-7
<b>7</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 7 9 1 3 7	1.9E-10	7.1E-10	6.2E-8
<b>8</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 2 0 9 7 1	1.3E-11	1.2E-10	5.9E-9
<b>9</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 7 6 7 6	4.2E-12	8.9E-12	1.3E-9
<b>10</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 2 8 9			6.2E-11
<b>11</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 5 7 6			2.9E-11
<b>12</b>	0. 0 9 8 8 2 6 5 9 5 0 8 5 7 5			1.5E-13

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há 3 casas decimais correctas. Logo na segunda iteração consegue-se mais uma. A partir da iteração quatro é obtida uma casa decimal de duas em duas iterações até à iteração dez. O processo termina na iteração doze com 12 casas decimais correctas, que já vêm desde a onze.

Núcleo B1 – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 1 7 0 8 9 9 3 2 8 5			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 1 3 2			
<b>n=10</b>	0. 0 2 6 2 2 5 2 1 1 2 8 2 1 9	2\2		
	0. 0 2 6 2 2 5 2 1 1 2 8 2 1 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 2 4 1 8 5 0 2 6 4 0 4 8 4	1.3E-4	9.9E-4	8.4E-2
2	0. 0 2 5 0 9 2 8 3 2 8 8 9 5 5	3.9E-5	8.7E-5	3.6E-2
3	0. 0 2 5 2 0 6 2 5 5 2 4 2 5 8	1.4E-5	2.7E-5	4.5E-3
4	0. 0 2 5 1 8 9 0 3 2 9 7 5 4 8	4.7E-7	9.6E-6	6.8E-4
5	0. 0 2 5 1 7 9 0 3 5 3 4 2 1 5	1.3E-6	3.7E-7	4.0E-4
6	0. 0 2 5 1 7 8 4 8 6 9 0 4 7 4	2.2E-7	9.2E-7	2.2E-5
7	0. 0 2 5 1 7 9 2 5 8 7 0 7 3 5	9.4E-8	1.4E-7	3.1E-5
8	0. 0 2 5 1 7 9 4 6 8 2 1 7 7 4	4.3E-8	6.5E-8	8.3E-6
9	0. 0 2 5 1 7 9 4 3 2 6 4 3 9 9	1.3E-9	2.9E-8	1.4E-6
10	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 2 5 0 8	5.3E-9	1.1E-9	1.2E-6
11	0. 0 2 5 1 7 9 3 9 9 9 8 5 6	1.0E-9	3.6E-9	1.0E-7
12	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 2 9 1 3 5 3	4.2E-10	6.6E-10	1.2E-7
13	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 8 5 9 6 4	2.2E-10	2.9E-10	3.8E-8
14	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 7 1 6 6 2	4.3E-12	1.5E-10	5.7E-9
15	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 6 7 9 3		3.4E-12	5.9E-9
16	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 5 2 1 3			6.1E-10
17	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 6 7 3 8			6.1E-11
18	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 2 9 1			2.2E-10
19	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 2 2			2.8E-11
20	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 1 3 1			3.5E-11
21	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 1 2			4.5E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma. A partir da quatro é obtida uma casa decimal em cada iteração, aproximadamente, até à iteração quinze. Na iteração dezoito há 11 casas decimais correctas, conseguindo-se mais duas na vinte. No entanto, o processo termina na iteração vinte e um com 10 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 1 7 0 8 9 9 3 2 8 5			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 1 3 2			
<b>n=12</b>	0. 0 2 5 8 7 0 9 6 1 2 1 4 8 9	2\2		
	0. 0 2 5 8 7 0 9 6 1 2 1 4 8 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 2 4 5 1 0 7 4 5 4 7 3 8	6.2E-5	6.7E-4	5.5E-2
2	0. 0 2 5 1 3 9 9 8 9 2 3 1 4 5	2.1E-5	3.9E-5	2.5E-2
3	0. 0 2 5 1 9 3 3 3 4 9 3 0 8 2	4.9E-6	1.4E-5	2.1E-3
4	0. 0 2 5 1 8 2 5 6 1 1 6 3 0 6	5.2E-7	3.2E-6	4.3E-4
5	0. 0 2 5 1 7 9 0 5 4 0 0 1 9 3	3.6E-7	3.5E-7	1.4E-4
6	0. 0 2 5 1 7 9 1 7 0 4 8 2 9	1.4E-8	2.3E-7	4.6E-6
7	0. 0 2 5 1 7 9 3 9 5 2 8 4 0 1	2.3E-8	8.3E-9	8.9E-6
8	0. 0 2 5 1 7 9 4 1 8 6 5 5 7 7	4.3E-9	1.5E-8	9.3E-7
9	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 6 3 0 8 4 2	1.1E-9	2.7E-9	4.9E-7
10	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 2 8 2 0 1 6	5.0E-10	7.5E-10	1.4E-7
11	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 2 4 7 0 2	1.7E-11	3.2E-10	1.7E-8
12	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 8 3 5 6	4.4E-11	1.2E-11	1.3E-8
13	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 9 9 7 6	5.2E-12	2.8E-11	6.4E-10
14	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 4 6		3.3E-12	1.0E-9
15	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 6 9 4 1			2.1E-10
16	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 0 7 4			5.3E-11
17	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 1 4			2.6E-11
18	0. 0 2 5 1 7 9 4 0 3 5 7 1 3 8			5.9E-13

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. Na cinco há 6 casas decimais correctas. Em cada uma das iterações oito e nove é obtida uma casa decimal correcta, o mesmo acontecendo nas iterações onze e doze. Chega-se assim à iteração quatorze com 11 casas decimais. O processo termina na iteração dezoito com 13 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 2 6 3 1 3 0 8 9 9 7			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 4 4 1			
<b>n=10</b>	0 0 1 2 3 1 4 0 1 4 6 5 6 0 4			3\3
	0. 0 1 2 3 1 4 0 1 4 6 5 6 0 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 2 7 3 8 2 9 7 7 8 7	3.1E-4	9.6E-4	2.0E-1
2	0. 0 1 1 0 5 4 7 8 6 3 2 6 3 5	4.3E-5	1.8E-4	7.1E-2
3	0. 0 1 1 2 6 1 8 4 0 7 9 4 6 2	5.6E-5	2.7E-5	1.8E-2
4	0. 0 1 1 2 6 7 3 8 4 3 3 3 5 8	1.4E-5	3.3E-5	4.9E-4
5	0. 0 1 1 2 4 2 6 7 0 6 1 3 5 8	4.7E-6	7.9E-6	2.2E-3
6	0. 0 1 1 2 3 1 9 3 8 5 4 0 0 2	4.8E-6	2.9E-6	9.6E-4
7	0. 0 1 1 2 3 2 0 2 8 8 0 2 3 4	1.1E-6	2.8E-6	8.0E-6
8	0. 0 1 1 2 3 4 2 6 3 1 0 1 6 3	6.1E-7	5.8E-7	2.0E-4
9	0. 0 1 1 2 3 5 1 9 2 8 7 4 9 5	5.3E-7	3.7E-7	8.5E-5
10	0. 0 1 1 2 3 5 1 2 4 9 9 7 5 4	9.2E-8	3.1E-7	6.0E-6
11	0. 0 1 1 2 3 4 8 6 8 9 3 4 7 4	8.8E-8	4.9E-8	2.3E-5
12	0. 0 1 1 2 3 4 7 6 6 4 7 6 0 7	6.5E-8	5.3E-8	9.1E-6
13	0. 0 1 1 2 3 4 7 8 2 0 4 8 2	7.9E-9	3.7E-8	1.4E-6
14	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 5 4 5 3	1.3E-8	4.0E-9	3.0E-6
15	0. 0 1 1 2 3 4 8 2 7 3 8 2 4 1	8.5E-9	7.9E-9	1.1E-6
16	0. 0 1 1 2 3 4 8 2 4 3 4 6 0 4	5.4E-10	4.9E-9	2.7E-7
17	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 7 0 0 6 4	2.0E-9	2.3E-10	4.1E-7
18	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 8 2 5 8 5 2	1.1E-9	1.2E-9	1.3E-7
19	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 8 8 1 1 8 2	3.4E-11	6.6E-10	5.0E-8
20	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 8 9 2 6	3.2E-10	1.5E-11	6.0E-8
21	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 6 6 4 9	1.6E-10	1.9E-10	1.6E-8
22	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 5 6 4 4 1	1.3E-11	9.0E-11	8.9E-9
23	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 6 5 1 7	5.1E-11	9.2E-12	8.8E-9
24	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 4 4 2 2	2.2E-11		1.9E-9
25	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 6 2	3.8E-12		1.6E-9
26	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 6 8 8			1.3E-9
27	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 9 2 4			2.1E-10
28	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 6 1 2			2.8E-10
29	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 3 8 7			2.0E-10
30	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 3 6 4			2.0E-11

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma. A partir da iteração três é obtida uma casa decimal, de duas em duas iterações, aproximadamente, até à iteração vinte. O processo termina na iteração trinta com 11 casas decimais correctas, que já vêm desde a iteração vinte e seis.

Núcleo B1 – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 2 6 3 1 3 0 8 9 9 7			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 4 4 1			
<b>n=12</b>	0. 0 1 1 9 4 1 0 2 4 9 9 5 7 2	<b>3\3</b>		
	0. 0 1 1 9 4 1 0 2 4 9 9 5 7 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 5 8 0 8 0 9 2 5 4 6 3	1.3E-4	6.5E-4	1.3E-1
2	0. 0 1 1 1 5 0 7 1 6 9 1 2 7	3.0E-5	8.4E-5	5.1E-2
3	0. 0 1 1 2 5 5 1 6 6 9 8 0 1 1	1.9E-5	2.0E-5	9.3E-3
4	0. 0 1 1 2 4 7 1 5 7 6 5 9 2 9	1.5E-6	1.2E-5	7.1E-4
5	0. 0 1 1 2 3 5 7 3 4 3 3 7 5 8	2.0E-6	9.1E-7	1.0E-3
6	0. 0 1 1 2 3 3 4 9 0 5 4 7 2 9	7.8E-7	1.3E-6	2.0E-4
7	0. 0 1 1 2 3 4 3 0 7 6 2 8 6 8	6.2E-8	5.1E-7	7.3E-5
8	0. 0 1 1 2 3 4 8 6 5 5 1 4 7 6	1.4E-7	4.6E-8	5.0E-5
9	0. 0 1 1 2 3 4 9 1 3 8 6 9 6 7	3.4E-8	9.4E-8	4.3E-6
10	0. 0 1 1 2 3 4 8 4 1 3 8 1 7 4	1.3E-8	2.2E-8	6.5E-6
11	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 0 5 3 8 5 3	1.0E-8	8.9E-9	2.7E-6
12	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 2 8 3 1 1 4	9.7E-10	6.6E-9	2.0E-7
13	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 8 8 9 4 5 6	1.5E-9	5.8E-10	5.4E-7
14	0. 0 1 1 2 3 4 8 2 0 4 7 6 0 5	6.7E-10	1.0E-9	1.4E-7
15	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 9 1 0 4 1	5.3E-11	4.4E-10	5.0E-8
16	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 3 4 3 1	1.4E-10	4.0E-11	4.2E-8
17	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 3 7 9 5 6	3.8E-11	9.5E-11	4.9E-9
18	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 5 0 1 2	1.4E-11	2.4E-11	6.3E-9
19	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 8 4 2 9	1.2E-11	9.9E-12	3.0E-9
20	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 8 2 4 3	1.4E-12		1.7E-10
21	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 5 2 3			6.4E-10
22	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 3 1 3			1.9E-10
23	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 3 8 2			6.1E-11
24	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 4 4 6			5.8E-11
25	0. 0 1 1 2 3 4 8 1 9 4 7 4 5 5			7.9E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma. É obtida uma casa decimal correcta em cada uma das seguintes iterações : três, cinco, sete, oito, onze, quinze, dezasseis, vinte e um e vinte e quatro. O processo termina na iteração vinte e cinco com 12 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 9 8 8 1 8 0 9 2 1 2 7 4 2			
$\lambda_{100}$	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 0 6 7			
<b>n=10</b>	0. 0 9 7 8 4 5 3 9 6 1 7 7 8 5			1\3
	0. 0 9 7 8 4 5 3 9 6 1 7 7 8 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 9 7 8 4 5 3 9 6 1 7 5 5 9	7.8E-5	9.6E-4	2.3E-11
<b>2</b>	0. 0 9 8 8 0 8 1 6 5 2 9 9 0 5	1.5E-5	1.8E-6	9.7E-3
<b>3</b>	0. 0 9 8 8 1 9 5 5 7 0 9 2 6 6	1.6E-6	9.5E-6	1.2E-4
<b>4</b>	0. 0 9 8 8 1 0 1 6 0 1 2 5 8 5	2.8E-7	1.5E-7	9.5E-5
<b>5</b>	0. 0 9 8 8 0 9 8 2 2 8 3 6 4 3	4.2E-8	1.9E-7	3.4E-6
<b>6</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 0 3 5 4 8 7 6	6.8E-9	6.5E-9	1.8E-6
<b>7</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 4 5 8 1 9 7	1.2E-9	4.5E-9	1.1E-7
<b>8</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 3 0 6 5 6	1.9E-10	2.6E-10	4.3E-8
<b>9</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 0 9 9 2 9 5 8	3.8E-11	1.2E-10	3.8E-9
<b>10</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 4 0 9	5.7E-12	9.8E-12	1.1E-9
<b>11</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 4 0 8			1.3E-10
<b>12</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 1 0 3			3.1E-11
<b>13</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 0 5 7			4.7E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta praticamente em cada uma das iterações seguintes. O processo termina na iteração treze com 12 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 9 8 8 1 8 0 9 2 1 2 7 4 2			
$\lambda_{100}$	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 0 6 7			
<b>n=12</b>	0. 0 9 8 1 6 5 7 7 3 3 9 2 0 4		1\3	
	0. 0 9 8 1 6 5 7 7 3 3 9 2 0 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 9 8 1 6 5 7 7 3 3 8 9 7 4	5.3E-5	6.4E-4	2.3E-11
<b>2</b>	0. 0 9 8 8 0 9 1 9 2 6 9 7 0 1	6.5E-6	8.2E-7	6.5E-3
<b>3</b>	0. 0 9 8 8 1 4 2 5 8 6 5 3 1 1	7.2E-7	4.2E-6	5.1E-5
<b>4</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 5 4 4 5 8 5 5	8.4E-8	4.4E-8	4.3E-5
<b>5</b>	0. 0 9 8 8 0 9 9 5 4 3 6 2 7 2	1.2E-8	5.6E-8	1.0E-6
<b>6</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 0 8 7 6 6 9 6	1.4E-9	1.3E-9	5.5E-7
<b>7</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 9 5 5 4 9	2.3E-10	9.0E-10	2.2E-8
<b>8</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 8 4 4 2	2.6E-11	3.4E-11	8.8E-9
<b>9</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 3 4 3 5	4.7E-12	1.6E-11	5.1E-10
<b>10</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 4 9 8 1		8.6E-13	1.6E-10
<b>11</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 0 9 8			1.2E-11
<b>12</b>	0. 0 9 8 8 1 0 0 1 0 0 5 0 6 9			2.9E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há 3 casas decimais correctas. Logo na segunda iteração consegue-se mais uma, outra na terceira e duas na quarta. Na iteração sete e na oito obtêm-se mais duas casas correctas. O processo termina na iteração doze com 13 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 1 7 0 8 9 9 3 2 8 5			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 1 2			
<b>n=10</b>	0. 0 2 4 1 7 9 6 2 0 8 3 2 6	2\4		
	0. 0 2 4 1 7 9 6 2 0 8 3 2 6			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 2 4 1 7 9 6 2 0 8 3 2 0 5	2.7E-4	9.8E-4	2.3E-11
2	0. 0 2 5 1 5 3 5 2 3 9 3 8 8	7.0E-5	9.0E-6	3.9E-2
3	0. 0 2 5 2 0 1 2 0 9 2 2 4 1 8	2.0E-5	3.9E-5	1.9E-3
4	0. 0 2 5 1 6 5 0 8 9 3 8 4 3 7	6.5E-6	2.6E-6	1.4E-3
5	0. 0 2 5 1 5 9 5 7 8 4 9 2 3 9	1.9E-6	2.9E-6	2.2E-4
6	0. 0 2 5 1 6 2 0 7 1 9 7 7 3 6	7.1E-7	4.3E-7	9.9E-5
7	0. 0 2 5 1 6 2 7 6 6 3 5 8 5 8	1.9E-7	2.6E-7	2.8E-5
8	0. 0 2 5 1 6 2 5 7 1 2 7 9 6 2	8.8E-8	6.6E-8	7.8E-6
9	0. 0 2 5 1 6 2 4 8 1 3 8 0 4 6	2.0E-8	2.4E-8	3.6E-6
10	0. 0 2 5 1 6 2 4 9 5 8 6 4	1.1E-8	9.6E-9	5.8E-7
11	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 7 5 4 7 6 1	2.1E-9	2.1E-9	4.6E-7
12	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 6 7 9 6 2 4	1.4E-9	1.4E-9	3.0E-8
13	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 2 9 2 3 7	2.9E-10	1.5E-10	6.0E-8
14	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 2 5 7 1 1	1.8E-10	1.9E-10	1.4E-9
15	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 6 7 4	4.9E-11	3.6E-12	7.5E-9
16	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 6 7 9 4	2.3E-11		8.4E-10
17	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 4 8	7.7E-12		9.2E-10
18	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 3 9 9 2			1.9E-10
19	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 2 6 1			1.1E-10
20	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 5 1			3.6E-11
21	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 2 2			1.1E-11
22	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 0 7			6.0E-12

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta em cada uma das seguintes iterações : quatro, seis, oito, onze, treze e quinze. O processo termina na iteração vinte e dois com 12 casas decimais correctas, que já vêm desde a iteração vinte.

Núcleo B1 – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 2 5 1 7 0 8 9 9 3 2 8 5			
$\lambda_{100}$	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 1 2			
<b>n=12</b>	0. 0 2 4 5 0 1 7 9 2 9 0 3 0 1	2\4		
	0. 0 2 4 5 0 1 7 9 2 9 0 3 0 1			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 2 4 5 0 1 7 9 2 9 0 2 4 1	1.9E-4	6.6E-4	2.4E-11
2	0. 0 2 5 1 5 8 6 1 9 8 3 9 4 3	3.2E-5	3.9E-6	2.6E-2
3	0. 0 2 5 1 7 9 8 4 5 2 9 0 0 1	9.5E-6	1.7E-5	8.4E-4
4	0. 0 2 5 1 6 3 2 6 3 5 8 2 5 9	2.0E-6	7.6E-7	6.6E-4
5	0. 0 2 5 1 6 1 6 1 8 7 0 5 7 7	5.8E-7	8.9E-7	6.5E-5
6	0. 0 2 5 1 6 2 4 2 0 0 5 5 3 2	1.5E-7	8.5E-8	3.2E-5
7	0. 0 2 5 1 6 2 5 6 0 0 9 1 7 1	4.0E-8	5.5E-8	5.6E-6
8	0. 0 2 5 1 6 2 5 1 4 1 9 1 4 9	1.3E-8	8.7E-9	1.8E-6
9	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 1 8 3 8 4 3	2.8E-9	3.6E-9	4.9E-7
10	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 4 5 7 8 5 6	1.1E-9	8.6E-10	1.1E-7
11	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 6 8 3 2 1	2.0E-10	2.4E-10	4.4E-8
12	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 5 2 6 7 7	9.9E-11	8.4E-11	6.2E-9
13	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 2 7 7 5	1.5E-11	1.5E-11	3.9E-9
14	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 3 5 1 6	8.7E-12	8.0E-12	2.9E-10
15	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 9 9			3.5E-10
16	0. 0 2 5 1 6 2 5 0 5 4 4 3 8 6			5.1E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta em cada duas iterações. O processo termina na iteração dezasseis com 12 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 2 6 3 1 3 0 8 9 9 7			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 2 3			
<b>n=10</b>	0. 0 1 0 2 6 1 3 3 5 6 7 9 0 3	<b>3\5</b>		
	0. 0 1 0 2 6 1 3 3 5 6 7 9 0 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 1 0 2 6 1 3 3 5 6 7 8 8	1.4E-4	9.6E-4	2.2E-11
<b>2</b>	0. 0 1 1 1 9 4 7 2 6 0 9 3 5 5	1.5E-4	2.3E-5	8.3E-2
<b>3</b>	0. 0 1 1 3 0 3 3 4 1 7 2 2 3	3.3E-5	8.5E-5	9.6E-3
<b>4</b>	0. 0 1 1 2 3 1 9 9 7 8 9 2 6 6	2.6E-5	1.4E-5	6.4E-3
<b>5</b>	0. 0 1 1 2 0 4 7 7 3 7 6 2 1	9.1E-6	1.4E-5	2.5E-3
<b>6</b>	0. 0 1 1 2 1 2 6 4 7 8 1 1 9 1	4.5E-6	5.2E-6	7.6E-4
<b>7</b>	0. 0 1 1 2 2 0 1 2 7 5 8 9 5 8	2.7E-6	2.3E-6	6.7E-4
<b>8</b>	0. 0 1 1 2 1 9 5 6 2 4 7 0 6 9	1.1E-6	1.7E-6	5.0E-5
<b>9</b>	0. 0 1 1 2 1 7 5 9 1 7 0 8 0 2	8.3E-7	2.7E-7	1.8E-4
<b>10</b>	0. 0 1 1 2 1 7 3 5 0 4 5 0 8 6	3.1E-7	5.1E-7	2.2E-5
<b>11</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 3 7 1 1 4 7 7	2.5E-7	2.5E-8	4.3E-5
<b>12</b>	0. 0 1 1 2 1 8 0 0 3 5 2 6 1 5	9.6E-8	1.4E-7	1.5E-5
<b>13</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 9 7 9 5 5 8 2	7.0E-8	3.6E-8	9.4E-6
<b>14</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 2 7 2 6 1 1 9	3.2E-8	3.5E-8	6.3E-6
<b>15</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 4 4 0 1 7 3 1	2.0E-8	1.8E-8	1.5E-6
<b>16</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 8 9 8 5 6 3	1.1E-8	6.9E-9	2.2E-6
<b>17</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 9 1 1 9 7 6	5.5E-9	7.1E-9	1.2E-8
<b>18</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 1 3 8 0 7 8	4.1E-9	6.8E-10	6.9E-7
<b>19</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 5 9 6 8 3 6 5	1.7E-9	2.4E-9	1.5E-7
<b>20</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 1 7 7 4 9	1.4E-9	2.9E-10	1.9E-7
<b>21</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 7 6 8 8 3	5.4E-10	7.0E-10	8.9E-8
<b>22</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 3 0 9 6 2	4.1E-10	2.5E-10	4.1E-8
<b>23</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 1 8 8 7 2 9	2.0E-10	1.8E-10	3.8E-8
<b>24</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 1 9 4 5 3 7	1.3E-10	1.2E-10	5.2E-9
<b>25</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 9 6 7 9	7.5E-11	3.3E-11	1.3E-8
<b>26</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 1 1 0 7 4	3.7E-11	4.7E-11	1.2E-9
<b>27</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 3 5 5	2.9E-11	6.8E-13	4.2E-9
<b>28</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 4 8 5 3	1.2E-11		1.3E-9
<b>29</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 1 0 2	9.7E-12		1.1E-9
<b>30</b>	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 8 8 2			7.0E-10

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, consegue-se mais uma, assim como nas iterações quatro, seis, nove, onze, dezasseis, vinte e um e vinte e cinco. O processo termina na iteração trinta com 11 casas decimais correctas.

Núcleo B1 – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 2 6 3 1 3 0 8 9 9 7			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 2 3			
<b>n=12</b>	0. 0 1 0 2 6 1 3 3 5 6 7 9 0 3	<b>3\5</b>		
	0. 0 1 0 2 6 1 3 3 5 6 7 9 0 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 5 6 7 0 8 0 6 5 0 9 1	8.7E-5	6.5E-4	2.6E-11
2	0. 0 1 1 2 0 8 1 9 0 0 3 1 8 4	6.1E-5	9.7E-6	5.7E-2
3	0. 0 1 1 2 5 6 8 3 1 0 0 9 3 1	1.2E-5	3.9E-5	4.3E-3
4	0. 0 1 1 2 1 3 4 9 7 8 9 0 7 3	6.9E-6	4.1E-6	3.1E-3
5	0. 0 1 1 2 1 3 4 9 7 8 9 0 7 3	2.2E-6	4.4E-6	7.6E-4
6	0. 0 1 1 2 1 6 8 2 4 9 8 6 9 7	9.7E-7	1.0E-6	3.0E-4
7	0. 0 1 1 2 1 8 4 1 3 2 3 3 8 9	3.8E-7	5.5E-7	1.4E-4
8	0. 0 1 1 2 1 8 0 9 6 5 4 3 3 6	1.7E-7	2.3E-7	2.8E-5
9	0. 0 1 1 2 1 7 7 9 6 0 0 7 7 7	6.9E-8	6.6E-8	2.7E-5
10	0. 0 1 1 2 1 7 8 1 1 9 4 7 0 6	3.0E-8	5.0E-8	1.4E-6
11	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 7 8 3 0 5 6	1.5E-8	5.8E-9	5.0E-6
12	0. 0 1 1 2 1 7 8 7 2 2 8 1 7 1	5.8E-9	1.0E-8	4.0E-7
13	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 2 9 5 4 1	3.2E-9	2.3E-10	8.9E-7
14	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 0 0 8 6 2 9	1.1E-9	2.0E-9	2.0E-7
15	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 1 7 5 2 2 5	6.5E-10	3.1E-10	1.5E-7
16	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 4 2 2 3 9	2.5E-10	3.6E-10	6.0E-8
17	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 1 7 7 0 5	1.4E-10	1.1E-10	2.2E-8
18	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 0 5 5 7	5.0E-11	5.9E-11	1.5E-8
19	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 3 2 5 5	2.8E-11	3.2E-11	2.4E-9
20	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 7 2 2 0	1.1E-11	8.0E-12	3.5E-9
21	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 7 2 0 8	5.5E-12		1.1E-11
22	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 3 6 3			7.5E-10
23	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 2 4 6			1.0E-10
24	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 1 2			1.5E-10
25	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 6 0			4.4E-11
26	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 3 1			2.6E-11
27	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 1 6			1.3E-11
28	0. 0 1 1 2 1 7 8 6 2 0 6 4 2 1			3.8E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas, logo na segunda, conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta nas iterações cinco, nove, dez, treze, dezoito, vinte e dois e vinte e quatro. O processo termina na iteração vinte e oito com 13 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 8 2 0 3 3 9 6 7 5 2 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 4 9 6			
<b>n=10</b>	0. 2 0 2 3 1 3 1 1 4 7 8 2 2	1\1		
	0. 2 0 2 3 1 3 1 1 4 7 8 2 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 6 4 5 3 3 2 1 6 1 1 4 8	5.0E-3	1.8E-2	2.3E-1
2	0. 1 7 8 5 2 1 1 5 1 8 7 6 6	5.7E-4	3.7E-3	7.8E-2
3	0. 1 8 2 6 5 5 3 1 5 0 9 5 8	9.5E-4	4.5E-4	2.3E-2
4	0. 1 8 2 9 1 2 5 9 7 9 6 0 6	3.0E-4	7.1E-4	1.4E-3
5	0. 1 8 2 4 1 8 2 3 7 3 2 4 8	6.5E-5	2.1E-4	2.7E-3
6	0. 1 8 2 1 5 2 2 0 0 5 4 6	9.8E-5	5.2E-5	1.5E-3
7	0. 1 8 2 1 3 1 2 1 4 4 0 7 6	3.2E-5	7.3E-5	1.2E-4
8	0. 1 8 2 1 8 1 5 4 8 2 9 5 2	9.4E-6	2.2E-5	2.8E-4
9	0. 1 8 2 2 1 1 4 4 2 7 6 4 6	1.3E-5	7.4E-6	1.6E-4
10	0. 1 8 2 2 1 3 6 6 9 9 6 4 1	4.2E-6	9.7E-6	1.2E-5
11	0. 1 8 2 2 0 6 9 0 7 2 8 8 8	1.5E-6	2.9E-6	3.7E-5
12	0. 1 8 2 2 0 2 8 0 0 0 6 9 4	2.0E-6	1.2E-6	2.3E-5
13	0. 1 8 2 2 0 2 5 4 1 2 3 1 1	6.1E-7	1.5E-6	1.4E-6
14	0. 1 8 2 2 0 3 5 7 7 2 0 7 3	2.6E-7	4.2E-7	5.7E-6
15	0. 1 8 2 2 0 4 2 0 3 9 8 1 2	3.2E-7	2.1E-7	3.4E-6
16	0. 1 8 2 2 0 4 2 3 4 1 0 4 3	9.6E-8	2.4E-7	1.7E-7
17	0. 1 8 2 2 0 4 0 6 2 7 8 2 5	4.7E-8	6.5E-8	9.4E-7
18	0. 1 8 2 2 0 3 9 6 0 7 6 3 5	5.5E-8	3.7E-8	5.6E-7
19	0. 1 8 2 2 0 3 9 5 7 6 0 6 5	1.6E-8	4.0E-8	1.7E-8
20	0. 1 8 2 2 0 3 9 8 7 3 9 0 8	8.8E-9	1.0E-8	1.6E-7
21	0. 1 8 2 2 0 4 0 0 4 7 3 4	9.6E-9	6.9E-9	9.5E-8
22	0. 1 8 2 2 0 4 0 0 4 9 4 6 3	2.6E-9	7.1E-9	1.2E-9
23	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 9 5 8 3 4	1.7E-9	1.7E-9	2.9E-8
24	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 6 5 4 1 8	1.7E-9	1.3E-9	1.7E-8
25	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 6 5 6 5 5	4.5E-10	1.3E-9	1.3E-10
26	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 5 5 6 5	3.2E-10	2.9E-10	5.4E-9
27	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 8 1 0 2 4	3.2E-10	2.5E-10	3.0E-9
28	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 8 0 8 6 6	7.8E-11	2.4E-10	8.7E-11
29	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 9 9 8	6.4E-11	5.0E-11	1.0E-9
30	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8	6.1E-11	5.0E-11	5.5E-10

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 1 casa decimal correcta. Mas na terceira iteração conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta na iteração nove e outra na onze. Na iteração dezoito há 7 casas decimais correctas, sendo a oitava determinada na iteração vinte e três. O processo termina na iteração trinta com 10 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 8 2 0 3 3 9 6 7 5 2 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 4 9 6			
<b>n=12</b>	0. 1 9 5 6 7 4 8 0 7 1 1 5 2	1\1		
	0. 1 9 5 6 7 4 8 0 7 1 1 5 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 6 9 8 7 3 9 2 2 8 8 4 6	2.7E-3	1.2E-2	1.5E-1
2	0. 1 8 0 3 8 3 8 9 1 2 5 8 8	5.5E-4	1.8E-3	5.8E-2
3	0. 1 8 2 5 9 6 6 8 2 7 9 9 6	4.3E-4	3.9E-4	1.2E-2
4	0. 1 8 2 4 9 8 8 9 6 0 9 9	5.7E-5	2.9E-4	5.4E-4
5	0. 1 8 2 2 4 0 8 9 8 2 2 6 1	4.5E-5	3.7E-5	1.4E-3
6	0. 1 8 2 1 7 2 0 4 9 7 1 5 4	2.4E-5	3.2E-5	3.8E-4
7	0. 1 8 2 1 8 7 4 3 3 5 6 6	6.9E-7	1.7E-5	8.4E-5
8	0. 1 8 2 2 0 3 8 4 0 1 1 5 4	4.2E-6	1.6E-7	9.0E-5
9	0. 1 8 2 2 0 6 9 4 4 1 1 4	1.6E-6	2.9E-6	1.7E-5
10	0. 1 8 2 2 0 5 0 8 2 0 0 2 6	2.4E-7	1.1E-6	1.0E-5
11	0. 1 8 2 2 0 3 8 2 0 0 4 7 6	4.1E-7	1.8E-7	6.9E-6
12	0. 1 8 2 2 0 3 7 1 6 4 8 8 5	1.0E-7	2.8E-7	5.7E-7
13	0. 1 8 2 2 0 3 9 2 9 2 3 7 4	4.5E-8	6.9E-8	1.2E-6
14	0. 1 8 2 2 0 4 0 3 0 3 2 5 5	3.9E-8	3.2E-8	5.5E-7
15	0. 1 8 2 2 0 4 0 2 4 5 8 4	5.3E-9	2.7E-8	3.2E-8
16	0. 1 8 2 2 0 4 0 0 1 1 2 6	6.4E-9	3.3E-9	1.3E-7
17	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 3 3 4 0 2	3.6E-9	4.5E-9	4.3E-8
18	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 5 3 9 5 1	1.1E-10	2.5E-9	1.1E-8
19	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 9	8.1E-10	4.0E-11	1.4E-8
20	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 8 4 0 9 9	3.1E-10	5.6E-10	2.9E-9
21	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 8 0 5 9 6	5.8E-11	2.1E-10	1.9E-9
22	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 0 5 9	9.4E-11	4.4E-11	1.4E-9
23	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 7 8 4 8	2.4E-11	6.5E-11	1.2E-10
24	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 3 4	1.2E-11	1.6E-11	2.7E-10
25	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 5 8 2	1.0E-11	8.6E-12	1.3E-10
26	0. 1 8 2 2 0 3 9 9 7 8 5 6 6	1.3E-12		8.9E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 1 casa decimal correcta. Mas, logo na seguinte, conseguem-se mais duas. Na iteração cinco há 4 casas decimais correctas, na oito há 6, na dezassete 8 e na dezanove 10. O processo termina na iteração vinte e seis com 10 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 4 3 3 9 1 3 6 0 0 6 5			
$\lambda_{100}$	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 0 5 5 8			
<b>n=10</b>	0. 1 6 4 0 1 9 4 4 0 5 6 2 6	<b>2\2</b>		
	0. 1 6 4 0 1 9 4 4 0 5 6 2 6			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 2 6 2 3 9 5 4 1 8 9 5 3	6.3E-3	1.7E-2	3.0E-1
2	0. 1 3 9 0 8 3 0 0 2 8 9 1 8	3.1E-4	4.5E-3	9.2E-2
3	0. 1 4 3 7 5 4 5 7 3 7 6 7 8	1.2E-3	1.9E-4	3.2E-2
4	0. 1 4 4 4 5 2 6 3 4 9 6 8 5	6.1E-4	8.9E-4	4.8E-3
5	0. 1 4 3 9 7 7 7 5 8 0 4 8 1	3.1E-5	4.2E-4	3.3E-3
6	0. 1 4 3 5 6 3 2 6 6 0 2 0 9	1.6E-4	1.8E-6	2.9E-3
7	0. 1 4 3 4 4 6 7 4 5 0 9 7 6	1.0E-4	1.1E-4	8.1E-4
8	0. 1 4 3 4 9 2 9 6 7 9 0 0 5	1.3E-5	6.8E-5	3.2E-4
9	0. 1 4 3 5 5 5 5 5 3 5 1 9 2	2.5E-5	5.9E-6	4.4E-4
10	0. 1 4 3 5 7 9 9 1 1 0 3 5 9	2.0E-5	1.8E-5	1.7E-4
11	0. 1 4 3 5 7 4 9 9 5 4 2 4 6	4.1E-6	1.4E-5	3.4E-5
12	0. 1 4 3 5 6 3 7 4 1 3 4 5 9	4.4E-6	2.3E-6	7.8E-5
13	0. 1 4 3 5 5 8 1 7 1 8 9 4 8	4.2E-6	3.2E-6	3.9E-5
14	0. 1 4 3 5 5 8 4 8 1 4 9 8 9	1.2E-6	2.9E-6	2.2E-6
15	0. 1 4 3 5 6 0 6 6 5 3 0 6	7.7E-7	7.5E-7	1.5E-5
16	0. 1 4 3 5 6 1 9 9 4 8 3 5	9.4E-7	5.8E-7	9.3E-6
17	0. 1 4 3 5 6 2 0 7 8 1 4 2 2	3.5E-7	6.6E-7	5.8E-7
18	0. 1 4 3 5 6 1 6 4 1 1 8 2 9	1.3E-7	2.3E-7	3.0E-6
19	0. 1 4 3 5 6 1 3 1 6 8 7 6 2	2.2E-7	9.9E-8	2.3E-6
20	0. 1 4 3 5 6 1 2 6 3 5 2 1 8	9.8E-8	1.5E-7	3.7E-7
21	0. 1 4 3 5 6 1 3 5 1 0 2 4 5	2.0E-8	6.5E-8	6.1E-7
22	0. 1 4 3 5 6 1 4 3 0 8 9 5	5.0E-8	1.5E-8	5.6E-7
23	0. 1 4 3 5 6 1 4 5 1 4 4 3 4	2.7E-8	3.5E-8	1.4E-7
24	0. 1 4 3 5 6 1 4 3 4 4 0 2 9	2.5E-9	1.8E-8	1.2E-7
25	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 4 6 9 7 3	1.1E-8	1.4E-9	1.4E-7
26	0. 1 4 3 5 6 1 4 0 7 8 7 5 2	7.5E-9	8.2E-9	4.8E-8
27	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 0 9 7 0 2	8.0E-10	5.1E-9	2.2E-8
28	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 5 8 1 1 6	2.6E-9	2.4E-10	3.4E-8
29	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 7 9 2 1 6	2.0E-9	1.9E-9	1.5E-8
30	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 7 4 4 4 4	4.0E-10	1.4E-9	3.3E-9

Na primeira iteração há apenas 1 casa decimal correcta. Na terceira iteração conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta nas iterações nove, doze, dezasseis, vinte e dois e vinte e cinco. O processo termina na iteração trinta com 8 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 12

Teórico	0. 1 4 3 3 9 1 3 6 0 0 6 5			
$\lambda_{100}$	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 0 5 5 8			
n=12	0. 1 5 7 1 9 2 5 2 2 2 8 0 8	2\2		
	0. 1 5 7 1 9 2 5 2 2 2 8 0 8			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 1 3 1 3 9 1 6 3 8 0 5 0 2	3.1E-3	1.2E-2	2.0E-1
2	0. 1 4 1 3 1 6 3 9 4 7 9 9 4	4.6E-4	2.2E-3	7.0E-2
3	0. 1 4 3 9 1 4 0 0 1 0 1 1 8	5.7E-4	3.5E-4	1.8E-2
4	0. 1 4 3 9 6 8 7 1 2 6 5 9 9	1.4E-4	4.1E-4	3.8E-4
5	0. 1 4 3 6 5 5 6 6 7 9 7 1 2	5.0E-5	9.4E-5	2.2E-3
6	0. 1 4 3 5 2 3 9 3 3 6 9 1 5	4.8E-5	3.7E-5	9.2E-4
7	0. 1 4 3 5 2 7 0 7 1 0 5 6 6	9.8E-6	3.4E-5	2.2E-5
8	0. 1 4 3 5 5 4 8 0 2 2 1 2 1	6.5E-6	6.6E-6	1.9E-4
9	0. 1 4 3 5 6 6 2 3 5 7 1 8 4	5.2E-6	4.8E-6	8.0E-5
10	0. 1 4 3 5 6 5 1 0 2 6 3 4 7	7.8E-7	3.7E-6	7.9E-6
11	0. 1 4 3 5 6 1 9 2 4 1 8 3	9.1E-7	5.1E-7	2.2E-5
12	0. 1 4 3 5 6 0 7 3 9 9 0 4 7	6.2E-7	6.8E-7	8.2E-6
13	0. 1 4 3 5 6 0 9 7 5 0 2 8 2	5.8E-8	4.4E-7	1.6E-6
14	0. 1 4 3 5 6 1 3 8 3 3 1 1 9	1.4E-7	3.3E-8	2.8E-6
15	0. 1 4 3 5 6 1 5 1 5 4 7 7 5	7.9E-8	9.9E-8	9.2E-7
16	0. 1 4 3 5 6 1 4 7 1 8 6 0 9	2.9E-9	5.6E-8	3.0E-7
17	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 1 3 5 1	2.1E-8	7.9E-11	3.9E-7
18	0. 1 4 3 5 6 1 4 0 1 0 3 1 7	1.0E-8	1.5E-8	1.1E-7
19	0. 1 4 3 5 6 1 4 0 8 7 9 0 1	8.3E-10	7.3E-9	5.4E-8
20	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 6 6 5 1	3.2E-9	6.1E-10	5.5E-8
21	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 8 3 6 3 3	1.4E-9	2.3E-9	1.2E-8
22	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 7 0 1 1 7	2.2E-10	9.6E-10	9.4E-9
23	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 5 8 7 6 4	4.9E-10	1.8E-10	7.9E-9
24	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 5 6 9 8 1	1.8E-10	3.6E-10	1.2E-9
25	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 5 9 3 0 6	5.2E-11	1.3E-10	1.6E-9
26	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 0 9 6	7.7E-11	4.0E-11	1.2E-9
27	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 1 1 1 5	2.4E-11	5.6E-11	1.1E-10
28	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 0 7 1 9	1.1E-11	1.6E-11	2.8E-10
29	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 0 4 7 7	1.2E-11	8.1E-12	1.7E-10
30	0. 1 4 3 5 6 1 4 1 6 0 4 7 1	2.9E-12		4.1E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 1 casa decimal correcta. Mas logo na segunda e terceira iterações conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta nas iterações seis, nove, onze, dezasseis e dezasete. O processo termina na iteração trinta com 10 casas decimais correctas, que já vêm desde a iteração vinte e seis a tentar estabilizar.

Núcleo B2 – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 10

Teórico	0. 1 0 5 9 1 7 3 7 0 6 8 8 8			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 9 4 7 7 4			
n=10	0. 1 2 7 1 4 7 5 7 9 3 4 8 9	313		
	0. 1 2 7 1 4 7 5 7 9 3 4 8 9			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 0 8 9 3 6 7 6 8 0 6 8 1 6	8.4E-3	1.7E-2	4.2E-1
2	0. 1 0 0 4 5 7 7 0 4 6 0 9 6	9.7E-4	5.6E-3	1.1E-1
3	0. 1 0 5 6 3 8 5 0 6 0 8 3 5	1.5E-3	4.5E-4	4.9E-2
4	0. 1 0 7 1 0 0 7 4 8 8 0 6 2	1.3E-3	1.0E-3	1.4E-2
5	0. 1 0 6 8 8 7 5 5 0 3 5 7 9	4.1E-4	8.0E-4	2.0E-3
6	0. 1 0 6 3 2 4 7 0 4 1 1 0 7	1.5E-4	2.4E-4	5.3E-3
7	0. 1 0 5 9 7 9 5 7 6 6 1 5 2	2.6E-4	1.1E-4	3.3E-3
8	0. 1 0 5 9 1 5 8 8 0 9 8 6 4	1.5E-4	1.7E-4	6.0E-4
9	0. 1 0 5 9 9 6 2 3 5 4 2 4 6	1.5E-5	9.1E-5	7.6E-4
10	0. 1 0 6 0 8 5 3 8 7 3 2 6 6	5.5E-5	2.1E-6	8.4E-4
11	0. 1 0 6 1 2 4 4 4 5 4 7 1 4	4.9E-5	3.7E-5	3.7E-4
12	0. 1 0 6 1 1 8 6 4 9 8 4 1 4	1.7E-5	3.1E-5	5.5E-5
13	0. 1 0 6 0 9 6 8 6 5 8 3 0 7	8.9E-6	9.4E-5	2.1E-4
14	0. 1 0 6 0 8 1 2 2 7 6 0 1 2	1.5E-5	6.2E-6	1.5E-4
15	0. 1 0 6 0 7 7 8 9 9 9 4 2	8.6E-6	9.6E-6	3.1E-5
16	0. 1 0 6 0 8 2 2 5 8 6 5 8 4	7.1E-7	5.2E-6	4.1E-5
17	0. 1 0 6 0 8 7 5 2 9 1 3 7 2	3.8E-6	6.0E-8	5.0E-5
18	0. 1 0 6 0 8 9 9 9 9 8 4 2 8	3.4E-6	2.5E-6	2.3E-5
19	0. 1 0 6 0 8 9 6 2 1 8 1 9 8	1.2E-6	2.2E-6	3.6E-6
20	0. 1 0 6 0 8 8 1 0 7 2 0 2	7.1E-7	6.4E-7	1.4E-5
21	0. 1 0 6 0 8 6 9 7 3 3 7 1	1.2E-6	5.0E-7	1.1E-5
22	0. 1 0 6 0 8 6 7 2 3 4 8 4 4	6.8E-7	7.5E-7	2.4E-6
23	0. 1 0 6 0 8 7 0 6 2 1 0 2	5.2E-8	4.1E-7	3.2E-6
24	0. 1 0 6 0 8 7 4 8 2 9 7 6 7	3.2E-7	1.3E-8	4.0E-6
25	0. 1 0 6 0 8 7 6 8 4 9 9 4 8	2.9E-7	2.2E-7	1.9E-6
26	0. 1 0 6 0 8 7 6 5 2 7 8 5	1.0E-7	1.8E-7	3.0E-7
27	0. 1 0 6 0 8 7 5 2 2 7 8 5 3	6.5E-8	5.3E-8	1.2E-6
28	0. 1 0 6 0 8 7 4 2 3 8 2 9	1.0E-7	4.6E-8	9.3E-7
29	0. 1 0 6 0 8 7 4 0 1 8 4 4 1	6.1E-8	6.8E-8	2.1E-7
30	0. 1 0 6 0 8 7 4 3 2 6 3 3	5.3E-9	3.7E-8	2.9E-7

Na primeira iteração não há nenhuma casa decimal correcta. Mas, logo na segunda, conseguem-se duas. O número de casas decimais correctas vai variando entre as 2 e as 6 ao longo das iterações. O processo termina na iteração trinta com apenas 7 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 5 9 1 7 3 7 0 6 8 8 8			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 9 4 7 7 4			
<b>n=12</b>	0. 1 1 9 9 9 2 2 6 4 6 1 7 3	<b>3\3</b>		
	0. 1 1 9 9 9 2 2 6 4 6 1 7 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 9 4 1 9 1 3 8 0 3 8 6 6 2	3.8E-3	1.2E-2	2.7E-1
2	0. 1 0 3 1 9 3 6 0 8 8 1 5 4	2.5E-4	2.9E-3	8.7E-2
3	0. 1 0 6 2 7 2 5 1 5 9 4 5	7.4E-4	1.9E-4	2.9E-2
4	0. 1 0 6 6 5 3 1 5 3 4 1 5 6	3.2E-4	5.7E-4	3.6E-3
5	0. 1 0 6 3 2 3 0 9 5 3 2 6 8	2.1E-5	2.4E-4	3.1E-3
6	0. 1 0 6 0 7 4 4 1 6 5 0 6 4	8.8E-5	1.3E-5	2.3E-3
7	0. 1 0 6 0 1 9 1 1 6 7 0 9 8	4.7E-5	6.8E-5	5.2E-4
8	0. 1 0 6 0 5 3 0 2 9 4 6 9 8	2.0E-6	3.4E-5	3.2E-4
9	0. 1 0 6 0 8 7 7 2 2 9 1 6 4	1.4E-5	2.5E-7	3.3E-4
10	0. 1 0 6 0 9 8 0 3 7 2 8 1 7	8.4E-6	1.1E-5	9.7E-5
11	0. 1 0 6 0 9 3 6 3 6 9 2 1 1	8.0E-7	6.2E-6	4.1E-5
12	0. 1 0 6 0 8 7 7 8 0 9 8 8 4	2.3E-6	3.1E-7	5.5E-5
13	0. 1 0 6 0 8 5 6 4 2 2 6 2 9	1.7E-6	1.8E-6	2.0E-5
14	0. 1 0 6 0 8 6 2 4 9 3 9 0 2	2.5E-7	1.2E-6	5.7E-6
15	0. 1 0 6 0 8 7 3 3 5 6 1 9 3	4.3E-7	1.3E-7	1.0E-5
16	0. 1 0 6 0 8 7 8 0 4 4 4 4 4	3.5E-7	3.3E-7	4.4E-6
17	0. 1 0 6 0 8 7 7 2 4 8 9 3	6.9E-8	2.6E-7	7.5E-7
18	0. 1 0 6 0 8 7 5 1 2 3 6 4 9	8.1E-8	4.3E-8	2.0E-6
19	0. 1 0 6 0 8 7 4 0 6 1 9 3 4	7.4E-8	6.3E-8	1.0E-6
20	0. 1 0 6 0 8 7 4 1 4 1 1 9 3	1.9E-8	5.5E-8	7.5E-8
21	0. 1 0 6 0 8 7 4 5 7 0 3 2 2	1.5E-8	1.2E-8	4.0E-7
22	0. 1 0 6 0 8 7 4 8 1 5 6 7 1	1.6E-8	1.2E-8	2.3E-7
23	0. 1 0 6 0 8 7 4 8 1 7 4 3 6	5.1E-9	1.2E-8	1.7E-9
24	0. 1 0 6 0 8 7 4 7 2 9 2 2 5	2.9E-9	3.4E-9	8.3E-8
25	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 7 1 7 9 6	3.7E-9	2.3E-9	5.4E-8
26	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 6 7 2 1 1	1.3E-9	2.8E-9	4.3E-9
27	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 8 5 4 9	5.3E-10	9.3E-10	1.7E-8
28	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 9 9 0 4 1	8.3E-10	4.3E-10	1.3E-8
29	0. 1 0 6 0 8 7 4 7 0 1 0 2 1	3.5E-10	6.2E-10	1.9E-9
30	0. 1 0 6 0 8 7 4 6 9 7 2 3 3	9.4E-11	2.5E-10	3.6E-9

Para  $n = 12$ , na primeira iteração não há nenhuma casa decimal correcta. Mas, logo na segunda, conseguem-se duas, e na terceira mais uma. A partir da iteração seis há uma oscilação no número de casas decimais correctas que vai desde 4 a 9. O processo termina na iteração trinta com apenas 9 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 8 2 0 3 3 9 6 7 5 2 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 8 3 3 8 4			
<b>n=10</b>	0. 1 9 6 9 9 1 3 0 7 3 2 2 9	<b>1\3</b>		
	0. 1 9 6 9 9 1 3 0 7 3 2 2 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 9 6 9 9 1 3 0 7 3 2 2 9	2.3E-2	1.5E-2	3.7E-14
2	0. 1 8 3 9 5 9 9 5 9 1 6 9 8	2.3E-2	1.8E-3	7.1E-2
3	0. 1 8 4 2 5 6 4 3 5 0 1 6	8.4E-3	2.1E-3	1.6E-3
4	0. 1 8 2 5 0 1 5 2 1 2 3 3 4	8.0E-3	3.3E-4	9.6E-3
5	0. 1 8 2 7 0 2 2 8 9 4 2	2.9E-3	5.3E-4	1.1E-3
6	0. 1 8 2 2 3 8 8 3 6 1 9 4 8	2.9E-3	6.6E-5	2.5E-3
7	0. 1 8 2 3 4 1 3 9 2 0 1 3 1	1.1E-3	1.7E-4	5.6E-4
8	0. 1 8 2 1 8 2 5 6 1 2 5 8	1.1E-3	9.2E-6	8.7E-4
9	0. 1 8 2 2 3 4 2 2 9 8 0 4 3	4.5E-4	6.1E-5	2.8E-4
10	0. 1 8 2 1 7 1 2 0 8 9 9 0 9	4.4E-4	2.1E-6	3.5E-4
11	0. 1 8 2 1 9 7 5 6 1 5 6 2 6	1.9E-4	2.4E-5	1.4E-4
12	0. 1 8 2 1 7 0 0 4 1 5 6 7 4	1.8E-4	3.3E-6	1.5E-4
13	0. 1 8 2 1 8 3 7 0 2 0 7 7 6	8.7E-5	1.0E-5	7.5E-5
14	0. 1 8 2 1 7 0 8 4 6 0 6 3 1	7.9E-5	2.5E-6	7.1E-5
15	0. 1 8 2 1 7 8 0 4 0 6 4 2 2	4.0E-5	4.7E-6	3.9E-5
16	0. 1 8 2 1 7 1 7 3 0 3 7 8 1	3.6E-5	1.6E-6	3.5E-5
17	0. 1 8 2 1 7 5 5 7 5 1 0 8 1	2.0E-5	2.3E-6	2.1E-5
18	0. 1 8 2 1 7 2 3 6 0 1 9 6 3	1.7E-5	9.6E-7	1.8E-5
19	0. 1 8 2 1 7 4 4 4 1 8 6 5	1.0E-5	1.1E-6	1.1E-5
20	0. 1 8 2 1 7 2 7 5 6 3 6 9 7	8.6E-6	5.6E-7	9.3E-6
21	0. 1 8 2 1 7 3 8 9 6 7 2 1 9	5.1E-6	5.8E-7	6.3E-6
22	0. 1 8 2 1 7 2 9 9 3 0 3 8 3	4.4E-6	3.3E-7	5.0E-6
23	0. 1 8 2 1 7 3 6 2 4 2 8 9 2	2.7E-6	3.1E-7	3.5E-6
24	0. 1 8 2 1 7 3 1 3 1 0 6 4 5	2.3E-6	1.9E-7	2.7E-6
25	0. 1 8 2 1 7 3 4 8 3 7 7 2 1	1.5E-6	1.7E-7	1.9E-6
26	0. 1 8 2 1 7 3 2 1 0 6 6 8 3	1.3E-6	1.1E-7	1.5E-6
27	0. 1 8 2 1 7 3 4 0 9 3 9 1 5	8.2E-7	9.1E-8	1.1E-6
28	0. 1 8 2 1 7 3 2 5 6 3 7 3 4	6.9E-7	6.2E-8	8.4E-7
29	0. 1 8 2 1 7 3 3 6 9 1 7 7 6	4.6E-7	5.1E-8	6.2E-7
30	0. 1 8 2 1 7 3 2 8 2 5 9 5	3.9E-7	3.6E-8	4.8E-7

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 1 casa decimal correcta e termina na iteração trinta só com 6 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 8 2 0 3 3 9 6 7 5 2 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 8 3 3 8 4			
<b>n=12</b>	0. 1 9 2 4 3 7 4 2 6 4 0 1 4	<b>1\3</b>		
	0. 1 9 2 4 3 7 4 2 6 4 0 1 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 9 2 4 3 7 4 2 6 4 0 1 4	1.6E-2	1.0E-2	4.1E-14
2	0. 1 8 3 0 5 2 0 6 9 4 7 4	1.3E-2	8.8E-4	5.1E-2
3	0. 1 8 3 2 2 3 8 8 1 4 9 6 4	4.4E-3	1.1E-3	9.4E-4
4	0. 1 8 2 2 8 8 9 9 2 4 2 5 7	3.5E-3	1.2E-4	5.1E-3
5	0. 1 8 2 3 7 1 0 0 0 1 3 5 3	1.2E-3	2.0E-4	4.5E-4
6	0. 1 8 2 1 8 9 4 0 6 2 8 7 8	9.5E-4	1.6E-5	1.0E-3
7	0. 1 8 2 2 2 0 0 8 0 9 9 9 9	3.6E-4	4.7E-5	1.7E-4
8	0. 1 8 2 1 7 4 5 7 5 1 1 3 9	2.7E-4	1.3E-6	2.5E-4
9	0. 1 8 2 1 8 5 9 2 8 3 3 7 8	1.1E-4	1.3E-5	6.2E-5
10	0. 1 8 2 1 7 2 7 8 7 1 5 5 8	8.0E-5	5.3E-7	7.2E-5
11	0. 1 8 2 1 7 7 0 4 0 4 7 6 4	3.5E-5	3.7E-6	2.3E-5
12	0. 1 8 2 1 7 2 8 7 7 3 6 2 9	2.5E-5	4.4E-7	2.3E-5
13	0. 1 8 2 1 7 4 4 9 5 2 7 0 7	1.2E-5	1.2E-6	8.9E-6
14	0. 1 8 2 1 7 3 0 8 7 0 4 5 4	7.9E-6	2.3E-7	7.7E-6
15	0. 1 8 2 1 7 3 7 1 1 5 6 6	4.0E-6	3.9E-7	3.4E-6
16	0. 1 8 2 1 7 3 2 1 1 4 8 9 6	2.6E-6	1.1E-7	2.7E-6
17	0. 1 8 2 1 7 3 4 5 5 7 9 5 7	1.4E-6	1.4E-7	1.3E-6
18	0. 1 8 2 1 7 3 2 7 1 4 9 8 4	9.1E-7	4.7E-8	1.0E-6
19	0. 1 8 2 1 7 3 3 6 8 2 1 8 9	5.2E-7	5.0E-8	5.3E-7
20	0. 1 8 2 1 7 3 2 9 8 3 0 4 5	3.3E-7	2.0E-8	3.8E-7
21	0. 1 8 2 1 7 3 3 3 7 0 0 8 2	2.0E-7	1.9E-8	2.1E-7
22	0. 1 8 2 1 7 3 3 0 9 8 7 0 6	1.2E-7	8.5E-9	1.5E-7
23	0. 1 8 2 1 7 3 3 2 5 5 0 7 4	7.6E-8	7.2E-9	8.6E-8
24	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 4 7 7 7 9	4.6E-8	3.6E-9	5.9E-8
25	0. 1 8 2 1 7 3 3 2 1 1 4 9 9	3.0E-8	2.8E-9	3.5E-8
26	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 6 8 4 3 6	1.8E-8	1.5E-9	2.4E-8
27	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 9 4 6 0 4	1.2E-8	1.1E-9	1.4E-8
28	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 7 7 1 0 5	7.2E-9	6.3E-10	9.6E-9
29	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 8 7 9 2 6	4.9E-9	4.5E-10	5.9E-9
30	0. 1 8 2 1 7 3 3 1 8 0 7 4 1	2.9E-9	2.6E-10	3.9E-9

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 1 casa decimal correcta e termina na iteração trinta só com 9 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 4 3 3 9 1 3 6 0 0 6 5			
$\lambda_{100}$	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 5 3 3 1 4			
<b>n=10</b>	0. 1 4 9 7 3 9 3 4 1 5 8 4 3	<b>2\4</b>		
	0. 1 4 9 7 3 9 3 4 1 5 8 4 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 1 4 9 7 3 9 3 4 1 5 8 4 3	1.6E-2	6.3E-3	2.2E-14
<b>2</b>	0. 1 4 4 8 9 4 8 5 5 8 1 2 6	2.3E-2	1.4E-3	3.3E-2
<b>3</b>	0. 1 4 3 8 1 0 8 0 5 0 5 6 3	6.6E-3	3.5E-4	7.5E-3
<b>4</b>	0. 1 4 3 7 7 5 0 1 6 0 5 6 7	7.2E-3	3.1E-4	2.5E-4
<b>5</b>	0. 1 4 3 3 7 1 5 2 5 7 6 2 5	1.9E-3	9.3E-5	2.8E-3
<b>6</b>	0. 1 4 3 5 6 7 9 5 4 4 4 8 5	2.0E-3	1.0E-4	1.4E-3
<b>7</b>	0. 1 4 3 3 8 0 8 0 3 9 9 8 7	4.8E-4	8.4E-5	1.3E-3
<b>8</b>	0. 1 4 3 5 0 6 9 3 3 6 4 2 4	5.2E-4	4.2E-5	8.8E-4
<b>9</b>	0. 1 4 3 4 1 7 8 1 2 1 6 5 9	9.2E-5	4.7E-5	6.2E-4
<b>10</b>	0. 1 4 3 4 8 3 8 6 2 9 2 9 9	1.3E-4	1.9E-5	4.6E-4
<b>11</b>	0. 1 4 3 4 4 1 3 8 3 9 6 6 6	5.3E-5	2.4E-5	3.0E-4
<b>12</b>	0. 1 4 3 4 7 3 8 7 0 2 9 5 1	4.5E-5	8.9E-6	2.3E-4
<b>13</b>	0. 1 4 3 4 5 3 6 5 3 2 5 8 5	3.2E-5	1.1E-5	1.4E-4
<b>14</b>	0. 1 4 3 4 6 9 2 6 5 2 4 4 3	2.0E-5	4.3E-6	1.1E-4
<b>15</b>	0. 1 4 3 4 5 9 6 0 5 2 1 3 1	1.6E-5	5.3E-6	6.7E-5
<b>16</b>	0. 1 4 3 4 6 7 0 8 3 1 2 2 3	8.8E-6	2.1E-6	5.2E-5
<b>17</b>	0. 1 4 3 4 6 2 4 0 8 4 0 8 4	8.4E-6	2.5E-6	3.3E-5
<b>18</b>	0. 1 4 3 4 6 6 0 3 0 0 9 4 5	4.2E-6	1.1E-6	2.5E-5
<b>19</b>	0. 1 4 3 4 6 3 7 1 7 1 3 5 6	4.8E-6	1.2E-6	1.6E-5
<b>20</b>	0. 1 4 3 4 6 5 5 1 1 1 7 5 7	2.5E-6	5.8E-7	1.3E-5
<b>21</b>	0. 1 4 3 4 6 4 3 3 2 0 7 9 1	2.8E-6	6.0E-7	8.2E-6
<b>22</b>	0. 1 4 3 4 6 5 2 4 8 1 7 8 7	1.5E-6	3.1E-7	6.4E-6
<b>23</b>	0. 1 4 3 4 6 4 6 2 6 6 5 5 8	1.5E-6	3.1E-7	4.3E-6
<b>24</b>	0. 1 4 3 4 6 5 1 1 0 2 7 7 9	9.2E-7	1.7E-7	3.4E-6
<b>25</b>	0. 1 4 3 4 6 4 7 7 1 9 8 6	8.6E-7	1.6E-7	2.4E-6
<b>26</b>	0. 1 4 3 4 6 5 0 3 5 3 7 8 7	5.4E-7	1.0E-7	1.8E-6
<b>27</b>	0. 1 4 3 4 6 4 8 4 6 2 5 6 7	4.8E-7	8.9E-8	1.3E-6
<b>28</b>	0. 1 4 3 4 6 4 9 9 3 4 1 4 9	3.2E-7	5.8E-8	1.0E-6
<b>29</b>	0. 1 4 3 4 6 4 8 8 5 5 8 5 9	2.7E-7	5.0E-8	7.5E-7
<b>30</b>	0. 1 4 3 4 6 4 9 6 9 3 4 7 1	1.8E-7	3.4E-8	5.8E-7

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 7 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 4 3 3 9 1 3 6 0 0 6 5			
$\lambda_{100}$	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 5 3 3 1 4			
<b>n=12</b>	0. 1 4 8 1 4 0 5 7 3 7 5 3 5			2\4
	0. 1 4 8 1 4 0 5 7 3 7 5 3 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 4 8 1 4 0 5 7 3 7 5 3 5	1.1E-2	4.7E-3	3.3E-14
2	0. 1 4 4 2 0 8 8 1 7 0 1 8 9	1.4E-2	7.4E-4	2.7E-2
3	0. 1 4 3 6 8 1 8 2 6 7 7 1 9	3.4E-3	2.2E-4	3.7E-3
4	0. 1 4 3 5 8 5 6 5 6 6 1 5 5	3.2E-3	1.2E-4	6.7E-4
5	0. 1 4 3 4 3 6 9 7 1 5 5 0 1	7.6E-4	2.8E-5	1.0E-3
6	0. 1 4 3 4 9 5 3 4 4 0 8 1 6	6.5E-4	3.0E-5	4.1E-4
7	0. 1 4 3 4 4 2 5 7 2 7 9 0 2	1.4E-4	2.2E-5	3.7E-4
8	0. 1 4 3 4 7 4 4 2 1 3 7 3 2	1.2E-4	9.5E-6	2.2E-4
9	0. 1 4 3 4 5 5 2 0 3 7 6 3 3	2.3E-5	9.7E-6	1.3E-4
10	0. 1 4 3 4 6 8 2 0 6 3 9 3 2	2.2E-5	3.3E-6	9.1E-5
11	0. 1 4 3 4 6 1 2 2 6 2 0 6 8	7.7E-6	3.7E-6	4.9E-5
12	0. 1 4 3 4 6 6 1 0 9 2 6 6	6.1E-6	1.2E-6	3.4E-5
13	0. 1 4 3 4 6 3 5 9 2 5 3 4 2	3.9E-6	1.3E-6	1.8E-5
14	0. 1 4 3 4 6 5 3 6 3 1 9 9 8	2.0E-6	4.3E-7	1.2E-5
15	0. 1 4 3 4 6 4 4 6 0 1 3 7 2	1.6E-6	4.8E-7	6.3E-6
16	0. 1 4 3 4 6 5 0 9 2 7 2 6 3	6.7E-7	1.6E-7	4.4E-6
17	0. 1 4 3 4 6 4 7 6 8 4 0 8 7	5.6E-7	1.7E-7	2.3E-6
18	0. 1 4 3 4 6 4 9 9 3 8 9 9 3	2.2E-7	5.9E-8	1.6E-6
19	0. 1 4 3 4 6 4 8 7 6 4 7 2	1.9E-7	5.9E-8	8.2E-7
20	0. 1 4 3 4 6 4 9 5 7 4 9 7 1	7.3E-8	2.2E-8	5.6E-7
21	0. 1 4 3 4 6 4 9 1 4 2 9 6 1	7.4E-8	2.1E-8	3.0E-7
22	0. 1 4 3 4 6 4 9 4 3 9 0 9 3	2.7E-8	8.6E-9	2.1E-7
23	0. 1 4 3 4 6 4 9 2 7 6 5 0 1	3.0E-8	7.7E-9	1.1E-7
24	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 8 7 3 6 2	1.2E-8	3.4E-9	7.7E-8
25	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 2 4 4 9 1	1.2E-8	2.9E-9	4.4E-8
26	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 6 7 1 7 1	5.6E-9	1.4E-9	3.0E-8
27	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 4 2 1 7 5	5.0E-9	1.1E-9	1.7E-8
28	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 5 9 0 7 8	2.5E-9	5.8E-10	1.2E-8
29	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 4 8 8 8 7	2.0E-9	4.4E-10	7.1E-9
30	0. 1 4 3 4 6 4 9 3 5 5 7 5 2	1.1E-9	2.4E-10	4.8E-9

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 9 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 0 5 9 1 7 3 7 0 6 8 8 8			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 6 6 2 6			
<b>n=10</b>	0. 1 0 4 4 3 7 4 6 9 7 0 3 6			3\5
	0. 1 0 4 4 3 7 4 6 9 7 0 3 6			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 1 0 4 4 3 7 4 6 9 7 0 3 6	1.1E-2	1.5E-3	3.3E-14
<b>2</b>	0. 1 0 6 7 5 9 2 2 3 9 7 9 4	2.3E-2	8.3E-4	2.2E-2
<b>3</b>	0. 1 0 4 9 7 3 5 5 4 5 0 8 3	6.2E-3	9.5E-4	1.7E-2
<b>4</b>	0. 1 0 5 8 9 4 4 7 1 0 7 7 2	5.8E-3	3.3E-5	8.7E-3
<b>5</b>	0. 1 0 5 5 9 4 7 1 2 6 5 6	1.8E-3	3.3E-4	2.8E-3
<b>6</b>	0. 1 0 5 8 3 2 8 3 2 1 8 4 3	6.2E-4	9.4E-5	2.2E-3
<b>7</b>	0. 1 0 5 8 4 5 5 7 4 0 0 7 1	2.2E-4	8.2E-5	1.2E-4
<b>8</b>	0. 1 0 5 8 6 6 8 3 1 0 5 8 6	1.7E-4	6.0E-5	2.0E-4
<b>9</b>	0. 1 0 5 9 1 2 3 9 2 5 8 6 2	9.4E-5	1.5E-5	4.3E-4
<b>10</b>	0. 1 0 5 9 0 0 4 1 8 4 4 1 7	1.2E-4	2.7E-5	1.1E-4
<b>11</b>	0. 1 0 5 9 2 5 3 8 9 7 3 2 7	6.6E-5	1.8E-6	2.4E-4
<b>12</b>	0. 1 0 5 9 1 7 8 3 7 2 1 4 1	5.2E-5	9.3E-6	7.1E-5
<b>13</b>	0. 1 0 5 9 2 7 0 7 4 1 8 4 1	2.1E-5	1.0E-7	8.7E-5
<b>14</b>	0. 1 0 5 9 2 4 5 0 1 5 0 7 9	2.0E-5	2.7E-6	2.4E-5
<b>15</b>	0. 1 0 5 9 2 7 2 3 9 4 2 8 3	2.9E-6	6.2E-8	2.6E-5
<b>16</b>	0. 1 0 5 9 2 6 5 2 5 2 1 6 7	7.2E-6	6.5E-7	6.7E-6
<b>17</b>	0. 1 0 5 9 2 7 2 7 3 6 8 8 5	7.2E-7	9.6E-8	7.1E-6
<b>18</b>	0. 1 0 5 9 2 7 0 4 0 7 7 8	2.0E-6	1.4E-7	2.2E-6
<b>19</b>	0. 1 0 5 9 2 7 2 5 6 4 6 8 2	4.9E-7	7.9E-8	2.0E-6
<b>20</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 6 2 6 1 5 9	2.8E-7	1.5E-8	8.9E-7
<b>21</b>	0. 1 0 5 9 2 7 2 1 8 8 9 7 9	1.5E-7	4.1E-8	5.3E-7
<b>22</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 9 0 4 8 1 3	9.9E-8	1.3E-8	2.7E-7
<b>23</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 9 1 3 8 3 9	4.9E-8	1.4E-8	8.5E-9
<b>24</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 9 2 6 6 0 4	1.0E-7	1.5E-8	1.2E-8
<b>25</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 9 5 6 0 2	1.3E-8	1.9E-9	1.2E-7
<b>26</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 8 7 7 8 0 8	5.3E-8	1.0E-8	7.8E-8
<b>27</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 6 7 8 3 7	1.2E-8	8.8E-10	1.0E-7
<b>28</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 8 2 8 5 5 5	2.4E-8	5.2E-9	5.7E-8
<b>29</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 6 9 3 4 2	6.2E-9	7.3E-10	5.6E-8
<b>30</b>	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 9 8 4 0 4	1.1E-8	2.2E-9	2.7E-8

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 8 casas decimais correctas.

Núcleo B2 – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 5 9 1 7 3 7 0 6 8 8 8			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 6 6 2 6			
<b>n=12</b>	0. 1 0 5 3 8 4 5 4 3 0 6 5 3	<b>3\5</b>		
	0. 1 0 5 3 8 4 5 4 3 0 6 5 3			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 0 5 3 8 4 5 4 3 0 6 5 3	7.1E-3	5.4E-4	2.3E-14
2	0. 1 0 6 4 4 2 1 0 0 0 8 2 5	1.4E-2	5.1E-4	9.9E-3
3	0. 1 0 5 4 8 8 6 9 3 1 2 9 7	3.0E-3	4.4E-4	9.0E-3
4	0. 1 0 5 9 4 2 8 7 7 3 4 7	2.7E-3	1.6E-5	4.3E-3
5	0. 1 0 5 7 9 4 8 0 0 3 7 6 4	6.7E-4	1.3E-4	1.4E-3
6	0. 1 0 5 9 0 8 3 6 2 2 7 7	2.5E-4	1.9E-5	1.1E-3
7	0. 1 0 5 9 0 0 1 2 5 9 8 9 9	7.4E-5	2.7E-5	7.8E-5
8	0. 1 0 5 9 1 5 5 7 0 9 9 2 7	3.6E-5	1.2E-5	1.5E-4
9	0. 1 0 5 9 2 3 3 6 0 0 5 5	2.0E-5	3.8E-6	7.4E-5
10	0. 1 0 5 9 2 2 6 6 9 4 5 2 4	2.3E-5	4.5E-6	6.5E-6
11	0. 1 0 5 9 2 7 0 5 4 2 5 2 7	1.1E-5	1.2E-7	4.1E-5
12	0. 1 0 5 9 2 5 8 1 5 7 1 8 9	7.0E-6	1.4E-6	1.2E-5
13	0. 1 0 5 9 2 7 3 1 7 6 4 8	3.1E-6	1.4E-7	1.4E-5
14	0. 1 0 5 9 2 6 8 4 5 0 9 5 8	1.8E-6	3.3E-7	4.5E-6
15	0. 1 0 5 9 2 7 2 4 1 0 1 3 3	4.5E-7	6.3E-8	3.7E-6
16	0. 1 0 5 9 2 7 1 1 2 7 0 5 7	4.8E-7	6.5E-8	1.2E-6
17	0. 1 0 5 9 2 7 1 9 9 1 2 8 3	6.7E-8	2.1E-8	8.2E-7
18	0. 1 0 5 9 2 7 1 6 8 2 4 8 1	1.2E-7	9.4E-9	2.9E-7
19	0. 1 0 5 9 2 7 1 8 5 0 6 1 5	4.8E-8	7.4E-9	1.6E-7
20	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 0 7 5 6	2.2E-8	5.9E-10	7.5E-8
21	0. 1 0 5 9 2 7 1 8 0 2 9 2 6	1.8E-8	2.6E-9	3.0E-8
22	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 9 6 2 7	2.6E-9	3.0E-10	2.2E-8
23	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 8 5 1 7 6	4.4E-9	8.6E-10	5.2E-9
24	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 8 9 7 9	1.7E-9	2.4E-10	5.9E-9
25	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 8 8 4 5	1.0E-9	2.2E-10	1.3E-10
26	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 7 9 3 8	9.4E-10	1.3E-10	8.6E-10
27	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 6 9 7 9	1.9E-10	3.5E-11	9.1E-10
28	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 7 2 5 1	3.5E-10	6.3E-11	2.6E-10
29	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 6 5 9 6	4.5E-11	3.0E-12	6.2E-10
30	0. 1 0 5 9 2 7 1 7 7 6 8 8 1	1.1E-10		2.7E-10

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Embora parta da primeira iteração com 3 casas decimais correctas, termina na iteração trinta com apenas 10 casas decimais correctas.

Núcleo C – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 10

$\lambda_{100}$	1. 6 4 1 8 7 7 4 1 9 4 2 2			
n=10	1. 5 2 8 4 5 7 4 2 1 1 8	1\1		
	1. 5 2 8 4 5 7 4 2 1 1 8			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	1. 6 8 5 0 8 8 4 5 5 2 6	1.2E-2	4.3E-2	9.3E-2
2	1. 6 3 7 1 9 8 7 0 5 3 8 2	4.3E-3	4.7E-3	2.9E-2
3	1. 6 4 3 7 4 8 4 9 5 2 6 6	1.3E-3	1.9E-3	4.0E-3
4	1. 6 4 1 3 4 0 8 0 7 6 6 5	4.9E-4	5.4E-4	1.5E-3
5	1. 6 4 2 0 8 3 2 8 9 1 0 5	1.8E-4	2.1E-4	4.5E-4
6	1. 6 4 1 8 0 1 5 8 8 6 5 4	7.4E-5	7.6E-5	1.7E-4
7	1. 6 4 1 9 0 7 7 1 3 2 7 7	3.0E-5	3.0E-5	6.5E-5
8	1. 6 4 1 8 6 5 2 1 1 5 9 5	1.2E-5	1.2E-5	2.6E-5
9	1. 6 4 1 8 8 2 5 0 0 1 0 1	5.3E-6	5.1E-6	1.1E-5
10	1. 6 4 1 8 7 5 2 8 4 4 0 6	2.3E-6	2.1E-6	4.4E-6
11	1. 6 4 1 8 7 8 3 3 9 6 6 6	9.8E-7	9.2E-7	1.9E-6
12	1. 6 4 1 8 7 7 0 2 7 0 7 8	4.3E-7	3.9E-7	8.0E-7
13	1. 6 4 1 8 7 7 5 9 7 1 4 3	1.9E-7	1.8E-7	3.5E-7
14	1. 6 4 1 8 7 7 3 4 7 1 3 6	8.3E-8	7.2E-8	1.5E-7
15	1. 6 4 1 8 7 7 4 5 7 6 7 1	4.0E-8	3.8E-8	6.7E-8
16	1. 6 4 1 8 7 7 4 0 8 4 5 1	1.5E-8	1.1E-8	3.0E-8
17	1. 6 4 1 8 7 7 4 3 0 5 0 4	9.5E-9	1.1E-8	1.3E-8
18	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 0 5 6 8	3.2E-9	1.1E-9	6.1E-9
19	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 5 0 6 6	4.7E-9	5.6E-9	2.7E-9
20	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 0 2 1	4.0E-9	3.6E-9	1.2E-9
21	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 9 5 5	4.3E-9	4.5E-9	5.7E-10
22	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 5 2 7	4.1E-9	4.1E-9	2.6E-10
23	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 7 2 4	4.2E-9	4.3E-9	1.2E-10
24	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 3 3	4.2E-9	4.2E-9	5.5E-11
25	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 7 5	4.2E-9	4.3E-9	2.6E-11
26	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 5 6	4.2E-9	4.2E-9	1.2E-11
27	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 6 5	4.2E-9	4.2E-9	5.5E-12
28	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 6	4.2E-9	4.2E-9	
29	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 6 2	4.2E-9	4.2E-9	
30	1. 6 4 1 8 7 7 4 2 3 6 6 1	4.2E-9	4.2E-9	

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 1 casa decimal correcta e termina na iteração trinta só com 7 casas decimais correctas.

Núcleo C – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 12

$\lambda_{100}$	1. 6 4 1 8 7 7 4 1 9 4 2 2			
n=12	1. 5 5 3 8 1 2 3 6 1 7 1 5	. 1\1		
	1. 5 5 3 8 1 2 3 6 1 7 1 5			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	1. 6 7 3 0 8 8 1 5 7 4 3 6	7.3E-3	3.1E-2	7.1E-2
2	1. 6 3 9 3 2 1 5 3 7 2 4 5	2.2E-3	2.6E-3	2.1E-2
3	1. 6 4 2 7 7 0 9 8 2 2 3 6	5.5E-4	8.9E-4	2.1E-3
4	1. 6 4 1 6 7 8 4 0 0 6 2 4	1.7E-4	2.0E-4	6.7E-4
5	1. 6 4 1 9 4 1 1 1 0 6 6	5.1E-5	6.4E-5	1.6E-4
6	1. 6 4 1 8 5 8 6 8 9 9 0 7	1.7E-5	1.9E-5	5.0E-5
7	1. 6 4 1 8 8 3 5 0 3 2 0 5	5.5E-6	6.1E-6	1.5E-5
8	1. 6 4 1 8 7 5 4 0 9 4 1 3	1.9E-6	2.0E-6	4.9E-6
9	1. 6 4 1 8 7 8 0 6 3 6 8 9	6.4E-7	6.4E-7	1.6E-6
10	1. 6 4 1 8 7 7 1 6 5 6 2 9	2.2E-7	2.5E-7	5.5E-7
11	1. 6 4 1 8 7 7 4 7 3 0 1 5	8.0E-8	5.4E-8	1.9E-7
12	1. 6 4 1 8 7 7 3 6 6 1 0 1	2.6E-8	5.3E-8	6.5E-8
13	1. 6 4 1 8 7 7 4 0 3 6 6 6	1.2E-8	1.6E-8	2.3E-8
14	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 0 3 3 3	3.0E-9	2.9E-8	8.1E-9
15	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 5 1 0 3	3.7E-9	2.4E-8	2.9E-9
16	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 3 8 4	3.0E-9	2.6E-8	1.0E-9
17	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 4 0 0 7	3.2E-9	2.5E-8	3.8E-10
18	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 7 8	3.2E-9	2.6E-8	1.4E-10
19	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 6 3	3.2E-9	2.6E-8	5.1E-11
20	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 3 2	3.2E-9	2.6E-8	1.9E-11
21	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 4	3.2E-9	2.6E-8	6.9E-12
22	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4	3.2E-9	2.6E-8	
23	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
24	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
25	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
26	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
27	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
28	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
29	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	
30	1. 6 4 1 8 7 7 3 9 3 8 4 1	3.2E-9	2.6E-8	

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 1 casa decimal correcta e termina na iteração trinta só com 6 casas decimais correctas.

Núcleo C – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 10

$\lambda_{100}$	- 0. 2 2 5 7 6 9 2 9 5 2 6 4 7			
n=10	- 0. 2 3 6 9 0 8 7 3 9 2 5 8 5	2\2		
	- 0. 2 3 6 9 0 8 7 3 9 2 5 8 5			
KITER	- LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	- 0. 1 8 4 7 2 0 6 8 1 6 4 2	6.9E-2	4.1E-2	2.8E-1
2	- 0. 2 1 6 9 1 8 5 3 2 9 2 8 1	3.4E-2	8.9E-3	1.5E-1
3	- 0. 2 2 9 9 1 3 4 6 2 3 6 6 3	8.8E-3	4.1E-3	5.7E-2
4	- 0. 2 3 0 3 9 6 1 9 8 1 1 9 8	1.6E-2	4.6E-3	2.1E-3
5	- 0. 2 2 6 7 5 3 9 7 3 6 2 2	9.1E-3	9.8E-4	1.6E-2
6	- 0. 2 2 4 3 7 8 4 8 3 2 6 7 7	3.5E-3	1.4E-3	1.1E-2
7	- 0. 2 2 4 4 4 9 0 3 8 2 0 2	5.5E-3	1.3E-3	3.1E-4
8	- 0. 2 2 5 6 1 4 7 0 3 6 5 2 9	3.2E-3	1.5E-4	5.2E-3
9	- 0. 2 2 6 3 5 9 1 4 7 7 6 2 3	1.7E-3	5.9E-4	3.3E-3
10	- 0. 2 2 6 2 5 1 7 4 9 1 9 2 9	2.3E-3	4.8E-4	4.7E-4
11	- 0. 2 2 5 7 6 8 9 0 1 0 1 8 9	1.3E-3	3.9E-7	2.1E-3
12	- 0. 2 2 5 4 9 0 4 4 5 5 4 1 3	9.1E-4	2.8E-4	1.2E-3
13	- 0. 2 2 5 5 7 2 8 3 5 0 1 8 2	1.1E-3	2.0E-4	3.7E-4
14	- 0. 2 2 5 7 9 6 9 2 4 2 6 3 8	5.4E-4	2.8E-5	9.9E-4
15	- 0. 2 2 5 9 0 9 1 3 1 0 9 8 5	5.0E-4	1.4E-4	5.0E-4
16	- 0. 2 2 5 8 5 8 4 3 8 6 9 9 1	5.3E-4	8.4E-5	2.5E-4
17	- 0. 2 2 5 7 4 2 9 7 2 0 0 9 4	2.3E-4	2.6E-5	4.9E-4
18	- 0. 2 2 5 6 9 6 6 8 0 5 1 8	2.8E-4	7.3E-5	2.1E-4
19	- 0. 2 2 5 7 3 2 6 1 4 6 5 7 9	2.8E-4	3.7E-5	1.6E-4
20	- 0. 2 2 5 7 8 8 9 7 8 3 2	9.6E-5	2.0E-5	2.5E-4
21	- 0. 2 2 5 8 0 7 7 6 4 9 8 5 9	1.6E-4	3.8E-5	8.3E-5
22	- 0. 2 2 5 7 8 5 1 0 4 0 8 8 6	1.5E-4	1.6E-5	1.0E-4
23	- 0. 2 2 5 7 5 5 7 7 6 6 7 2 1	3.8E-5	1.4E-5	1.3E-4
24	- 0. 2 2 5 7 4 8 6 5 9 1 0 9	9.2E-5	2.1E-5	3.2E-5
25	- 0. 2 2 5 7 6 2 7 5 3 2 2 3 2	7.7E-5	6.5E-6	6.2E-5
26	- 0. 2 2 5 7 7 8 1 6 3 9 8 2 8	1.8E-5	8.9E-6	6.8E-5
27	- 0. 2 2 5 7 8 0 3 9 9 3 0 8 5	5.3E-5	1.1E-5	9.9E-6
28	- 0. 2 2 5 7 7 1 7 1 9 9 0 8 4	4.1E-5	2.4E-6	3.8E-5
29	- 0. 2 2 5 7 6 3 6 0 1 1 3 4 8	1.4E-5	5.7E-6	3.6E-5
30	- 0. 2 2 5 7 6 3 3 0 0 9 5 2 5	3.0E-5	6.0E-6	1.3E-6

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração sem nenhuma casa decimal correcta e termina na iteração trinta apenas com 5 casas decimais correctas.

Núcleo C – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 12

$\lambda_{100}$	- 0. 2 2 5 7 6 9 2 9 5 2 6 4 7			
n=12	- 0. 2 3 2 0 6 3 1 8 2 0 1 6 3	2\2		
	- 0. 2 3 2 0 6 3 1 8 2 0 1 6 3			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	- 0. 1 9 5 1 9 9 5 0 6 2 1 1 1	4.8E-2	3.1E-2	1.9E-1
2	- 0. 2 2 0 8 7 5 7 1 8 1 9 8 2	1.8E-2	4.9E-3	1.2E-1
3	- 0. 2 2 8 6 1 2 8 1 9 3 2 3	6.8E-3	2.8E-3	3.4E-2
4	- 0. 2 2 7 8 9 8 6 2 1 7 9 7 6	7.1E-3	2.1E-3	3.1E-3
5	- 0. 2 2 5 8 4 6 1 0 4 1 0 5 5	2.6E-3	7.7E-5	9.1E-3
6	- 0. 2 2 5 1 2 0 1 0 1 0 4 2 1	2.0E-3	6.5E-4	3.2E-3
7	- 0. 2 2 5 4 4 0 0 9 1 7 2 5 4	1.5E-3	3.3E-4	1.4E-3
8	- 0. 2 2 5 8 5 3 8 2 9 5 4	3.8E-4	8.5E-5	1.8E-3
9	- 0. 2 2 5 9 4 1 0 8 4 7 6 4 8	6.3E-4	1.7E-4	3.9E-4
10	- 0. 2 2 5 8 2 1 8 8 7 3 6 7 7	3.9E-4	5.3E-5	5.3E-4
11	- 0. 2 2 5 7 2 3 8 4 0 7 1 8 7	1.1E-4	4.5E-5	4.3E-4
12	- 0. 2 2 5 7 2 2 6 6 6 3 7 6 7	2.0E-4	4.7E-5	5.2E-6
13	- 0. 2 2 5 7 6 4 7 2 8 3 5 3 8	9.7E-5	4.6E-6	1.9E-4
14	- 0. 2 2 5 7 8 7 9 1 8 3 0 9 8	5.9E-5	1.9E-5	1.0E-4
15	- 0. 2 2 5 7 8 1 4 7 1 3 5 4 8	5.9E-5	1.2E-5	2.9E-5
16	- 0. 2 2 5 7 6 7 2 8 1 1 1 8 5	2.1E-5	2.0E-6	6.3E-5
17	- 0. 2 2 5 7 6 2 4 7 6 0 4 9 1	2.5E-5	6.8E-6	2.1E-5
18	- 0. 2 2 5 7 6 6 5 0 9 4 3 7 1	1.9E-5	2.8E-6	1.8E-5
19	- 0. 2 2 5 7 7 1 0 4 1 8 2 9 2	3.3E-6	1.7E-6	2.0E-5
20	- 0. 2 2 5 7 7 1 6 3 2 4 4 8 7	9.8E-6	2.3E-6	2.6E-6
21	- 0. 2 2 5 7 6 9 7 6 5 0 5 9 2	5.8E-6	4.7E-7	8.3E-6
22	- 0. 2 2 5 7 6 8 4 2 6 0 1 9	2.6E-6	8.7E-7	5.9E-6
23	- 0. 2 2 5 7 6 8 5 8 9 3 0 6 1	3.5E-6	7.1E-7	7.2E-7
24	- 0. 2 2 5 7 6 9 3 4 4 7 2 6 7	1.5E-6	4.9E-8	3.3E-6
25	- 0. 2 2 5 7 6 9 6 9 2 0 6 8 9	1.4E-6	4.0E-7	1.5E-6
26	- 0. 2 2 5 7 6 9 5 1 1 5 0 5 5	1.2E-6	2.2E-7	8.0E-7
27	- 0. 2 2 5 7 6 9 2 3 3 8 5 4 1	3.6E-7	6.1E-8	1.2E-6
28	- 0. 2 2 5 7 6 9 1 6 6 4 5 2 1	5.9E-7	1.3E-7	3.0E-7
29	- 0. 2 2 5 7 6 9 2 6 8 7 2 5 7	3.8E-7	2.7E-8	4.5E-7
30	- 0. 2 2 5 7 6 9 3 6 1 7 0 2 5	1.4E-7	6.6E-8	4.1E-7

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração sem nenhuma casa decimal correcta e termina na iteração trinta só com 6 casas decimais correctas.

Núcleo C – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 10

$\lambda_{100}$	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 7 7 4 5 1			
n=10	- 0. 6 9 8 4 0 5 0 9 1 5 3 9 1	5\5		
	- 0. 6 9 8 4 0 5 0 9 1 5 3 9 1			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	- 0. 6 2 9 5 7 7 4 6 4 2 3 8 4	5.0E-3	3.3E-2	1.1E-1
2	- 0. 6 5 9 5 2 3 4 6 4 4 3 6	1.7E-3	3.3E-3	4.5E-2
3	- 0. 6 6 3 8 9 8 4 7 2 2 5 1 6	6.1E-4	1.1E-3	6.6E-3
4	- 0. 6 6 3 2 7 7 8 2 6 8 0 8 1	7.8E-5	4.5E-4	9.4E-4
5	- 0. 6 6 2 8 1 8 3 3 6 9 9 8 9	7.2E-5	8.7E-6	6.9E-4
6	- 0. 6 6 2 7 7 6 2 1 8 8 3 4 7	1.7E-5	5.1E-5	6.4E-5
7	- 0. 6 6 2 8 1 6 3 5 3 9 4 4 7	6.6E-6	1.1E-5	6.1E-5
8	- 0. 6 6 2 8 3 0 9 1 4 1 7 2 1	3.2E-6	3.9E-6	2.2E-5
9	- 0. 6 6 2 8 2 9 3 9 4 2 6 7 1	4.9E-7	2.4E-6	2.3E-6
10	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 8 0 6 8 6 4	4.7E-7	5.3E-8	3.5E-6
11	- 0. 6 6 2 8 2 6 7 0 4 3 5 1 7	1.4E-7	3.2E-7	5.7E-7
12	- 0. 6 6 2 8 2 6 9 3 7 1 1 0 7	4.8E-8	9.1E-8	3.5E-7
13	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 4 6 8 3	2.7E-8	2.5E-8	1.7E-7
14	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 4 7 9 7 3 2	4.8E-9	2.0E-8	6.8E-9
15	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 9 2 6 8 8	4.2E-9	1.5E-9	2.8E-8
16	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 4 9 8 8 6	1.5E-9	2.8E-9	6.5E-9
17	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 6 7 6 7 4	4.2E-10	9.8E-10	2.7E-9
18	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 9 2 2 9	2.8E-10	1.8E-10	1.7E-9
19	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 9 5 0 8	6.0E-11	2.1E-10	4.2E-11
20	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 7 7 2	4.1E-11	2.7E-11	2.7E-10
21	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 7 1 8 7	1.7E-11	2.6E-11	8.0E-11
22	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 7 3 3 5	3.9E-12	1.2E-11	2.2E-11
23	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 7 4 6 3		1.2E-12	1.9E-11
24	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 2 7 7 4 7 4			1.6E-12

Na primeira iteração há apenas 1 casa decimal correcta. Mas, na terceira, consegue-se mais uma e outra na quinta. É obtida uma casa decimal correcta em cada uma das seguintes iterações : quinze, dezoito, vinte e vinte e três. O processo termina na iteração vinte e quatro com 11 casas decimais correctas.

Núcleo C – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 12

$\lambda_{100}$	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 7 7 4 5 1			
n=12	- 0. 6 8 8 6 5 4 7 0 4 3 4 7 3	4\4		
	- 0. 6 8 8 6 5 4 7 0 4 3 4 7 3			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	- 0. 6 3 8 2 7 1 9 1 7 7 0 8 2	3.1E-3	2.5E-2	7.9E-2
2	- 0. 6 6 1 0 0 4 8 2 5 3 0 2 2	1.0E-3	1.8E-3	3.4E-2
3	- 0. 6 6 3 4 8 7 5 6 2 4 9 6 1	2.7E-4	6.6E-4	3.7E-3
4	- 0. 6 6 3 0 2 2 3 2 7 5 6 4 2	4.6E-5	2.0E-4	7.0E-4
5	- 0. 6 6 2 8 1 0 3 9 7 7 9 1 5	2.5E-5	1.7E-5	3.2E-4
6	- 0. 6 6 2 8 0 8 5 1 2 9 0 3 5	4.1E-6	1.9E-5	2.8E-6
7	- 0. 6 6 2 8 2 5 3 3 4 4 6 4 4	2.3E-6	1.7E-6	2.5E-5
8	- 0. 6 6 2 8 2 8 4 9 6 5 6 8 3	6.4E-7	1.5E-6	4.8E-6
9	- 0. 6 6 2 8 2 7 4 8 6 3 9 5	1.7E-7	4.6E-7	1.5E-6
10	- 0. 6 6 2 8 2 6 9 8 4 7 9 9 5	8.2E-8	4.3E-8	7.6E-7
11	- 0. 6 6 2 8 2 6 9 9 3 9 5 2 5	1.4E-8	3.4E-8	1.4E-8
12	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 4 8 8 5 0 6	9.5E-9	2.1E-8	8.3E-8
13	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 8 5 3 0 6	6.7E-9	3.1E-8	1.5E-8
14	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 4 3 0 7 4	7.4E-9	2.7E-8	6.4E-9
15	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 3 7 7 7	6.9E-9	2.5E-8	2.9E-9
16	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 4 8 0 1	6.6E-9	2.5E-8	1.5E-10
17	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 2 5 5	6.6E-9	2.5E-8	3.7E-10
18	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 6 2 8	6.6E-9	2.5E-8	5.6E-11
19	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 4 1 1	6.6E-9	2.5E-8	3.3E-11
20	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 2 2	6.6E-9	2.5E-8	1.3E-11
21	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 7 3 3	6.6E-9	2.5E-8	1.2E-12
22	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	
23	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 4	6.6E-9	2.5E-8	
24	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 3	6.6E-9	2.5E-8	
25	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	
26	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	
27	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	
28	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	
29	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	
30	- 0. 6 6 2 8 2 7 0 5 2 7 3 4 2	6.6E-9	2.5E-8	

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 1 casa decimal correcta e termina na iteração trinta só com 7 casas decimais correctas.

Núcleo D – Aproximação de Sloan – 1º vp

$\lambda_{100}$	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 4 3			
n=10	1. 3 5 3 6 3 3 8 9 3 8 2 6	1\1		
	1. 3 5 3 6 3 3 8 9 3 8 2 6			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	1. 3 5 3 6 3 3 8 9 4 2 1	3.4E-6	6.0E-4	2.8E-10
2	1. 3 5 3 0 3 5 1 5 1 7 1 3	4.1E-7	9.8E-9	4.4E-4
3	1. 3 5 3 0 3 5 4 2 5 5 8	3.1E-9	2.6E-7	2.0E-7
4	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 4 1 3	3.6E-10	1.3E-10	2.0E-7
5	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 7 7 6	3.5E-12	2.3E-10	2.7E-10
6	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 4 3		4.5E-13	1.7E-10
7	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 4 3			3.9E-13
$\lambda_{100}$	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 4 3			
n=12	1. 3 5 3 4 3 4 3 9 3 8 3 5	1\1		
	1. 3 5 3 4 3 4 3 9 3 8 3 5			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	1. 3 5 3 4 3 4 3 9 4 3 3 4	2.3E-6	4.0E-4	3.7E-10
2	1. 3 5 3 0 3 5 1 5 7 0 2 7	1.8E-7	4.5E-9	3.0E-4
3	1. 3 5 3 0 3 5 2 7 8 9 4 8	1.4E-9	1.2E-7	9.0E-8
4	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 0 4	1.1E-10	3.9E-11	8.7E-8
5	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 6 1 2	1.0E-12	6.9E-11	8.0E-11
6	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 4 3		2.4E-13	5.1E-11
7	1. 3 5 3 0 3 5 1 6 1 5 4 3			7.8E-14

Quer para  $n = 10$  quer para  $n = 12$ , o processo foi muito rápido. Parte da primeira iteração com 3 casas decimais correctas e termina na iteração sete com 12 casas decimais correctas.

Núcleo D – Aproximação de Sloan – 2º vp

$\lambda_{100}$	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 5 4			
n=10	0. 1 0 6 0 2 2 0 9 8 8 5 6 4	2\2		
	0. 1 0 6 0 2 2 0 9 8 8 5 6 4			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 1 0 6 0 2 2 0 9 8 9 9 5 4	3.8E-3	3.9E-5	1.3E-9
2	0. 1 0 5 9 8 3 5 7 0 9 9 3 9	2.3E-5	1.1E-8	3.6E-4
3	0. 1 0 5 9 8 3 7 0 3 6 8 0 9	2.4E-5	1.4E-7	1.3E-6
4	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 1 2 0 5	2.9E-7	7.5E-10	1.4E-6
5	0. 1 0 5 9 8 3 5 6 0 8 2 2 9	1.6E-7	9.5E-10	1.6E-8
6	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 6 4 6	3.0E-9	1.1E-11	9.0E-9
7	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 8 2	1.1E-9	6.6E-12	1.6E-10
8	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 5 3	2.8E-11		6.3E-11
9	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 5 4	8.2E-12		1.5E-12
$\lambda_{100}$	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 5 4			
n=12	0. 1 0 6 0 0 9 5 8 4 8 4 4 9	2\2		
	0. 1 0 6 0 0 9 5 8 4 8 4 4 9			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 1 0 6 0 0 9 5 8 4 9 2 4 8	2.5E-3	2.6E-5	7.5E-10
2	0. 1 0 5 9 8 3 5 6 4 7 4 3 1	1.0E-5	4.9E-9	2.5E-4
3	0. 1 0 5 9 8 3 6 2 5 1 6 8 4	1.1E-5	6.5E-8	5.7E-7
4	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 6 4 5 7	8.7E-8	2.3E-10	6.2E-7
5	0. 1 0 5 9 8 3 5 6 0 1 6 2 3	4.8E-8	2.9E-10	4.9E-9
6	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 3 2	5.9E-10	2.2E-12	2.7E-9
7	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 6 7	2.2E-10		3.3E-11
8	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7 5 4	3.7E-12		1.3E-11
9	0. 1 0 5 9 8 3 5 5 9 8 7			2.1E-13

Quer para  $n = 10$  quer para  $n = 12$ , o processo foi muito rápido. Parte da primeira iteração com 2 casas decimais correctas e termina na iteração nove com 13 casas decimais correctas.

Núcleo D – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 10

$\lambda_{100}$	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 8			
n=10	0. 0 0 3 5 6 1 0 8 0 1 8 4 8 1 9	3\3		
	0. 0 0 3 5 6 1 0 8 0 1 8 4 8 1 7			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 0 0 3 5 6 1 0 8 0 2 0 3 9 1 6	2.4E-2	3.2E-7	5.4E-9
2	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 0 5 6 4 8 2	4.6E-3	3.1E-10	9.0E-5
3	0. 0 0 3 5 6 0 6 1 6 2 7 1 6 5 1	5.4E-3	1.4E-7	4.0E-5
4	0. 0 0 3 5 6 0 7 8 4 8 5 7 8 3 3	1.7E-3	2.5E-8	4.7E-5
5	0. 0 0 3 5 6 0 7 2 9 2 3 0 2 0 1	1.3E-3	3.0E-8	1.6E-5
6	0. 0 0 3 5 6 0 7 6 9 0 7 0 1 0 6	5.2E-4	9.7E-9	1.1E-5
7	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 2 4 1 9 3 5 5	3.1E-4	7.0E-9	4.7E-6
8	0. 0 0 3 5 6 0 7 6 2 2 7 0 5 0 7	1.5E-4	2.9E-9	2.8E-6
9	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 7 6 5 4 8 6 2	7.9E-5	1.7E-9	1.3E-6
10	0. 0 0 3 5 6 0 7 6 0 1 7 3 6 5 2	3.9E-5	8.0E-10	7.1E-7
11	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 8 9 3 2 3 4 7	2.1E-5	4.4E-10	3.5E-7
12	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 5 8 6 2 5 9	1.0E-5	2.2E-10	1.8E-7
13	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 2 5 6 8 6 2	5.4E-6	1.1E-10	9.3E-8
14	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 4 2 7 6 7 8	2.7E-6	5.7E-11	4.8E-8
15	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 4 0 8 3 3	1.4E-6	3.0E-11	2.4E-8
16	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 8 5 5 4 2	7.2E-7	1.5E-11	1.3E-8
17	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 6 2 7 2 8	3.7E-7	7.8E-12	6.4E-9
18	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 4 4 3 2	1.9E-7		3.3E-9
19	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 6 8 4 5 2	9.6E-8		1.7E-9
20	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 1 5 1 3	4.9E-8		8.6E-10
21	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 6 9 9 4 9	2.5E-8		4.4E-10
22	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 7 4 9	1.3E-8		2.2E-10
23	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 3 4	6.6E-9		1.1E-10
24	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 5 4 9	3.3E-9		5.9E-11
25	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 4 3	1.7E-9		3.0E-11
26	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 9 7	8.7E-10		1.5E-11
27	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 6 9	4.5E-10		7.8E-12
28	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 8 3	2.2E-10		
29	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 6	1.2E-10		
30	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 8	5.7E-11		

Na primeira iteração há 5 casas decimais correctas. Logo na segunda iteração conseguem-se mais quatro. Mas na terceira há apenas 6 . É obtida uma casa decimal correcta nas iterações quatro, sete, doze, quinze, dezoito, vinte e dois e vinte e cinco. O processo termina na iteração trinta com 13 casas decimais correctas.

Núcleo D – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 12

$\lambda_{100}$	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 8			
n=12	0. 0 0 3 5 6 1 2 0 2 0 0 9 7 7 4	3\3		
	0. 0 0 3 5 6 1 2 0 2 0 0 9 7 7 3			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 0 0 3 5 6 1 2 0 1 9 9 4 8 2 9	1.6E-2	4.4E-7	4.2E-9
2	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 0 9 3 0 8	2.0E-3	6.1E-11	1.2E-4
3	0. 0 0 3 5 6 0 7 1 8 6 8 1 5 7 3	2.3E-3	4.1E-8	1.1E-5
4	0. 0 0 3 5 6 0 7 6 4 2 9 6 1 2 3	5.0E-4	4.9E-9	1.3E-5
5	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 3 8 2 8 7 1 3	3.3E-4	5.5E-9	2.9E-6
6	0. 0 0 3 5 6 0 7 6 0 5 9 0 1 8 6	9.6E-5	1.2E-9	1.9E-6
7	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 8 5 8 1 6 6 8	4.9E-5	7.9E-10	5.6E-7
8	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 6 0 4 2 4 9	1.7E-5	2.3E-10	2.9E-7
9	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 2 5 1 4 1 6	7.7E-6	1.2E-10	9.9E-8
10	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 4 1 1 5 2 4	2.9E-6	4.1E-11	4.5E-8
11	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 5 1 8 5 3	1.2E-6	1.9E-11	1.7E-8
12	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 7 4 1 6	4.8E-7	6.9E-12	7.2E-9
13	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 6 7 5 0 7	2.0E-7		2.8E-9
14	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 1 6 2 9	7.8E-8		1.2E-9
15	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 6 9 9 9 9	3.2E-8		4.6E-10
16	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 6 6 7	1.3E-8		1.9E-10
17	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 0 1	5.2E-9		7.5E-11
18	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 5 0 9	2.1E-9		3.0E-11
19	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 6 6	8.4E-10		1.2E-11
20	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 8 3	3.4E-10		5.0E-12
21	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 6	1.4E-10		
22	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 9	5.7E-11		
23	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 8	2.1E-11		
24	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 8	1.0E-11		
25	0. 0 0 3 5 6 0 7 5 9 3 7 0 4 7 8	2.2E-12		

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há 5 casas decimais correctas. Logo na segunda iteração conseguem-se outras cinco. Mas na terceira há apenas 7. É obtida uma casa decimal correcta nas iterações cinco, oito, onze, doze, dezasseis, dezassete, vinte e um e vinte e três. O processo termina na iteração trinta com 15 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 2			
<b>n=10</b>	0. 1 0 2 3 5 6 2 8 8 5 1 0 9	2\4		
	0. 1 0 2 3 5 6 2 8 8 5 1 0 9			
	0. 1 0 2 3 5 6 2 8 8 5 1 0 9	1\3		
	0. 1 0 2 3 5 6 2 8 8 5 1 0 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 0 0 3 1 5 6 8 0 4 0 9 7	3.5E-5	1.0E-3	2.0E-2
2	0. 1 0 1 3 0 7 2 0 1 7 8 7	1.4E-5	2.2E-5	9.8E-3
3	0. 1 0 1 3 3 9 0 0 8 9 3 7 9	1.1E-6	9.3E-6	3.1E-4
4	0. 1 0 1 3 3 0 4 2 6 1 5 5 9	2.3E-7	7.4E-7	8.5E-5
5	0. 1 0 1 3 2 9 5 3 4 6 8 9 7	3.7E-8	1.5E-7	8.8E-6
6	0. 1 0 1 3 2 9 6 6 2 4 6 1 1	3.8E-9	2.4E-8	1.3E-6
7	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 9 1 6 1 7	1.2E-9	2.6E-9	2.6E-7
8	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 7 3 7 7 7	4.4E-11	7.7E-10	1.8E-8
9	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 5 7 4 4	3.7E-11	3.0E-11	7.9E-9
10	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 5 8 0 2	7.2E-13	2.4E-11	5.8E-11
11	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 3 8		4.3E-13	2.3E-10
12	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 9			1.1E-11
13	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 3			6.5E-12
14	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 2			

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas logo na segunda conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta nas iterações cinco, seis, sete, nove, onze e doze. O processo termina na iteração quatorze com 13 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Nyström – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 2			
<b>n=12</b>	0. 1 0 2 0 1 2 7 0 6 7 7 4 2	1\2		
	0. 1 0 2 0 1 2 7 0 6 7 7 4 2			
	0. 1 0 2 0 1 2 7 0 6 7 7 4 2	1\2		
	0. 1 0 2 0 1 2 7 0 6 7 7 4 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 1 0 0 6 5 2 3 0 1 3 7 3 4	1.6E-5	6.8E-4	1.4E-2
<b>2</b>	0. 1 0 1 3 1 9 6 0 0 6 5 7 7	6.5E-6	1.0E-5	6.6E-3
<b>3</b>	0. 1 0 1 3 3 3 9 6 6 9 5 6 1	3.4E-7	4.3E-6	1.4E-4
<b>4</b>	0. 1 0 1 3 2 9 9 1 1 6 9 3 4	7.6E-8	2.3E-7	4.0E-5
<b>5</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 3 6 4 5 5	7.7E-9	5.0E-8	2.7E-6
<b>6</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 1 5 5 4 2	1.0E-9	5.1E-9	4.5E-7
<b>7</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 7 2 6 7 7	1.7E-10	6.6E-10	5.6E-8
<b>8</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 7 1 7 1	1.2E-11	1.1E-10	5.4E-9
<b>9</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 5 9 5 9	3.8E-12	8.4E-12	1.2E-9
<b>10</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 1 7			5.8E-11
<b>11</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 3			2.5E-11
<b>12</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 3			2.0E-13
<b>13</b>	0. 1 0 1 3 2 9 6 8 6 6 0 4 2			

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas logo na segunda conseguem-se mais duas. É obtida uma ou duas casas decimais correctas nas iterações quatro, cinco, seis, oito, dez e onze. O processo termina na iteração treze com 13 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 6 5			
<b>n=10</b>	0. 0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 2 3 4	5\6		
	0. 0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 2 3 5			
	0. 0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 2 3 4	5\6		
	0. 0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1 2 3 5			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 3 0 5 0 7 0 9 1 1 1 3	2.9E-4	9.6E-4	2.0E-1
2	0. 0 1 1 0 8 6 7 4 1 8 6 5 6	4.1E-5	1.8E-4	7.1E-2
3	0. 0 1 1 2 9 3 5 0 6 5 7 5 5 4	5.2E-5	2.7E-5	1.8E-2
4	0. 0 1 1 2 9 8 8 8 2 4 1 0 7 7	1.3E-5	3.2E-5	4.8E-4
5	0. 0 1 1 2 7 4 2 0 0 5 0 1 9 4	4.4E-6	7.8E-6	2.2E-3
6	0. 0 1 1 2 6 3 5 3 2 9 2 2 3 1	4.5E-6	2.9E-6	9.5E-4
7	0. 0 1 1 2 6 3 6 4 4 0 4 8 8 7	9.7E-7	2.8E-6	9.9E-6
8	0. 0 1 1 2 6 5 8 4 2 2 6 4 3 1	5.8E-7	5.7E-7	2.0E-4
9	0. 0 1 1 2 6 6 7 8 8 3 2 7 8 7	4.9E-7	3.7E-7	8.4E-5
10	0. 0 1 1 2 6 6 7 1 7 8 2 6 6 2	8.4E-8	3.0E-7	6.3E-6
11	0. 0 1 1 2 6 6 4 6 3 6 6 3 6 7	8.2E-8	4.8E-8	2.3E-5
12	0. 0 1 1 2 6 6 3 6 2 9 5 7 5 5	6.0E-8	5.3E-8	8.9E-6
13	0. 0 1 1 2 6 6 3 7 8 8 4 4 6 7	7.1E-9	3.7E-8	1.4E-6
14	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 1 8 7 7 5 3	1.2E-8	3.8E-9	2.9E-6
15	0. 0 1 1 2 6 6 4 2 3 5 2 0 7	7.8E-9	7.8E-9	1.0E-6
16	0. 0 1 1 2 6 6 4 2 0 4 5 1 2 6	4.5E-10	4.8E-9	2.7E-7
17	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 8 7 6 6 1	1.9E-9	1.9E-10	4.1E-7
18	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 4 4 8 1 0 8	1.0E-9	1.2E-9	1.2E-7
19	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 0 4 2 9 9	3.4E-11	6.4E-10	5.0E-8
20	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 7 0 0 8 3	3.0E-10	1.9E-11	5.8E-8
21	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 8 6 8 9 5	1.4E-10	1.9E-10	1.5E-8
22	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 7 6 8 6 5	1.3E-11	8.7E-11	8.9E-9
23	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 7 1 8 5	4.7E-11	9.8E-12	8.6E-9
24	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 5 2 1	2.0E-11		1.8E-9
25	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 6 9 7 5	3.7E-12		1.6E-9
26	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 4 1 9			1.3E-9
27	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 6 3 5			1.9E-10
28	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 3 2 8			2.7E-10
29	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 1 1			1.9E-10
30	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 0 9			1.8E-11

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Mas logo na segunda e terceira iterações conseguem-se mais duas. É obtida uma casa decimal correcta nas iterações seis, nove, onze, doze, quatorze, quinze, dezassete, vinte e três e vinte e seis. O processo termina na iteração trinta com 11 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Nyström – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 6 5			
<b>n=12</b>	0. 0 1 1 9 7 2 6 4 9 3 3 7 1 6	4\6		
	0. 0 1 1 9 7 2 6 4 9 3 3 7 1 6			
	0. 0 1 1 9 7 2 6 4 9 3 3 7 1 6	4\7		
	0. 0 1 1 9 7 2 6 4 9 3 3 7 1 6			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 6 1 2 2 4 3 9 3 6 3 5	1.3E-4	6.5E-4	1.3E-1
2	0. 0 1 1 1 8 2 5 0 3 3 5 1 1 7	3.0E-5	8.4E-5	5.1E-2
3	0. 0 1 1 2 8 6 7 5 9 4 2 6 3 4	1.9E-5	2.0E-5	9.2E-3
4	0. 0 1 1 2 7 8 7 0 5 4 2 4 4 1	1.5E-6	1.2E-5	7.1E-4
5	0. 0 1 1 2 6 7 3 1 6 1 3 5 8 9	2.0E-6	9.0E-7	1.0E-3
6	0. 0 1 1 2 6 5 0 9 2 2 4 4 4 3	7.8E-7	1.3E-6	2.0E-4
7	0. 0 1 1 2 6 5 9 0 8 6 9 6 3 3	6.3E-8	5.1E-7	7.2E-5
8	0. 0 1 1 2 6 6 4 6 2 2 3 8 1 4	1.4E-7	4.7E-8	4.9E-5
9	0. 0 1 1 2 6 6 5 0 9 2 4 1 0 6	3.4E-8	9.4E-8	4.2E-6
10	0. 0 1 1 2 6 6 4 3 7 1 9 0 9	1.3E-8	2.2E-8	6.4E-6
11	0. 0 1 1 2 6 6 4 0 6 7 8 2 1 2	1.0E-8	8.9E-9	2.7E-6
12	0. 0 1 1 2 6 6 4 0 9 1 3 4 8 6	9.4E-10	6.5E-9	2.1E-7
13	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 1 2 8 0 7	1.5E-9	5.5E-10	5.3E-7
14	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 6 6 7 2 1 5	6.6E-10	9.9E-10	1.4E-7
15	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 6 1 0 8 1 4	5.5E-11	4.3E-10	5.0E-8
16	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 4 0 5 5	1.4E-10	4.1E-11	4.2E-8
17	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 5 8 8 4 8	3.7E-11	9.3E-11	4.6E-9
18	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 5 8 1 7	1.4E-11	2.3E-11	6.2E-9
19	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 9 1 4 6	1.2E-11	9.8E-12	3.0E-9
20	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 9 4 7	1.3E-12		1.8E-10
21	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 2 4 2			6.3E-10
22	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 0 3 9			1.8E-10
23	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 0 8			6.0E-11
24	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 7 1			5.6E-11
25	0. 0 1 1 2 6 6 4 1 5 6 8 1 7 9			7.3E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há 3 casas decimais correctas. São obtidas uma ou duas casas decimais correctas nas iterações três, cinco, oito, treze, quatorze, dezasseis, vinte e vinte e três. O processo termina na iteração vinte e cinco com 12 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 3 4 5 6 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 0 5 9 2 7 1			
<b>n=10</b>	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 4 5 3 8 3 2	719		
	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 4 5 3 8 3 2			
	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 4 5 3 8 3 2	719		
	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 4 5 3 8 3 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 0 3 2 1 8 9 2 3 3 5 2 6 1 8	5.4E-4	8.4E-4	6.3E-1
2	0. 0 0 3 6 7 9 0 8 4 8 0 6 4 0 8	1.7E-4	3.8E-4	1.3E-1
3	0. 0 0 3 9 5 9 6 3 7 3 9 0 4 7	3.9E-5	1.0E-4	7.1E-2
4	0. 0 0 4 0 9 1 8 0 4 1 4 3 3 1 4	9.8E-5	3.0E-5	3.2E-2
5	0. 0 0 4 1 2 4 7 6 3 0 6 6 0 8	7.5E-5	6.3E-5	8.0E-3
6	0. 0 0 4 1 0 7 7 1 3 7 4 6 0 7 5	2.9E-5	4.6E-5	4.2E-3
7	0. 0 0 4 0 7 7 7 8 2 4 7 8 6 4 3	7.2E-6	1.6E-5	7.3E-3
8	0. 0 0 4 0 5 5 5 8 4 3 9 7 0 1 7	2.1E-5	5.8E-6	5.5E-3
9	0. 0 0 4 0 4 7 1 9 2 3 2 1 3 7 9	1.9E-5	1.4E-5	2.1E-3
10	0. 0 0 4 0 4 9 5 8 1 1 8 1 4 7 1	8.5E-6	1.2E-5	5.9E-4
11	0. 0 0 4 0 5 6 4 9 1 2 8 9 1 4 3	1.7E-6	4.9E-6	1.7E-3
12	0. 0 0 4 0 6 2 6 2 8 7 0 7 5 9 2	6.2E-6	1.3E-6	1.5E-3
13	0. 0 0 4 0 6 5 4 8 1 1 1 2 8 0 2	6.1E-6	4.1E-6	7.0E-4
14	0. 0 0 4 0 6 5 1 4 8 5 1 7 9 4	3.1E-6	3.8E-6	8.2E-5
15	0. 0 0 4 0 6 3 1 4 3 8 8 5 1 0 4	4.3E-7	1.8E-6	4.9E-4
16	0. 0 0 4 0 6 1 1 0 7 1 1 5 7 0 9	2.0E-6	2.5E-7	5.0E-4
17	0. 0 0 4 0 6 0 0 1 1 3 0 3 9 9 8	2.2E-6	1.3E-6	2.7E-4
18	0. 0 0 4 0 5 9 9 9 5 6 6 2 7 9 5	1.2E-6	1.4E-6	3.9E-6
19	0. 0 0 4 0 6 0 6 4 0 0 7 9 2 4 3	1.3E-7	7.2E-7	1.6E-4
20	0. 0 0 4 0 6 1 3 8 1 5 9 4 3 3 7	6.9E-7	2.1E-8	1.8E-4
21	0. 0 0 4 0 6 1 8 3 0 7 9 2 5 0 7	8.3E-7	4.7E-7	1.1E-4
22	0. 0 0 4 0 6 1 8 8 5 2 8 6 0 2	5.2E-7	5.2E-7	1.3E-5
23	0. 0 0 4 0 6 1 6 6 7 5 5 9 5 9 7	7.4E-8	3.1E-7	5.4E-5
24	0. 0 0 4 0 6 1 3 8 2 6 8 0 6 9 1	2.5E-7	2.2E-8	7.0E-5
25	0. 0 0 4 0 6 1 1 9 1 3 1 3 1 8 6	3.3E-7	1.7E-7	4.7E-5
26	0. 0 0 4 0 6 1 1 5 0 6 9 6 8 6 4	2.3E-7	2.1E-7	1.0E-5
27	0. 0 0 4 0 6 1 2 2 5 6 5 2 3 9 8	5.0E-8	1.3E-7	1.8E-5
28	0. 0 0 4 0 6 1 3 3 8 7 9 4 7 3 1	8.8E-8	2.2E-8	2.8E-5
29	0. 0 0 4 0 6 1 4 2 2 3 3 1 9 9 7	1.3E-7	6.2E-8	2.1E-5
30	0. 0 0 4 0 6 1 4 4 6 7 2 1 6 7 8	1.0E-7	8.6E-8	6.0E-6

Oo processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 6 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 3 4 5 6 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 0 5 9 2 7 1			
<b>n=12</b>	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 4 1 5 6 5		7\8	
	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 4 1 5 6 5			
	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 4 1 5 6 5		6\8	
	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 4 1 5 6 5			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 0 0 3 4 5 7 4 8 3 0 1 4 8 4 1	2.9E-4	6.0E-4	3.9E-1
<b>2</b>	0. 0 0 3 8 6 4 4 7 2 1 6 3 6 3 6	2.6E-5	2.0E-4	1.1E-1
<b>3</b>	0. 0 0 4 0 4 7 6 5 8 8 4 8 9 0 5	5.2E-5	1.4E-5	4.5E-2
<b>4</b>	0. 0 0 4 0 9 6 1 4 6 9 8 9 0 4	4.1E-5	3.5E-5	1.2E-2
<b>5</b>	0. 0 0 4 0 8 7 3 4 5 1 7 9 3 1 2	1.2E-5	2.6E-5	2.2E-3
<b>6</b>	0. 0 0 4 0 6 8 3 4 6 1 6 4 7 2 5	5.3E-6	7.0E-6	4.7E-3
<b>7</b>	0. 0 0 4 0 5 7 5 8 1 6 3 9 3 2 7	8.1E-6	3.8E-6	2.7E-3
<b>8</b>	0. 0 0 4 0 5 6 0 7 7 5 6 5 4 0 6	4.1E-6	5.3E-6	3.7E-4
<b>9</b>	0. 0 0 4 0 5 8 8 0 7 8 4 1 5 0 9	2.4E-7	2.6E-6	6.7E-4
<b>10</b>	0. 0 0 4 0 6 1 4 6 9 0 8 8 6 5	1.7E-6	1.1E-7	6.6E-4
<b>11</b>	0. 0 0 4 0 6 2 4 7 5 1 3 6 9 7 3	1.3E-6	1.1E-6	2.5E-4
<b>12</b>	0. 0 0 4 0 6 2 1 9 5 6 6 4 4 5 1	3.4E-7	8.4E-7	6.9E-5
<b>13</b>	0. 0 0 4 0 6 1 5 5 6 0 3 7 9 8 5	2.9E-7	2.0E-7	1.6E-4
<b>14</b>	0. 0 0 4 0 6 1 1 5 8 6 7 9 6 9 6	3.9E-7	2.0E-7	9.8E-5
<b>15</b>	0. 0 0 4 0 6 1 1 1 1 2 2 3 5 8 7	1.9E-7	2.5E-7	1.2E-5
<b>16</b>	0. 0 0 4 0 6 1 2 4 6 1 4 7 0 7 5	2.3E-8	1.1E-7	3.3E-5
<b>17</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 7 8 2 3 2 3 6 8	1.0E-7	1.8E-8	3.3E-5
<b>18</b>	0. 0 0 4 0 6 1 4 2 7 0 2 5 1 0 8	7.5E-8	6.6E-8	1.2E-5
<b>19</b>	0. 0 0 4 0 6 1 4 0 7 7 3 4 5 9 1	1.6E-8	4.7E-8	4.7E-6
<b>20</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 9 3 0 5 9 6 7	2.1E-8	8.7E-9	9.5E-6
<b>21</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 4 5 9 9 0 7 8 8	2.6E-8	1.5E-8	5.7E-6
<b>22</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 4 4 2 3 9 0 6 5	1.4E-8	1.6E-8	4.3E-7
<b>23</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 5 3 6 7 1 9 0 1	2.4E-9	6.9E-9	2.3E-6
<b>24</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 2 4 8 0 2 4 3	7.5E-9	1.9E-9	2.2E-6
<b>25</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 5 4 8 7 6 5	5.2E-9	4.9E-9	7.4E-7
<b>26</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 3 8 5 2 4 9 6	8.6E-10	3.3E-9	4.0E-7
<b>27</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 1 0 1 9 6 2 5	1.8E-9	4.3E-10	7.0E-7
<b>28</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 5 9 3 8 4 9 0 7	1.9E-9	1.2E-9	4.0E-7
<b>29</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 5 9 3 5 2 3 4 6	8.0E-10	1.2E-9	8.0E-9
<b>30</b>	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 0 1 1 6 2 2 8	2.6E-10	4.8E-10	1.9E-7

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 7 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 7			
<b>n=10</b>	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2	1\2		
	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2			
	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2	1\2		
	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 0 0 2 9 8 6 7 5 3 4 2 2	3.9E-6	1.0E-3	8.0E-15
2	0. 1 0 1 3 1 0 5 3 7 6 4 0 6	1.5E-5	2.1E-6	1.0E-2
3	0. 1 0 1 3 2 2 9 0 5 0 0 4	2.6E-7	1.0E-5	1.2E-4
4	0. 1 0 1 3 1 2 8 4 9 8 0 6 6	3.0E-7	1.7E-7	9.9E-5
5	0. 1 0 1 3 1 2 4 7 7 3 9 6 9	1.1E-8	2.0E-7	3.7E-6
6	0. 1 0 1 3 1 2 6 7 4 1 6 7 6	7.4E-9	7.4E-9	1.9E-6
7	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 6 5 6 5 2	4.5E-10	5.0E-9	1.2E-7
8	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 8 3 1 2	2.0E-10	2.9E-10	4.7E-8
9	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 4	1.7E-11	1.4E-10	4.3E-9
10	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 2 5 3	5.8E-12	1.1E-11	1.2E-9
11	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 4 0 6		3.9E-12	1.5E-10
12	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 7 3 1			3.4E-11
13	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 6			5.5E-12

O processo foi muito rápido. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração treze com 12 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 7			
<b>n=12</b>	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9	1\2		
	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9			
	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9	1\2		
	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
<b>1</b>	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 6 3 0 5 9	1.7E-6	6.8E-4	1.9E-14
<b>2</b>	0. 1 0 1 3 1 1 7 2 9 0 1 6	6.8E-6	9.5E-7	6.7E-3
<b>3</b>	0. 1 0 1 3 1 7 2 3 2 8 3 6 7	7.9E-8	4.6E-6	5.4E-5
<b>4</b>	0. 1 0 1 3 1 2 7 3 1 3 8 4 7	9.1E-8	5.0E-8	4.4E-5
<b>5</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 2 0 7 7 3 7	2.3E-9	6.1E-8	1.1E-6
<b>6</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 0 0 8 0 2	1.5E-9	1.5E-9	5.9E-7
<b>7</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 2 5 4 2	6.0E-11	1.0E-9	2.4E-8
<b>8</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 7 5 6	2.8E-11	3.9E-11	9.5E-9
<b>9</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 1 8 2	1.5E-12	1.8E-11	5.7E-10
<b>10</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 5 7		1.0E-12	1.7E-10
<b>11</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 7 1			1.4E-11
<b>12</b>	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 7			3.3E-12

Para  $n = 12$ , o processo foi muito rápido. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração doze com 13 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 1 5			
<b>n=10</b>	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2		5\6	
	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2			
	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2		5\6	
	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 2 8 8 0 6 5 8 4 3 6 2	4.0E-5	9.6E-4	1.5E-14
2	0. 0 1 1 2 2 6 0 7 0 9 8 8 9 9	1.2E-4	2.3E-5	8.4E-2
3	0. 0 1 1 3 3 6 2 1 1 1 4 2 2 2	2.1E-5	8.7E-5	9.7E-3
4	0. 0 1 1 2 6 3 9 2 4 3 1 8 3 9	1.9E-5	1.5E-5	6.4E-3
5	0. 0 1 1 2 3 5 3 9 5 1 4 6 9 9	7.7E-6	1.4E-5	2.5E-3
6	0. 0 1 1 2 4 3 9 9 7 6 7 6 9 6	3.1E-6	5.4E-6	7.7E-4
7	0. 0 1 1 2 5 1 7 4 0 3 0 0 7 2	2.5E-6	2.3E-6	6.9E-4
8	0. 0 1 1 2 5 1 1 9 2 2 8 7 3 5	3.4E-7	1.8E-6	4.9E-5
9	0. 0 1 1 2 4 9 1 3 6 9 4 5 6 3	7.5E-7	2.7E-7	1.8E-4
10	0. 0 1 1 2 4 8 8 7 0 4 1 8 7	5.5E-8	5.4E-7	2.4E-5
11	0. 0 1 1 2 4 9 3 8 0 3 1 2 0 1	2.1E-7	3.0E-8	4.5E-5
12	0. 0 1 1 2 4 9 5 6 0 7 8 4 5 7	5.8E-8	1.5E-7	1.6E-5
13	0. 0 1 1 2 4 9 4 5 0 3 5 7 2	5.0E-8	4.0E-8	9.8E-6
14	0. 0 1 1 2 4 9 3 7 3 6 3 3 0 9	2.8E-8	3.7E-8	6.8E-6
15	0. 0 1 1 2 4 9 3 9 0 7 1 3 4 5	9.6E-9	2.0E-8	1.5E-6
16	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 7 8 8 2 6 3	1.1E-8	7.3E-9	2.4E-6
17	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 8 4 0 6 7 4	7.9E-10	7.8E-9	4.7E-8
18	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 9 9 7 5 7 3	3.6E-9	6.4E-10	7.5E-7
19	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 7 9 8 0 8 7	5.7E-10	2.6E-9	1.8E-7
20	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 2 5 0 8 2	1.1E-9	3.6E-10	2.0E-7
21	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 1 3 9 2 3 6	4.2E-10	7.8E-10	1.0E-7
22	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 0 2 9 9	2.6E-10	2.9E-10	4.4E-8
23	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 4 2 0 6 9	2.0E-10	1.9E-10	4.3E-8
24	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 4 7 5 8 2	4.4E-11	1.4E-10	4.9E-9
25	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 4 8 1 9	7.5E-11	3.4E-11	1.5E-8
26	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 6 8 0 3	2.3E-12	5.4E-11	1.8E-9
27	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 6 2		4.7E-13	4.7E-9
28	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 9 6 0 3			1.7E-9
29	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 0 9 9 5			1.2E-9
30	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 9 3 8			8.4E-9

Na primeira iteração há apenas 2 casas decimais correctas. Ao longo das iterações o número de casas decimais correctas vai oscilando. O processo termina na iteração trinta com 11 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 1 5			
<b>n=12</b>	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4	3\5		
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4			
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4	4\5		
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 8 6 8 8 4	1.8E-5	6.5E-4	1.5E-14
2	0. 0 1 1 2 3 9 6 3 3 5 9 0 7 9	6.0E-5	9.8E-6	5.7E-2
3	0. 0 1 1 2 8 8 9 8 5 7 2 4 4 4	6.8E-6	4.0E-5	4.4E-3
4	0. 0 1 1 2 5 3 6 4 1 9 7 8 8 4	6.7E-6	4.2E-6	3.1E-3
5	0. 0 1 1 2 4 4 9 3 8 1 3 1 1 7	1.7E-6	4.5E-6	7.7E-4
6	0. 0 1 1 2 4 8 3 3 3 0 1 5 6 6	8.4E-7	1.1E-6	3.0E-4
7	0. 0 1 1 2 4 9 9 7 9 2 8 5 2 4	3.8E-7	5.7E-7	1.5E-4
8	0. 0 1 1 2 4 9 6 5 6 6 1 1 4 8	1.0E-7	2.5E-7	2.9E-5
9	0. 0 1 1 2 4 9 3 4 2 3 5 8 6	8.1E-8	6.8E-8	2.8E-5
10	0. 0 1 1 2 4 9 3 5 7 5 7 8 6 2	8.0E-9	5.3E-8	1.4E-6
11	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 6 4 4 7 6 4	1.7E-8	5.8E-9	5.2E-6
12	0. 0 1 1 2 4 9 4 2 1 5 0 8 3 6	6.5E-10	1.1E-8	4.5E-7
13	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 3 0 2 2	3.2E-9	3.2E-10	9.4E-7
14	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 8 4 9 2 4 9	5.7E-10	2.1E-9	2.2E-7
15	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 2 6 1 1 2	5.8E-10	3.5E-10	1.6E-7
16	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 9 9 6 7	2.0E-10	3.9E-10	6.6E-8
17	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 7 4 0 6 2	9.3E-11	1.3E-10	2.3E-8
18	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 5 1 1	5.5E-11	6.3E-11	1.7E-8
19	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 8 5 9	1.2E-11	3.6E-11	2.4E-9
20	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 2 2 5 7	1.3E-11	8.4E-12	3.9E-9
21	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 2 2 9 7	7.1E-13		3.6E-11
22	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 3 5 8			8.3E-10
23	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 2 1 5			1.3E-10
24	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 3 9 8			1.6E-10
25	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 5 6			5.1E-11
26	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 2 4			2.9E-11
27	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 0 7			1.6E-11
28	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 1 1			4.1E-12

Para  $n = 12$ , na primeira iteração há 3 casas decimais correctas. São obtidas uma ou duas casas decimais correctas nas iterações dois, cinco, sete, onze, treze, vinte, vinte e dois e vinte e cinco. O processo termina na iteração vinte e oito com 13 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 10

Teórico	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 3 4 5 6 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 0 0 4 0 4 4 3 5 5 5 2 5 2			
n=10	0. 0 0 3 2 0 1 9 1 8 2 8 5 1 0 8	718		
	0. 0 0 3 2 0 1 9 1 8 2 8 5 1 0 8			
	0. 0 0 3 2 0 1 9 1 8 2 8 5 1 0 8	719		
	0. 0 0 3 2 0 1 9 1 8 2 8 5 1 0 8			
KITER	LK	1º CP	2º CP	3º CP
1	0. 0 0 3 2 0 1 9 1 8 2 8 5 1 0 8	1.6E-4	8.4E-4	1.0E-13
2	0. 0 0 3 9 5 7 7 8 8 1 8 0 7 6 1	2.9E-4	8.7E-5	1.9E-1
3	0. 0 0 4 2 2 9 0 3 7 9 9 6 6 8 2	1.9E-4	1.8E-4	6.4E-2
4	0. 0 0 4 1 5 4 0 5 1 6 4 4 3 6 4	5.5E-5	1.1E-4	1.8E-2
5	0. 0 0 4 0 0 1 9 2 9 9 3 9 9	1.3E-4	4.2E-5	3.8E-2
6	0. 0 0 3 9 5 8 0 3 0 6 9 0 0 4	3.9E-5	8.6E-5	1.1E-2
7	0. 0 0 4 0 2 4 1 9 7 8 4 9 1 6 4	7.3E-5	2.0E-5	1.6E-2
8	0. 0 0 4 0 9 2 3 5 7 4 7 6 2 5 5	7.2E-5	4.8E-5	1.7E-2
9	0. 0 0 4 0 8 7 5 0 4 9 2 7 7 1 5	1.3E-5	4.3E-5	1.2E-3
10	0. 0 0 4 0 3 4 2 9 2 1 3 5 9 8 3	6.2E-5	1.0E-5	1.3E-2
11	0. 0 0 4 0 0 4 3 7 6 9 7 0 3 5 8	3.1E-5	4.0E-5	7.5E-3
12	0. 0 0 4 0 2 7 2 1 8 3 9 5 5 3 1	3.2E-5	1.7E-5	5.7E-3
13	0. 0 0 4 0 6 6 2 2 4 9 3 7 9 9 2	4.7E-5	2.2E-5	9.6E-3
14	0. 0 0 4 0 7 2 8 2 7 9 3 5 9 8 5	4.5E-6	2.8E-5	1.6E-3
15	0. 0 0 4 0 4 4 3 3 2 9 3 6 6 0 8	3.8E-5	2.3E-8	7.0E-3
16	0. 0 0 4 0 1 9 7 8 2 5 1 0 1 1 5	2.8E-5	2.5E-5	6.1E-3
17	0. 0 0 4 0 2 8 0 9 7 9 7 2 4 8 1	1.5E-5	1.6E-5	2.1E-3
18	0. 0 0 4 0 5 5 2 1 4 2 9 8 7 9 5	3.5E-5	1.1E-5	6.7E-3
19	0. 0 0 4 0 6 6 1 2 6 7 8 6 1 0 5	1.0E-5	2.2E-5	2.7E-3
20	0. 0 0 4 0 4 9 2 5 2 5 2 5 9 1 9	2.5E-5	4.9E-6	4.2E-3
21	0. 0 0 4 0 2 7 9 3 4 4 5 9 8 0 4	2.6E-5	1.6E-5	5.3E-3
22	0. 0 0 4 0 2 8 7 3 3 5 3 8 9 6 7	5.7E-6	1.6E-5	2.0E-4
23	0. 0 0 4 0 4 8 7 9 6 1 0 0 4 8 1	2.8E-5	4.4E-6	5.0E-3
24	0. 0 0 4 0 6 1 8 3 0 1 9 6 0 1 2	1.4E-5	1.7E-5	3.2E-3
25	0. 0 0 4 0 5 2 2 1 3 0 6 2 4 2	1.6E-5	7.9E-6	2.4E-3
26	0. 0 0 4 0 3 3 4 3 9 2 4 7 7 5 1	2.4E-5	1.1E-5	4.7E-3
27	0. 0 0 4 0 2 9 4 5 7 9 5 7 7 9 9	2.5E-6	1.5E-5	1.0E-3
28	0. 0 0 4 0 4 4 3 4 7 0 3 9 0 9 1	2.2E-5	8.5E-9	3.7E-3
29	0. 0 0 4 0 5 8 4 4 2 1 1 9 5 5 2	1.7E-5	1.4E-5	3.5E-3
30	0. 0 0 4 0 5 4 1 3 7 5 6 4 5 7 7	9.1E-6	9.8E-6	1.1E-3

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 4 casas decimais correctas, embora nas iterações quinze e vinte e oito tenha obtido 7 casas decimais correctas.

Núcleo E – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 3 4 5 6 9 3			
$\lambda 100$	0. 0 0 4 0 4 4 3 5 5 5 2 5 2			
<b>n=12</b>	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 9 4 7 3 3 1	7\8		
	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 9 4 7 3 3 1			
	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 9 4 7 3 3 1	11\12		
	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 9 4 7 3 3 1			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 9 4 7 3 3 1	6.3E-5	6.0E-4	2.7E-14
2	0. 0 0 4 0 1 0 4 0 6 9 9 0 7 0 6	1.5E-4	3.4E-5	1.4E-1
3	0. 0 0 4 1 4 1 4 6 1 0 9 6 7 1 4	5.6E-5	9.7E-5	3.2E-2
4	0. 0 0 4 0 7 8 3 2 7 1 4 3 1 5 6	3.4E-5	3.4E-5	1.5E-2
5	0. 0 0 4 0 2 0 7 1 7 7 4 4 2 7 2	3.3E-5	2.4E-5	1.4E-2
6	0. 0 0 4 0 2 3 0 9 8 7 6 8 5 1 5	3.7E-6	2.1E-5	5.9E-4
7	0. 0 0 4 0 4 7 3 1 2 6 7 5 0 3 3	1.7E-5	3.0E-6	6.0E-3
8	0. 0 0 4 0 5 5 3 7 1 2 4 5 7 6 4	4.7E-6	1.1E-5	2.0E-3
9	0. 0 0 4 0 4 7 0 3 1 9 9 4 0 3	6.9E-6	2.7E-6	2.1E-3
10	0. 0 0 4 0 3 9 7 4 5 7 6 7 6	5.2E-6	4.6E-6	1.8E-3
11	0. 0 0 4 0 4 1 1 3 2 2 1 9 3 6 7	1.7E-6	3.2E-6	3.4E-4
12	0. 0 0 4 0 4 5 5 7 1 2 5 2 9 9 7	3.5E-6	1.2E-6	1.1E-3
13	0. 0 0 4 0 4 6 6 3 4 5 2 0 0 1 3	5.1E-7	2.3E-6	2.6E-4
14	0. 0 0 4 0 4 4 6 0 0 0 3 3 5 4 6	1.8E-6	2.4E-7	5.0E-4
15	0. 0 0 4 0 4 3 1 4 7 9 0 5 0 3 3	1.1E-6	1.2E-6	3.6E-4
16	0. 0 0 4 0 4 3 7 1 0 7 5 3 3 1 2	6.3E-7	6.4E-7	1.4E-4
17	0. 0 0 4 0 4 4 7 9 7 0 6 7 2 2 9	9.0E-7	4.4E-7	2.7E-4
18	0. 0 0 4 0 4 4 9 2 5 8 2 8 8 4 6	5.7E-8	5.7E-7	3.2E-5
19	0. 0 0 4 0 4 4 3 3 1 7 5 3 8 4 3	5.4E-7	2.4E-8	1.5E-4
20	0. 0 0 4 0 4 3 9 9 9 3 9 5 8 1 6	2.3E-7	3.6E-7	8.2E-5
21	0. 0 0 4 0 4 4 2 1 7 6 3 5 7 5 6	2.4E-7	1.4E-7	5.4E-5
22	0. 0 0 4 0 4 4 5 1 5 5 5 0 9 1 4	2.5E-7	1.6E-7	7.4E-5
23	0. 0 0 4 0 4 4 5 0 9 9 8 5 3 5 6	4.1E-8	1.5E-7	1.4E-6
24	0. 0 0 4 0 4 4 3 2 2 6 1 3 0 0 7	1.7E-7	3.3E-8	4.6E-5
25	0. 0 0 4 0 4 4 2 4 4 4 4 8 8 5 3	4.9E-8	1.1E-7	1.9E-5
26	0. 0 0 4 0 4 4 3 2 7 9 1 3 4 3	8.7E-8	2.8E-8	2.1E-5
27	0. 0 0 4 0 4 4 4 1 3 7 4 8 6 7 8	6.9E-8	5.8E-8	2.1E-5
28	0. 0 0 4 0 4 4 3 9 8 5 2 8 5 4 7	2.5E-8	4.3E-8	3.8E-6
29	0. 0 0 4 0 4 4 3 3 7 2 3 6 5 2 9	5.5E-8	1.8E-8	1.5E-5
30	0. 0 0 4 0 4 4 3 1 9 9 6 5 9 8 5	8.4E-9	3.6E-8	4.3E-6

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 7 casas decimais correctas.

Núcleo F – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 10

<b>Teórico</b>	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 3 4 5 6 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 0 4 9 9 8 1 7			
<b>N=10</b>	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 7 3 1 5 2 5	5\6		
	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 1 7 6 1 4			
	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 7 4 9 9 2	6\7		
	0. 0 0 5 2 5 9 5 3 1 1 5 7 7 4 5			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 0 3 2 1 8 9 2 3 4 8 2 7 3 6	5.5E-4	8.4E-4	6.3E-1
2	0. 0 0 3 6 7 9 0 8 4 8 4 6 4 7 3	1.7E-4	3.8E-4	1.3E-1
3	0. 0 0 3 9 5 9 6 3 7 3 8 1 2 7 2	3.9E-5	1.0E-4	7.1E-2
4	0. 0 0 4 0 9 1 8 0 4 1 0 6 0 7 6	9.9E-5	3.0E-5	3.2E-2
5	0. 0 0 4 1 2 4 7 6 3 0 2 5 3 9 4	7.6E-5	6.3E-5	8.0E-3
6	0. 0 0 4 1 0 7 7 1 3 7 1 7 4 8 9	2.9E-5	4.6E-5	4.2E-3
7	0. 0 0 4 0 7 7 7 8 2 4 6 5 7 0 1	7.2E-6	1.6E-5	7.3E-3
8	0. 0 0 4 0 5 5 5 8 4 3 9 3 0 6 6	2.2E-5	5.8E-6	5.5E-3
9	0. 0 0 4 0 4 7 1 9 2 3 1 8 6 9 5	1.9E-5	1.4E-5	2.1E-3
10	0. 0 0 4 0 4 9 5 8 1 1 7 3 9 2 5	8.6E-6	1.2E-5	5.9E-4
11	0. 0 0 4 0 5 6 4 9 1 2 7 5 7 4 5	1.7E-6	4.9E-6	1.7E-3
12	0. 0 0 4 0 6 2 6 2 8 6 9 0 1 5 3	6.3E-6	1.3E-6	1.5E-3
13	0. 0 0 4 0 6 5 4 8 1 0 9 4 2 9 3	6.1E-6	4.1E-6	7.0E-4
14	0. 0 0 4 0 6 5 1 4 8 5 0 1 0 2 9	3.1E-6	3.8E-6	8.2E-5
15	0. 0 0 4 0 6 3 1 4 3 8 7 0 6 7 8	4.4E-7	1.8E-6	4.9E-4
16	0. 0 0 4 0 6 1 1 0 7 1 0 3 1 6	2.0E-6	2.5E-7	5.0E-4
17	0. 0 0 4 0 6 0 0 1 1 2 9 2 1 7 4	2.2E-6	1.3E-6	2.7E-4
18	0. 0 0 4 0 5 9 9 9 5 6 5 0 3 6 4	1.2E-6	1.4E-6	3.9E-6
19	0. 0 0 4 0 6 0 6 4 0 0 6 5 6 8 2	1.3E-7	7.2E-7	1.6E-4
20	0. 0 0 4 0 6 1 3 8 1 5 7 9 8 6 5	7.0E-7	2.1E-8	1.8E-4
21	0. 0 0 4 0 6 1 8 3 0 7 7 7 6 8 1	8.4E-7	4.7E-7	1.1E-4
22	0. 0 0 4 0 6 1 8 8 5 2 7 1 4 1 5	5.3E-7	5.2E-7	1.3E-5
23	0. 0 0 4 0 6 1 6 6 7 5 4 5 5 0 4	7.4E-8	3.1E-7	5.4E-5
24	0. 0 0 4 0 6 1 3 8 2 6 6 7 0 5 3	2.5E-7	2.2E-8	7.0E-5
25	0. 0 0 4 0 6 1 1 9 1 2 9 9 7 4 3	3.4E-7	1.7E-7	4.7E-5
26	0. 0 0 4 0 6 1 1 5 0 6 8 3 3 3 9	2.3E-7	2.1E-7	1.0E-5
27	0. 0 0 4 0 6 1 2 2 5 6 3 8 6 4 8	5.1E-8	1.3E-7	1.9E-5
28	0. 0 0 4 0 6 1 3 3 8 7 8 0 7 5 9	8.9E-8	2.2E-8	2.8E-5
29	0. 0 0 4 0 6 1 4 2 2 3 1 7 9 1	1.4E-7	6.2E-8	2.1E-5
30	0. 0 0 4 0 6 1 4 4 6 7 0 7 6 2 3	1.0E-7	8.6E-8	6.0E-6

O processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 6 casas decimais correctas, embora por vezes tenha conseguido as 7 .

Núcleo F – Aproximação de Nyström – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 4 5 6 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 0 9 9 8 1 7			
<b>N=12</b>	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 4 3 7 5 6	5\6		
	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 8 7 5 4 4			
	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 4 5 2 0 5	6\7		
	0. 0 0 4 8 1 7 8 8 8 8 6 0 9 5			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 0 3 4 5 7 4 8 3 1 8 1 3 1	2.9E-4	6.0E-4	3.9E-1
2	0. 0 0 3 8 6 4 4 7 2 0 4 2 7 5	2.6E-5	2.0E-4	1.1E-1
3	0. 0 0 4 0 4 7 6 5 9 8 2 4 6 2	5.3E-5	1.4E-5	4.5E-2
4	0. 0 0 4 0 9 6 1 4 7 0 9 9 7 8	4.1E-5	3.5E-5	1.2E-2
5	0. 0 0 4 0 8 7 3 4 5 7 7 8 4 6	1.2E-5	2.6E-5	2.2E-3
6	0. 0 0 4 0 6 8 3 4 6 4 6 4 5 6	5.3E-6	7.0E-6	4.7E-3
7	0. 0 0 4 0 5 7 5 8 1 1 7 9 5 9	8.2E-6	3.8E-6	2.7E-3
8	0. 0 0 4 0 5 6 0 7 7 4 7 6 7 1	4.1E-6	5.3E-6	3.7E-4
9	0. 0 0 4 0 5 8 8 0 8 2 8 5 1	2.4E-7	2.6E-6	6.7E-4
10	0. 0 0 4 0 6 1 4 6 9 7 8 6 2 7	1.7E-6	1.1E-7	6.6E-4
11	0. 0 0 4 0 6 2 4 7 5 2 6 4 2 2	1.3E-6	1.1E-6	2.5E-4
12	0. 0 0 4 0 6 2 1 9 5 5 2 2 3 4	3.5E-7	8.4E-7	6.9E-5
13	0. 0 0 4 0 6 1 5 5 6 2 4 6 1 3	2.9E-7	2.0E-7	1.6E-4
14	0. 0 0 4 0 6 1 1 5 8 6 6 1 4 6	3.9E-7	2.0E-7	9.8E-5
15	0. 0 0 4 0 6 1 1 1 1 1 0 4 5 1	1.9E-7	2.5E-7	1.2E-5
16	0. 0 0 4 0 6 1 2 4 6 3 4 3 8 2	2.3E-8	1.1E-7	3.3E-5
17	0. 0 0 4 0 6 1 3 7 8 1 9 8 5 3	1.0E-7	1.8E-8	3.3E-5
18	0. 0 0 4 0 6 1 4 2 7 1 2 5 5 2	7.5E-8	6.7E-8	1.2E-5
19	0. 0 0 4 0 6 1 4 0 7 2 1 8 9 7	1.6E-8	4.7E-8	4.7E-6
20	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 9 9 3 1 6 7	2.2E-8	9.0E-9	9.5E-6
21	0. 0 0 4 0 6 1 3 4 6 7 7 9 7 7	2.6E-8	1.4E-8	5.7E-6
22	0. 0 0 4 0 6 1 3 4 4 2 6 2 9 6	1.2E-8	1.6E-8	4.3E-7
23	0. 0 0 4 0 6 1 3 5 3 5 9 1 7 5	2.3E-9	6.6E-9	2.3E-6
24	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 2 6 7 5 3 4	7.4E-9	2.2E-9	2.2E-6
25	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 5 7 4 9 3 2	5.2E-9	5.2E-9	7.4E-7
26	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 4 3 9 7 6 3	7.8E-10	3.5E-9	4.0E-7
27	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 1 0 6 8 8 2	1.9E-9	7.1E-10	7.0E-7
28	0. 0 0 4 0 6 1 3 5 9 7 2 1 6 4	2.0E-9	9.3E-10	4.0E-7
29	0. 0 0 4 0 6 1 3 5 9 3 9 6 0 7	8.9E-10	9.6E-10	8.0E-9
30	0. 0 0 4 0 6 1 3 6 0 0 3 4 9 3	1.8E-10	2.0E-10	1.9E-7

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 9 casas decimais correctas.

Núcleo F – Aproximação de Sloan – 1º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 1 0 1 3 2 1 1 8 3 6 4 2 3			
$\lambda_{100}$	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 5 3 6 7			
<b>N=12</b>	0. 1 0 0 6 3 5 3 0 5 4 1 9	1\2		
	0. 1 0 0 6 3 5 2 8 7 1 9 2 7			
	0. 1 0 0 6 3 5 3 0 4 6 8 7 8	1\2		
	0. 1 0 0 6 3 5 2 8 7 9 2 4			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 1 0 0 6 3 5 2 9 5 8 8 6 5	1.7E-7	6.8E-4	4.2E-9
2	0. 1 0 1 3 1 1 7 2 8 6 2 0 3	6.8E-6	9.5E-7	6.7E-3
3	0. 1 0 1 3 1 7 2 3 2 4 4 0 2	7.8E-8	4.6E-6	5.4E-5
4	0. 1 0 1 3 1 2 7 3 0 9 8 7 8	9.0E-8	4.9E-8	4.4E-5
5	0. 1 0 1 3 1 2 6 2 0 3 7 6 7	1.5E-9	6.1E-8	1.1E-6
6	0. 1 0 1 3 1 2 6 7 9 6 8 3 3	1.8E-9	1.9E-9	5.9E-7
7	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 2 1 4 5	5.4E-11	6.1E-10	2.4E-8
8	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 7 8 6	9.5E-10	3.6E-10	9.5E-9
9	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 2 1 3	2.7E-10	4.2E-10	5.7E-10
10	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 8 7	4.7E-10	4.0E-10	1.7E-10
11	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 4 0 1	1.2E-9	4.0E-10	1.4E-11
12	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	1.2E-9	4.0E-10	3.3E-12
13	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 7	4.7E-10	4.0E-10	
14	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
15	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
16	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
17	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
18	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
19	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
20	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
21	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
22	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
23	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
24	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
25	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
26	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
27	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
28	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
29	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	
30	0. 1 0 1 3 1 2 6 8 1 1 3 9 8	5.0E-10	4.0E-10	

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu até à iteração oito onde consegue 9 casas decimais correctas. Mas depois estabiliza.

Núcleo F – Aproximação de Sloan – 2º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 1 1 2 5 7 9 0 9 2 9 3 5 9			
$\lambda_{100}$	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 6 1 4 1 4			
<b>N=12</b>	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 9 9 1 6 1 8		3\4	
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 7 8 2 1 5 1			
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 9 1 2 7 5 2		3\4	
	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 6 1 0 1 6			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 1 0 5 9 5 2 3 8 9 7 0 4 5	1.8E-5	6.5E-4	9.6E-9
2	0. 0 1 1 2 3 9 6 3 3 5 5 4 5 8	5.9E-5	9.8E-6	5.7E-2
3	0. 0 1 1 2 8 8 9 8 5 6 7 3 6 8	6.7E-6	4.0E-5	4.4E-3
4	0. 0 1 1 2 5 3 6 4 1 9 4 1 6 6	6.6E-6	4.2E-6	3.1E-3
5	0. 0 1 1 2 4 4 9 3 8 0 9 8 7 8	1.7E-6	4.5E-6	7.7E-4
6	0. 0 1 1 2 4 8 3 3 2 9 8 1 3 9	8.4E-7	1.1E-6	3.0E-4
7	0. 0 1 1 2 4 9 9 7 9 2 4 9 8 3	3.8E-7	5.7E-7	1.5E-4
8	0. 0 1 1 2 4 9 6 5 6 5 7 6 2 6	9.9E-8	2.5E-7	2.9E-5
9	0. 0 1 1 2 4 9 3 4 2 3 2 3 6 7	8.0E-8	6.8E-8	2.8E-5
10	0. 0 1 1 2 4 9 3 5 7 5 4 3 6 8	7.9E-9	5.3E-8	1.4E-6
11	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 6 4 1 2 6 4	1.6E-8	5.8E-9	5.2E-6
12	0. 0 1 1 2 4 9 4 2 1 4 7 3 3 5	6.4E-10	1.1E-8	4.5E-7
13	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 8 9 5 2 2	3.2E-9	2.8E-10	9.4E-7
14	0. 0 1 1 2 4 9 4 0 8 4 5 7 5	6.0E-10	2.2E-9	2.2E-7
15	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 2 2 6 1 2	5.3E-10	3.9E-10	1.6E-7
16	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 9 6 4 6 6	1.7E-10	3.5E-10	6.6E-8
17	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 7 0 5 6 2	1.3E-10	9.1E-11	2.3E-8
18	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 1 6 1	6.7E-11	9.8E-11	1.7E-8
19	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 4 3 5 9	1.3E-11	7.1E-11	2.4E-9
20	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 8 7 5 7	3.2E-11	2.7E-11	3.9E-9
21	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 8 7 9 7	2.7E-11	2.6E-11	3.6E-11
22	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 8 5 8	3.9E-11	3.6E-11	8.3E-10
23	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 7 1 5	2.0E-11	3.7E-11	1.3E-10
24	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 8 9 8	3.8E-11	3.5E-11	1.6E-10
25	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 9 5 6	2.0E-11	3.5E-11	5.1E-11
26	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 9 2 4	2.3E-11	3.5E-11	2.9E-11
27	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 9 0 7	3.8E-11	3.5E-11	1.6E-11
28	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 9 1 1	1.2E-11	3.5E-11	4.1E-12
29	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 9 1 6	2.7E-11	3.5E-11	
30	0. 0 1 1 2 4 9 4 1 0 5 7 9 1 5	2.0E-11	3.5E-11	

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 9 casas decimais correctas.

Núcleo F – Aproximação de Sloan – 3º vp – n = 12

<b>Teórico</b>	0. 0 0 4 0 5 2 8 4 7 3 4 5 6 9 3			
$\lambda_{100}$	0. 0 0 4 0 4 4 3 5 6 0 0 9 8 1			
<b>N=12</b>	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 8 4 5 1 7 2 6		5\6	
	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 4 4 2 9 3 6			
	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 8 3 7 9 6 8 3		5\6	
	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 5 1 4 9 7 9			
<b>KITER</b>	<b>LK</b>	<b>1º CP</b>	<b>2º CP</b>	<b>3º CP</b>
1	0. 0 0 3 4 4 0 4 7 7 9 0 9 0 8 8	6.3E-5	6.0E-4	1.1E-8
2	0. 0 0 4 0 1 0 4 0 6 9 4 5 2 6 3	1.5E-4	3.4E-5	1.4E-1
3	0. 0 0 4 1 4 1 4 6 1 0 5 7 5 5 1	5.5E-5	9.7E-5	3.2E-2
4	0. 0 0 4 0 7 8 3 2 7 1 1 1 7 8 5	3.4E-5	3.4E-5	1.5E-2
5	0. 0 0 4 0 2 0 7 1 7 7 1 0 6 9 2	3.3E-5	2.4E-5	1.4E-2
6	0. 0 0 4 0 2 3 0 9 8 7 3 0 9 4 4	3.7E-6	2.1E-5	5.9E-4
7	0. 0 0 4 0 4 7 3 1 2 6 3 6 2 4 6	1.7E-5	3.0E-6	6.0E-3
8	0. 0 0 4 0 5 5 3 7 1 2 0 9 2 7 4	4.7E-6	1.1E-5	2.0E-3
9	0. 0 0 4 0 4 7 0 3 1 9 5 9 0 9 5	6.8E-6	2.7E-6	2.1E-3
10	0. 0 0 4 0 3 9 7 4 5 7 3 2 1 3 9	5.1E-6	4.6E-6	1.8E-3
11	0. 0 0 4 0 4 1 1 3 2 1 8 2 4 4 8	1.7E-6	3.2E-6	3.4E-4
12	0. 0 0 4 0 4 5 5 7 1 2 1 5 7 7 9	3.5E-6	1.2E-6	1.1E-3
13	0. 0 0 4 0 4 6 6 3 4 4 8 3 6 6 7	5.1E-7	2.3E-6	2.6E-4
14	0. 0 0 4 0 4 4 5 9 9 9 9 7 7 0 4	1.8E-6	2.4E-7	5.0E-4
15	0. 0 0 4 0 4 3 1 4 7 8 6 8 8 8 6	1.0E-6	1.2E-6	3.6E-4
16	0. 0 0 4 0 4 3 7 1 0 7 1 6 6 7 6	6.3E-7	6.5E-7	1.4E-4
17	0. 0 0 4 0 4 4 7 9 7 0 3 0 5 6 8	8.9E-7	4.4E-7	2.7E-4
18	0. 0 0 4 0 4 4 9 2 5 7 9 2 5 1 2	5.6E-8	5.7E-7	3.2E-5
19	0. 0 0 4 0 4 4 3 3 1 7 1 7 6 6	5.4E-7	2.4E-8	1.5E-4
20	0. 0 0 4 0 4 3 9 9 9 3 5 9 4 8 1	2.3E-7	3.6E-7	8.2E-5
21	0. 0 0 4 0 4 4 2 1 7 5 9 9 2 5 9	2.3E-7	1.4E-7	5.4E-5
22	0. 0 0 4 0 4 4 5 1 5 5 1 4 4 4 9	2.4E-7	1.6E-7	7.4E-5
23	0. 0 0 4 0 4 4 5 0 9 9 4 9 0 1 4	4.1E-8	1.5E-7	1.4E-6
24	0. 0 0 4 0 4 4 3 2 2 5 7 6 7 0 5	1.7E-7	3.3E-8	4.6E-5
25	0. 0 0 4 0 4 4 2 4 4 4 1 2 4 8 3	4.9E-8	1.1E-7	1.9E-5
26	0. 0 0 4 0 4 4 3 2 7 8 7 7 0 0 3	8.7E-8	2.8E-8	2.1E-5
27	0. 0 0 4 0 4 4 4 1 3 7 1 2 2 7 2	6.9E-8	5.8E-8	2.1E-5
28	0. 0 0 4 0 4 4 3 9 8 4 9 2 1 8 8	2.5E-8	4.2E-8	3.8E-6
29	0. 0 0 4 0 4 4 3 3 7 2 0 0 1 7 9	5.5E-8	1.9E-8	1.5E-5
30	0. 0 0 4 0 4 4 3 1 9 9 2 9 6 0 6	8.3E-9	3.6E-8	4.3E-6

Para  $n = 12$ , o processo evoluiu muito lentamente. Parte da primeira iteração com apenas 2 casas decimais correctas e termina na iteração trinta só com 7 casas decimais correctas.

## **Referências Bibliográficas**

- [ 1 ] **Ahues, M.**  
" Raffinement d' élèments propres approchés d' un opérateur compact "  
Thèse de Docteur – Ingénieur. Univ. Grenoble , 1983 .
- [ 2 ] **Ahues, M. ; Chatelin, F. ; d' Almeida, F. ; Talias, M.**  
" Iterative Refinement Techniques for the Eigenvalue Problem of  
Compact Integral Operators "  
In: C. Baker , G.Miller Eds: Treatment of Integral Equations by  
Numerical Methods pg. 373 – 385  
Academic Press , London , 1983 .
- [ 3 ] **Ahues, M. ; Alvizu, J. ; Chatelin, F.**  
" Efficient Computation of a Group of Close Eigenvalues for Integral  
Operators "  
In: Numerical Mathematics and Applications Vichnevetsky , Vignes Eds.  
pg. 89 – 93  
Elseirer Science Publishers , 1986 .
- [ 4 ] **d' Almeida, F.**  
" Problemas de Valores Próprios de Operadores Integrais Compactos "  
Tese de Doutoramento – Universidade do Porto , 1984 .
- [ 5 ] **d' Almeida, F. ; Rodrigues M. J.**  
" Is the Iterative Refinement of Eigenvalues an Expensive Technique ? "  
Publicado no Jornal of Computational and Applied Mathematics, nº 20,  
pg. 159 – 166 , 1987 .
- [ 6 ] **d' Almeida, F.**  
" Computation of Multiple Eigenvalues of Compact Integral Operators "  
Proceedings das 13ª Jornadas Hispano Lusas de Matemática em  
Valladolid Espanha, 6 – 8 Setembro 1988 ( a publicar ) , 1988 .
- [ 7 ] **Atkinson, K.**  
" A Survey of Numerical Methods for the Solution of the Fredholm  
Integral Equations of the Second Kind "  
SIAM , Philadelphia , 1976 .

- [ 8 ] **Bartels, R. H. ; Stewart G. W.**  
"Algorithm 432, A Solution of the Matrix Equation  $A X + X B = C$  "  
Comm. Assoc. Comp. Mach. vol. 5 pg. 820 – 826 , 1972 .
- [ 9 ] **Cartan, H.**  
" Calcul Differentiel "  
Hermann , 1972 .
- [ 10 ] **Chatelin, F.**  
" Spectral Approximation of Linear Operators "  
Academic Press , New York , 1983 .
- [ 11 ] **Chatelin, F.**  
" Valeurs Propres de Matrices "  
Masson , Paris , 1986 .
- [ 12 ] **Conte, S. D. & Boor, C.**  
" Elementary Numerical Analysis "  
McGraw-Hill , 1965 .
- [ 13 ] **Dongarra, J. J. ; Moler, C. B. ; Bunch, J. R. ; Stewart, G. W.**  
" Linpack – User's Guide "  
Siam , Philadelphia , 1979 .
- [ 14 ] **Genz, A. C. & Malik, A. A.**  
" An adaptative algorithm for the numerical integration over an  
N-dimensional rectangular region "  
Algorithm 019 . Remarks on algorithm 006 Journal of Computational  
and Applied Mathematics 6. (pg. 295 – 302) , 1980 .
- [ 15 ] **IMSL – Lybrary**  
" Reference Manual " , 1980 .
- [ 16 ] **Kagström, Bo & Ruhe, A.**  
" An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a  
complex matrix "  
Report UMINF – 51.74 , 1974 .

- [ 17 ] **Kato, T.**  
" Perturbation Theory for Linear Operators "  
Springer-Verlag , 1966 .
- [ 18 ] **Lemordant, J.**  
" Localisation de Valeurs Propres et Calcul de Sous-Espaces  
Invariants "  
Thèse d'état – Univ. de Grenoble, França , 1980 .
- [ 19 ] **Nag – Library**  
" Reference Manual "  
Numerical Algorithms Group, Oxford .
- [ 20 ] **Reddy, J. N.**  
" Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering "  
McGraw-Hill , 1986 .
- [ 21 ] **Roach**  
" Green's Functions : Introduction Theory with Applications "  
Nostrand, Londres , 1970 .
- [ 22 ] **Smith, B. T. & Boyle, J. M. & Garbow, B. S. & Ikebe, Y. & Klema, V. C.  
& Moler, C. B.**  
" Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide "  
Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6. Spring Verlag , 1976 .
- [ 23 ] **Stewart, G. W.**  
" Introduction to Matrix Computations "  
Academic Press, New York , 1973 .
- [ 24 ] **Yosida, K.**  
" Functional Analysis "  
Springer Verlag (3ª edição ) , 1971 .