O RISCO E A COMBINAÇÃO DOS ATIVOS

Eduardo Sá e Silva
Docente do ISCAP e investigador de CEOS.PP
Doutor em Ciências Empresariais

O RISCO E A COMBINAÇÃO DE ATIVOS

O risco de um ativo não pode ser analisado independentemente do comportamento dos outros ativos que compõem uma carteira. A combinação de ativos pode, em simultâneo, assegurar a mesma rendibilidade com redução de risco. Para efeitos de análise deve-se recorrer à covariância e à correlação entre a rendibilidade dos ativos.

A covariância é dada pela seguinte fórmula:

$$COV(X,Y) = \sigma_{XY} = E\,(X_i - E(X))\,(Y_i - E(Y))$$

O coeficiente de correlação é dado pela seguinte fórmula

$$r = \sigma_{XY} / \sigma_X \sigma_Y$$

Se a covariância entre as rendibilidades de duas aplicações for positiva, isto significa que têm comportamentos semelhantes. Neste caso, se uma aumentar (diminuir) a rendibilidade num determinado período a outra também aumenta (diminui). Pelo contrário, se a covariância for negativa, então os comportamentos de rendibilidade são inversos – quando uma sobe a outra desce e vice-versa.

No entanto, a magnitude da covariância depende das unidades em que as variáveis aleatórias X e Y forem medidas. Se essas unidades mudam, então o valor da covariância também muda. Assim, a informação contida na covariância é principalmente sobre o sinal da relação entre X e Y e não sobre a sua intensidade. Isto reduz o interesse da sua aplicação e leva a que se considere uma outra medida que não depende das unidades: o coeficiente de correlação. O coeficiente de correlação é uma espécie de covariância que não depende das unidades de medida.

Tal como a covariância, se a correlação for positiva, então, ambas as rendibilidades se moverão na mesma direção. Se a correlação for negativa, significa que quando uma rendibilidade aumenta a outra diminui. No caso de ser nula, significa independência entre as mesmas. O coeficiente de correlação está compreendido entre +1 e -1

Exemplo cálculo da correlação[1]

Dados:

- 3 ativos (X, Y e Z)
- 6 períodos
- taxas de rendibilidade

		Rendibilidades					
Períodos		X	Y	Z	X- média de X	Y-média de Y	Z-média de Z
	1	6,00%	11,00%	6,00%	-2,50%	2,50%	-2,50%
	2	7,00%	10,00%	7,00%	-1,50%	1,50%	-1,50%
	3	8,00%	9,00%	8,00%	-0,50%	0,50%	-0,50%
	4	9,00%	8,00%	9,00%	0,50%	-0,50%	0,50%
	5	10,00%	7,00%	10,00%	1,50%	-1,50%	1,50%
	6	11,00%	6,00%	11,00%	2,50%	-2,50%	2,50%
Média		8,50%	8,50%	8,50%	0,00%	0,00%	0,00%
					x-y	x-z	y-z
	1	0,06%	0,06%	0,06%	-0,06%	0,06%	-0,06%
	2	0,02%	0,02%	0,02%	-0,02%	0,02%	-0,02%
	3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	4	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	5	0,02%	0,02%	0,02%	-0,02%	0,02%	-0,02%
	6	0,06%	0,06%	0,06%	-0,06%	0,06%	-0,06%
TOTAL		0,18%	0,18%	0,18%	-0,18%	0,18%	-0,18%
		Variâncias			Covariâncias		
		0,000292	0,000292	0,000292	-0,00029	0,000292	-0,00029
		desvio-padrão			coeficiente de correlação		
		1,71%	1,71%	1,71%	-1	1	-1

Os ativos X e Y apresentam uma correlação negativa perfeita entre eles, na medida em que as suas rendibilidades são completamente opostas, enquanto os ativos X e Z têm correlação positiva, pois comportam-se identicamente durante os seis anos analisados.

[1] O Excel tem funções específicos para o cálculo do desvio padrão e do coeficiente de correlação.

A rendibilidade de cada um dos ativos (8,50%) e o risco associado (σ = 1,71%) são os mesmos. De acordo, com esta premissa poder-se-ia tirar a conclusão que é indiferente aplicar em qualquer um deles. No entanto, se tivermos uma carteira diversificada, consegue-se ter a mesma rendibilidade e reduzir o risco.

Os investidores preferem, assim, uma rendibilidade esperada superior a uma rendibilidade inferior para uma dada variância da carteira. Inversamente, preferem uma variância inferior a uma variância superior da rendibilidade da carteira para um dado nível de rendibilidade. Os investidores tentam essencialmente diversificar as suas carteiras, em vez de preferirem um único ativo com rendibilidade esperada mais elevada. Em seguida apresentam-se alguns exercícios de aplicação

Retomando os dados anteriores, suponha-se agora que em vez de se investir na totalidade num dos ativos, imagine-se duas carteiras:

Carteira 1: 50% do ativo X e 50% do ativo Y

Carteira 2: 50% do ativo X e 50% do ativo Z

Período	carteira 1 50%X 50%Y	carteira 2 50%X 50%Z
1	8,50%	6,00%
2	8,50%	7,00%
3	8,50%	8,00%
4	8,50%	9,00%
5	8,50%	10,00%
6	8,50%	11,00%
Média	8,50%	8,50%
Desvio-padrão	0,00%	1,71%

Da análise do quadro, conclui-se que a combinação do ativo X com o ativo Y conduziu a um risco nulo (o coeficiente de correlação é zero); enquanto que a combinação do ativo X com o ativo Z não teve qualquer efeito na redução do risco (o coeficiente de correlação é 1). Assim, através da diversificação, os investimentos podem ser combinados de forma a reduzir o risco, não perdendo rendibilidade. Além disso, quanto maior for a correlação negativa entre os ativos, maiores os benefícios em termos de risco, resultantes da diversificação. Note-se que, em nenhum caso, a carteira diversificada terá mais risco do que o ativo mais arriscado nela incluída

Deste modo, a volatilidade de uma soma depende das correlações entre as variáveis. É a raiz quadrada da variância. A variância de uma soma não é, geralmente, a soma das variâncias. É a soma das variâncias de cada variável aleatória adicionada das covariâncias para cada par de variáveis.

Para o caso de duas variáveis:

Variância $(X + Y) = \sigma^2 (X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,COV(X,Y)$

ou

Variância $(X+Y) = \sigma^2 (X) + \sigma^2 (Y) + 2\,\rho_{XY}\,\sigma_X\sigma_Y$

Assim, se a covariância for diferente de zero, a variância da soma difere da soma das variâncias. No caso das duas variáveis serem independentes, tem-se que a covariância é igual a zero

Variância $(X+Y) = \sigma^2 (X) + \sigma^2 (Y)$

Exemplo de cálculo da variância da soma

Volatilidade (desvio-padrão) do ativo A: 2,53%

Volatilidade (desvio-padrão) do ativo B: 1,82%

O coeficiente de correlação entre os dois ativos: 38,90%

A variância da soma é:

$V(A + B) = 2{,}53\%^2 + 1{,}82\%^2 + 2 \times 38{,}90\% \times 2{,}53\% \times 1{,}82\% = 0{,}1330\%$

A volatilidade é:

$\sigma_{XY} = \sqrt{0{,}1330\%} = 3{,}6463\% < 4{,}35\%\ (2{,}53\% + 1{,}82\%)$

A volatilidade é inferior à soma das volatilidades. Esta é a essência da diversificação. Combinando riscos implica que o risco da soma, medido pela volatilidade, é menor que a soma dos riscos. Os riscos não se adicionam aritmeticamente, exceto no caso extremo quando a correlação é perfeita.

Exemplo aplicado a duas moedas

Considere-se duas moedas e a função densidade conjunta dos respetivos movimentos.

função densidade conjunta				
				PX2
X1		-4	3	Marginal
	X2			
	-5	0,2	0,1	0,3
	6	0,3	0,4	0,7
PX1 marginal		0,5	0,5	

Em que X1 e X2 representam duas moedas

X1: -4 e 2 representam os movimentos em % da moeda X1

X2: -5 e 6 representam os movimentos em % da moeda X2

0,2 – representa a probabilidade conjunta do movimento em X1 ser de -4 e do movimento em X2 de -5. Os restantes valores 0,1, 0,3 e 0,4 representam as outras probabilidades conjuntas

PX1 marginal: 0,5 e 0,5 as densidades marginais da moeda X1

PX2 marginal: 0,3 e 0,7 as densidades marginais da moeda X2

Cálculo do desvio-padrão da moeda X1

Movimento	f(x1) probab.	x1 f(x1)	$(x1-\bar{x}1)$^2f(x1)
-4	0,5	-2	6,125
3	0,5	1,5	6,125
Soma	1	-0,5	12,25
	desvio-padrão X1		3,5

Cálculo do desvio-padrão da moeda X2

Movimento	f(x2) probab.	x2 f(x2)	$(x2-\bar{x}2)$^2f(x2)
-5	0,3	-1,5	17,787
6	0,7	4,2	7,623
Soma	1	2,7	25,41
	desvio-padrão X2		5,04

O cálculo da covariância e do coeficiente de correlação

Covariância			
X1		-4	3
X2			
	-5	5,39	-2,70
	6	-3,47	4,62
Covariância			3,85
coeficiente de correlação			0,22

Se porventura em vez de investir a totalidade na moeda X1 ou na moeda X2, o que aconteceria à volatilidade (risco) se houvesse um investimento de 60% na moeda X1 e 40% na moeda X2?

A apresentação do cálculo pode ser efetuada através da utilização de matrizes:

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12,25 & 3,85 \\ 3,85 & 25,41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix} = 10,3236$$

= 10,3236

e

$\sigma = 3,2130$

O que revela que a diversificação reduz o risco. Repare-se que o $\sigma_1 = 3,50$ e $\sigma_2 = 5,04$

Deste modo:

A variância de rentabilidade de uma carteira não tem a ver só com a variância (desvio-padrão) da rentabilidade de cada título,mas igualmente com a forma como as rentabilidades dos títulos se relacionam

Risco associado à carteira de 2 títulos (para situações mais complexas estender a fórmula)

$$\sigma_{AB} = \sqrt{p^2\,\sigma^2_A + (1-p)^2\,\sigma^2_B + 2\,p\,(1-p)\,\rho_{AB}\,\sigma_A\,\sigma_B}$$

em que:

ρ = correlação entre os dois activos