



ANÁLISE MULTIESCALA DE ESPUMAS POLIMÉRICAS PARA COMPONENTES MECÂNICOS COM RECURSO A TÉCNICAS DE HOMOGENIZAÇÃO COMBINADAS COM MÉTODOS AVANÇADOS DE DISC

MIGUEL FILIPE CASTRO COELHO

outubro de 2024

**ANÁLISE MULTIESCALA DE ESPUMAS
POLIMÉRICAS PARA COMPONENTES MECÂNICOS
COM RECURSO A TÉCNICAS DE HOMOGENIZAÇÃO
COMBINADAS COM MÉTODOS AVANÇADOS DE
DISCRETIZAÇÃO**

Miguel Filipe Castro Coelho

**Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica, Área de Especialização em
Construções Mecânicas**

Orientador: Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha

Co-orientador: Professor Doutor Daniel Rodrigues Espírito Santo

Júri:

Presidente:

Professor Doutor Hernani Miguel Reis Lopes

Vogais:

Professor Doutor Ricardo Rodrigues Pinto

Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha

Resumo

Este trabalho aborda as estruturas celulares, o seu fabrico utilizando impressão 3D e a sua análise utilizando métodos sem malha. Os métodos numéricos, como o Método de Elementos Finitos (FEM), são ferramentas matemáticas essenciais para resolver problemas complexos em engenharia. Alternativamente, métodos sem malha como o “Radial Point Interpolation Method” (RPIM) e o “Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method” (NNRPIM) oferecem maior flexibilidade na simulação de deformações e fraturas, sendo independentes de uma malha fixa.

Estruturas celulares, inspiradas na natureza, apresentam propriedades únicas que permitem a criação de materiais leves com propriedades mecânicas superiores, sendo aplicadas nas mais diversas áreas da engenharia. A análise destas estruturas pode ser macromecânica ou micromecânica, sendo a abordagem macromecânica simplificada pela consideração do material como homogéneo. A homogeneização das propriedades das espumas pode ser obtida numericamente através dos métodos RPIM e NNRPIM.

A popularização da impressão 3D revolucionou o projeto e fabrico, permitindo a criação de geometrias complexas com alta precisão e eficiência em termos de peso. A combinação da fabricação aditiva, estruturas celulares e materiais poliméricos de baixa temperatura de fusão possibilita a produção de componentes leves e eficientes, atendendo às necessidades de várias indústrias.

Neste trabalho foi obtido um exemplo de uma peça constituída por estruturas celulares utilizando a impressão 3D, sendo que a célula unitária foi homogeneizada numericamente utilizando os métodos RPIM e NNRPIM com resultados satisfatórios. Foi também feita uma simulação da barra de forma a analisar o comportamento num ensaio à flexão e de viga encastrada com a carga aplicada na ponta.

Palavras-chave: Estruturas celulares, Impressão 3D, Métodos sem malha, Homogeneização

Abstract

This work deals with cellular structures, their manufacture using 3D printing and their analysis using meshless methods. Numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM), are essential mathematical tools for solving complex engineering problems. Alternatively, meshless methods such as the Radial Point Interpolation Method (RPIM) and the Natural Neighbor Radial Point Interpolation Method (NNRPIM) offer greater flexibility in simulating deformations and fractures, and are independent of a fixed mesh.

Cellular structures, inspired by nature, have unique properties that allow the creation of lightweight materials with superior mechanical properties, and are applied in a wide range of engineering areas. The analysis of these structures can be macromechanical or micromechanical, the macromechanical approach being simplified by considering the material as homogeneous. The homogenization of foam properties can be obtained numerically using the RPIM and NNRPIM methods.

The popularization of 3D printing has revolutionized design and manufacturing, enabling the creation of complex geometries with high precision and weight efficiency. The combination of additive manufacturing, cell structures and low-melting-temperature polymeric materials makes it possible to produce lightweight and efficient components, meeting the needs of various industries.

An example of a part made up of cellular structures was obtained using 3D printing, and the unit cell was numerically homogenized using the RPIM and NNRPIM methods with satisfactory results. A simulation of the bar was also carried out in order to analyze its behavior in a bending and embedded beam test with the load applied at the tip.

Keywords: Cellular structures, 3D printing, Meshless methods, Homogenization

Índice

Lista de Figuras.....	ix
Lista de Tabelas.....	xiii
Acrónimos e Símbolos.....	xv
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. MOTIVAÇÃO.....	1
1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.3. OBJETIVOS.....	2
1.4. ESTRUTURA DA TESE.....	3
2. MÉTODOS SEM MALHA.....	5
2.1. VIZINHOS NATURAIS.....	5
2.1.1. CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE VORONÓI.....	6
2.1.2. TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY.....	7
2.2. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	8
2.2.1. QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE.....	8
2.2.2. INTEGRAÇÃO DE BASE NODAL.....	9
2.3. CONECTIVIDADE NODAL.....	11
2.3.1. DOMÍNIOS DE INFLUÊNCIA.....	11
2.3.2. CÉLULAS DE INFLUÊNCIA.....	12
2.4. FUNÇÕES DE FORMA – INTERPOLADORES RADIAIS PONTUAIS.....	13
2.5. MECÂNICA DOS MATERIAIS.....	17
2.5.1. TEORIA DA ELASTICIDADE.....	17
2.5.2. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DISCRETAS.....	18
2.6. MICROMECAÂNICA.....	19
2.6.1. TEORIA DA TRANSIÇÃO DE ESCALA.....	20
2.6.2. PRINCÍPIO DE HILL-MANDEL E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA PERIÓDICAS.....	20
2.6.3. DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS PARA UM PROBLEMA EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO 2D.....	21
3. ESTRUTURAS CELULARES E FABRICAÇÃO ADITIVA.....	23
3.1. ESTRUTURAS CELULARES.....	23
3.1.1. ARQUITETURA DE ESTRUTURAS EM REDE.....	24
3.1.1.1. REDE PLANA.....	24
3.1.1.2. REDE TRIDIMENSIONAL.....	25
3.1.1.3. REDE BASEADA EM SUPERFÍCIE.....	26
3.2. FABRICAÇÃO ADITIVA.....	27
3.2.1. TECNOLOGIAS.....	28
3.2.1.1. JATO DE AGLUTINANTE.....	28

3.2.1.2.	DEPOSIÇÃO DE ENERGIA DIRIGIDA.....	29
3.2.1.3.	JATEAMENTO DE MATERIAL.....	29
3.2.1.4.	FUSÃO EM LEITO DE PÓ.....	30
3.2.1.5.	LAMINAÇÃO DE FOLHAS.....	31
3.2.1.6.	FOTOPOLIMERIZAÇÃO EM CUBA.....	31
3.2.1.7.	ESTRUSÃO DE MATERIAL.....	32
3.2.2.	MODELAÇÃO E IMPRESSÃO DE UMA PEÇA CONSTITUIDA POR ESTRUTURAS CELULARES	33
4.	ANÁLISE NUMÉRICA.....	37
4.1.1.	ESTUDO DE CONVERGÊNCIA DE MALHA	37
4.1.2.	HOMOGENIZAÇÃO	40
4.1.3.	ANÁLISE DE CASOS PRÁTICOS.....	56
4.1.3.1.	ENSAIO BARRA À FLEXÃO	58
4.1.3.2.	ENSAIO BARRA ENCASTRADA	65
5.	CONCLUSÃO.....	71
5.1.	TRABALHOS FUTUROS.....	72
	Referências.....	73
	Declaração de Integridade	78

Lista de Figuras

Figura 1- Construção do diagrama de Voronoï: a) Conjunto de nós pertencentes a uma potencial vizinhança de n_0 ; b) Plano normal em n_4 ; c) Célula auxiliar; d) Célula de Voronoï de n_0 (retirado de [2]).....	7
Figura 2 – a) Diagrama de Voronoï; d) Triangulação de Delaunay; c) Circunferências circunscritas de vizinhança natural (retirado de [2])	8
Figura 3 – Método de quadratura Gaussiana a) Quadrilátero inicial; b) Transformação em um quadrado isoparamétrico; c) Conversão no quadrilátero original (retirado de [2]).....	9
Figura 4 -a) Discretização nodal segundo um padrão irregular; b) Quadrilátero gerado (retirado de [2]).....	10
Figura 5 -a) Discretização nodal seguindo um padrão regular; b) Triângulo gerado (retirado de [2]).....	10
Figura 6 -a) Sub célula triangular dividida em quadriláteros; b) Sub célula quadrangular dividida em quadriláteros (retirado de [2])	11
Figura 7 -a) Células de influência de tamanho fixo; b) Células de influência de tamanho variável (retirado de [2]).....	12
Figura 8 -Células de Influência: a) Células de influência de primeiro grau; b) Células de influência de segundo grau (retirado de [2]).....	13
Figura 9 -Triângulo tridimensional de Pascal (retirado de [2])	14
Figura 10- Tipos de estruturas celulares, baseado em [32]	23
Figura 11- Exemplo de padrões utilizados em redes planas	25
Figura 12- Exemplo de células de rede tridimensional, adaptado de [47]	26
Figura 13- Exemplo de células de redes baseadas em superfície, adaptado de [53]	27
Figura 14- Modelo nas diferentes etapas a) CAD b) STL c) dividido em camadas	28
Figura 15- Esquema representativo de jato de aglutinante, adaptado de [56].....	29
Figura 16- Esquema representativo de deposição de energia dirigida, adaptado de [56]	29
Figura 17- Esquema representativo do material jetting, adaptado de [56]	30
Figura 18- Esquema representativo de fusão em leito de pó, adaptado de [56]	31
Figura 19- Esquema representativo de laminação de folhas, adaptado de [56]	31
Figura 20- Esquema representativo de fotopolimerização em cuba, adaptado de [56]	32
Figura 21- Esquema representativo da extrusão de material, adaptado de [56].....	32
Figura 22- Célula.....	34
Figura 23- Stetch no Autodesk Inventor da barra	34
Figura 24- Barra impressa	35
Figura 25 – (a) Placa com furo (dimensões em milímetros). (b) Restrições e carregamento da placa com furo.	38
Figura 26 - a) Malha 10x10; b) Malha 20x20; c) Malha 40x40; d) Malha 80x80.....	38
Figura 27- Deslocamento horizontal do ponto C	39
Figura 28 - Deslocamento vertical do ponto E.....	39
Figura 29 - Variação da tensão ao longo da linha ED.....	40
Figura 30 - Variação da tensão ao longo da linha CB.....	40
Figura 31 – Placa com furo.....	41

Figura 32 - Malhas homogeneizadas	42
Figura 33- Módulo de elasticidade homogeneizado em função da fração volúmica da placa com furo.....	43
Figura 34 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com um furo: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$	46
Figura 35 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com um furo: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$	47
Figura 36 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com um furo: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$	48
Figura 37 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com um furo: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$	49
Figura 38-Placa com quatro furos.....	50
Figura 39- Módulo de elasticidade homogeneizado em função da densidade placa com quatro furos	51
Figura 40 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$	52
Figura 41 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$	53
Figura 42 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$	54
Figura 43 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$	55
Figura 44- Esquema da barra	56
Figura 45- Malha da barra.....	56
Figura 46- Esquema da barra gradiente funcional.....	57
Figura 47- Malha da barra de gradiente funcional	57
Figura 48- Ensaio barra à flexão 3 pontos.....	58
Figura 49- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,99.....	59
Figura 50- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,93.....	59
Figura 51- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,8.....	60
Figura 52- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,7.....	60
Figura 53- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,61.....	61
Figura 54- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,5.....	61
Figura 55- Distribuição das tensões de corte na barra de gradiente funcional.....	62
Figura 56 – Mapa das tensões de corte da análise da barra à flexão: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$, g) gradiente funcional.....	63
Figura 57 - Mapa das tensão equivalente de von Mises da análise da barra à flexão: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$, g) gradiente funcional	64
Figura 58- Ensaio barra encastrada.....	65
Figura 59- Deslocamento vertical no ponto A	66
Figura 60- Tensão Normal σ_{xx} no ponto B.....	66
Figura 61- Tensão Normal σ_{xx} no ponto D	67

Figura 62- Tensão de corte no ponto C.....	67
Figura 63 - Distribuição das tensões de corte na direção y ao longo do ponto D com fração volúmica: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$	68
Figura 64 - Mapa da tensão equivalente de von Mises da análise da barra encastrada: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$, g) gradiente funcional	69

Lista de Tabelas

Tabela 1- Propriedades mecânicas de materiais utilizados em MEX.....	33
Tabela 2- Dimensões do furo da célula.....	34
Tabela 4 - Dimensões das placas com furo.....	41
Tabela 5- Variação de C11 em função do raio.....	43
Tabela 6- Variação de C21 em função do raio.....	43
Tabela 7- Variação de C22 em função do raio.....	44
Tabela 8- Variação de C33 em função do raio.....	44
Tabela 9- Variação de E1 em função do raio.....	44
Tabela 10- Variação de E2 em função do raio.....	44
Tabela 11- Variação de G12 em função do raio.....	45
Tabela 12- Variação de ν_{12} em função do raio.....	45
Tabela 14 - Variação de E1 em função do raio.....	51
Tabela 15 - Variação de ν_{12} em função do raio.....	51
Tabela 16- Propriedades utilizadas na análise das barras.....	57
Tabela 17- Coordenadas dos pontos em análise da barra encastrada.....	65

Acrónimos e Símbolos

Lista de Acrónimos

MFS	Method of Finite Spheres
MLPG	Meshless Local Petrov-Galerkin
NNRPIM	Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method
PBF	Função de base polinomial
RBF	Função de base radial
RPI	Interpolação de pontos radiais
RPIM	Método de interpolação de pontos radiais
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
SLA	Estereolitografia
DLP	Processamento de Luz Digital

Lista de Símbolos

$a(x_I)$	Coefficiente RBF
B	Matriz de deformação
b	Vetor das forças de campo por unidade de volume
$b(x_I)$	Coefficiente PBF
C	Matriz constitutiva do material
D	Tamanho do domínio de suporte
d	Dimensão do domínio
d_{0i}	Distância entre o nó 0 e o vizinho natural i
d_{0i}^*	Metade de d_{0i}
d_a	Espaçamento nodal médio dos nós do domínio de apoio de x_I
d_{iI}	Distância entre os nós de campo e o ponto de interesse x_I
d_r	Raio da circunferência de domínio de influência
d_{ref}	Dimensão do domínio de referência
d_x, d_y	Dimensões do domínio de influência retangular
f_b	Vetor das forças de campo
f_t	Vetor das forças externas
H	Matriz de interpolação

h	Espaçamento nodal médio na vizinhança de x_I
\mathbf{K}	Matriz de rigidez global
k	Parâmetro adimensional do domínio de influência
\mathbf{L}	Matriz operador matricial
M_I	Ponto médio
\mathbf{M}_T	Matriz de momento
m	Número de monómios da base polinomial
\mathbf{N}	Conjunto de vetores nodais
n	Número de nós do domínio de influência
\mathbf{n}	Vetor unitário normal ao domínio
n_I	Nó de interesse
\mathbf{P}	Matriz polinomial dos momentos
P_I	Vértice da célula de Voronoï
$\mathbf{p}(x_I)$	Vetor PBF
\mathbf{R}	Matriz de momentos RBF
\mathbb{R}^2	Espaço bidimensional
\mathbb{R}^d	Espaço n-dimensional
$\mathbf{r}(x_I)$	Vetor RBF
$u(x_1)$	Valores nodais
$u^h(x_I)$	Função de interpolação
\mathbf{u}_s	Vetor de valores nodais
\mathbf{V}	Vetor de células Voronoï
V_i	Célula de Voronoï
V_i^*	Célula experimental
\widehat{w}_I	Peso do ponto de integração
\widehat{w}_I^*	Peso do ponto de integração na superfície/curva
\mathbf{X}	Vetor de coordenadas nodais
\mathbf{x}	Coordenada cartesiana de um ponto
x_I	Ponto de interesse
γ, p	Parâmetros MQ-RBF
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor das deformações
μ_1, μ_2	Coeficientes da matriz constitutiva do material
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor das tensões de Cauchy
$\boldsymbol{\varphi}(x_I)$	Vetor de interpolação
ψ	Trabalho virtual
$\boldsymbol{\psi}(x_I)$	Vetor subproduto

Γ	Domínio fronteira
Γ_t	Fronteira natural
Γ_u	Fronteira essencial
Ω	Domínio sólido
%	Porcentagem
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana de um vetor
:	Tal que
\forall	Para todo
∇	Operador gradiente
\in	Pertencente
\wedge	E lógico
$:=$	Igual por definição
\subset	Está contido

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido para conclusão do Mestrado em Engenharia Mecânica, especialização em Construções Mecânicas, no Instituto Superior de Engenharia do Porto, ano letivo 2023/2024. Esta tese serve para descrever o trabalho desenvolvido no âmbito do tema “análise de espumas poliméricas obtidas por impressão 3D”.

1.1. MOTIVAÇÃO

Segundo a Agência Europeia do Ambiente, cerca de 25% das emissões de CO₂ da UE em 2020 foram provocadas pelo setor dos transportes[1]. A utilização de estruturas celulares com baixo peso em veículos pode ser uma solução eficaz para reduzir essas emissões. Veículos mais leves consomem menos combustível, o que não só diminui os custos operacionais, mas também reduz significativamente as emissões de CO₂.

Além da eficiência de combustível, a redução de peso também contribui para a diminuição do desgaste dos veículos, prolongando a vida útil dos componentes e reduzindo os custos de manutenção. No setor aeronáutico, a utilização de materiais leves pode resultar em economias substanciais ao longo da vida útil de uma aeronave, compensando os custos iniciais mais elevados desses materiais. Assim, a adoção de estruturas celulares leves é uma estratégia crucial para alcançar metas de sustentabilidade e conformidade com regulamentações ambientais cada vez mais rigorosas [2].

1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO

O progresso nos campos da simulação e tecnologias de fabrico tem proporcionado avanços significativos nas mais diversas áreas da engenharia. Entre estas, podem ser destacados os métodos numéricos sem malha e a impressão 3D, sendo esta última focada na criação de estruturas celulares. Embora sejam disciplinas distintas entre si, a sua convergência permite a possibilidade de projetar, simular e, posteriormente, fabricar estruturas complexas com bastante precisão [3].

Os métodos numéricos são ferramentas matemáticas que permitem a resolução de problemas que envolvem, entre outros, equações diferenciais, integrais ou sistemas de equações. No âmbito da engenharia, muitas vezes é necessário resolver problemas complexos onde a análise analítica é impraticável. Amplamente utilizado, o método de elementos finitos (FEM) destaca-

se por na sua formulação descrever o domínio em estudo em pequenos elementos, normalmente triângulos ou quadriláteros.

Em contrapartida, métodos sem malha como o “Radial Point Interpolation Method” (RPIM) e o “Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method” (NNRPIM) apenas dependem da localização nodal para descrever o domínio em análise. Estes proporcionam vantagens, especialmente na simulação de casos não lineares com elevadas deformações e dano. Como não possuem uma malha fixa, permitem maior flexibilidade e precisão na representação de fronteiras móveis e interfaces complexas[4].

Inspiradas na Natureza, as estruturas celulares têm cativado crescente interesse graças às suas propriedades únicas. Podendo possuir uma geometria interna repetida ou não, destacam-se por permitirem a criação de materiais leves sem comprometer as propriedades mecânicas requeridas para o efeito. São utilizadas nas mais diversas aplicações, desde a indústria aeroespacial, até à criação de implantes ortopédicos.

A análise de um material composto por estruturas celulares pode ser realizada de duas formas distintas: uma análise macromecânica ou micromecânica. A análise micromecânica numa espuma tem em consideração toda a sua geometria que, em muitos casos, se torna bastante complexa devido à grande quantidade de células. Por este motivo, é possível utilizar uma abordagem macromecânica, considerando o material como sendo sólido homogêneo e, portanto, não tendo em conta a heterogeneidade apresentada pela estrutura interna que compõe cada uma das células.

A utilização de materiais com células repetidas ao longo do espaço permite a utilização de um elemento representativo de volume (RVE) que representa a estrutura celular repetida a ser analisada. A utilização da teoria de transição de escala permite obter as propriedades homogeneizadas da espuma e, deste modo, é possível construir um modelo macromecânico da estrutura celular[5]. A homogeneização pode ser obtida numericamente utilizando os métodos RPIM e NNRPIM, sendo que, mesmo requerendo um maior poder computacional, este último apresenta uma solução bastante próxima das soluções encontradas na literatura [5].

A vulgarização da impressão 3D veio revolucionar o processo de conceção e fabrico, não só com a possibilidade de prototipagem rápida e acessível, como também com a possibilidade de criar geometrias com complexidades antes impossíveis. A utilização de materiais poliméricos de baixa temperatura de fusão permite combinar o seu baixo peso com a facilidade de fabrico. A combinação da fabricação aditiva com a utilização de estruturas celulares e a utilização de materiais poliméricos, permite a criação de componentes de alta precisão e extremamente eficientes em termos de peso.

1.3. OBJETIVOS

Desta forma, definiu-se como objetivo de estudo explorar a confluência destes campos. É possível idealizar uma espuma polimérica, utilizar o método da homogeneização para obtenção das propriedades equivalentes, com o auxílio dos métodos numéricos, o RPIM e o NNRPIM, de forma a avaliar o seu comportamento mecânico e, de seguida, obter essa mesma espuma

utilizando métodos de fabricação aditiva. Os objetivos desta dissertação podem ser resumidos da seguinte forma:

- combinar a homogeneização material com os métodos sem malha RPIM e NNRPIM
- obter curvas fenomenológicas das propriedades mecânicas de espumas em PLA (ácido polilático) com um padrão celular de vazios circulares.
- aplicar uma abordagem multiescala para simular numericamente vigas em sandwich produzidas em PLA.

1.4. ESTRUTURA DA TESE

Este trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos:

- O primeiro capítulo corresponde à introdução e é onde são apresentados os temas abordados ao longo da tese.
- O segundo capítulo aborda os métodos numéricos sem malha utilizados neste trabalho, RPIM e NNRPIM, onde será explicada a sua formulação, assim como do método de homogeneização das propriedades de um material.
- O terceiro capítulo apresenta uma revisão dos vários tipos de estruturas celulares, com ênfase nas redes, sendo estas divididas em redes planas, redes tridimensionais e redes baseadas em superfície. São também abordadas as diversas tecnologias de fabricação aditiva, sendo que no final será feita uma peça impressa em 3D composta por uma estrutura celular.
- O quarto capítulo inclui a análise numérica utilizando os métodos estudados no primeiro capítulo a uma estrutura celular. Em primeiro lugar será feita uma análise de convergência de malha, de forma a selecionar a malha de estudo mais eficiente. De seguida, será feita a homogeneização de várias espumas com densidades diferentes, de forma a retirar as propriedades equivalentes que serão analisadas, na parte final do capítulo, em ensaios de flexão e de viga encastrada.
- O quinto capítulo apresenta a conclusão e a proposta de trabalhos futuros.

2. MÉTODOS SEM MALHA

Ao longo deste capítulo, serão abordados dois métodos sem malha diferentes: o “Radial Point Interpolation Method” (RPIM) e o “Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method” (NNRPIM). Em primeiro lugar, será apresentada uma revisão histórica dos métodos sem malha centrada, principalmente, no RPIM e NNRPIM. Seguidamente, serão apresentados os conceitos e formulações de cada um dos métodos referidos anteriormente. No final, será apresentada a metodologia para a formulação das equações de mecânica dos materiais.

Paralelamente à maioria dos métodos dependentes de nós, também os métodos sem malha seguem um procedimento generalizado para a sua formulação. Inicialmente, é estudada a geometria do problema, de forma a ser possível estabelecer um domínio sólido, identificando as suas condições fronteira. Em seguida, o domínio do problema é discretizado num conjunto de nós, podendo este seguir um padrão regular ou irregular. Quanto maior for o número de nós, mais preciso será o resultado, no entanto, será necessário maior poder de computação.

Um primeiro desenvolvimento dos métodos sem malha deveu-se à simulação numérica de problemas astrofísicos sem condições fronteira [6], [7], conhecido como smooth particle hydrodynamics (SPH). Apesar do seu inicial desenvolvimento, este método não permitia satisfazer condições de consistência em muitos problemas [8] e foi só após os anos 90 que foi possível ultrapassar essas limitações através do Reproducing kernel particle method [9], [10], [11]. Ted Belytschko desenvolveu o método Element Free Galerkin (EFG) [12] de forma a ultrapassar alguns problemas de estabilidade e de fronteira no SPH.

O Diffuse Element Method (DEM) foi o primeiro método sem malha a utilizar a aproximação dos Moving Least Square (MLS) [13] e a construir as funções de forma sobre nós dispersos. Posteriormente, foi desenvolvido o Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) com base no método de formulação local de forma fraca [14] e o Method of Finite Spheres (MFS) [15] como um caso especial da formulação geral dos procedimentos de MLPG.

2.1. VIZINHOS NATURAIS

Nesta secção serão abordadas as metodologias que permitiram a formulação do NNRPIM, método este que irá ser abordado ao longo deste trabalho. Este utiliza os conceitos dos vizinhos naturais, diagrama de Voronoï e a triangulação de Delaunay para determinar a discretização do domínio [16]. Como apenas é necessário conhecer a distribuição nodal do domínio do problema, este método é considerado como “sem malha” [4].

2.1.1. CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE VORONÓI

Considere-se o conjunto de nós $N = \{n_1, n_2, \dots, n_N\} \in \mathbb{R}^2$ que discretiza o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \Omega$. O diagrama de Voronóï de N é constituído pela divisão do domínio e discretizado por X em subdomínios V_i fechados e convexos. O conjunto de células Voronóï define o diagrama de Voronóï como $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$. Cada subdomínio V_i está associado ao respetivo nó n_i , de forma que, para cada nó n_i , qualquer ponto no interior da respetiva célula V_i encontra-se mais perto deste do que qualquer outro nó $n_j \in N \wedge j \neq i$. Uma célula de Voronóï pode, então, ser definida [4] como,

$$V_i := \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d: \|x - x_i\| < \|x - x_j\|, \forall i \neq j\} \quad (1)$$

sendo x_i um ponto de interesse do domínio e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana ou distância entre dois pontos.

Como demonstração do procedimento genérico para a obtenção de um diagrama de Voronóï, será representado um espaço bidimensional $\Omega \in \mathbb{R}^2$, representado na Figura 1a, devido à maior facilidade em poder ser visualizado. Deste modo, irá ser determinado, a título de exemplo, a célula Voronóï V_0 , correspondente ao nó n_0 . Em primeiro lugar, seleciona-se um grupo de nós n como podendo pertencer à vizinhança natural de n_0 . Em seguida, é escolhido um desses nós, n_4 , como potencial vizinho natural e determina-se o respetivo vetor u_{n_0} :

$$u_{n_0} = \frac{x_0 - x_4}{\|x_0 - x_4\|} \quad (2)$$

De seguida, pode-se definir o plano π_{n_0} , considerando o vetor u_{n_0} como vetor normal, da seguinte forma:

$$u_{40}x + v_{40}y + w_{40}z = u_{40}x_4 + v_{40}y_4 + w_{40}z_4 \quad (3)$$

Após estar definido o plano π_{n_0} , considera-se como sendo vizinho natural de n_0 apenas os nós que satisfazem a seguinte condição:

$$u_{40}x + v_{40}y + w_{40}z \geq u_{40}x_4 + v_{40}y_4 + w_{40}z_4 \quad (4)$$

Finalmente, podem ser excluídos do conjunto de vizinhança de n_0 , todos os nós que não satisfazem a condição anterior, neste caso, como pode ser observado na Figura 1b, o nó n_8 não satisfaz a condição anterior, pelo que não poderá ser considerado como pertencente à vizinhança de n_0 . O processo anterior é repetido para todos os nós do grupo de potenciais vizinhos naturais (Figura 1c). Generalizando, um nó n_n de um conjunto de n nós, pertence à vizinhança natural do nó n_0 se satisfizer simultaneamente as seguintes condições:

$$\begin{cases} u_{10}x + v_{10}y + w_{10}z \geq u_{10}x_1 + v_{10}y_1 + w_{10}z_1 \\ u_{20}x + v_{20}y + w_{20}z \geq u_{20}x_2 + v_{20}y_2 + w_{20}z_2 \\ \vdots \\ u_{n0}x + v_{n0}y + w_{n0}z \geq u_{n0}x_n + v_{n0}y_n + w_{n0}z_n \end{cases} \quad (5)$$

Por último, define-se a célula auxiliar V_0^* , cujo perímetro possui os nós que satisfazem as condições anteriores e são considerados pertencentes à vizinhança natural. A célula Voronóï V_0

(Figura 1d) será semelhante a V_0^* , no entanto, o seu perímetro encontra-se a metade da distância entre o nó n_0 e o respetivo nó n_i , cuja distância d_{0i}^* pode ser definida por:

$$d_{0i}^* = \frac{d_{0i}}{2} = \frac{\|x_0 - x_i\|}{2} \quad (6)$$

Aplicando o procedimento anterior a todos os nós que discretizam o domínio, obtém-se o respetivo diagrama de Voronoï (Figura 2a).

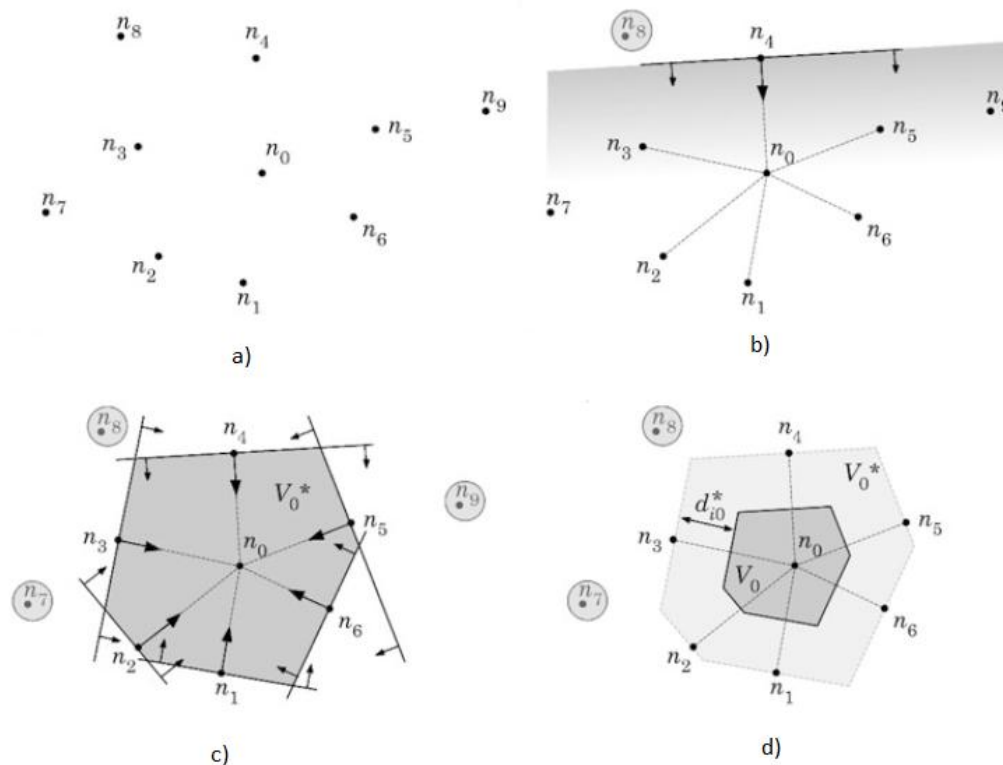


Figura 1- Construção do diagrama de Voronoï: a) Conjunto de nós pertencentes a uma potencial vizinhança de n_0 ; b) Plano normal em n_4 ; c) Célula auxiliar; d) Célula de Voronoï de n_0 (retirado de [4]).

2.1.2. TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY

Os triângulos de Delaunay são construídos ligando os nós que possuem células Voronoï adjacentes (Figura 2b). Estas duas construções são complementares, pois a circunferência circunscrita a um triângulo Delaunay possui como centro o vértice formado pelas respetivas células Voronoï, sendo estas circunferências conhecidas como circunferências de vizinhança natural [17]. A triangulação de Delaunay possui uma propriedade única, a “empty circumcircle criterion” [18], cujo critério implica que uma circunferência circunscrita a um triângulo Delaunay não contém nenhum nó, além dos que formam o respetivo triângulo, como pode ser observado na Figura 2c.

A triangulação de Delaunay é utilizada na integração numérica, formando uma malha dependente da discretização do domínio que é utilizada para integrar as funções de forma do NRPIM.

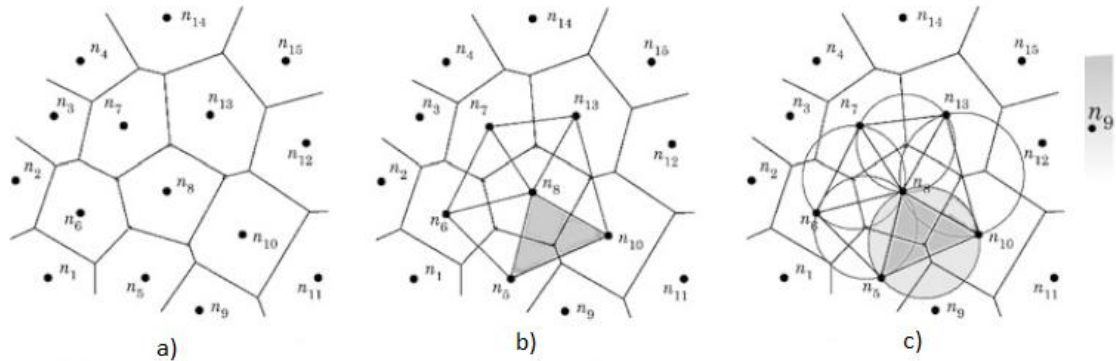


Figura 2 – a) Diagrama de Voronoi; b) Triangulação de Delaunay; c) Circunferências circunscritas de vizinhança natural (retirado de [4]).

2.2. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste contexto, a integração numérica é uma ferramenta fundamental na aplicação dos métodos sem malha. Neste capítulo, será apresentada a quadratura de Gauss-Legendre, utilizada no RPIM, e a integração de base nodal utilizando o diagrama de Voronoi [19] e a triangulação de Delaunay [20], apresentados anteriormente em 2.1, utilizada no NRPIM.

2.2.1. QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

O método da quadratura de Gauss-Legendre é utilizado na integração do RPIM e sua implementação consiste na construção de uma malha independente de nós.

Este método é utilizado no método de elementos finitos, normalmente com malhas ajustadas ao domínio, no entanto, também é viável a utilização de malhas maiores do que o domínio. Estudos efetuados no âmbito da integração numérica demonstram que a malha de integração deverá ter o tamanho do domínio do problema [12]. A utilização de malhas ajustadas ao domínio requer maior tempo computação, por isso, malhas cegas são bastante utilizadas devido à sua simplicidade e fácil implementação.

Para um caso geral (Figura 3a), a célula original será convertida num quadrado isoparamétrico (Figura 3b) e, de seguida, são distribuídos pontos de Gauss pelo quadrado. Normalmente, o esquema mais utilizado é a integração da quadratura de dois pontos de Gauss, no entanto, o número de pontos pode ser diferente. De seguida, o quadrado isoparamétrico é convertido novamente na sua forma original (Figura 3c), no sistema de coordenadas cartesianas. De forma a ser obtida a integração numérica da função $F(x)$, o integral pode ser substituído pelo somatório:

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_g} \widehat{w}_i \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \quad (7)$$

Sendo \widehat{w}_i o peso e \mathbf{x}_i a localização de cada um dos pontos de integração de Gauss (em coordenadas cartesianas).

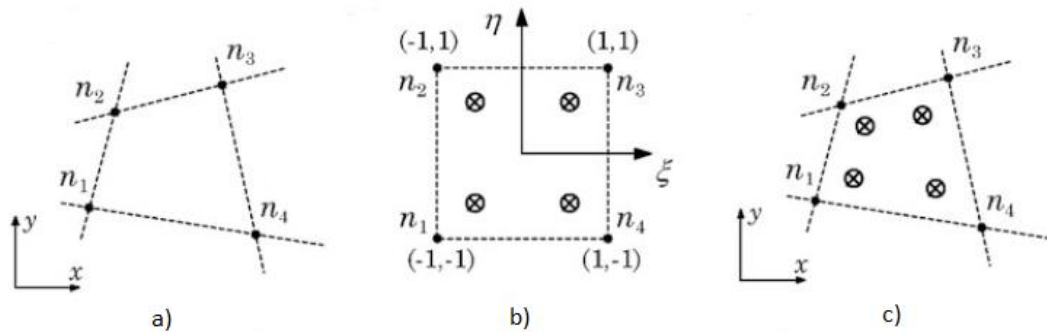


Figura 3 – Método de quadratura Gaussiana a) Quadrilátero inicial; b) Transformação em um quadrado isoparamétrico; c) Conversão no quadrilátero original (retirado de [4]).

2.2.2. INTEGRAÇÃO DE BASE NODAL

Este método consiste num esquema de integração de base nodal utilizando o diagrama de Voronoi [19] e a triangulação de Delaunay [20], apresentados anteriormente em 2.1, para a construção da malha de integração, fazendo deste método um método puramente sem malha, pois não são necessárias mais informações além da localização dos nós que discretizam o problema. O NNRPIM utiliza este esquema de integração inovador [16], [21], podendo ser aplicado com sucesso a domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, esta técnica também é utilizada no Natural Radial Element Method (NREM) [21], [22], [23], demonstrando-se que pode ser utilizada com qualquer tipo de método sem malha.

Considere-se um domínio bidimensional e um nó n_I , a partir do qual, e utilizando a triangulação de Delaunay, permite dividir a respetiva célula de Voronoi em n sub células (Figura 4a), sendo n o número de vizinhos naturais de n_I . Cada uma das sub-células criadas está definida pelo ponto n_I , pelo vértice da célula de Voronoi P_I e pelos pontos médios M_I , definindo, assim, um quadrilátero (Figura 4b). Para o caso da discretização nodal utilizada seguir um padrão regular (Figura 5a), as sub-células criadas definem um triângulo (Figura 5b).

De seguida, distribui-se os pontos de integração de Gauss pela geometria gerada (quadrilátero ou triângulo), seguindo o procedimento descrito em 2.2.1. Pode ser utilizado apenas um único ponto de Gauss por sub-célula, localizado no baricentro da sub-célula e o seu peso é a área da respetiva célula, sendo esta a abordagem a mais simples (integração de ordem 0).

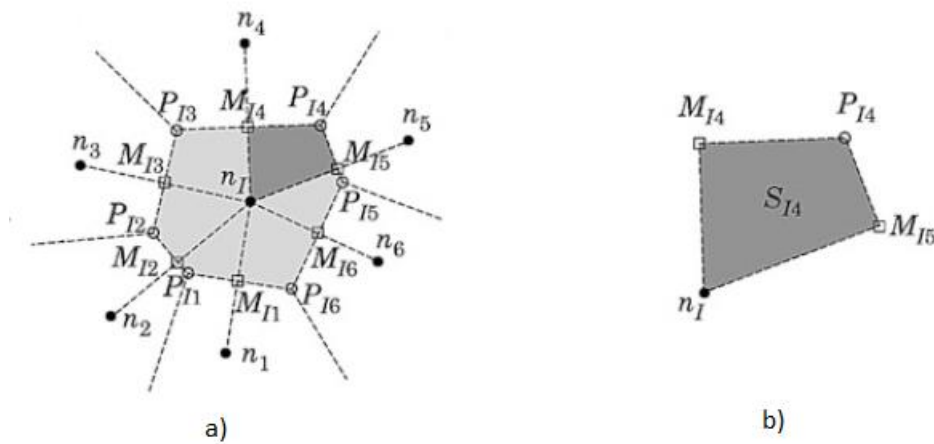


Figura 4 -a) Discretização nodal segundo um padrão irregular; b) Quadrilátero gerado (retirado de [4]).

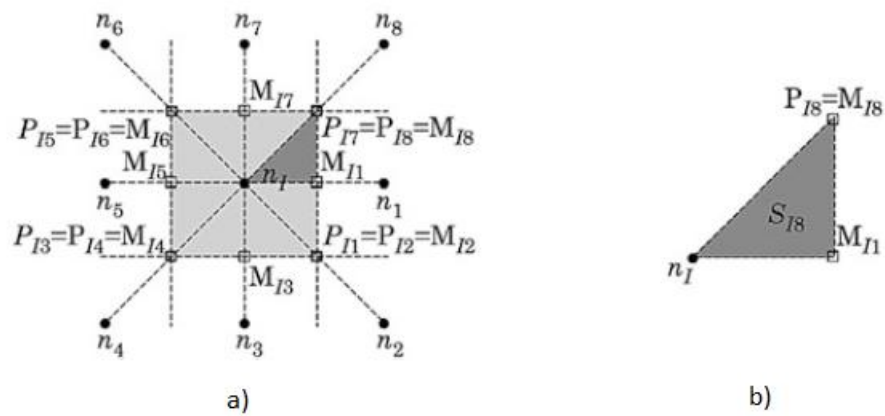


Figura 5 -a) Discretização nodal segundo um padrão regular; b) Triângulo gerado (retirado de [4]).

Pode ser considerada uma abordagem mais geral, dividindo cada sub-célula ligando o baricentro da respectiva geometria aos pontos médios de cada uma das arestas, formando quadriláteros menores, independente da sub-célula original (triângulo ou quadrilátero), como demonstrado nas Figura 6a e b. Em seguida, aplica-se a integração de Gauss-Legendre, que pode ser de ordem 1 (utilizando apenas um ponto) ou de ordem k (utilizando $k \times k$ pontos).

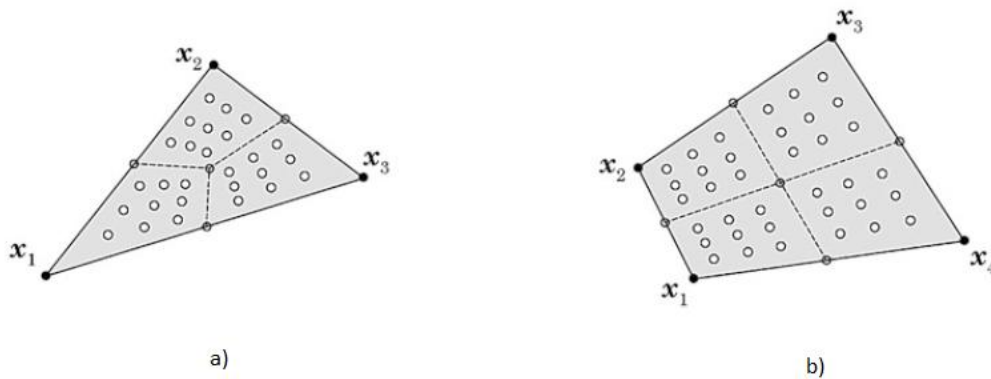


Figura 6 -a) Sub célula triangular dividida em quadriláteros; b) Sub célula quadrangular dividida em quadriláteros (retirado de [4]).

2.3. CONECTIVIDADE NODAL

Os métodos sem malha utilizam o conceito de domínio de influência de forma a aplicar a conectividade nodal, esta sendo estabelecida através da sobreposição de domínios de influência. Contrariamente ao método de elementos finitos, a conectividade nodal deve estar estabelecida após o domínio ser discretizado num conjunto de nós. De seguida, será apresentado uma abordagem de célula de influência, recentemente desenvolvida para instaurar a conectividade nodal [4].

2.3.1. DOMÍNIOS DE INFLUÊNCIA

Uma série de métodos sem malha utiliza o conceito de domínios de influência [11], [12], [24], [25]. Um deles é o RPIM, cuja conectividade nodal é estabelecida através da sobreposição de domínios de influência em cada nó. Estes domínios são definidos pela localização dos nós no interior de uma área ou volume, dependendo se se trata de um problema bidimensional ou tridimensional. Para obtenção de resultados mais precisos, todos os domínios devem conter o mesmo número de nós, sendo que o seu tamanho e forma irão influenciar o desempenho deste método. Trabalhos anteriores sugerem a utilização de um número de nós dentro dos domínios de influência entre nove e dezasseis como sendo ideal [4], [12], [24], [25], [26], sendo que é estabelecida a seguinte relação para obtenção da dimensão de referência d_{ref} dos domínios de influência:

$$d_{ref} = k \cdot h \quad (8)$$

Onde h representa o espaçamento médio entre nós na vizinhança de x_i e k representa um parâmetro adimensional, cujo valor varia entre $k = [1,5; 2,5]$.

Em primeiro lugar, é necessário definir as dimensões dos domínios de influência. Considere-se um espaço bidimensional e domínios de influência de tamanho fixo, existem duas formas geométricas sugeridas: retangular e circular. Para o caso de se optar pela retangular, situação ilustrada na Figura 7a, define-se d_x e d_y , para a forma circular define-se d_r . De seguida, para

cada ponto de interesse x_I , identifica-se os n nós no interior do domínio de influência centrado em x_I . Utilizando o procedimento de domínios de influência de tamanho fixo, pontos localizados próximo do limite do domínio poderão ter menos nós dentro do respetivo domínio de influência em comparação com pontos de interesse localizados mais para o interior. Este procedimento poderá originar uma perda de precisão na análise, no entanto, é bastante utilizado devido à sua simplicidade e facilidade de implementação, sendo os domínios de influência de tamanho fixo a técnica mais utilizada para impor a conectividade nodal.

A utilização de domínios de influência de tamanho variável (Figura 7b), ao contrário dos domínios de influência de tamanho fixo, permitem uma conectividade constante ao longo do domínio, como permitem, também, que se construa funções de forma com o mesmo grau de complexidade em todo o domínio. Neste procedimento, estabelece-se o número de nós n que deverá estar contido em cada domínio de influência e, de seguida, é executada uma pesquisa radial centrada num ponto de interesse x_I , ficando o domínio de influência definido quando são identificados os n nós mais próximos de x_I . Esta abordagem, apesar de requerer de maior tempo computacional, geralmente resulta em resultados mais precisos.

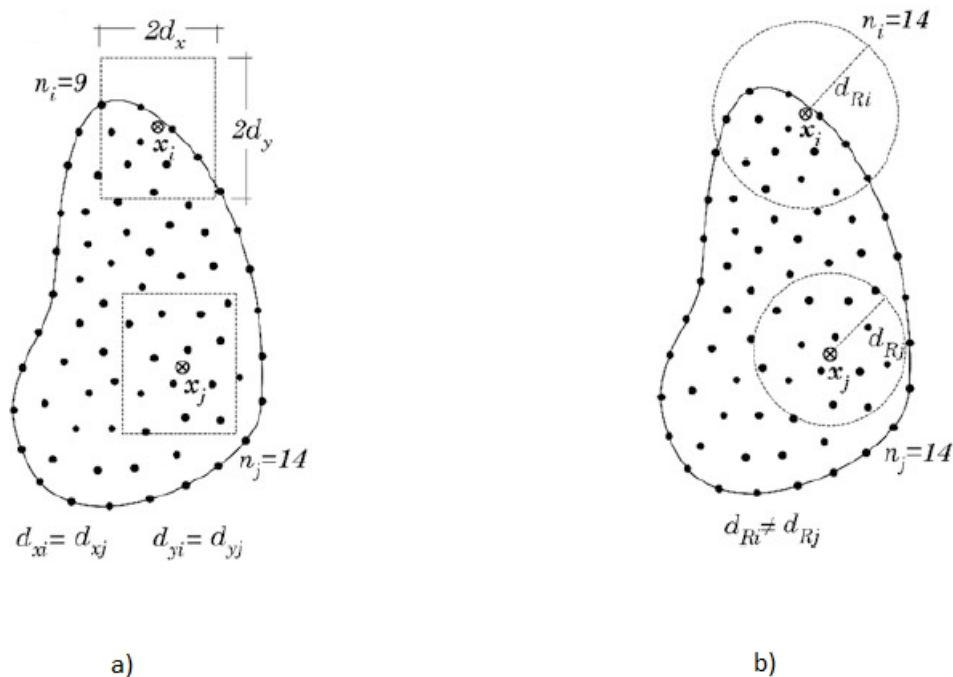


Figura 7 -a) Células de influência de tamanho fixo; b) Células de influência de tamanho variável (retirado de [4]).

2.3.2. CÉLULAS DE INFLUÊNCIA

O método das células de influência é uma técnica recentemente desenvolvida, utilizado no NNRPIM. Este método utiliza a conectividade nodal diretamente a partir da discretização nodal, imposta a partir dos diagramas de Voronoï e da triangulação de Delaunay. Esta abordagem é análoga à considerada anteriormente, no entanto, o conjunto de nós pertencente à célula de

influência que contribuem para a interpolação de um ponto de interesse são determinados a partir do respetivo diagrama de Voronoi.

Podem ser consideradas duas classes de células de influência: célula de influência de primeiro grau e célula de influência de segundo grau. A célula de primeiro grau (Figura 8a) é composta pelas células de cada vizinho natural do ponto de interesse, enquanto que o segundo grau é composto pelos nós pertencentes à célula de primeiro grau e os vizinhos naturais de cada nó da célula de influência de primeiro grau. A utilização de células de influência de segundo grau (Figura 8b) requer maior tempo computacional e um custo mais elevado, no entanto, a sua utilização conduz a resultados mais precisos, uma vez que permitem uma conectividade mais profunda.

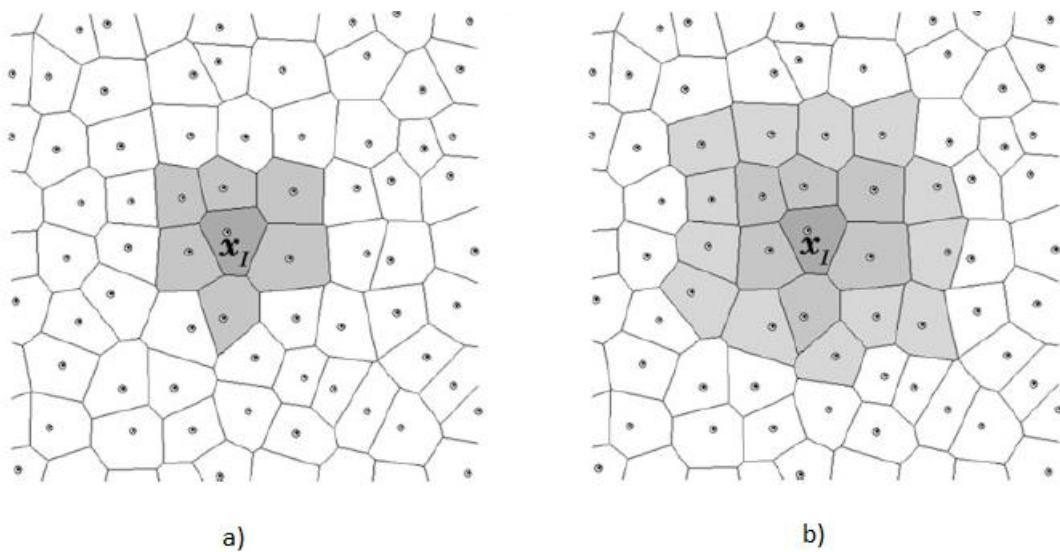


Figura 8 -Células de Influência: a) Células de influência de primeiro grau; b) Células de influência de segundo grau (retirado de [4]).

2.4. FUNÇÕES DE FORMA – INTERPOLADORES RADIAIS PONTUAIS

Tanto o RPIM como o NNRPIM utilizam, para construção das funções de forma, o método interpolação radial pontual (RPI), sendo o procedimento para a sua construção demonstrado de seguida. Um espaço \mathbb{R}^d é discretizado em N nós cujas coordenadas são $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \in \Omega \wedge \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$. Considerando a função escalar contínua $u(\mathbf{x})$, a função de interpolação $u^h(\mathbf{x}_I)$ combina a RBF com a função polinomial de base (PBF). Portanto, para o ponto de interesse $\mathbf{x}_I \in \mathbb{R}^d$, a função de interpolação pode ser definida como:

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_I) b_j(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)^T \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Sendo n o número de nós no interior da função de suporte do ponto de interesse \mathbf{x}_I e sendo m o número de monómios da base polinomial completa, $\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$ são os coeficientes não constantes de $\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)$.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = \{a_1(\mathbf{x}_I) \quad a_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad a_n(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) = \{b_1(\mathbf{x}_I) \quad b_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad b_n(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (11)$$

Definem-se RBF e PBF como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}_I) &= \{r_1(\mathbf{x}_I) \quad r_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad r_n(\mathbf{x}_I)\}^T \\ &= \{r_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_I) \quad r_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_I) \quad \dots \quad r_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_I)\}^T \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) = \{p_1(\mathbf{x}_I) \quad a_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (13)$$

Os monómios no PBF são determinados pelo triângulo tridimensional de Pascal (Figura 9). Por exemplo, considerando uma base quadrática para o caso tridimensional $m = 10$, o P SBF é definido como:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) = \{1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad yz \quad x^2 \quad zx\}^T \quad (14)$$

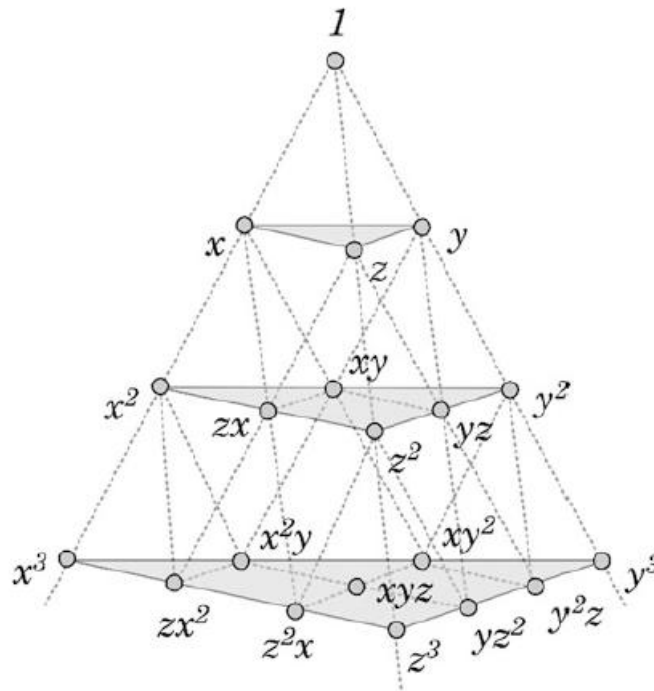


Figura 9 -Triângulo tridimensional de Pascal (retirado de [4]).

Existem vários RBF, sendo que, de entre os métodos sem malha RPI, o mais comum é o Multi-Quadratics RBF (MQ-RBF), podendo este ser definido como:

$$r_i(\mathbf{x}_I) = (d_{ii}^2 + (\gamma d_a)^2)^p \quad (15)$$

Sendo d_{ii} a distância entre os nós de interpolação e os pontos de interesse, γ e p representam parâmetros de forma do MQ-RBF e d_a representa a magnitude, no ponto \mathbf{x}_I do domínio de influência (RPIM) ou célula de influência (NNRPIM). A distância d_{ii} entre os nós de interpolação (\mathbf{x}_i) e o ponto de interesse (\mathbf{x}_I) é a única variável no RBF. Considerando um espaço tridimensional, esta distância pode ser calculada da seguinte forma:

$$d_{il} = \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2 + (z_i - z_l)^2} \quad (16)$$

Os parâmetros γ e p precisam de ser otimizados para se obterem resultados precisos. Os trabalhos sobre o NNRPIM mostraram que γ deve ser próximo de zero e p deve ser próximo de um [4], [27]. No entanto, γ e p não podem ter os valores zero e um, uma vez que a utilização destes valores leva a matrizes de momentos singulares. Neste trabalho são utilizados os valores $\gamma=0,0001$ e $p=1,0001$ [4]. Dentro dos métodos sem malha que utilizam o conceito de domínio de influência (RPIM), d_a é definido como o espaçamento nodal médio dos nós n dentro do domínio de apoio de \mathbf{x}_l e pode ser determinado utilizando a seguinte equação [4], [28]:

$$d_a = \frac{D \frac{1}{d}}{\frac{1}{n^d} - 1} \quad (17)$$

Sendo d a dimensão do domínio e D o tamanho da função de suporte. O parâmetro D define, respetivamente, o comprimento da função de suporte caso se trate de um caso unidimensional, a área da função de suporte caso se trate de um caso bidimensional e o volume da função de suporte caso se trate de um caso tridimensional. Para o NNRPIM, d_a representa o tamanho da célula de Voronoï do ponto de interesse \mathbf{x}_l e, para o MQ-RBF, d_a pode ser definido como o peso integração de \mathbf{x}_l ($d_a = \widehat{w}_l$), caso \mathbf{x}_l seja um ponto de integração. Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_l)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_l)$ são determinados através da imposição da função $u^h(\mathbf{x}_l)$, definida na equação (9), por todos os valores nodais n que fazem parte da função de suporte do domínio de \mathbf{x}_l . Desta forma, impondo os valores nodais de n à equação (9), obtem-se o seguinte sistema de equações com $n + m$ incógnitas:

$$\begin{cases} u^h(\mathbf{x}_1) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) a_i(\mathbf{x}_l) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_1) b_j(\mathbf{x}_l) = u(\mathbf{x}_1) \\ u^h(\mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_2) a_i(\mathbf{x}_l) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_2) b_j(\mathbf{x}_l) = u(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ u^h(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_n) a_i(\mathbf{x}_l) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_n) b_j(\mathbf{x}_l) = u(\mathbf{x}_n) \end{cases} \quad (18)$$

Que também pode ser representado na forma matricial como:

$$\mathbf{R}\mathbf{a}(\mathbf{x}_l) + \mathbf{P}\mathbf{b}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{u}_s \quad (19)$$

A matriz de momento RBF \mathbf{R} define-se como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{x}_1) & r_2(\mathbf{x}_1) & \dots & r_n(\mathbf{x}_1) \\ r_1(\mathbf{x}_2) & r_2(\mathbf{x}_2) & \dots & r_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(\mathbf{x}_n) & r_2(\mathbf{x}_n) & \dots & r_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Podendo ser definida para o MQ-RBF como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (d_{11}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & (d_{12}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & \dots & (d_{1n}^2 + (\gamma d_c)^2)^p \\ (d_{21}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & (d_{22}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & \dots & (d_{2n}^2 + (\gamma d_c)^2)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (d_{n1}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & (d_{n2}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & \dots & (d_{nn}^2 + (\gamma d_c)^2)^p \end{bmatrix} \quad (21)$$

A matriz polinomial de momento \mathbf{P} define-se como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_n(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (22)$$

O sistema de equações (18) tem $n + m$ incógnitas. Portanto, é necessário um conjunto extra de equações como consequência do teorema de Duchon [4], [29], [30]. Podem ser adicionadas ao sistema de equações inicial as seguintes m equações:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_1(\mathbf{x}_i) a_i(\mathbf{x}_l) n_i = p_1(\mathbf{x}_1) a_1(\mathbf{x}_l) + \dots + p_1(\mathbf{x}_n) a_n(\mathbf{x}_l) = 0 \\ \sum_{i=1}^n p_2(\mathbf{x}_i) a_i(\mathbf{x}_l) n_i = p_2(\mathbf{x}_1) a_1(\mathbf{x}_l) + \dots + p_2(\mathbf{x}_n) a_n(\mathbf{x}_l) = 0 \\ \sum_{i=1}^n p_m(\mathbf{x}_i) a_i(\mathbf{x}_l) n_i = p_m(\mathbf{x}_1) a_1(\mathbf{x}_l) + \dots + p_m(\mathbf{x}_n) a_n(\mathbf{x}_l) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Podendo ser expressas matricialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{0} \quad (24)$$

As equações (19) e (24) podem ser combinadas de forma a obter-se o seguinte conjunto de $n + m$ equações com $n + m$ incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_l) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_l) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_l) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_l)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_l)$ são obtidos a partir da equação (25):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_l) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_l) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Substituindo os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_l)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_l)$ obtidos a partir da equação (26) na equação (9), esta pode ser reescrita como:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_l) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_l)^T \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_l)^T\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_l) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_l) \end{Bmatrix} = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_l)^T \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_l)^T\} \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Interpretando a equação (27), é possível identificar os vetores das funções de interpolação:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_l) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_l)^T \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_l)^T\} \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \{\varphi(\mathbf{x}_l)^T \quad \psi(\mathbf{x}_l)^T\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

O vetor de interpolação $\varphi(\mathbf{x}_l)^T$ e o vetor subproduto $\psi(\mathbf{x}_l)^T$ são definidos como:

$$\varphi(\mathbf{x}_l)^T = \{\varphi_1(\mathbf{x}_l) \quad \varphi_2(\mathbf{x}_l) \quad \dots \quad \varphi_n(\mathbf{x}_l)\} \quad (29)$$

$$\psi(\mathbf{x}_l)^T = \{\psi_1(\mathbf{x}_l) \quad \psi_2(\mathbf{x}_l) \quad \dots \quad \psi_n(\mathbf{x}_l)\} \quad (30)$$

O vetor subproduto pode ser desprezado, pois é multiplicado pelo vetor nulo na equação (28), portanto, a variável u é interpolada para um ponto de interesse x_I utilizando a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}^h(x_I) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_I) \mathbf{u}(x_i) = \boldsymbol{\varphi}(x_I)^T \mathbf{u}_s \quad (31)$$

2.5. MECÂNICA DOS MATERIAIS

Neste subcapítulo, é descrito o processo para obtenção do conjunto de equações discretas final, sendo a metodologia utilizada pelo método sem malhas igual à do método de elementos finitos.

2.5.1. TEORIA DA ELASTICIDADE

Considere-se um domínio sólido Ω limitado por Γ . A equação de equilíbrio para um problema elasto plástico é definida como:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (32)$$

Sendo ∇ o operador gradiente, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor das tensões de Cauchy e \mathbf{b} o vetor das forças de campo por unidade de volume. Definem-se as condições fronteira como:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ na fronteira natural de } \Gamma_t \quad (33)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ na fronteira essencial de } \Gamma_u$$

Sendo $\bar{\mathbf{u}}$ o deslocamento descrito em Γ_u , $\bar{\mathbf{t}}$ a tração em Γ_t e \mathbf{n} a unidade vetorial normal e exterior à fronteira do domínio Ω . O tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser definido na notação de Voigt como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (34)$$

A lei constitutiva do material é definida como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (35)$$

Sendo \mathbf{C} a matriz constitutiva do material. Considerando um problema tridimensional:

$$\mathbf{C} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Onde $\mu_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ e $\mu_2 = \frac{1-\nu}{2}$. O vetor de deformações define-se como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \quad (37)$$

Os deslocamentos são relacionados com as deformações utilizando a expressão seguinte:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (38)$$

Sendo $\mathbf{u} = \{u \quad v \quad w\}$ e \mathbf{L} a matriz do operador diferencial:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (39)$$

2.5.2. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DISCRETAS

As equações diferenciais parciais que descrevem o fenómeno físico, tanto no FEM, como no RPIM e NRPIM, são estabelecidas pela formulação de Galerkin. Considerando a equação (32), a formulação de Galerkin é apresentada como [4]:

$$\Psi = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} b \Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T t d\Gamma = 0 \quad (40)$$

A equação (40) pode ser desenvolvida e apresentada da seguinte forma:

$$\psi = \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}_b - \mathbf{f}_t) = 0 \quad (41)$$

O que resulta num conjunto linear de equações que pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t \quad (42)$$

Sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez global, a qual, após manipulação do primeiro termo da equação (40) permite obter a seguinte equação [4]:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} d\Omega = \sum_{I=1}^{n_Q} \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{c} \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \widehat{W}_I \quad (43)$$

Onde a matriz \mathbf{B} é definida como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (44)$$

O segundo e terceiro termos da equação (40) permitem definir [4] os vetores das forças de campo \mathbf{f}_b e das forças externas \mathbf{f}_t :

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_{I=1}^{n_Q} \mathbf{H}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{b} \widehat{w}_I \quad (45)$$

$$\mathbf{f}_t = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega = \sum_{I=1}^{n_Q^*} \mathbf{H}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{f} \widehat{w}_I^* \quad (46)$$

Sendo \widehat{w}_I^* o peso do ponto de integração na curva/superfície na qual a força de tração \mathbf{f}_t está a ser aplicada, n_Q^* representa o número de pontos de integração que definem a fronteira de integração \mathbf{H} a matriz de interpolação, que é definida como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \quad (47)$$

As condições essenciais de fronteira podem, então, ser impostas diretamente na matriz de rigidez global, uma vez que as funções de forma RPI possuem a propriedade do delta de Kronecker.

2.6. MICROMECAÂNICA

O método de homogeneização consiste em definir as propriedades mecânicas de um material não homogêneo (por exemplo, uma espuma) como se se tratasse de um sólido. Esta simplificação irá facilitar todas as operações utilizando os métodos anteriormente descritos, pois a discretização do material não irá requerer uma malha tão refinada, quando comparada com a que seria necessária caso fosse utilizado o modelo real.

2.6.1. TEORIA DA TRANSIÇÃO DE ESCALA

Considere-se um ponto de coordenada x à macroescala, associado a um RVE de volume V . À microescala existem pontos infinitesimais y pertencentes ao domínio do RVE localizados no ponto de macroescala x . Uma perturbação do domínio RVE em equilíbrio é definida pela deformação local no ponto x . As coordenadas do ponto x na configuração deformada são representadas por X , tal que $X = \varphi(x)$, sendo φ um movimento. O deslocamento do ponto x é dado por: $u(x) = \varphi(x) - x$. A notação Y define as coordenadas de um ponto deformado de RVE. Portanto, é possível expressar o gradiente de deformação $F(x)$ como um tensor de segunda ordem do movimento φ ,

$$F(x) = \nabla_x \varphi(x) = \frac{\partial X}{\partial x} \quad (48)$$

Sabendo que $X = x + u(x)$,

$$F(x) = I + \nabla_x u(x) \quad (49)$$

Onde I é o tensor de identidade de segunda ordem. Quando aplicado um gradiente de deformação de macroescala no ponto x , é produzido um campo de deslocamento microscópico,

$$u(Y) = (F(X) - I)y + \tilde{u}(Y) \quad (50)$$

Onde $\tilde{u}(Y)$ é o campo de flutuação de deslocamento.

Assim, aplicando um determinado gradiente de deformação em macroescala ao RVE, é possível determinar os deslocamentos através das equações de equilíbrio e, conseqüentemente, as tensões instaladas em cada ponto de integração do RVE. O procedimento de homogeneização define que a tensão em macroescala, $\bar{\sigma}$, e a deformação, $\bar{\varepsilon}$, no ponto X são obtidas utilizando a média volumétrica das tensões e deformações ao longo do RVE,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (51)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (52)$$

Sendo V o volume do RVE.

2.6.2. PRINCÍPIO DE HILL-MANDEL E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA PERIÓDICAS

O princípio de Hill-Mandel afirma que, para que a modelação sub-escalar seja energeticamente consistente, a energia de deformação ao nível microscópico deve ser igual à média volumétrica do trabalho de tensão à microescala[31]. Assim, a seguinte equação deve ser satisfeita,

$$\bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (53)$$

que pode ser reescrita (após manipulação matemática e aplicação do Teorema de Gauss) como,

$$\frac{1}{V} \oint_V t_i \tilde{u}_i dS = 0 \quad (54)$$

sendo t_i uma tração externa. Na equação (54) considera-se a ausência de forças do corpo. As condições de fronteira do RVE para os campos de deslocamento e de tração devem ser definidas de modo a satisfazer a equação (54). As condições de fronteira periódicas (PBC) satisfazem o princípio de Hill-Mandel e são consideradas em muitos estudos numéricos como a escolha mais eficiente [31], mesmo para microestruturas que não possuem periodicidade geométrica. Conseqüentemente, este tipo de condições de fronteira é adotado neste trabalho. Com estas condições de fronteira, a flutuação do deslocamento em fronteiras opostas da RVE deve ser igual. Assim, para uma RVE com fronteira $\partial\Gamma$ (Fig. 7), é possível dividir esta fronteira numa parte positiva, $\partial\Gamma^+$, e negativa, $\partial\Gamma^-$, tal que $\partial\Gamma = \partial\Gamma^+ \cup \partial\Gamma^-$. Sabendo que as normais externas das fronteiras são simétricas, $+n^+ = -n^-$, em $Y^+ \in \partial\Gamma^+$ e $Y^- \in \partial\Gamma^-$, as condições podem ser expressas como,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(Y^+) &= \tilde{u}(Y^-) \\ \tilde{t}(Y^+) &= -\tilde{t}(Y^-) \end{aligned} \quad (55)$$

Assim, os lados opostos do RVE devem ter o mesmo campo de flutuação de deslocamentos e um campo de tração anti-periódico. Além disso, para evitar movimentos de corpo rígido, os deslocamentos nos cantos da RVE foram restringidos.

2.6.3. DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS HOMOGENEIZADAS PARA UM PROBLEMA EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO 2D

Em problemas de engenharia, algumas estruturas tridimensionais podem ser simplificadas e tratadas como sólidos bidimensionais. Esta simplificação é materializada pela eliminação da dependência de uma das coordenadas, frequentemente a coordenada z . Assim, as variáveis do problema passam a depender apenas das coordenadas do plano Oxy [32]. O estado plano de deformação considera que a dimensão do sólido ao longo da direção z é muito maior do que as suas outras dimensões. Neste caso, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zx} = 0$, mas $\sigma_{zz} \neq 0$. O tensor de tensões de Cauchy é dado pela Eq. (56),

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (56)$$

e a equação constitutiva [33],

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (57)$$

onde as constantes apresentadas na matriz constitutiva são dadas como[5],

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{13} = \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\
C_{21} &= \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{31} &= \frac{\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{32} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
C_{11} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{58}$$

com,

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - 2\nu_{32}\nu_{13}\nu_{21}}{E_1 E_2 E_3} \tag{59}$$

onde E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade ao longo das direções do plano, E_3 é o módulo de elasticidade na direção perpendicular ao plano, ν_{ij} é o coeficiente de Poisson que caracteriza a taxa de deformação na direção j quando uma força é aplicada na direção i , G_{ij} é o módulo ao corte que caracteriza o ângulo de variação entre as direções i e j , sendo 3 a direção normal ao plano. Estas propriedades elásticas são aproximadas pelos métodos numéricos utilizados neste trabalho. Note-se que, para ser compatível com as dimensões da matriz de deformação, a matriz constitutiva utilizada para a determinação da matriz de rigidez é dada por[5],

$$c = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \tag{60}$$

As propriedades elásticas podem ser escritas como uma função dos componentes da matriz, C_{ij} [5],

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\Psi}{C_{22}C_{33} - (C_{23})^2}, E_2 = \frac{\Psi}{C_{11}C_{33} - (C_{13})^2}, E_3 = \frac{\Psi}{C_{11}C_{22} - (C_{12})^2} \\
\nu_{12} &= \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23}}{C_{22}C_{33} - (C_{23})^2}, \nu_{13} = \frac{C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}}{C_{22}C_{33} - (C_{23})^2}, \nu_{23} = \frac{C_{23}C_{11} - C_{12}C_{13}}{C_{11}C_{33} - (C_{13})^2} \\
G_{12} &= C_{44}
\end{aligned} \tag{61}$$

Onde Ψ é dado por[5],

$$\Psi = C_{11}C_{22}C_{33} + 2C_{23}C_{13}C_{12} - C_{11}(C_{23})^2 - C_{22}(C_{13})^2 - C_{33}(C_{12})^2 \tag{62}$$

3. ESTRUTURAS CELULARES E FABRICAÇÃO ADITIVA

Neste capítulo, será feita uma abordagem aos diversos tipos de estruturas celulares, com foco às estruturas em rede, sendo estas as redes planas, redes tridimensionais e redes baseadas em superfície. De seguida, abordar-se-á o tema da impressão 3D, com uma revisão aos vários processos admitidos pela norma ISO/ASTM 52900:2021, com foco na impressão por extrusão de material (FDM). Por último, será feito o modelo 3D, em CAD, de uma estrutura celular que será impressa.

3.1. ESTRUTURAS CELULARES

A estrutura celular é caracterizada por uma geometria de barras ou superfícies que delimitam a respetiva célula [34]. Estas podem ser divididas em estocásticas, quando a sua estrutura interna não possui um padrão definido, e não estocásticas se a sua arquitetura for reproduzida do plano ou no espaço. As estocásticas, também chamadas de espumas, podem ser de célula aberta, quando estão conectadas umas com as outras, ou de célula fechada, formando uma célula sólida [35], [36].

As estruturas em rede, outro nome dado às não estocásticas, estão divididas em três grupos: redes planas, redes tridimensionais e redes baseadas em superfície. Estas consistem em células ordenadas topologicamente repetidas ao longo de um plano, no caso da primeira, ou no espaço, no caso das outras duas. Quando comparadas com as espumas, as redes, que possuem uma disposição ordenada de células, possuem um desempenho estrutural superior e maior flexibilidade de fabrico [35], [36]. A Figura 10 apresenta um esquema de cujo objetivo é ilustrar a diferença entre os vários tipos de espumas.

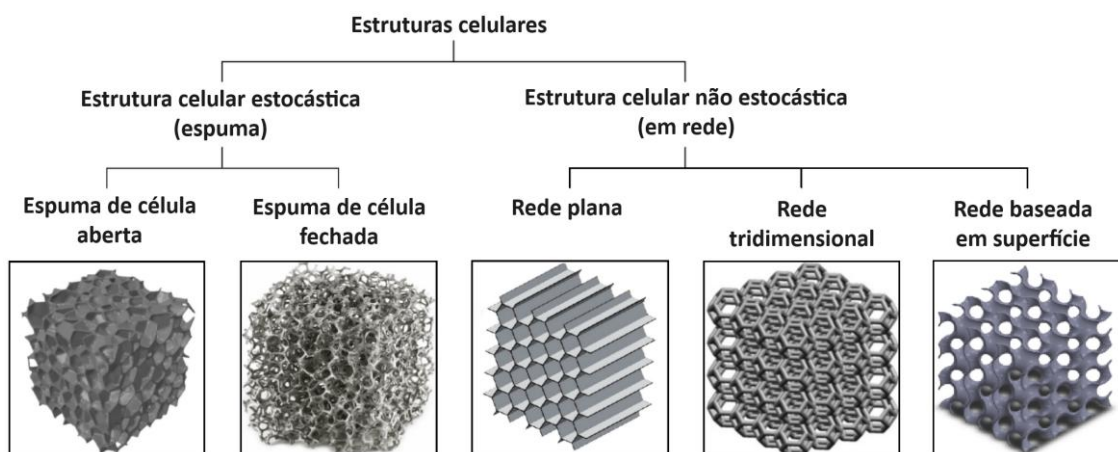


Figura 10- Tipos de estruturas celulares, baseado em [37].

Atualmente, as estruturas celulares são frequentemente utilizadas devido às suas excelentes propriedades de absorção de energia e de isolamento acústico e térmico. Também permitem criar componentes com baixa densidade sem comprometer a resistência mecânica [38]. Algumas aplicações deste tipo de estruturas incluem o núcleo de estruturas sandwich, isolamento térmico de habitações e o preenchimento de peças obtidas por impressão 3D.

De facto, as estruturas celulares oferecem vantagens significativas na sua utilização, tais como a redução do peso da estrutura ou melhoria da eficiência. A capacidade dessas estruturas em otimizar a relação resistência-peso torna-as ideais para aplicações que exigem materiais leves e robustos. Além disso, as propriedades de absorção de energia das estruturas celulares tornam-nas valiosas para aplicações que exijam absorção de impacto, como capacetes de proteção e componentes de segurança de veículos. A sua flexibilidade de design permite uma adaptação eficaz a requisitos específicos de cada aplicação, contribuindo para avanços notáveis em áreas como engenharia civil, aeroespacial e tecnologia biomédica. Assim, as estruturas celulares não apenas proporcionam soluções eficientes em termos de material, mas também impulsionam inovações numa ampla gama de setores industriais [39], [40], [41].

3.1.1. ARQUITETURA DE ESTRUTURAS EM REDE

As estruturas em rede destacam-se pela possibilidade de otimizar a geometria das células em função da sua aplicação final. Esta versatilidade não engloba apenas aplicações estruturais, mas também permite melhoramentos em termos funcionais e ergonómicas, estendendo-se, também, ao melhoramento de propriedades biomédicas, térmicas, entre outras [35], [36].

Comercialmente, estas estruturas são influenciadas pelas preferências industriais, pois a utilização de diferentes processos de fabrico, mesmo numa topologia simples, pode provocar variações nas propriedades mecânicas finais [35]. Variáveis como tamanho da célula, materiais e pós-processamento também podem contribuir para a diversidade dessas estruturas. Com o avanço das técnicas de fabricação aditiva, nos últimos anos, tornou-se mais acessível obter estruturas em rede com geometrias relativamente complexas, ampliando, ainda mais, as suas possibilidades de aplicação e design [42].

Deste modo, ao permitirem a personalização das propriedades mecânicas, estes materiais permitem abranger um vasto leque aplicações. A sua classificação é crucial, permitindo a distinção das suas características arquitetónicas, as quais possuem um impacto no desempenho estrutural e nas propriedades mecânicas. Estas não apenas proporcionam eficiência no uso de material, mas, também, possibilitam soluções eficazes, destacando-se a sua presença em abundância na natureza. Exemplos destes incluem: osso, madeira, coral e colmeia de abelha, todos estes apresentam estruturas celulares que inspiram inovações nas tecnologias de fabrico e aplicações práticas [43], [44], [45].

3.1.1.1. REDE PLANA

As redes planas, ou em favo-de-mel, representam uma categoria de estruturas celulares com um padrão repetido ao longo de um plano, com espessura na direção normal a este. Estas estruturas são, normalmente, constituídas por células unitárias com formas específicas (Figura 11), como o hexágono, o triângulo, o quadrado, entre outras. As suas propriedades variam entre as direções no plano e fora deste.

Estas são reconhecidas por possuírem uma configuração estrutural simples e poderem ser facilmente desenhadas através de software CAD. Desta forma, é possível controlar a

quantidade de material utilizado e, portanto, são ideais para diversas aplicações que requeiram redução de material, como, por exemplo, peças impressas em 3D. Além disso, as redes planas destacam-se por permitirem criar peças com elevada rigidez e resistência específica, isto torna-as amplamente utilizadas em aplicações que envolvam suporte de carga e absorção de energia. São, também, utilizadas em embalagens para absorção de impacto ou como núcleo de estruturas sanduíche.

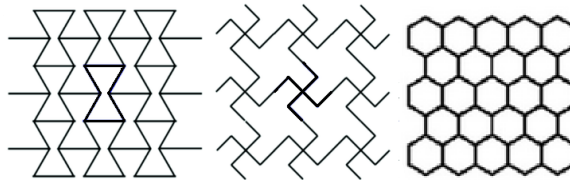


Figura 11- Exemplo de padrões utilizados em redes planas, adaptado de [46].

Apesar de todas as vantagens, as redes planas apresentam fragilidades, principalmente devido à concentração de tensões nos vértices, que provocam a diminuição da resistência ao componente final. Por este motivo, no momento da concepção é necessário ter em consideração este apeto, de forma a otimizar as suas propriedades mecânicas, adotando métodos de design que minimizem estas limitações.

No contexto da fabricação aditiva e do desenvolvimento das técnicas de impressão 3D, as redes planas ganham destaque pela facilidade de produção e pela capacidade de explorar geometrias complexas. O seu potencial para aplicações em absorção de energia e baixa densidade faz com que a otimização destas estruturas seja uma área promissora de pesquisa e desenvolvimento [47], [48], [49].

O design aprimorado das redes planas pode ser alcançado através de inovações nas estratégias de fabrico e na escolha de materiais. Introduzir materiais mais leves e resistentes, bem como explorar métodos de produção avançados, são aspetos cruciais para superar os desafios associados à rigidez nos cantos agudos. Além disso, a implementação de técnicas de otimização topológica e algoritmos avançados de design computacional pode contribuir significativamente para a criação de redes planas mais eficientes em termos de desempenho e uso de material.

No âmbito das aplicações futuras, as redes planas representam uma solução promissora para setores que procuram combinar baixo peso, resistência e eficiência na absorção de impacto. Em campos como a indústria automotiva, aeroespacial e médica, onde a redução de peso é crítica, as redes planas podem desempenhar um papel crucial na evolução das estruturas utilizadas. O contínuo desenvolvimento dessas estruturas celulares, aliado à inovação nos processos de fabrico, promete abrir novas perspetivas para a criação de componentes estruturais mais eficientes e sustentáveis [35], [42], [50].

3.1.1.2. REDE TRIDIMENSIONAL

As estruturas celulares em rede tridimensional representam uma classe distinta de estruturas arquitetónicas, caracterizadas por uma rede de barras interligadas numa célula unitária. O desempenho global de uma estrutura baseada em treliças é sensível a vários fatores

geométricos, incluindo o tamanho, a forma e o padrão de ligação das barras no interior de um determinado volume. A manipulação destes permite a otimização das características mecânicas [51].

A criação destas estruturas requer a disposição estratégica de células unitárias, que podem assumir diversas formas como as representadas na Figura 12. A simplicidade do seu design e a variedade de topologias possíveis provocam crescente interesse tanto na sua conceção como, também, no seu fabrico [52].



Figura 12- Exemplo de células de rede tridimensional, adaptado de [53].

A disposição da rede tem uma influência no comportamento de deformação [54], [55]. Redes como a cúbica e o dodecaedro rômbo manifestam uma deformação dominada pela flexão e encurvadura [55], enquanto que a estrutura em octeto apresenta um comportamento, predominantemente, à tração, tornando a estrutura adequada para aplicações que envolvam suporte de carga [54].

Estudos realizados até o momento revelam que o modo de falha mais comum neste tipo de estruturas ocorre próximo do ponto de ligação entre barras [54]. De forma a minimizar este problema, propõe-se uma transição suave entre as barras.

3.1.1.3. REDE BASEADA EM SUPERFÍCIE

As redes baseadas em superfície surgem como uma solução eficaz para o problema da concentração de tensões exposto anteriormente. Quando comparadas com as redes mencionadas em 3.1.1.2, estas revelam distribuições de tensão e volume distintas, resultando num melhoramento do desempenho mecânico e possuindo uma maior capacidade de absorção de energia e maior resistência à compressão [56].

Entre os tipos mais comuns, destacam-se as Superfícies Mínimas Triplamente Periódicas (TPMS), inspiradas na natureza e frequentemente encontradas em criaturas como ouriços-do-mar, esqueletos de crustáceos, conchas de escaravelhos e escamas de asas de borboletas [57], [58].

Os TPMSs representam uma classe precisa de topologias matemáticas definidas por funções trigonométricas, fundamentadas na minimização da área local da superfície para um determinado limite, resultando numa curvatura média nula sobre a superfície [58]. Essas arquiteturas proporcionam superfícies altamente interconectadas, repetidas periodicamente em três direções distintas da rede, e dividem o espaço em duas fases de vazio entrelaçadas.

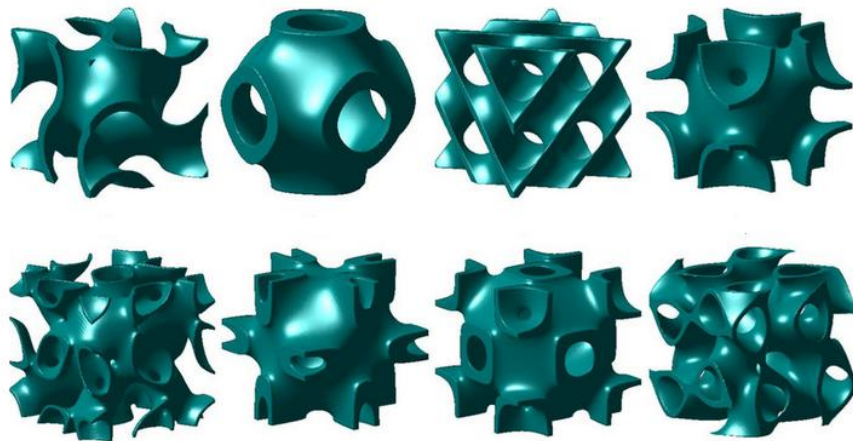


Figura 13- Exemplo de células de redes baseadas em superfície, adaptado de [46].

No contexto acadêmico, as redes baseadas em TPMS têm recebido atenção significativa, dada a sua excelente capacidade de concentração de tensões e a topologia orientada para a função. Sua capacidade de carga superior, proveniente da topologia suave, e a eliminação dos requisitos convencionais de pós-processamento para refinar e ligar as estruturas destacam-se como vantagens notáveis [35].

3.2. FABRICAÇÃO ADITIVA

O processo de fabricação aditiva (FA), também conhecido como impressão 3D, foi desenvolvido por Charles Hull em 1986. Este consistia num aparelho que utilizava um material fotopolímero que, quando atingido por um feixe de luz ultravioleta, polimerizava e formava uma camada de material [59]. A forma final da peça seria o conjunto das camadas que discretizam o modelo 3D. Para criação deste modelo 3D, seria utilizado um software de desenho assistido por computador (CAD), sendo posteriormente convertido em STL, de forma a poder ser lido pelo software de criação de camadas (*slicer*). Estas etapas podem ser descritas da seguinte forma:

- Projeto da peça em CAD, Figura 14 a)
- Conversão deste para o formato STL, de forma que possa ser carregado pelo software que vai gerar o código lido pela máquina de impressão, Figura 14 b)
- Definição dos parâmetros de impressão e criação do código, Figura 14 c)

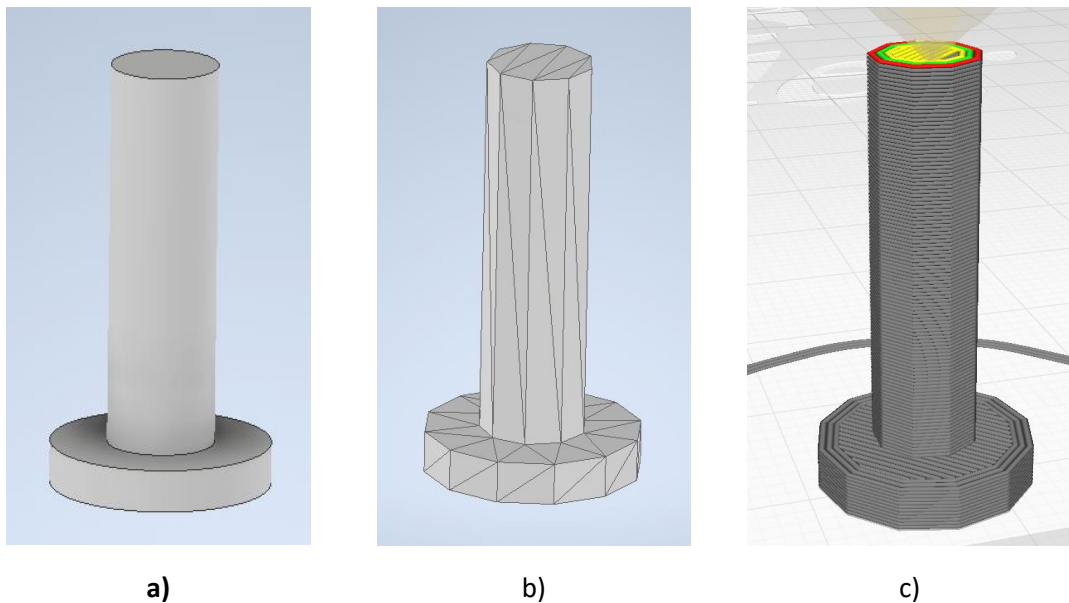


Figura 14- Modelo nas diferentes etapas a) CAD b) STL c) dividido em camadas.

Existem diversas tecnologias de fabricação aditiva que serão apresentados abaixo. De seguida, será focado no método de extrusão, onde será feito o modelo 3D de uma barra composta por uma estrutura celular que irá ser, posteriormente, impresso utilizando este método.

3.2.1. TECNOLOGIAS

Nos dias de hoje, existem diversas tecnologias de fabricação aditiva que permitem a obtenção de peças utilizando os mais variados tipos de materiais que, de outra forma, seria altamente trabalhoso, ineficiente ou, até, impossível. Recentemente, algumas destas estão, inclusivamente, ao alcance de qualquer pessoa, sendo possível a compra de uma máquina para uso doméstico.

A norma ISO/ASTM 52900:2021 distingue sete diferentes processos de fabricação aditiva: jato de aglutinante (BJ), deposição de energia dirigida (DED), extrusão de material (MEX), jateamento de material (MJT), fusão em leito de pó (PBF), laminação de folhas (SL) e fotopolimerização em cuba (VPP) [60].

3.2.1.1. JATO DE AGLUTINANTE

A mencionada norma define o processo de jato de aglutinante como aquele no qual um agente de ligação líquido é seletivamente depositado para unir o material em pó.

Este método utiliza um leito de pó, no qual um líquido é depositado a partir de uma cabeça de impressão para unir as partículas. Esta tecnologia permite a utilização de uma variedade de tipos de pó, desde poliméricos, metais e cerâmicos, devido ao seu potencial de unir uma grande quantidade de partículas. É possível garantir um elevado controlo sobre a estrutura interna devido à diversidade de combinações entre pó e agente de ligação, no entanto, as peças

fabricadas utilizando este método exigem um pós-processamento para obterem as propriedades mecânicas desejadas. Os mais comuns incluem a sinterização do pó e a eliminação do agente de ligação por meio de tratamento térmico ou infiltração com materiais de baixa temperatura de fusão [61].

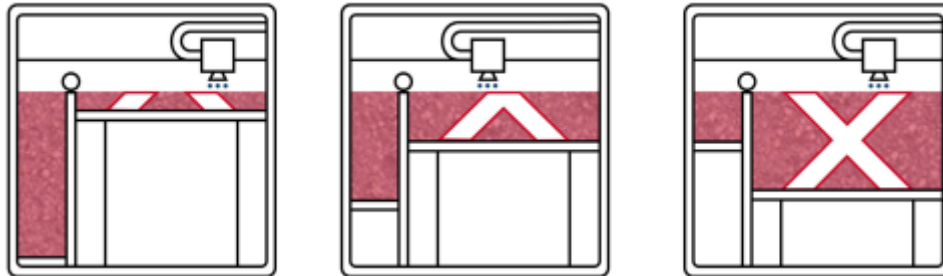


Figura 15- Esquema representativo de jato de aglutinante, adaptado de [61].

3.2.1.2. DEPOSIÇÃO DE ENERGIA DIRIGIDA

A referida norma descreve o processo de deposição de energia dirigida como aquele onde a energia térmica concentrada é aplicada para fundir materiais enquanto estes são depositados.

Esta técnica assemelha-se ao processo de extrusão de material, cuja diferença reside na existência de uma cabeça de impressão conectada a um braço multi-eixo, proporcionando quatro a cinco eixos de movimento, permitindo que o material seja depositado em, praticamente, qualquer ângulo. A cabeça de impressão é composta por um bocal de fornecimento de material, pó ou filamento, e uma fonte concentrada de energia (feixe laser, feixe de elétrons, plasma ou arco elétrico) utilizada para fundir o material. Novas camadas podem ser adicionadas em qualquer orientação às já solidificadas, possibilitando que o DED seja utilizado na impressão 3D em superfícies existentes para a reparação de peças. Os processos DED exigem atmosferas inertes de forma a evitar a oxidação do material, sendo a tecnologia que se encontra menos desenvolvida em comparação com outros processos [61].

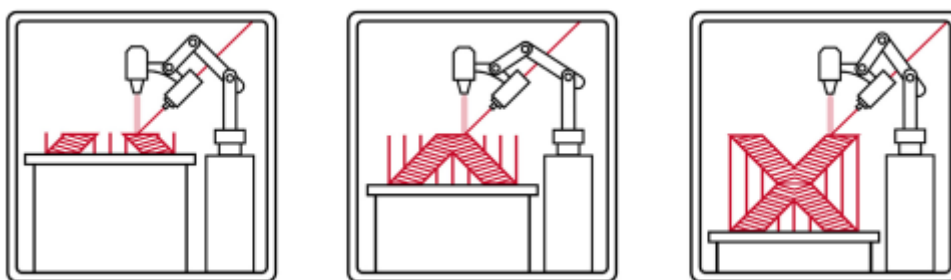


Figura 16- Esquema representativo de deposição de energia dirigida, adaptado de [61].

3.2.1.3. JATEAMENTO DE MATERIAL

Este processo (Figura 17) é definido pela norma como aquele em que gotículas de matéria-prima são depositadas seletivamente. Este método funciona através da deposição de gotículas de líquido por um bocal, sendo extrudidas, termicamente ou piezoelectricamente, e depositadas

nos locais desejados [62]. Nos métodos de Direct Ink Wetting (DIW) e Drop On Demand (DOD), o líquido é composto por um solvente e um agente de ligação, podendo ser um polímero ou uma suspensão de nanopartículas. No entanto, as peças fabricadas por estes métodos requerem pós-processamento para atingir o comportamento mecânico desejado, envolvendo a remoção de solventes e cura do polímero [62].

A MJT destaca-se pela sua rapidez em comparação com outras técnicas de AM, devido à possibilidade de utilizar simultaneamente vários bocais [62]. Permite, também, a impressão de camadas microscópicas com alta resolução e precisão, permitindo a obtenção de peças constituídas por vários materiais com várias cores e uma boa qualidade de superfície [63].

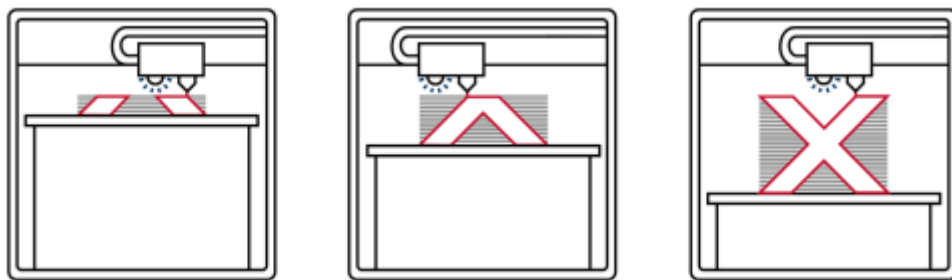


Figura 17- Esquema representativo do material jetting, adaptado de [61].

3.2.1.4. FUSÃO EM LEITO DE PÓ

A norma define este processo (Figura 18) como aquele em que a energia térmica é aplicada seletivamente para fundir regiões específicas de um leito de pó. Exemplos de técnicas PBF incluem a Sinterização Seletiva a Laser (SLS), a Fusão Seletiva a Laser (SLM), a Fusão por Feixe de Eletrões (EBM) e a Sinterização Direta de Metais a Laser (DMLS). Nessas tecnologias, camadas uniformes de material em pó são espalhadas sobre a superfície por meio de um rolo ou lâmina, seguido pela fusão seletiva das partículas em locais específicos utilizando um laser térmico ou feixe de eletrões [64]. Os locais fundidos correspondem a cortes 2D no modelo 3D, e as partículas não fundidas servem como estrutura de suporte, podendo ser recicladas e utilizadas no fabrico de futuras peças.

O PBF utiliza uma vasta gama de materiais granulares, entre metais, polímeros e cerâmicas, fabricando peças por sinterização ou fusão de materiais em pó usando laser ou feixe de eletrões como fonte de energia [64]. A alta qualidade e resolução fina tornam o PBF adequado para fabricar estruturas complexas em diversos setores industriais, incluindo engenharia de tecidos, estruturas em rede, aeroespacial e eletrónica [65].

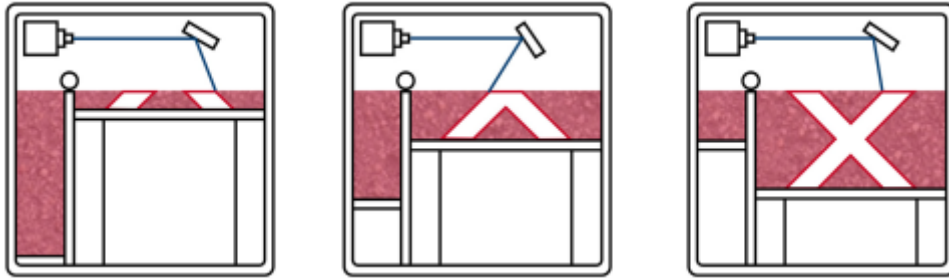


Figura 18- Esquema representativo de fusão em leito de pó, adaptado de [61].

3.2.1.5. LAMINAÇÃO DE FOLHAS

A norma define o processo de laminação de folhas (SL) como aquele em que folhas de material são empilhadas, coladas e cortadas para formar uma peça.

Este método, exemplificado pelo fabrico de objetos laminados (LOM), envolve a colagem e corte sucessivos de folhas finas de papel para obter a forma desejada, podendo ser realizado manualmente ou com recurso a um laser. Em contraste com outras técnicas de Manufatura Aditiva (AM), no SL, apenas o contorno da secção transversal da peça precisa ser cortado, embora áreas fora dessa secção sejam frequentemente removidas com um padrão específico para eliminar o material excedente. Por outro lado, o fabrico aditivo por ultra-sons (UAM) utiliza soldadura por ultra-sons para unir chapas metálicas, exigindo, no entanto, frequentemente maquinaria CNC adicional para atingir dimensões finais desejadas. Apesar dos processos de SL serem geralmente menos automatizados, apresentam custos operacionais mais baixos devido à ligação ocorrer à temperatura ambiente, requerendo pouca energia. Entretanto, é importante salientar que a qualidade e precisão da superfície tendem a ser inferiores em comparação com outras tecnologias de AM [61].

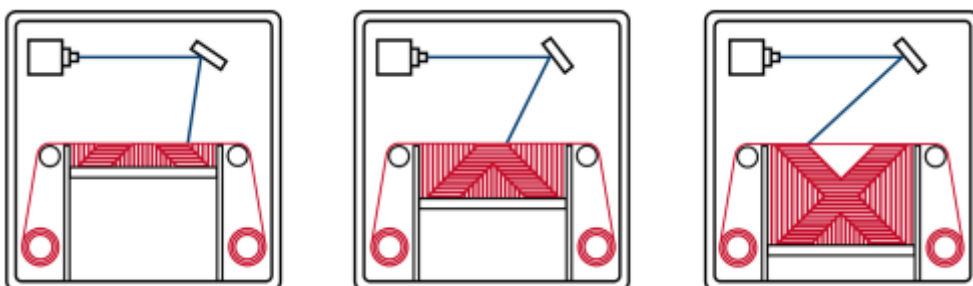


Figura 19- Esquema representativo de laminação de folhas, adaptado de [61].

3.2.1.6. FOTOPOLIMERIZAÇÃO EM CUBA

A fotopolimerização de cuba, definida pela norma como o processo no qual o fotopolímero líquido numa cuba é curado seletivamente por polimerização ativada por luz, engloba duas tecnologias distintas: a Estereolitografia (SLA) e o Processamento de Luz Digital (DLP). No método SLA, as camadas são formadas através da fotopolimerização de uma resina líquida, tipicamente à base de acrilato, utilizando um ponto de laser UV controlado por espelhos

ajustáveis [66]. A construção da peça ocorre à medida que a primeira camada adere a uma base submersa em resina, e camadas subsequentes se ligam à anterior, elevando gradualmente a base no tanque de resina durante o processo de impressão.

Por outro lado, o método DLP, uma variante da SLA, opera com um princípio semelhante, mas utiliza um mapeamento UV de toda a camada 2D, projetando-a na resina e solidificando-a de uma só vez [66].

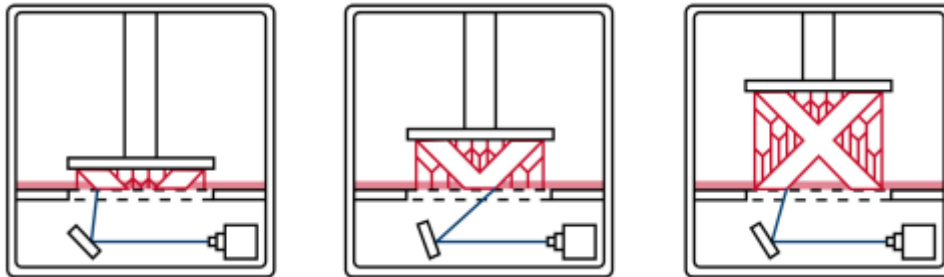


Figura 20- Esquema representativo de fotopolimerização em cuba, adaptado de [61].

3.2.1.7. ESTRUSÃO DE MATERIAL

Este processo é definido pela norma como aquele em que o material é distribuído seletivamente através de uma fiação. Embora esta não seja a técnica de AM mais antiga, tem sido extensivamente estudada e aprimorada, alcançando notável sucesso comercial devido ao seu baixo custo, simplicidade no processo de fabrico e capacidade de produção utilizando um vasto leque de materiais. No entanto, é importante mencionar algumas desvantagens, tais como o número limitado de materiais de base disponíveis, as propriedades mecânicas inferiores e a qualidade superficial reduzida.

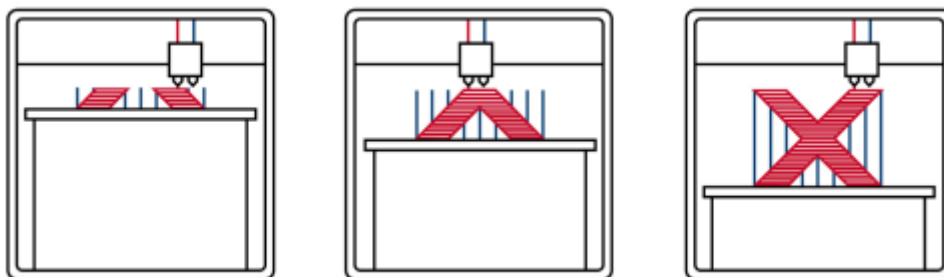


Figura 21- Esquema representativo da extrusão de material, adaptado de [61].

A utilização de materiais termoplásticos de baixo ponto de fusão, permite flexibilidade na criação de peças e baixo consumo de energia, permitindo que seja bastante acessível a sua utilização doméstica. Os materiais que podem ser facilmente encontrados para uso comum são os seguintes:

- O PLA (Ácido Polilático), derivado de recursos renováveis como o amido de milho ou a cana-de-açúcar, é um termoplástico biodegradável. É popular na impressão 3D de secretária devido à sua facilidade de utilização, baixo custo e natureza amigável do

ambiente. A sua boa adesão de camadas, baixa expansão térmica e baixo ponto de fusão tornam-no adequado para a impressão 3D [67].

- O ABS (Acrilonitrila Butadieno Estireno) é conhecido pela sua durabilidade, resistência ao impacto e resistência ao calor. É normalmente utilizado na impressão 3D para protótipos funcionais e peças de utilização final [68].
- O PETG, derivado do PET através da adição de glicol, transparente e resistente que oferece boa resistência química e é normalmente utilizado para imprimir objetos que requerem clareza, como garrafas e recipientes [69].
- O nylon (Poliamida) é um termoplástico forte, flexível e quimicamente resistente. Encontra aplicações na impressão 3D onde a durabilidade e a resistência ao impacto são essenciais [70].

Na Tabela 1 estão representados valores típicos das propriedades mecânicas destes materiais, no entanto, a sua performance irá depender não só da qualidade do material utilizado, como também da orientação como a peça é fabricada e pós processamento utilizado.

Tabela 1- Propriedades mecânicas de materiais utilizados em MEX [67].

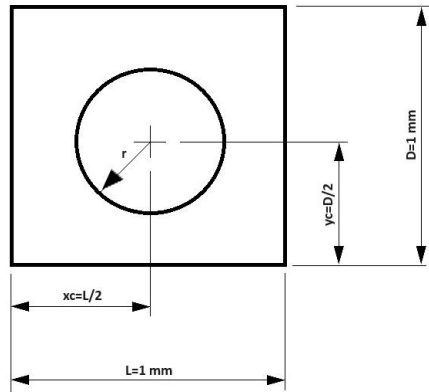
Material	Temperatura de fusão (°C)	Densidade (Kg/m ³)	Módulo de elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson	Tensão de rotura (MPa)
PLA	150-160	1,24	3,376	0,33	50
ABS	220-250	1,04	2,2	0,34	40
PETG	245	1,27	2,8	0,38	40
NYLON	180-220	1,15	2-3	0,4	50

3.2.2. MODELAÇÃO E IMPRESSÃO DE UMA PEÇA CONSTITUIDA POR ESTRUTURAS CELULARES

Para a aplicação prática dos conceitos discutidos ao longo deste capítulo, foi desenvolvida uma barra constituída por uma estrutura celular, destinada a ser fabricada por impressão 3D utilizando a técnica de extrusão de material.

Inicialmente, foi selecionada uma arquitetura de estrutura celular, representada na Figura 22, com as dimensões do furo a variar nos valores da Tabela 2. Posteriormente, no capítulo 4, será feita a homogeneização desta, conforme formulada no capítulo 2.6.

Tabela 2- Dimensões do furo da célula.



Raio (mm)
0,05
0,15
0,25
0,31
0,35
0,40

Figura 22- Célula.

Em seguida, foi modelada uma barra no software CAD Autodesk Inventor, cuja estrutura é composta por células com o padrão referido anteriormente. O processo de modelação envolveu a recriação da célula formulada, sendo esta replicada ao longo da barra, como representado na Figura 23.

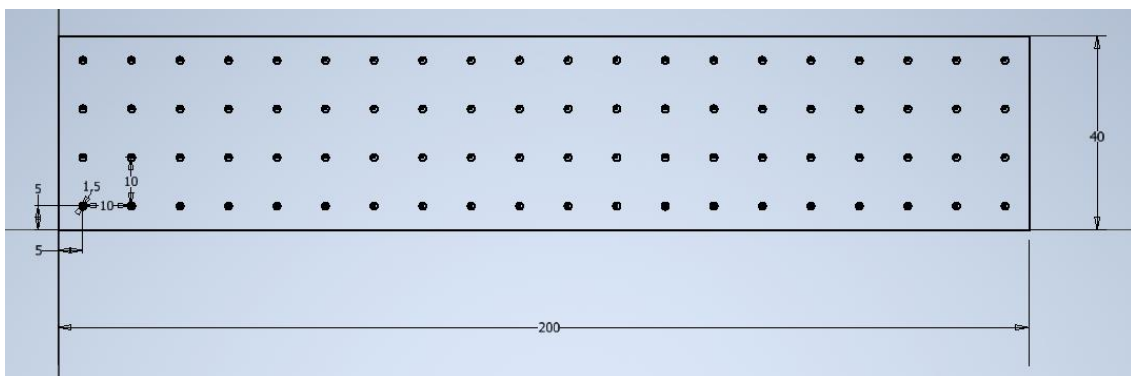


Figura 23- Stetch no Autodesk Inventor da barra.

Finalizada a modelação, o modelo foi convertido para STL e importado para o software de slice Cura, onde foram definidos os parâmetros de impressão e gerado o código a ser lido pela máquina. Por último, foi realizada a impressão, tendo sido obtida a peça representada na Figura 24.

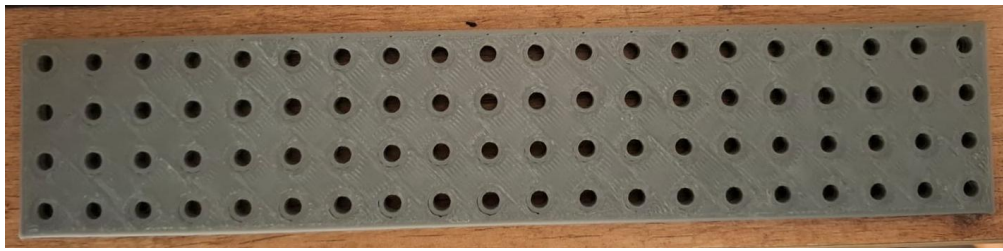


Figura 24- Barra impressa.

A obtenção da peça ocorreu sem grandes problemas, o único digno de registo deveu-se a uma descolagem da primeira camada de impressão junto de uma das extremidades, no entanto, não comprometeu a obtenção do modelo nem esta ficou empenada. Este problema poderá ser minimizado com a utilização de um agente que favoreça a adesão da primeira camada de impressão à base, nomeadamente laca.

4. ANÁLISE NUMÉRICA

Neste capítulo, será abordada a aplicação dos métodos numéricos referidos no capítulo 1. Em primeiro lugar, irá ser feito um estudo de convergência de malha, de forma a escolher uma que seja o mais eficiente possível. Em seguida, será feita uma análise de homogeneização do material, método descrito no sub capítulo 2.6, de forma a retirar as propriedades equivalentes, que serão utilizadas posteriormente em análises de barra à flexão e de barra encastrada com uma força aplicada na extremidade.

4.1.1. ESTUDO DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

Como forma de avaliar a eficiência e precisão dos métodos estudados, foi realizado um problema modelo. Este problema consiste numa placa quadrangular com um furo central, submetida a uma tensão unidirecional constante no plano, representada na Figura 25b. Nesta análise, foi considerado $E = 1kPa$ e $\nu = 0.3$, assim como a tensão aplicada $\sigma_0 = 1MPa$.

Utilizando o software FEMAP, foram criadas, a partir da geometria da Figura 25, quatro malhas de forma a ser avaliada a convergência dos resultados numéricos com o aumento do refinamento da malha. A malha inicial possui 10x10 nós (Figura 26a), sendo o número de nós por lado incrementado para o dobro a cada refinamento da malha, respetivamente, 20x20 (Figura 26b), 40x40(Figura 26c) e 80x80 (Figura 26d) divisões.

Foram analisados os deslocamentos horizontal do ponto C (Figura 27) e vertical do ponto E (Figura 28), verificando-se que entre as malhas de 40x40 e 80x80 não existe uma variação significativa da solução (os métodos exigem convergência), pelo que será utilizada a malha de 40x40 divisões em estudos posteriores.

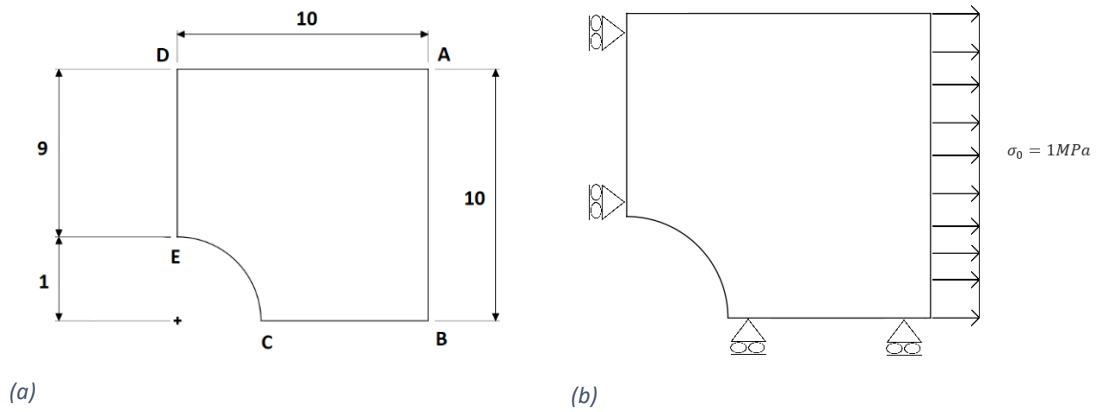


Figura 25 – (a) Placa com furo (dimensões em milímetros). (b) Restrições e carregamento da placa com furo.

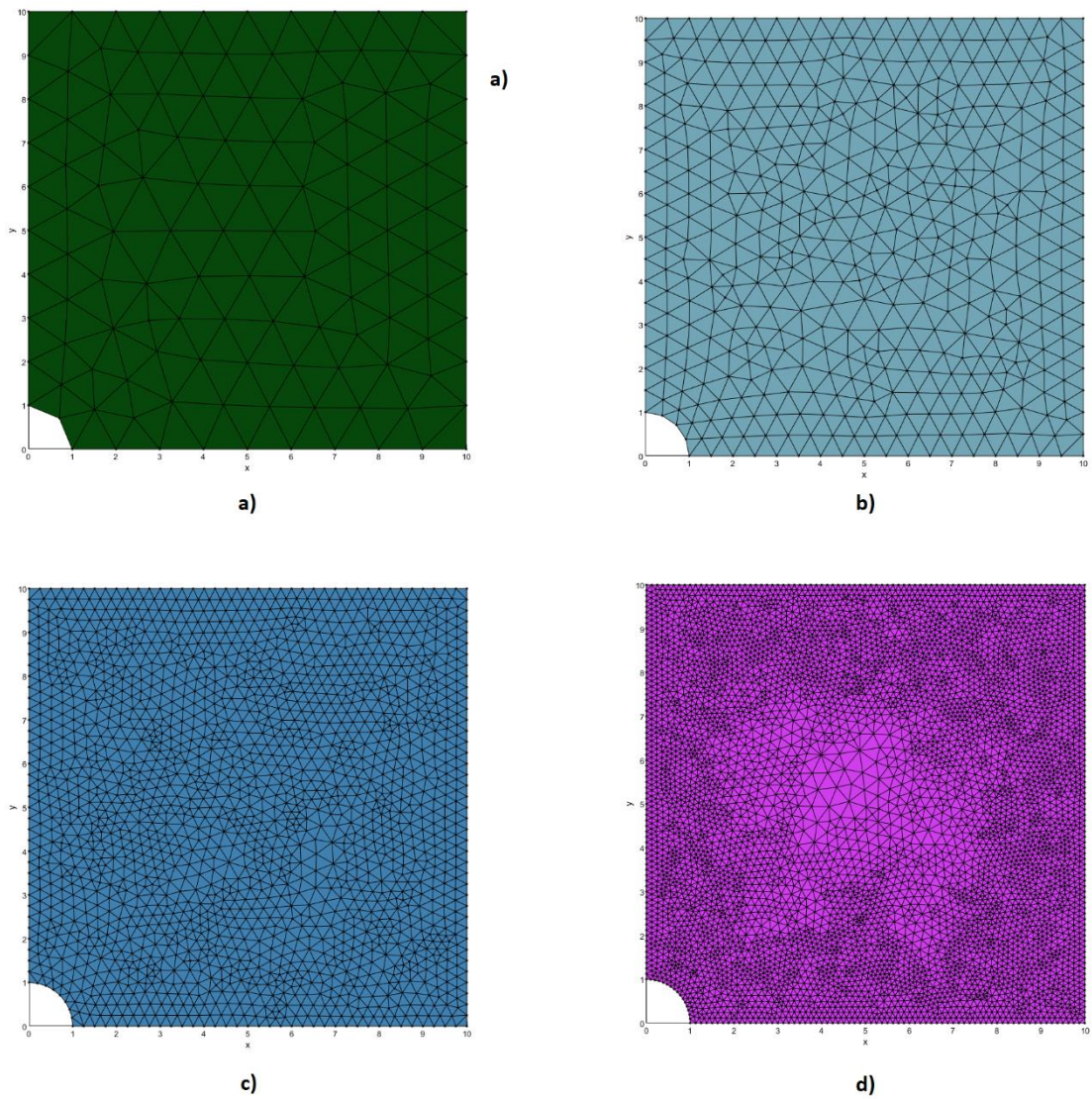


Figura 26 - a) Malha 10x10; b) Malha 20x20; c) Malha 40x40; d) Malha 80x80.

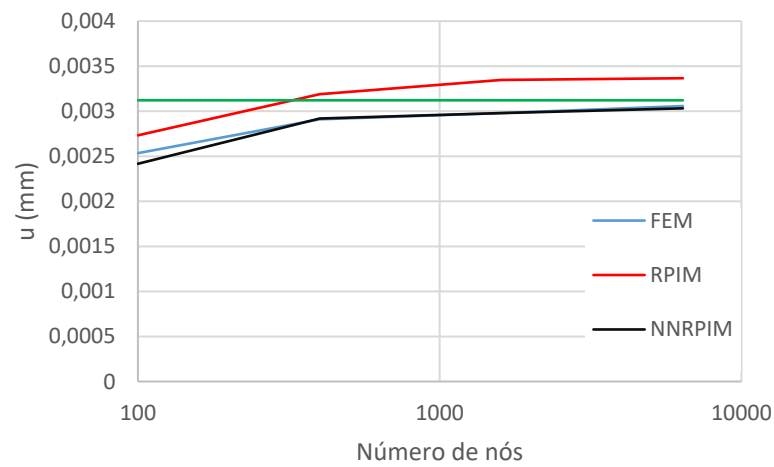


Figura 27- Deslocamento horizontal do ponto C.

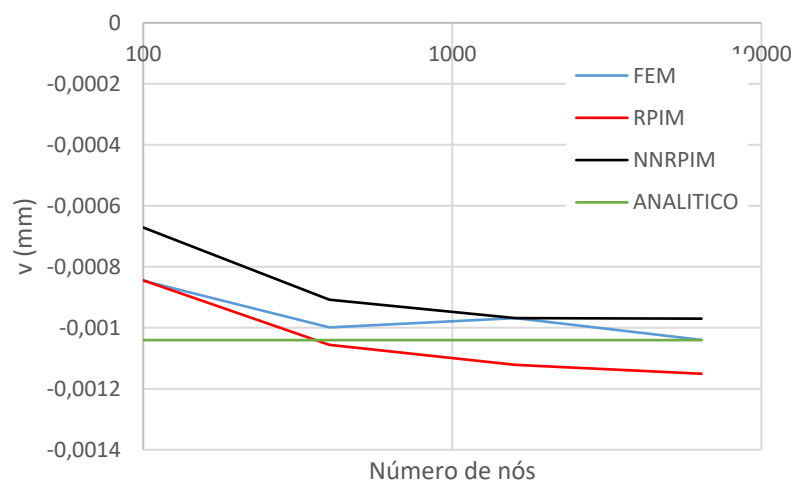


Figura 28 - Deslocamento vertical do ponto E.

Foi também analisada a variação das tensões segundo o eixo Ox ao longo da linha ED (Figura 29) e segundo o eixo Oy ao longo da linha CB (Figura 30) utilizando a malha de 80×80 divisões. Após esta análise, é possível verificar a aproximação dos métodos numéricos com o resultado obtido analiticamente, principalmente junto aos pontos críticos E e C.

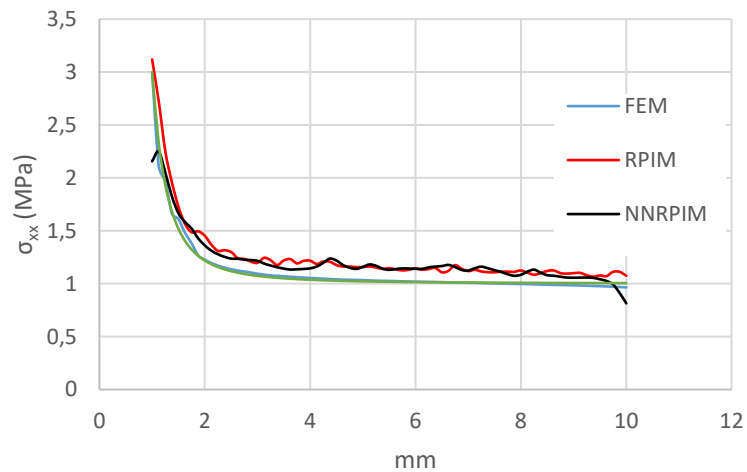


Figura 29 - Variação da tensão ao longo da linha ED.

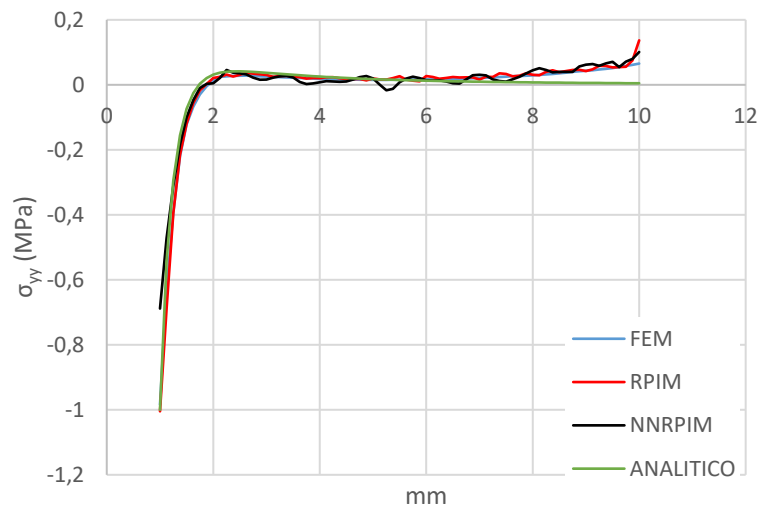


Figura 30 - Variação da tensão ao longo da linha CB.

4.1.2. HOMOGENIZAÇÃO

Para obtenção das propriedades mecânicas homogenizadas, utilizando o método descrito em 2.6, foi considerado o RVE em estudo uma placa com furo central, de raio variável (Figura 31). A fração volúmica (f_v) do modelo foi obtida através quociente entre o volume de material sólido e o volume total ocupado pela placa.

$$f_v = \frac{V_{\text{sólido}}}{V_{\text{total}}} \quad (63)$$

A malha 40x40 foi escolhida para utilização na análise devido à convergência com o modelo analítico na secção anterior e, também, requer menor poder computacional que uma malha

mais refinada. Foram consideradas as propriedades mecânicas do polímero PLA, referidas em 3.2.1.7, material que será utilizado posteriormente nos ensaios de validação do estudo.

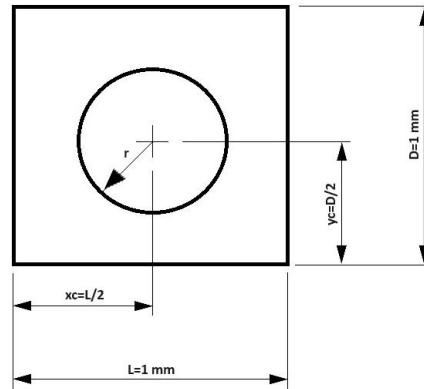


Figura 31 – Placa com furo.

Foram criadas seis malhas diferentes (Figura 32) com o objetivo de determinar as propriedades homogenizadas do RVE contituido por PLA com diferentes frações volúmicas. Estes valores estão descritos na Tabela 3, sendo que os valores dos raios foram escolhidos de forma que as frações volumicas correspondentes tivessem, sensivelmente, uma diferença de 0,1 entre cada uma. Como o tamanho do furo da Figura 32 a) é bastante pequeno e, conseqüentemente, a sua fração volúmica bastante próxima de 1, valor da homogenização desta malha da deverá servir como controlo e, portanto, os valores obtidos deverão ser semelhantes aos do material sólido.

Tabela 3 - Dimensões das placas com furo.

Malha	R	fv
a)	0.5	0.99
b)	1.5	0.93
c)	2.5	0.80
d)	3.1	0.70
e)	3.5	0.62
f)	4.0	0.50

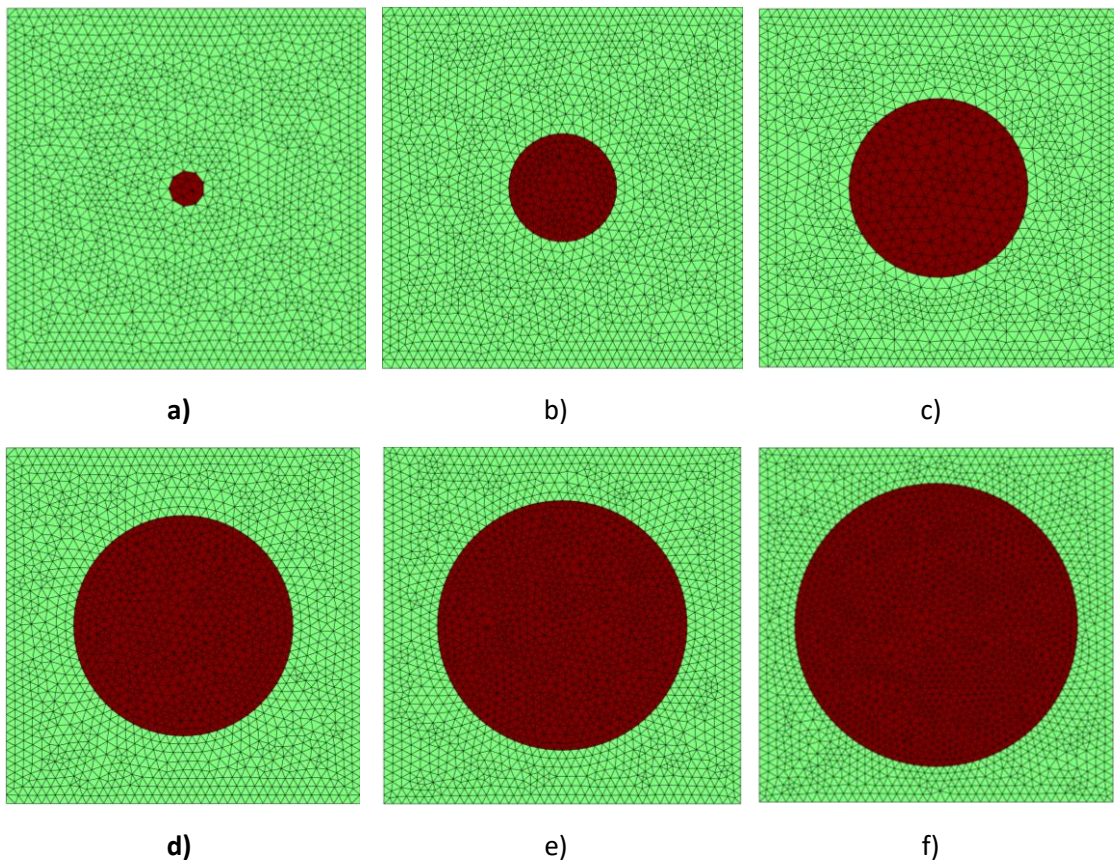


Figura 32 - Malhas homogeneizadas.

Na Figura 33 está representado um gráfico dos módulos de elasticidade homogeneizados em função da fração volúmica. Foram feitas análises nos três métodos referidos anteriormente, de forma a comparar os resultados obtidos, sendo, neste caso, semelhantes. Por análise dos mapas de tensões presentes nas Figura 35 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogeneização segundo O_{xx} para a placa com um furo: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$ **Error! Reference source not found.** Nas Figura 36 e Figura 37 pode-se verificar que a utilização dos métodos sem malha RPIM e NRPIM resulta numa análise mais precisa ao longo da geometria estudada e uma discretização mais correta das tensões obtidas. Este fenómeno nota-se, particularmente, no caso em que o furo tem a sua menor dimensão.

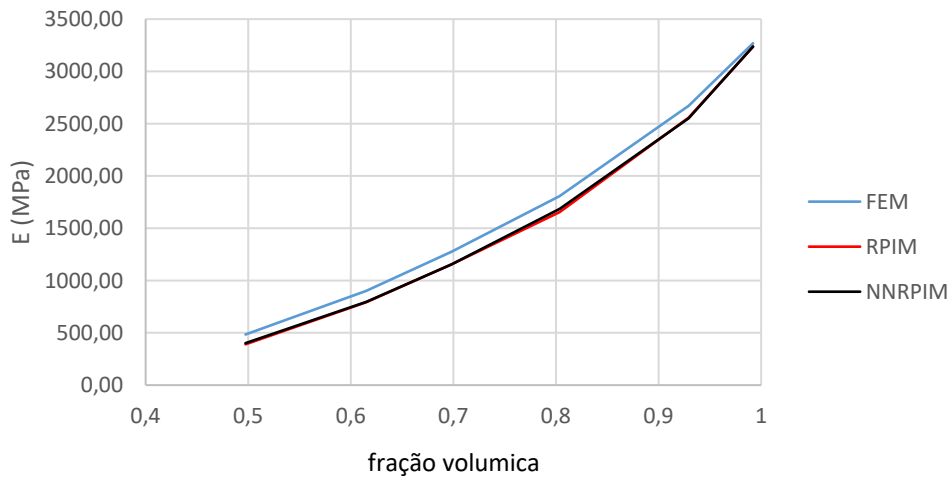


Figura 33- Módulo de elasticidade homogeneizado em função da fração volúmica da placa com furo.

Nas Tabela 4, Tabela 5, Tabela 6 e Tabela 7 estão representados os valores dos coeficiente C obtidos utilizando cada um dos métodos, em função do raio do furo. Estes valores são utilizados para obtenção das propriedades mecânicas, conforme a Eq. 61 do capítulo 2.6.3.

Tabela 4- Variação de C11 em função do raio.

	C11					
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	4819	3689	2346	1640	1177	687
RPIM	4749	3384	2137	1492	1053	585
NNRPIM	4755	3488	2181	1492	1055	594

Tabela 5- Variação de C21 em função do raio.

	C21					
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	2364	1701	1029	734	550	370
RPIM	2323	1461	955	678	508	338
NNRPIM	2324	1596	959	678	510	336

Tabela 6- Variação de C22 em função do raio.

C22						
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	4820	3688	2351	1644	1171	688
RPIM	4756	3438	2217	1491	1042	591
NNRPIM	4752	3495	2182	1491	1048	593

Tabela 7- Variação de C33 em função do raio.

C33						
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	4829	4159	3244	2666	2262	1756
RPIM	4781	4008	3126	2535	2145	1649
NNRPIM	4781	4042	3122	2535	2130	1635

Do mesmo modo, foram comparadas as propriedades mecânicas obtidas utilizando o FEM, RPIM e NNRPIM, em função do raio do furo. Nas Tabela 8 e Tabela 9, as tensões principais E1 e E2 são comparadas, diminuindo o seu valor à medida que o raio vai aumentando, isto é, com a diminuição da densidade. Observa-se, também, que os valores de E1 e E2 são praticamente coincidentes, o que comprova simetria da célula homogeneizada.

Tabela 8- Variação de E1 em função do raio.

E1 (MPa)						
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	3269	2672	1808	1275	902	484
RPIM	3235	2558	1655	1154	793	390
NNRPIM	3238	2552	1686	1154	796	401

Tabela 9- Variação de E2 em função do raio.

E2 (MPa)						
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	3269	2672	1812	1279	898	485
RPIM	3240	2582	1715	1154	785	394
NNRPIM	3237	2557	1688	1154	790	400

Na Tabela 10 está representado o valor do módulo de elasticidade ao corte da mesma forma que as propriedades descritas anteriormente. O coeficiente de Poisson sofre um aumento em função do raio, como pode ser observado na Tabela 11.

Tabela 10- Variação de G12 em função do raio.

	G12 (MPa)					
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	1227	959	501	252	136	53
RPIM	1214	892	443	205	106	38
NNRPIM	1213	903	439	205	107	39

Tabela 11- Variação de v12 em função do raio.

	v12					
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	0.33	0.34	0.37	0.41	0.44	0.53
RPIM	0.33	0.32	0.37	0.42	0.47	0.56
NNRPIM	0.33	0.35	0.38	0.42	0.46	0.56

Analisando o mapa da distribuição da tensão equivalente de von Mises à homogeneização segundo x (Figura 34 Figura 35), é possível verificar que os métodos sem malha (RPIM e NNRPIM) apresentam uma discretização bastante mais suave do que o método de elementos finitos. Isto pode ser reparado, principalmente, na placa com furo de raio menor (Figura 34 a), onde, nos métodos sem malha, é possível ver bem definido o furo, enquanto que no método de elementos finitos não é possível distinguir a sua existência.

Também o mapa de cores dos métodos RPIM e NNRPIM apresenta maior suavidade na transição entre cores e as zonas de tensão máxima apresentam uma forma regular. Observa-se que os pontos de tensão máxima se encontram imediatamente em cima e em baixo do furo, deslocando-se para o lado do deslocamento (lado direito) com o aumento do raio. Nos furos de maior diâmetro, verifica-se, também, um pico de tensão na lateral direita da célula. Os pontos de menor tensão estão localizados nos vértices do RVE.

Similarmente ao analisado anteriormente, a homogeneização segundo y apresenta valores iguais e os mapas de tensão são semelhantes, estando rodados 90°.

A homogeneização ao corte (Figura 36 Figura 37) permite, novamente, verificar a melhor discretização dos resultados quando utilizado métodos sem malha (RPIM e NNRPIM). Este fenómeno é observado, principalmente, nos furos de menor dimensão (Figura 36 a), tendo estes o seu contorno melhor perceptível em comparação com a análise utilizando o método de elementos finitos. Os pontos de tensão máxima encontram-se ao redor do furo, sendo estes perceptíveis com melhor nitidez nas análises dos métodos RPIM e NNRPIM. Por outro lado, os pontos de menor tensão encontram-se nos vértices da célula analisada.

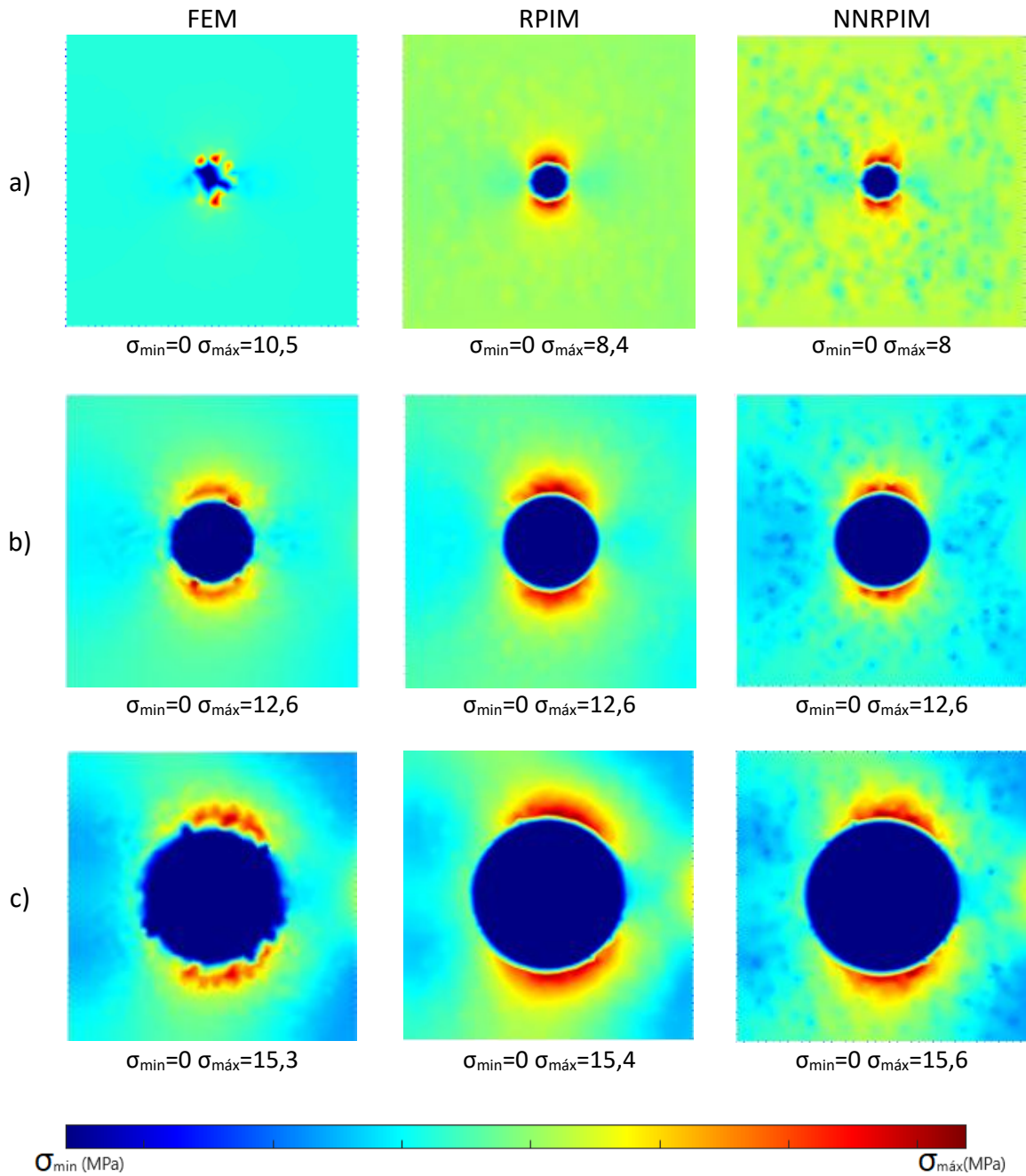


Figura 34 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com um furo: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$.

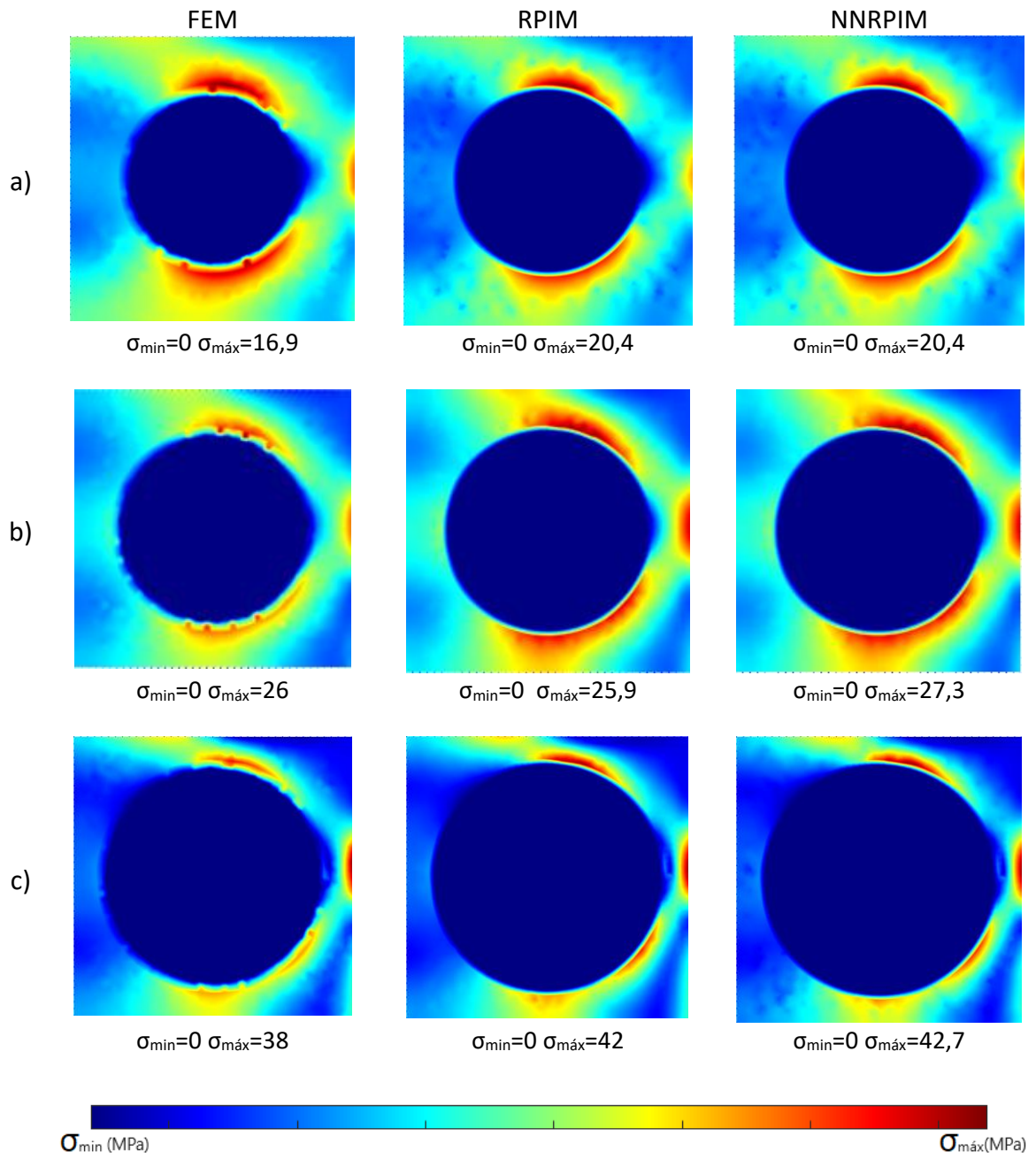


Figura 35 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com um furo: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$.

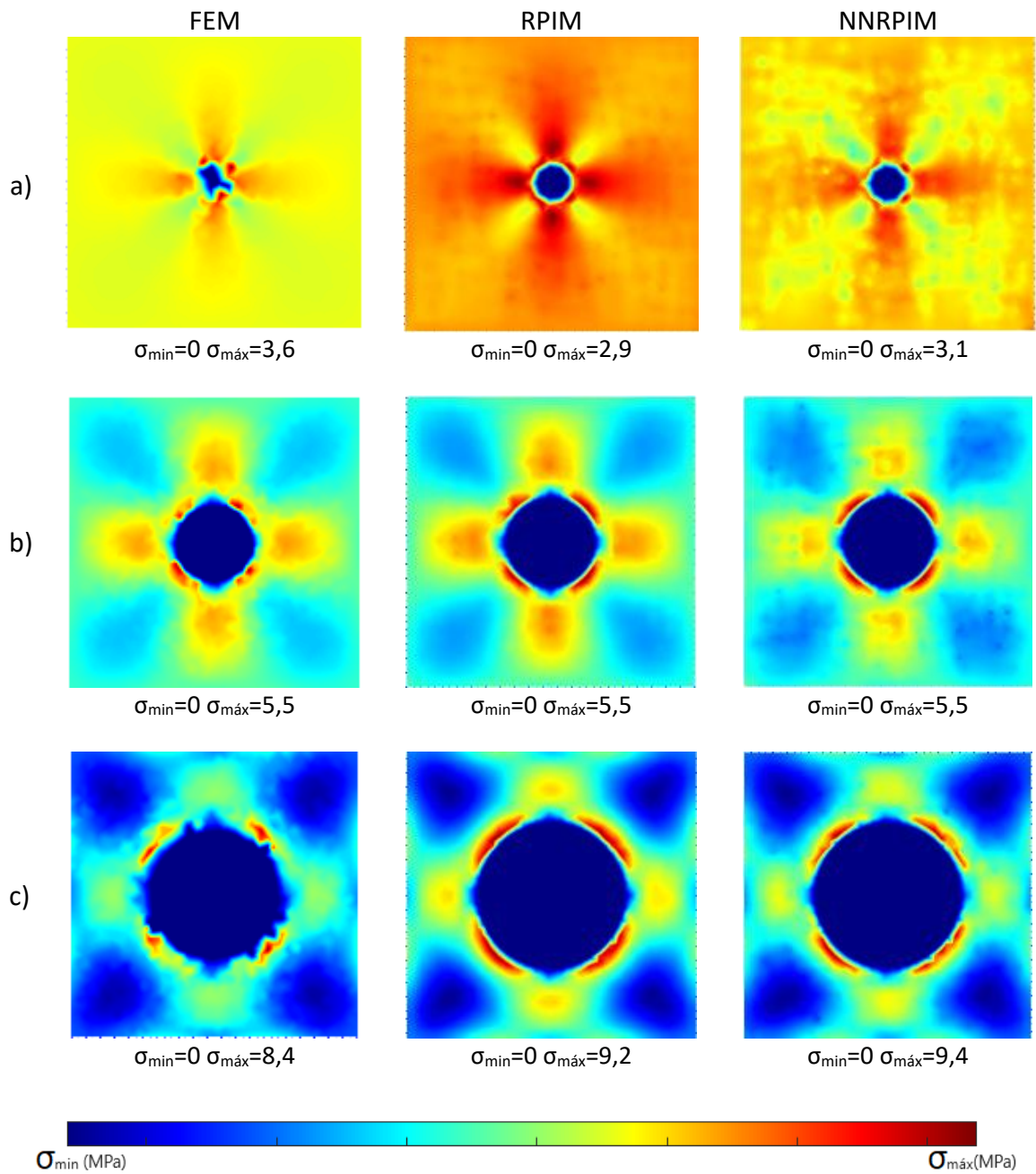


Figura 36 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com um furo: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$.

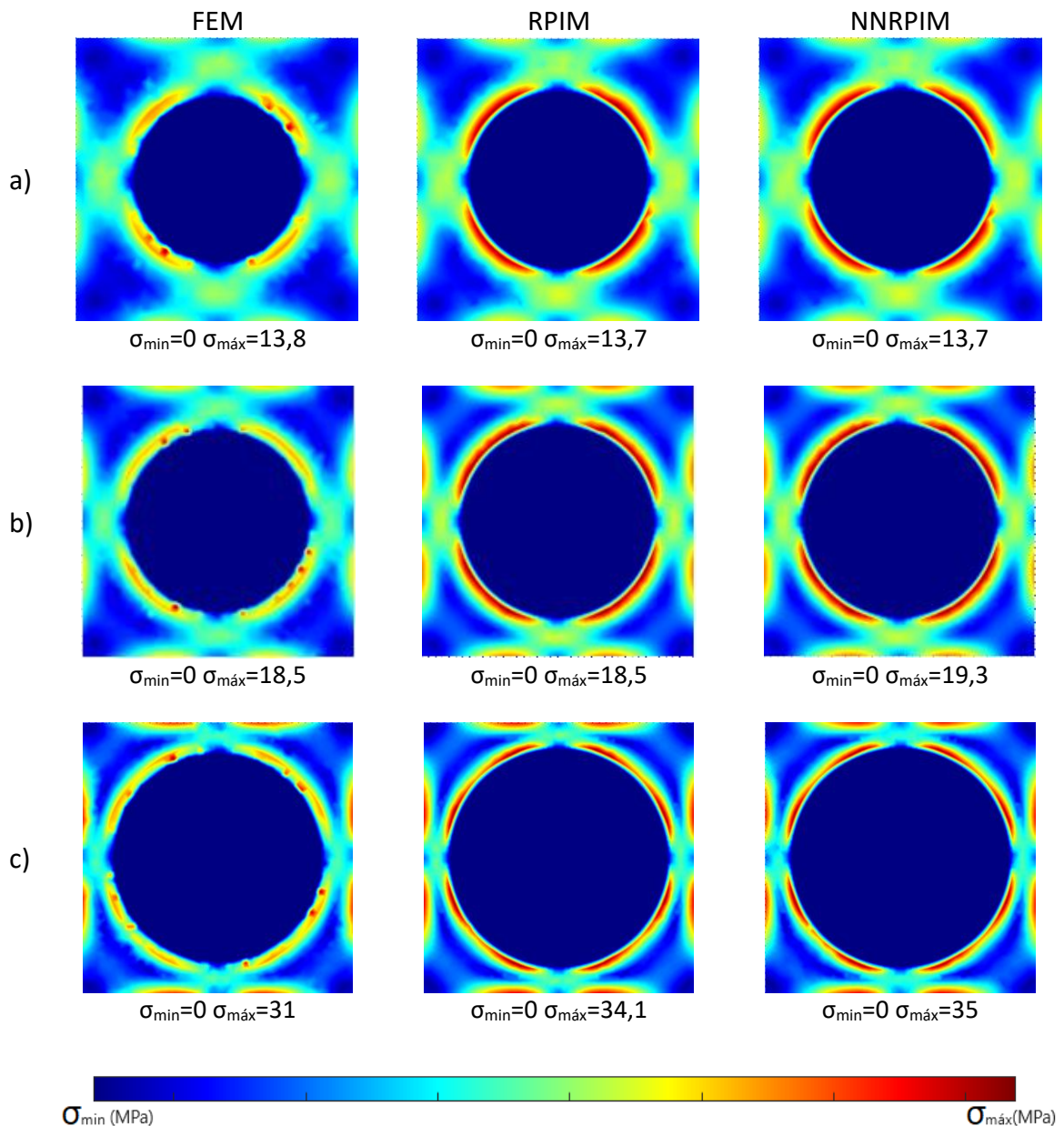


Figura 37 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com um furo: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$.

De seguida, foi feita uma análise cujo RVE é constituído por quatro placas iguais à analisada anteriormente, formando um quadrado, representado na Figura 38. Esta análise servirá para validar os valores das propriedades homogenizadas obtidos anteriormente.

O gráfico obtido do módulo de elasticidade em função da densidade (Figura 39) descreve uma curva semelhante ao da análise feita anteriormente. Os valores obtidos para o módulo de elasticidade E_1 (Tabela 12) são ligeiramente superiores quando comparados com os obtidos na homogenização ao RVE com apenas um furo. O coeficiente de poisson ν_{12} (Tabela 13) apresenta valores idênticos aos obtidos anteriormente. Desta forma, as propriedades

mecânicas homogenizadas obtidas na análise do RVE com um único furo irão ser consideradas como válidas e utilizadas, posteriormente, para análise de casos de estudo.

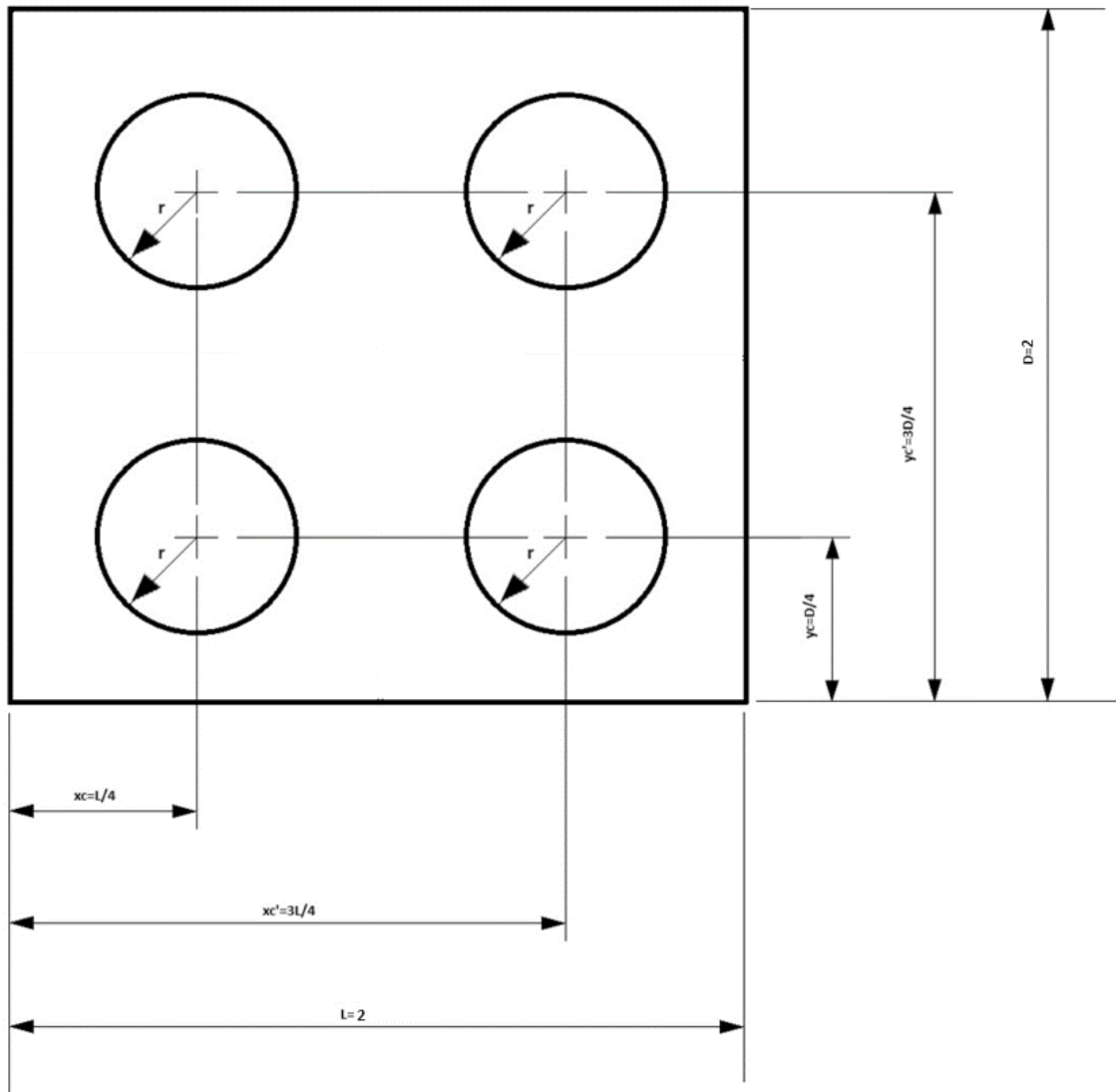


Figura 38-Placa com quatro furos.

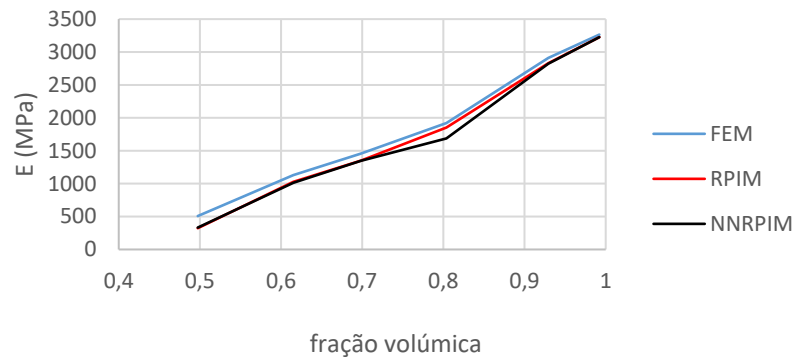


Figura 39- Módulo de elasticidade homogeneizado em função da densidade placa com quatro furos

Tabela 12 - Variação de E1 em função do raio.

	E1 (MPa)					
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	3265	2910	1920	1455	1129	508
RPIM	3226	2831	1853	1348	1028	323
NNRPIM	3225	2822	1686	1347	1014	332

Tabela 13 - Variação de v12 em função do raio.

	v12					
	r=0.5mm	r=1.5mm	r=2.5mm	r=3.1mm	r=3.5mm	r=4mm
FEM	0.33	0.34	0.29	0.28	0.28	0.41
RPIM	0.33	0.34	0.29	0.276	0.280247	0.497519
NNRPIM	0.3327	0.34138	0.3792	0.2775	0.28550	0.48804

Em relação aos mapas de tensão (Figura 40, Figura 41, Figura 42, Figura 43), similarmente aos que foram obtidos para um RVE de um único furo, nesta análise foi possível, novamente, verificar que a utilização dos métodos sem malha (RPIM e NNRPIM) resulta numa maior definição das geometrias, tanto do próprio RVE, como, também, da distribuição de tensões por toda a célula.

Paralelamente à análise de apenas um furo, observa-se que nos furos mais pequenos (Figura 40 a) e Figura 42 a) o método de elementos finitos apresenta dificuldade em discretizar essa geometria, ao contrário dos métodos sem malha, existindo, também, uma representação pouco suave e, por vezes, descontinuidade dos pontos de tensão máxima. Estes pontos encontram-se, essencialmente, em cima e em baixo de cada furo, em concordância com a análise de apenas um furo. Com o aumento do diâmetro, existe, também, um pico de tensão na aresta direita da célula. Os pontos de menor tensão encontram-se entre os furos.

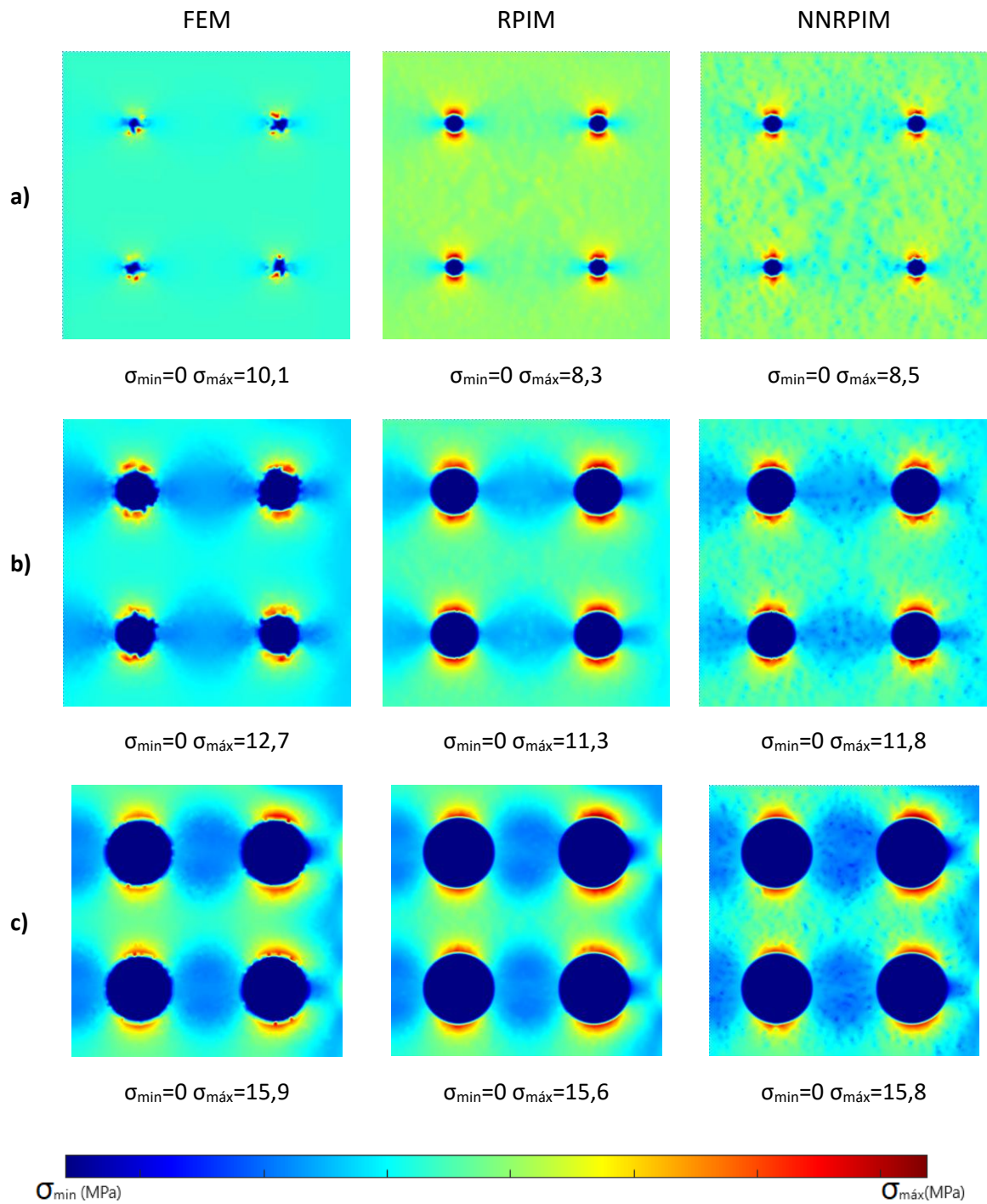


Figura 40 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$.

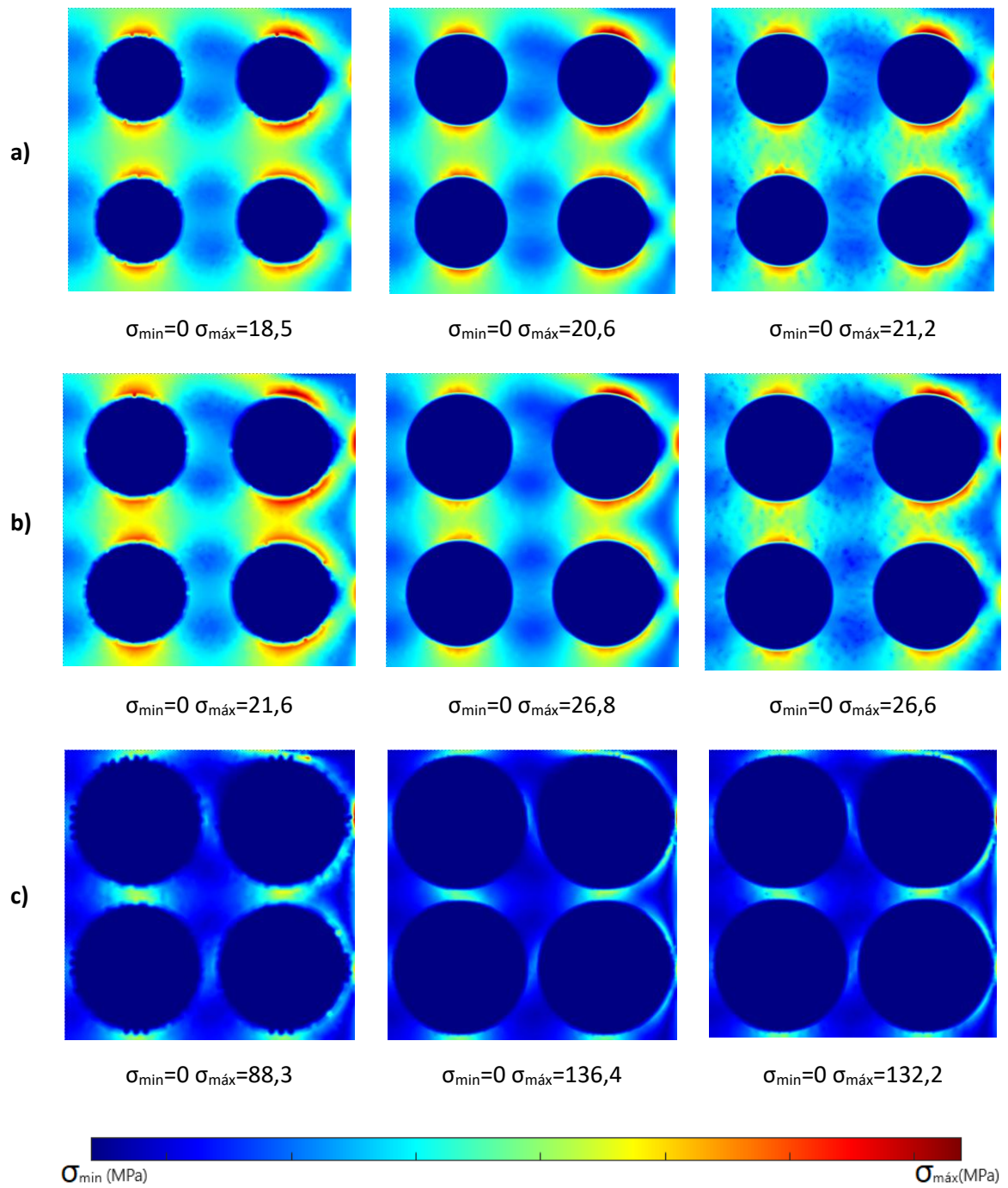


Figura 41 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização segundo O_{xx} para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$.

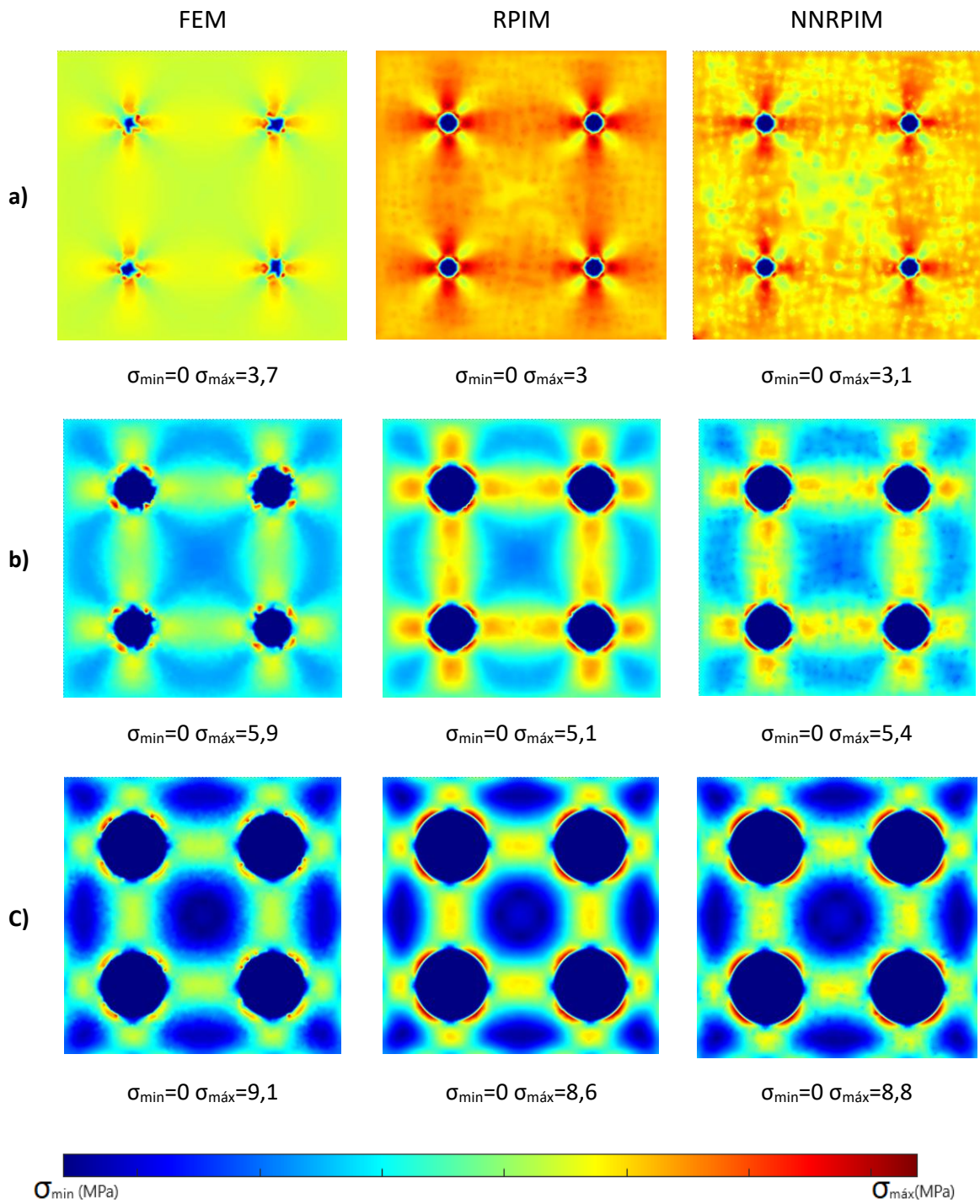


Figura 42 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogeneização ao corte para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$.

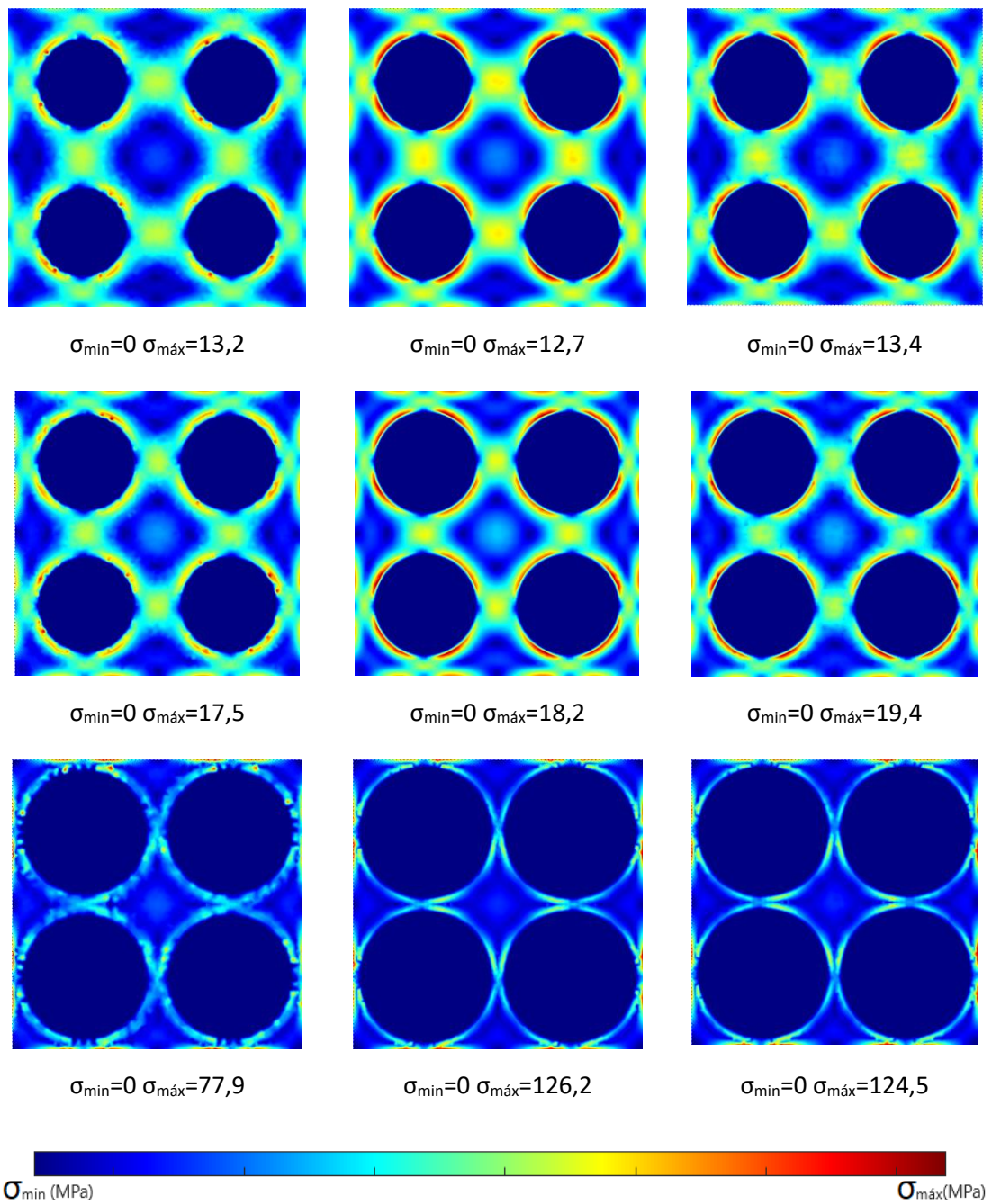


Figura 43 - Distribuição das tensões equivalentes de von Mises na homogenização ao corte para a placa com quatro furos: a) $f_v = 0,70$, b) $f_v = 0,62$, c) $f_v = 0,50$.

4.1.3. ANÁLISE DE CASOS PRÁTICOS

Este capítulo aborda dois tipos de ensaios: a flexão de três pontos e a barra encastrada com uma carga na ponta. Estes ensaios servirão para avaliar propriedades mecânicas e a metodologia de homogenização estudada anteriormente.

Representado na Figura 44 está um esquema representativo da barra analisada, onde $L=5\text{mm}$ e $D=1\text{mm}$, enquanto na Figura 45 é demonstrada a malha utilizada para análise. Esta última é constituída por 8000 nós. O valor $e=0,1\text{mm}$ corresponde à espessura da pele, isto é, onde as propriedades são iguais às do material sólido, representada por uma cor mais clara na Figura 32. Na zona mais escura as propriedades irão variar dependendo da densidade.

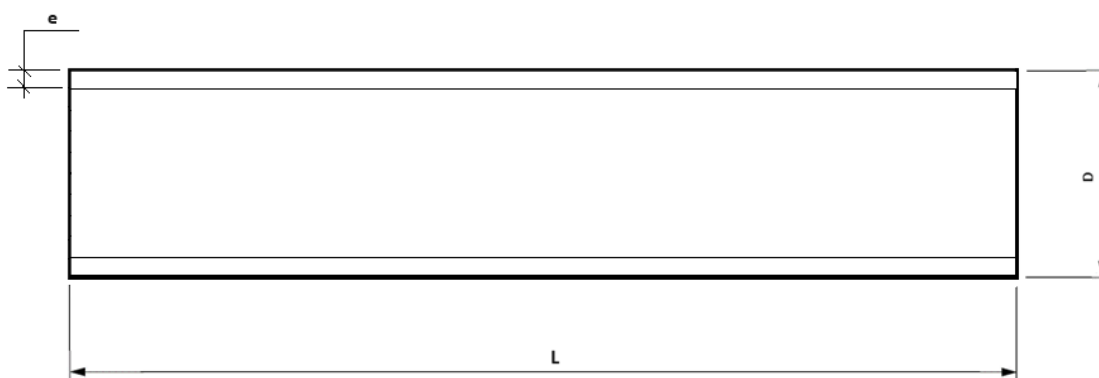


Figura 44- Esquema da barra.

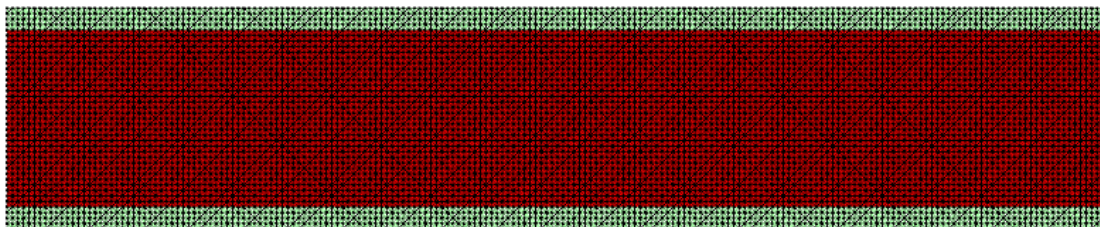


Figura 45- Malha da barra.

A mesma barra será utilizada para analisar o gradiente funcional, isto é, a densidade varia ao longo da espessura, sendo simétrica e tendo o valor mínimo no centro. A malha utilizada para esta análise está representada na Figura 47. Na Figura 46 está exemplificado o gradiente funcional, onde existe diminuição da densidade desde a pele até ao centro da barra, sendo que cada camada tem de espessura $e=0,1\text{mm}$. As propriedades homogenizadas da estrutura celular utilizadas no núcleo das barras estão representadas na Tabela 14.

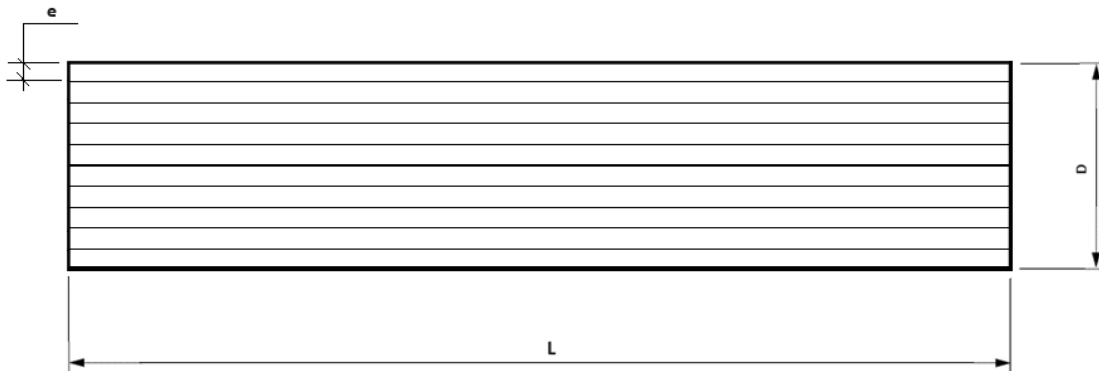


Figura 46- Esquema da barra gradiente funcional.

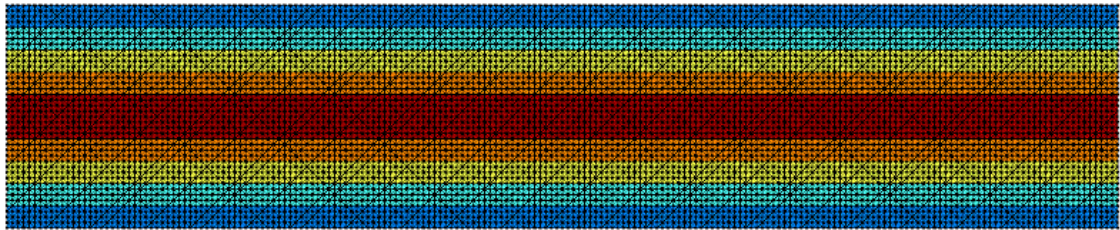


Figura 47- Malha da barra de gradiente funcional.

Tabela 14- Propriedades utilizadas na análise das barras.

fv	E (GPa)	v
0,99	3,247	0,33
0,93	2,594	0,34
0,80	1,716	0,37
0,70	1,275	0,41
0,62	0,830	0,46
0,50	0,425	0,55

4.1.3.1. ENSAIO BARRA À FLEXÃO

A análise numérica do ensaio à flexão foi realizada considerando apoios simples em cada extremidade da barra, conforme representado na Figura 48, e uma força de 1N no ponto central.

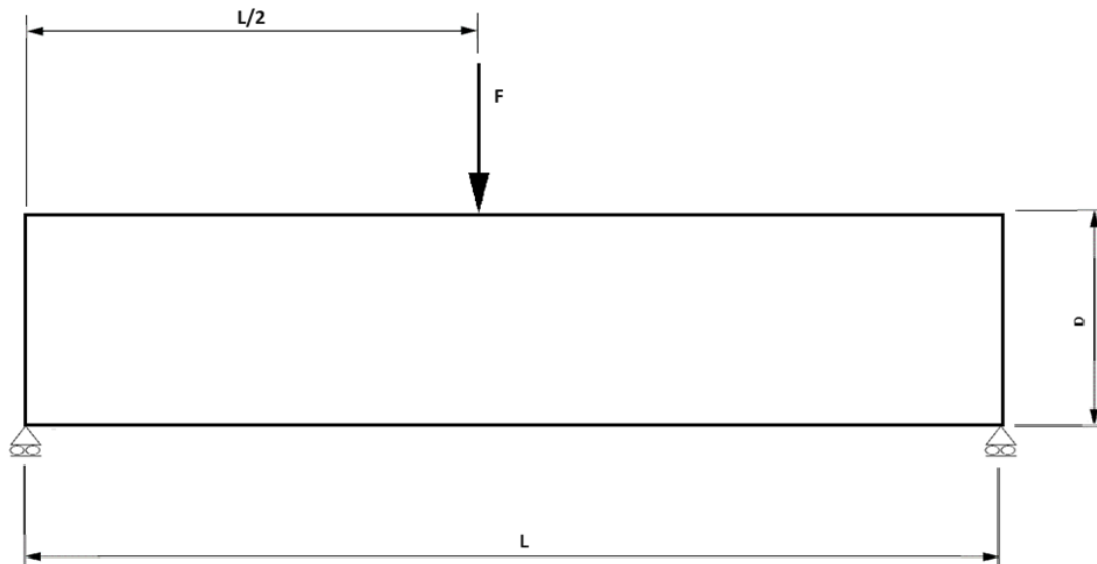


Figura 48- Ensaio barra à flexão 3 pontos.

Esta análise serve para estudar o comportamento à flexão do material e obter a distribuição das tensões de corte ao longo da espessura da barra. Foram obtidos resultados utilizando os métodos falados anteriormente e comparados com o valor teórico obtido analiticamente.

Nas densidades de 0,99 (Figura 49- Distribuição das tensões de corte) e 0.93 (Figura 50), a distribuição das tensões obtidas pelos três métodos analisados segue, aproximadamente, a distribuição analítica.

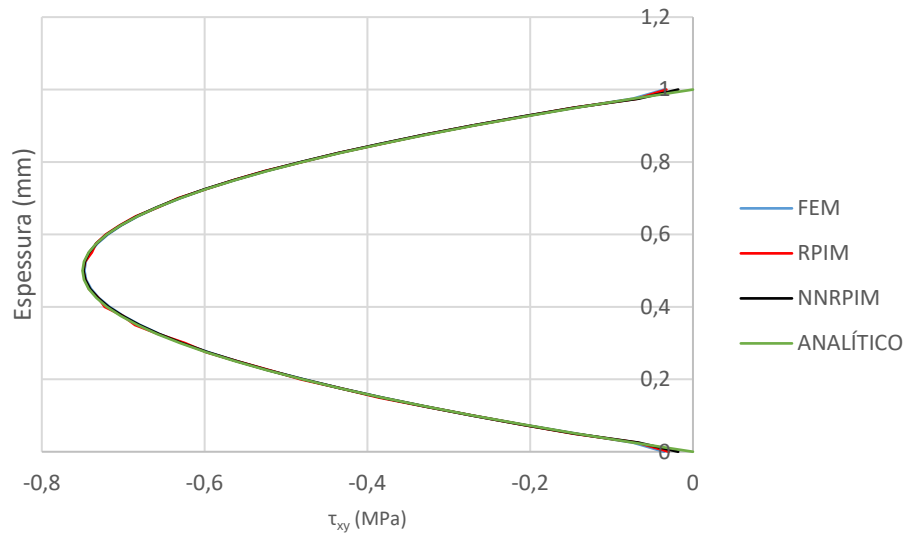


Figura 49- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,99.

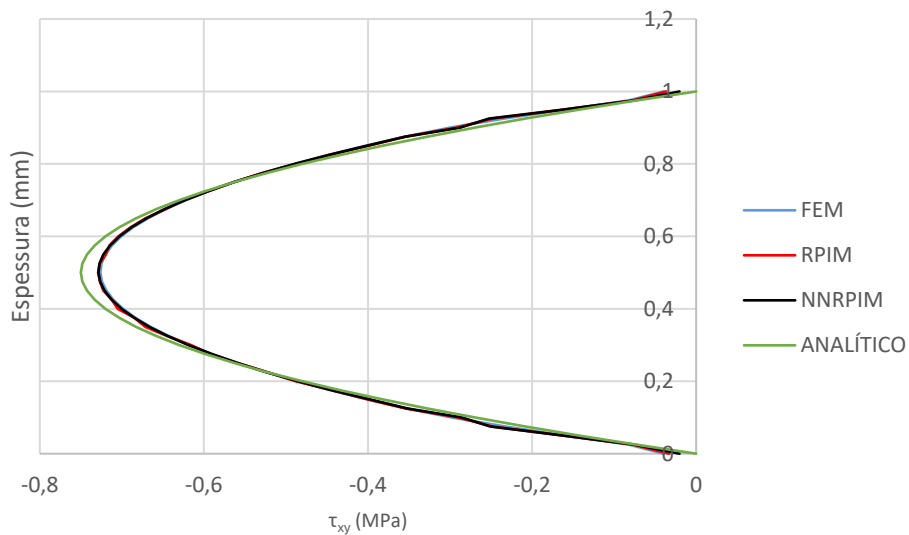


Figura 50- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,93.

A partir da densidade de 0,8 (Figura 51), começa a ser aparente uma anomalia na zona da interface, onde existe a mudança entre o material de densidade 1 e o de densidade em estudo.

À medida que a densidade vai diminuindo (Figura 52 e Figura 53), existe um acentuar desta anomalia na interface e, ao mesmo tempo, o valor da tensão de corte máxima vai diminuindo, atingindo o menor valor para a barra de densidade 0,5 (

Figura 54).

Este fenómeno de diminuição do valor da tensão de corte máximo deve-se à alteração da geometria real da barra, pois, enquanto a análise é feita considerando esta como sendo sólida, na realidade, é composta por células iguais à estudada no capítulo 4.1.2.

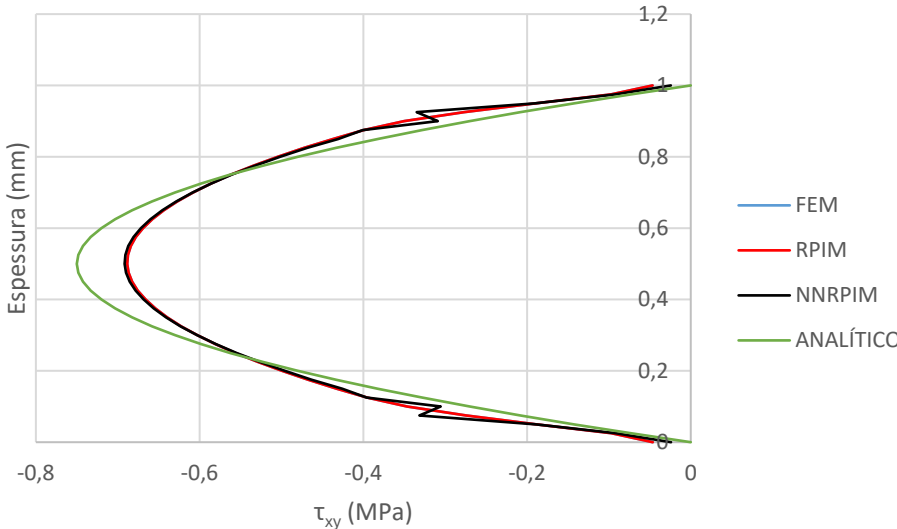


Figura 51- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,8.

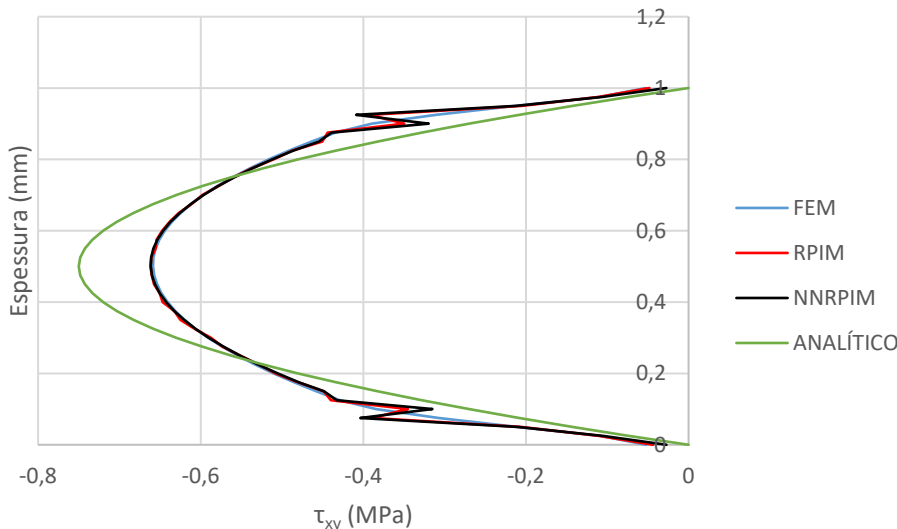


Figura 52- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,7.

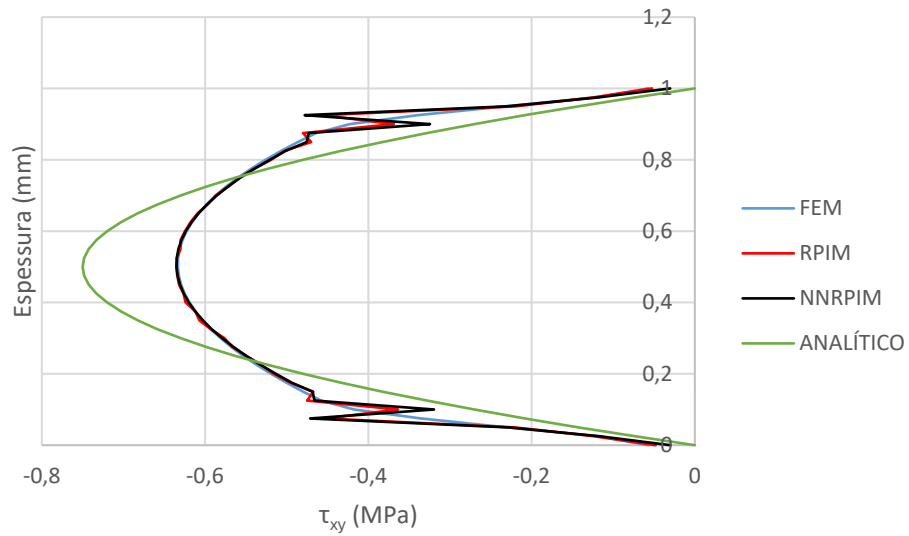


Figura 53- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,61.

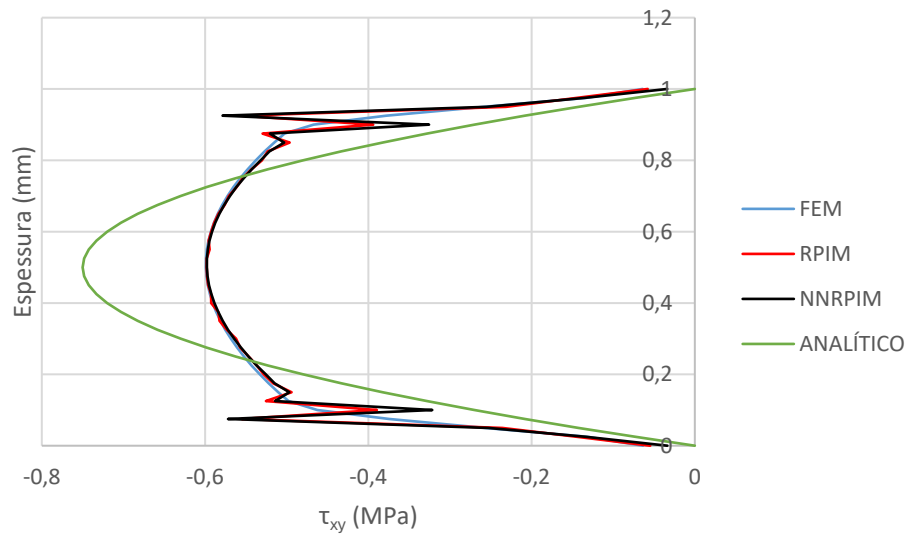


Figura 54- Distribuição das tensões de corte na barra de densidade 0,5.

Na Figura 55 está representada a distribuição das tensões de corte na barra de gradiente funcional. As densidades utilizadas nesta análise são, respetivamente, 0,81, 0,7, 0,61 e 0,5. Além do valor do pico da curva ser mais baixo que o esperado analiticamente, também é possível observar os saltos no gráfico provocados pela interface nos pontos de mudança de densidade.

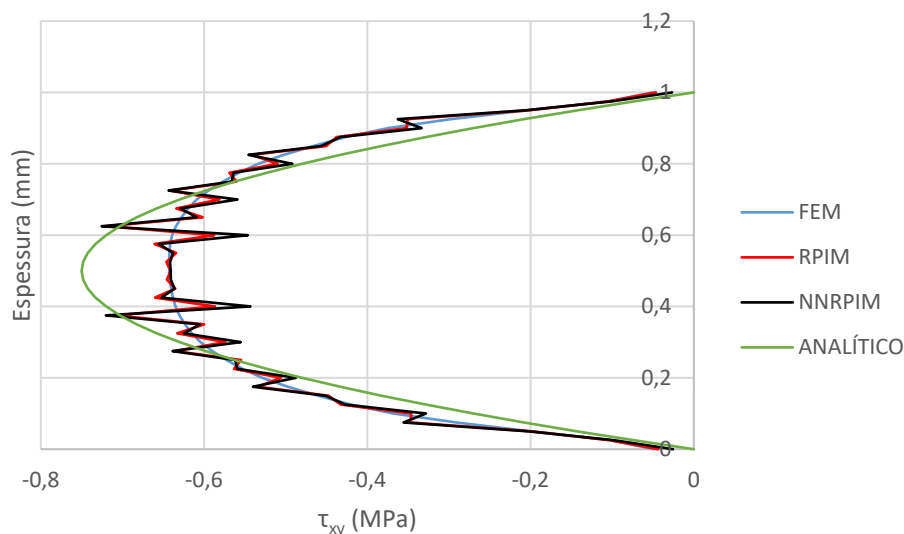


Figura 55- Distribuição das tensões de corte na barra de gradiente funcional.

Pela análise dos mapas de tensão de corte (Figura 56), verifica-se uma concentração de tensões máxima e mínima na zona do ponto de aplicação da carga e dos apoios. Também se observa o aumento da tensão de corte das peles para o núcleo, sendo que, devido ao valor elevado da concentração de tensões, não é perceptível a distribuição de tensões condizente com os gráficos analisados anteriormente. Como seria de esperar, não existe grande diferença nos valores de tensão máxima e mínima com a diminuição da fração volúmica.

Também, não são observadas diferenças significativas entre os três métodos, sendo que o método de elementos finitos é aquele onde foram obtidos os valores mais baixos de concentração de tensões.

Similarmente ao que aconteceu no mapa de tensões das tensões de corte, o da tensão equivalente de von Mises (Figura 57) também apresenta uma concentração de tensões na zona da aplicação da carga e dos apoios enquanto que pontos com menor tensão encontram-se no núcleo da barra.

A diminuição da fração volúmica provocou um aumento da tensão suportada pelas peles sendo possível distinguir, com maior clareza, as peles do núcleo, com o aumento do diâmetro do furo.

Também, não são observadas diferenças significativas entre os três métodos, sendo que o método de elementos finitos é aquele onde foram obtidos os valores mais baixos de concentração de tensões.

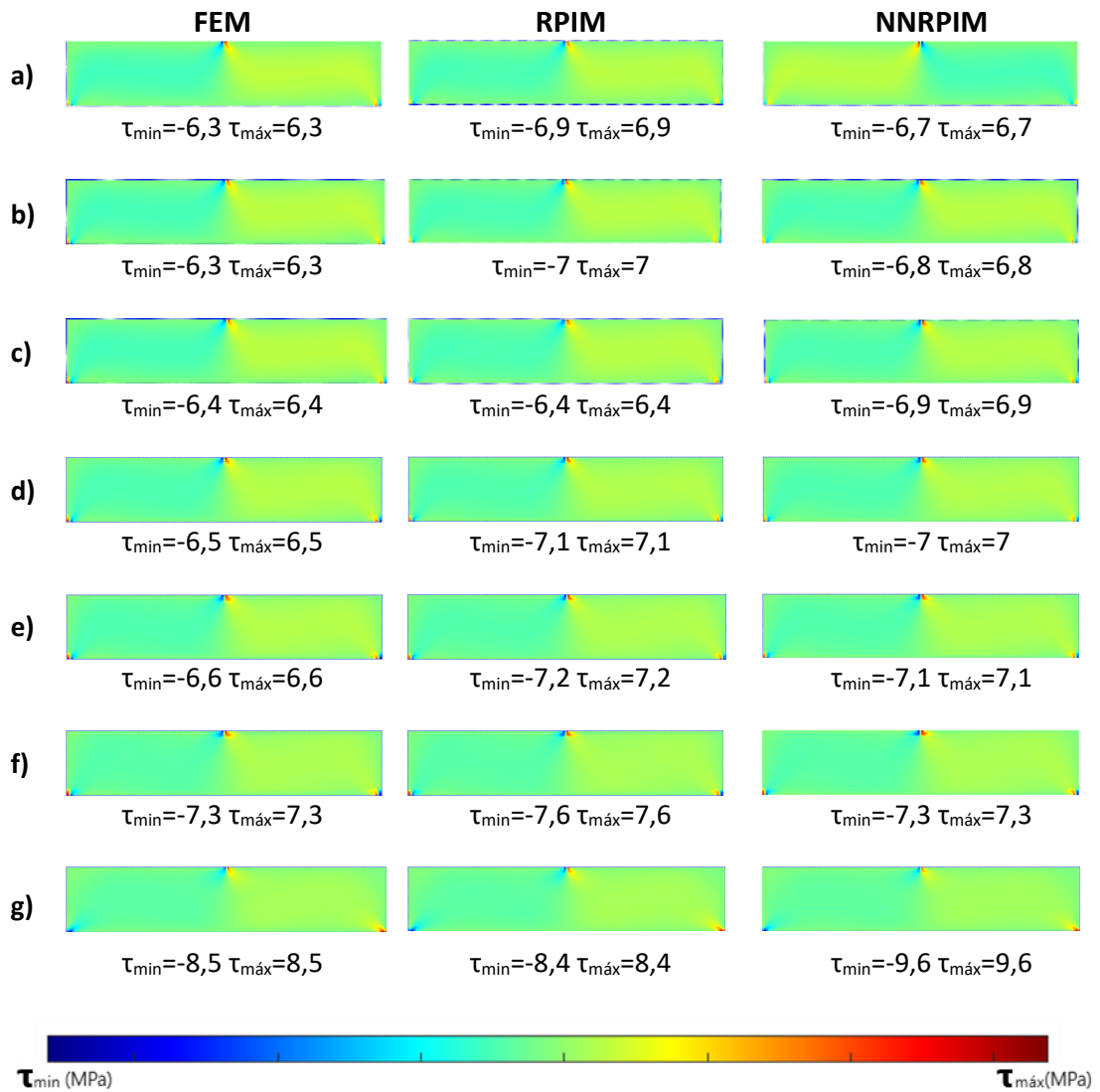


Figura 56 – Mapa das tensões de corte da análise da barra à flexão: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$, g) gradiente funcional.

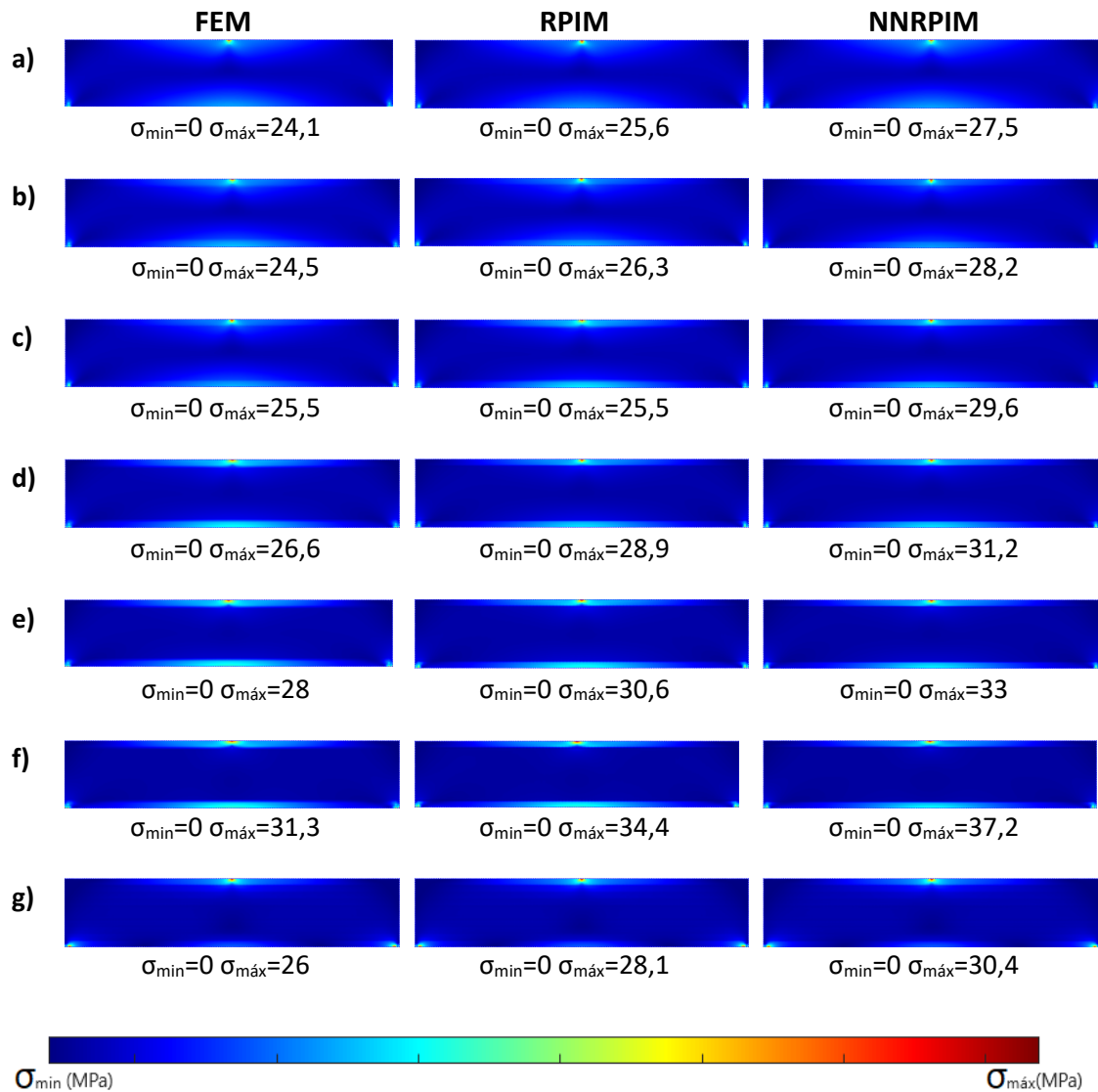


Figura 57 - Mapa das tensão equivalente de von Mises da análise da barra à flexão: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$, g) gradiente funcional.

4.1.3.2. ENSAIO BARRA ENCASTRADA

A análise numérica do ensaio da barra encastrada foi realizada considerando um encastramento numa extremidade da barra, conforme representado na Figura 58, e uma força de 1N aplicada na outra. Os pontos de interesse analisados estão representados na mesma figura, cujas coordenadas podem ser obtidas pela Tabela 15.

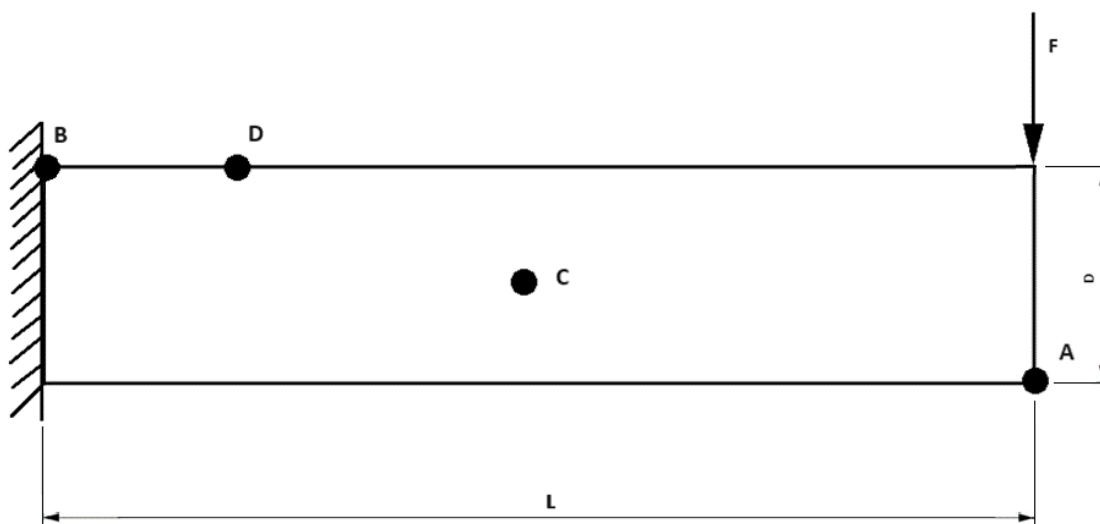


Figura 58- Ensaio barra encastrada.

Tabela 15- Coordenadas dos pontos em análise da barra encastrada.

Ponto	Coordenadas (mm)
A	(5;0)
B	(0;1)
C	(2,5;0,5)
D	(1,25;1)

Foi estudada o deslocamento vertical no ponto A (Figura 59) onde é possível observar que a diminuição da densidade provoca uma diminuição, também, da rigidez, o que provoca um aumento da flecha neste ponto.

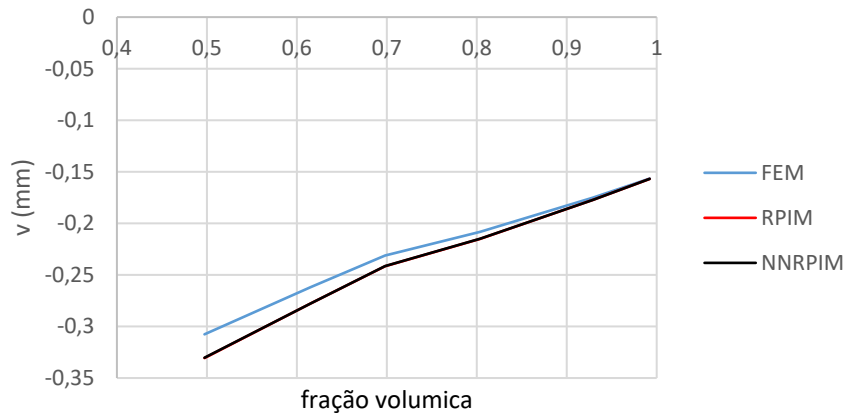


Figura 59- Deslocamento vertical no ponto A.

Nos pontos B e D, foi analisada a tensão no topo da pele da barra, onde a fração volúmica do material é 1. Pela análise das Figura 60 e Figura 61, é possível observar que no encastramento as tensões são praticamente o dobro no ponto B em relação ao ponto D. Também, podemos concluir que o aumento da fração volúmica do núcleo diminui o esforço suportado pela pele.

As tensões de corte no interior da barra aumentam quanto mais denso é o material, como pode ser avaliado na Figura 62.

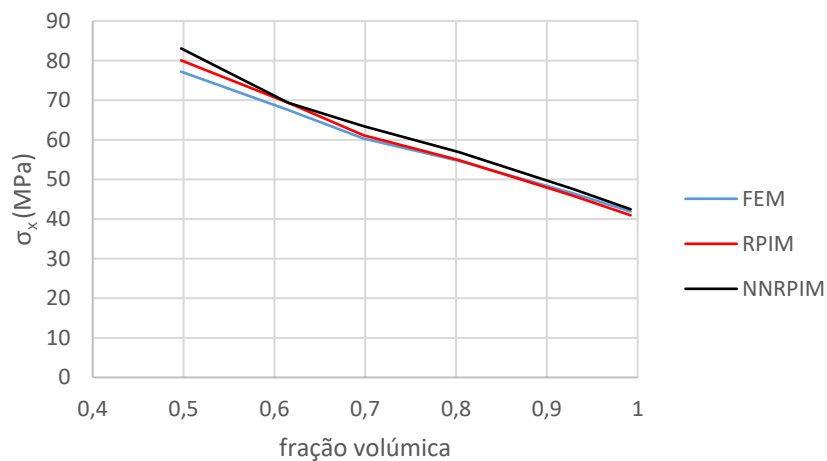


Figura 60- Tensão Normal σ_{xx} no ponto B.

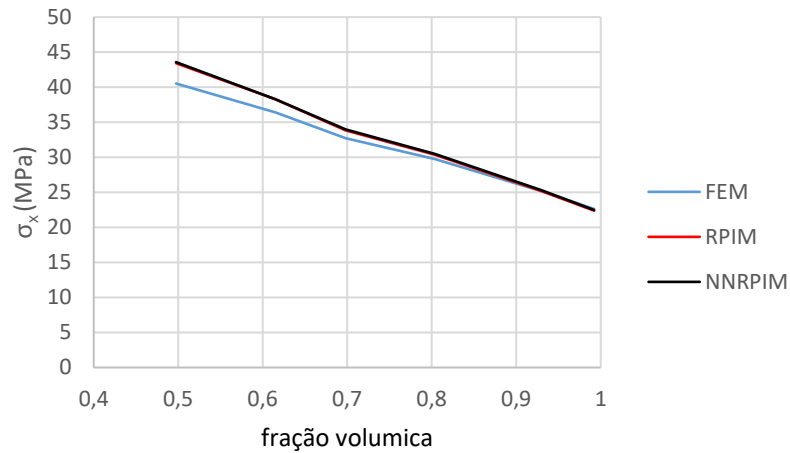


Figura 61- Tensão Normal σ_{xx} no ponto D.

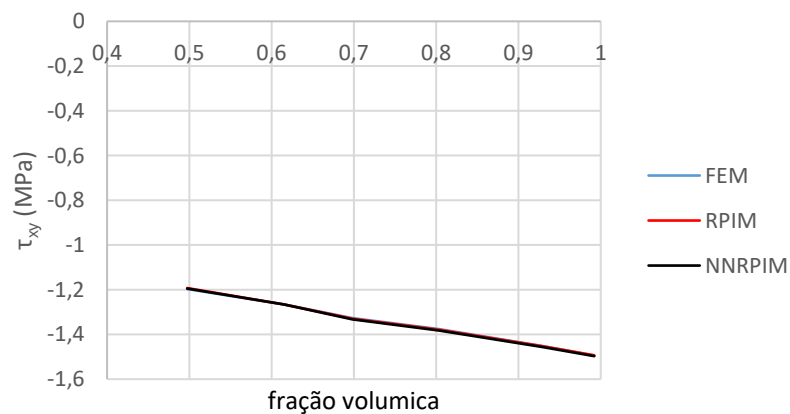


Figura 62- Tensão de corte no ponto C.

Também foi estudada a variação das tensões de corte na direção y ao longo do ponto D (Figura 63). Foi possível verificar que, à semelhança do que foi verificado anteriormente, o valor da tensão de corte máxima vai diminuindo com o aumento do furo.

Este fenómeno de diminuição do valor da tensão de corte máximo deve-se à alteração da geometria real da barra, pois, enquanto a análise é feita considerando esta como sendo sólida, na realidade, é composta por células iguais à estudada no capítulo 4.1.2.

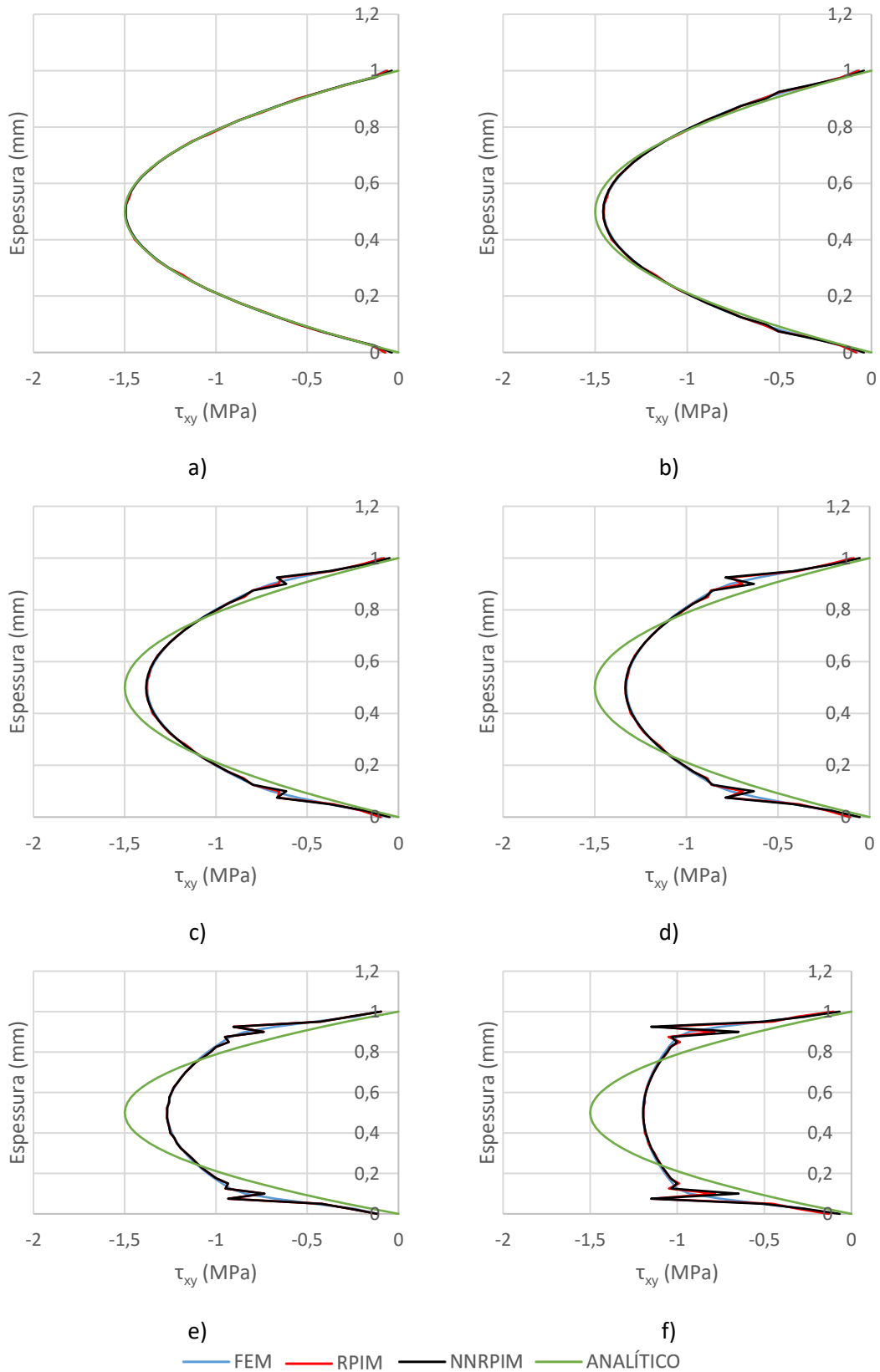


Figura 63 - Distribuição das tensões de corte na direção y e ao longo do ponto D com fração volúmica: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$.

O mapa de tensão equivalente de von Mises (Figura 64), para esta análise, apresenta uma concentração de tensões na zona do encastramento. É possível verificar que a diminuição da fração volúmica provocou um aumento da tensão suportada pelas peles sendo possível distinguir, com maior clareza, as peles do núcleo, com o aumento do diâmetro do furo.

Também, não são observadas diferenças significativas entre os três métodos, sendo que o método de elementos finitos é aquele onde foram obtidos os valores mais baixos de concentração de tensões.

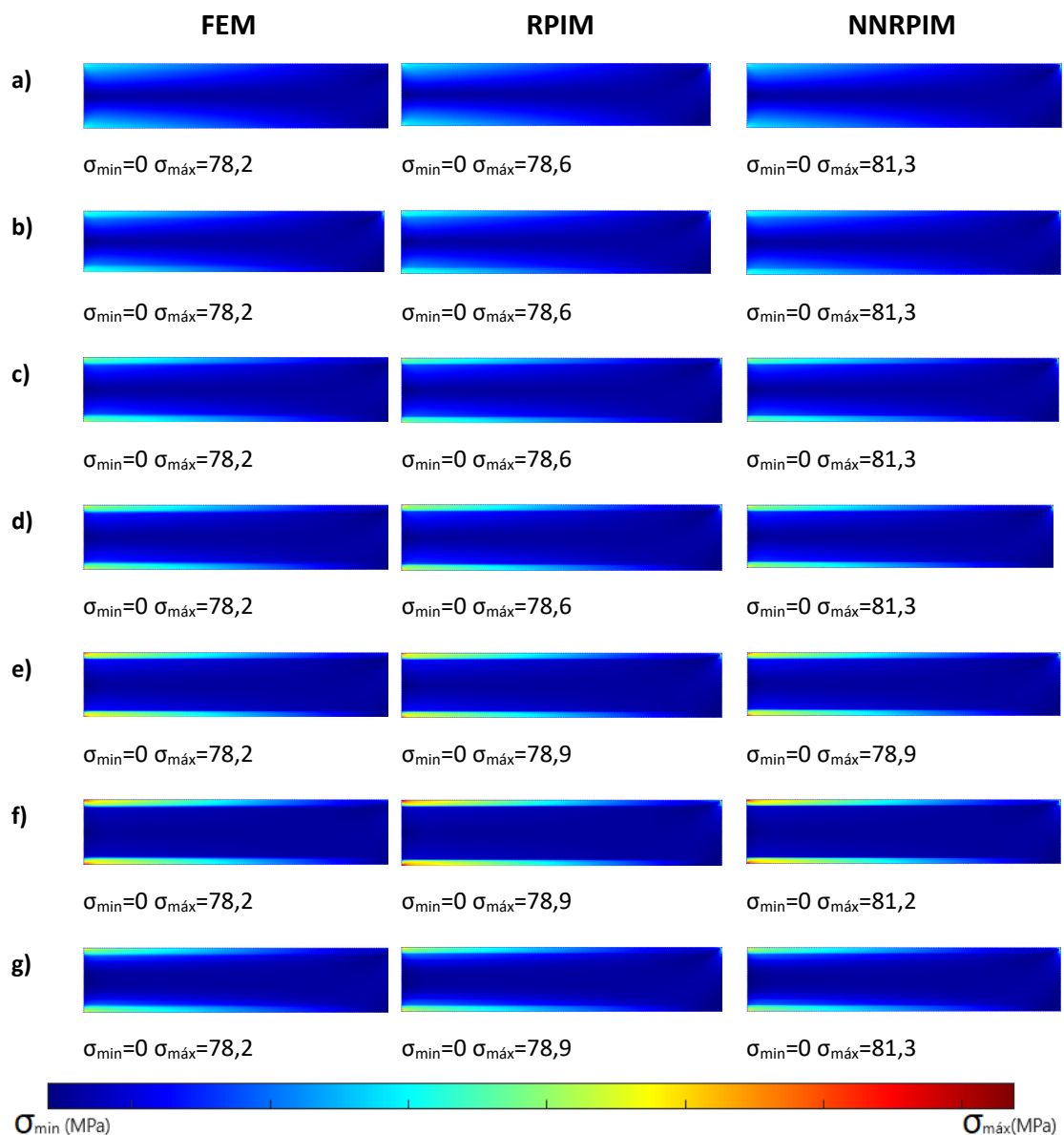


Figura 64 - Mapa da tensão equivalente de von Mises da análise da barra encastrada: a) $f_v = 0,99$, b) $f_v = 0,93$, c) $f_v = 0,80$, d) $f_v = 0,70$, e) $f_v = 0,62$, f) $f_v = 0,50$, g) gradiente funcional.

5. CONCLUSÃO

Ao longo desta tese, foram explorados diversos temas. Inicialmente, foi feita uma descrição da metodologia utilizada nos métodos sem malha “Radial Point Interpolation Method” (RPIM) e “Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method” (NNRPIM), assim como a formulação da homogeneização das propriedades de materiais a partir da teoria da micromecânica.

Foram também exploradas diversas formas de estruturas celulares, principalmente as redes planas, tridimensionais e baseadas em superfície, e as diferentes tecnologias de fabricação aditiva. Isto permitiu desenhar e imprimir vários modelos de estruturas celulares através de impressão 3D. As peças foram obtidas sem grandes constrangimentos, o que comprova, não só a facilidade de fabricar peças utilizando o método de fabricação aditiva, como também a aplicação para obtenção de estruturas celulares. O único problema encontrado foi um ligeiro perda de adesão da primeira camada à base na impressão; no entanto, esta situação pode ser resolvida utilizando um agente que promova a adesão, como, por exemplo, laca.

A aplicação dos métodos sem malha no processo de homogeneização permitiu a obtenção de um mapa de tensões mais bem definido, quando comparado com o tradicional método de elementos finitos, demonstrando uma melhor caracterização deste. Por último, foram feitas análises numéricas a barras onde foram utilizadas as propriedades homogeneizadas da estrutura celular. Desta forma, foi possível avaliar o comportamento da barra à flexão e encastrada com uma força aplicada numa extremidade.

Além dos resultados técnicos, esta pesquisa contribui significativamente para o campo da engenharia de materiais e fabricação aditiva. A utilização de métodos sem malha, como o RPIM e o NNRPIM, mostrou-se eficaz não apenas na homogeneização das propriedades dos materiais, mas também na melhoria da precisão das análises de tensões. Este avanço é crucial para o desenvolvimento de novas aplicações industriais, onde a precisão e a eficiência são fundamentais.

A exploração das diferentes formas de estruturas celulares e das tecnologias de fabricação aditiva abre novas possibilidades para a criação de materiais com propriedades personalizadas. A capacidade de imprimir em 3D estruturas complexas com relativa facilidade e baixo custo pode revolucionar a maneira como projetamos e fabricamos componentes em diversas indústrias, desde a aeroespacial até a biomédica.

Os desafios encontrados, como o descolamento da primeira camada durante a impressão, destacam a importância de continuar a pesquisa e o desenvolvimento de técnicas de fabricação aditiva. Soluções como o uso de agentes de adesão são passos importantes, mas há espaço para melhorias contínuas que possam aumentar a confiabilidade e a qualidade das peças produzidas.

Em resumo, esta tese não só alcançou os objetivos inicialmente propostos, mas também abriu novas direções para futuras pesquisas. A combinação de métodos sem malha com fabricação aditiva representa um avanço significativo na engenharia de materiais, oferecendo novas ferramentas e técnicas para a criação de estruturas inovadoras e eficientes. Espera-se que os resultados obtidos inspirem novas investigações e aplicações práticas, contribuindo para o avanço contínuo da tecnologia e da ciência dos materiais.

5.1. TRABALHOS FUTUROS

Os resultados obtidos nas análises das barras à flexão e encastrada com uma força aplicada na ponta foram consistentes entre os três métodos utilizados. No entanto, como proposta de trabalho futuro, poderia ser feita uma análise experimental de forma a validar os resultados obtidos. Esta análise experimental poderia envolver impressão de provetes e a aplicação de forças em laboratório, permitindo a observação direta dos comportamentos mecânicos e a comparação com os resultados teóricos e numéricos.

Outra forma de validação poderia ser a análise numérica da barra utilizando uma malha que discretize a geometria interna da estrutura celular. Esta abordagem permitiria uma modelagem mais detalhada e precisa das propriedades materiais e das interações internas, potencialmente revelando comportamentos que não foram capturados na análise bidimensional. Além disso, a utilização de métodos numéricos em três dimensões poderia fornecer uma visão mais completa e realista das tensões e deformações na barra, considerando efeitos tridimensionais que são negligenciados em análises bidimensionais.

Adicionalmente, seria interessante explorar a influência de diferentes materiais e configurações geométricas nas propriedades mecânicas das barras. Estudos comparativos entre materiais tradicionais e avançados, como compósitos ou ligas metálicas de alta resistência, poderiam fornecer informações valiosas sobre a otimização do design estrutural.

Finalmente, a integração de técnicas de *machine learning* e inteligência artificial na análise dos dados experimentais e numéricos poderia abrir novas possibilidades para a previsão e otimização do comportamento estrutural das barras. Algoritmos de *machine learning* poderiam ser treinados para identificar padrões complexos nos dados, auxiliando na identificação de fatores críticos e na melhoria dos modelos.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Kozera, Ł. Satoła, and A. Standar, “European Union co-funded investments in low-emission and green energy in urban public transport in Poland,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 200, p. 114530, Aug. 2024, doi: 10.1016/J.RSER.2024.114530.
- [2] A. Changdar, S. S. Chakraborty, Y. Li, and C. Wen, “Laser additive manufacturing of aluminum-based stochastic and nonstochastic cellular materials,” *J Mater Sci Technol*, vol. 183, pp. 89–119, Jun. 2024, doi: 10.1016/J.JMST.2023.09.045.
- [3] P. Cheng *et al.*, “A novel dual-nozzle 3D printing method for continuous fiber reinforced composite cellular structures,” *Composites Communications*, vol. 37, p. 101448, Jan. 2023, doi: 10.1016/J.COCO.2022.101448.
- [4] J. Belinha, *Meshless Methods in Biomechanics - Bone Tissue Remodelling Analysis*, vol. 16. 2014. doi: 10.1007/978-3-319-06400-0.
- [5] D. E. S. Rodrigues, J. Belinha, F. M. A. Pires, L. M. J. S. Dinis, and R. M. N. Jorge, “Homogenization technique for heterogeneous composite materials using meshless methods,” *Eng Anal Bound Elem*, vol. 92, pp. 73–89, Jul. 2018, doi: 10.1016/J.ENGANABOUND.2017.12.012.
- [6] M. Gingold, “Smoothed particle hydrodynamics – Theory and application to non-spherical stars,” *Mon Not R Astron Soc*, pp. 375–389.
- [7] L. B. Lucy, “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis,” *Astronomical Journal*, vol. 82, pp. 1013–1024.
- [8] V. G. Patel and N. V. Rachchh, “Meshless method – Review on recent developments,” *Mater Today Proc*, vol. 26, pp. 1598–1603, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.02.328>.
- [9] M. B. L. G. R. Liu, *Smoothed Particle Hydrodynamics a Mesh Free Particle Method*. Singapore: World Scientific Publishing Co., Pte. Ltd., 2003.
- [10] G. R. Liu, *Meshfree Methods – Moving Beyond Finite Element Method*. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2010.
- [11] L. W. Kam, S. Jun, and Z. Y. Fei, “Reproducing kernel particle methods,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 20, no. 8–9, pp. 1081–1106, 1995.
- [12] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu, “Element-free Galerkin methods,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 37, no. 2, pp. 229–256, 1994.
- [13] P. Lancaster and K. Salkauskas, “Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods,” *Math. Comput.*, vol. 37, no. 155, p. 141, 1981.
- [14] S. N. Atluri and T. Zhu, “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics,” *Comput. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 117–127, 1998.
- [15] S. De and K. J. Bathe, “The method of finite spheres,” *Comput. Mech.*, vol. 25, no. 4, pp. 329–345, 2000.
- [16] L. M. J. S. Dinis, R. M. N. Jorge, and J. Belinha, “Analysis of 3D solids using the natural neighbour radial point interpolation method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 13–16, pp. 2009–2028, 2007.
- [17] D. F. Watson, “Contouring: a guide to the analysis and display of spatial data,” no. Oxford: Pergamon Press, 1992.
- [18] C. L. Lawson, “Software for C1 Surface Interpolation,” *Math. Softw.*, pp. 161–194, 1977.
- [19] G. Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Memoire. Recherches sur les paralleloedres primitifs.,” *J. für die Reine und Angew. Math.*, vol. 134, pp. 198–287, 1908.

- [20] B. Delauney, "SUR LA SPHÈRE VIDE. A LA MÉMOIRE DE GEORGES VORONOI," *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Mat. i Estestv. Nauk*, pp. 793–800, 1934.
- [21] J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, and R. M. N. Jorge, "Composite laminated plate analysis using the natural radial element method," *Compos. Struct.*, vol. 103, pp. 50–67, 2013.
- [22] J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, and R. M. N. Jorge, "The natural radial element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, pp. 1885–1891, 2012.
- [23] J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, and R. M. N. Jorge, "Analysis of thick plates by the natural radial element method," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 76, pp. 33–48, 2013.
- [24] S. N. Atluri and T. Zhu, "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics," *Comput. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 117–127, 1998.
- [25] J. G. Wang and G. R. Liu, "A point interpolation meshless method based on radial basis functions," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 54, no. 11, pp. 1623–1648, 2002.
- [26] G. R. Liu and Y. T. Gu, "A point interpolation method for two-dimensional solids," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, no. 4, pp. 937–951, 2001.
- [27] C. F. Santos, J. Belinha, F. Gentil, M. Parente, and R. N. Jorge, "The free vibrations analysis of the cupula in the inner ear using a natural neighbor meshless method," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 92, no. August 2017, pp. 50–63, 2018.
- [28] G. R. Liu and Y. T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*. 2005.
- [29] J. Duchon, "Splines minimizing rotation invariant seminorms in Sobolev spaces. In: Schempp W, Zeller K (eds) Constructive theory of functions of several variables.," *in Lecture notes in Mathematics*, no. Berlin: Springer, 1977.
- [30] M. A. Golberg, C. S. Chen, and H. Bowman, "Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 23, no. 4, pp. 285–296, 1999.
- [31] B. E. G. C. N. L. Nguyen VD, "Imposing periodic boundary condition on arbitrary meshes by polynomial interpolation.," *Comput Mater Sci*, vol. 55, pp. 390–406, 2012.
- [32] Q. SS. Liu GR, *The finite element method: a practical course.*, 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014.
- [33] Reddy JN., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC, 2004.
- [34] A. M. Gibson L, *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge university press, 1999.
- [35] A. , et al. Nazir, "A state-of-the-art review on types, design, optimization, and additive manufacturing of cellular structures," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 104, no. 9, pp. 3489–3510, 2019.
- [36] M. , et al. Benedetti, "Architected cellular materials: A review on their mechanical properties towards fatigue-tolerant design and fabrication," *Materials Science and Engineering: R: Reports*, vol. 144, p. 100606, 2021.
- [37] K.-M. Park, K.-S. Min, and Y.-S. Roh, "Design Optimization of Lattice Structures under Compression: Study of Unit Cell Types and Cell Arrangements," *Materials*, vol. 15, no. 1, 2022, doi: 10.3390/ma15010097.
- [38] B. CASTANIE, C. BOUVET, and M. Ginot, "Review of composite sandwich structure in aeronautic applications," *Composites Part C: Open Access*, vol. 1, p. 100004, Aug. 2020, doi: 10.1016/J.JCOMC.2020.100004.
- [39] X. , et al Shi, "Design optimization of multimorphology surface-based lattice structures with density gradients," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 117, no. 7, pp. 2013–2028, 2021.
- [40] Y. , et al Zhang, "A compliant robotic grip structure based on shape memory polymer composite," *Composites Communications*, p. 101383, 2022.

- [41] H. et al Yim, "Review on lattice structures for energy absorption properties," *Compos Struct*, p. 116397, 2022.
- [42] L. , et al Chougrani, "Lattice structure lightweight triangulation for additive manufacturing," *Computer-Aided Design*, vol. 90, pp. 95–104, 2017.
- [43] R. F. Gibson, "A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures," *Compos Struct*, vol. 92, no. 12, pp. 2793–2810, 2010.
- [44] C. J. Hunt, "A review of composite lattice structures," *Compos Struct*, vol. 284, p. 115120, 2022.
- [45] U. G. Wegst, "Bioinspired structural materials," *Nat Mater*, vol. 14, no. 1, pp. 23–36, 2015.
- [46] A. Panesar, M. Abdi, D. Hickman, and I. Ashcroft, "Strategies for functionally graded lattice structures derived using topology optimisation for Additive Manufacturing," *Addit Manuf*, vol. 19, Nov. 2017, doi: 10.1016/j.addma.2017.11.008.
- [47] T. A. Schaedler, "Ultralight metallic microlattices," *Science (1979)*, vol. 334, pp. 962–965, 2011.
- [48] L. R. and J. R. G. Meza, "Mechanical characterization of hollow ceramic nanolattices," *J Mater Sci*, vol. 49, pp. 2496–2508, 2014.
- [49] L. R. , S. D. and J. R. G. Meza, "Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices," *Science (1979)*, vol. 345, pp. 1322–1326, 2014.
- [50] L. J. Gibson, "Cellular solids," *MRS Bull*, vol. 28, no. 4, pp. 270–274, 2003.
- [51] R. et al Smith, "Optimization of Geometric Factors in Strut-Based Lattices," *Materials Engineering Journal*, vol. 18, no. 4, pp. 45–58, 2019.
- [52] S. , et al. Altamimi, "On Stiffness, Strength, Anisotropy, and Buckling of 3D Strut- Based Lattices with Cubic Crystal Structures," *Adv Eng Mater*, p. 2101379, 2021.
- [53] S. Sarabhai, N. Letov, M. Kibsey, F. Sánchez, and Y. Zhao, "Understanding the flow and thermal characteristics of non-stochastic strut-based and surface-based lattice structures," *Mater Des*, vol. 227, p. 111787, Feb. 2023, doi: 10.1016/j.matdes.2023.111787.
- [54] O. , R. R. and R. K. A. A.-R. Al-Ketan, "Topology-mechanical property relationship of 3D printed strut, skeletal, and sheet based periodic metallic cellular materials," *Addit Manuf*, vol. 19, pp. 167–183, 2018.
- [55] S. , et al. Li, "Influence of cell shape on mechanical properties of Ti–6Al–4V meshes fabricated by electron beam melting method.," *Acta Biomater*, vol. 10, no. 10, pp. 4537–4547, 2014.
- [56] G. J. , et al. Shah, "Design for Additive Manufacturing and Investigation of Surface-Based Lattice Structures for Buckling Properties Using Experimental and Finite Element Methods.," *Materials*, vol. 15, no. 11, p. 4037, 2022.
- [57] S. C. , et al. Kapfer, "Minimal surface scaffold designs for tissue engineering.," *Biomaterials*, vol. 32, no. 29, pp. 6875–6882, 2011.
- [58] O. and R. K. A. A.-R. Al-Ketan, "Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices," *Adv Eng Mater*, vol. 21, no. 10, p. 1900524, 2019.
- [59] M. K. , et al Thompson, "Design for Additive Manufacturing: Trends, opportunities, considerations, and constraints.," *CIRP annals*, vol. 65, no. 2, pp. 737–760, 2016.
- [60] H. , et al Dommati, "A comprehensive review of recent developments in 3D printing technique for ceramic membrane fabrication for water purification," *RSC Adv*, vol. 9, no. 29, pp. 16869–16883, 2019.
- [61] J. R. McDonough, "A perspective on the current and future roles of additive manufacturing in process engineering, with an emphasis on heat transfer," *Thermal*

- Science and Engineering Progress*, vol. 19, p. 100594, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100594>.
- [62] S. D. and S. N. Nath, "An overview of additive manufacturing of polymers and associated composites," *Polymers (Basel)*, vol. 12, no. 11, p. 2719, 2020.
- [63] Y. L. , et al Tee, "PolyJet 3D printing of composite materials: experimental and modelling approach," *Jom*, vol. 72, no. 3, pp. 1105–1117, 2020.
- [64] B. , et al. Soundararajan, "Review on modeling techniques for powder bed fusion processes based on physical principles," *Addit Manuf*, vol. 47, p. 102336, 2021.
- [65] K. , et al. Bartsch, "Material modeling of Ti–6Al–4V alloy processed by laser powder bed fusion for application in macro-scale process simulation," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 814, p. 141237, 2021.
- [66] A. , et al. Al Rashid, "Vat photopolymerization of polymers and polymer composites: Processes and applications.," *Addit Manuf*, vol. 47, p. 102279, 2021.
- [67] R. T. L. Ferreira, I. C. Amatte, T. A. Dutra, and D. Bürger, "Experimental characterization and micrography of 3D printed PLA and PLA reinforced with short carbon fibers," *Compos B Eng*, vol. 124, pp. 88–100, Sep. 2017, doi: 10.1016/J.COMPOSITESB.2017.05.013.
- [68] P. Kumar Patro, S. Kandregula, M. N. Suhail Khan, and S. Das, "Investigation of mechanical properties of 3D printed sandwich structures using PLA and ABS," *Mater Today Proc*, Sep. 2023, doi: 10.1016/J.MATPR.2023.08.366.
- [69] I. M. Alarifi, "PETG/carbon fiber composites with different structures produced by 3D printing," *Polym Test*, vol. 120, p. 107949, Mar. 2023, doi: 10.1016/J.POLYMERTESTING.2023.107949.
- [70] S. L. Rodríguez-Reyna, C. Mata, J. H. Díaz-Aguilera, H. R. Acevedo-Parra, and F. Tapia, "Mechanical properties optimization for PLA, ABS and Nylon + CF manufactured by 3D FDM printing," *Mater Today Commun*, vol. 33, p. 104774, Dec. 2022, doi: 10.1016/J.MTCOMM.2022.104774.

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter conduzido este trabalho académico com integridade. Não plagiei ou apliquei qualquer forma de uso indevido de informações ou falsificação de resultados ao longo do processo que levou à sua elaboração. Declaro que o trabalho apresentado neste documento é original e de minha autoria, não tendo sido utilizado anteriormente para nenhum outro fim. Declaro ainda que tenho pleno conhecimento do Código de Conduta Ética do P.PORTO. ISEP,

NOME: Miguel Filipe Castro Coelho

Porto, 13 de setembro de 2024