



OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL RECORRENDO A MÉTODOS SEM MALHA ? ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS

JOEL DOMINGOS FONTES LOPES

julho de 2020

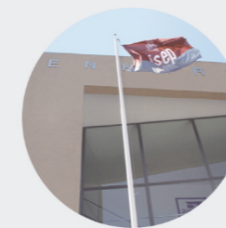
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

isep



isep Instituto Superior de Engenharia do Porto

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL RECORRENDO A MÉTODOS SEM MALHA ? ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL RECORRENDO A MÉTODOS SEM MALHA – ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS

JOEL DOMINGOS FONTES LOPES

Junho de 2020

JOEL DOMINGOS FONTES LOPES
Junho de 2020

POLITÉCNICO DO PORTO

Instituto Superior de Engenharia do Porto ● Rua Dr. António Bernardino de Almeida, 431 ● 4249-015 Porto
Tel. +351 228 340 500 ● Fax +351 228 321 159 ● mail@isep.ipp.pt ● www.isep.ipp.pt



OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL RECORRENDO A MÉTODOS SEM MALHA – ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS

Joel Domingos Fontes Lopes
1150954

2020

Instituto Superior de Engenharia do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica



OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL RECORRENDO A MÉTODOS SEM MALHA – ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS

Joel Domingos Fontes Lopes
1150954

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação do Professor Doutor Jorge Américo Oliveira Pinto Belinha.

2020

Instituto Superior de Engenharia do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica



JÚRI

Presidente

Raul Duarte Salgueiral Gomes Campilho, Ph.D.

Professor Adjunto, Departamento de Engenharia Mecânica

Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Instituto Politécnico do Porto (IPP)

Orientador

Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha, Ph.D.

Professor Adjunto, Departamento de Engenharia Mecânica

Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Instituto Politécnico do Porto (IPP)

Arguente

Marco Paulo Lages Parente, Ph.D.

Professor Auxiliar, Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao Professor Doutor Jorge Belinha, meu orientador, não só pela admirável capacidade de resolução e esclarecimento dos problemas e dúvidas que foram surgindo, como também pela disponibilidade demonstrada e empenho constante no meu processo de aprendizagem e evolução. Quero ainda agradecer a oportunidade que me deu de realizar esta dissertação, que permitiu aprofundar e expandir os meus conhecimentos, bem como desenvolver o pensamento crítico e fomentar a resiliência.

À minha família quero agradecer o apoio, a motivação dada pelo exemplo e as condições que me proporcionaram durante a minha vida académica, fundamentais para a conclusão de uma das etapas mais importantes.

A ti Cláudia quero agradecer o amor e companheirismo incomparável, assim como o apoio e encorajamento nas fases mais tempestuosas. A conclusão deste capítulo seria possível sem ti, mas não o faria de outra forma.

Termino esta fase da minha vida com uma certeza reforçada de que somos o resultado dos pequenos esforços diários e das pessoas que nos mantêm no caminho certo quando os dias são mais longos.

AGRADECIMENTOS INSTITUCIONAIS

O autor reconhece e agradece as condições de trabalho oferecidas pelo departamento de engenharia mecânica (DEM) do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP-IPP) e pelo projeto MIT-Portugal “MITEXPL / ISF / 0084/2017”, financiado pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (EUA) e "Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior - Fundação para a Ciência e a Tecnologia" (Portugal) e projeto UIDB/50022/2020 and “205_596864527 - Assisting the prevention and control of COVID-19 with 3D printing solutions” through “Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior - Fundação para a Ciência e a Tecnologia” (Portugal).

Além disso, o autor agradece o financiamento do Projeto NORTE-01-0145-FEDER-000022 - SciTech - Ciência e Tecnologia para Indústrias Competitivas e Sustentáveis, co-financiado pelo Programa Operacional Regional do Norte (NORTE2020), através do Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER)

Por fim, o autor reconhece a colaboração sinérgica com os colaboradores do “Computational Mechanics Research Laboratory CMech-Lab” (ISEP / FEUP / INEGI) e seu diretor, Prof.Dr. Jorge Belinha e seus consultores seniores, Prof.Dr. Renato Natal Jorge e Prof.Dr. Lúcia Dinis.

PALAVRAS CHAVE

Otimização estrutural, otimização topológica, Métodos sem Malha, Indústria automóvel.

RESUMO

A aplicação de métodos numéricos apresenta-se como uma ferramenta que permite, não só reduzir o impacto ambiental e consumo de energia, como também tornar a otimização estrutural mais eficiente. Pode ser aplicado em várias indústrias, como a automóvel e aeronáutica, e contribuir para a redução de custos e economia do material. Tendo em conta as vantagens encontradas na literatura quanto à utilização destes métodos, torna-se pertinente a investigação nesta área e a avaliação do desempenho de métodos numéricos no processo de otimização estrutural. Assim sendo, a presente dissertação pretende estudar a extensão da aplicação dos Métodos sem Malha à otimização estrutural e comparar a sua utilização com o Método de Elementos Finitos (MEF), através do *Finite Element and Meshless Methods Analysis Software* (FEMAS).

O MEF é usualmente utilizado na literatura para a resolução de problemas estruturais, mas, nos últimos anos, os Métodos sem Malha têm assumido uma crescente importância ao nível da otimização estrutural. O MEF é um método numérico que se baseia na divisão do domínio através de um conjunto de elementos de forma a calcular as variáveis de campo. No presente estudo selecionaram-se os seguintes Métodos sem Malha: o NRPIM e o RPIM. O primeiro é um método numérico que necessita de uma malha de integração de fundo de forma a obter as variáveis desconhecidas, enquanto o NRPIM apenas necessita de um conjunto de nós distribuído pelo domínio. Todos os conceitos inerentes aos métodos utilizados serão explicados ao longo da dissertação, assim como os fundamentos de mecânica dos sólidos e dos critérios de otimização.

Para comparar o desempenho de cada método selecionaram-se dois exemplos bidimensionais presentes na literatura, aos quais foram aplicados vários parâmetros: tipo de discretização, critério de otimização e Taxa de Remoção (TR). Pela análise dos resultados é possível verificar que a utilização destes parâmetros permite a obter soluções com melhor performance estrutural e soluções semelhantes com a literatura. Após estabelecer os parâmetros ótimos, procedeu-se à sua aplicação a três problemas no âmbito da indústria automóvel: um travão de mão hidráulico, um suporte da

blindagem do veio de transmissão e o suporte do painel lateral. A aplicação dos métodos numéricos a estes exemplos permitiu a diminuição da massa da estrutura e a manutenção dos requisitos de tensão máxima instalada e de rigidez, o que representa benefícios para a indústria automóvel e um menor impacto ambiental.

Apesar do MEF ser um método largamente difundido no ramo da otimização estrutural e cuja obtenção de bons resultados está amplamente comprovada, foi possível verificar que o RPIM e o NNRPIM também possibilitam a obtenção de geometrias com boas propriedades mecânicas e semelhantes às geometrias obtidas pelo MEF.

No entanto, através da utilização do RPIM não foi possível estabelecer soluções com um bom desempenho estrutural em todos os exemplos analisados. Por outro lado, as geometrias obtidas pelo NNRPIM apresentam um desempenho semelhante ao MEF, em alguns casos superior, apesar de que para este método as geometrias apresentam uma complexidade superior, o que resulta numa dificuldade acrescida no fabrico das estruturas. Numa primeira análise, os resultados indicam que a utilização do NNRPIM apresenta resultados mais otimizados e que os Métodos sem Malha são tão eficientes como o MEF. No entanto, é necessária a elaboração de estudos futuros neste âmbito, que continuem a investigar a pertinência de utilizar os Métodos sem Malha no processo de otimização estrutural.

KEYWORDS

Structural optimization, topology optimization, meshless methods, meshfree methods automobile industry.

ABSTRACT

The application of numerical methods presents itself as a tool that allows not only to reduce the environmental impact and energy consumption, but also to make structural optimization more efficient. It can be applied in various industries, such as automotive and aeronautics, and contribute to cost reduction and material savings. Considering the advantages found in the literature regarding the use of these methods, it is pertinent to research this area and evaluate the performance of the numerical methods in the structural optimization process. Therefore, this dissertation intends to study the extension of the application of Meshless Methods to structural optimization and to compare its use with the Finite Element Method (MEF), through the Finite Element and Meshless Methods Analysis Software (FEMAS).

MEF is commonly used in the literature to solve structural problems, but, in recent years, Meshless Methods have assumed an increasing importance in terms of structural optimization. MEF is a numerical method that is based on the division of the domain through a set of elements to calculate the unknown variables. In the present study, NNRPIM and RPIM were the selected Meshless Methods. The first one is a numerical method that requires a background integration mesh to obtain the unknown variables, while the NNRPIM only needs a set of nodes distributed by the domain. All the concepts inherent to both meshless methods will be explained throughout the dissertation, as well as the fundamentals of solid mechanics and optimization criteria.

To compare the performance of each method, two 2D examples were selected from the literature. To those examples several parameters were applied: type of discretization, optimization criteria and Removal Rate (RR). From the analysis of the results, it is possible to verify that the use of these parameters allows to obtain solutions with better structural performance and solutions similar to the literature solutions.

After establishing the optimal parameters, three problems were applied within the automotive industry: a hydraulic handbrake, a support for the drive shaft shield and the side panel support. The application of numerical methods to these examples allowed the reduction of the mass of the structure and the maintenance of the maximum installed tension and stiffness requirements, which represents benefits for the automotive industry and a lower environmental impact.

Although MEF is a widely used method in the field of structural optimization, with a wide reported history in accuracy and robustness, it was possible to verify that RPIM and NNRPIM also allow to obtain geometries with good structural performances and similar to those obtained with MEF.

However, RPIM did not allowed to obtain solutions with a good structural performance in all the analyzed examples. On the other hand, the geometries obtained by NNRPIM present a performance similar to the MEF, in some cases superior, although for this method the geometries present a higher complexity, which results in an increased difficulty in the fabrication of the structures. In a first analysis, the results indicate that the use of NNRPIM presents more optimized results and that the Meshless Methods are as efficient as the MEF. However, it is necessary to prepare future studies in this area that continue to investigate the relevance of using meshless methods in the structural optimization process.

LISTA DE ABREVIATURAS

Lista de Abreviaturas

AESO	<i>Additive Evolutionary Structural Optimization</i>
BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
CSRBF	<i>Compactly Supported Radial Basis Function</i>
DEM	<i>Diffuse Element Method</i>
EFGM	<i>Element Free Galerkin Method</i>
EPT	Estado Plano de Tensão
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
FEMAS	<i>Finite Element and Meshless Methods Analysis</i>
HBTO	<i>Homogenization Based Topology Optimization</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MESO	<i>Morphologic Evolutionary Structural Optimization</i>
MFEM	<i>Meshless Finite Element Method</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
MLS	<i>Moving Least Square approximants</i>
NEM	<i>Natural Element Method</i>
NNFEM	<i>Natural Neighbour Finite Element Method</i>
NNPG	<i>Natural Neighbour Petrov-Galerkin Method</i>
NNRPIM	<i>Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method</i>
PIM	<i>Point Interpolation Method</i>
RBf	<i>Radial Basis function</i>
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i>
RPI	<i>Radial Point Interpolation</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material Penalization</i>
SPH	<i>Smooth Particle Hydrodynamics</i>
TR	Taxa de Remoção

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 – A DEFINIÇÃO DO DOMÍNIO. B DISTRIBUIÇÃO REGULAR DO NÓS. C DISTRIBUIÇÃO IRREGULAR DOS NÓS [10]	34
FIGURA 2 – A MALHA DE INTEGRAÇÃO GAUSSIANA AJUSTADA. B MALHA DE INTEGRAÇÃO GAUSSIANA GERAL. C INTEGRAÇÃO NODAL ATRAVÉS DO DIAGRAMA DE VORONOÏ [10]	35
FIGURA 3 – A QUADRILÁTERO INICIAL DA MALHA DE INTEGRAÇÃO. B TRANSFORMAÇÃO DO QUADRILÁTERO INICIAL NUM QUADRADO ISOPARAMÉTRICO. C RETORNO À FORMA INICIAL DO QUADRILÁTERO [10]	36
FIGURA 4 – A DISTRIBUIÇÃO NODAL INICIAL. B PRIMEIRO PLANO DE TESTE. C SEGUNDO PLANO DE TESTE. D CÉLULA FINAL CONTENDO APENAS OS VIZINHOS NATURAIS. E CÉLULA DE VORONOÏ V_0 F DIAGRAMA DE VORONOÏ [10].	37
FIGURA 5 – A DIAGRAMA DE VORONOÏ INICIAL. B TRIANGULAÇÃO <i>DELAUNAY</i> [10]	38
FIGURA 6 – A DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA COM DIFERENTES TIPOS DE FORMA E TAMANHO B DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA COM FORMA E TAMANHO UNIFORME [10]	38
FIGURA 7 – A DISTRIBUIÇÃO INICIAL DE NÓS DE POTENCIAIS VIZINHOS NATURAIS DO NÓ n_0 B PRIMEIRO PLANO DE TESTE C SEGUNDO PLANO DE TESTE D CÉLULA FINAL, CONTENDO APENAS OS VIZINHOS NATURAIS DO n_0 E CÉLULA DE VORONOÏ DO n_0 F DIAGRAMA DE VORONOÏ	39
FIGURA 8 – TIPOS DE CÉLULAS DE INFLUÊNCIA: A CÉLULA DE INFLUÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM B CÉLULA DE INFLUÊNCIA DE SEGUNDA ORDEM	40
FIGURA 9 – CUBO DAS TENSÕES [11]	43
FIGURA 10 – A DIMENSÕES DO DOMÍNIO. B CONDIÇÕES FRONTEIRA NATURAIS E ESSENCIAIS.	55
FIGURA 11 – A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ATRAVÉS DE ELEMENTOS TRIANGULARES. B SOLUÇÃO DO MEF APÓS 24 ITERAÇÕES. C SOLUÇÃO DO MEF APÓS 33 ITERAÇÕES UTILIZANDO A TR DE 5%. D DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR ELEMENTOS QUADRANGULARES. E SOLUÇÃO DO MEF APÓS 25 ITERAÇÕES. F SOLUÇÃO DO MEF APÓS 27 ITERAÇÕES UTILIZANDO A TR DE 5%.	56
FIGURA 12 – A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ATRAVÉS DE CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO TRIANGULARES. B SOLUÇÃO DO RPIM APÓS 24 ITERAÇÕES. C SOLUÇÃO DO RPIM APÓS 28 ITERAÇÕES UTILIZANDO A TR DE 5%. D DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES. E SOLUÇÃO DO RPIM APÓS X ITERAÇÕES. F SOLUÇÃO DO RPIM APÓS X ITERAÇÕES UTILIZANDO A TR DE 5%.	57
FIGURA 13 – A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO ATRAVÉS DE CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO TRIANGULARES. B SOLUÇÃO DO RPIM APÓS 24 ITERAÇÕES. C SOLUÇÃO DO RPIM APÓS 28 ITERAÇÕES UTILIZANDO A TR DE 5%. D DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES. E SOLUÇÃO DO RPIM APÓS X ITERAÇÕES. F SOLUÇÃO DO RPIM APÓS X ITERAÇÕES UTILIZANDO A TR DE 5%.	58
FIGURA 14 – A DIMENSÕES DO DOMÍNIO. B CONDIÇÕES FRONTEIRA NATURAIS E ESSENCIAIS.	89
FIGURA 15 – A GEOMETRIA OBTIDA ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO MEF. B GEOMETRIA OBTIDA ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO RPIM. C GEOMETRIA OBTIDA ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO NNRPIM. D GEOMETRIA REDESENHADA COM BASE NA SOLUÇÃO	

OBTIDA PELO MEF E PELO PRIM. E GEOMETRIA REDESENHADA COM BASE NA SOLUÇÃO OBTIDA PELO NNPRIM.	96
FIGURA 16 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA	96
FIGURA 17 – A DIMENSÕES DO DOMÍNIO. B CONDIÇÕES FRONTEIRA NATURAIS E ESSENCIAIS.	99
FIGURA 18 – DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR ELEMENTOS QUADRANGULARES	100
FIGURA 19 – DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DA GEOMETRIA OTIMIZADA POR ELEMENTOS TRIANGULARES	101
FIGURA 20 – A GEOMETRIA MODELO [W1]. B DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DA GEOMETRIA DESENHADA.	102
FIGURA 21 – GEOMETRIA OTIMIZADA DO TRAVÃO DE MÃO HIDRÁULICO	104
FIGURA 22 – A GEOMETRIA MODELO [W2]. B DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DA GEOMETRIA DESENHADA	108
FIGURA 23 – GEOMETRIA OTIMIZADA REDESENHADA	109
FIGURA 24 – A GEOMETRIA MODELO[W4]. B DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DA GEOMETRIA DESENHADA.	111
FIGURA 25 – GEOMETRIA OTIMIZADA REDESENHADA	112
FIGURA 26 – GEOMETRIA REDESENHADA À SEMELHANÇA DA SOLUÇÃO OBTIDA ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	114

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES.....	59
TABELA 2 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	61
TABELA 3 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES.....	61
TABELA 4 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	62
TABELA 5 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES.....	63
TABELA 6 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	64
TABELA 7 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES.....	65
TABELA 8 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO MEF PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 ELEMENTOS QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	66
TABELA 9 – COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES OBTIDAS PELO CRITÉRIO DE VON MISES E PELO CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO UTILIZANDO O MEF	66
TABELA 10 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	67
TABELA 11 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	68
TABELA 12 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	69
TABELA 13 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	69

TABELA 14 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	70
TABELA 15 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	71
TABELA 16 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	72
TABELA 17 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO RPIM PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	72
TABELA 18 – COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES OBTIDAS PELO CRITÉRIO DE VON MISES E PELO CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO UTILIZANDO O RPIM	73
TABELA 19 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	74
TABELA 20 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	75
TABELA 21 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	76
TABELA 22 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	76
TABELA 23 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	77
TABELA 24 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	78
TABELA 25 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE VON MISES.....	78
TABELA 26 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	79

TABELA 27 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	80
TABELA 28 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 32X20 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	81
TABELA 29 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	81
TABELA 30 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 48X30 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	82
TABELA 31 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	83
TABELA 32 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 64X40 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	84
TABELA 33 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES	85
TABELA 34 – ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL APLICADOS ATRAVÉS DO NNRPIM CONSIDERANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS NATURAIS, PARA UM DOMÍNIO DISCRETIZADO POR 80X50 CÉLULAS DE INTEGRAÇÃO QUADRANGULARES IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	86
TABELA 35 – COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES OBTIDAS, IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES, ATRAVÉS DO NNRPIM UTILIZANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS DO NNRPIM UTILIZANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS	86
TABELA 36 – COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES OBTIDAS, IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO, ATRAVÉS DO NNRPIM UTILIZANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS DO NNRPIM UTILIZANDO OS SEGUNDOS VIZINHOS	87
TABELA 37 – COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES OBTIDAS, UTILIZANDO OS PRIMEIROS VIZINHOS NATURAIS DO NNRPIM, IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES E O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	88
TABELA 38 – SOLUÇÕES OBTIDAS ATRAVÉS DO MEF PARA A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR 60X60 ELEMENTOS QUADRANGULARES, IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	90
TABELA 39 – SOLUÇÕES OBTIDAS ATRAVÉS DO MEF PARA A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR 80X80 ELEMENTOS QUADRANGULARES, IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	91

TABELA 40 – SOLUÇÕES OBTIDAS ATRAVÉS DO RPIM PARA A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR 60X60 ELEMENTOS QUADRANGULARES, IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES.....	92
TABELA 41 – SOLUÇÕES OBTIDAS ATRAVÉS DO RPIM PARA A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR 80X80 ELEMENTOS QUADRANGULARES, IMPONDO O CRITÉRIO DE VON MISES.....	93
TABELA 42 – SOLUÇÕES OBTIDAS ATRAVÉS DO NNRPIM PARA A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR 60X60 ELEMENTOS QUADRANGULARES, IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	94
TABELA 43 – SOLUÇÕES OBTIDAS ATRAVÉS DO NNRPIM PARA A DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR 80X80 ELEMENTOS QUADRANGULARES, IMPONDO O CRITÉRIO DA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.....	95
TABELA 44 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DAS GEOMETRIAS NÃO OTIMIZADA E OTIMIZADA ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM.....	98
TABELA 45 – GEOMETRIAS OBTIDAS ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO MEF, RPIM E NNRPIM	100
TABELA 46 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DAS GEOMETRIAS NÃO OTIMIZADA E OTIMIZADA ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM.....	101
TABELA 47 – GEOMETRIAS OBTIDAS ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO MEF, RPIM E NNRPIM	103
TABELA 48 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DAS GEOMETRIAS NÃO OTIMIZADA E OTIMIZADA ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM.....	104
TABELA 49 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DAS GEOMETRIAS OTIMIZADAS MODIFICADAS ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM.....	106
TABELA 50 – GEOMETRIAS OBTIDAS ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO MEF, RPIM E NNRPIM	109
TABELA 51 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DAS GEOMETRIAS NÃO OTIMIZADA E OTIMIZADA ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM.....	110
TABELA 52 – GEOMETRIAS OBTIDAS ATRAVÉS DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL REALIZADO PELO MEF, RPIM E NNRPIM	111
TABELA 53 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DAS GEOMETRIAS NÃO OTIMIZADA E OTIMIZADA ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM.....	113
TABELA 54 – ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA DA GEOMETRIA OTIMIZADA ATRAVÉS DO MEF, RPIM E NNRPIM	114

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	ENQUADRAMENTO	27
1.2	MOTIVAÇÃO.....	27
1.3	OBJETIVOS.....	28
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	29
2	MÉTODOS NUMÉRICOS	33
2.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	33
2.2	MÉTODOS SEM MALHA	33
2.2.1	ESTADO DA ARTE.....	33
2.2.2	PROCEDIMENTO GERAL DOS MÉTODOS SEM MALHA	34
2.2.3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	36
2.2.3.1	RPIM.....	36
2.2.3.2	NNRPIM	36
2.2.4	DOMÍNIOS DE INFLUÊNCIA E CONETIVIDADE NODAL	38
2.2.4.1	RPIM.....	38
2.2.4.2	NNRPPIM	38
2.2.5	FUNÇÕES DE FORMA.....	40
3	MECÂNICA DOS SÓLIDOS.....	42
3.1	TEORIA DA ELASTICIDADE.....	42
3.1.1	RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO.....	43
3.1.2	RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO	44
3.2	FORMA FRACA DE GALERKIN	44
3.2.1	DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	46
4	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	47

4.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	47
4.2	MÉTODOS SEM MALHA	49
5	DESENVOLVIMENTO	55
5.1	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	55
5.2	EXEMPLOS NUMÉRICOS	55
5.2.1	Viga em consola	55
5.2.1.1	Influência do tipo de discretização do domínio	56
5.2.1.2	Influência dos parâmetros de otimização e critérios de otimização	58
5.2.1.2.1	Método dos Elementos finitos	59
5.2.1.2.2	Radial Point Interpolation Method	67
5.2.1.2.3	Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method (primeiros vizinhos naturais) 73	
5.2.1.2.4	Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method (segundos vizinhos naturais) 80	
5.2.2	Viga em formato de L	88
5.2.2.1	Método dos Elementos Finitos	89
5.2.2.2	Radial Point Interpolation Method	91
5.2.2.3	Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method	93
5.2.3	Viga em formato de L com um furo.....	99
5.2.4	Travão de mão hidráulico	102
5.2.5	Suporte da blindagem do veio de transmissão	108
5.2.6	Suporte painel lateral	110
6	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	117
6.1	CONCLUSÕES.....	117
6.2	PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS	119
7	BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO.....	123
7.1	REFERÊNCIAS.....	123
7.1.1	WEBSITES.....	128
8	ANEXOS.....	131
8.1	ANEXO1 – ROTINA MATLAB PARA TRANSCRIÇÃO DE DADOS	131

INTRODUÇÃO

- 1.1 ENQUADRAMENTO
- 1.2 MOTIVAÇÃO
- 1.3 OBJETIVOS
- 1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

1 INTRODUÇÃO

1.1 ENQUADRAMENTO

Segundo um estudo realizado por González et al. [1], as emissões de Dióxido de carbono (CO₂) na Europa por parte do setor dos transportes tem vindo a aumentar, sendo que entre 1990 e 2015 o total de emissões aumentou 13%, de um total de 32% para 45%. Ao analisar o impacto da emissão de CO₂ pelo setor de transportes rodoviários no valor global de emissões, concluiu-se que, em 2019, este setor foi responsável por 92% das emissões de CO₂. Nesse sentido, de forma a controlar o elevado nível de emissões poluentes, a União Europeia criou uma regulamentação que restringe o limite de emissões desse gás para 95gr/km para os transportes rodoviários [2]. Uma vez que contribuem significativamente para o aquecimento global, é importante e prioritário controlar e diminuir as emissões de CO₂ para a atmosfera.

De acordo com os estudos, [3,4], a emissão de CO₂ está diretamente ligada ao consumo de combustível que, por sua vez, pode ser reduzido através da diminuição das massas dos veículos. Assim sendo, a indústria automóvel é diariamente desafiada a desenvolver soluções que representam o melhor balanço entre o desempenho estrutural, o custo de fabricação e as normas ambientais. Através da otimização estrutural é possível encontrar uma solução de geometria ideal que garante o cumprimento das especificações de baixo peso e custo, mas também a resistência aos esforços externos [5].

Nas últimas décadas desenvolveram-se métodos numéricos aplicados à análise estrutural que permitem prever os campos de deslocamentos, deformações e tensões. Estes métodos podem ser divididos em duas classes: métodos de discretização baseados em malhas estruturadas - como é o caso do Método dos Elementos Finitos (MEF) - e métodos de discretização sem malha estruturada - como é o caso dos Métodos sem Malha.

Futuramente, no âmbito da dissertação de mestrado, serão analisados componentes automóveis através dos Métodos sem Malha - o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) e o *Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method* (NNRPIM) -, cujos resultados obtidos serão comparados com o MEF. Desta forma pretende-se expandir o campo de aplicação dos Métodos sem Malha à otimização estrutural.

1.2 MOTIVAÇÃO

A procura de soluções mais sustentáveis, com um menor impacto ambiental, tem-se tornado o foco da indústria em geral. Na indústria automóvel, a redução do consumo

de combustíveis fósseis e a diminuição do material desperdiçado em fabrico representa uma diminuição direta na energia consumida. Adicionalmente, estima-se que a redução de 1% do peso total do veículo representa uma redução do consumo de combustível entre 0.6% a 1% [6]. A aplicação dos métodos numéricos à otimização estrutural permite identificar as zonas que se encontram sobredimensionadas e, se necessário, reduzir e/ou eliminar material dessas zonas. Assim sendo, a aplicação de métodos numéricos é uma ferramenta que permite não só tornar a otimização estrutural mais eficiente, como também reduzir o consumo de energia.

Recentemente, a análise numérica tem-se tornado mais popular [7], sendo que atualmente, o MEF é o método discreto mais utilizado pela comunidade científica e pela indústria e, por consequência, o mais utilizado em análise e otimização estrutural [8]. Na otimização estrutural, o MEF é capaz de resolver problemas que apresentam uma geometria complexa, tornando-se assim uma ferramenta muito poderosa e procurada.

No entanto, é importante referir que existem outros métodos, para além do MEF, que foram aplicados à otimização estrutural com sucesso, como os Métodos sem Malha [7], que apresentam claras vantagens ao nível da análise de geometrias complexas durante o processo de otimização estrutural.

Contudo, na literatura estão disponíveis ainda poucos estudos que utilizam e exploram a aplicação dos Métodos sem Malha na área da otimização estrutural. No entanto, tendo em conta as vantagens demonstradas nesses poucos estudos, torna-se pertinente a investigação nesta área. Considerando ainda que os Métodos sem Malha selecionados para este estudo – RPIM [9] e NNRPIM [10] – nunca foram aplicados à otimização estrutural, torna-se ainda mais relevante a avaliação do desempenho destes métodos no processo de otimização estrutural.

1.3 OBJETIVOS

O principal objetivo da presente dissertação consiste no estudo e compreensão da literatura existente em relação aos métodos numéricos e à otimização estrutural. De forma a atingir o objetivo principal foram definidos os seguintes objetivos secundários:

- Análise de problemas de otimização estrutural, bidimensionais, através de um *software* de simulação numérica utilizando o RPIM e o NNRPIM – *Finite Element and Meshless Methods Analysis Software* (FEMAS) – disponível em “cmech.webs.com”;
- Comparação da eficiência dos Métodos sem Malha em estudo com a eficiência do MEF;
- Compressão do procedimento geral dos Métodos sem Malha e sua formulação.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos. No Capítulo 1 é apresentada uma breve introdução ao tema, a motivação deste estudo assim como os grandes objetivos. No capítulo 2, após uma breve descrição relativa ao MEF, a formulação dos Métodos sem Malha é apresentada. No capítulo 3, a teoria da elasticidade e a sua combinação com formulações discretas é apresentada. No capítulo 4, é apresentada uma revisão da literatura relativa aos métodos de otimização e ainda à sua combinação com o MEF e com os Métodos sem Malha. No capítulo 5 estão descritos os exemplos numéricos da literatura analisados bem como a resolução de três exemplos ligados ao ramo automóvel. No capítulo 6 são descritas as conclusões relativas à apresentação dissertação, assim como os trabalhos futuros relativamente ao tema em estudo.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.2 MÉTODOS SEM MALHA

3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE

3.2 FORMA FRACA DE *GALERKIN*

4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.2 MÉTODOS SEM MALHA

2 MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF é um método numérico muito utilizado na indústria e na investigação científica [11], cuja rápida evolução resulta da vasta disponibilidade de múltiplos softwares e do aparecimento dos computadores pessoais.

Neste método, o domínio é dividido em elementos finitos ligados entre si, formando assim uma malha que para além de conter os elementos, contém também as relações de conectividade entre cada elemento [12]. No entanto, em análises de problemas de grandes deformações, devido à rígida conexão entre os elementos, há uma distorção da malha, o que torna a malha de elementos uma limitação do MEF, uma vez que é necessário refazer a malha sempre que há distorção significativa da mesma [12].

De forma a colmatar esta desvantagem surgem os Métodos sem Malha que propõem uma formulação independente da malha, em que todas as conexões são estabelecidas exclusivamente entre os nós [12].

2.2 MÉTODOS SEM MALHA

Ao longo dos anos tem vindo a aumentar o interesse da comunidade da engenharia estrutural nos Métodos sem Malha, para a resolução de equações diferenciais. Neste método, os nós são arbitrariamente distribuídos pelo domínio do problema e a unidade básica de conectividade nodal - os domínios de influência - devem-se sobrepor, ao contrário da regra do MEF de não sobreposição de elementos [10].

2.2.1 ESTADO DA ARTE

O desenvolvimento dos Métodos sem Malha tem como principal objetivo reduzir os erros relacionados com a geração da malha [13], sendo que os primeiros métodos utilizavam funções de aproximação, o que originava soluções mais suaves. O *Diffuse Element Method* (DEM) [14] foi o primeiro Método sem Malha a utilizar o *Moving Least Square approximants* (MLS), proposto por Lancaster e Salkauskas [15], para a criação das funções de aproximação. Belytschko desenvolveu o DEM e criou um dos Métodos sem Malha mais populares, o *Element Free Galerkin Method* (EFGM) [16], que usa uma malha de integração independente da malha nodal. Por volta de 1977, Gingold & Monaghan, [17], descreve pela primeira vez o *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH), sendo que mais tarde originou o *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) [18].

Existe ainda uma outra classe de Métodos sem Malha, os baseados na forma fraca local, como o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) [19], sendo que a principal

diferença entre o MLPG e os outros métodos que utilizam a forma fraca global é que no MPLG são gerados vários subdomínios sobrepostos entre si e na forma fraca global é criado apenas um domínio.

A aplicação computacional de métodos aproximados à mecânica dos sólidos revelou-se um sucesso, apesar de ainda existirem algumas limitações. A principal limitação reside na dificuldade da aplicação das condições fronteira, essenciais e naturais, devido à falta da propriedade de *delta* Kronecker nas funções de aproximação [10]. A investigação de técnicas que permitam a resolução dessa limitação, conduziu ao desenvolvimento de métodos que utilizam funções de interpolação, como o *Point Assembly Method* [20], *Meshless Finite Element Method* (MFEM) [21], *Natural Neighbour Finite Element Method* (NNFEM) e o *Point Interpolation Method* (PIM). No PIM, as funções de aproximação satisfazem a condição de *delta* Kronecker, o que facilita a aplicação das condições fronteira essenciais e naturais [9]. No entanto, o PIM apresenta alguns problemas de singularidade de interpolação, uma vez que utiliza funções de base polinomial [22]. De forma a resolver os problemas de interpolação apresentados pelo PIM, foi desenvolvido o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) [9].

Da combinação do RPIM com o *Natural Element Method* (NEM) [23], desenvolveu-se o NNRPIM [10], que é considerado um verdadeiro método sem malha uma vez que a malha de integração de fundo é independente da malha nodal.

2.2.2 PROCEDIMENTO GERAL DOS MÉTODOS SEM MALHA

À semelhança do MEF e de outros métodos numéricos, é importante definir a geometria do problema, de forma a estabelecer o domínio sólido e o seu contorno, seguido da identificação das condições fronteira essenciais e naturais, **Figura 1a**. No passo seguinte, o domínio do problema, incluindo a sua fronteira, é dividido num conjunto de nós distribuídos de forma regular, **Figura 1b**, ou irregular [10], **Figura 1c**.

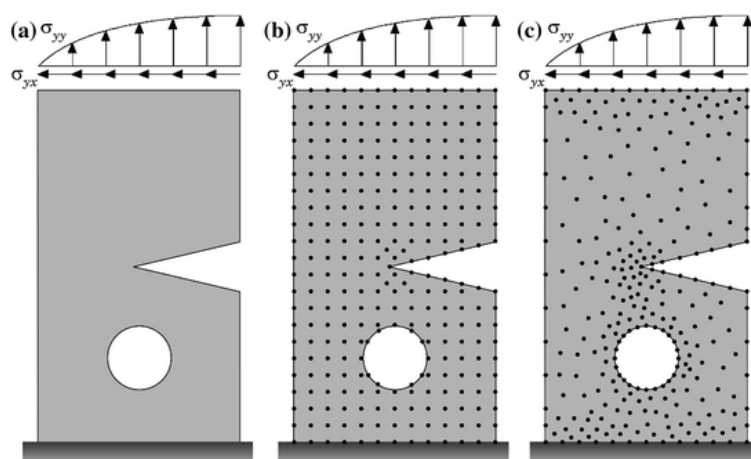


Figura 1 – a Definição do domínio. b Distribuição regular do nós. c Distribuição irregular dos nós [10]

Nos Métodos sem Malha, a densidade nodal bem como o espaçamento entre os nós é um fator que influencia o desempenho do método [10]. Normalmente uma distribuição nodal mais densa conduz a resultados mais precisos. Porém, o esforço

computacional aumenta proporcionalmente com o número de nós. Uma distribuição irregular dos nós sobre o domínio do problema pode conduzir a resultados menos precisos. Para além disso, os locais que estão sujeitos a concentrações de tensões, como furos e descontinuidades geométricas, devem apresentar uma maior densidade nodal, de forma a obter melhores resultados [10].

Após a realização da distribuição nodal é construída a malha de integração de fundo que, dependendo do método, pode ser: dependente de uma grelha auxiliar de fundo (RPIM) ou dependente unicamente da malha nodal (NNRPIM). A maioria dos métodos numéricos necessitam da malha de integração de fundo para integrar a forma fraca que descreve o fenómeno físico.

A grande maioria dos métodos numéricos utiliza a malha de integração Gaussiana para a obtenção dos pontos de integração, sendo que esta pode ser ajustada ao domínio, **Figura 2a**, como acontece no MEF, ou então, como na maioria dos Métodos sem Malha, não ajustada ao domínio, **Figura 2b**. Apesar da malha de integração não ajustada ao domínio ter um pequeno erro associado, quando comparada com a malha ajustada ao domínio esse mesmo erro não afeta significativamente a solução final. Uma outra forma de proceder a integração da forma fraca passa por utilizar a integração nodal, que recorre ao diagrama de Voronoï [24], de forma a obter o peso de integração em cada nó [10], **Figura 2c**.

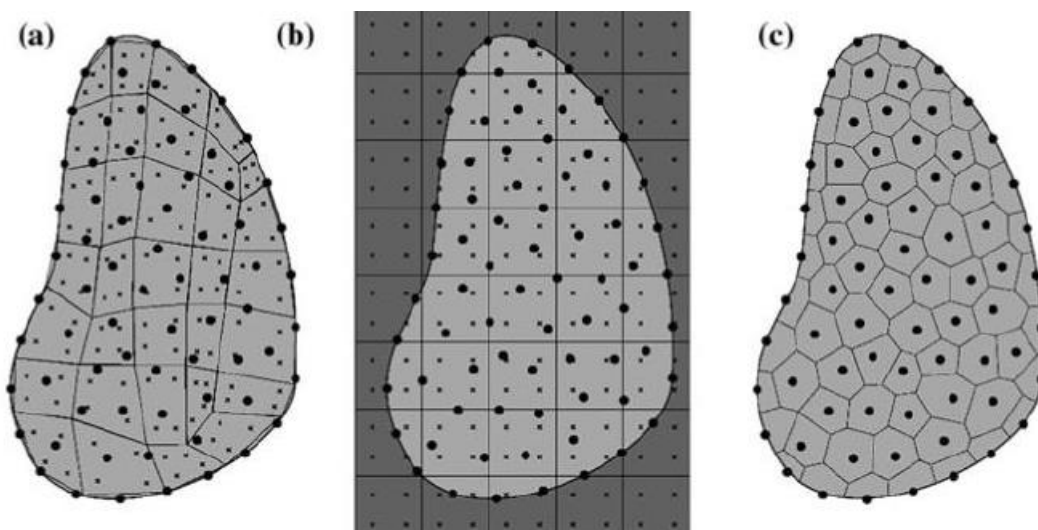


Figura 2 – a Malha de integração Gaussiana ajustada. b Malha de integração Gaussiana geral. c Integração nodal através do diagrama de Voronoï [10]

Após a realização da distribuição nodal e da malha de integração de fundo, é possível estabelecer a conectividade nodal. No caso do MEF, a conectividade nodal é dada pelos elementos que dividem o domínio, obedecendo à regra de não sobreposição. Por outro lado, nos Métodos sem Malha, a conectividade nodal é imposta pela sobreposição das áreas ou volumes (domínio de influência) em redor dos nós.

Como mencionado anteriormente, o RPIM e o NNRPIM utilizam funções de forma de interpolação baseadas em funções de base radial (RBF) [25] e em funções de base polinomial.

2.2.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

2.2.3.1 RPIM

Para a integração numérica o RPIM utiliza a quadratura de Gauss-Legendre [26]. Depois de criada a malha de integração de fundo, **Figura 2a**, a célula inicial, neste caso um quadrilátero, **Figura 3a**, é transformado num quadrado isoparamétrico, que permite a distribuição dos pontos de Gauss no seu interior. As coordenadas Cartesianas dos pontos distribuídos são obtidas utilizando as funções de interpolação isoparamétricas.

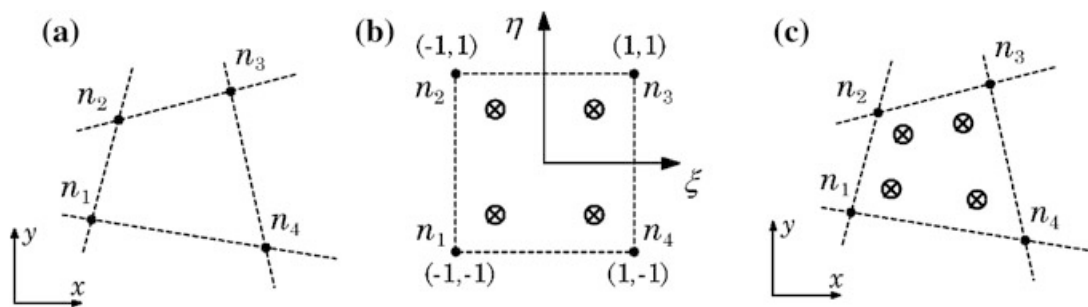


Figura 3 – a Quadrilátero inicial da malha de integração. b transformação do quadrilátero inicial num quadrado isoparamétrico. c Retorno à forma inicial do quadrilátero [10]

Se a malha de integração de fundo for ajustada ao domínio, **Figura 2a**, não é necessário realizar qualquer tipo de pós-processamento. No entanto, se a malha de integração de fundo for maior do que o domínio, **Figura 2b**, todos os pontos de integração fora do domínio sólido têm de ser eliminados. Embora as malhas de integração ajustadas apresentem resultados mais estáveis e precisos, comparados com as malhas de integração não ajustadas, estas necessitam de um esforço computacional mais elevado.

No entanto, a diferença de precisão das soluções obtidas utilizando uma malha ajustada ao domínio ou uma malha não ajustada ao domínio não é significativa [10]. Assim sendo, a maioria dos Métodos sem Malhas utilizam uma malha de integração de fundo não ajustada ao domínio devido à sua facilidade de implementação [10].

2.2.3.2 NNRPIM

Ao contrário do RPIM, o NNRPIM utiliza exclusivamente a distribuição nodal para construir, através do diagrama de Voronoï, a malha de integração de fundo, **Figura 2c**. Através da aplicação do diagrama de Voronoï é possível obter dois tipos diferentes de malha de integração, conforme o tipo de distribuição nodal. Se a distribuição nodal do domínio for regular, o diagrama de Voronoï apresentará células de integração com a

forma triangular. Por outro lado, se a distribuição nodal for irregular, as células de integração obtidas pelo diagrama de Voronoi terão o formato de quadriláteros.

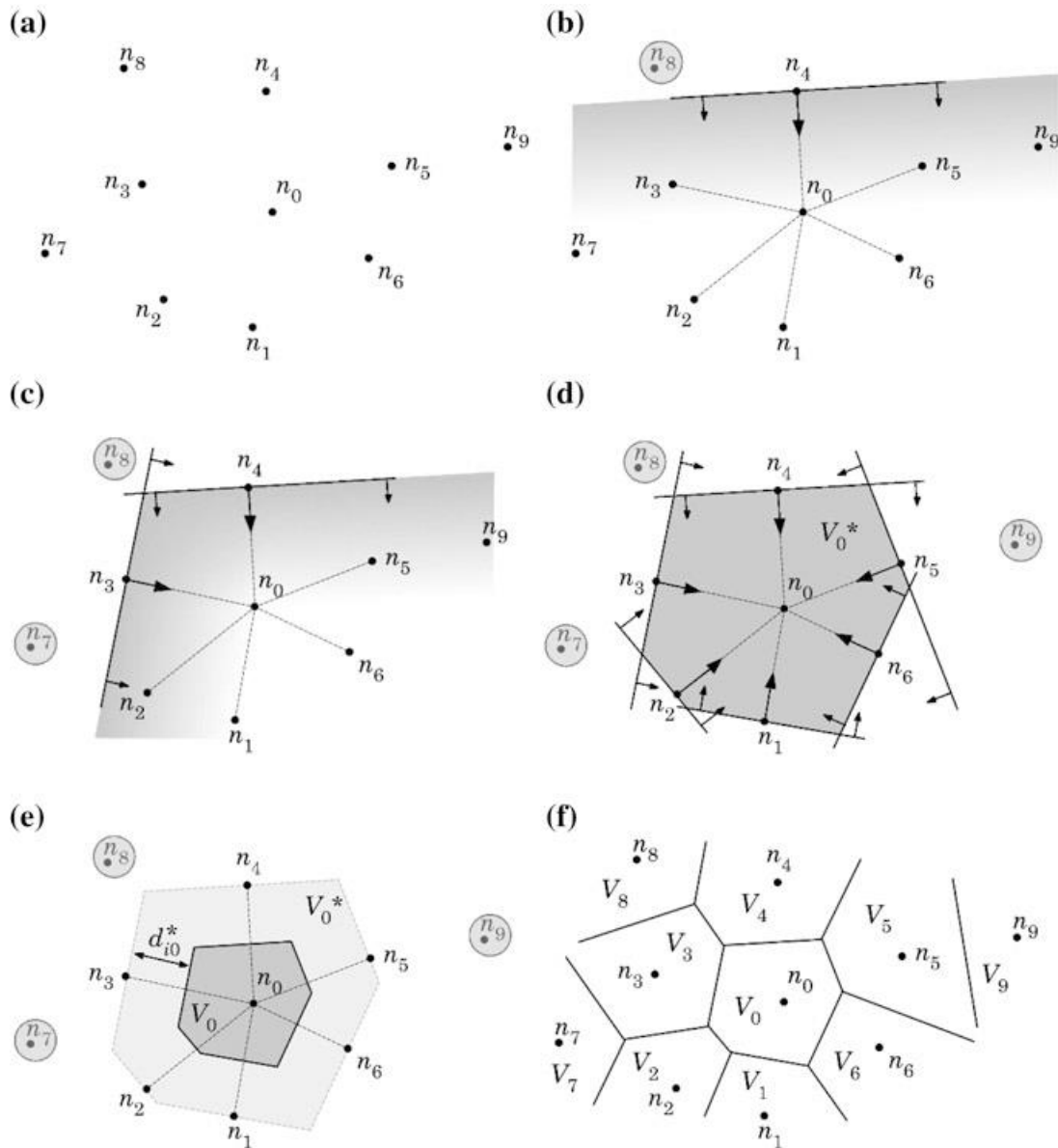


Figura 4 – a distribuição nodal inicial. b Primeiro plano de teste. c Segundo plano de teste. d Célula final contendo apenas os vizinhos naturais. e Célula de Voronoi V_0 f Diagrama de Voronoi [10].

De forma a obter células de menor dimensão, é aplicada a triangulação de Delaunay, que divide as células do diagrama de Voronoi e conecta os nós aos nós que fazem parte da fronteira da célula de Voronoi. Por fim, para se obter uma célula mais pequena, sobrepõe-se a triangulação de Delaunay às células de integração.

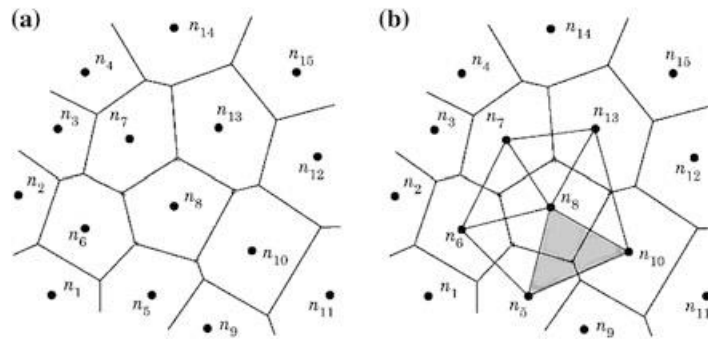


Figura 5 – a Diagrama de Voronoi inicial. b Triangulação *Delaunay* [10]

2.2.4 DOMÍNIOS DE INFLUÊNCIA E CONETIVIDADE NODAL

2.2.4.1 RPIM

No RPIM a conectividade nodal é obtida pela sobreposição dos domínios de influência. O domínio de influência é uma área (2D) ou um volume (3D), que engloba um conjunto de nós do domínio e que pode apresentar tamanho e forma constante **Figura 6a** ou irregular **Figura 6b**. Assim, é possível obter diferentes conectividades nodais.

Domínios de influência com tamanho e forma constante podem apresentar baixa exatidão nos resultados, uma vez que levam a domínios de influência com diferente número de nós. Assim sendo, é recomendado a utilização de domínios de influência com o mesmo número de nós, aproximadamente, sendo que o tamanho e a forma do domínio de influência dependem da densidade nodal à volta do ponto de integração.

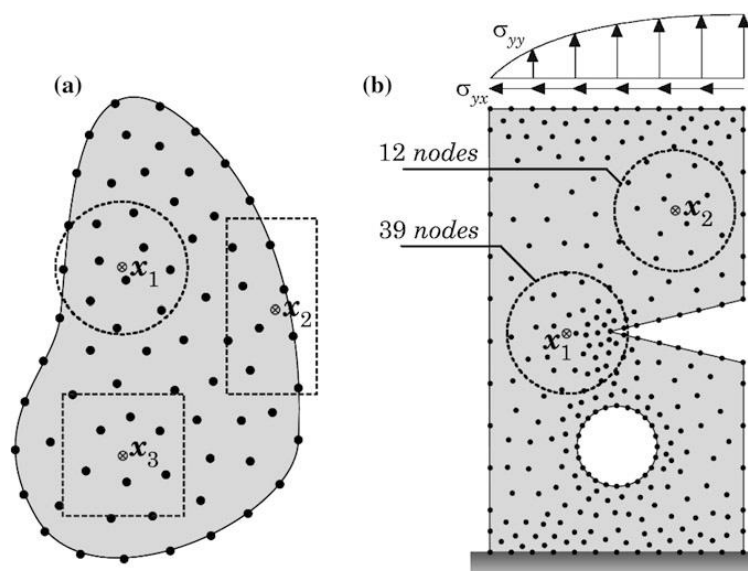


Figura 6 – a domínio de influência com diferentes tipos de forma e tamanho b domínio de influência com forma e tamanho uniforme [10]

2.2.4.2 NNRPPIM

A conectividade nodal, no NNRPPIM, é também definida através do domínio de influência, denominado por células de influência. As células de influência são obtidas

através das relações geométricas do diagrama de Voronoï [10] e determinadas através da aplicação do conceito vizinhos naturais ao diagrama de Voronoï.

Considerando um conjunto de pontos $N = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ distribuído pelo domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \Omega$. Assim, o diagrama Voronoï de N , corresponde à divisão do domínio discretizado por X nas sub-regiões V_i . Logo, um conjunto de células Voronoï $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, caracterizam o diagrama de Voronoï. O diagrama de Voronoï é definido por:

$$V_i := \{x_I \in \Omega \subset \mathbb{R}^d : \|x_I - x_i\| < \|x_I - x_j\|, \forall i \neq j\} \quad (1)$$

Sendo x_I um ponto de integração do domínio e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana (que é a distância entre o ponto de integração (x_I) e os nós definidos por x_i e x_j), então a célula de influência V_i é o espaço geométrico em que todos os pontos estão mais próximos de n_i do que outro nó.

A **Figura 7** representa a forma genérica de obtenção do diagrama Voronoï a duas dimensões (2D).

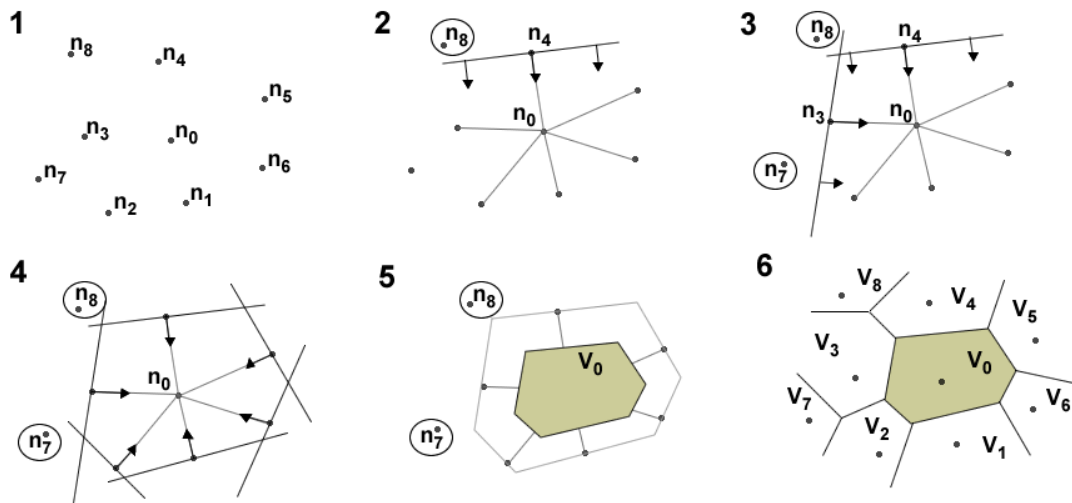


Figura 7 – a Distribuição inicial de nós de potenciais vizinhos naturais do nó n_0 b primeiro plano de teste c segundo plano de teste d célula final, contendo apenas os vizinhos naturais do n_0 e célula de Voronoï do n_0 f diagrama de Voronoï

Tendo por base a distribuição nodal da **Figura 7a.**, o nó n_0 é selecionado para a definição da célula de Voronoï e pretende-se que este encontre os nós que serão considerados vizinhos naturais e elimine os que não são considerados vizinhos naturais. Assim sendo, um nó é selecionado como potencial vizinho natural, como por exemplo o n_4 , e o seu vetor u_{40} é determinado através de, sendo $u_{40} = \{u_{40}, v_{40}, w_{40}\}$,

$$u_{40} = \frac{(x_0 - x_4)}{\|(x_0 - x_4)\|}, \quad (2)$$

Após a definição do vetor normal u_{40} é possível definir o plano π_{40} .

$$u_{40}x + v_{40}y + w_{40}z = (u_{40}x_4 + v_{40}y_4 + w_{40}z_4) \quad (3)$$

Uma vez definido o plano π_{40} , todos os nós que não respeitam a condição,

$$u_{40}x + v_{40}y + w_{40}z \geq (u_{40}x_4 + v_{40}y_4 + w_{40}z_4) \quad (4)$$

não serão considerados vizinhos naturais do nó n_0 . Na **Figura 7b**, é possível observar que, por exemplo, os nós n_1 e n_2 são considerados vizinhos naturais do nó n_0 e, por outro lado, o nó n_8 não. Após a repetição do processo para cada um dos nós, **Figura 7c**, obtém-se os seis vizinhos naturais do nó n_0 , representado na **Figura 7d**. Utilizando o diagrama de Voronoï, é possível estabelecer dois tipos de células de influência (**Figura 8**).

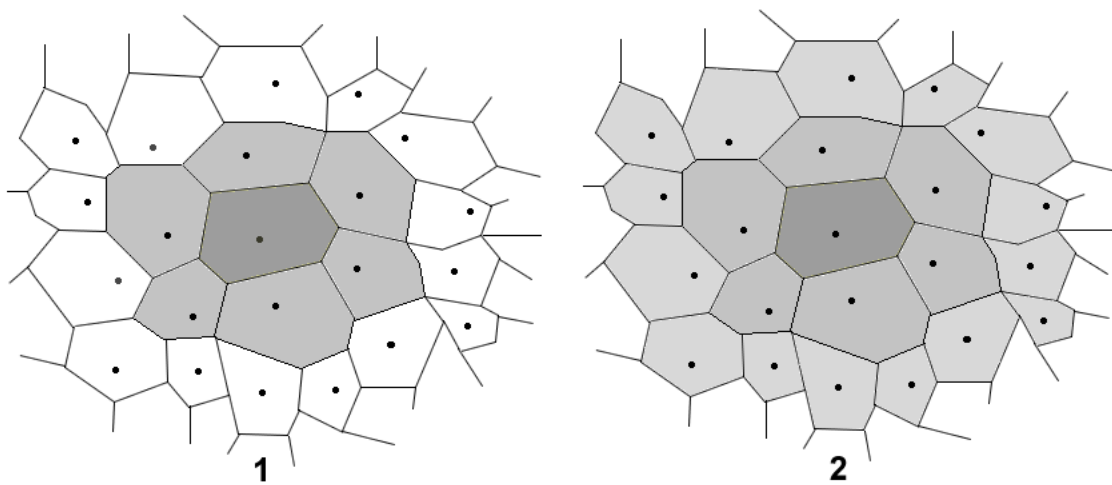


Figura 8 – Tipos de células de influência: **a** Célula de influência de primeira ordem **b** Célula de influência de segunda ordem

A célula de influência de primeira ordem (**Figura 8a**), apenas considera os vizinhos naturais do ponto de integração. Por outro lado, a célula de influência de segunda ordem (**Figura 8b**) considera os vizinhos naturais do ponto de integração e ainda os vizinhos naturais dos primeiros vizinhos naturais. Uma vez que a célula de influência de segunda ordem apresenta um domínio maior do que a célula de influência de primeira ordem, os resultados obtidos com a célula de influência de segunda ordem geralmente são melhores do que os resultados obtidos através das células de influência de primeira ordem [10].

2.2.5 FUNÇÕES DE FORMA

As funções de forma permitem interpolar os campos de funções desconhecidos, de forma a obter a solução numérica. Tanto o RPIM como o NNRPIM utilizam a mesma técnica de construção das funções de forma, o *Radial Point Interpolator* (RPI), que combina funções de base polinomial $p_j(\mathbf{x})$ com funções de base radial $R_i(\mathbf{x})$.

Considerando a função $u(\mathbf{x})$, no ponto de integração \mathbf{x}_I , definida no domínio Ω e discretizada por um conjunto de nós n , dentro do domínio de influência, sendo m o número de termos da base polinomial:

$$u(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i(\mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{a}_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{b}_j(\mathbf{x}_I) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) + \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \quad (5)$$

A equação (5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$u(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{R}(\mathbf{x}_I)^T, \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Sendo $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}_j(\mathbf{x}_I)$ os coeficientes não constantes associados a $\mathbf{R}_i(\mathbf{x})$ e a $\mathbf{p}_j(\mathbf{x})$, respetivamente, estes podem ser definidos como:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = \{a_1(\mathbf{x}_I) \ a_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ a_n(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (7)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) = \{b_1(\mathbf{x}_I) \ b_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ b_m(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (8)$$

e,

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_I) = [R_1(\mathbf{x}_I) \ R_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ R_n(\mathbf{x}_I)]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) = [p_1(\mathbf{x}_I) \ p_2(\mathbf{x}_I) \ \dots \ p_m(\mathbf{x}_I)]^T \quad (10)$$

O RPIM e o NNRPIM utilizam funções multiquadráticas de base radial definidas por:

$$R(r_{ii}) = (d_{ii}^2 + c^2)^p \quad (11)$$

Sendo d_{ii} , norma euclidiana, a distância entre o ponto de integração \mathbf{x}_I e o nó vizinho \mathbf{x}_i , dada por $d_{ii} = \sqrt{(x_i - x_I)^2 + (y_i - y_I)^2}$. Segundo a literatura existente, o valor ótimo dos parâmetros c e p são 0.0001 e 1.0001, respetivamente [10]. A função de base polinomial, contém os seguintes termos:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots] \quad (12)$$

Considerando as definições anteriores, é possível condensar a equação (6) no seguinte sistema matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{p}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Considerando um problema tridimensional (3D), \mathbf{u}_s , \mathbf{R} e \mathbf{P} podem ser definidos como:

$$\mathbf{u}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R(r_{11}) & R(r_{21}) & \dots & R(r_{n1}) \\ R(r_{21}) & R(r_{22}) & \dots & R(r_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(r_{1n}) & R(r_{2n}) & \dots & R(r_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Através da equação (13), em que \mathbf{M} representa a matriz do sistema, é possível obter os coeficientes não constantes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$. Invertendo a matriz \mathbf{M} tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Substituindo as variáveis $\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$ na equação (6) obtém-se:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{R}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I), \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_I)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Em que o vetor $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_I)$ apenas existe se a função de base polinomial for considerada, uma vez que, de outra forma, o vetor não aparece na equação. Já o parâmetro $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I)$ representa a função de interpolação, e, uma vez que satisfaz a seguinte condição, possui a propriedade *delta* Kronecker δ_{ij} :

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i = j) \\ 0 & \text{se } (i \neq j) \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (18)$$

Como referido anteriormente, esta propriedade permite a imposição direta das condições de fronteira naturais e essenciais na matriz de rigidez. Assim, as funções de forma do RPI $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I)$ podem ser definidas por:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I) = \varphi_1(\mathbf{x}_I), \varphi_2(\mathbf{x}_I), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_I) \quad (19)$$

3 MECÂNICA DOS SÓLIDOS

A formulação matemática utilizada neste estudo tem como base a teoria da elasticidade, proposta inicialmente por *Hooke*, razão pela qual a extensão desta teoria ao espaço 3D é também conhecida por lei de *Hooke* generalizada [11].

3.1 TEORIA DA ELASTICIDADE

Analisando qualquer ponto de uma estrutura tridimensional, é possível definir o seu estado de tensão e de deformação como $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, respetivamente [11,27].

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \quad (21)$$

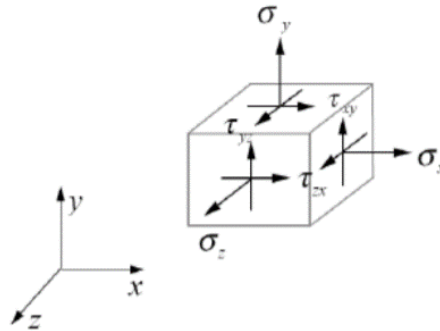


Figura 9 – Cubo das tensões [11]

3.1.1 RELAÇÕES DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

Tendo em conta o cubo infinitesimal representado na **Figura 9**, e considerando os deslocamentos nas três direções ortogonais, x, y e z , como sendo u, v e w , respetivamente. As relações entre as deformações e os deslocamentos são definidas da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (22)$$

Tendo em conta que as expressões (22) são apresentadas para uma precisão de primeira ordem, estas apenas devem ser utilizadas para problemas que apresentem pequenas deformações. Por outro lado, em problemas que apresentem grandes deformações é recomendado a utilização das expressões de segunda ordem [11].

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (23)$$

Considerando um problema tridimensional, em que os deslocamentos são considerados reduzidos, é possível definir as deformações da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Em que a matriz \mathbf{L} é o operador diferencial.

3.1.2 RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Considerando materiais lineares elásticos, é possível aplicar a lei de *Hooke* que relaciona a tensão com a deformação e é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (26)$$

Sendo \mathbf{c} a matriz que contém as características do material, obtidas através de ensaios experimentais. Assim, a Lei de *Hooke* pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ sim. & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

O que significa que, para um problema tridimensional e um material anisotrópico, existem 21 constantes materiais para serem definidas. Por outro lado, para materiais isotrópicos a matriz \mathbf{c} é dada por:

$$\mathbf{c} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (28)$$

Sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson. O módulo de elasticidade de corte G é definido em função de E e ν , sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (29)$$

Logo, para um material isotrópico apenas é necessário definir duas propriedades mecânicas do material: E e ν .

Assim, é também possível apresentar a matriz \mathbf{c} para problemas em estado plano de tensão (EPT).

$$\mathbf{c} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

3.2 FORMA FRACA DE GALERKIN

A forma fraca de *Galerkin* baseia-se no princípio da energia. De todas as configurações de deslocamento possíveis que satisfazem a condição de compatibilidade, a solução

possível é a que corresponde à configuração que minimiza o funcional Langrangiano, L [10].

$$L = T - U + W_f \quad (31)$$

Sendo T a energia cinética, U a energia de deformação e W_f o trabalho produzido pelas forças externas, a energia cinética é definida por:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (32)$$

Onde o volume do sólido é definido por Ω e $\dot{\mathbf{u}}$ representa a primeira derivada em ordem ao tempo, isto é, a velocidade, sendo ρ a densidade do sólido.

A energia de deformação para materiais elásticos é definida por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (33)$$

Sendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ o vetor de deformação e $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor de tensão.

Relativamente ao trabalho produzido pelas forças externas, este pode ser escrito como:

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (34)$$

Em que \mathbf{u} representa o deslocamento, \mathbf{b} as forças internas e Γ_t a fronteira onde são aplicadas as forças.

Considerando a relação entre a tensão e a deformação $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon}$ e a relação entre a deformação e o deslocamento $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$, a forma fraca de *Galerkin*, equivalente neste caso ao princípio dos trabalhos virtuais, pode ser descrita como:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{c}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho(\delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega = 0 \quad (35)$$

Considerando apenas a análise estática, é possível desprezar o termo referente à energia cinética e reescrever a equação anterior como:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{c}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0, \quad (36)$$

que representa a forma fraca de *Galerkin* genérica, escrita em ordem ao deslocamento para um problema estático.

3.2.1 DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A discretização do sistema de equações do RPIM e do NNRPIM é obtido através do princípio do trabalho virtual, utilizando as funções de forma. A função de forma para os Métodos sem Malha é dada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) u_i \quad (37)$$

Onde $\varphi_i(\mathbf{x}_I)$ é a função interpoladora e u_i é o deslocamento nodal dos nós n pertencentes ao domínio de influência do ponto de integração \mathbf{x}_I .

As funções de interpolação satisfazem a condição

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad (38)$$

Onde δ_{ij} é o delta Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (39)$$

Considerando a equação (37) para um caso bidimensional, em que existem dois graus de liberdade por nó, $\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \{u(\mathbf{x}_I) \ v(\mathbf{x}_I)\}^T$, o deslocamento virtual é dado por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}_I) \\ v(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}_I) & 0 \\ 0 & \varphi_i(\mathbf{x}_I) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}_i) \\ v(\mathbf{x}_i) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_I) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \quad (40)$$

Tendo em conta a equação (24), é possível desenvolver o vetor deformação virtual como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n [\mathbf{L}\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_I)] \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i(\mathbf{x}_I) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \partial\varphi(\mathbf{x}_I)/\partial x & 0 \\ 0 & \partial\varphi(\mathbf{x}_I)/\partial y \\ \partial\varphi(\mathbf{x}_I)/\partial y & \partial\varphi(\mathbf{x}_I)/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}_i) \\ v(\mathbf{x}_i) \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Assim, é possível reescrever a equação (36) como:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{c} \mathbf{B}_j d\Omega \mathbf{u}_j - \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{H}_i^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} d\Omega - \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T \int_{\Gamma_t} \mathbf{H}_i^T \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} d\Gamma_t = 0 \quad (42)$$

Após a montagem da matriz de rigidez \mathbf{K} , esta pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t \quad (43)$$

Em que \mathbf{f}_b representa o vetor de forças do corpo e \mathbf{f}_t o vetor de forças externas do corpo. Trabalhando a equação (43) em ordem aos deslocamentos \mathbf{u} , obtém-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t) \quad (44)$$

4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

4.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A otimização estrutural é uma técnica usada desde de 1904, inicialmente descrita nos estudos realizados por Michell, [28]. Um dos primeiros estudos de otimização estrutural a incorporar o método dos elementos finitos foi realizado por Rossow & Taylor [30] e que consistiu na análise de placas finas com um furo central sujeitas a carregamentos nos bordos. Na formulação proposta, as placas eram discretizadas numa malha de elementos em que a espessura do elemento não era especificada. Assim, os locais onde existe concentração de tensões são reforçados aumentando a quantidade de material nesse local. No entanto, a aplicação a placas sólidas em que as condições conhecidas não são suficientes resultam em dificuldades na análise numérica.

Mais tarde, na década de 70, surgiram inúmeros estudos com o intuito de reduzir zonas de concentrações de tensões, [31,32], que estudaram a relação da posição de furos em placas finas e a influência da geometria do problema no fator de concentração de tensões. A solução ótima obtida foi posteriormente analisada recorrendo a métodos analíticos e experimentais, como a fotoelasticidade, comprovando assim os resultados obtidos pela análise numérica.

Mais tarde, em 1988, Bendsøe & Kikuchi [33] propõe um dos métodos mais populares na área da otimização estrutural, o *Homogenization Based Topology Optimization* (HBTO). O HBTO consiste na distribuição ótima de material anisotrópico, dentro de um domínio, onde são colocados pequenos furos em zonas onde a tensão instalada é extremamente reduzida. O método proposto foi posteriormente comparado com o *Boundary Variations Method* e constatou-se que, com um aumento ainda que significativo do custo computacional, o HBTO apresenta resultados semelhantes, mas uma maior facilidade de aplicação a problemas tridimensionais, em comparação com o *Boundary Variations Method*.

De forma a tornar mais suaves os contornos obtidos através da análise estrutural, Maute & Ramm [34] propõem um novo método, o *Material-based Topology*

Optimization, capaz de reduzir o número de variáveis de otimização, uma vez que a cada ciclo de iteração o método adapta o espaço de projeto para a distribuição de material. No estudo realizado por Maute & Ramm [34], utilizando o *Material-based Topology Optimization* analisaram uma estrutura quadrada, sujeita a uma carga pontual no centro, com o objetivo de maximizar a sua rigidez e minimizar a massa inicial, obtendo assim a geometria ótima para o respetivo carregamento. Após a aplicação do *Material-based Topology Optimization* a vários problemas bidimensionais, os autores concluíram que este método é 50% mais eficaz do que os outros métodos estudados.

Os estudos realizados por Nha Chu, Xie, Hira & Steven [35] originaram o *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), um método mais simples e com maior facilidade de ser implementado em programas de elementos finitos. O ESO baseia-se na remoção gradual dos elementos que estão sujeitos a valores de tensão reduzidos, de forma a atingir a solução ótima. Nesse estudo, Nha Chu et al. [35] demonstraram que o método proposto era capaz de reproduzir as treliças de *Michell* [28] e também obter resultados semelhantes aos obtido pelo HBTO.

De forma a colmatar a impossibilidade de adição de material, o método ESO foi aprofundado, dando origem ao *Additive Evolutionary Structural Optimization* (AESO), proposto por Querin, Steven & Xie [36], que permite a adição de material em locais onde o valor da tensão é elevado. Neste método, o domínio inicial é o menor possível e é desenvolvido pela adição de material, ao contrário do ESO, em que o domínio inicial é o domínio máximo ao qual se irá remover material. A combinação dos dois métodos resultou no *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO), que como o próprio nome indica, é um método bidirecional que permite, simultaneamente, a remoção e adição de material [36]. A comparação do desempenho dos dois métodos permitiu aos autores concluir que para o problema de uma viga encastrada sujeita a uma carga vertical, o tempo necessário para definir a solução ótima é menor quando se utiliza o BESO. Uma vez que o BESO tem a capacidade de introduzir material em qualquer ponto do domínio, este está mais perto de formar a solução final do que o ESO.

Mais tarde, em 2002, de forma a solucionar o problema de distorção da malha, Y. M. Chen, Bhaskar & Keane [37] desenvolveram uma formulação capaz de manter a densidade da malha de elementos finitos uniforme, em todo o processo de otimização, o que permite obter geometrias mais suaves. A formulação traduz-se em análises iterativas utilizando o MEF, em que o aparecimento de elementos distorcidos é corrigido através da reconstrução da malha de elementos finitos. A aplicação desta formulação a problemas conhecidos da literatura, como o Arco de *Michell*, revelou-se um sucesso uma vez que o domínio final apenas utilizou 36.8% do material inicial, o que garante a diminuição do peso da estrutura e a aproximação às características mecânicas originais [37].

Uma vez que a maior partes das estruturas se encontram sujeitas a vários casos de cargas, provenientes do contacto entre os elementos, W. Li, Li, Steven & Xie [38] desenvolveram duas formulações no âmbito da otimização estrutural de elementos em contacto. A primeira, *Extreme Stress Criterion*, no processo de análise estrutural, apenas considera o valor de tensão mais elevado, ignorando os valores mais baixos. No entanto, este método pode não traduzir especificamente o contato entre dois componentes, uma vez que não considera a tensão real em cada um dos pontos em análise. Por outro lado, no *Weighted Average Criterion* os valores de tensão mais baixos são considerados na análise, sendo que este método, ao realizar uma média ponderada entre os carregamentos, pode colocar mais ênfase em certos carregamentos. Essa ênfase em determinados carregamentos permite obter uma situação mais realista de elementos em contacto [38].

Em 2010, Ghaffarianjam & Abolbashari (2010) desenvolveram dois métodos baseados no *Morphologic Evolutionary Structural Optimization* (MESO) [40] e concluíram que, para a otimização estrutural de vigas, o critério de tensão (que segundo Q. Li, Steven & Xie (1999) é o mesmo que o critério de von Mises, que representa o critério de rutura aplicado à previsão de rutura para materiais dúcteis) e o critério de deformação podem ser usados alternadamente. Os autores do estudo concluíram que o critério de rigidez origina menor número de iterações e aumento da precisão dos resultados, em comparação com o critério de deformação.

Em 2018, estudos realizados por Xia, Zhang, Xia & Shi [42] originaram um método baseado no BESO capaz de minimizar a tensão.

Atualmente, existem inúmeros métodos relacionados com a otimização estrutural para além dos enumerados anteriormente. Por exemplo, o *Solid Isotropic Material Penalization* (SIMP) [43], o *Level set Method* (que foi aplicado a problemas bidimensionais de otimização estrutural por Sethian & Wiegmann, [44]) e o *Phase-field Method*, que foi aplicado à otimização estrutural, pela primeira vez, por Ito & Kunisch [45].

A classe de métodos *Boundary Variation Method* (constituída pelo *Level set Method* e pelo *Phase-fiedl Method*), produz soluções com contornos mais suaves, quando comparada com os *Density-based Methods*, o HBOT e o SIMP, o que requer um menor esforço de pós-processamento[46]. Por outro lado, Kobayashi [47] estudou a aplicação de métodos baseados em algoritmos genéticos na otimização estrutural.

4.2 MÉTODOS SEM MALHA

Todos os métodos de otimização estrutural anteriormente mencionados foram aplicados, com sucesso, através do MEF. Este método apresenta algumas

desvantagens, como a eliminação da distorção da malha de elementos durante o processo de otimização, que podem ser corrigidas com a utilização dos Métodos sem Malha. Assim, em comparação com o MEF, os Métodos sem Malha produzem uma maior taxa de convergência no processo de otimização estrutural, uma solução mais precisa para o mesmo número de graus de liberdade e uma menor influência da posição dos nós na solução final [7].

O primeiro estudo a utilizar os Métodos sem Malha na otimização estrutural, desenvolveu-se na área da hiper-elasticidade e foi realizado por Grindeanu, Chang, Choi, & Chen [48]. Mais tarde, em 2002, Grindeanu, Kim, Choi, & Chen [8] desenvolveram o *Hierarchical Boundary Displacement Method*, capaz de manter a consistência entre o modelo tridimensional e a discretização durante o processo de otimização. Isto é, os pontos que pertençam a uma aresta ou a uma face no modelo inicial permanecem durante todo o processo de otimização nessa mesma posição. A consistência do método foi provada através da sua aplicação a um problema tridimensional de uma viga sujeita a uma pressão distribuída na face superior. A viga analisada encontrava-se apoiada em ambos os lados, através de apoios simples, sendo que foram feitos dois furos ovais com o objetivo de reduzir a quantidade de material utilizado. Da análise estática obtiveram-se valores de tensão de von Mises de 4.26 MPa e uma flecha máxima de 0.0018 mm. Com o intuito de obter a solução ótima, os autores aplicaram o método desenvolvido (*Hierarchical Boundary Displacement Method*), considerando duas condições: a tensão de von Mises ser inferior a 5.0 MPa e a flecha máxima não ultrapassar os 0.0035 mm. A geometria final obtida contou com uma redução de 34.02% do volume inicial, o que comprova a pertinência da utilização deste método, uma vez que as características mecânicas não foram alteradas após a otimização e a redução do volume permitiu garantir a diminuição do peso.

Seguidamente, Lacroix & Bouillard [49] modificaram a análise de sensibilidade do processo de otimização estrutural, utilizando o MEF acoplado ao EFGM. A combinação destes métodos já tinha sido estudada por Belytschko, Organ, & Krongauz, [50] e Hegen, [51], que, nos seus estudos, obtiveram melhores resultados quando o EFGM era aplicado apenas a uma zona do domínio, onde há a necessidade de obter uma melhor aproximação da solução, e o MEF aplicado ao restante domínio. No estudo realizado por Lacroix & Bouillard [49], analisou-se uma membrana com um furo elíptico, sujeita a um esforço de tração, cujo objetivo era determinar qual a orientação do furo que reproduzia menor valor de tensão. Utilizando este método o campo de tensões apresenta uma maior continuidade e a solução final pode ser otimizada sem que haja necessidade de refinamento da malha, sendo que os autores do estudo determinaram que a orientação ótima do furo seria a 90°.

Mais tarde, em 2008, surgem três estudos que reforçam as vantagens dos Métodos sem Malha na otimização estrutural [52–54]. No estudo realizado por K. Wang et al., [52] o *Natural Neighbour Petrov-Galerkin Method* (NNPG) [55], foi aplicado à

otimização estrutura de problemas bidimensionais, com o objetivo de resolver o problema da distorção da malha, sendo que o NNPG não requer a construção de uma malha de integração de fundo para proceder à integração da forma fraca. Assim, em comparação com o MEF, o NNPG apresenta maior precisão na solução obtida, sendo que a sua precisão se mantém constante ao longo do processo de otimização, e pode ser considerado um método fácil de implementar.

No estudo realizado por Zhou & Zou [54], é desenvolvido o *Implicit Topology Function Method* que é integrado no RKPM e aplicado a problemas lineares estáticos bidimensionais, sendo que, posteriormente, a sua prestação é comparada com o SIMP. Vários problemas bidimensionais foram analisados pelo *Implicit Topology Function Method*, comprovando que a solução obtida é confiável e é capaz de resolver problemas de otimização estrutural, apesar da dificuldade na imposição das condições fronteira, devido à falta da propriedade de *delta* Kronecker. Adicionalmente, verificou-se que o método conduz a soluções precisas quando comparado com o SIMP.

A versatilidade e aptidão que o MLPG apresenta na resolução de problemas de otimização é descrita no estudo realizado por S. Li & Atluri, [53]. Neste estudo, é desenvolvido o MLPG *Mixed Collocation Method*, que utiliza as funções de aproximação MLS, sendo que através da aplicação deste método a vários problemas bidimensionais se concluiu que nós com uma densidade nodal relativa nula são considerados um vazio. Uma vez que a formulação do MLPG *Mixed Collocation Method* é estabelecida nos nós, e não em elementos como no MEF, não é necessária a integração pelo domínio durante o processo de otimização. Assim, a sua implementação torna-se mais eficiente.

Na última década, a aplicação das *Compactly Supported Radial Basis Function* (CSRBF) a processos de otimização estrutural, utilizando Métodos sem Malha, foi descrita nos estudos realizados por Luo, Zhang, Gao & Ma [56] e por Zhao [57]. Segundo os estudos referidos anteriormente, as CSRBF permitem estabelecer com maior facilidade as condições fronteira, uma vez que estas satisfazem a propriedade de *delta* Kronecker. No estudo [56], é proposto o *Meshless Galerkin Level Set Method* aplicado à otimização estrutural, que se mostra capaz de descrever o movimento das fronteiras sem que haja necessidade de refazer a malha de integração. No entanto, o custo computacional é maior quando o *Level Set Method* é implementado nos Métodos sem Malha do que quando é implementado no MEF. Mais tarde, em 2014, Zhao [57] aprofundou e incorporou o *Meshless Density Variable Approximation* no BESO e concluiu que a aplicação deste método permite a eliminação dos problemas relacionados com a instabilidade numérica e a dependência da malha apresentada por outros métodos.

Recentemente, Khan, Siraj-ul-Islam & Ullah [58] desenvolveram um estudo focado na resolução de problemas bidimensionais lineares elásticos, utilizando o EFGM combinado com o *Level Set Method*. Ao longo do estudo foram analisados vários

problemas bidimensionais, sendo que a solução obtida foi posteriormente comparada com a solução do MEF, tendo-se obtido uma geometria semelhante, mas com uma convergência mais rápida. Este estudo concluiu que o método desenvolvido é eficiente na análise de geometrias complexas quando sujeitas a cargas únicas ou a vários carregamentos.

DESENVOLVIMENTO

5.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

5.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS

5 DESENVOLVIMENTO

5.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O processo de otimização estrutural realizado pelo MEF, RPIM e NNRPIM segue as seguintes etapas:

1. Utilizar o *software* FEMAP (*Student Edition v2020*) para a discretização do domínio numa malha de elementos finitos;
2. Estabelecer as condições fronteiras essenciais e naturais a que o modelo estará sujeito;
3. Realizar o pré processamento utilizando o MEF, o RPIM e o NNRPIM;
4. Determinar o volume objetivo e determinar o volume a retirar a cada iteração (TR);
5. Alterar as densidades dos elementos conforme a tensão instalada. Isto é, a densidade de elementos sujeitos a uma tensão reduzida é alterada para um valor de aproximadamente zero;
6. Realizar a análise linear para o novo domínio;
7. Repetir os passos de 2 a 6 até que o volume pretendido seja atingido.

5.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.2.1 Viga em consola

O primeiro exemplo consiste na otimização estrutural de uma viga em consola (**Figura 10**), sujeita à aplicação de uma força (F) de 100 N numa das extremidades. O domínio do problema tem um formato retangular com 80 mm de comprimento, 50 mm de altura e 1 mm de espessura. Para a análise considerou-se um material linear isotrópico com um módulo de Elasticidade (E) de 100 GPa e um coeficiente de Poisson (ν) de 0,3.

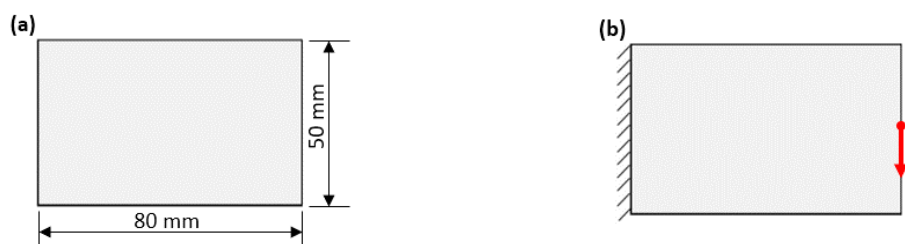


Figura 10 – a Dimensões do domínio. b Condições fronteira naturais e essenciais.

5.2.1.1 Influência do tipo de discretização do domínio

Numa fase inicial, estudou-se a influência do tipo de elemento, no caso do MEF, ou da distribuição nodal, no caso do RPIM e do NNRPIM, na discretização do domínio. Para tal, realizou-se o estudo de otimização estrutural utilizando uma malha constituída por 32x20 divisões, tendo como critério de otimização a tensão de *von Mises*. De acordo com vários autores [42,59], a aplicação de uma carga distribuída por um número reduzido de nós evita a existência de concentrações de tensões, o que origina soluções mais precisas. Por isso, aplicou-se a força de 100 N por cinco nós consecutivos do domínio.

No primeiro caso, ilustrado na **Figura 11a** foram utilizados 1280 elementos triangulares na discretização do domínio. Por outro lado, na **Figura 11d** utilizaram-se 640 elementos quadriláteros na discretização. Como esperado, a discretização por elementos triangulares, para o mesmo número de divisões, apresenta o dobro dos elementos do que a discretização por elementos quadrangulares. Nas **Figura 11b, c, e e f** estão representadas as geometrias otimizadas, obtidas através da aplicação do MEF e utilizando uma Taxa de Remoção (TR) de 5.0% do volume inicial em cada iteração. Optou-se por preservar 40% do volume inicial do domínio. O valor m representa a percentagem de massa em relação à massa inicial do problema.

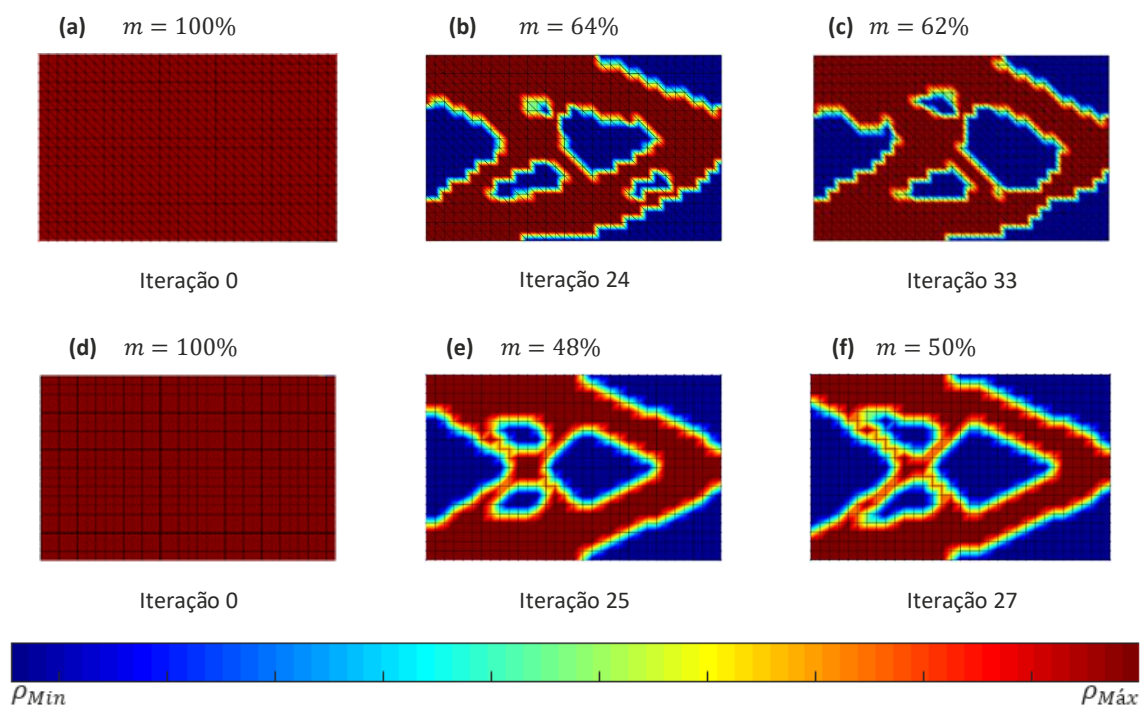


Figura 11 – a Discretização do domínio através de elementos triangulares. b solução do MEF após 24 iterações. c solução do MEF após 33 iterações utilizando a TR de 5%. d Discretização do domínio por elementos quadrangulares. e solução do MEF após 25 iterações. f solução do MEF após 27 iterações utilizando a TR de 5%.

A escala de cor utilizada varia predominantemente entre a cor vermelha (existência de material) e a cor azul (material removido). Por outro lado, as zonas que apresentam material de transição são representadas com uma graduação de cor, entre o azul e o vermelho, conforme a densidade do material.

É de notar que apesar da discretização por elementos quadriláteros resultar em metade dos elementos obtidos pela discretização por elementos triangulares, as soluções obtidas, no primeiro caso, podem ser consideradas mais estáveis e mais precisas, uma vez que a geometria obtida se aproxima da geometria encontrada por outros autores [59–62]. Apesar da discretização do domínio por elementos triangulares apresentar um elevado número de elementos, a direção de deformação predominante do elemento contribui para a dificuldade de obtenção de soluções simétricas. De seguida, para a avaliação da influência do tipo de discretização nas soluções de otimização estrutural do RPIM, realizou-se a distribuição nodal, segundo as duas orientações (triangular e quadrangular), cujo número de nós distribuídos pelo domínio é de 693 em ambas as orientações. A utilização de uma malha de integração fundo, utilizando elementos triangulares, originou 1280 células de integração, enquanto que a utilização de uma malha de integração de fundo, formada por elementos quadrangulares, apresenta metade desse valor, ou seja, 640 células de integração.

Após a análise das melhores soluções de otimização estrutural, tendo em conta o número de nós dentro do domínio de influência, os autores do presente estudo concluíram que as melhores soluções se verificam quando as análises são realizadas com seis nós dentro do domínio. Assim sendo, em todos os casos de otimização estrutural realizados pelo RPIM estabeleceu-se um número de seis nós dentro do domínio de influência. Para a obtenção das soluções ilustradas na **Figura 12** utilizou-se uma TR de 5% e optou-se por preservar 40% do volume inicial.

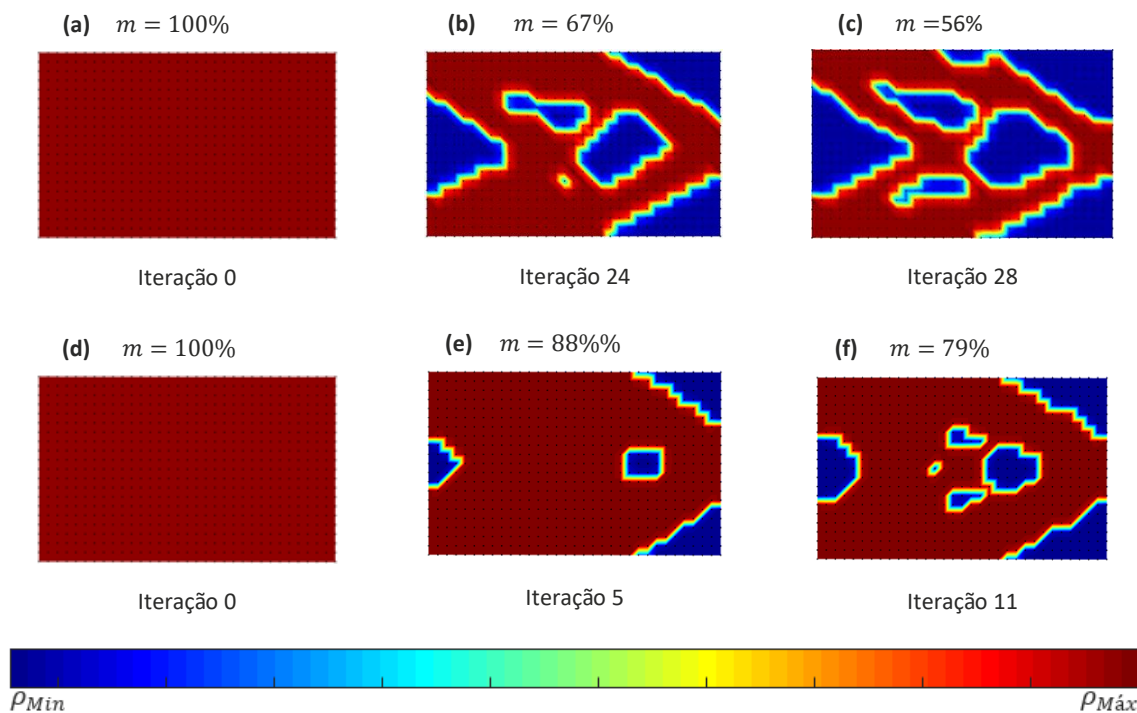


Figura 12 – a Discretização do domínio através de células de integração triangulares. b solução do RPIM após 24 iterações. c solução do RPIM após 28 iterações utilizando a TR de 5%. d Discretização do domínio por células de integração quadrangulares. e solução do RPIM após x iterações. f solução do RPIM após x iterações utilizando a TR de 5%.

Ao analisar as soluções obtidas é possível concluir que, à semelhança do MEF, a utilização de uma malha de integração de fundo formada por elementos triangulares, permite que a deformação ocorra predominantemente numa direção. Assim, e apesar da existência de semelhanças entre as soluções obtidas e as soluções existentes na literatura [59–62], esta não apresenta simetria em relação ao plano médio horizontal. Para além disso, devido ao baixo número de células existentes na malha de integração de fundo, formada por elementos quadrangulares, não se obteve a solução que é descrita na literatura [59–62].

Ao contrário do RPIM, o NNRPIM não é influenciado pela malha de integração de fundo, uma vez que é considerado um método nodalmente dependente [10]. Assim, os resultados obtidos (**Figura 13**), utilizando a distribuição nodal triangular, são iguais aos resultados obtidos através da distribuição nodal quadrangular. Nos dois casos, o domínio é constituído por 693 nós. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando uma TR de 5.0% e um volume objetivo de 40% do volume inicial.

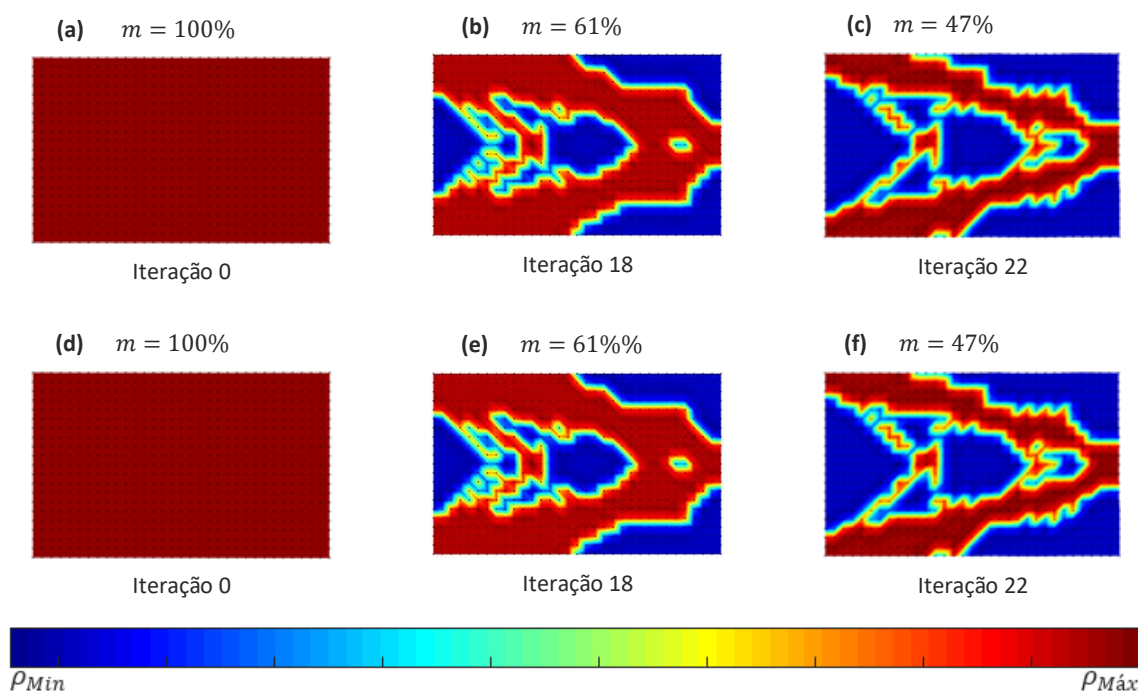


Figura 13 – a Discretização do domínio através de células de integração triangulares. b solução do RPIM após 24 iterações. c solução do RPIM após 28 iterações utilizando a TR de 5%. d Discretização do domínio por células de integração quadrangulares. e solução do RPIM após x iterações. f solução do RPIM após x iterações utilizando a TR de 5%.

5.2.1.2 Influência dos parâmetros de otimização e critérios de otimização

De forma a obter soluções com uma geometria semelhante à geometria proposta na literatura [59–62], é fundamental analisar a influência dos parâmetros de otimização. Para tal, para cada discretização - 32x20, 48x30, 64x40 e 80x50 divisões -, foram estudadas as TR de 2, 3, 4 e 5%, com recurso a dois critérios de otimização: o critério de tensão equivalente de von Mises e o critério da densidade de energia de deformação.

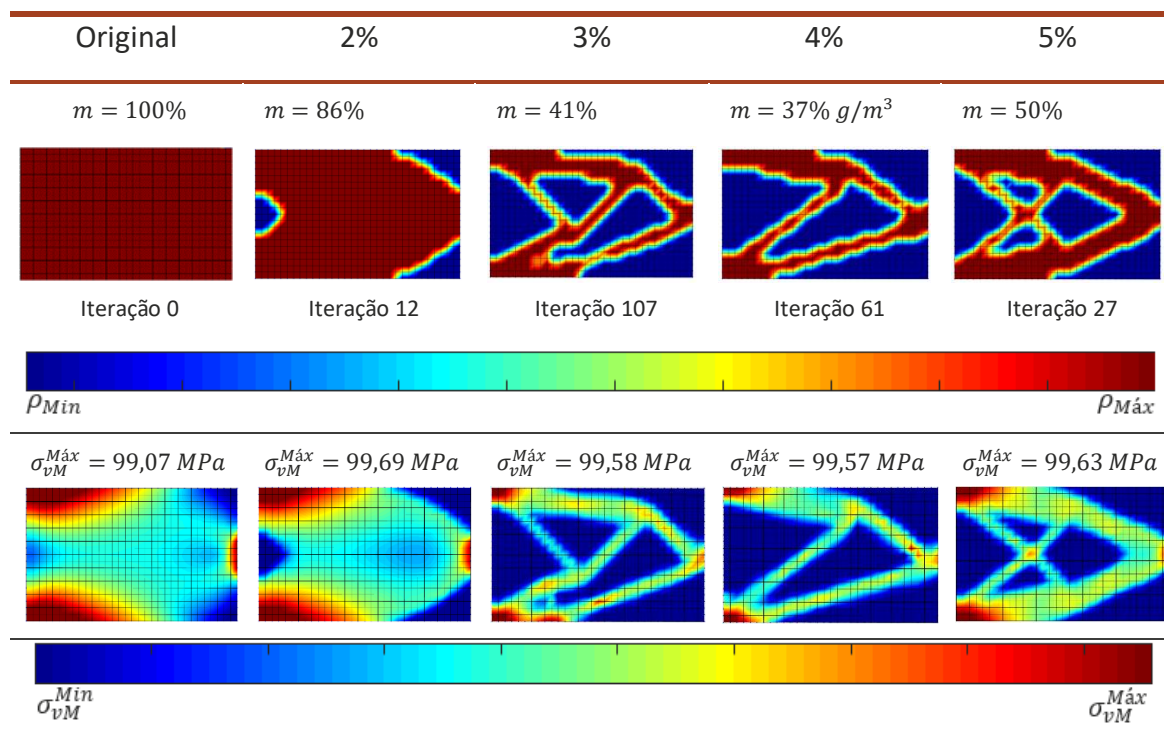
Inicialmente, avaliou-se o desempenho do MEF utilizando elementos quadriláteros sendo que, de seguida, recorreu-se ao RPIM com seis nós dentro do domínio de influência. Para finalizar, utilizando os primeiros vizinhos naturais e os segundos vizinhos naturais, dividiu-se a análise de otimização estrutural realizada pelo NRPIM.

Os dados referentes à tensão máxima de von Mises ($\sigma_{vM}^{Máx}$) e massa (m) foram retirados do ficheiro Excel, correspondente à iteração em causa através de uma rotina escrita no Matlab® (**Anexo 1**) que procura a pasta comprimida em que o ficheiro de resultados se encontra e procede à extração de todos os ficheiro, depois abre o ficheiro Excel de resultados da iteração indicada e automaticamente transcreve os valores de $\sigma_{vM}^{Máx}$ e m para um outro ficheiro Excel previamente definido (reunindo assim automaticamente os resultados das diferentes iterações).

5.2.1.2.1 Método dos Elementos finitos

Na análise realizada pelo MEF utilizou-se o critério de von Mises como critério de otimização e um total de 32x20 elementos quadriláteros. Na **Tabela 1** é possível encontrar as soluções obtidas e o estado de tensão para cada geometria. Como termo de comparação, optou-se por ilustrar a geometria e características da viga em consola antes do processo de otimização.

Tabela 1 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 32x20 elementos quadrangulares impondo o critério de von Mises



Tendo como objetivo principal a semelhança da solução obtida com a solução da literatura [59–62], considerou-se que a melhor solução seria a que apresenta a geometria mais semelhante.

O algoritmo de otimização utilizado limita a tensão instalada no domínio à tensão de cedência do material, neste caso de 100 MPa. Em consequência, o algoritmo procede à alteração da magnitude da carga aplicada até que seja atingido o volume estipulado. A análise termina quando o volume pretendido for alcançado ou quando for removido algum ponto onde está aplicada uma condição fronteira natural. Segundo alguns autores [59–62], a remoção de pontos pertencentes à condição natural de fronteira ocorre quando: (1) no caso do FEM, quando se utiliza uma malha pouco refinada; (2) nos métodos sem malha, quando se recorre a uma baixa densidade nodal.

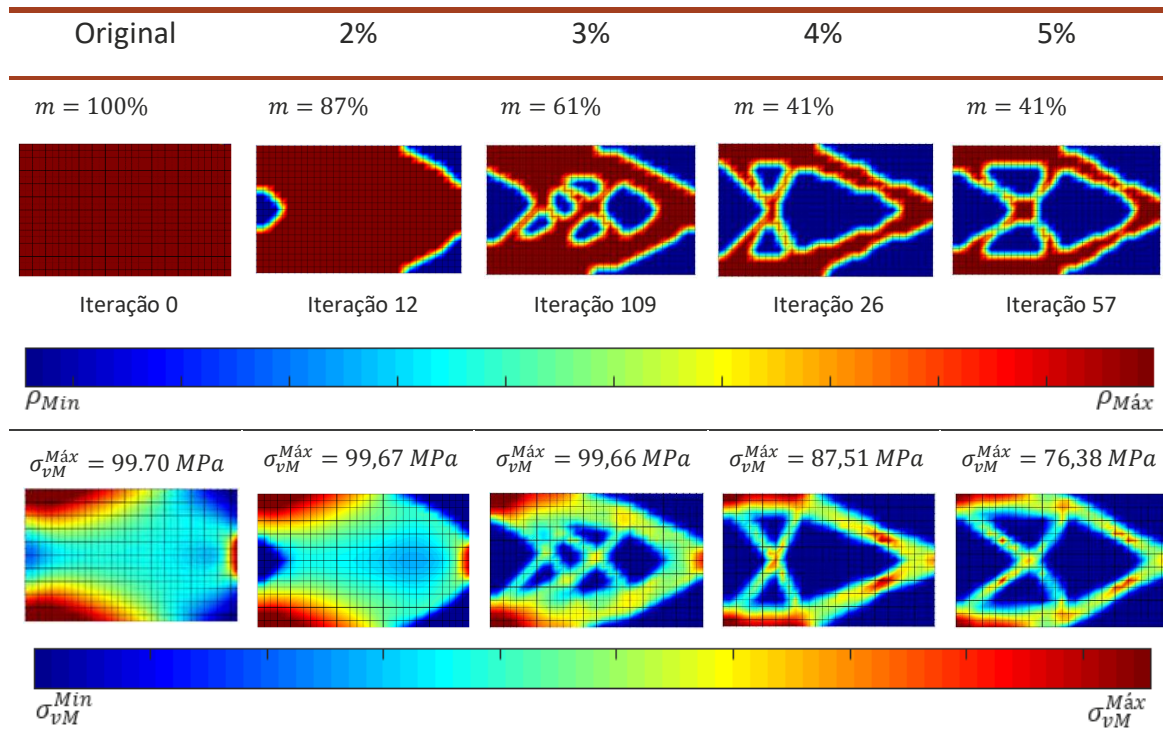
Como descrito anteriormente, a utilização de malhas pouco refinadas pode originar problemas de singularidade no processo de otimização, tal como se verifica pela solução obtida quando se considera uma TR de 2%. Isto porque a análise terminou ao fim de doze iterações sem que o volume pretendido fosse atingido.

Por outro lado, a utilização da TR de 3% permitiu obter uma solução em que o volume removido foi cerca de 60% do volume inicial. No entanto, a geometria obtida não apresenta semelhanças quando comparada com a geometria da literatura [59–62]. A falta de semelhanças ocorre quando o parâmetro de TR não se encontra ajustado ao método e à discretização usada, uma vez que este varia conforme o tipo de discretização e método utilizado. Apesar da geometria obtida através da utilização da TR de 4% apresentar um menor volume do que as restantes, cerca de 37%, é a geometria obtida pela TR de 5% que apresenta uma maior semelhança com a solução proposta na literatura [59–62]. Comparativamente, esta apenas remodelou 50% do volume inicial do domínio.

As soluções representadas na **Tabela 2** foram estabelecidas com base no critério de otimização da densidade de energia para a malha composta por 32x20 elementos.

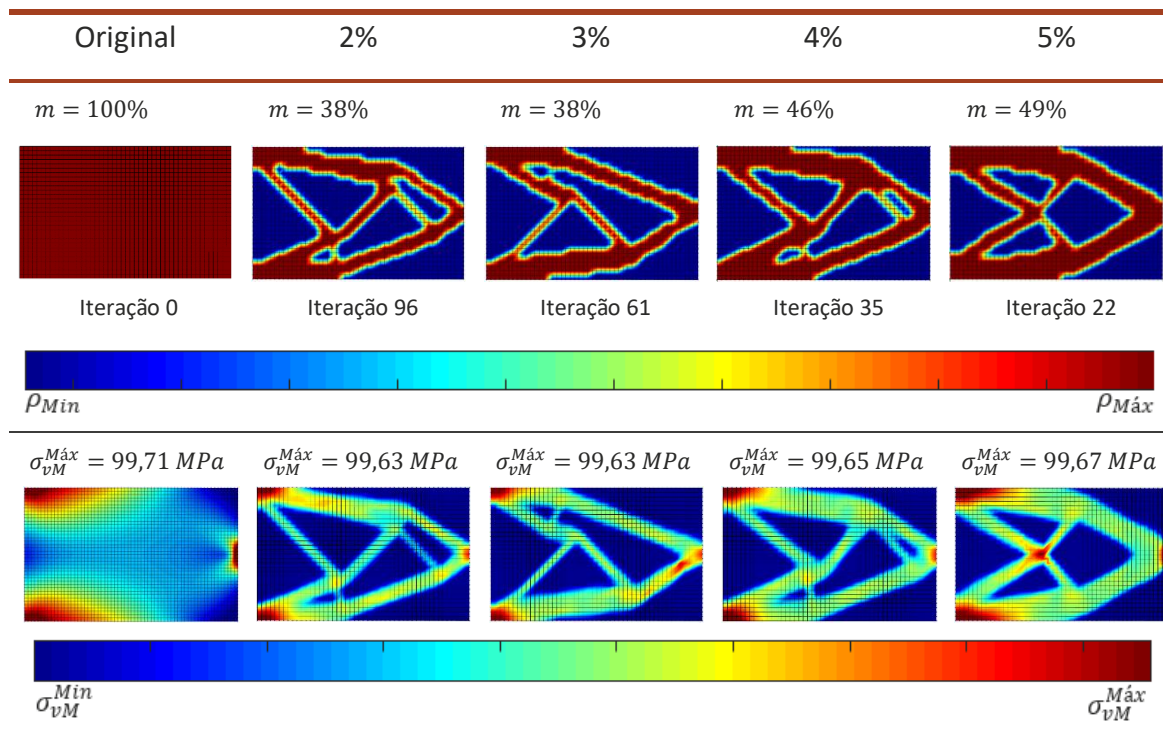
Desta forma, concluiu-se que, para a TR de 2%, à semelhança da solução obtida pelo critério de von Mises, não foi possível atingir o volume objetivo. O mesmo acontece com o resultado obtido para a TR de 3% que apenas permitiu a remoção de 39% do volume inicial. Por outro lado, as soluções obtidas para a TR de 4 e 5% alcançaram o volume esperado, sendo que para estas duas soluções é possível estabelecer algumas semelhanças com a solução proposta na literatura [59–62], tais como a simetria em relação ao plano médio horizontal. Apesar das duas soluções apresentarem o mesmo valor de R, é a solução obtida para a TR de 5% que apresenta uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62]. Considerando apenas as soluções que, para este tipo de discretização mais se assemelham com a solução da literatura [59–62], é possível concluir que o critério de otimização densidade de energia de deformação, apresenta um melhor desempenho quando comparado com o critério de von Mises. Tal conclusão resulta do facto da utilização deste critério permitir atingir o volume objetivo, um melhor valor de R e uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62].

Tabela 2 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 32x20 elementos quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



Considerando a análise realizada com 48x30 elementos quadriláteros e utilizando o critério de von Mises como critério de otimização, obtiveram-se os resultados ilustrados na **Tabela 3**.

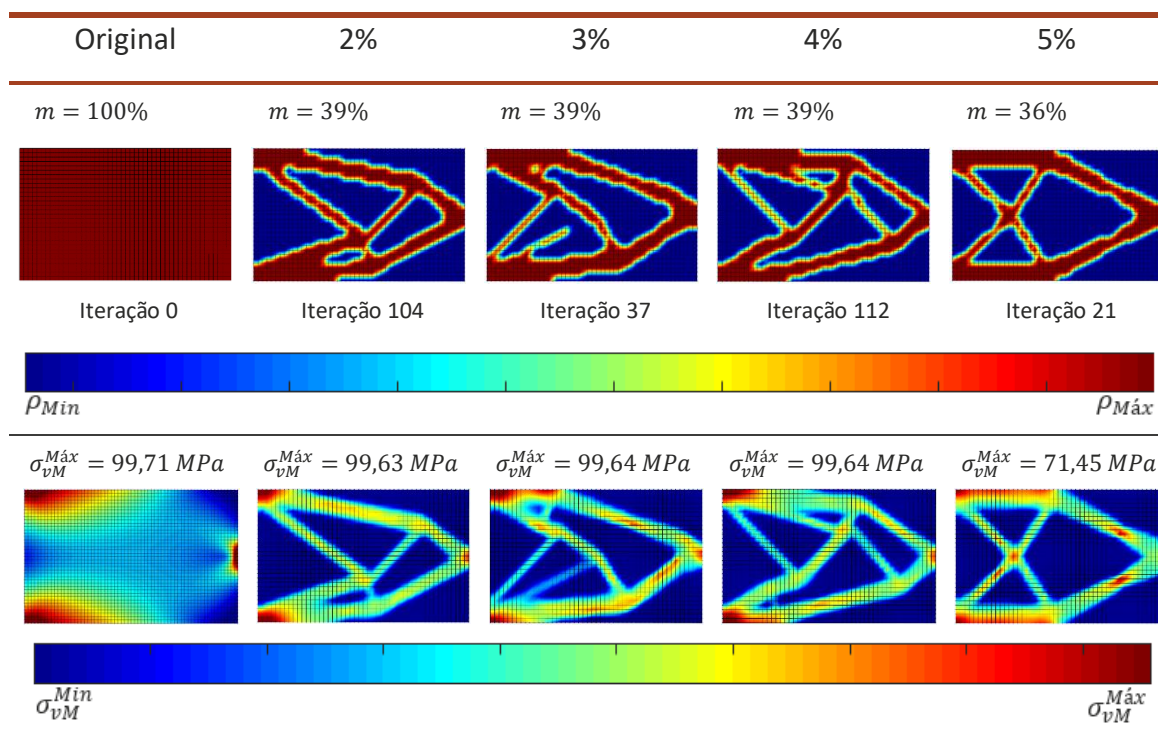
Tabela 3 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 48x30 elementos quadrangulares impondo o critério de von Mises



Apesar das diferenças de geometria, as soluções obtidas para as TR de 2 e 3% apresentam valores semelhantes em termos de percentagem de massa removida. No entanto, nenhuma das soluções apresenta uma geometria semelhante à da literatura [59–62]. A solução proposta na iteração 35, para uma TR de 4%, assemelha-se à geometria obtida pela TR de 2%, apesar de existir uma maior percentagem de massa, o que significa que a utilização de uma TR de 4% produz soluções com um maior valor de volume removido. Por outro lado, a TR de 5% permitiu obter a solução que apresenta uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62] apesar do volume final ser ligeiramente superior ao volume das restantes geometrias.

À semelhança da malha composta por 32x20 elementos quadrangulares, os resultados obtidos utilizando o critério da densidade de energia de deformação (**Tabela 4**), quando comparados com os resultados obtidos pelo critério de von Mises foram melhores. Isto porque, para todas as TR estudadas, as soluções obtidas atingiram o volume objetivo do início da análise. A solução obtida pela TR de 5% é a que apresenta uma maior semelhança com a solução ótima, enquanto que nas restantes soluções não se verificaram semelhanças. Pela análise do desempenho dos dois critérios de otimização, para a discretização por 48x30 elementos quadriláteros, é possível concluir que o critério de densidade de energia de deformação apresenta melhores resultados do que o critério de von Mises, tal como se tinha verificando anteriormente para a malha composta por 32x20 divisões

Tabela 4 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 48x30 elementos quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação

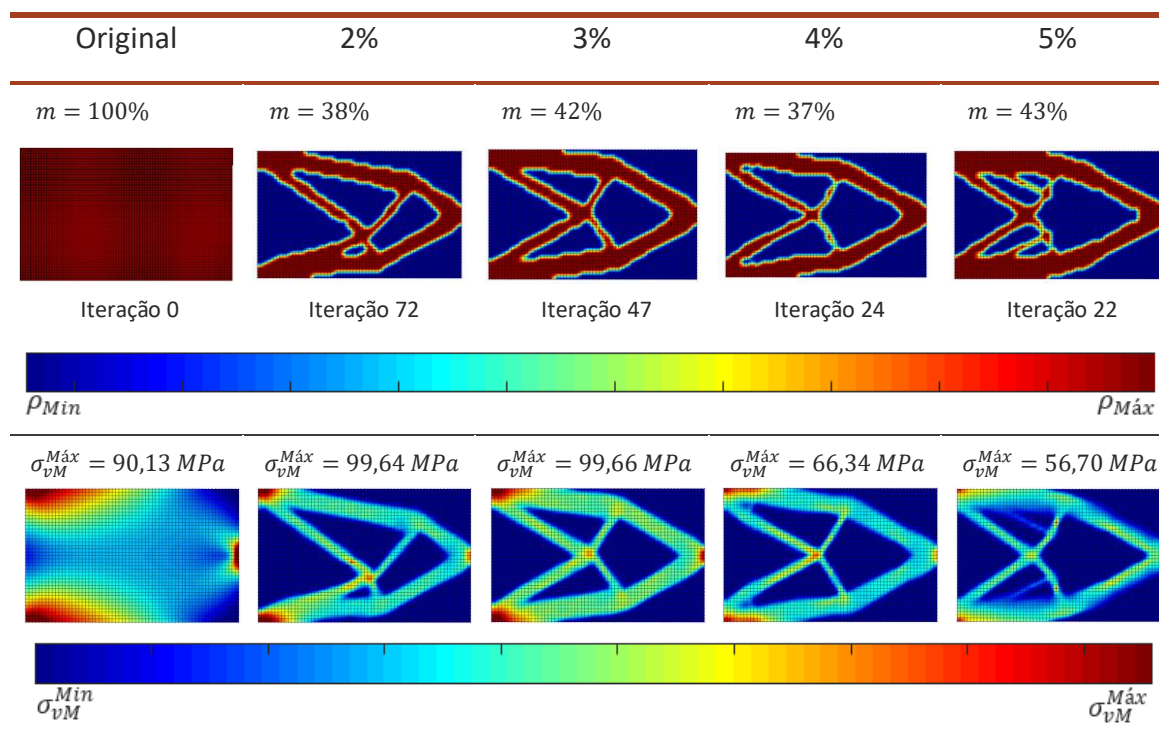


Na **Tabela 5** apresentam-se os resultados obtidos através da utilização de uma malha composta por 64x40 divisões (2560 elementos quadrangulares). Para a referida malha,

estudaram-se as taxas de remoção de 2, 3 4 e 5%, impondo o critério de otimização a tensão equivalente de von Mises.

Da análise da geometria, originada pela TR de 3%, concluiu-se que esta apresenta uma elevada semelhança em relação à solução da literatura [59–62]. Apesar da solução da TR de 4% também apresentar semelhanças com a literatura [59–62] encontraram-se zonas pouco definidas, devido à remoção em excesso de material. Devido à indefinição apresentada também na solução dada pela TR de 5% concluiu-se que, para a presente discretização, em que se utiliza como critério de otimização o critério de von Mises, a utilização de uma TR acima de 3% pode originar treliças pouco definidas na solução obtida, uma vez que não é possível maximizar o valor da tensão de cedência em todo o domínio devido às concentrações de tensões existentes nas zonas de menor definição material.

Tabela 5 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 64x40 elementos quadrangulares impondo o critério de von Mises

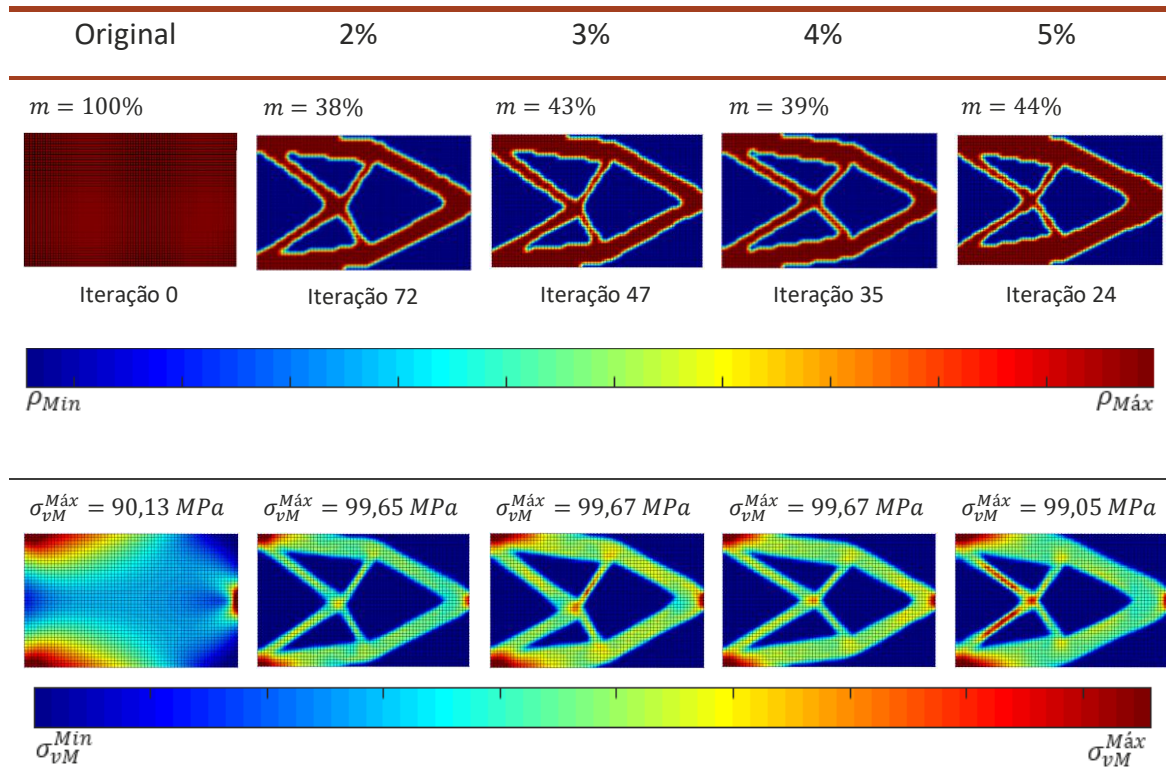


Por outro lado, impondo o critério de densidade de energia de deformação (**Tabela 6**) como critério de otimização para as mesmas TR, verificou-se que todas as treliças são claramente definidas com TR acima dos 3%.

Pela análise das quatro soluções, é possível concluir-se que todas apresentam semelhanças com a solução presente na literatura [59–62]. No entanto, a solução obtida pela TR de 3%, ao contrário das outras soluções, não apresenta simetria em relação ao plano médio horizontal, o que seria de esperar tendo em conta as soluções encontradas na literatura [59–62]. Devido às semelhanças de geometria apresentadas pelas soluções, torna-se pertinente a comparação das suas propriedades estruturais. A

solução obtida para a TR de 2% apresenta uma boa convergência com a solução da literatura [59–62]. No entanto, apesar de ter remodelado menos 1% de volume, a solução obtida para a TR de 4% apresenta também uma boa semelhança com a solução da literatura [59–62], uma vez que não apresenta zonas de indefinição material e apresenta simetria com o plano médio horizontal.

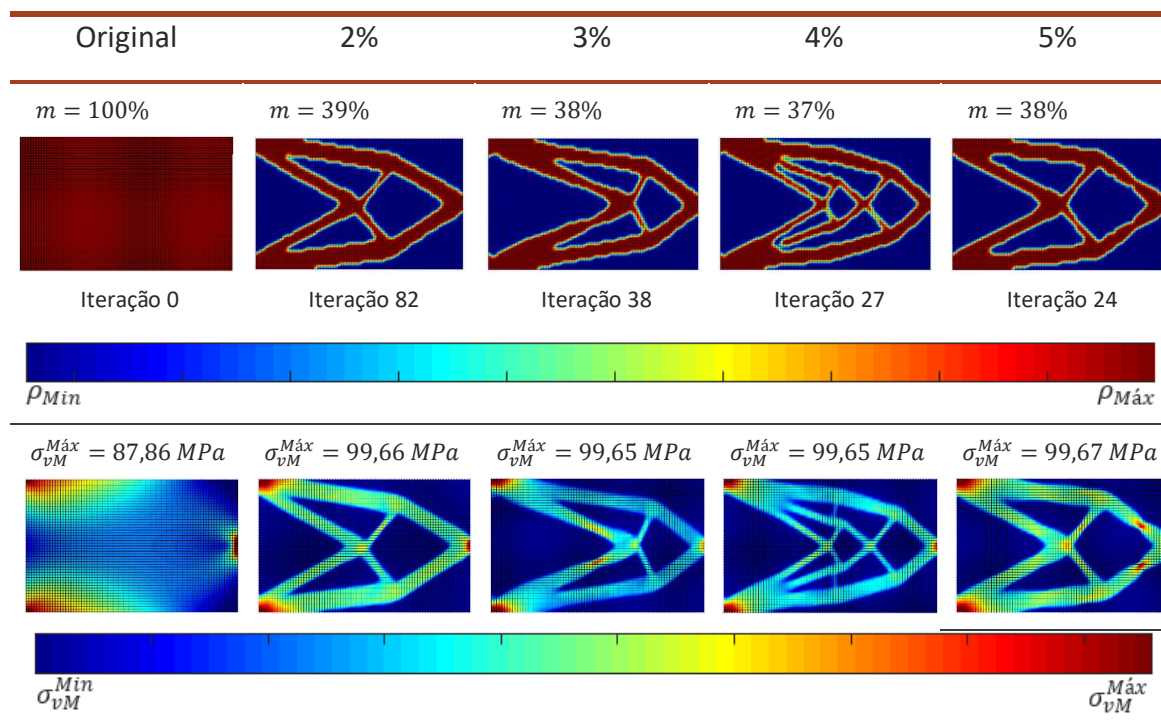
Tabela 6 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 64x40 elementos quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



Na **Tabela 7** estão representadas as soluções referentes ao processo de otimização estrutural do domínio discretizado por 80x50 elementos quadrangulares, através da imposição do critério de von Mises.

As geometrias obtidas para a TR de 2, 3 e 5% apresentam semelhanças com a geometria ótima. Entre estas, a geometria obtida através da TR de 2%, é a solução que apresenta uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62], ainda que não apresente total simetria em relação ao plano médio horizontal. Nas restantes soluções, 3 e 5%, a remoção do material ocorreu em zonas diferentes do domínio, ainda que a geometria final seja consistente com a solução da literatura [59–62]. Por último, apesar da geometria obtida através da utilização da TR de 4% apresentar simetria em relação ao plano médio horizontal, ao contrário das restantes, não apresenta zonas de remoção de material consistentes com a solução da literatura [59–62].

Tabela 7 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 80x50 elementos quadrangulares impondo o critério de von Mises

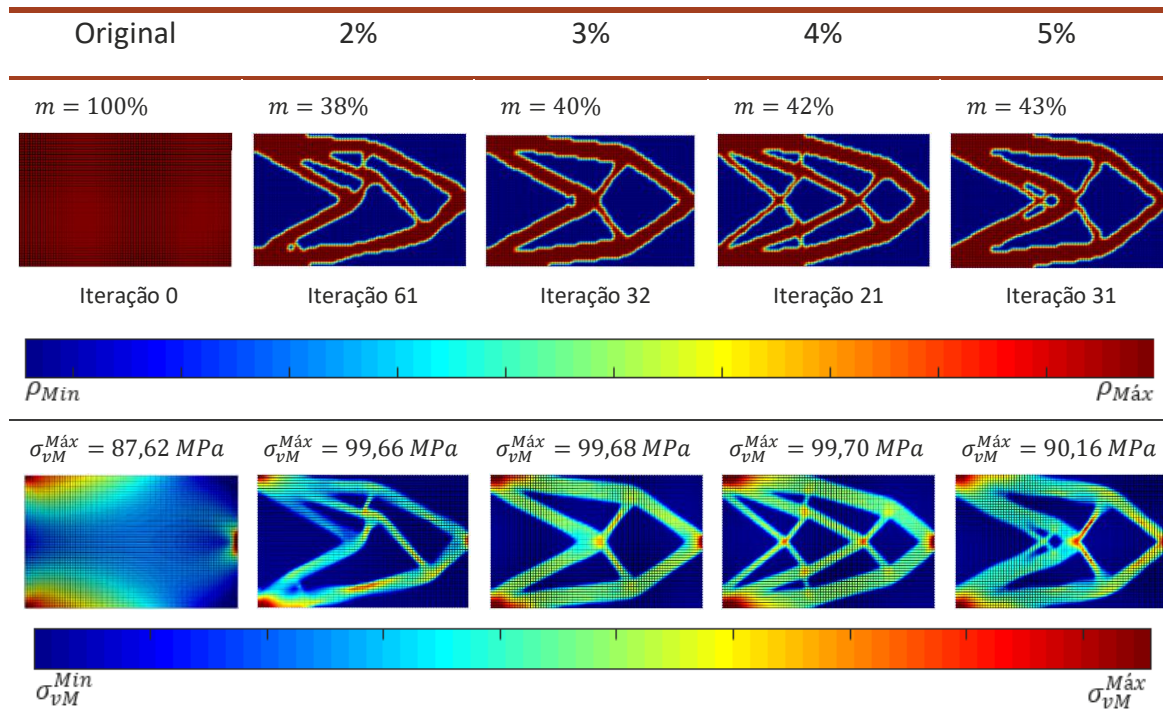


Na **Tabela 8** estão ilustradas as geometrias obtidas através da utilização do critério da densidade de energia de deformação, para o domínio discretizado através de 80x50 elementos quadrangulares.

Ao contrário do que se verificou nas discretizações estudadas anteriormente, a imposição do critério de densidade de energia de deformação originou apenas uma solução semelhante com a solução ótima. Apesar deste resultado poder ser contornado pela análise de mais TR, o elevado custo computacional inerente a essa análise, não permitiu explorar diferentes parâmetros de otimização com o intuito de atingir um número significativo de soluções semelhantes ao descrito na literatura [59–62]. O elevado custo computacional justifica-se pelo facto do domínio apresentar elevada densidade nodal.

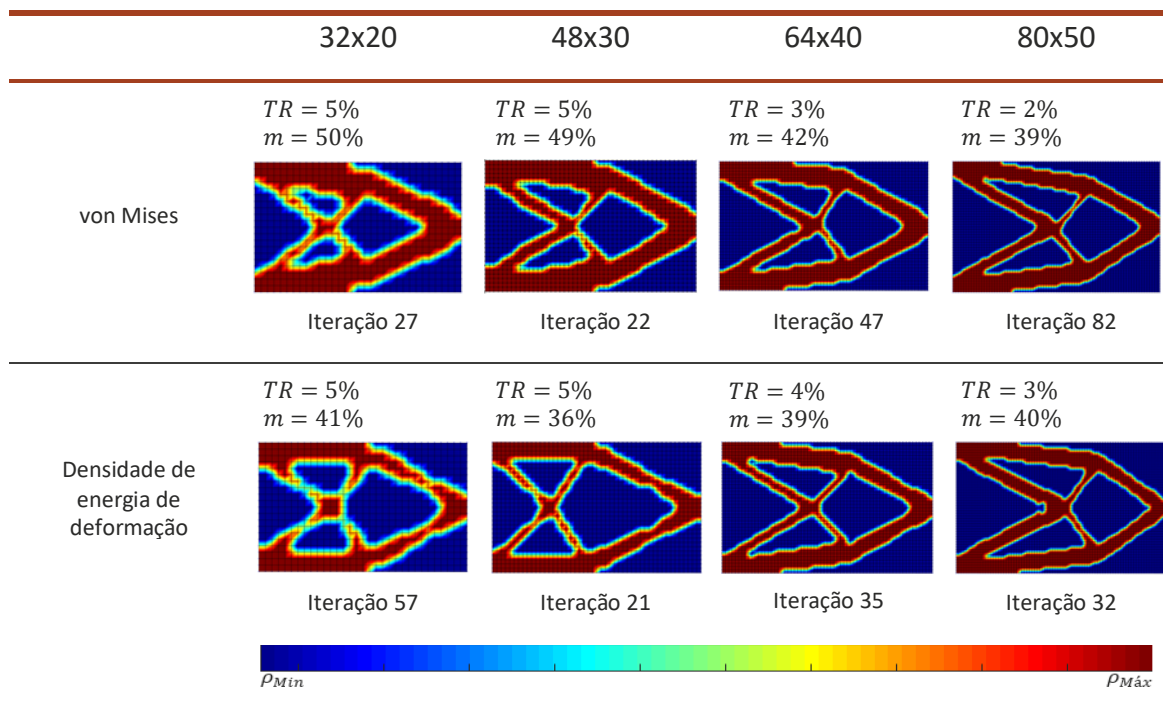
Pela análise da **Tabela 8** é possível concluir que a utilização da TR de 3% permite a obtenção de uma solução com semelhanças satisfatórias com a solução da literatura [59–62]. Ainda que as restantes soluções não apresentem semelhanças com a solução ótima, é de notar a inexistência de irregularidades ao longo do contorno, o que facilita o redesenho da solução final.

Tabela 8 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do MEF para um domínio discretizado por 80x50 elementos quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



De forma a facilitar a comparação das melhores soluções obtidas, entre os critérios selecionados e os diferentes níveis de discretização, elaborou-se a **Tabela 9**.

Tabela 9 – Comparação das soluções obtidas pelo critério de von Mises e pelo critério da densidade de energia de deformação utilizando o MEF

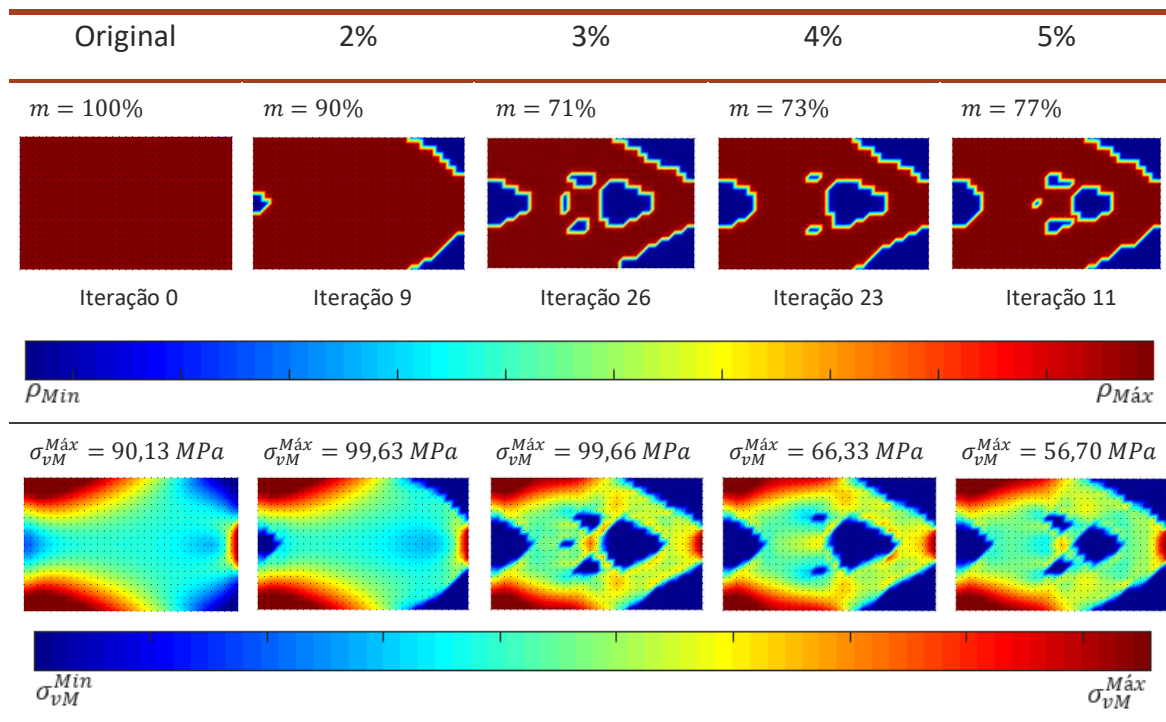


Através da sua análise é possível concluir que com o aumento do nível de discretização, para ambos os critérios, as soluções tornam-se mais evidentes e com menos irregularidades (o corpo de cada treliça é claramente definido). Este resultado realça a importância da escolha de uma densidade nodal adequada à discretização do domínio, uma vez que será um parâmetro fulcral para a obtenção de bons resultados de otimização estrutural, tal como descrito em vários artigos presentes na literatura [59–62]. A comparação dos melhores resultados permitiu ainda identificar as TR mais adequadas para cada um dos níveis de discretização, o que permitiu aos autores do presente estudo a aplicação dos parâmetros ideais a outras geometrias. Para além disso, é também fundamental para outros autores poderem compreender e replicar o presente estudo. Em suma, é possível concluir que, para o MEF, a utilização do critério de densidade de energia de deformação originou, no geral, soluções mais precisas, pelo que torna pertinente a utilização deste critério em análises futuras.

5.2.1.2.2 Radial Point Interpolation Method

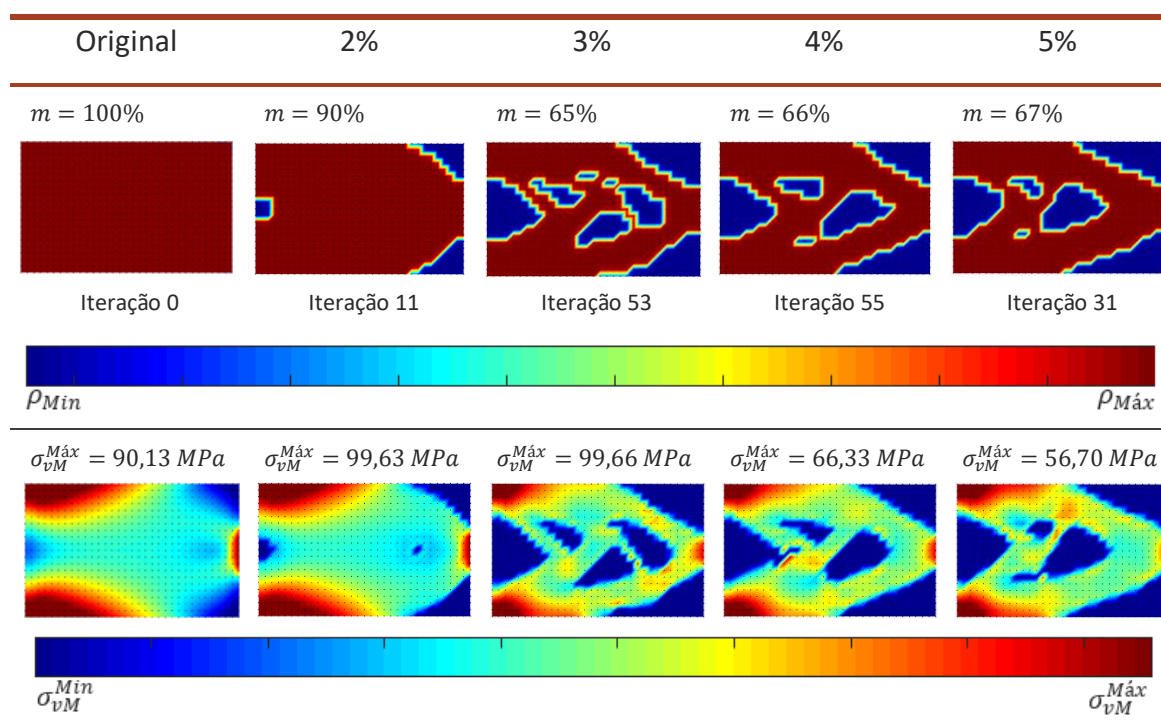
Utilizando a discretização 32x20, avaliou-se o desempenho do RPIM na otimização estrutural. À semelhança da análise realizada utilizando o MEF, estabeleceu-se um volume objetivo de 40% do volume inicial e analisaram-se as soluções para os dois critérios em estudo. Em ambas as análises utilizaram-se seis nós dentro do domínio de influência, o que representa uma total de 693 nós distribuídos regularmente pelo domínio e 640 células de integração. Na **Tabela 10** estão representadas as soluções obtidas para cada TR, utilizando o critério de von Mises como critério de otimização, assim como o estado de tensão correspondente a cada geometria.

Tabela 10 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 32x20 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises



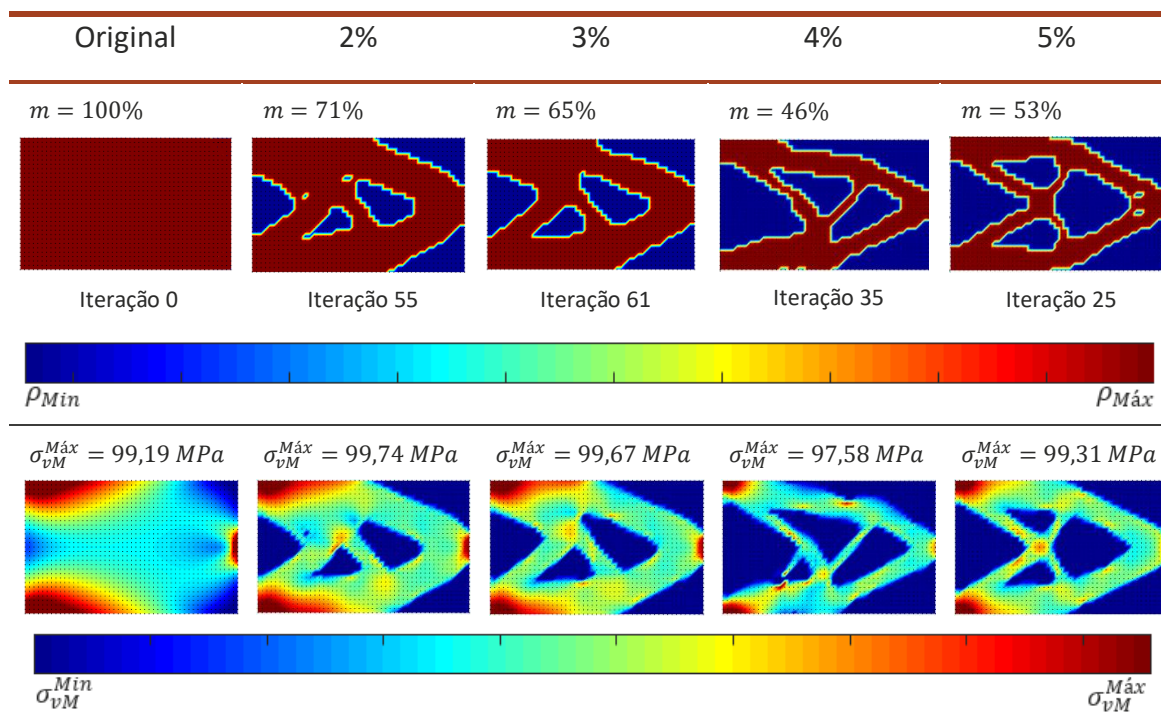
Na **Tabela 11** encontram-se as soluções obtidas através da imposição do critério da densidade de energia de deformação como critério de otimização. Apesar da maioria das soluções apresentarem uma percentagem de volume inferior, quando comparadas com as soluções obtidas através da utilização do critério de von Mises, estas não apresentam semelhanças em relação à solução presente na literatura [59–62]. Assim, é possível concluir que, para mesma discretização do domínio (32x20), o RPIM apresenta resultados pouco semelhantes com a solução da literatura [59–62], em comparação com o MEF, uma vez que as soluções obtidas não atingiram o volume objetivo. Por outro lado, devido ao baixo volume de material remodelado, para ambos os critérios, torna-se difícil de concluir qual dos critérios de otimização origina melhores resultados para a presente discretização.

Tabela 11 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 32x20 células de integração impondo o critério da densidade de energia de deformação



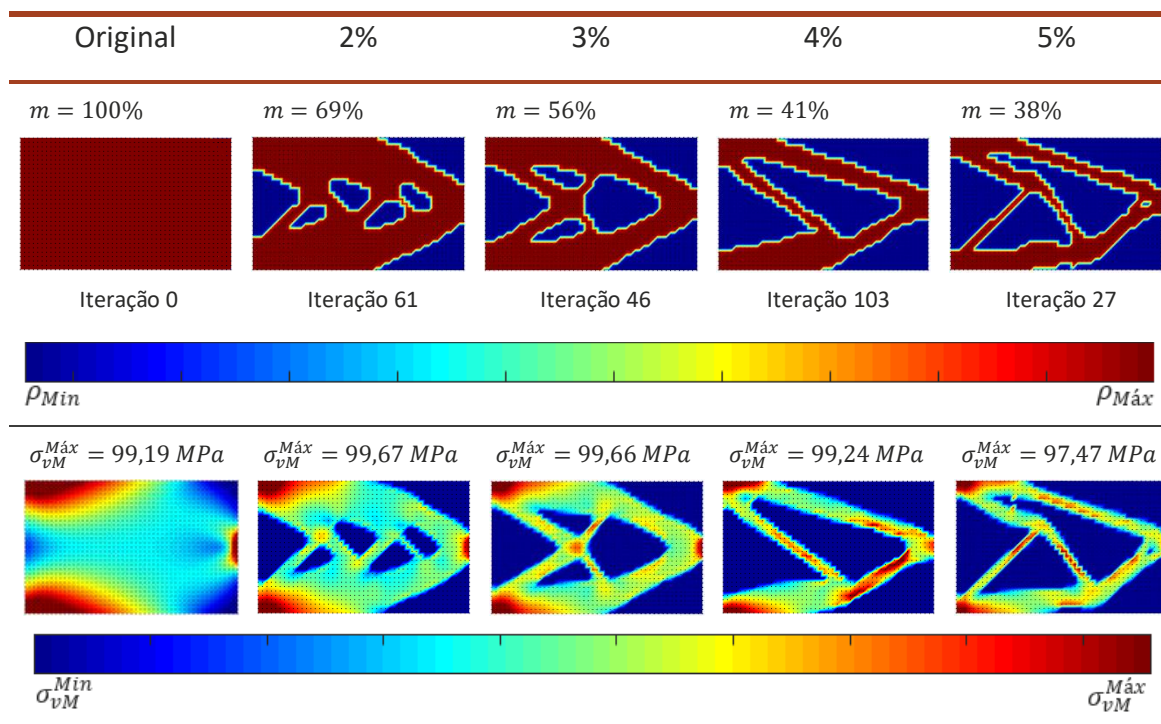
Considerando a discretização do domínio através de 48x30 divisões, obtiveram-se os resultados representados na **Tabela 12**. Através da presente discretização, foi possível a criação de uma malha de integração de fundo com 1440 células de integração. Da análise dos resultados do processo de otimização estrutural é possível concluir que, para TR inferiores a 3%, as soluções obtidas não apresentam semelhanças com a solução da literatura [59–62], nem atingem o valor do volume estabelecido no início da análise. No entanto, apesar da solução obtida através da TR de 4% atingir o volume objetivo, não apresenta semelhanças com a solução presente na literatura [59–62]. Por outro lado, a solução obtida para a TR de 5% apresenta semelhanças com a solução ótima, apesar da existência de algumas zonas com menor definição material.

Tabela 12 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 48x30 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises



Na **Tabela 13** estão representadas as soluções do processo de otimização estrutural para a discretização composta por 1519 nós (48x30 divisões) impondo o critério da densidade de energia de deformação.

Tabela 13 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 48x30 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



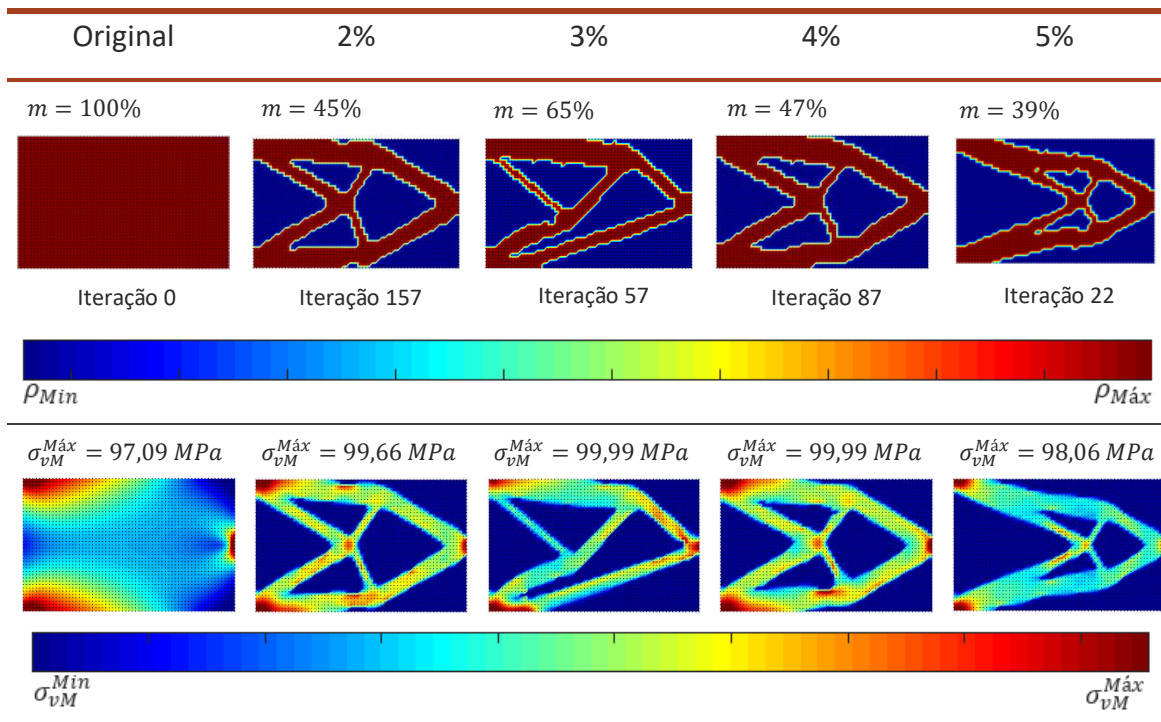
Ao contrário do que se verifica no MEF, em que os melhores resultados para a descrição do domínio utilizando 48x30 divisões são obtidos através da imposição do critério da densidade de energia de deformação, o RPIM produz melhores soluções quando é aplicado o critério de von Mises como critério de otimização.

Como é possível verificar pelas soluções apresentadas na **Tabela 13**, apenas a solução obtida através da TR de 3% apresenta semelhanças com a solução proposta na literatura [59–62]. No entanto, o volume da geometria é cerca de 3% superior ao volume da melhor solução obtida através da aplicação do critério de von Mises, como critério de otimização (**Tabela 12**). Ainda assim, apesar do volume final ser superior, a solução apresenta semelhanças com a geometria ótima.

Os resultados apresentados na **Tabela 14** representam as soluções da otimização estrutural para um domínio discretizado com um total de 64x40 células de integração, com base no critério de von Mises como critério de otimização.

Analisando as geometrias obtidas é possível concluir que existem três soluções que apresentam semelhanças com a solução da literatura [59–62], sendo elas obtidas através da utilização das TR de 2, 4 e 5%. No entanto, a solução que mais se assemelha com a geometria ótima é a obtida através de uma TR de 2%, visto que apresenta simetria em relação ao plano médio horizontal e as indefinições materiais ao longo do seu contorno são escassas. Por outro lado, apesar da solução obtida pela TR de 4% não apresentar simetria em relação ao plano médio horizontal, é possível concluir que a utilização da TR de 4% permite obter uma semelhança razoável com a solução ótima.

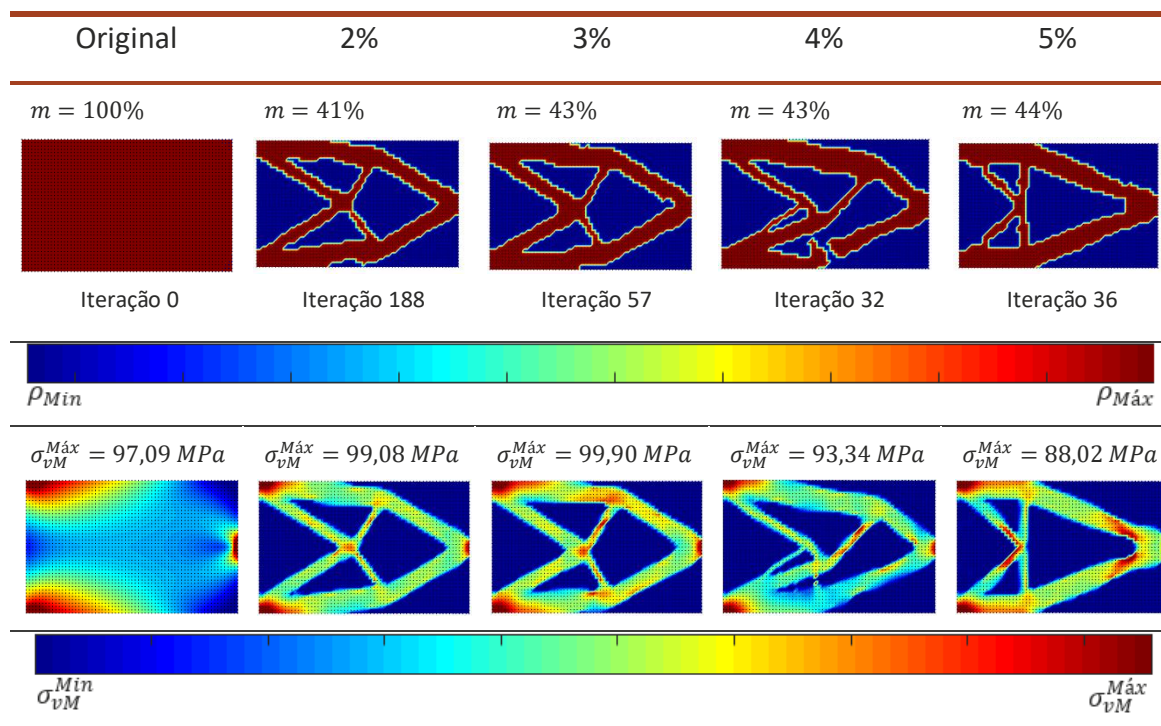
Tabela 14 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 64x40 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises



Na **Tabela 15** são apresentados os resultados obtidos para a discretização do domínio com 2665 nós, com recurso ao critério de densidade de energia de deformação como

critério de deformação. À semelhança dos resultados obtidos para a discretização do domínio recorrendo a 1519 nós (48x30 divisões), a presente discretização também apresenta soluções mais estáveis e mais semelhantes quando é utilizando o critério de von Mises. No entanto, a solução obtida para a TR de 2% destaca-se das restantes, uma vez que não só apresenta uma semelhança aceitável com a solução da literatura [59–62], como revela um número pequeno de instabilidades ao longo do seu contorno. Por outro lado, a solução obtida para a TR de 5%, apesar de apresentar simetria completa em relação ao plano médio horizontal, revela uma geometria diferente da presente na literatura [59–62], uma vez que a treliça se encontra recuada em comparação com o que se verifica na literatura [59–62]. Por último, as restantes soluções não apresentam simetria em relação ao plano médio horizontal e a solução obtida para a TR de 4% apresenta um elevado número de instabilidades devido ao excesso de material removido.

Tabela 15 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 64x40 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



Na **Tabela 16** estão ilustradas as geometrias obtidas através da aplicação do critério de von Mises ao domínio discretizado por 4131 nós. Apesar de todas as soluções terem atingido o volume objetivo, apenas nas soluções referentes às TR de 4 e 5% se verificam semelhanças com a solução da literatura [59–62]. Contudo, pelo facto da 5% apresentar zonas de instabilidade, é possível afirmar que, para a presente densidade nodal, a utilização de uma TR de 4% é a que resulta em soluções estáveis e precisas. Considerando a mesma discretização do domínio, 4131 nós, e impondo o critério da densidade de energia de deformação, obteve-se as soluções representadas na **Tabela 17**.

Tabela 16 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 80x50 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises

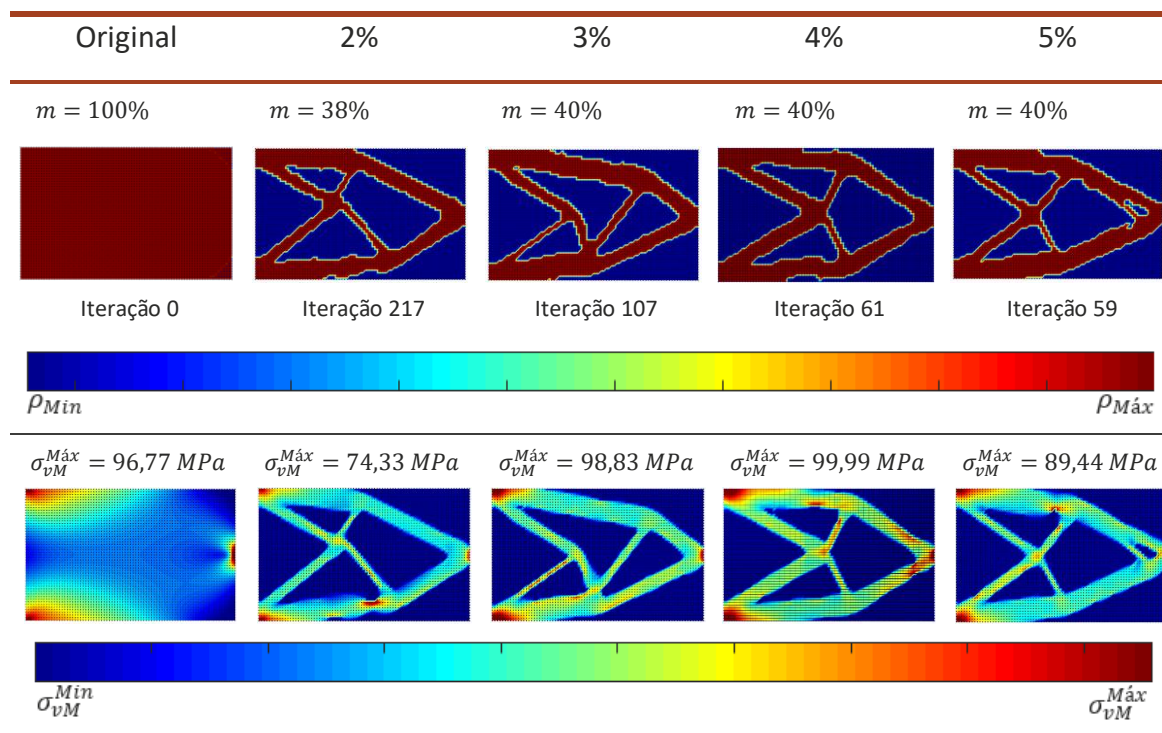
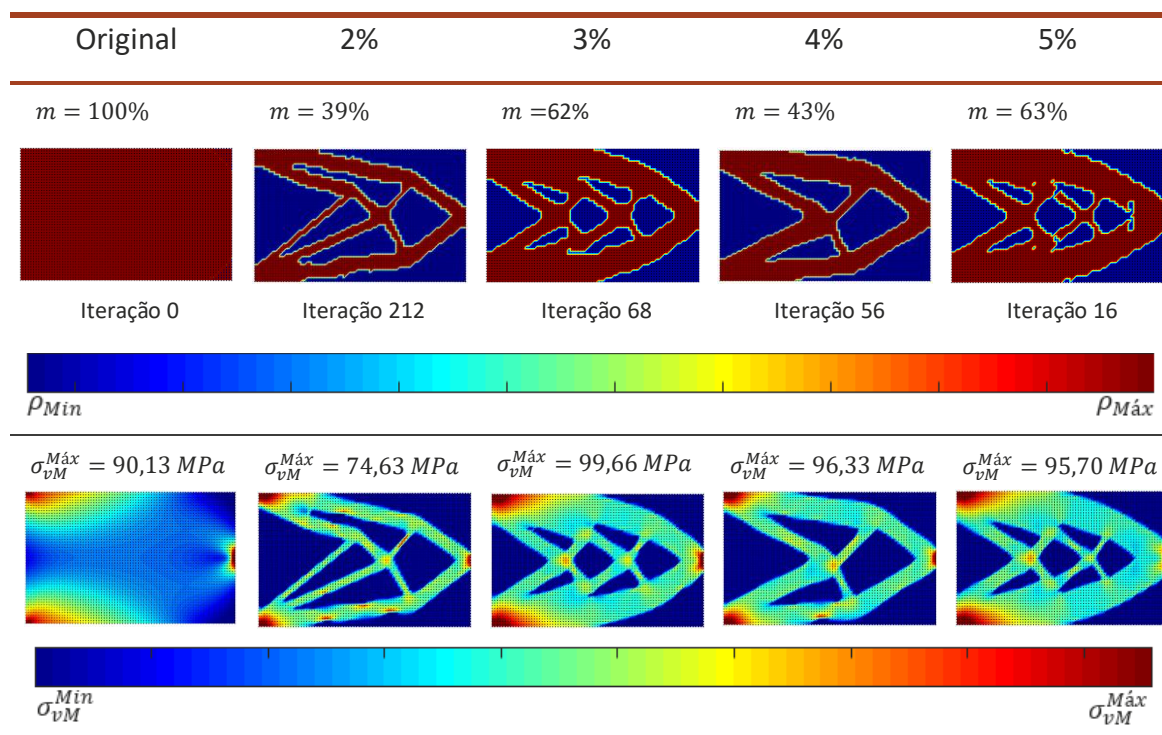


Tabela 17 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do RPIM para um domínio discretizado por 80x50 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação

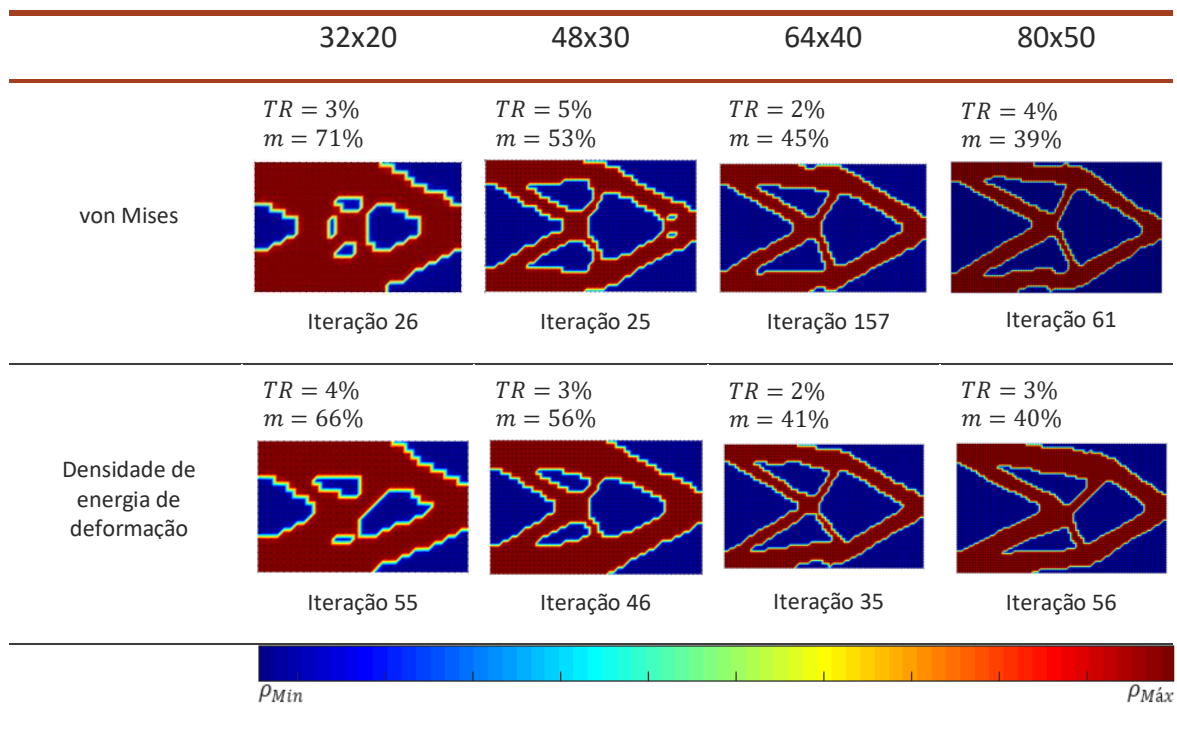


Pela análise da tabela é possível perceber que nenhuma das soluções obtidas apresenta uma semelhança significativa com a solução da literatura [59–62]. Ainda assim, a TR de 4% apresenta uma geometria em que a remoção do material é

consistente com a solução da literatura [59–62], pelo que a sua utilização, para esta análise, promove a obtenção de melhores resultados, em comparação com as restantes TR.

Considerando a **Tabela 18** onde estão representadas as soluções que apresentam uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62], é possível concluir que, apesar da existência de algumas indefinições materiais, as soluções obtidas através do critério de von Mises apresentam no geral soluções com uma maior semelhança. Ao contrário do que acontece no MEF, no RPIM não é possível estabelecer uma relação entre o aumento da densidade nodal e o parâmetro TR ótimo, uma vez que o valor varia consoante a discretização utilizada. No entanto, é possível concluir que o aumento da densidade nodal produz soluções que apresentam contornos mais suaves. Também é possível constatar que existe um maior número de soluções, obtidas através do critério de von Mises, que apresentam semelhanças com a solução da literatura [59–62], quando comparadas com as soluções obtidas pelo critério da densidade de energia de deformação.

Tabela 18 – Comparação das soluções obtidas pelo critério de von Mises e pelo critério da densidade de energia de deformação utilizando o RPIM



5.2.1.2.3 Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method (primeiros vizinhos naturais)

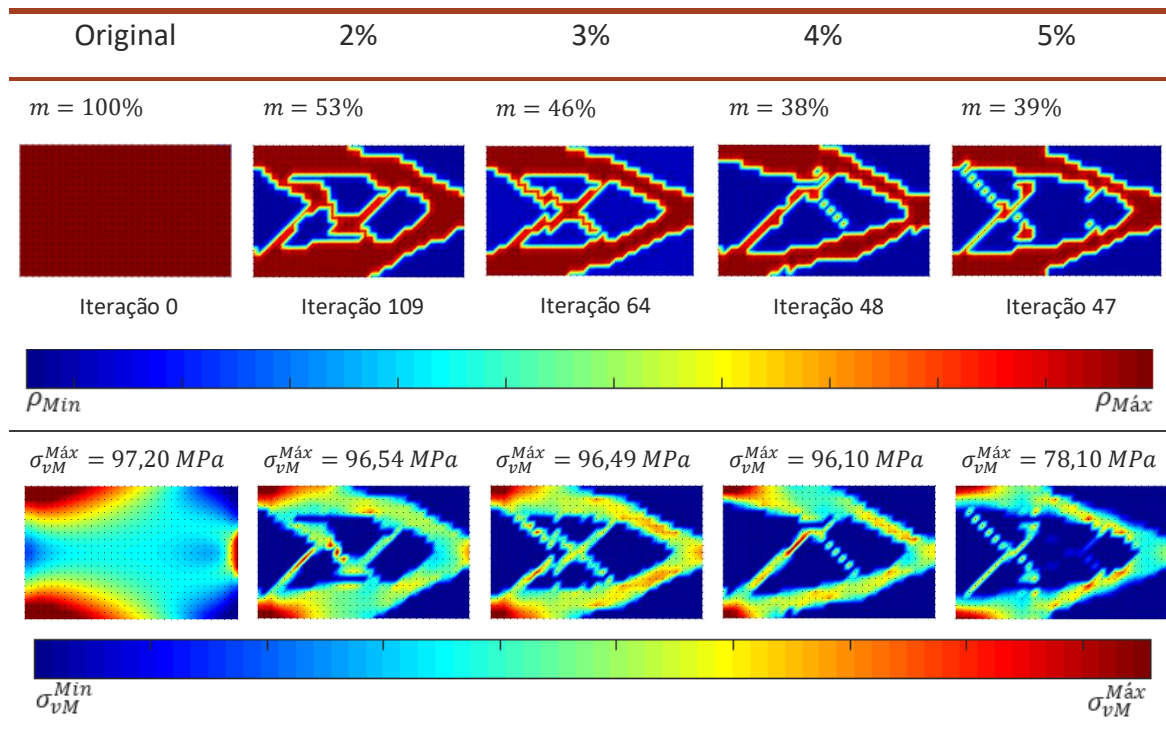
A análise realizada através do NNRPIM foi dividida em duas análises distintas. Numa fase inicial, avaliou-se o desempenho do método no processo de otimização estrutural, utilizando células de integração de primeira ordem. Para isso, considerou-se a discretização do domínio através de 32x20 divisões e, à semelhança dos outros métodos estudados, estabeleceu-se que a análise seria finalizada quando a geometria

otimizada apresenta-se um volume de cerca de 40% do volume inicial. As soluções obtidas estão representadas na **Tabela 19**. A segunda fase da análise será descrita no ponto 3.2.1.2.4.

À semelhança dos resultados obtidos pelo RPIM para a mesma discretização do domínio, as soluções encontradas apresentam um elevado número de indefinições materiais. No entanto, a maioria das soluções obtidas pelo NNRPIM atingiram o volume objetivo definido no início da análise.

De todas as geometrias, obtidas para as diferentes TR em estudo, apenas a solução obtida pela TR de 3% apresenta semelhanças com a solução proposta na literatura [59–62]. Porém, importa destacar que a TR de 2%, que não atingiu o volume objetivo, quando comparada com as restantes soluções, não apresenta zonas de indefinição material (todas as treliças estão definidas claramente).

Tabela 19 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 32x20 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises

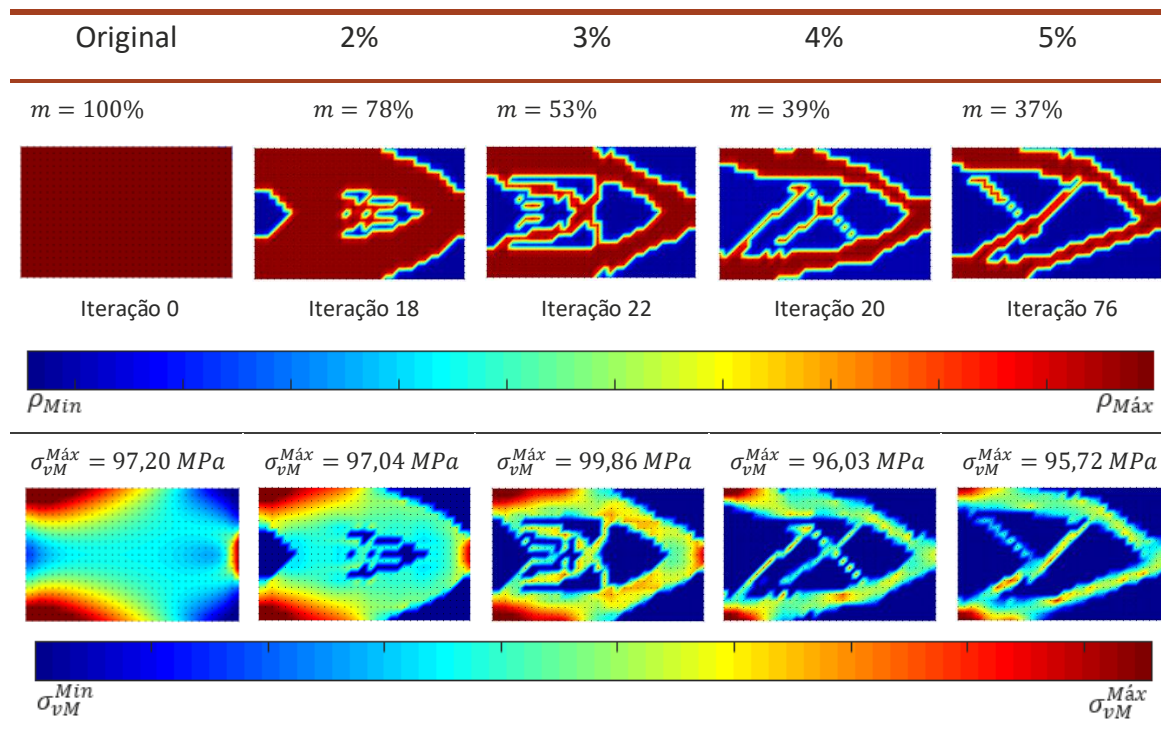


Impondo o critério da densidade de energia de deformação como critério de otimização, foi possível encontrar as soluções representadas na **Tabela 20**. No entanto, devido à baixa densidade nodal da presente discretização, a solução obtida para a TR de 2% não atingiu o volume objetivo, remodelando apenas 22% do material presente no domínio.

À semelhança do que se observou aquando da utilização do critério de von Mises, a solução que apresenta uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62], apesar da existência de zonas de indefinição material, é a solução obtida através da TR

de 3%. As restantes soluções, para TR superiores a 3%, não apresentam semelhanças com a geometria da literatura [59–62] e apresentam várias zonas de indefinição material.

Tabela 20 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 32x20 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



Considerando o domínio discretizado por 48x30 divisões e impondo o critério de von Mises como critério de otimização, obteve-se as soluções apresentadas na **Tabela 21**.

Através da análise das geometrias das soluções encontradas é possível concluir que apenas uma das soluções, a solução obtida através da utilização da TR de 5%, apresenta semelhanças com a solução da literatura [59–62]. Apesar da solução ser maioritariamente simétrica em relação ao plano médio horizontal, ainda se observam zonas de indefinição material, devido à remoção excessiva de material.

Relativamente às propriedades mecânicas, e apesar da existência de concentração de tensões nas zonas onde ocorreu a remoção de material em excesso, a solução obtida para a TR de 5% apresenta semelhanças com a geometria ótima.

Considerando a mesma densidade nodal, isto é, a mesma discretização do domínio, utilizou-se o critério da densidade de energia de deformação como critério de otimização, o que resultou nas soluções apresentadas na **Tabela 22**.

Tabela 21 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 48x30 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises

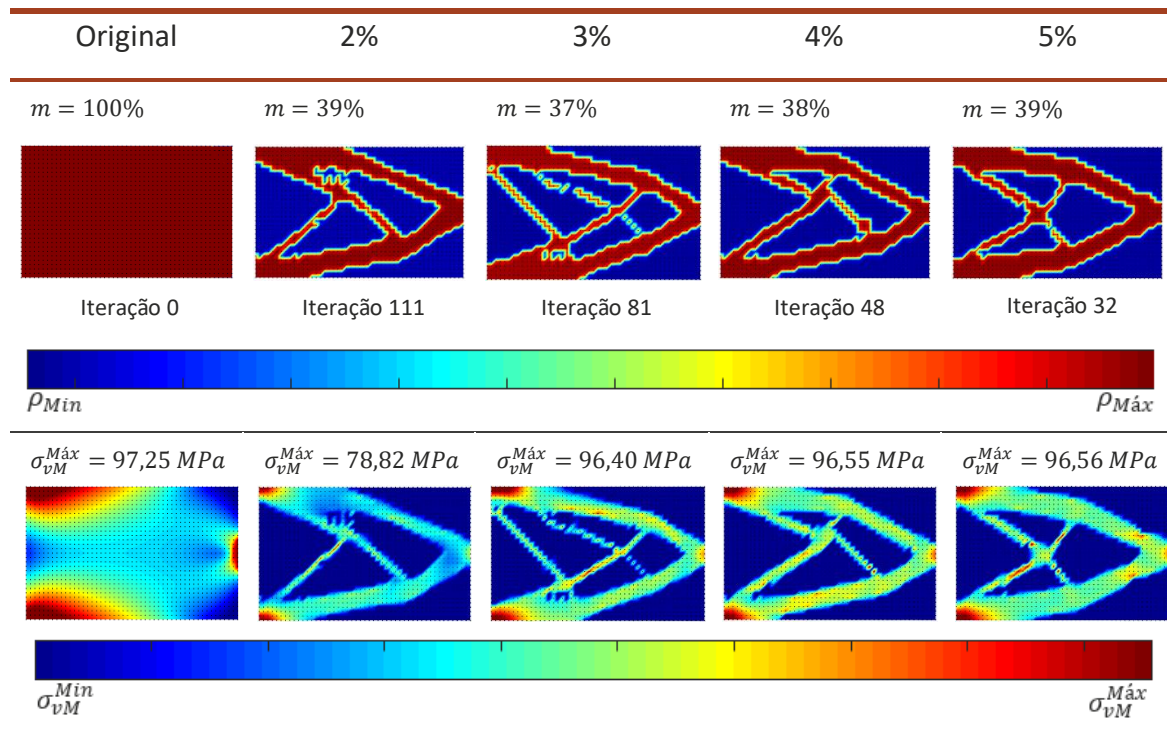
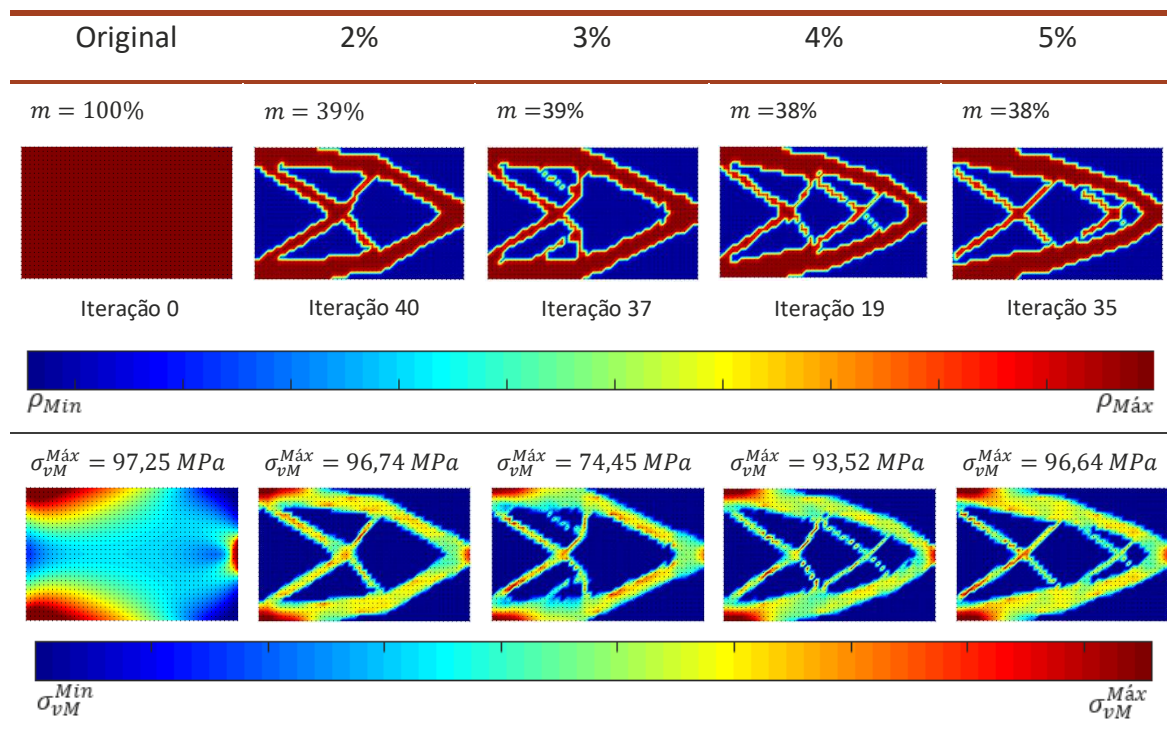


Tabela 22 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 48x30 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação

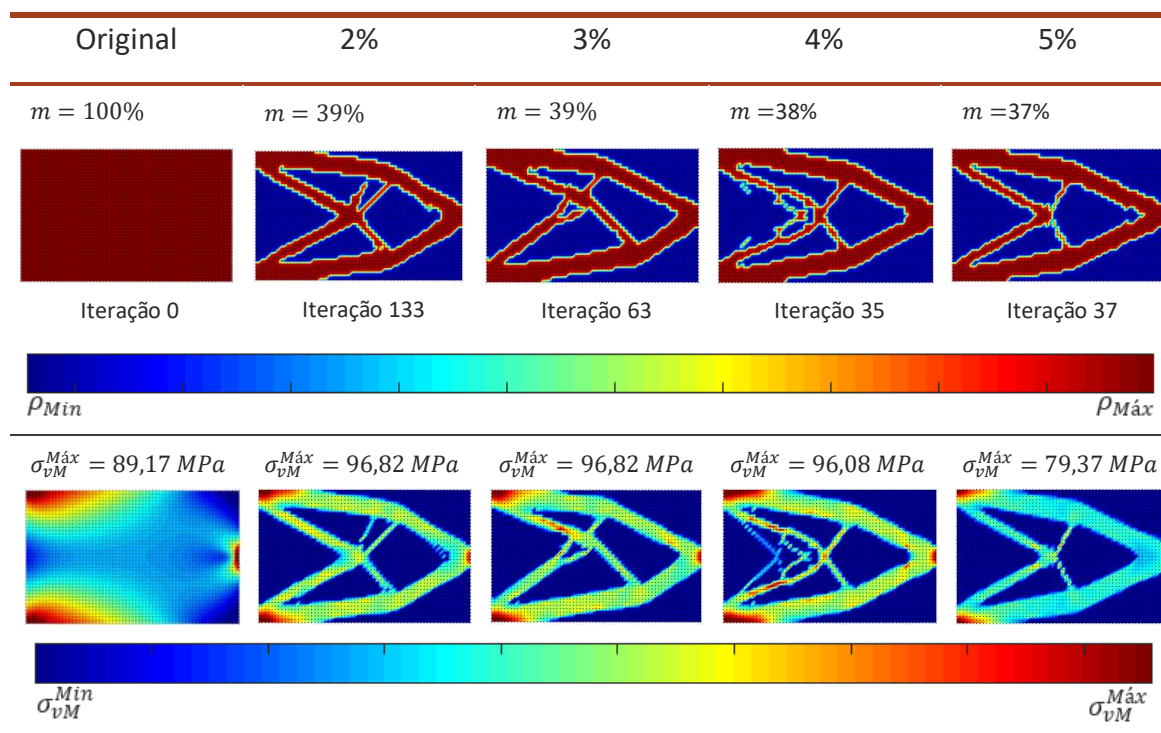


Da análise das soluções encontradas concluiu-se que a geometria obtida para a TR de 2% apresenta semelhanças com a geometria sugerida na literatura [59–62], uma vez que apresenta simetria em relação ao plano médio horizontal. Por outro lado, as restantes soluções apresentam várias zonas de indefinição material, o que é indicativo de remoção de material em excesso. Assim, é possível concluir que, para a presente discretização (48x30 divisões), a utilização de TR superiores a 2% geram soluções poucos estáveis e, por isso, não se recomenda a sua utilização.

Na **Tabela 23** estão representadas as soluções obtidas, impondo o critério de von Mises, para uma discretização do domínio através de 2665 nós.

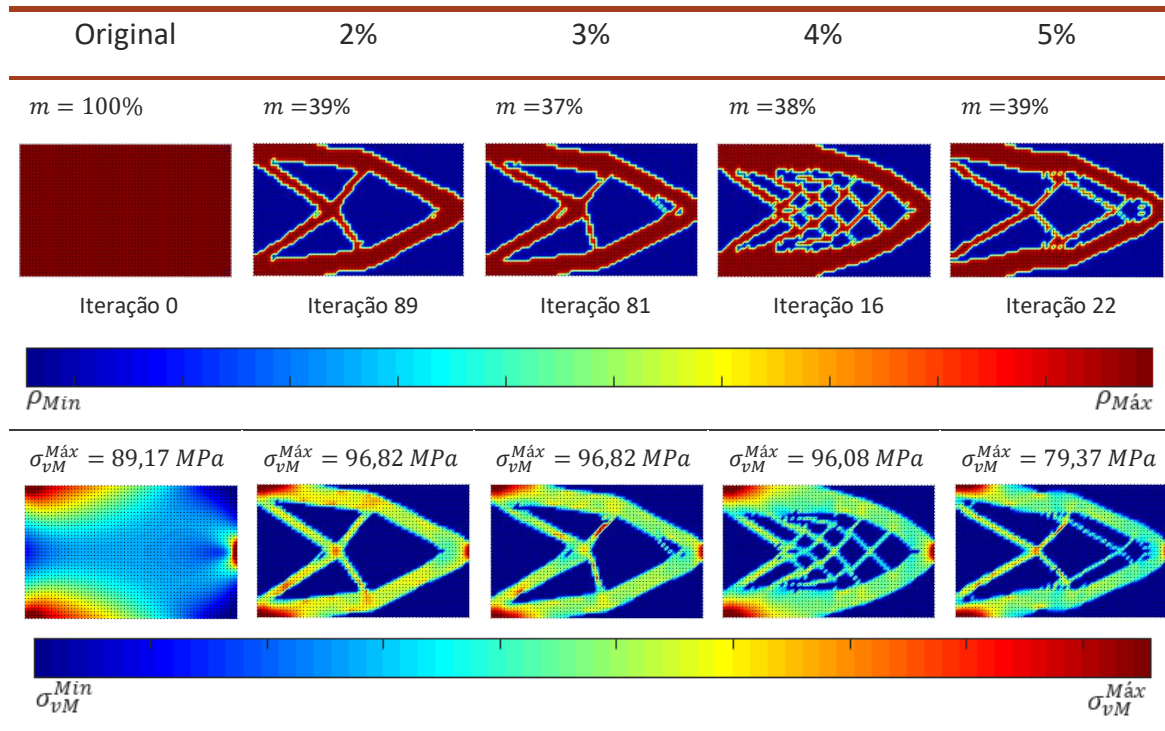
Analisando as soluções é possível concluir que todas apresentam zonas de indefinição material. No entanto, e apesar da existência dessas zonas, a solução obtida para a TR de 5% apresenta semelhanças com a solução da literatura [59–62], visto que apresenta simetria em relação ao plano médio horizontal e o volume objetivo foi atingido.

Tabela 23 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 64x40 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises



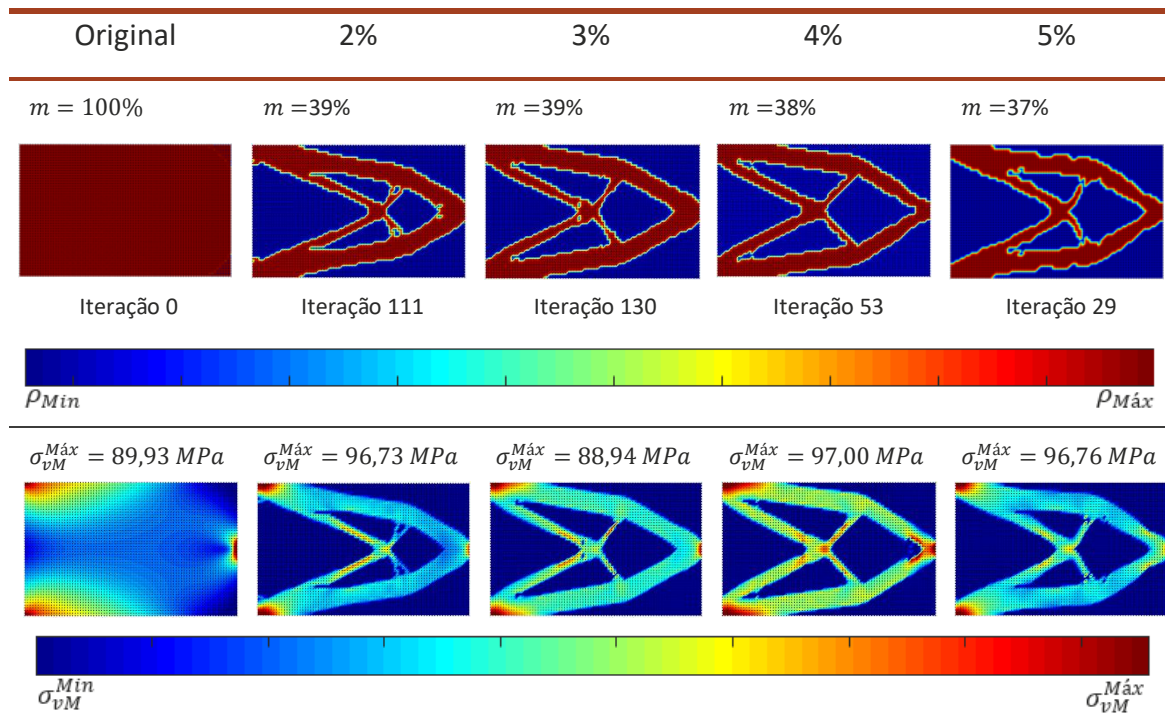
Pela comparação dos resultados obtidas na **Tabela 23** com os resultados da **Tabela 24**, onde estão representadas as soluções resultantes do processo de otimização impondo o critério da densidade de energia de deformação, pode-se concluir que a obtenção de solução semelhante com a solução da literatura [59–62] é possível através da utilização do critério da densidade de energia de deformação. A solução obtida para a TR de 2% revela simetria em relação ao plano médio horizontal e apenas 39% do volume inicial, apresentando-se assim como a melhor solução.

Tabela 24 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 64x40 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



Na **Tabela 25** estão representadas as soluções da otimização estrutural, impondo o critério de von Mises, considerando o domínio discretizado por 80x50 divisões.

Tabela 25 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 80x50 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises

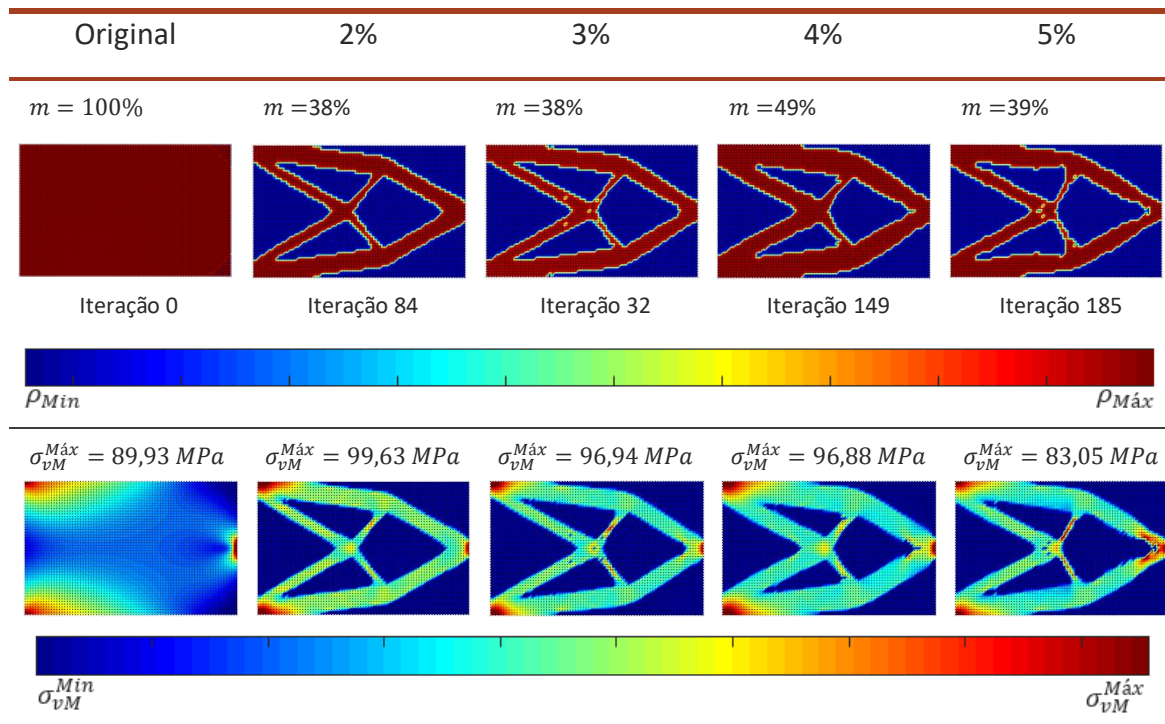


Para todas as TR estudadas foi possível obter soluções que apresentam uma geometria com semelhanças em relação à solução da literatura [59–62]. No entanto, as soluções que apresentam uma maior semelhança são obtidas através da utilização de TR superiores a 2%. Comparando as soluções, obtidas para as TR de 3, 4, 5%, todas apresentam indefinição material ao longo da sua geometria. Contudo a solução referente à TR de 3% apresenta um menor número de zonas de concentração de tensão, sendo possível assim considerar que a utilização de uma TR de 3% origina soluções estáveis e com boas propriedades mecânicas.

Na **Tabela 26** estão ilustradas as soluções obtidas impondo o critério da densidade de energia de deformação, para a discretização do domínio por um conjunto de 80x50 divisões.

As soluções obtidas, à semelhança das soluções obtidas através do critério de von Mises (**Tabela 25**), para a mesma discretização, apresentam semelhança com a geometria da literatura [59–62]. Das quatro geometrias destaca-se a solução referente à utilização da TR de 2%, uma vez que revela total simetria em relação ao plano médio horizontal, apresenta um contorno suave devido a alta densidade nodal e não apresenta zonas de indefinição material. As restantes soluções, ainda que semelhantes à literatura [59–62], apresentam zonas de instabilidades e os seus contornos não apresentam linhas tão suaves como a solução referente à TR de 2%. Desta forma, para a presente densidade nodal, a TR de 2% é a que possibilita a obtenção de soluções mais estáveis e precisas.

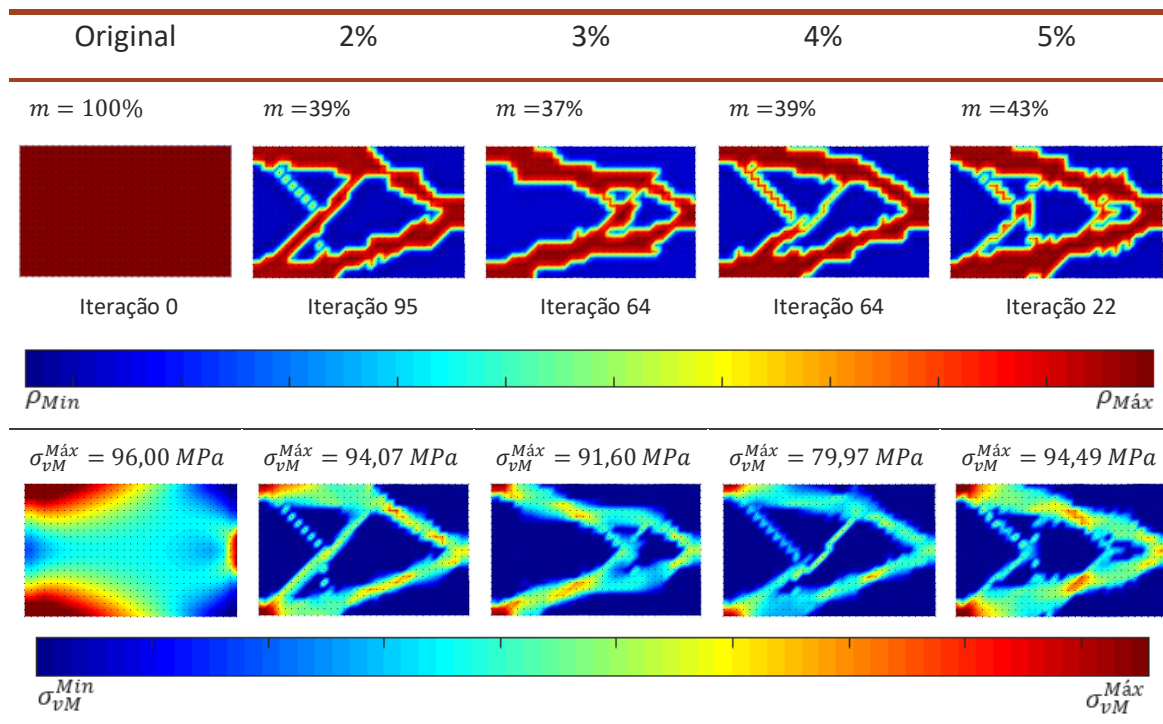
Tabela 26 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os primeiros vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 80x50 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



5.2.1.2.4 Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method (segundos vizinhos naturais)

Nesta fase de análise através do NNRPIM considerou-se os segundos vizinhos naturais. A discretização do domínio realizou-se através de 32x20 divisões e impondo o critério de von Mises como critério de otimização. As soluções obtidas estão representadas na **Tabela 27**. Ao analisar as geometrias obtidas é possível concluir, apesar de nenhuma das TR estudadas originar soluções semelhantes com as da literatura [59–62], a baixa densidade nodal da discretização do domínio não levou à ocorrência de problemas de singularidade e todas as soluções atingiram o volume objetivo.

Tabela 27 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 32x20 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises



Através da análise da mesma discretização com a imposição do critério da densidade de energia de deformação como critério de otimização, foi possível obter as geometrias apresentadas na **Tabela 28**.

Da análise das soluções obtidas concluiu-se que a solução obtida para a TR de 5% é a que apresenta semelhanças com a solução presente na literatura [59–62]. No entanto, a percentagem de volume remodelado foi significativamente menor, quando comparado com as soluções obtidas utilizando o critério de von Mises como critério de otimização, uma vez que, a baixa densidade nodal contribuiu para a remoção de um nó pertencente à condição fronteira natural. Considerando a discretização do domínio, recorrendo a 1519 nós (48x30 divisões) e à imposição do critério de von Mises, foi possível obter as soluções apresentadas na **Tabela 29**.

Tabela 28 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 32x20 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação

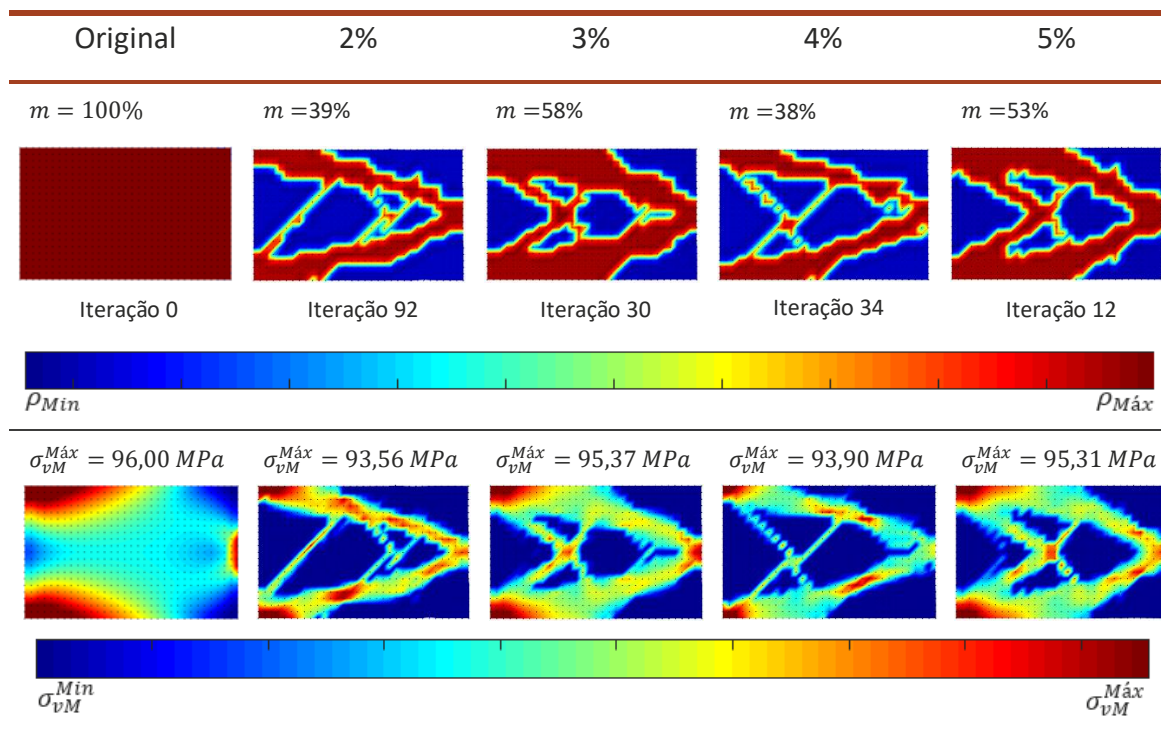
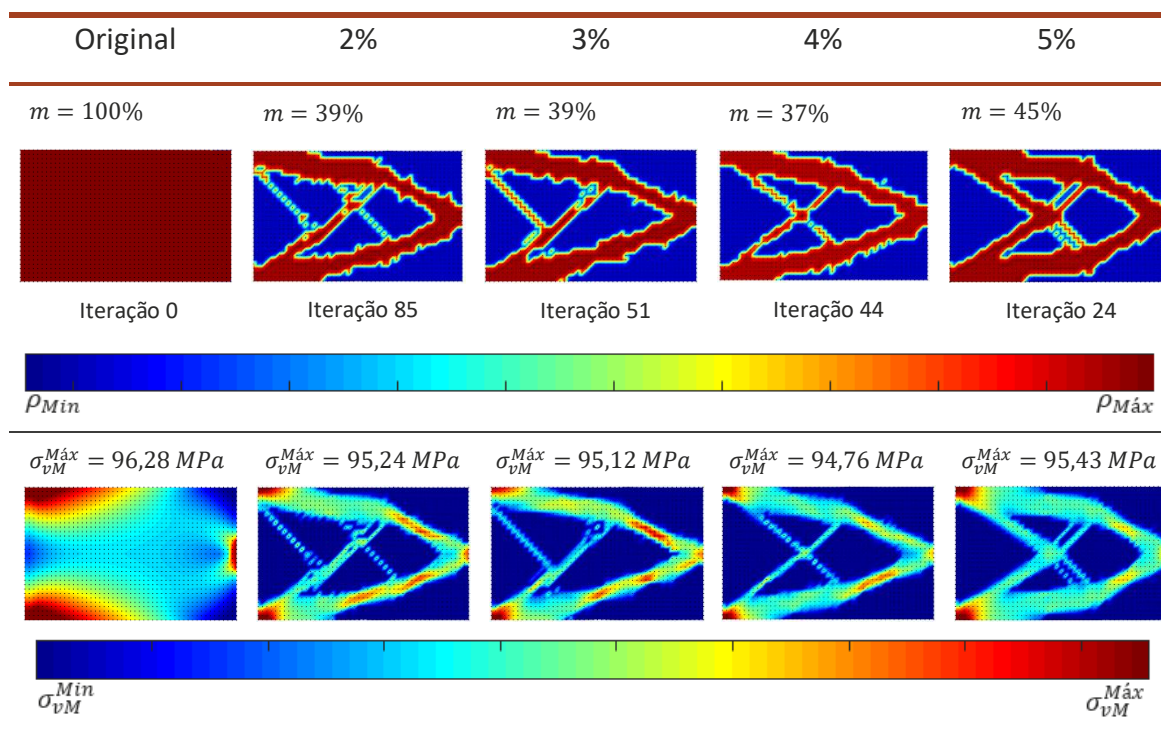


Tabela 29 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 48x30 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises

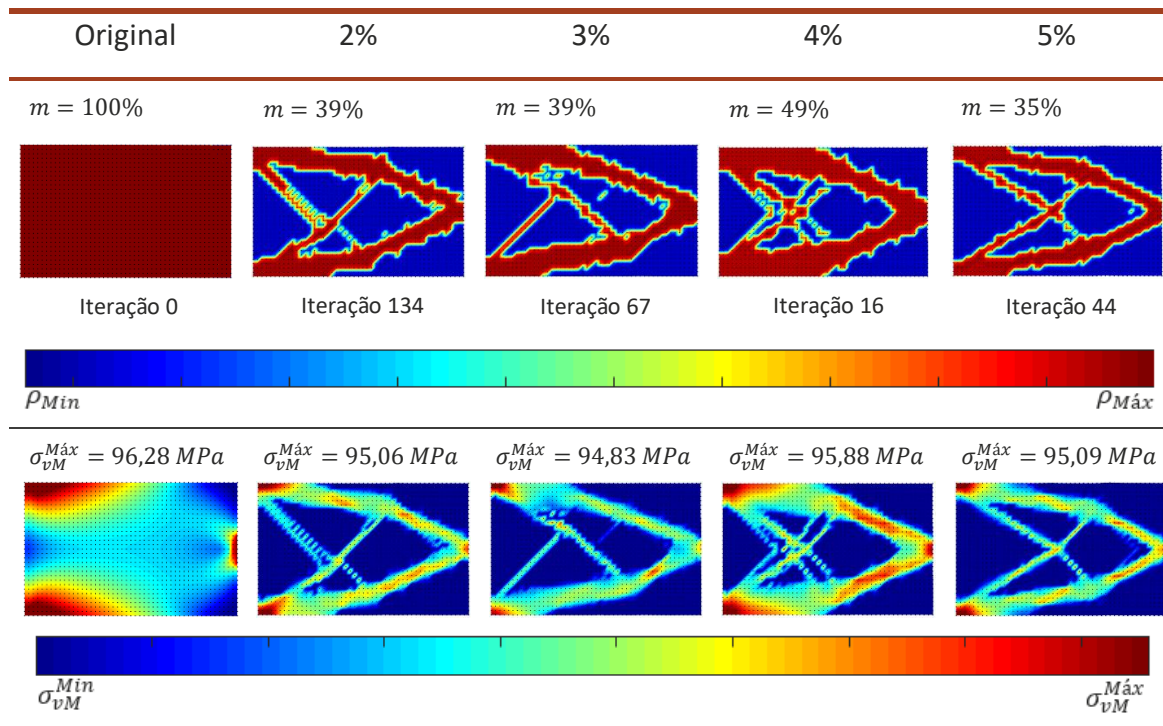


Ao analisar os resultados obtidos para cada TR estudada, concluiu-se que a TR de 4% é o parâmetro de otimização para o qual as soluções apresentam uma maior semelhança com a solução da literatura [59–62]. No entanto, é possível observar zonas de instabilidade material onde o código removeu material em excesso, provocando assim o aparecimento de concentrações de tensões. Para além dos resultados satisfatórios obtidos pela TR de 4%, a TR de 5% também produz soluções compatíveis com as da literatura [59–62]. Contudo, o processo de otimização não atingiu o volume objetivo.

Mantendo a discretização do domínio de 48x30 divisões, aplicou-se o processo de otimização estrutural impondo o critério de densidade de energia de deformação como critério de otimização e obteve-se as soluções ilustradas na **Tabela 30**.

Apesar das TR de 2 e 3% produzirem soluções que atingiram o volume estabelecido, não se verifica convergência com a solução da literatura [59–62], uma vez que a geometria da literatura [59–62] apresenta simetria em relação ao plano médio horizontal e as soluções encontradas através dessas TR não. No entanto, para a TR de 5% atingiu-se uma solução com uma semelhança significativa com a solução da literatura [59–62], visto ambas apresentam simetria em relação ao plano médio horizontal. Desta forma, é possível concluir que a utilização da TR de 5% produz soluções estáveis para o presente nível de discretização.

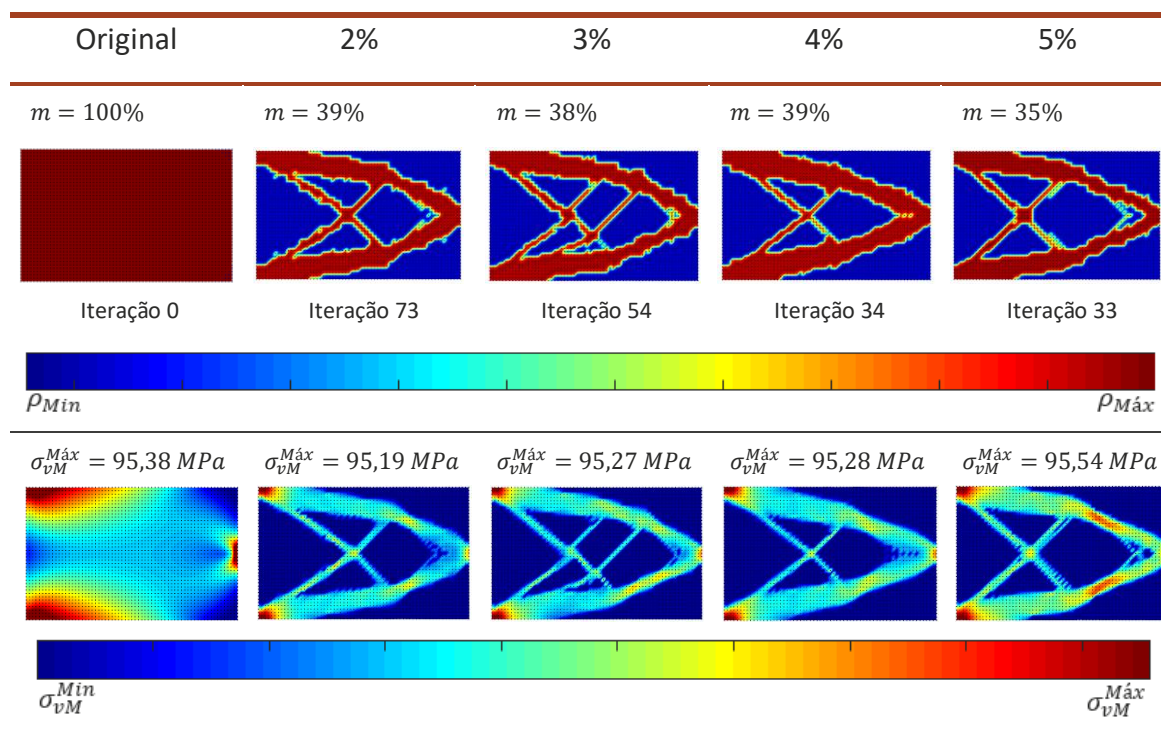
Tabela 30 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 48x30 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



A **Tabela 31** apresenta as soluções obtidas através da discretização do domínio por 64x40 divisões e da utilização do critério de von Mises.

Ao analisar as geometrias presentes na **Tabela 31** é possível concluir que existem três soluções que se assemelham com a solução da literatura [59–62]: TR de 2, 4 e 5%, uma vez que todas apresentam semelhanças e simetria em relação ao plano médio horizontal. No entanto, as soluções obtidas através de TR mais baixas (como a TR de 2%) apresentam zonas de transmissão de esforços com uma secção bastante superior às soluções obtidas para as TR de valores mais elevados. Isto poderá acontecer devido ao elevado número de nós removido por iteração para as TR elevadas, não garantindo assim soluções conservativas, que são relatadas na literatura [59–62] como ideais. Assim, a utilização da TR de 2% não compromete o volume objetivo, uma vez que esta atingiu um volume próximo dos 40%, e produz soluções que apresentam menos zonas de indefinição material.

Tabela 31 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 64x40 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises

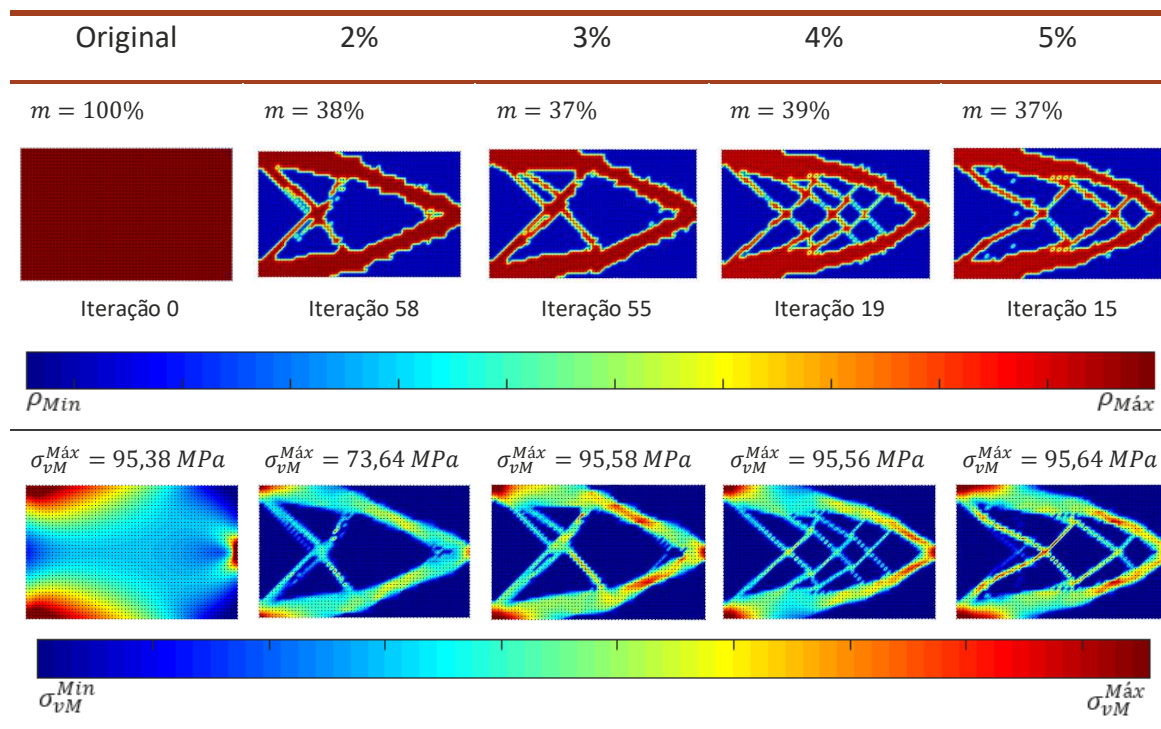


Relativamente à utilização do critério de densidade de energia de deformação e à discretização do domínio, com um conjunto de 64x40 divisões para o processo de otimização estrutural, obteve-se as soluções representadas na **Tabela 32**.

Ao analisar as soluções concluiu-se que, apenas os resultados obtidos através das TR de 2 e 3% apresentam semelhanças em relação à solução da literatura [59–62], ainda que pouco significativas. O facto de existirem zonas de indefinição material ao logo do contorno, em ambas as soluções, pode estar relacionado com o desajuste das TR estudadas. Assim, é possível concluir que à semelhança dos resultados obtidos para as outras discretizações estudadas, a utilização do critério de von Mises como critério de

otimização produz um número maior de soluções que apresentam fortes semelhanças com a solução da literatura [59–62].

Tabela 32 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 64x40 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação



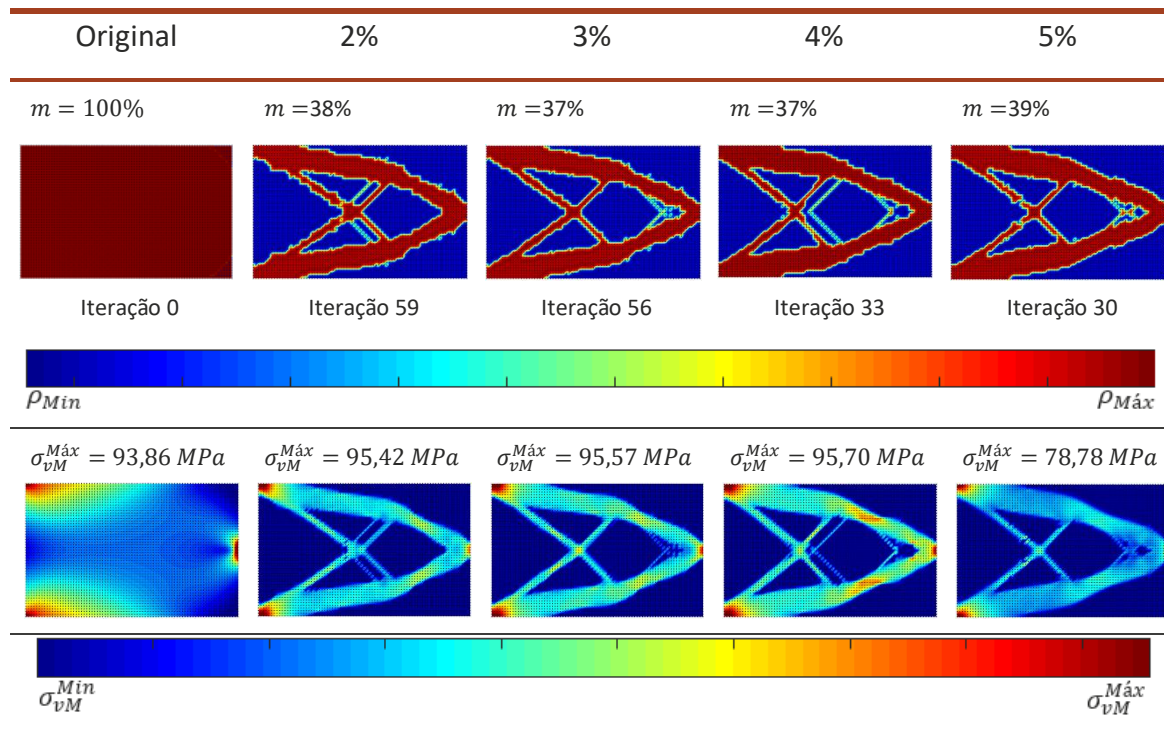
Na **Tabela 33** estão ilustradas as geometrias e os respectivos estados de tensão para o domínio discretizado por um conjunto de 80x50 divisões, através da imposição do critério de von Mises como critério de otimização.

Pela análise da tabela é possível concluir, apesar da existência de zonas de indefinição material, todas as soluções apresentam semelhanças com a solução presente na literatura [59–62]. Contudo, a TR de 3% é a que apresenta menos zonas de indefinição material e mais semelhanças com a solução ótima e, por isso, a sua utilização produz soluções mais otimizadas.

Através da utilização do critério da densidade de energia de deformação, para a discretização do domínio com 80x50 divisões, obteve-se as soluções presentes na **Tabela 34**.

À semelhança das soluções obtidas pelo critério de von Mises, as soluções obtidas através da utilização do critério de densidade de energia de deformação também apresentam semelhanças com a solução da literatura [59–62]. Apesar da existência de pequenas zonas de indefinição material, onde ocorreu remoção excessiva de material, é possível concluir, pela comparação com as restantes geometrias, que a geometria obtida para a TR de 5% é a que apresentam uma maior semelhança com a literatura [59–62].

Tabela 33 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 80x50 células de integração quadrangulares impondo o critério de von Mises



Tendo em conta que se considerou no processo de otimização estrutural duas vertentes do NNRPIM, torna-se pertinente averiguar qual apresenta melhor desempenho. Para tal, e de forma a facilitar a compreensão e comparação das soluções, elaborou-se a **Tabela 35** e a **Tabela 36**. Na **Tabela 35** estão ilustradas as melhores soluções, obtidas para as discretizações estudadas, para ambas as vertentes NNRPIM considerando apenas o critério de von Mises.

Através da análise da **Tabela 35** é possível concluir que o aumento da densidade nodal permite obter soluções com um menor número de indefinições materiais e contornos mais suaves. É também possível verificar que as geometrias obtidas através da utilização dos primeiros vizinhos naturais apresentam menos indefinições materiais, maior suavidade no contorno exterior e geometrias mais semelhantes com a literatura [59–62].

Tabela 34 – Análise dos parâmetros de otimização estrutural aplicados através do NNRPIM considerando os segundos vizinhos naturais, para um domínio discretizado por 80x50 células de integração quadrangulares impondo o critério da densidade de energia de deformação

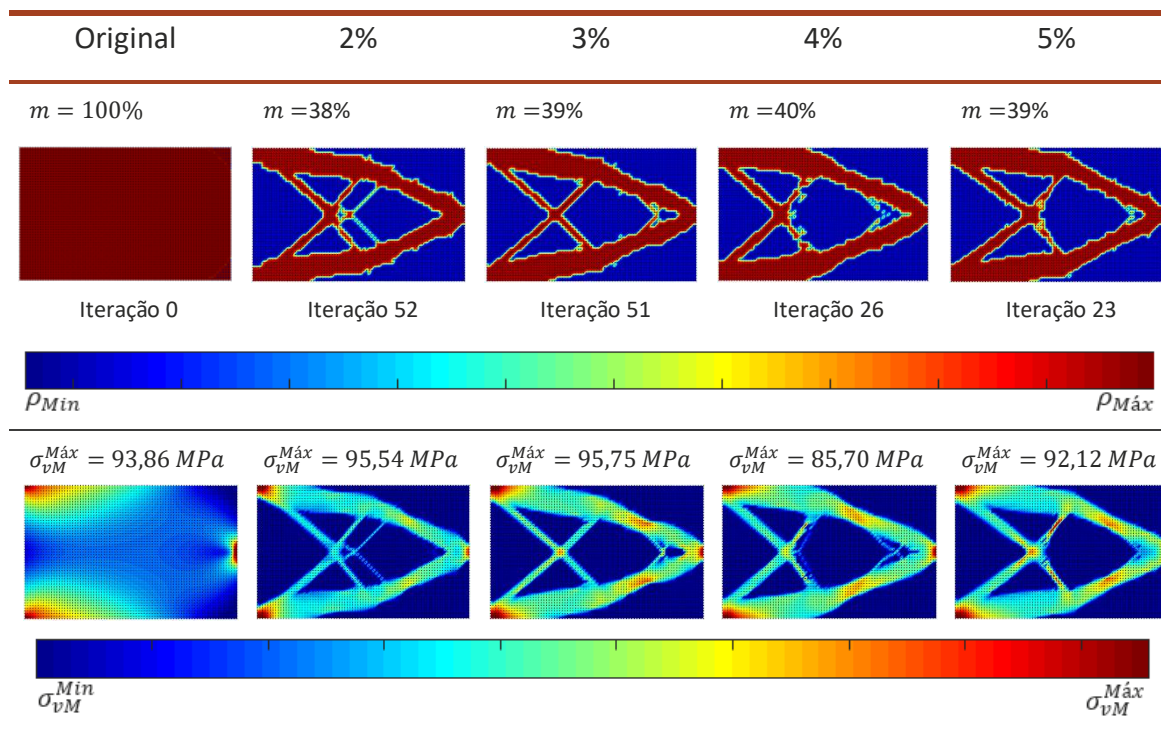
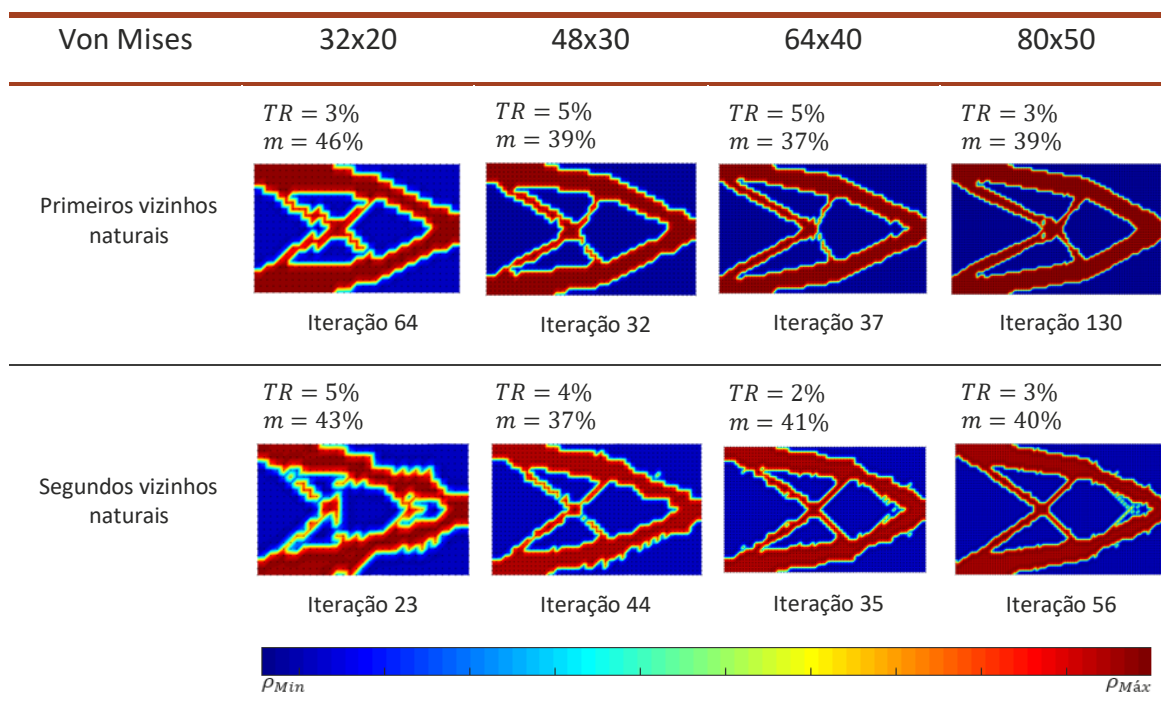


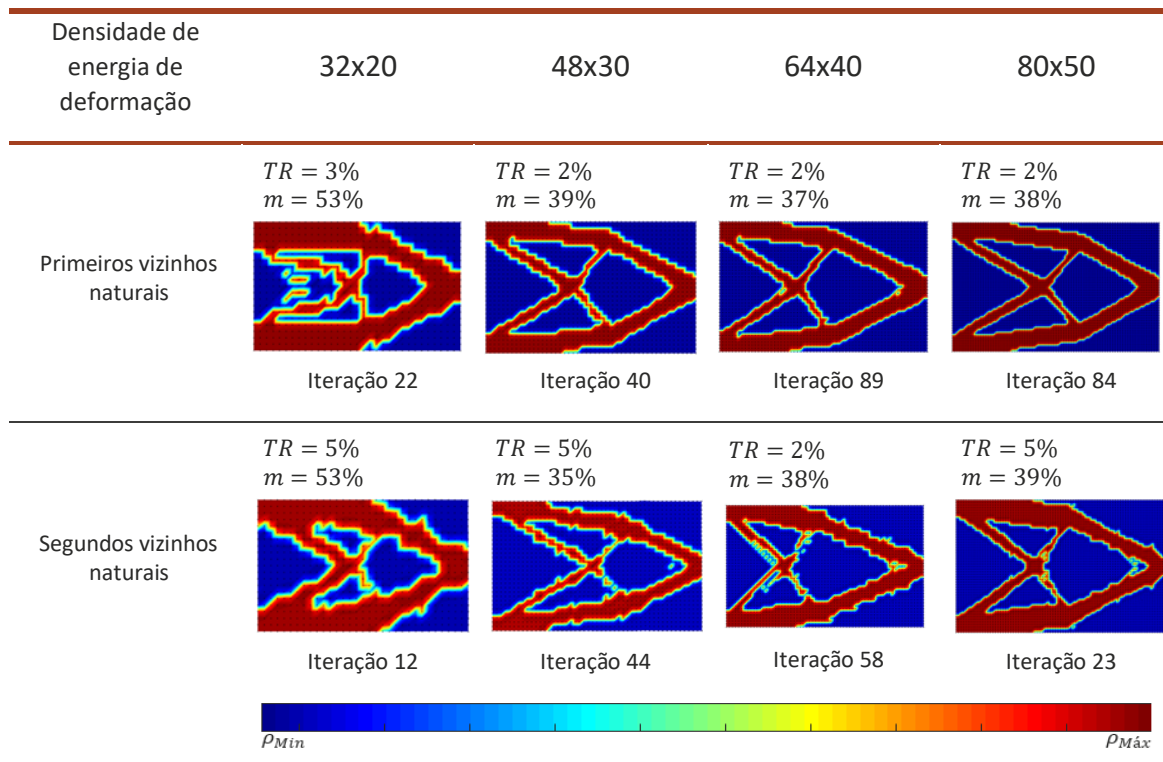
Tabela 35 – Comparação das soluções obtidas, impondo o critério de von Mises, através do NNRPIM utilizando os primeiros vizinhos naturais do NNRPIM utilizando os segundos vizinhos



Na **Tabela 36** estão representadas as melhores soluções obtidas através da utilização das duas vertentes do NNRPIM, impondo o critério da densidade de energia de

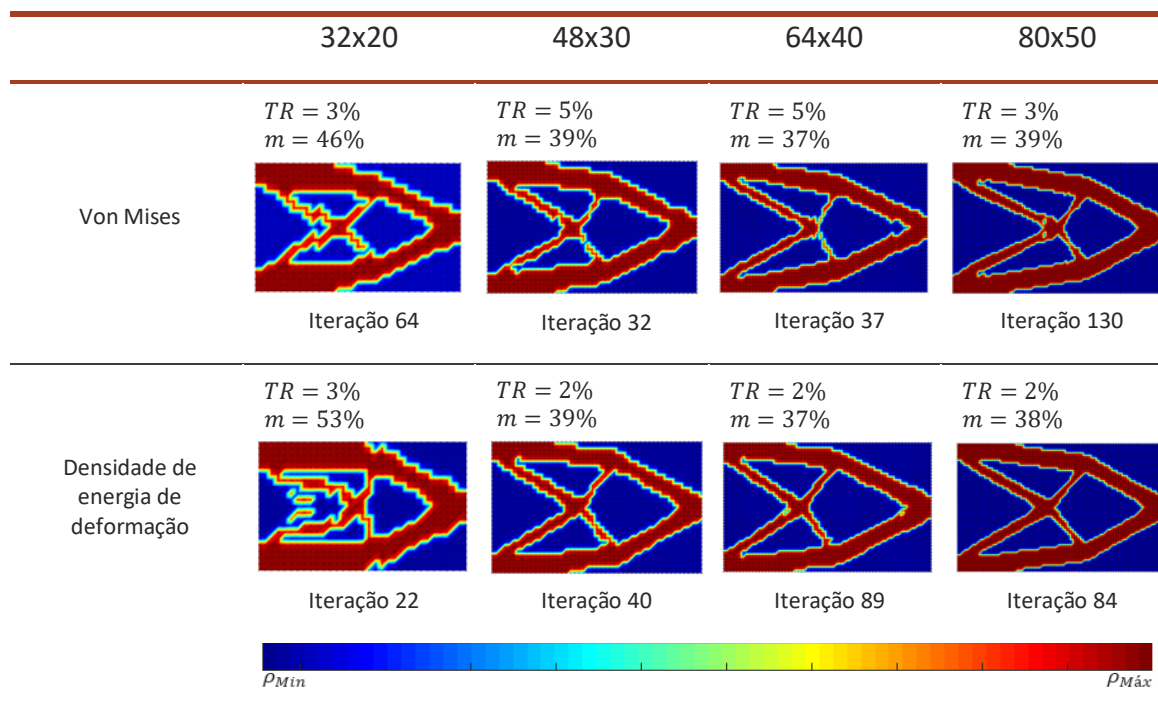
deformação. Através da comparação das soluções obtidas (**Tabela 36**) pelo critério da densidade de energia de deformação para as duas vertentes do NNRPIM, é possível concluir que a utilização dos primeiros vizinhos naturais resulta em soluções com maior semelhança com a literatura [59–62] e contornos mais suaves. No entanto, a utilização dos primeiros vizinhos naturais necessitou de um maior número de iterações até ser atingida a solução ótima, uma vez que as TR selecionadas são mais baixas. Isto é, o volume retirado por iteração é menor, logo é necessário um maior número de iterações até ser atingido volume objetivo. É ainda possível concluir que, à exceção da geometria obtida para a discretização do domínio utilizando 32x20 divisões, todas as soluções obtidas, através dos primeiros vizinhos naturais, apresentaram semelhança com a literatura [59–62], quando foi utilizada uma TR de 2%. Assim sendo, conclui-se que para os primeiros vizinhos naturais a TR converge para o valor de 2% com o aumento da densidade nodal. Por outro lado, no caso dos segundos vizinhos naturais, apenas a discretização do domínio utilizando 64x40 divisões apresentou uma TR diferente das restantes, uma vez que a TR de 5% (semelhante às restantes discretizações) não origina uma solução semelhante com a literatura [59–62] (**Tabela 36**).

Tabela 36 – Comparação das soluções obtidas, impondo o critério da densidade de energia de deformação, através do NNRPIM utilizando os primeiros vizinhos naturais do NNRPIM utilizando os segundos vizinhos



Tendo em conta que se concluiu que a utilização dos primeiros vizinhos naturais permite a obtenção de resultados mais fiáveis, torna-se pertinente a comparação do desempenho dos critérios de otimização dentro desta vertente. Para tal, elaborou-se a **Tabela 37** de forma a facilitar a comparação entre as soluções obtidas pelos dois critérios de otimização.

Tabela 37 – Comparação das soluções obtidas, utilizando os primeiros vizinhos naturais do NNRPIM, impondo o critério de von Mises e o critério da densidade de energia de deformação



Apesar de ambos os critérios de otimização apresentarem resultados semelhantes aos da literatura [59–62], é possível afirmar que a utilização do critério da densidade de energia de deformação origina resultados mais precisos e com menos indefinições materiais.

5.2.2 Viga em formato de L

De forma a validar os parâmetros de otimização para cada nível de discretização, recorreu-se à aplicação do processo de otimização estrutural a um exemplo conhecido da literatura [42,61,63–67]: a viga em formato de “L” encastrada (**Figura 14**).

A viga é encastrada numa das extremidades e sujeita a uma carga aplicada paralelamente à face. A geometria do domínio apresenta uma relação de L:H igual a um, isto é, 100 mm por 100 mm. Para a análise considerou-se um material isotrópico com um módulo de Elasticidade (E) de 100 GPa e um coeficiente de Poisson (ν) de 0,30. À semelhança do exemplo anterior estabeleceu-se que a análise terminaria quando o volume final atingisse 40% do volume inicial.

No processo de otimização estrutural do exemplo da viga em “L” apenas se irá analisar os parâmetros de otimização (TR) referentes às discretizações de 48x30 e 64x40 divisões, utilizadas no exemplo anterior (viga em consola). Optou-se por analisar apenas estas discretizações devido ao facto das soluções produzidas pela discretização do domínio através de 48x30 e 64x40 divisões apresentarem soluções satisfatórias para todos os métodos utilizados anteriormente. Em contrapartida, a discretização de 32x20 divisões apresentou resultados poucos precisos, devido à baixa densidade

nodal. Adicionalmente, a discretização do domínio através de 80x50 divisões apresentou uma elevada densidade nodal o que se reflete num elevado custo computacional, que não é compatível com os recursos dos autores do presente estudo.

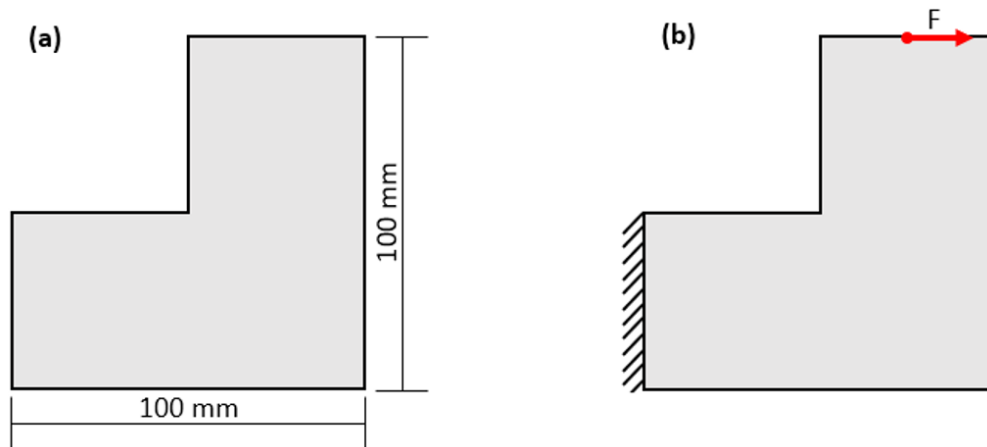


Figura 14 – a Dimensões do domínio. b Condições fronteira naturais e essenciais.

5.2.2.1 Método dos Elementos Finitos

De forma a proceder à correta validação dos parâmetros de otimização estrutural é necessário utilizar a mesma densidade nodal do exemplo anterior, 48x30 divisões, que no caso da viga em “L” representa 60x60 divisões, o que resulta num espaçamento nodal de aproximadamente 1,67 mm. Por outro lado, quando foram utilizadas 64x40 divisões na discretização do domínio o espaçamento nodal foi de 1,25 mm, o que neste exemplo representa um total de 80x80 divisões. Assim, para a distância nodal média de 1,67 mm distribuiu-se, regularmente sobre o domínio, um conjunto de 2821 nós, originando 2700 elementos quadrangulares.

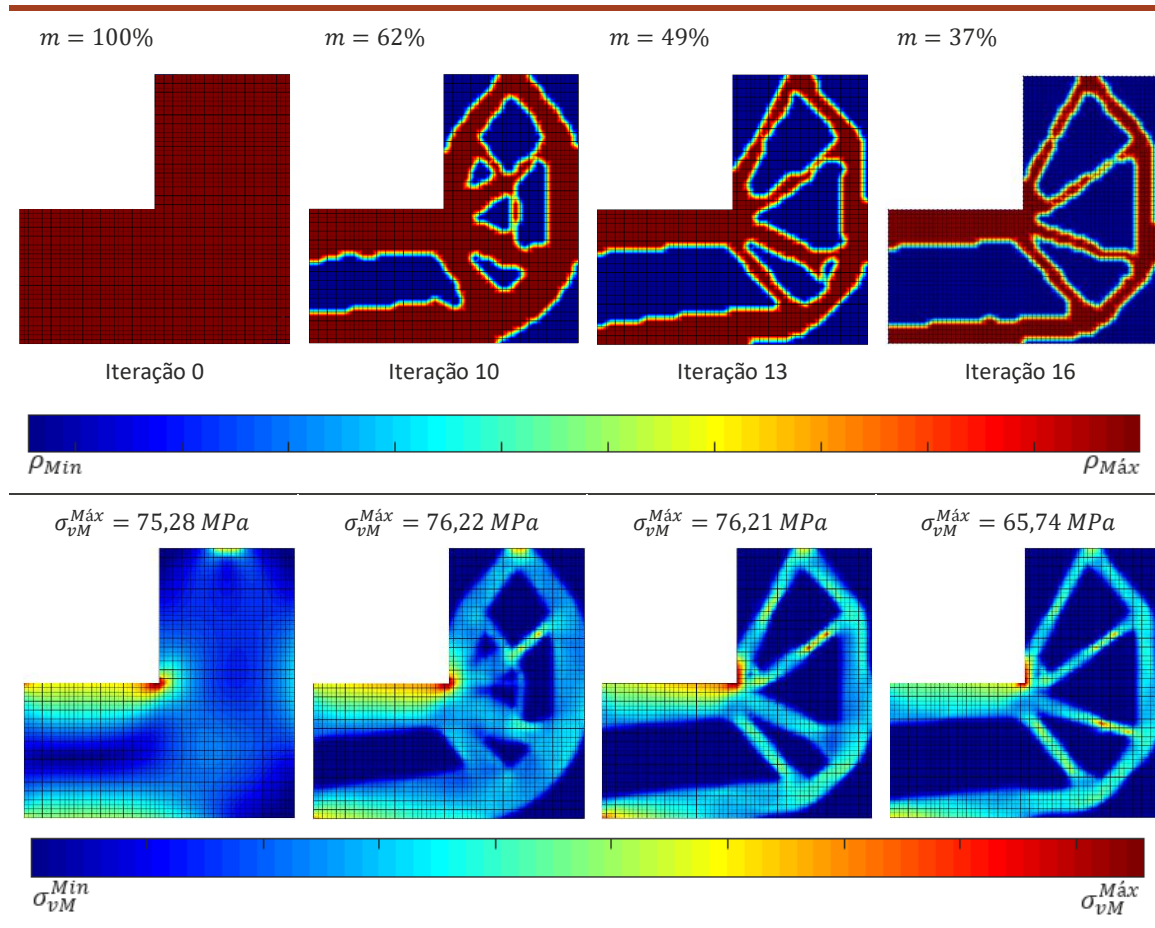
Uma vez que a utilização da TR de 5%, em conjunto com a imposição do critério da densidade de energia de deformação, produziu bons resultados para o exemplo anterior, optou-se por aplicar a mesma TR e o mesmo critério ao presente exemplo da viga em “L”. Assim, na **Tabela 38** estão representas as soluções obtidas para uma TR de 5% impondo o critério da densidade de energia de deformação.

Através da análise dos resultados obtidos concluiu-se que, após dezasseis iterações, surgiu uma geometria que apresenta uma forte semelhança com a solução da literatura [42,61,63,64]. Apesar da existência de uma pequena zona de indefinição material, é possível afirmar que, também no caso desta análise, uma TR de 5%, em conjunto com o critério da densidade de energia de deformação, é capaz de produzir soluções semelhantes com a literatura [42,61,63,64].

Assim sendo, a aplicação dos parâmetros de otimização associada à discretização do domínio estipulado, resultou em soluções semelhantes às da literatura em dois

exemplos distintos, o que indica que a aplicação destes parâmetros em conjunto pode ser generalizada a outros exemplos.

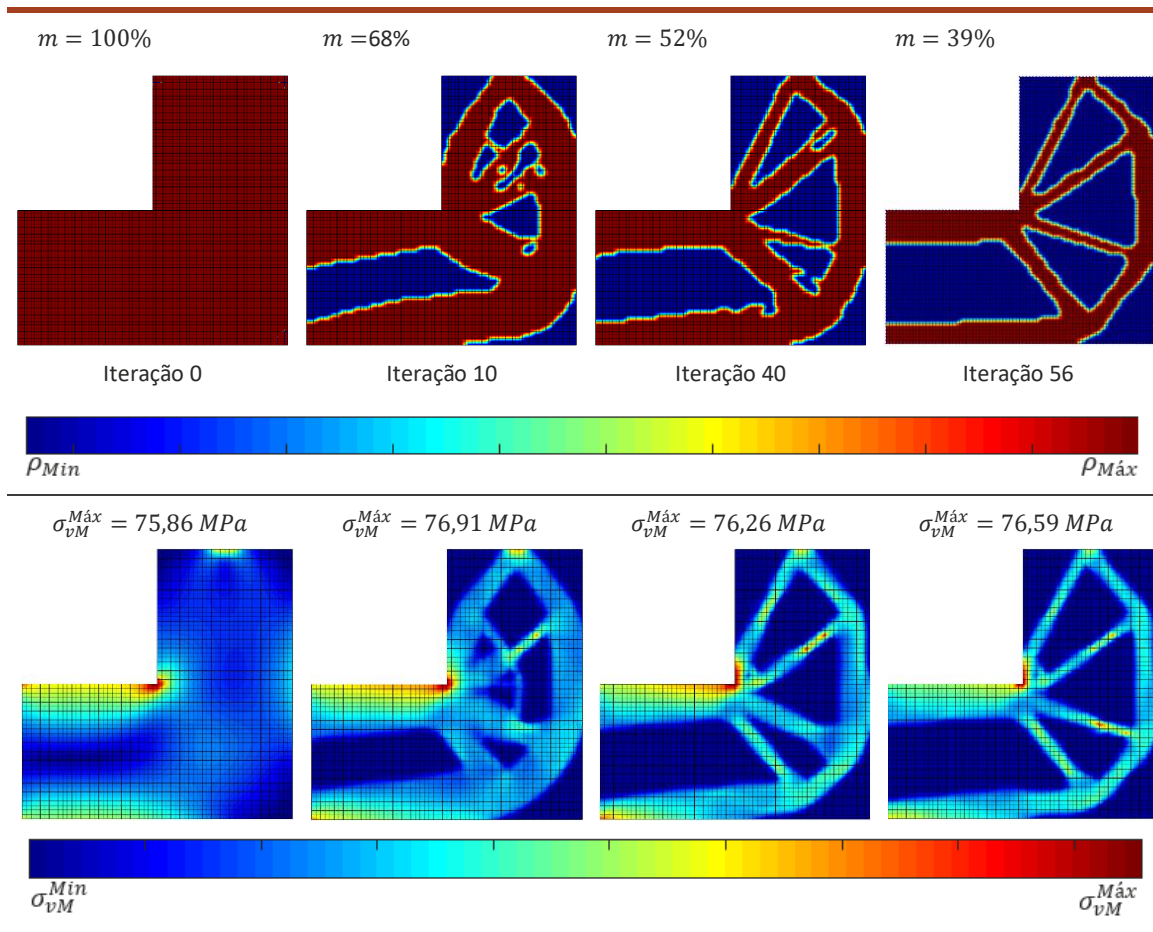
Tabela 38 – Soluções obtidas através do MEF para a discretização do domínio por 60x60 elementos quadrangulares, impondo o critério da densidade de energia de deformação



De seguida, utilizou-se a densidade nodal de 1,25 mm e distribuiu-se, de forma regular, um conjunto de 4961 nós, que resultou em 4800 elementos quadrangulares. Na **Tabela 39** estão representados os resultados obtidos para a distância nodal média de 1,25 mm (80x80 divisões), utilizando uma TR de 2% e o critério da densidade de energia de deformação.

Após 56 iterações atingiu-se o volume objetivo e uma geometria que apresenta semelhanças com a solução ótima [42,61,63,64]. Através da comparação com a solução obtida para o domínio discretizado com 60x60 divisões, é possível verificar que as duas geometrias são muito semelhantes, apesar da solução obtida para a discretização do domínio, através de 80x80 divisões, ter produzido uma solução que não apresenta zona de indefinição material. Isto deve-se ao facto de existir uma maior densidade nodal, que promove contornos mais suaves, e à inexistência de remoção excessiva de material, o que origina menos zonas de concentração de tensões.

Tabela 39 – Soluções obtidas através do MEF para a discretização do domínio por 80x80 elementos quadrangulares, impondo o critério da densidade de energia de deformação

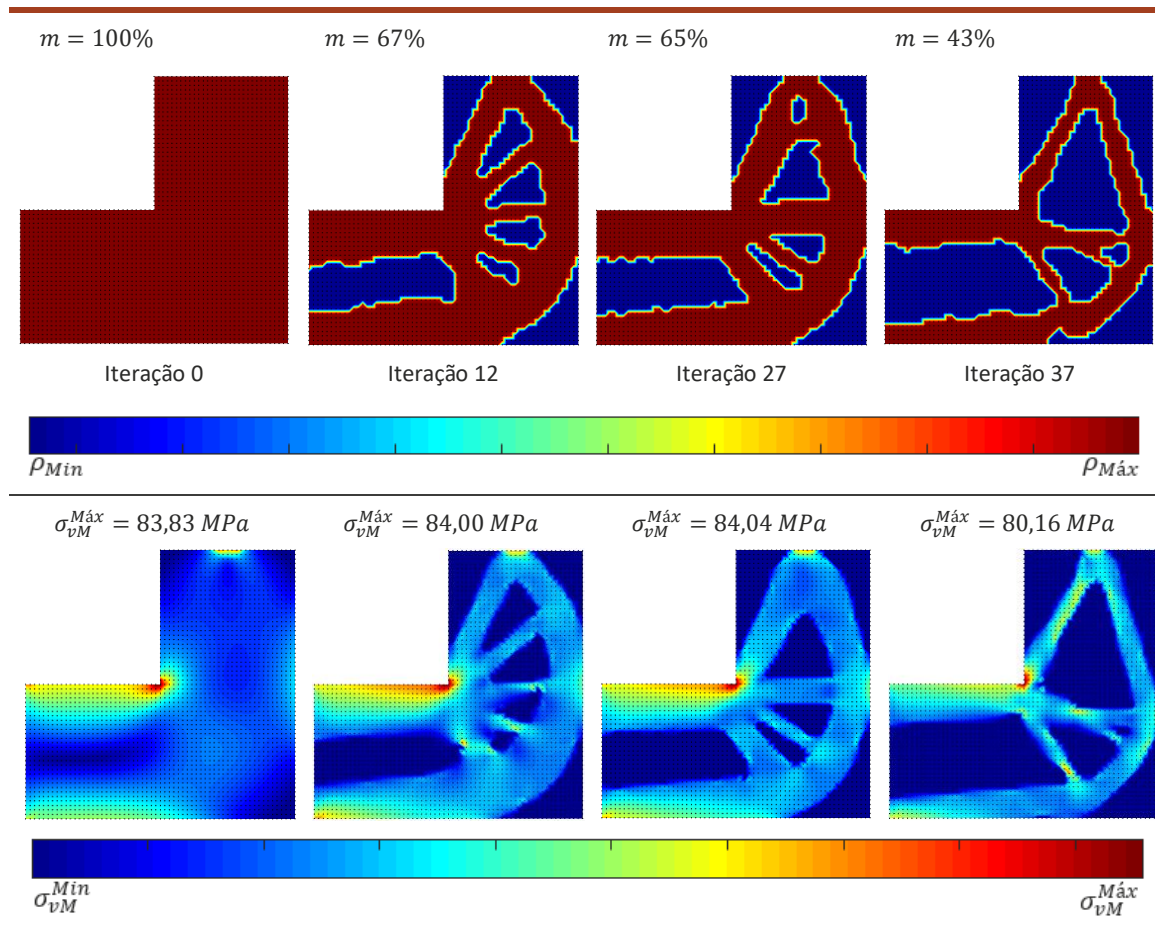


5.2.2.2 Radial Point Interpolation Method

À semelhança do MEF, utilizaram-se os parâmetros de otimização que, para o exemplo anterior, produziram soluções mais estáveis e com uma maior semelhança com a solução da literatura. Assim, utilizou-se a distância nodal média de 1,67 mm e aplicou-se o processo de otimização estrutural, através do RPIM. Considerou-se ainda o critério de von Mises e uma TR de 5% para um domínio discretizado por 2821 nós e com 2700 células de integração. Desta forma obteve-se as soluções apresentadas na **Tabela 40**.

Após atingir o volume pretendido, ao fim de 37 iterações, a análise terminou. No entanto, a geometria obtida não apresenta semelhanças com a solução da literatura [42,61,63,64]. A baixa densidade nodal, utilizada para a discretização do domínio, pode estar na origem da falta de semelhança com a solução da literatura [42,61,63,64], uma vez que, apesar da solução obtida no exemplo anterior, para a TR de 5% e para a mesma densidade nodal, apresentar semelhanças com a solução ótima [59–62], revela um elevado número de zonas de indefinição material. Por consequência, não é possível afirmar que os parâmetros utilizados têm a capacidade de produzir soluções precisas quando aplicados a outras geometrias.

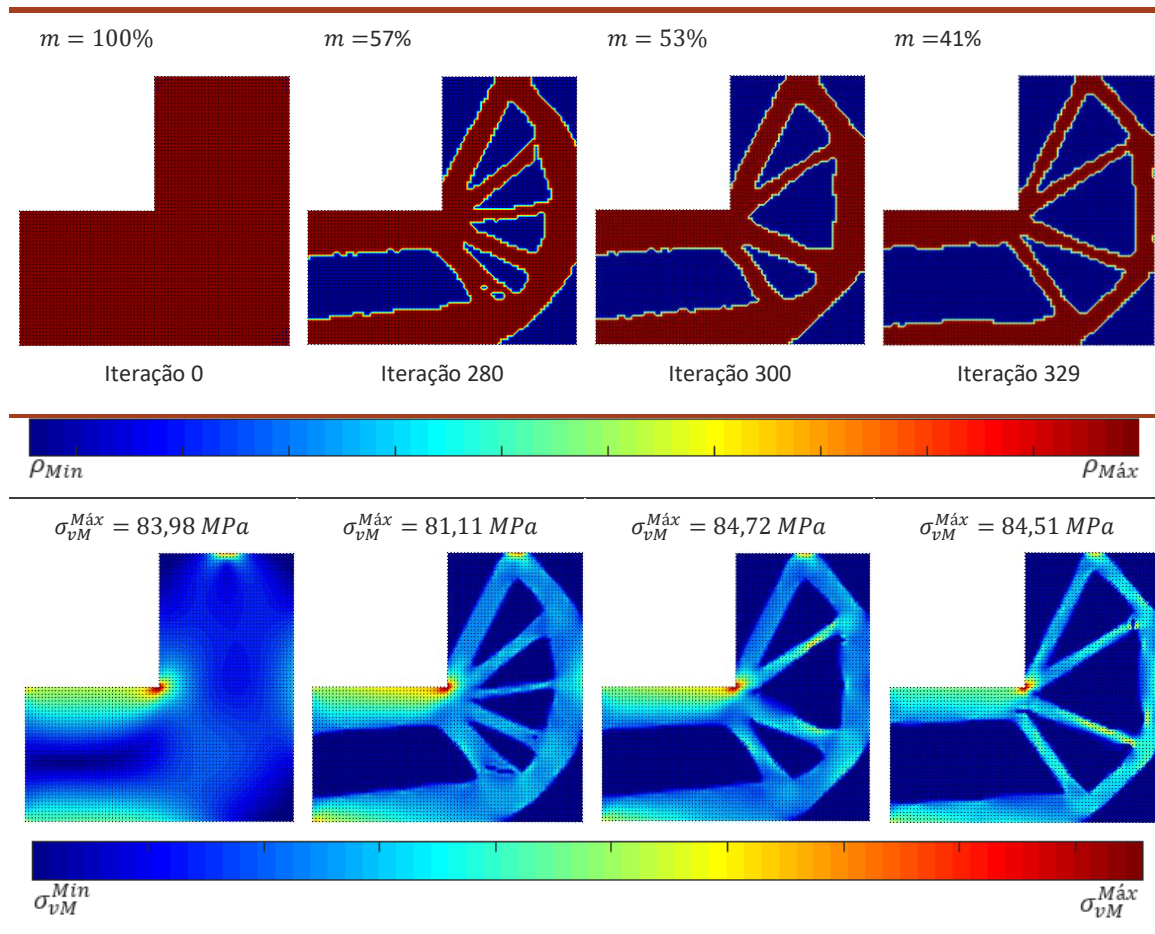
Tabela 40 – Soluções obtidas através do RPIM para a discretização do domínio por 60x60 elementos quadrangulares, impondo o critério de von Mises



Através da discretização do domínio por um conjunto de 4961 nós (80x80 divisões) e pela imposição do critério de von Mises, aplicou-se a TR de 2%. As soluções obtidas estão ilustradas na **Tabela 41**.

A geometria ótima [42,61,63,64] foi atingida ao fim de 329 iterações, tendo remodelado aproximadamente 59% do seu volume inicial, o que contribui para a obtenção de uma boa solução. Uma vez que se alcançou uma solução semelhante com a da literatura [42,61,63,64], em dois exemplos diferentes, pode-se concluir que os parâmetros utilizados são indicadores de obtenção de uma solução precisa quando aplicados a outras geometrias.

Tabela 41 – Soluções obtidas através do RPIM para a discretização do domínio por 80x80 elementos quadrangulares, impondo o critério de von Mises



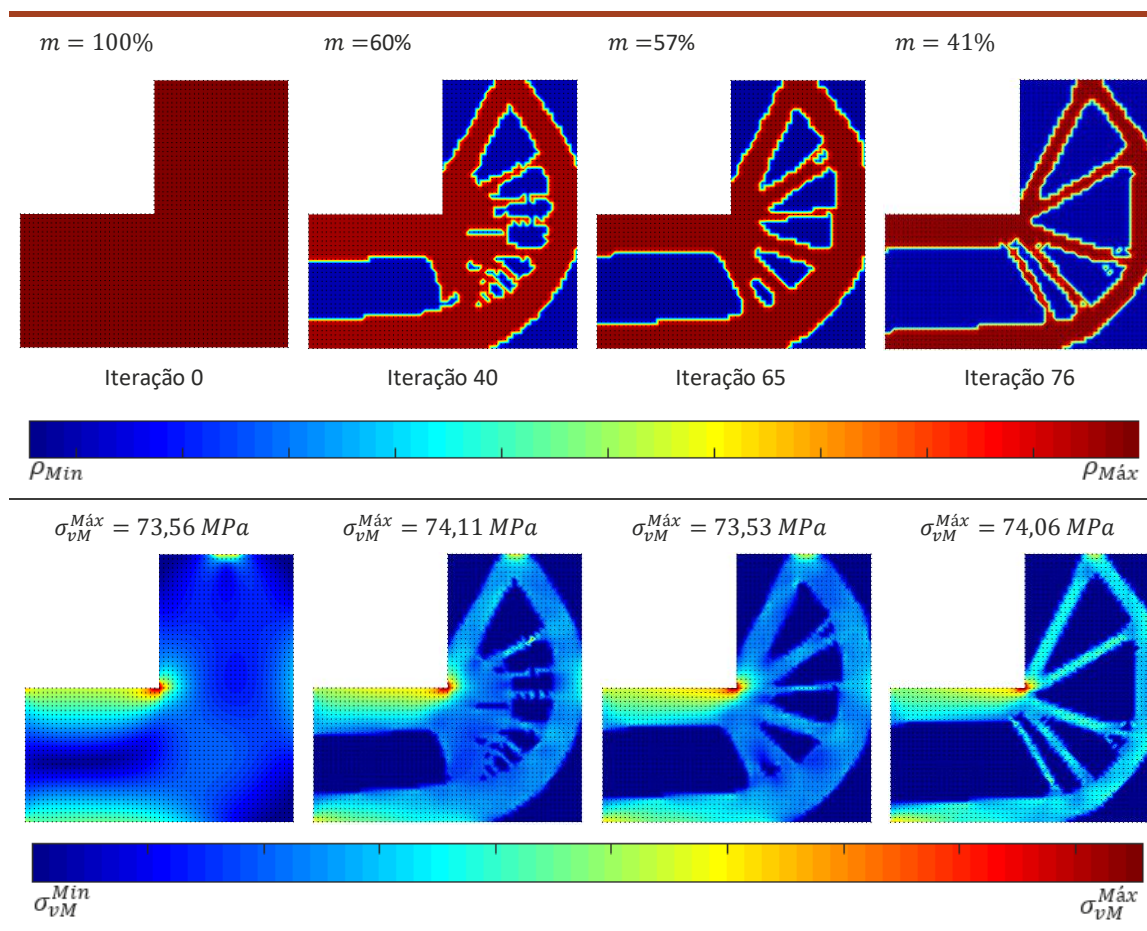
5.2.2.3 Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method

Para este método, optou-se por utilizar o NNRPIM, recorrendo aos primeiros vizinhos naturais e ao critério da densidade de energia de deformação, uma vez que as soluções produzidas com a utilização destes parâmetros apresentaram bons resultados no exemplo anterior, conforme ilustrado na **Tabela 37**.

Recorrendo à distância nodal média de 1,67 mm, considerou-se a discretização do domínio por um conjunto de 2821 nós. As soluções obtidas, através da aplicação da TR de 2% e do critério da densidade de energia de deformação, estão representadas na **Tabela 42**.

Após 76 iterações obteve-se uma geometria com aproximadamente 41% do volume inicial, o que se apresenta como um bom resultado, uma vez que eliminou 59% da massa inicial. No entanto, a geometria não apresenta semelhanças suficientes com a solução da literatura [65–67] para ser considerada uma boa solução, uma vez que as quatro zonas triangulares de remoção de material não apresentam uma área semelhante. Para além disso, é possível observarem-se zonas onde ocorreu remoção em excesso de material, o que originou o aparecimento de zonas de concentração de tensões.

Tabela 42 – Soluções obtidas através do NNRPIM para a discretização do domínio por 60x60 elementos quadrangulares, impondo o critério da densidade de energia de deformação

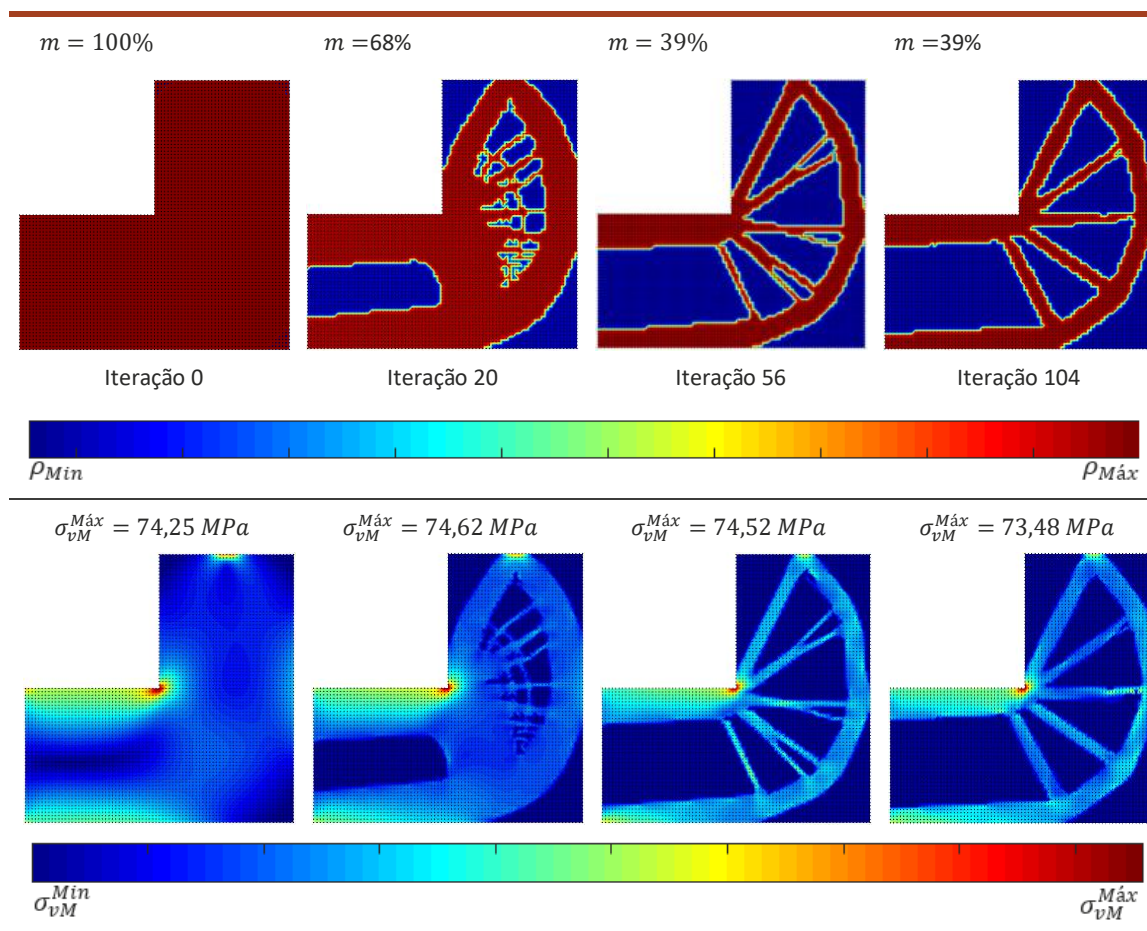


Posteriormente, estudou-se a discretização do domínio por um conjunto de 4131 nós, considerando o critério da densidade de energia de deformação. Através da aplicação da TR de 2% obtiveram-se as soluções apresentadas na **Tabela 43**.

À semelhança do que aconteceu para a discretização do domínio através de 2821 nós, a solução final deste exemplo apresenta um volume de aproximadamente 39%. Para além disso, apresenta quatro zonas triangulares de remoção de material com área semelhante, o que a torna uma solução semelhante com a da literatura [65–67].

Uma vez que as soluções obtidas através do MEF e do RPIM são idênticas, redesenhou-se a geometria de forma a comparar as suas propriedades mecânicas, nomeadamente a tensão máxima de von Mises ($\sigma_{vM}^{Máx}$) e o deslocamento segundo o eixo Ox (u), em relação à solução obtida pelo NNRPIM e à geometria não otimizada.

Tabela 43 – Soluções obtidas através do NRPIM para a discretização do domínio por 80x80 elementos quadrangulares, impondo o critério da densidade de energia de deformação



De seguida, recorreu-se ao *software* SolidWorks® de forma a redesenhar a estrutura apresentada na **Figura 15** obtida pelo MEF (**Figura 15a**) e pelo RPIM (**Figura 15b**). Na **Figura 15c** está representada a geometria obtida através do processo de otimização estrutural, realizado pelo NRPIM, que posteriormente foi redesenhada até à obtenção da geometria ilustrada na **Figura 15e**. Ao redesenhar as geometrias considerou-se possíveis zonas de transição bruscas de material, onde o aparecimento de concentrações de tensões é mais comum. Assim, optou-se por substituir essas zonas por superfícies curvas.

De forma a diminuir o erro associado aos resultados obtidos para os três métodos anteriores, torna-se pertinente a realização do estudo de convergência de malha. Para tal, recorreu-se à geometria da viga em “L” não otimizada e analisaram-se malhas construídas respeitando as seguintes distâncias nodais médias: 5,0 mm, 2,5 mm, 1,67 mm, 1,25 mm, 1,00 mm e 0,83 mm. Os valores de deslocamento, segundo o eixo Ox , obtidos no mesmo ponto e em função do número de nós do domínio, estão representados na **Figura 16**.

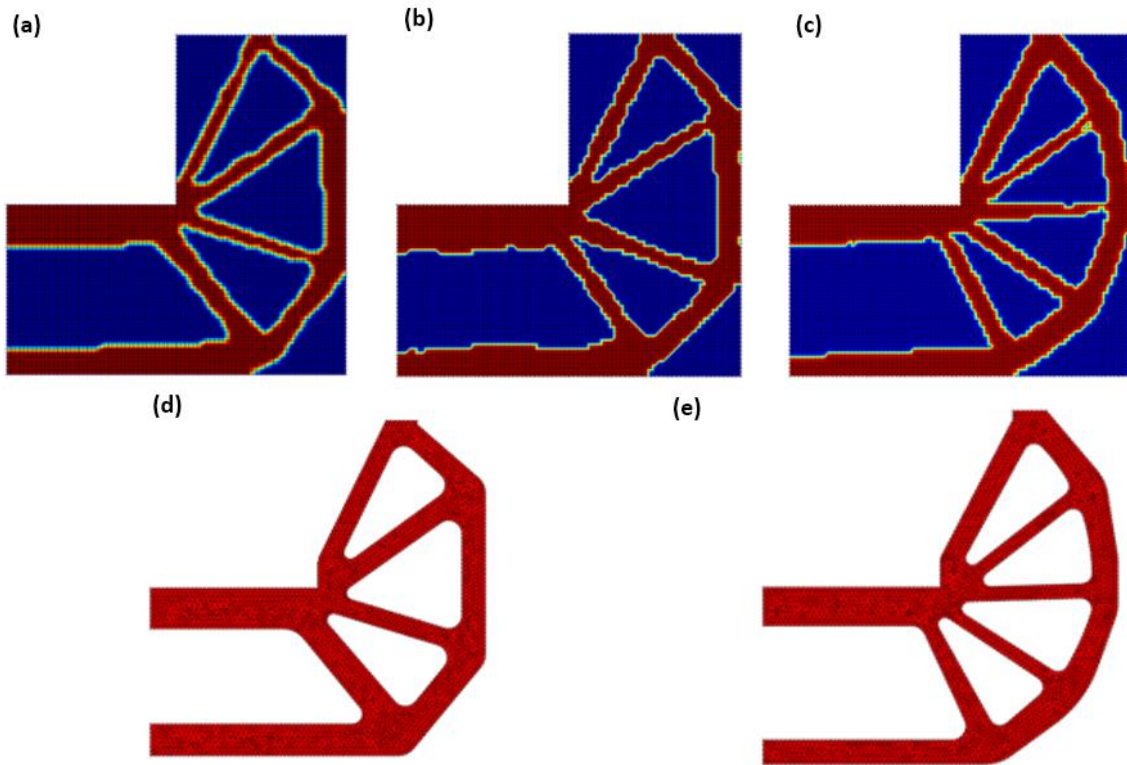


Figura 15 – a Geometria obtida através do processo de otimização estrutural realizado pelo MEF. b Geometria obtida através do processo de otimização estrutural realizado pelo RPIM. c Geometria obtida através do processo de otimização estrutural realizado pelo NNRPIM. d Geometria redesenhada com base na solução obtida pelo MEF e pelo PRIM. e Geometria redesenhada com base na solução obtida pelo NNRPIM.

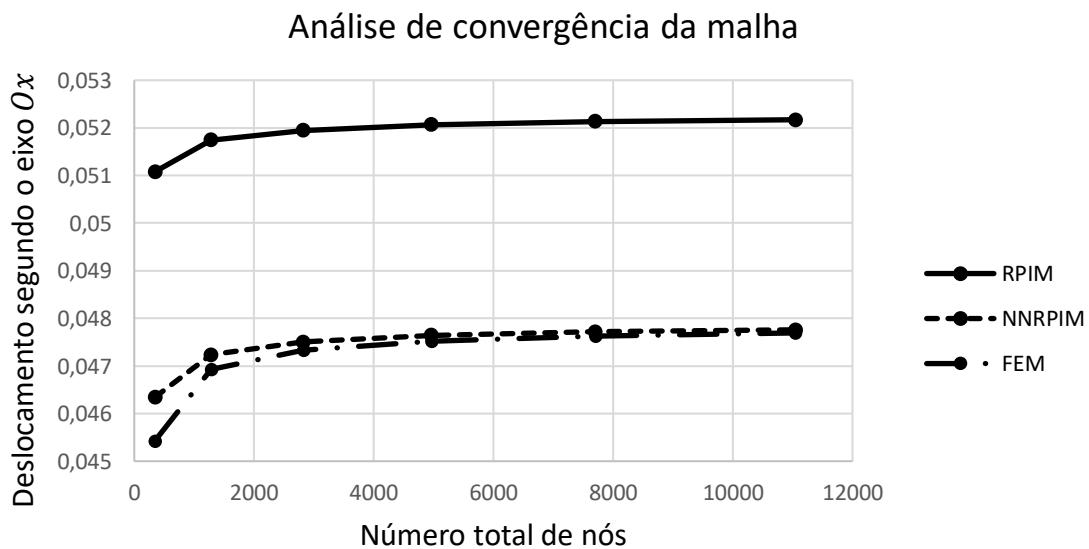


Figura 16 – Análise de convergência da malha

Da análise da **Figura 16** é possível concluir que todos os métodos apresentam uma rápida convergência dos deslocamentos obtidos, uma vez que a reta apresenta um declive baixo que, rapidamente, tende para zero. Assim, é possível concluir que, para o MEF e o NNRPIM, a utilização de 2821 nós (distância nodal média de 1,25 mm) gera

soluções com um baixo erro associado. Em contrapartida, o RPIM necessita de um menor número de nós, cerca de 1281 (distância nodal média de 1,67 mm), quando comparado com o MEF e o NNRPIM, para obter a convergência da solução. Apesar de todos os métodos apresentarem convergência para um valor de deslocamento, apenas o MEF e o NNRPIM tendem para o mesmo valor. Apesar do RPIM apresentar convergência para um valor diferente dos restantes métodos, essa diferença é baixa (aproximadamente 9%).

Na **Tabela 44** estão representados os resultados da análise linear elástica, como a tensão máxima de von Mises ($\sigma_{vM}^{Máx}$), os deslocamentos segundo o eixo Ox e a rigidez em função da massa de cada geometria. Para as três geometrias procedeu-se à análise linear utilizando os três métodos em estudo: MEF, RPIM e NNRPIM.

Os valores de deslocamento e rigidez apresentados dependem da geometria e do método numérico apresentado. Isto é, para a geometria não otimizada o deslocamento segundo o eixo Ox pode ser representado por: $u_{sólido}^{MEF}$, se o método utilizado foi o MEF; por $u_{sólido}^{RPIM}$, se o método utilizado foi o RPIM; e por $u_{sólido}^{NNRPIM}$, se a análise foi realizada pelo NNRIPM. No caso da geometria do modelo 1 (obtida através do processo de otimização estrutural realizado pelo MEF e pelo RPIM, **Figura 15d**), o deslocamento é designado por $u_{otim_1}^{MEF}$, $u_{otim_1}^{RPIM}$ e $u_{otim_1}^{NNRPIM}$. Por outro lado, no caso da geometria do modelo 2 (obtida através do processo de otimização estrutural realizado pelo NNRPIM, **Figura 15d**), o deslocamento é designado por $u_{otim_2}^{MEF}$, $u_{otim_2}^{RPIM}$ e $u_{otim_2}^{NNRPIM}$. As abreviaturas utilizadas para a representação da rigidez de cada geometria seguem a mesma estrutura das abreviaturas dos deslocamentos.

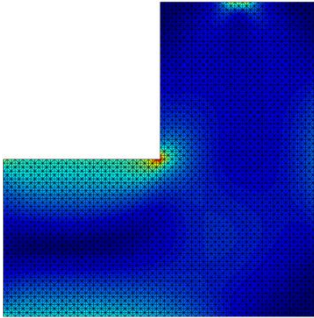
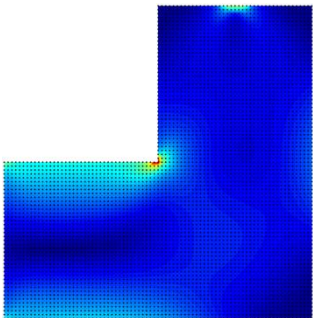
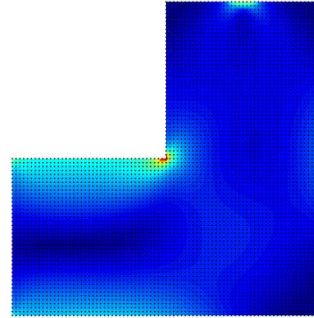
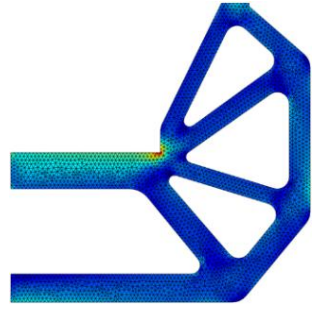
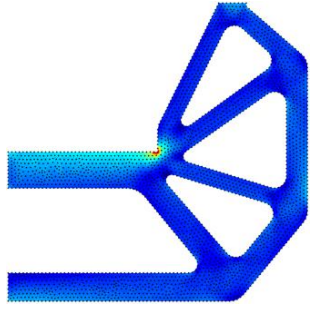
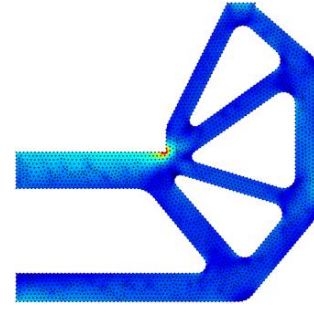
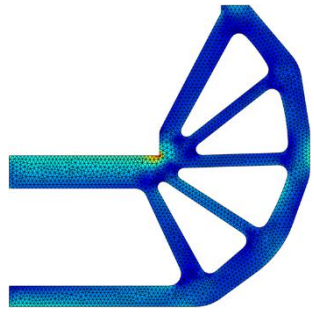
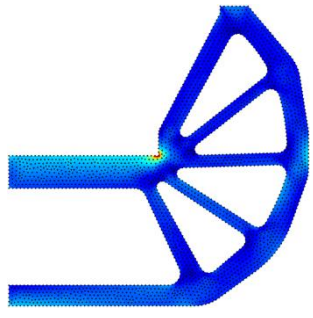
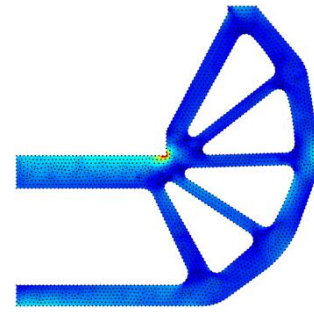
Apesar dos valores de deslocamento segundo o eixo Ox (u), obtidos em cada método, não serem iguais, é possível verificar que a diferença entre os valores da geometria otimizada e da geometria não otimizada permanecem constante (**Tabela 44**).

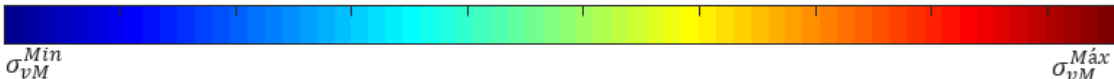
Para a primeira geometria otimizada (modelo 1) é possível verificar um aumento de 57% do deslocamento, em comparação com o deslocamento da geometria não otimizada, o que representa uma diminuição do desempenho mecânico da estrutura. No entanto, a rigidez em função da massa (K) é cerca de 40% superior, sendo este um resultado esperado.

Em contrapartida, a segunda geometria otimizada (modelo 2) apresenta um aumento no valor de deslocamento de 73% e uma massa de apenas 39% em relação ao deslocamento da solução não otimizada. Ao analisar a rigidez em função da massa da segunda geometria otimizada, é possível concluir que esta apresenta um valor superior, quer em relação à geometria obtida através do MEF e do RPIM quer à geometria não otimizada.

Dada a ligeira diferença de rigidez apresentada pelas duas geometrias otimizadas, cerca de 4,8%, é possível concluir que ambas as geometrias revelam um desempenho estrutural eficiente sob as condições fronteiras a que estão sujeitas.

Tabela 44 – Análise linear elástica das geometrias não otimizada e otimizada através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 45,82 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{MEF} = 0,049 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{FEM} = 20,4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 55,99 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{RPIM} = 0,054 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{RPIM} = 18,6 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 49,61 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{NNRPIM} = 0,049 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{NNRPIM} = 20,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>
<p>$m = 45\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 53,18 \text{ MPa}$ $u_{otim_1}^{MEF} = 0,077 \text{ mm}$ $K_{otim_1}^{MEF} = 28,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 45\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 72,51 \text{ MPa}$ $u_{otim_1}^{RPIM} = 0,085 \text{ mm}$ $K_{otim_1}^{RPIM} = 26,2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 45\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 65,47 \text{ MPa}$ $u_{otim_1}^{NNRPIM} = 0,078 \text{ mm}$ $K_{otim_1}^{NNRPIM} = 28,6 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>
<p>$m = 39\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 59,89 \text{ MPa}$ $u_{otim_2}^{MEF} = 0,085 \text{ mm}$ $K_{otim_2}^{MEF} = 30,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 39\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 77,82 \text{ MPa}$ $u_{otim_2}^{RPIM} = 0,094 \text{ mm}$ $K_{otim_2}^{RPIM} = 27,4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 39\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 67,46 \text{ MPa}$ $u_{otim_2}^{NNRPIM} = 0,086 \text{ mm}$ $K_{otim_2}^{NNRPIM} = 30,0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>



σ_{vM}^{Min}
 $\sigma_{vM}^{Máx}$

5.2.3 Viga em formato de L com um furo

Tendo-se estabelecido a eficiência dos parâmetros de otimização estudados, recorreu-se ao estudo de otimização estrutural de uma viga em forma de “L” com um furo (**Figura 17**). O material selecionado apresenta um módulo de Elasticidade (E) de 100 GPa e um coeficiente Poisson (ν) de 0,3, sendo que as condições fronteiras utilizadas no exemplo da viga em “L” serão replicadas nesta análise. À semelhança dos exemplos estudados anteriormente, estabeleceu-se um volume objetivo de 40% do volume inicial.

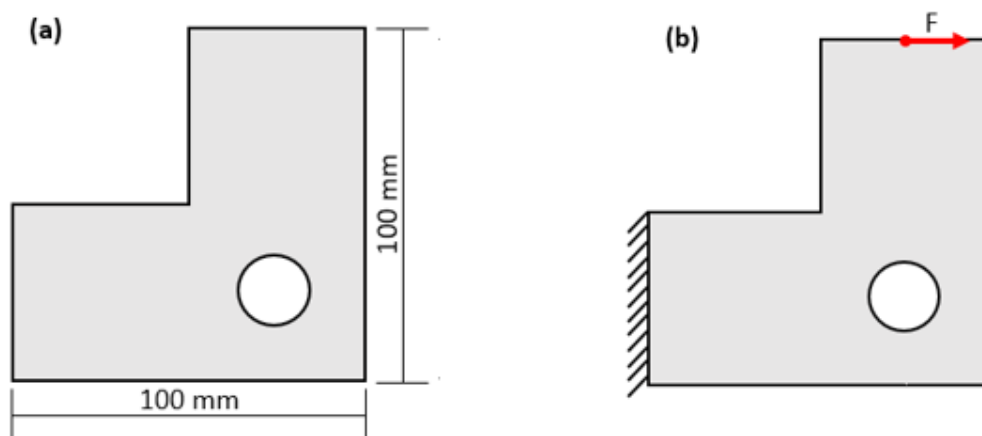


Figura 17 – a Dimensões do domínio. b Condições fronteira naturais e essenciais.

Para a realização da análise estipulou-se a discretização do domínio através de 80x80 divisões (1,25 mm de distância nodal média) e recorreu-se aos três métodos em estudo para executar o processo de otimização estrutural. Na **Tabela 45** estão ilustradas as soluções obtidas pelos respectivos métodos, considerando as TR ótimas estipuladas nos exemplos anteriores.

Na discretização do domínio foram utilizados elementos quadrangulares, o que, neste exemplo, exigiu a criação de geometrias quadrangulares ao redor do furo, sendo que desta forma foi possível a utilização de elementos quadriláteros por todo o domínio. No entanto, a utilização desta técnica gera distâncias nodais diferentes das distâncias utilizadas no restante domínio, o que origina zonas onde a transição de material é abrupta. Assim sendo, de forma a prevenir o aparecimento de zonas de instabilidade e o aumento da duração da análise (devido à existência de um elevado número de elementos no domínio), optou-se por criar as geometrias quadrangulares numa pequena área em redor do furo, como é possível observar na **Figura 18**.

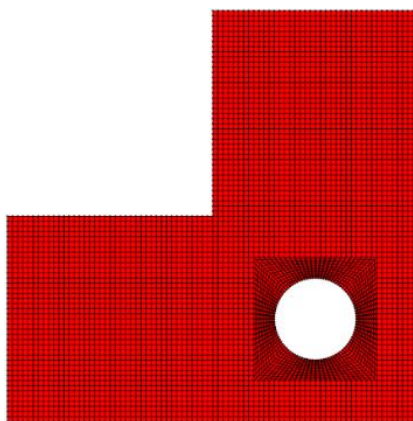
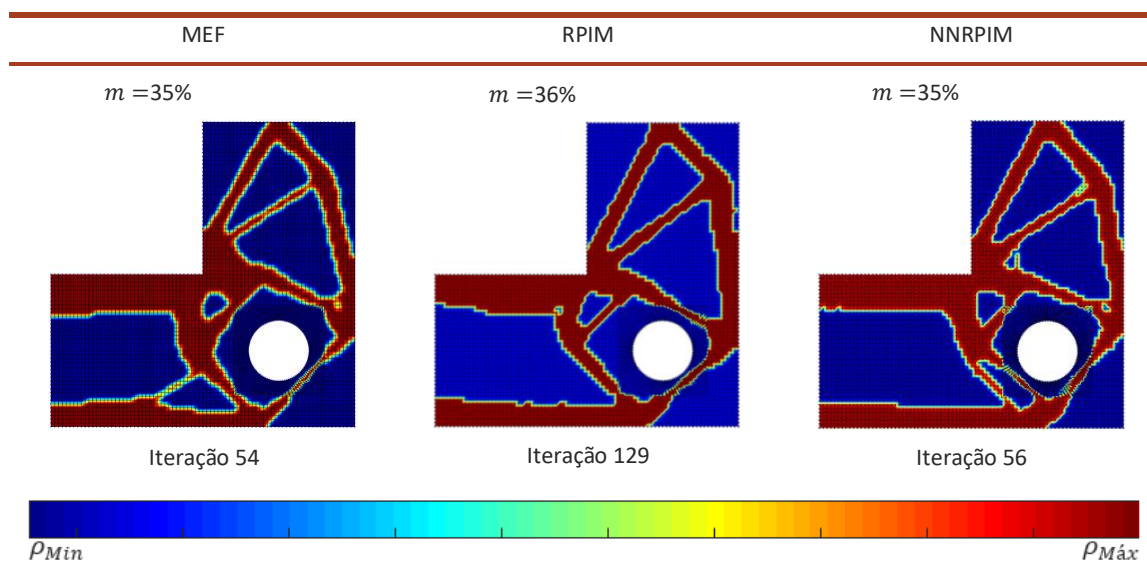


Figura 18 – Discretização do domínio por elementos quadrangulares

Tabela 45 – Geometrias obtidas através do processo de otimização estrutural realizado pelo MEF, RPIM e NNRPIM



Da análise da **Tabela 45** é possível concluir que as geometrias obtidas pelos três métodos são semelhantes entre si. No entanto, o MEF alcançou a geometria final após 54 iterações, enquanto que NNRPIM e o RPIM só originaram a solução pretendida após 56 e 129 iterações, respetivamente. Devido às semelhanças existentes entre as três geometrias, foi possível redesenhar uma geometria final, representada na **Figura 19**. A essa geometria foram eliminadas possíveis zonas de concentração de tensão, provocadas por transições abruptas de material, e reforçadas zonas que apresentam uma menor rigidez, nomeadamente a zona inferior do furo, onde a malha apresenta um elevado número de elementos reduzidos.

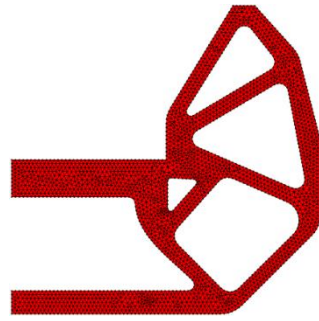
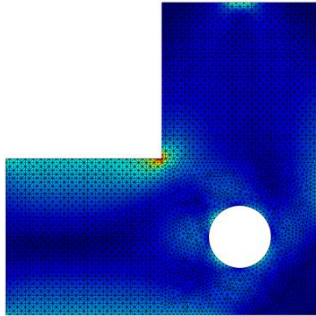
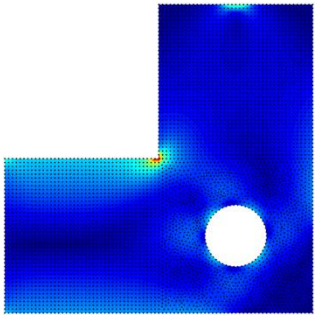
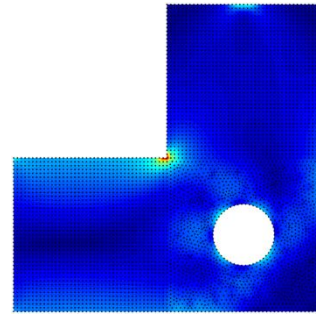
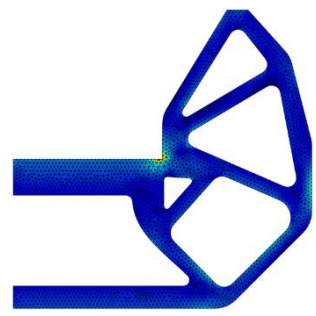
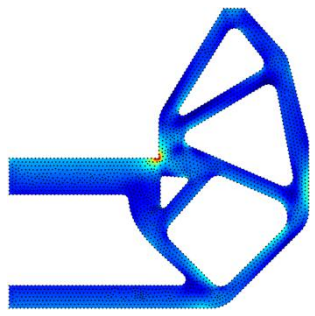
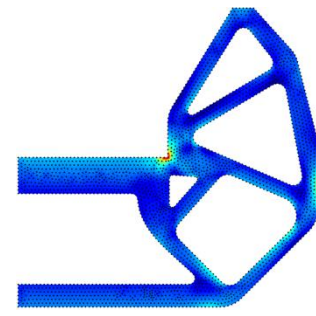
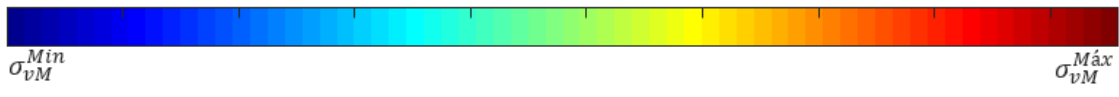


Figura 19 – Discretização do domínio da geometria otimizada por elementos triangulares

Na Tabela 46 é possível observar-se os resultados da análise linear elástica, utilizando o MEF, RPIM e o NNRPIM. Para tal, na discretização do domínio utilizou-se uma distância nodal média de 1,25 mm, tendo-se obtido um total de 2321 nós e 4005 elementos triangulares, para a geometria não otimizada, e 4896 nós e 9422 elementos triangulares para a geometria otimizada.

Tabela 46 – Análise linear elástica das geometrias não otimizada e otimizada através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x} = 52,67 \text{ MPa}$ $u_{s\acute{o}lido}^{MEF} = 0,085 \text{ mm}$ $K_{s\acute{o}lido}^{MEF} = 11,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x} = 64,15 \text{ MPa}$ $u_{s\acute{o}lido}^{RPIM} = 0,094 \text{ mm}$ $K_{s\acute{o}lido}^{RPIM} = 10,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x} = 62,90 \text{ MPa}$ $u_{s\acute{o}lido}^{MEF} = 0,086 \text{ mm}$ $K_{s\acute{o}lido}^{FEM} = 11,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>
<p>$m = 41\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x} = 108,93 \text{ MPa}$ $u_{otim}^{MEF} = 0,102 \text{ mm}$ $K_{otim}^{MEF} = 23,90 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 41\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x} = 98,70 \text{ MPa}$ $vu_{otim}^{RPIM} = 0,113 \text{ mm}$ $K_{s\acute{o}lido}^{RPIM} = 21,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 41\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x} = 87,95 \text{ MPa}$ $u_{s\acute{o}lido}^{NNRPIM} = 0,103 \text{ mm}$ $K_{s\acute{o}lido}^{NNRPIM} = 23,8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>



σ_{vM}^{Min} $\sigma_{vM}^{M\acute{a}x}$

A geometria otimizada apresenta um deslocamento 16% superior ao deslocamento da geometria não otimizada. Por outro lado, a geometria otimizada apresenta uma maior rigidez, aproximadamente 50% superior, em função da massa. Apesar do aumento no valor da tensão e no valor do deslocamento (**Tabela 46**), é possível afirmar que a geometria proposta apresenta uma performance estrutural, em função da massa, superior em comparação com a geometria não otimizada.

5.2.4 Travão de mão hidráulico

O primeiro exemplo, direcionado para a área automóvel, consistiu na otimização estrutural de um travão de mão hidráulico. Para isso, selecionou-se a geometria modelo representada na **Figura 20a**. De seguida, desenhou-se a geometria mantendo as relações entre o valor da largura e da altura iguais (1:4,5) aos da geometria original, tendo-se obtido a geometria apresentada na **Figura 20b**.

Ao desenhar a estrutura considerou-se duas zonas diferentes: as zonas amarelas foram consideradas zonas não remodeláveis e a zona vermelha foi considerada uma zona remodelável. Desta forma, o código do programa aplica o processo de otimização estrutural apenas à zona vermelha. Para a análise, considerou-se que os nós em redor do furo teriam um deslocamento segundo o eixo Ox (u) e segundo o eixo Oy (v) nulo. A estrutura está sujeita à aplicação de uma carga horizontal de 160 N [68], distribuída por 5 nós, na zona não remodelável superior.

Em relação ao material utilizado na análise, este apresenta um módulo de Elasticidade (E) de 210 GPa e um coeficiente Poisson (ν) de 0,3. O domínio foi discretizado utilizando uma distância nodal média de 1,25 mm, originando um total de 3906 elementos quadrangular e 4134 nós.

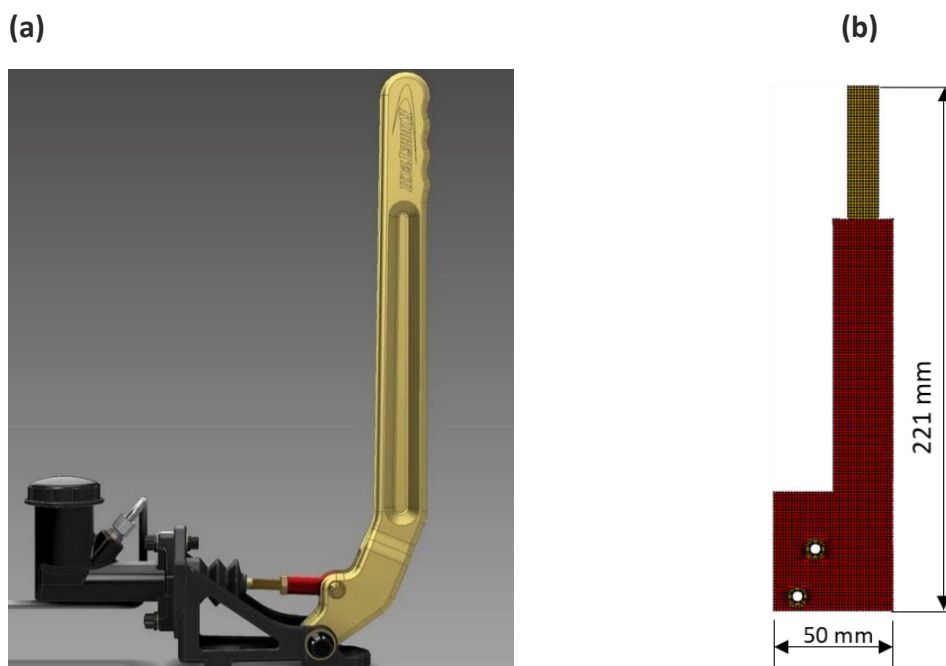
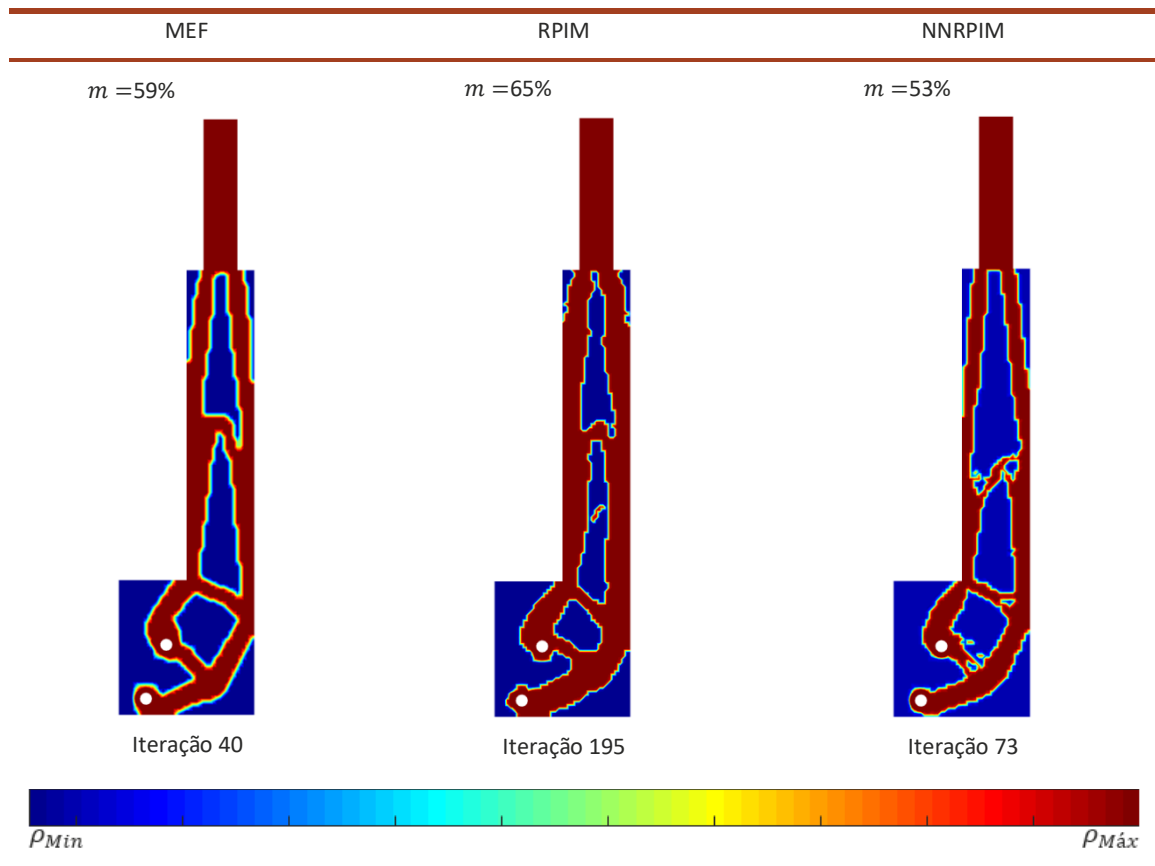


Figura 20 – a Geometria modelo [W1]. b Discretização do domínio da geometria desenhada.

Os resultados do processo de otimização estrutural, utilizando os três métodos, estão representados na **Tabela 47**. Tendo em conta que a apresentação da malha na geometria dificultava a visualização e interpretação da distribuição do material, optou-se por não representar a discretização do domínio em todas os exemplos.

Apesar das geometrias obtidas apresentarem várias semelhanças entre si, o MEF atingiu a geometria apresentada após 40 iterações apenas, enquanto o NNRPIM e RPIM apresentaram 73 e 195 iterações, respetivamente. Apesar das semelhanças existentes entre as geometrias, a massa remodelada não foi a mesma, sendo que o NNRPIM foi capaz de produzir a solução que apresenta uma massa menor.

Tabela 47 – Geometrias obtidas através do processo de otimização estrutural realizado pelo MEF, RPIM e NNRPIM



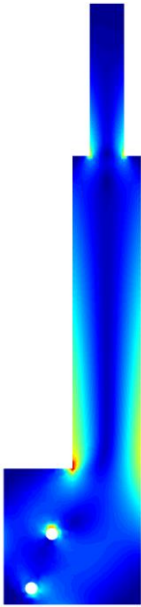
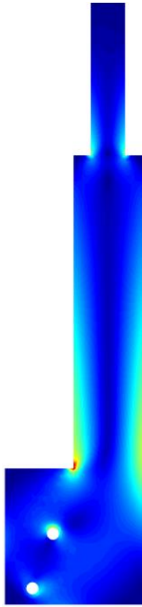
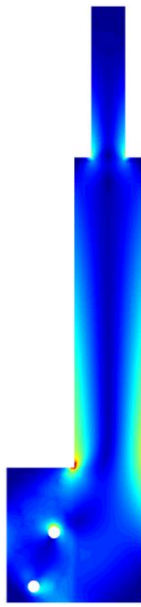
Dadas as semelhanças entre as geometrias, optou-se por redesenhar apenas uma, tendo-se suavizado as zonas de transição brusca de material, com o intuito de prevenir o aparecimento de concentrações de tensões. A geometria redesenhada encontra-se representada na **Figura 21**.

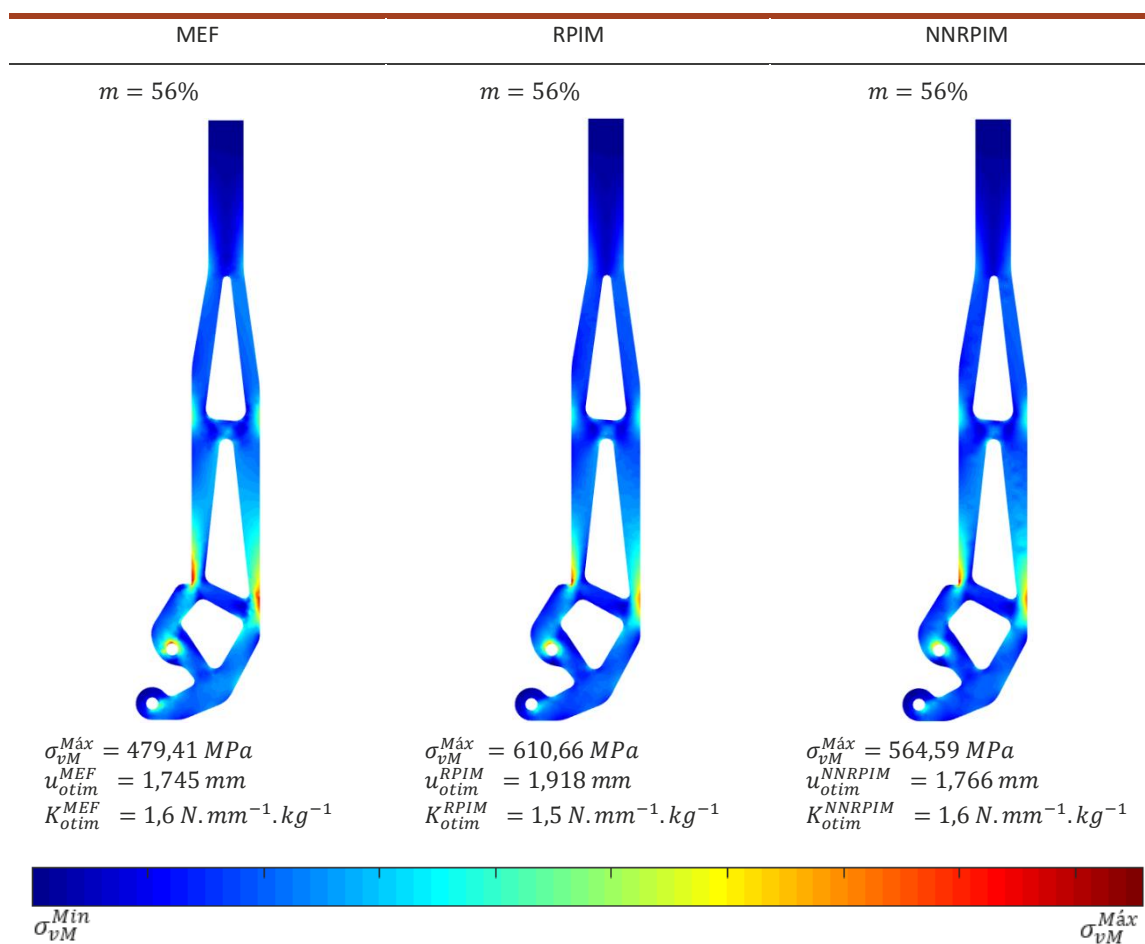


Figura 21 – Geometria otimizada do travão de mão hidráulico

Na Tabela 48 é possível observar-se os resultados da análise linear elástica, utilizando o MEF, RPIM e o NNRPIM. Na discretização do domínio utilizou-se uma distância média nodal de 1,25 mm, tendo-se obtido um total de 4180 nós e 7904 elementos triangulares, para a geometria não otimizada, e 2663 nós e 4641 elementos triangulares para a geometria otimizada.

Tabela 48 – Análise linear elástica das geometrias não otimizada e otimizada através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
$m = 100\%$	$m = 100\%$	$m = 100\%$
		
$\sigma_{vM}^{Máx} = 339,84 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{MEF} = 1,194 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{MEF} = 1,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 403,38 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{RPIM} = 1,312 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{RPIM} = 1,2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 357,49 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{NNRPIM} = 1,184 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{NNRPIM} = 1,4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$



Ao comparar as propriedades mecânicas da estrutura otimizada com as propriedades mecânicas da estrutura não otimizada, verifica-se que os valores de deslocamento, segundo o eixo Ox , e os valores de tensão máxima de von Mises ($\sigma_{vM}^{Máx}$) são maiores. No entanto, a estrutura otimizada apresenta uma redução de 44% da massa inicial. Assim, quando o valor da rigidez em função da massa é calculado, verifica-se que a estrutura otimizada apresenta uma rigidez 23% superior à da geometria não otimizada.

Contudo, verificou-se um aumento significativo da tensão máxima. De forma a diminuir esse valor optou-se por modificar a geometria obtida, através do processo de otimização estrutural, de modo a eliminar possíveis zonas de concentrações de tensão e a aplicar reforços em zonas de maior fragilidade. Na **Tabela 49** estão representados os resultados das análises lineares às geometrias modificadas.

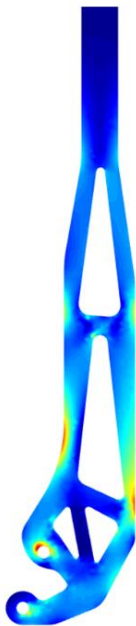
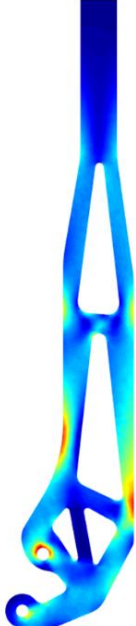
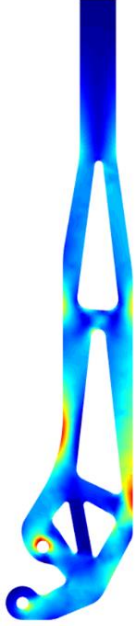
No primeiro caso, aplicou-se uma barra que apresenta uma direção predominantemente paralela ao eixo Oy e uma aresta contundente, que foi suavizada com a aplicação de uma curva. Assim, foi possível alcançar uma geometria com 59% da massa inicial e obteve-se em $\sigma_{vM}^{Máx}$ um aumento de aproximadamente 24% da tensão instalada na geometria não otimizada. No entanto, a rigidez em função da massa apresenta um valor 31% superior à rigidez em função da massa da geometria não otimizada.

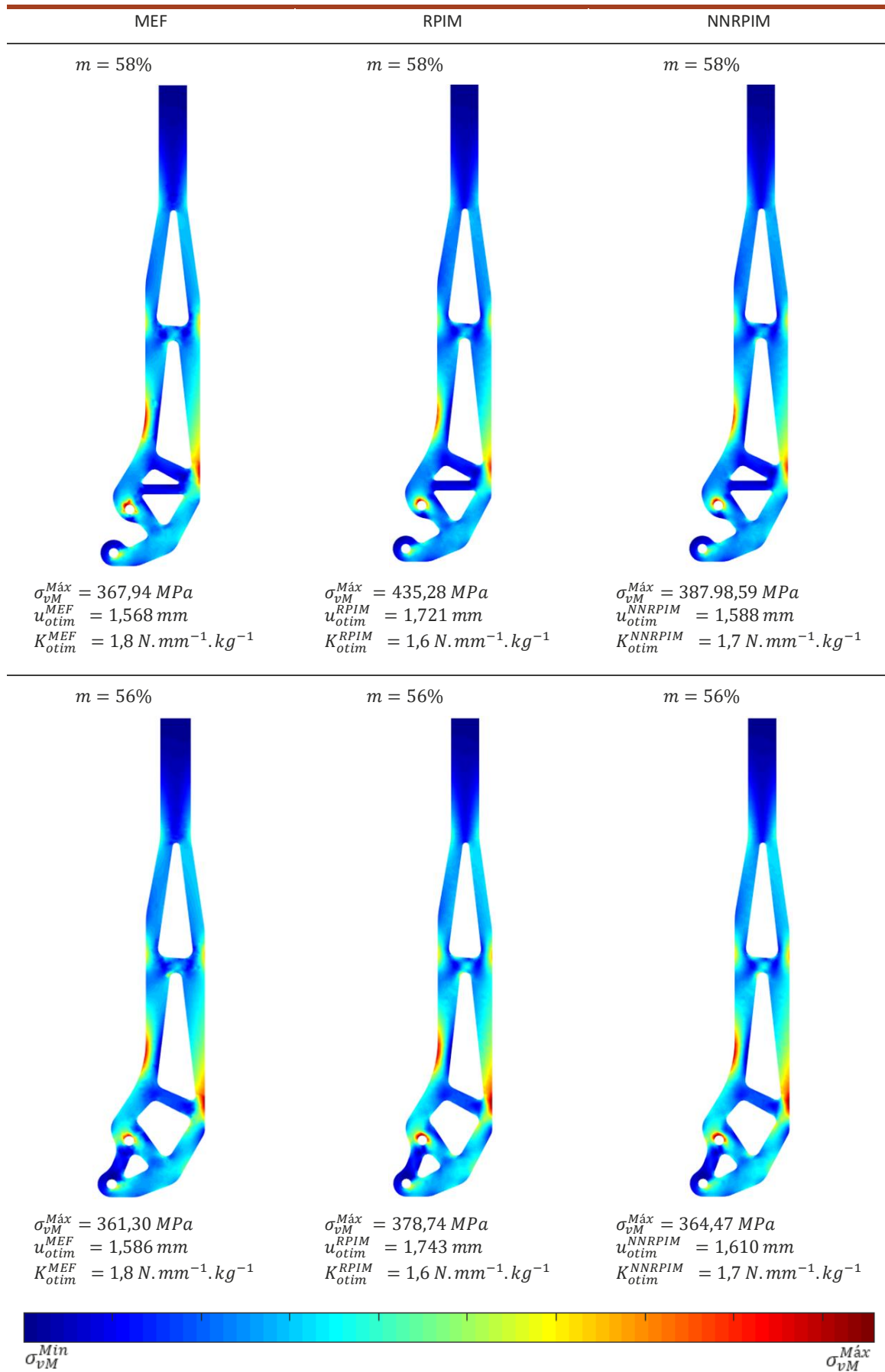
O segundo caso consistiu na suavização da aresta contudente, utilizando os mesmos parâmetros na construção da curva. Aplicou-se uma barra com direção predominantemente paralela ao eixo Ox . A geometria obtida com estas modificações apresenta um volume com apenas 58% do volume inicial, menos 1% do que o caso anterior, e um valor de rigidez em função da massa superior.

Por fim, considerou-se a união dos dois furos e manteve-se os parâmetros utilizados anteriormente. Assim, foi possível originar uma estrutura mais leve, com apenas 57% da massa inicial. Para além da geometria apresentar uma rigidez muito semelhante à do caso anterior, é possível observar-se que o valor da $\sigma_{vM}^{Máx}$ é inferior aos valores obtidos pelas restantes geometrias, atingindo valores inferiores ao da $\sigma_{vM}^{Máx}$ instalada no modelo não otimizado para os resultados obtidos através do MEF e o RPIM. O mesmo não se verifica em relação aos valores de tensão obtidos pelo NNRPIM, uma vez que a solução otimizada com a ligação dos furos apresenta uma tensão 2% superior à tensão instalada no modelo não otimizado.

Assim, é possível concluir que a geometria obtida através do processo de otimização estrutural, em conjunto com as modificações geométricas aplicadas, produz uma solução em que o rácio entre as propriedades mecânicas e a massa são melhores do que a geometria não otimizada.

Tabela 49 – Análise linear elástica das geometrias otimizadas modificadas através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
$m = 59\%$	$m = 59\%$	$m = 59\%$
		
$\sigma_{vM}^{Máx} = 420,18 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{MEF} = 1,560 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{MEF} = 1,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 421,45 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{RPIM} = 1,713 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{RPIM} = 1,58 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 382,82 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{NNRPIM} = 1,576 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{NNRPIM} = 1,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$



5.2.5 Suporte da blindagem do veio de transmissão

O segundo exemplo consiste na otimização estrutural de uma geometria cujo objetivo é suportar a blindagem do veio de transmissão. Para isso, selecionou-se uma geometria modelo (**Figura 22a**) e retirou-se as dimensões da mesma a fim de desenvolver a geometria apresentada na **Figura 22b**. Uma vez que a blindagem do veio de transmissão provoca apenas uma força vertical, simplificou-se o modelo, representando apenas a zona inferior de contacto da blindagem com o suporte. Através desta simplificação foi possível a criação de uma malha regular, com um reduzido número de elementos distorcidos, aumentando assim a definição e exatidão da solução obtida.

Para o processo de otimização considerou-se que a área laranja, em redor dos furos, não seria remodelada. O material considerado na análise apresenta um módulo de Elasticidade (E) de 210 GPa e um coeficiente Poisson (ν) de 0,3. Como condições fronteiras essenciais definiu-se que os nós em redor do furo mais à esquerda têm impedido o deslocamento segundo o eixo Ox e Oy . Por outro lado, os nós em redor do furo mais à direita encontram-se apenas com o deslocamento segundo o eixo Oy impedidos.

A força aplicada foi calculada considerando que a blindagem seria produzida em aço estrutural, sendo que apresenta um raio interior de 200 mm, uma espessura de 10 mm e um comprimento de 1000 mm. Através da aplicação da equação (45), em que ρ representa a densidade do material considerado no fabrico da blindagem e V o volume da geometria, foi possível obter o valor da massa m . Considerando $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ e $V = 0,0033 \text{ m}^3$, obteve-se uma $m = 25,73 \text{ kg}$. Tendo em conta que a blindagem se encontra apoiada nas duas extremidades, a força a considerar no suporte é de 252,4 N, metade do peso da blindagem.

$$m = \rho \times V \quad (45)$$

(a)



(b)

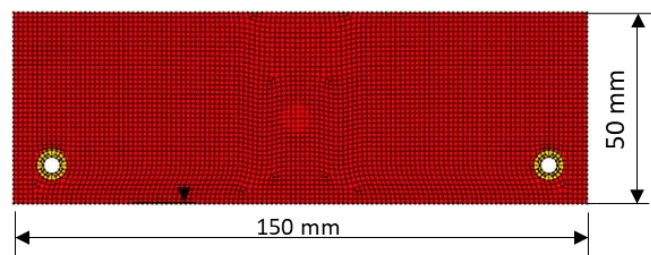


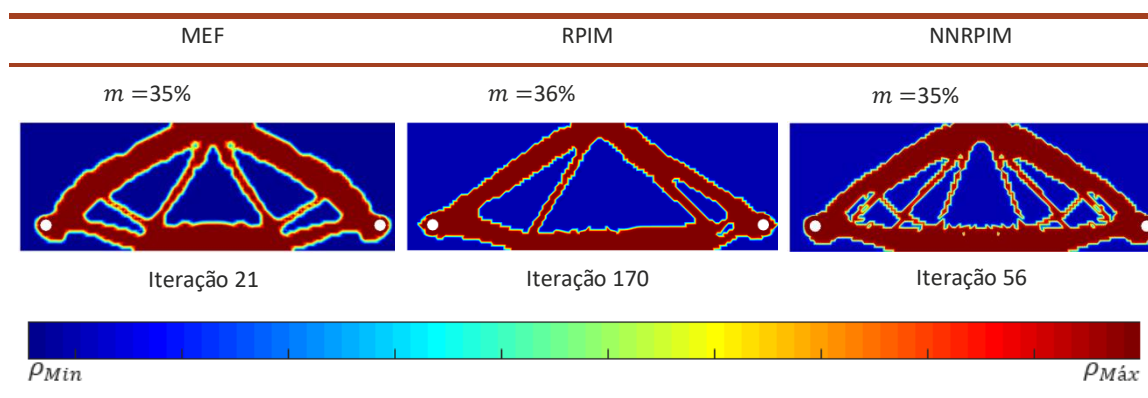
Figura 22 – a Geometria modelo [W2]. b Discretização do domínio da geometria desenhada

Os resultados do processo de otimização estrutural, considerando as condições fronteira naturais e essenciais descritas anteriormente, estão representados na **Tabela 50**.

Da análise da tabela é possível concluir que todos os métodos produziram soluções com uma massa de aproximadamente 35% da massa inicial. Apesar das diferenças geométricas, o MEF e o NNRPIM produziram soluções que apresentam simetria em relação ao plano médio horizontal. No entanto, a solução do MEF apresentam uma maior simplicidade e, por consequência, uma maior facilidade no seu fabrico.

Por outro lado, na geometria obtida pelo RPIM não foi possível obter simetria em relação ao plano médio horizontal, uma vez que os nós do domínio de influência nem sempre são simétricos, o que origina uma remoção assimétrica. A falta de simetria nos domínios de influência torna-se mais evidente com o aumento do número de iterações.

Tabela 50 – Geometrias obtidas através do processo de otimização estrutural realizado pelo MEF, RPIM e NNRPIM



Existindo a necessidade de selecionar uma geometria com uma menor massa, mas também uma geometria simples, de forma a facilitar a sua produção, optou-se por redesenhar a estrutura obtida pelo MEF (**Figura 23**). Para tal, suavizou-se possíveis zonas favoráveis ao aparecimento de pontos de concentrações de tensões.

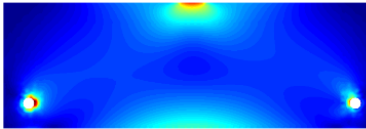
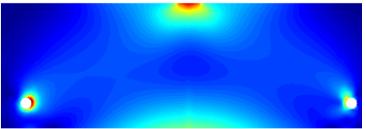
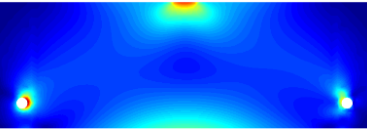
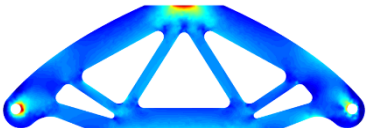
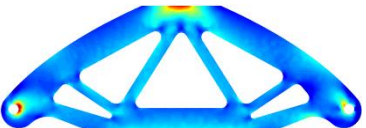
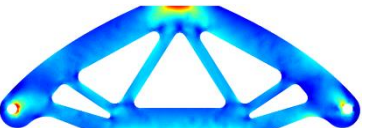


Figura 23 – Geometria otimizada redesenhada

Após redesenhar a geometria, realizou-se a análise linear elástica (**Tabela 51**), utilizando elementos triangulares na discretização do domínio. No caso da geometria não otimizada discretizou-se o domínio por um conjunto de 9752 elementos triangulares e 5047 nós. Paralelamente, no caso da geometria otimizada utilizou-se um total de 4561 elementos triangulares e 2573 nós.

Através dos resultados obtidos pela análise linear, é possível afirmar que a geometria otimizada apresenta uma rigidez em função da massa 29% superior à geometria não otimizada. No entanto, o valor da tensão máxima de von Mises ($\sigma_{vM}^{Máx}$) apresentou um aumento de 36%. Já o valor do deslocamento apresenta um aumento de 87% quando comparado com o valor do deslocamento obtido pela geometria não otimizada. Apesar do aumento dos valores de deslocamento e de tensão, que contribuem para a diminuição da performance estrutural, a rigidez da geometria em função da massa aumentou, sendo assim possível concluir que a geometria otimizada apresenta um melhor desempenho estrutural do que a geometria não otimizada.

Tabela 51 – Análise linear elástica das geometrias não otimizada e otimizada através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
$m = 100\%$	$m = 100\%$	$m = 100\%$
		
$\sigma_{vM}^{Máx} = 38,93 \text{ MPa}$ $v_{sólido}^{MEF} = -0,008 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{MEF} = 305,0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 39,15 \text{ MPa}$ $v_{sólido}^{RPIM} = -0,009 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{RPIM} = 278,4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 36,58 \text{ MPa}$ $v_{sólido}^{NNRPIM} = -0,008 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{NNRPIM} = 313,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
$m = 44\%$	$m = 44\%$	$m = 44\%$
		
$\sigma_{vM}^{Máx} = 52,82 \text{ MPa}$ $v_{otim}^{MEF} = -0,015 \text{ mm}$ $K_{otim}^{MEF} = 393,8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 53,75 \text{ MPa}$ $v_{otim}^{RPIM} = -0,0016 \text{ mm}$ $K_{otim}^{RPIM} = 359,4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 49,91 \text{ MPa}$ $v_{otim}^{NNRPIM} = -0,015 \text{ mm}$ $K_{otim}^{NNRPIM} = 391,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

5.2.6 Suporte painel lateral

O terceiro exemplo consistiu na aplicação do processo de otimização a um suporte do painel lateral, com o objetivo de reduzir a massa, mas garantindo que a estrutura suporta a carga lateral imposta pela norma EN 12642 [69]. Segundo esta norma, o painel lateral necessita de resistir a uma carga lateral uniformemente distribuída, equivalente a 30% da carga útil total.

Considerando a carga útil total de 1100 kg [W3] e o painel que se encontra fixo apenas nas extremidades, a carga a aplicar no suporte é de 1618 N. Desta forma, distribuiu-se a carga segundo o eixo Ox pelos cinco furos e considerou-se que os restantes furos teriam impedido o deslocamento segundo o eixo Ox e Oy .

O material considerado na análise apresenta um módulo de Elasticidade (E) de 210 GPa e um coeficiente Poisson (ν) de 0,3. Na **Figura 24a** está representada a geometria modelo e na **Figura 24b** encontra-se a geometria considerada na análise, assim como a discretização do domínio.

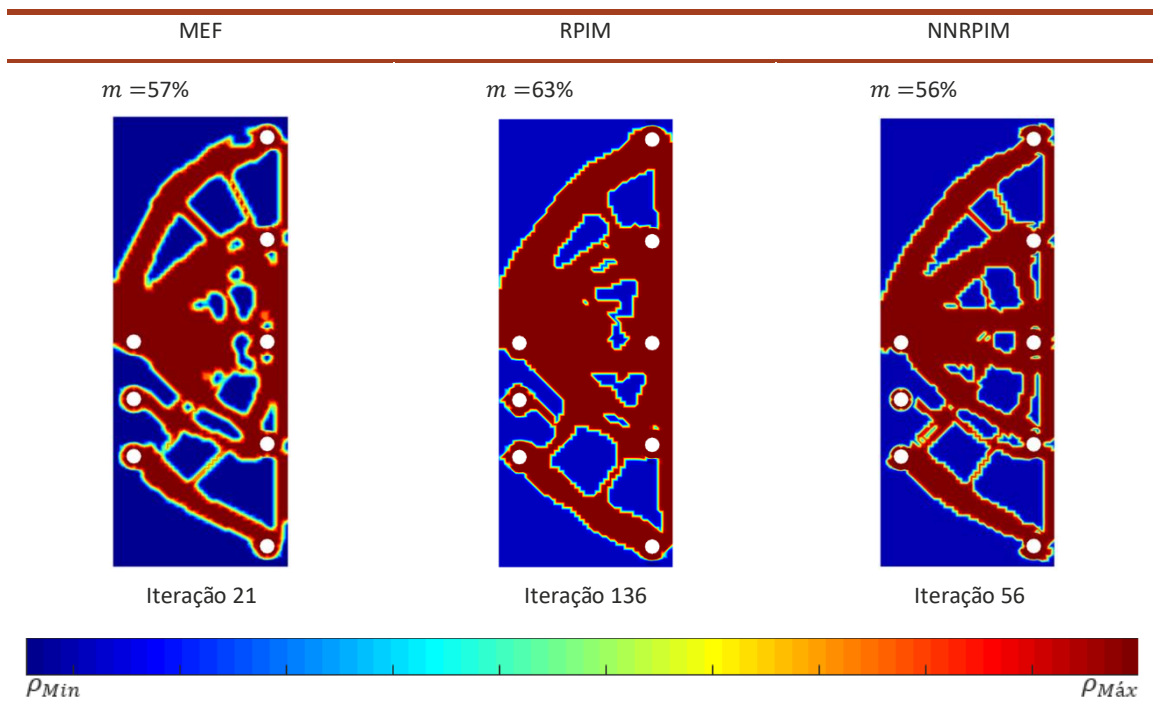
À semelhança dos exemplos anteriores considerou-se que a zona circular em redor dos furos não seria remodelada. Essa zona está representada pela cor amarela, enquanto que o restante domínio (material remodelável) encontra-se representado a vermelho.



Figura 24 – a Geometria modelo[W4]. b Discretização do domínio da geometria desenhada.

Após a discretização do domínio por 4684 elementos quadrangulares e 4877 nós, aplicou-se o processo de otimização estrutural utilizando o MEF, RPIM e ao NNRPIM. Na Tabela 52 estão representadas as geometrias obtidas por cada um dos métodos, após a aplicação do processo de otimização estrutural.

Tabela 52 – Geometrias obtidas através do processo de otimização estrutural realizado pelo MEF, RPIM e NNRPIM



Apesar das geometrias apresentarem várias semelhanças entre si, a geometria obtida pelo NNRPIM foi capaz de produzir uma geometria mais leve, com apenas 56% da massa

inicial, comparativamente aos valores de massa inicial de 57 e 63% do MEF e RPIM, respetivamente.

Uma vez que as semelhanças entre as soluções do MEF e do NNRPIM são notórias e apresentam uma menor massa em comparação com a geometria obtida pelo RPIM, optou-se por redesenhar a estrutura tendo como base a solução do MEF e do NNRPIM.

De forma a garantir a integridade da estrutura e aumentar a sua rigidez, decidiu-se unir a zona dos furos mais à esquerda e colocar contornos curvos nas zonas de transição brusca de material, de modo a evitar o aparecimento de pontos de concentração de tensões.

A geometria otimizada redesenhada com as respetivas modificações está representada na **Figura 25**.

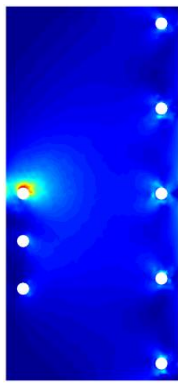
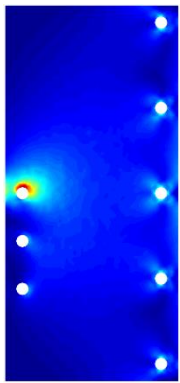
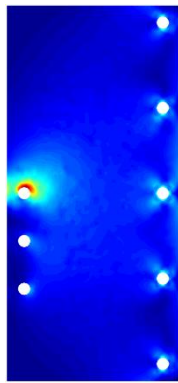
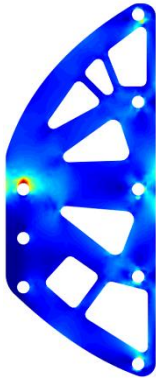
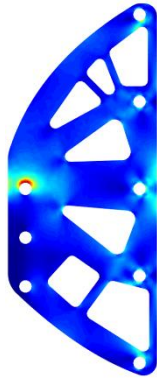
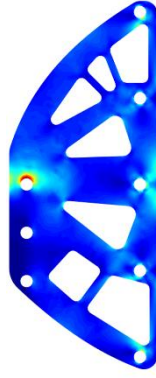


Figura 25 – Geometria otimizada redesenhada

De forma a comparar as propriedades mecânicas entre a estrutura otimizada e não otimizada procedeu-se a análise linear. Na **Tabela 53** estão representados os resultados da análise linear às duas estruturas, realizada pelos três métodos. A geometria não otimizada apresenta um total de 5885 nós e 11368 elementos, por outro lado, a geometria otimizada apresenta um total de 4238 nós e 7702 elementos triangulares.

Ao contrário do que aconteceu nos exemplos anteriores, a geometria otimizada apresenta uma rigidez em função da massa menor do que a geometria não otimizada. Isto deve-se ao facto do deslocamento segundo o eixo Ox ter aumentado aproximadamente 96% e da massa removida ter sido apenas 36%.

Tabela 53 – Análise linear elástica das geometrias não otimizada e otimizada através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 255,81 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{MEF} = 0,047 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{MEF} = 345,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 221,63 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{RPIM} = 0,051 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{RPIM} = 315,8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 100\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 193,69 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{NNRPIM} = 0,043 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{NNRPIM} = 345,7 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>
<p>$m = 64\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 244,05 \text{ MPa}$ $u_{ótím}^{MEF} = 0,092 \text{ mm}$ $K_{ótím}^{MEF} = 276,0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 64\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 263,51 \text{ MPa}$ $u_{ótím}^{RPIM} = 0,101 \text{ mm}$ $K_{ótím}^{RPIM} = 250,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>	<p>$m = 64\%$</p>  <p> $\sigma_{vM}^{Máx} = 233,99 \text{ MPa}$ $u_{ótím}^{NNRPIM} = 0,093 \text{ mm}$ $K_{ótím}^{NNRPIM} = 272,9 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ </p>

Relativamente aos valores das tensões, não sofreram uma variação significativa. No entanto, a tensão máxima de von Mises ($\sigma_{vM}^{Máx}$) para a solução otimizada, obtida através do RPIM, apresentou um aumento de aproximadamente 19%.

Dado que os resultados obtidos pelo processo de otimização estrutural não apresentam um aumento da rigidez em função da massa, torna-se pertinente avaliar se as modificações efetuadas, nomeadamente a ligação dos furos, apresentam vantagem estrutural. Assim, redesenhou-se novamente a estrutura, de forma a atender um maior número de aspetos, fornecidos pelo processo de otimização, tendo-se obtido a geometria representada na **Figura 26**.



Figura 26 – Geometria redesenhada à semelhança da solução obtida através do processo de otimização estrutural

Após redesenhar a estrutura realizou-se a análise linear elástica através dos três métodos em estudo, tendo sido possível realizar a discretização do domínio através de 5309 elementos triangulares e de 3004 nós. Os resultados da análise linear encontram-se ilustrados na **Tabela 54**.

Tabela 54 – Análise linear elástica da geometria otimizada através do MEF, RPIM e NNRPIM

MEF	RPIM	NNRPIM
$m = 42\%$	$m = 42\%$	$m = 42\%$
$\sigma_{vM}^{Máx} = 299,49 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{MEF} = 0,094 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{MEF} = 409,2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 315,76 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{RPIM} = 0,104 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{RPIM} = 369,6 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$\sigma_{vM}^{Máx} = 260,97 \text{ MPa}$ $u_{sólido}^{NNRPIM} = 0,094 \text{ mm}$ $K_{sólido}^{NNRPIM} = 408,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

Após eliminar o material que existia entre os furos, obteve-se uma geometria que apresenta uma rigidez 19% superior à rigidez da geometria não otimizada. Assim, é possível concluir que as modificações efetuadas, nomeadamente as ligações dos furos, não produziu uma geometria com melhores propriedades mecânicas.

No entanto, a eliminação dessa ligação provocou um aumento de 23% no valor da $\sigma_{vM}^{Máx}$, sem comprometer o aumento da rigidez da geometria.

CONCLUSÕES

- 6.1 CONCLUSÕES
- 6.2 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

6 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

Este estudo pretendeu aplicar o FEM, RPIM e do NNRPIM a problemas bidimensionais de otimização estrutural e comparar o desempenho dos Métodos sem Malha com o MEF. Durante muitos anos o MEF foi selecionado como o método numérico da análise estrutural. Contudo, o uso de geometrias complexas e a obtenção de malhas com elevado número de elementos distorcidos originam resultados com qualidade inferior, o que afeta as propriedades mecânicas das estruturas. Assim, de forma a colmatar as falhas do MEF surgem os Métodos sem Malha com o propósito de analisar estruturas mais complexas sem recorrer a uma malha de elementos, cuja aplicação se pode generalizar a vários setores.

A indústria automóvel é um dos setores com mais emissões de CO₂, sendo que, por isso, é diariamente desafiada a desenvolver soluções que representam o melhor balanço entre o desempenho estrutural, o custo de fabricação e as normas ambientais. Através da otimização estrutural é possível encontrar uma solução de geometria ideal que garante o cumprimento das especificações de baixo peso e custo, mas também a resistência aos esforços externos.

Tendo em conta os benefícios da otimização estrutural, importa perceber quais os métodos numéricos que apresentam melhor desempenho, o que justifica a pertinência de comparar os Métodos sem Malha com o MEF.

Com esse objetivo, numa fase preliminar, avaliou-se a influência do tipo de elemento (triangular ou quadrangular) utilizado na discretização do domínio nas soluções de otimização estrutural. Não sendo o RPIM um verdadeiro método sem malha, necessita da existência de uma malha de integração de fundo. Assim, a malha de integração do RPIM é construída com base numa grelha de fundo constituída por células triangulares ou quadrangulares. À semelhança do FEM, a performance do RPIM depende da disposição, e da densidade dessa malha de fundo. Por outro lado, o NNRPIM é considerando um método verdadeiramente sem malha, cuja malha de integração depende unicamente da distribuição nodal.

De seguida, procedeu-se ao estudo dos parâmetros de otimização estrutural - nível de discretização, TR e critério de otimização -, sendo que, neste ponto, se analisaram vários níveis de discretização para o primeiro exemplo (viga em consola), tais como: 32x20, 48x30, 64x40 e 80x50 divisões. Das discretizações consideradas concluiu-se que as que apresentam uma baixa densidade nodal, nomeadamente 32x20 e 48x30, apresentam soluções com indefinições materiais. Em contrapartida, a utilização de

discretizações com uma elevada densidade nodal aumenta significativamente os custos computacionais, mas permite a obtenção de soluções mais suaves. É ainda possível concluir que a obtenção de soluções semelhantes com a literatura não depende da discretização do domínio por um elevado número de nós. As soluções obtidas para o MEF e o NNRPIM apresentam uma maior semelhança com a solução da literatura quando o critério da densidade de energia de deformação era imposto. Porém, o mesmo não aconteceu com o RPIM, uma vez que a utilização do critério de von Mises permitiu a obtenção de melhores soluções.

Através da resolução do segundo exemplo de otimização estrutural (viga em formato “L”), foi possível validar os parâmetros ótimos para a discretização do domínio utilizando a distância nodal média de 1,25 mm. A aplicação do MEF a problemas de otimização estrutural, considerando a TR de 4% e o critério da densidade de energia de deformação, produziu soluções estáveis e semelhantes à solução da literatura. Paralelamente, no caso do RPIM, é necessário considerar uma TR de 2% e a imposição do critério de von Mises para a obtenção de soluções estáveis. Por último, com o NNRPIM, a aplicação da TR de 2% combinada com o critério da densidade de energia de deformação, produz soluções estáveis e precisas.

Após estabelecer os parâmetros de otimização estrutural, procedeu-se à aplicação dos mesmos em outros exemplos escolhidos pelos autores do presente estudo. No caso da viga em formato de “L” com um furo, os três métodos utilizados produziram uma geometria otimizada e idêntica, que contou com uma redução de 59% da massa e um aumento de 50% da rigidez em função da massa.

De seguida, aplicou-se o processo de otimização estrutural a três componentes automóveis: um travão de mão hidráulico, um suporte da blindagem do veio de transmissão e um suporte do painel lateral de um veículo de carga. No caso do travão de mão, os três métodos produziram uma solução otimizada muito semelhante, tendo sido possível eliminar cerca de 44% da massa inicial. A geometria otimizada contou com um aumento de 29% na sua rigidez em função da massa.

No caso do suporte da blindagem do veio de transmissão os resultados dos três métodos não apresentaram semelhanças. O MEF foi capaz de produzir uma solução simétrica e simples, facilitando assim o processo de otimização. O RPIM não originou uma solução simétrica, mas foi capaz de remover 64% da massa inicial. Por último, o NNRPIM produziu uma solução que apresenta simetria, mas quando comparada com a solução do MEF é considerada uma solução mais complexa e, por consequência, mais difícil de produzir. Assim, geometria obtida pelo MEF é que apresenta melhor desempenho estrutural, uma vez que apresentou uma redução de 56% da massa inicial e um aumento de 29% da rigidez em função da massa.

Por último, o exemplo do suporte do painel lateral originou soluções semelhantes para os três métodos, tendo-se verificado uma diminuição de 58% da massa inicial e um aumento de, aproximadamente, 19% no valor da rigidez em função da massa, quando comparado com o exemplo não otimizado.

Assim, é possível concluir que o MEF e o NRPIM produziram soluções estáveis e precisas para todos os exemplos analisados, enquanto o RPIM não apresentou uma solução precisa para o exemplo do suporte da blindagem do veio de transmissão. Esta conclusão sugere que a aplicação do RPIM no campo da otimização estrutural requer estudos mais aprofundados. Ainda assim, é possível concluir que a aplicação deste processo permite a obtenção de propriedades mecânicas mais ajustadas aos carregamentos impostos, a redução da quantidade de material necessário em cada estrutura, e por consequência, a redução da emissão de produtos poluentes. Porém, apesar de todas as vantagens que se destacam claramente, o processo de otimização estrutural pode originar soluções com elevado nível de complexidade, o que não só dificulta o seu fabrico, como aumenta os custos de produção.

Apesar do presente estudo cumprir os objetivos delineados, apresenta limitações que condicionaram a obtenção de melhores resultados no processo de análise. Uma das limitações do estudo é o elevado custo computacional. O acesso a computadores com maior poder computacional teria permitido a análise de um maior número de parâmetros de otimização e de níveis de discretização com maior densidade nodal. Como outra limitação do estudo destaca-se o facto dos Métodos sem Malha ser um método número pouco explorado no processo de otimização estrutural, tornando mais difícil e desafiador a comparação dos resultados obtidos no presente estudo com referências e resultados presentes na literatura. Nesse sentido, tendo em conta os poucos estudos realizados neste âmbito, a escolha dos parâmetros de otimização não teve por base nenhum referencial teórico, o que se apresenta como outra limitação do estudo.

Por último, importa destacar os pontos fortes deste estudo: definição de parâmetros ajustados às características do processo de otimização estrutural, obtenção de soluções semelhantes com a literatura e desenvolvimento de soluções com desempenho estrutural superior às soluções originais.

6.2 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

Em estudos futuros seria pertinente avaliar os parâmetros para os quais o RPIM apresenta soluções semelhantes com a solução da literatura. Para além disso, tendo em conta as características dimensionais dos componentes dos veículos e outras estruturas, torna-se relevante a extensão do processo de otimização estrutural a problemas tridimensionais, que permita a obtenção de um resultado tangível.

Para além disso, o estudo da discretização com uma densidade nodal mais elevada e, consequentemente, obtenção de contornos mais suaves, tornaria possível automatizar o processo de redesenho da estrutura e tornar todo o processo mais eficiente.

BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

7.1 REFERÊNCIAS

7 BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

7.1 REFERÊNCIAS

1. González RM, Marrero GA, Rodríguez-López J, Marrero ÁS. Analyzing CO₂ emissions from passenger cars in Europe: A dynamic panel data approach. *Energy Policy* [Internet]. 2019;129(March):1271–81. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2019.03.031>
2. Simonen P, Kalliokoski J, Karjalainen P, Rönkkö T, Timonen H, Saarikoski S, et al. Characterization of laboratory and real driving emissions of individual Euro 6 light-duty vehicles – Fresh particles and secondary aerosol formation. *Environ Pollut.* 2019;255:113175.
3. Cuenot F. CO₂ emissions from new cars and vehicle weight in Europe; How the EU regulation could have been avoided and how to reach it? *Energy Policy.* 2009;37(10):3832–42.
4. Zervas E, Lazarou C. Influence of European passenger cars weight to exhaust CO₂ emissions. *Energy Policy* [Internet]. 2008 Jan 1 [cited 2019 Oct 17];36(1):248–57. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421507003849>
5. Martínez-Frutos J, Herrero-Pérez D. Evolutionary topology optimization of continuum structures under uncertainty using sensitivity analysis and smooth boundary representation. *Comput Struct.* 2018;205:15–27.
6. Resende MGC, Silveira ME, Resende TAC. Topological Optimization Applied to Design of an Automotive Hood. *SAE Tech Pap.* 2016;Part F1270(October).
7. Daxini SD, Prajapati JM. Parametric shape optimization techniques based on Meshless methods: A review. *Struct Multidiscip Optim.* 2017;56(5):1197–214.
8. Grindeanu I, Kim NH, Choi KK, Chen JS. CONCURRENT ENGINEERING : Research and Applications CAD-Based Shape Optimization Using a Meshfree Method. *Comput Des.* 2002;10(1):55–66.
9. Wang JG, Liu GR. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *Int J Numer Methods Eng.* 2002;54(11):1623–48.
10. Belinha J. Meshless Methods in Biomechanics Bone Tissue Remodelling Analysis [Internet]. First Edit. Tavares J, Natal Jorge R, editors. Porto: Springer; 2014. Available from: http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=zdb9zX0mxKoC&oi=fnd&pg=PR5&dq=Biomedical+Imaging+and+Computational+Modeling+in+Biomechanics&ots=_Pw-FOMh-A&sig=ZxGl9pxd6VYof4OyGmpRC_vuuAw

11. Campilho R. Método de Elementos Finitos - Ferramentas para Análise Estrutural. First Edit. Guimarães J, editor. Porto: Publindústria; 2012. 205 p.
12. Liu GR. Meshfree Methods Moving Beyond the Finite Element Method. Second Edi. Boca Raton: CRC Press; 2010. 773 p.
13. Nguyen VP, Rabczuk T, Bordas S, Duflot M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Math Comput Simul.* 2008;79(3):763–813.
14. Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Comput Mech.* 1992;10(5):307–18.
15. Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. *Math Comput.* 1981;37(155):141.
16. Lu YY, Belytschko T, Gu L. Computer methods in applied mechanics and engineering A new implementation of the element free Galerkin method. *Comput Methods Appl Mech Engrg [Internet].* 1994;113(2):397–414. Available from: https://ac.els-cdn.com/0045782594900566/1-s2.0-0045782594900566-main.pdf?_tid=f7e9f5a8-f55a-11e7-8c30-00000aab0f6c&acdnat=1515515851_1c343eff8cfc53b3f231c1815ecc8f71
17. Gingold R., Monaghan J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *R Astron Soc.* 1977;375–389.
18. Wing Kam L, Sukky J, Yi Fei Z. Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Methods Fluids.* 1995;20(8–9):1081–106.
19. Atluri SN, Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput Mech.* 1998;22(2):117–27.
20. Liu GR. A point assembly method for stress analysis for two-dimensional solids. *Int J Solids Struct.* 2002;39(1):261–76.
21. Idelsohn SR, Onate E, Calvo N, Del Pin F. The meshless finite element method. *Int J Numer Methods Eng.* 2003;58(6):893–912.
22. Liu GR, Gu YT. A matrix triangularization algorithm for the polynomial point interpolation method. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2003;192(19):2269–95.
23. Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics. *Int J Numer Methods Eng.* 1998;43(5):839–87.
24. Voronoi G. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des forms quadratiques. *J Reine Angew Math.* 1907;133:97–178.
25. Kansa EJ. Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-I surface approximations and partial derivative estimates. *Comput Math with Appl.* 1990;19(8–9):127–45.
26. Wang JG, Liu GR. On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2002;191(23–24):2611–30.
27. Archer GC. Book Reviews: A Primer for Finite Elements in Elastic Structures. Vol.

- 125, Journal of Structural Engineering. 1999. p. 1081–2.
28. Michell AGM. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures . London, Edinburgh, Dublin Philos Mag J Sci. 1904;8(47):589–97.
 29. Gaspar Z. Extension of Michell ' s classical (1904) truss topology optimization theory to multiple load conditions , stress and displacement constraints , space (3D) trusses , probabilistic desig ... Extension of Michell ' s classical (1904) truss topology op. 3rd Polish Congress of Mechanics & 21st Computer Methods in Mechanics. 2015;1–3.
 30. Rossow MP, Taylor JE. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. AIAA J. 1973;11(11):1566–9.
 31. Dems K, óz Z. Multiparameter structural shape optimization by the finite element method. Int J Numer Methods Eng. 1978;13(2):247–63.
 32. Schnack E. An optimization procedure for stress concentrations by the finite element technique. Int J Numer Methods Eng. 1979;14(1):115–24.
 33. Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Comput Methods Appl Mech Eng. 1988;71(2):197–224.
 34. Maute K, Ramm E. Adaptive topology optimization. Struct Optim. 1995;10(2):100–12.
 35. Nha Chu D, Xie YM, Hira A, Steven GP. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. Finite Elem Anal Des. 1996;21(4):239–51.
 36. Querin OM, Steven GP, Xie YM. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. Finite Elem Anal Des. 2000;34(3–4):291–308.
 37. Chen YM, Bhaskar A, Keane A. A parallel nodal-based evolutionary structural optimization algorithm. Struct Multidiscip Optim. 2002;23(3):241–51.
 38. Li W, Li Q, Steven GP, Xie YM. An evolutionary shape optimization for elastic contact problems subject to multiple load cases. Comput Methods Appl Mech Eng. 2005;194(30-33 SPEC. ISS.):3394–415.
 39. Ghaffarianjam HR, Abolbashari MH. Performance of the evolutionary structural optimization-based approaches with different criteria in the shape optimization of beams. Finite Elem Anal Des [Internet]. 2010;46(4):348–56. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2009.12.001>
 40. Alfieri L, Bassi D, Biondini F, Malerba PG. Morphologic Evolutionary Structural Optimization. 7-th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. 2007;1–4.
 41. Li Q, Steven GP, Xie YM. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization. Struct Optim. 1999;18(1):67–73.
 42. Xia L, Zhang L, Xia Q, Shi T. Stress-based topology optimization using bi-

- directional evolutionary structural optimization method. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2018;333:356–70. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.035>
43. Deaton JD, Grandhi R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. *Struct Multidiscip Optim*. 2014;49(1):1–38.
 44. Sethian JA, Wiegmann A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. *J Comput Phys*. 2000;163(2):489–528.
 45. Ito K, Kunisch K. An Algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim Calc Var* [Internet]. 2003;8(January):741–60. Available from: http://archive.numdam.org/article/COCV_2002__8__741_0.pdf
 46. Bendsøe MP. Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct Optim*. 1989;1(4):193–202.
 47. Kobayashi MH. On a biologically inspired topology optimization method. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* [Internet]. 2010;15(3):787–802. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.04.014>
 48. Grindeanu I, Chang KH, Choi KK, Chen JS. Design sensitivity analysis of hyperelastic structures using a meshless method. *AIAA J*. 1998;36(4):618–27.
 49. Lacroix D, Bouillard P. Improved sensitivity analysis by a coupled FE-EFG method. *Comput Struct*. 2003;81(26–27):2431–9.
 50. Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. A coupled finite element-element-free Galerkin method. *Comput Mech*. 1995;17(3):186–95.
 51. Hegen D. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Comput Methods Appl Mech Eng*. 1996;135(1–2):143–66.
 52. Wang K, Zhou S, Nie Z, Kong S. Natural neighbour Petrov-Galerkin Method for shape design sensitivity analysis. *C - Comput Model Eng Sci*. 2008;26(2):107–21.
 53. Li S, Atluri SN. Topology-optimization of structures based on the MLPG mixed collocation method. *C - Comput Model Eng Sci*. 2008;26(1):61–74.
 54. Zhou JX, Zou W. Meshless approximation combined with implicit topology description for optimization of continua. *Struct Multidiscip Optim*. 2008;36(4):347–53.
 55. Wang K, Zhou S, Shan G. The natural neighbour Petrov-Galerkin method for elasto-statics. *Int J Numer Methods Eng*. 2005;63(8):1126–45.
 56. Luo Z, Zhang N, Gao W, Ma H. Structural shape and topology optimization using a meshless Galerkin level set method. *International* [Internet]. 2012;(February):1102–19. Available from: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.3279/full>
 57. Zhao F. Topology optimization with meshless density variable approximations and BESO method. *CAD Comput Aided Des* [Internet]. 2014;56:1–10. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cad.2014.06.003>

58. Khan W, Siraj-ul-Islam, Ullah B. Structural optimization based on meshless element free Galerkin and level set methods. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2019;344:144–63. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.024>
59. Huang X, Xie YM. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elem Anal Des*. 2007;43(14):1039–49.
60. Gomez F, Spencer BF. Topology optimization framework for structures subjected to stationary stochastic dynamic loads. *Struct Multidiscip Optim*. 2019;59(3):813–33.
61. Lee K, Ahn K, Yoo J. A novel P-norm correction method for lightweight topology optimization under maximum stress constraints. *Comput Struct* [Internet]. 2016;171:18–30. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.04.005>
62. White DA, Arrighi WJ, Kudo J, Watts SE. Multiscale topology optimization using neural network surrogate models. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2019;346:1118–35. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.007>
63. Zhang W, Li D, Zhou J, Du Z, Li B, Guo X. A Moving Morphable Void (MMV)-based explicit approach for topology optimization considering stress constraints. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2018;334(Mmv):381–413. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.050>
64. Picelli R, Townsend S, Brampton C, Norato J, Kim HA. Stress-based shape and topology optimization with the level set method. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2018;329:1–23. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.001>
65. Zhang W, Yang W, Zhou J, Li D, Guo X. Structural Topology Optimization Through Explicit Boundary Evolution. *J Appl Mech Trans ASME*. 2017;84(1):1–10.
66. Dapogny C, Estevez R, Faure A, Michailidis G. Shape and topology optimization considering anisotropic features induced by additive manufacturing processes. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2019;344:626–65. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.09.036>
67. Vicente WM, Zuo ZH, Pavanello R, Calixto TKL, Picelli R, Xie YM. Concurrent topology optimization for minimizing frequency responses of two-level hierarchical structures. *Comput Methods Appl Mech Eng* [Internet]. 2016;301:116–36. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.12.012>
68. Ishak MR, Abu Bakar AR, Belhocine A, Taib JM, Omar WZW. Brake torque analysis of fully mechanical parking brake system: Theoretical and experimental approach. *Meas J Int Meas Confed* [Internet]. 2016;94(June 2017):487–97. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2016.08.026>
69. DIN EN 12642. DIN EN 12642 - Securing of cargo on road vehicles - Body structure of commercial vehicles - Minimum requirements; 2007;22.

7.1.1 WEBSITES

W1. <https://www.kibbetech.com/collections/accessories/products/kibbetech-hoon-handle>

W2. <https://imgund.com/media/2233095390964878732>

W2. <https://www.nissan.pt/veiculos/novos-veiculos/navara/performance.html>

W4. <https://www.hoonigan.com/blogs/build-biology-season-01/anatomy-of-a-prerunner-truck-kibbetech-s-chevy-silverado>

ANEXOS

8.1 ANEXO1 – ROTINA MATLAB PARA TRANSCRIÇÃO DE DADOS

8 ANEXOS

8.1 ANEXO1 – ROTINA MATLAB PARA TRANSCRIÇÃO DE DADOS

```

femasInitial = 'femas10';
femasExt = '.xlsx';
%formação dos nomes do ficheiro femas
type = input('tipo vm ou SED', 's');
tamanhoM = input('64x40, 80x50, 32x20, 48x30 ', 's'); %tamanho da malha
if strcmp(type, "vm")
    if strcmp(tamanhoM, "64x40")
        strAvaliate = 'vm64';
        pathAndFolderFinal = '__5dist.zip';
    elseif strcmp(tamanhoM, "80x50")
        strAvaliate = 'vm80';
        pathAndFolderFinal = '.zip';
    elseif strcmp(tamanhoM, "32x20")
        strAvaliate = 'vm32';
        pathAndFolderFinal = '.zip';
    else
        strAvaliate = 'vm48';
        pathAndFolderFinal = '_max_100.zip';
    end
else
    if strcmp(tamanhoM, "64x40")
        strAvaliate = 'SED64';
        pathAndFolderFinal = '__SED.zip';
    elseif strcmp(tamanhoM, "80x50")
        strAvaliate = 'SED80';
        pathAndFolderFinal = '_SED.zip';
    elseif strcmp(tamanhoM, "32x20")
        strAvaliate = 'SED32';
        pathAndFolderFinal = '__SED.zip';
    else
        strAvaliate = 'SED48';
        pathAndFolderFinal = '_max_100_SED.zip';
    end
end
pathTofolderB = strcat('data_val\DIV_', tamanhoM, '_FEM_decrease_0_0');
%caminho para a pasta que contem os zip files a extrair
dirOfSelection = strcat('DIV_', tamanhoM, '\FEMAS_20_1_P\');
cd(dirOfSelection);
zipNumber = input('Zip to Unzip');
mkdir lixoF; %cria um ficheiro lixo
%condicao para que o ciclo acabe foi utilizado o zero porque nao ha
conflictos com numeros de ficheiros existentes contudo pode ser usado um
numero negativo
mainDir = 'C:\Users\joel_\Documents\ISEP\Mestrado\2 Ano\2
Semestre\DPEST\FEMAS\Malha Quadrilateros\20-03_24'
dirLixo = 'C:\Users\joel_\Documents\ISEP\Mestrado\2 Ano\2
Semestre\DPEST\FEMAS\Malha Quadrilateros\20-03_24\' + dirOfSelection
+ "\lixoF";
while ~(zipNumber == 0)

```

```

    pathToFolderComplete = pathToFolderB + sprintf("%d",zipNumber) +
pathAndFolderFinal;
    unzip(pathToFolderComplete, dirLixo);
    fNumber = input('Femas a procurar:');
    cd(dirLixo);
    while ~(fNumber == 0)
        femasFinal = femasInitial + sprintf("%03d", fNumber) + femasExt;
        dataDensidade = xlsread(femasFinal,'Folha1' , 'AT:AT'); % Coluna da
Densidade
        dataTensao = xlsread(femasFinal, 'AD:AD'); % Coluna da Tensao
        Densidade = sum(dataDensidade);
        Tensao = max(dataTensao);
        OndeEscrever(strAvaliate, Densidade, Tensao, fNumber, zipNumber);
%chamada da funcao que escreve no ficheiro escolhido
        fNumber = input('Femas a procurar:');
    end
    delete(dirLixo+'\\*');% apagar conteudo da pasta
    cd('..');

    zipNumber = input('zip Number ')
end
cd 'C:\Users\joel_\Documents\ISEP\Mestrado\2 Ano\2
Semestre\DPEST\FEMAS\Malha Quadrilateros\20-03_24'
rmdir(dirLixo,'s')
function OndeEscrever(strAvaliateF, DensidadeF, TensaoF, fNumberF,
zipNumberF)
xlsxToWrite = 'C:\Users\joel_\Desktop\Tratamento de dados.xlsx'; %caminho
absoluto para o ficheiro a ser / escrito
Valores(1) = DensidadeF;
Valores(2) = TensaoF;
Letrasvm = ['B', 'C', 'D', 'E', 'F']; %letras celulas coluna vm
LetrasSED = ['I', 'J', 'K', 'L', 'M']; %letras celulas coluna SED
Numeros = [4, 6, 8];
if fNumberF == 1
    letravmUse = 'B';
    letraSEDUse = 'I';

    switch strAvaliateF
        case 'vm32'
            for i = 1:3
                xlswrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letravmUse, Numeros(i)))
            end
        case 'vm48'
            for i = 1:3
                xlswrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letravmUse, (Numeros(i) +10)))
            end
        case 'vm64'
            for i = 1:3
                xlswrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letravmUse, (Numeros(i) +20)))
            end
        case 'vm80'
            for i = 1:3
                xlswrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letravmUse, (Numeros(i) +30)))
            end
        case 'SED32'
            for i = 1:3
                xlswrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letraSEDUse, (Numeros(i))))
            end
        case 'SED48'

```

```

        for i = 1:3
            xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letraSEDUse, (Numeros(i) +10)))
        end
        case 'SED64'
            for i = 1:3
                xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letraSEDUse, (Numeros(i) +20)))
            end
        case 'SED80'
            for i = 1:3
                xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+letraSEDUse, (Numeros(i) +30)))
            end
        end
    else
        switch strAvaliateF
            case 'vm32'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+Letrasvm(zipNumberF), Numeros(i)))
                end
            case 'vm48'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+Letrasvm(zipNumberF), (Numeros(i) +10)))
                end
            case 'vm64'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+Letrasvm(zipNumberF), (Numeros(i) +20)))
                end
            case 'vm80'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+Letrasvm(zipNumberF), (Numeros(i) +30)))
                end
            case 'SED32'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+LetrasSED(zipNumberF), (Numeros(i))))
                end
            case 'SED48'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+LetrasSED(zipNumberF), (Numeros(i) +10)))
                end
            case 'SED64'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+LetrasSED(zipNumberF), (Numeros(i) +20)))
                end
            case 'SED80'
                for i = 1:3
                    xlsxwrite(xlsxToWrite, Valores(i), 'FEM',
sprintf("%d"+LetrasSED(zipNumberF), (Numeros(i) +30)))
                end
        end
    end
end
end

```