

coleção



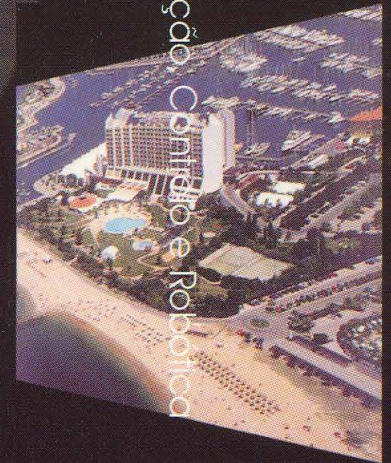
Associação Portuguesa
para a Promoção e
Desenvolvimento da
Engenharia Electrotécnica

- 8 CLEEE -

8º Congresso Luso Espanhol de Engenharia Electrotécnica



Volume I
Técnicas de CAD/CAE
Instalações Eléctricas
Produção Industrial, Instrumentação, Control e Robotica



Editores:

- Prof. Dr. Carlos Lemos Antunes
- Prof. Dr. Manuel Pérez Donsión

3 - 5 de Julho de 2003

Vilamoura (Algarve)
Portugal

Organização:

A.P.D.E.E.

Associação Portuguesa para a Promoção e
Desenvolvimento da Engenharia Electrotécnica

A.E.D.I.E.

Asociación Española para el Desarrollo de La
Ingeniería Eléctrica

Sistemas Fraccionários

J. T. Machado ⁽¹⁾, Ramiro Barbosa ⁽¹⁾, Isabel Jesus ⁽¹⁾, Fernando Duarte ⁽²⁾
Nuno Ferreira ⁽³⁾, Alexandra Galhano ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Departamento de Engenharia Electrotécnica do Instituto Superior de Engenharia do Porto, Rua Dr. António Bernardino de Almeida, 4200-072 Porto, Portugal, e-mail: {jtm,rbarbosa,isj,afg}@dec.isep.ipp.pt

⁽²⁾ Departamento de Matemática da Escola de Tecnologia de Viseu, 3504-510 Viseu, Portugal, e-mail: fduarte@mat.estv.ipv.pt

⁽³⁾ Departamento de Engenharia Electrotécnica do Instituto Superior de Engenharia de Coimbra, 3031-601 Coimbra, Portugal, e-mail: nunomig@isec.pt

Resumo

O cálculo integral e diferencial de ordem não-inteira ou Cálculo Fraccionário (CF), remonta ao início do próprio cálculo diferencial. Contudo, somente nas últimas três décadas é que esta teoria conheceu uma verdadeira aplicação devido, não só a uma maior compreensão das suas potencialidades por parte da comunidade científica como também pelo impulso dado por outras áreas, nomeadamente os sistemas caóticos e fractais, que revelaram algumas relações importantes com o CF. Neste artigo, o CF é analisado no contexto do controlo de sistemas dinâmicos sendo apontadas as perspectivas de aplicação e desenvolvimento.

Palavras-chave: Sistemas Fraccionários, Derivadas de Ordem Não-Inteira, Controlo, Modelização, Sistemas Robóticos.

1. Introdução

A generalização do conceito de derivada $d^\alpha f(x)/dx^\alpha$ para valores não inteiros de α remonta ao início do desenvolvimento do cálculo diferencial [1–4]. Na correspondência de Leibniz com Bernoulli e, posteriormente, com L'Hôpital (1695) e Wallis (1697) encontram-se alguns apontamentos relativamente à derivada de ordem $\alpha = 1/2$. No entanto, deveu-se a Euler (1738) o primeiro passo, quando este analisou o cálculo de derivadas fraccionárias (DFs) para a função potência. No seguimento deste resultado Laplace (1812), Lacroix (1820) e Fourier (1822) sugeriram, também, algumas ideias relativas ao cálculo de DFs. O verdadeiro início da teoria relativa ao cálculo de derivadas e integrais fraccionários (DIFs) deu-se com os trabalhos de Abel e Liouville. Abel (1823) investigou certas expressões fora do contexto do cálculo de DIFs, mas os resultados foram de importância considerável para o desenvolvimento da teoria. Por seu lado, Liouville (1822-1837) estudou, explicitamente, várias questões nomeadamente a definição e o cálculo de DFs para valores complexos e a sua aplicação a certos tipos de equações diferenciais lineares ordinárias, o efeito de uma mudança de variável no cálculo de DIFs e a definição de uma DF como o limite do quociente $D_h^\alpha f/h^\alpha$, onde $D_h^\alpha f$ é uma diferença de ordem fraccionária. Riemann (1847), Holmgren (1865-1867) e Letnikov (1868) tiveram, também, papéis de relevo no prosseguimento da teoria. Entre outros resultados, Holmgren considerou, pela primeira vez, a derivação e a integração fraccionárias como operações inversas e generalizou a expressão de $d^\alpha(u v)/dx^\alpha$. No

tocante a Letnikov, este desenvolveu a DF como limite da expressão $\lim D_h^a f/h^a$ e demonstrou que as expressões propostas por Liouville e Riemann estavam de acordo com esta definição, assim como generalizou a teoria dos DIFs para valores complexos. Mais próximo dos nossos dias, são de referir numerosas contribuições tais como as de Hadamard (1892), Weyl (1917) e Marchaud (1927), que tem vindo a ampliar o âmbito desta teoria.

2. Aplicações do Cálculo Fraccionário

Nesta secção são apresentadas algumas aplicações do CF em diversas áreas. Estas aplicações são o resultado do trabalho desenvolvido no GRIS – *Group of Robotic and Intelligent Systems* (<http://www.isep.ipp.pt/~gris>), que se encontra integrado no ISEP.

2.1 Função Descritiva de Sistemas Mecânicos com Folgas Dinâmicas

A função descritiva (FD) é um dos métodos possíveis que podem ser adoptados para a análise de sistemas não-lineares. A ideia básica deste método é aplicar um sinal sinusoidal na entrada do elemento não-linear e considerar apenas o componente fundamental do sinal que aparece na sua saída. Então, a razão dos dois sinais sinusoidais (saída/entrada) representa a FD do elemento não-linear. O uso deste conceito permite a adaptação do teste de estabilidade de Nyquist para a detecção de um ciclo limite de um sistema não-linear, nomeadamente uma predição aproximada da sua amplitude e frequência.

A abordagem clássica no estudo das folgas (folga estática) é baseada na adopção de um modelo geométrico que despreza os fenómenos dinâmicos envolvidos durante o processo de impacto [7]. Devido a esta razão, usualmente os resultados reais diferem significativamente dos obtidos através deste tipo de modelo. Nesta secção, utiliza-se o método da função descritiva para analisar sistemas com folgas e impactos, normalmente designadas de folgas dinâmicas.

O sistema mecânico considerado consiste em duas massas (M_1 e M_2) sujeito aos fenómenos de folga e de impacto, tal como ilustrado na Fig. 1. A colisão entre as massas M_1 e M_2 ocorre quando $x_1 = x_2$ ou $x_2 = h + x_1$. Neste caso, podemos calcular as velocidades das massas M_1 e M_2 após o impacto (\dot{x}'_1 e \dot{x}'_2) relacionando-as com os valores anteriores (\dot{x}_1 e \dot{x}_2) através da regra de Newton:

$$(\dot{x}'_1 - \dot{x}'_2) = -\varepsilon (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (1)$$

em que ε é o coeficiente de restituição. No caso de uma colisão totalmente plástica (*i.e.* inelástica) $\varepsilon = 0$, enquanto que no caso de uma colisão elástica ideal $\varepsilon = 1$.

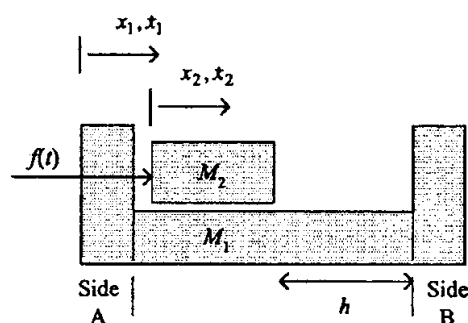


Fig. 1 – Sistema com duas massas sujeito a folga dinâmica.

Por aplicação do princípio de conservação do momento $M_1\dot{x}'_1 + M_2\dot{x}'_2 = M_1\dot{x}_1 + M_2\dot{x}_2$ e da expressão (1), chegamos às seguintes expressões para as velocidades (\dot{x}'_1 e \dot{x}'_2) após o impacto:

$$\dot{x}'_1 = \frac{\dot{x}_1(M_1 - \varepsilon M_2) + \dot{x}_2(1 + \varepsilon)M_2}{M_1 + M_2}, \quad \dot{x}'_2 = \frac{\dot{x}_1(1 + \varepsilon)M_1 + \dot{x}_2(M_2 - \varepsilon M_1)}{M_1 + M_2} \quad (2)$$

O diagrama da função $-1/N(F, \omega)$ foi calculado numericamente para uma força de entrada $f(t) = F \cos(\omega t)$ aplicada à massa M_2 e considerando como saída a posição $x_1(t)$ da massa M_1 . A Fig. 2 mostra os gráficos em escala log-log da parte real, $\text{Re}\{-1/N\}$, e imaginária, $\text{Im}\{-1/N\}$, da função $-1/N(F, \omega)$ versus a frequência de entrada ω com $F = 50$ N e $\varepsilon = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, para os casos da folga estática e dinâmica. O modelo clássico da folga estática corresponde à função descritiva de um sistema linear com uma massa única de valor $M_1 + M_2$ seguida de uma folga geométrica tendo como entrada e saída as variáveis de posição.

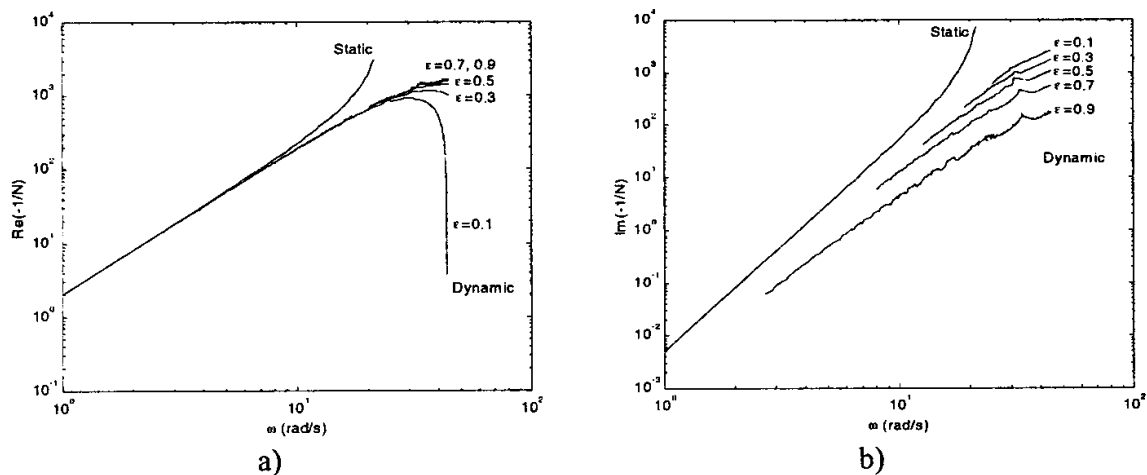


Fig. 2 – Gráficos em escala log-log da função $-1/N(F, \omega)$ versus a frequência de entrada ω , para $F = 50$ N e $\varepsilon = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ para: a) $\text{Re}\{-1/N\}$ e b) $\text{Im}\{-1/N\}$.

É interessante verificar que apesar de terem sido adoptados modelos de ordem inteira para a descrição do sistema, o declive resultante é de ordem fraccionária devido à variação dinâmica que resulta das colisões entre as massas.

2.2 Controlo de Trajectórias de Manipuladores Redundantes

Um manipulador redundante é um braço robótico que possui mais graus de liberdade que os necessários para estabelecer uma orientação e posição arbitrária da garra. Os manipuladores redundantes oferecem várias vantagens sobre os braços não redundantes. Num espaço de trabalho com obstáculos, os graus de liberdade adicionais podem ser utilizados para contornar ou transpor esses obstáculos servindo para manipular objectos em situações que de outro modo seriam inacessíveis [9].

Consideremos um manipulador com k graus de liberdade, onde as variáveis das juntas são designadas por $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, e um conjunto de tarefas descritas por m variáveis $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$, $m < n$. A relação entre o vector das juntas \mathbf{q} e o vector de manipulação \mathbf{x} corresponde à cinemática directa:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}) \quad (3)$$

Diferenciando a expressão (3) em relação ao tempo, obtém-se $\dot{x} = J(q)\dot{q}$. Assim, é possível calcular o trajecto $q(t)$ em função de uma trajectória pré-definida $x(t)$. A solução em termos das velocidades das juntas é dada por:

$$\dot{q} = J^\#(q)\dot{x} \quad (4)$$

em que $J^\#$ é uma das inversas generalizadas de J . As posições das juntas podem ser calculadas através da integração das velocidades (4) de acordo com o diagrama de blocos descrito na Fig. 3.

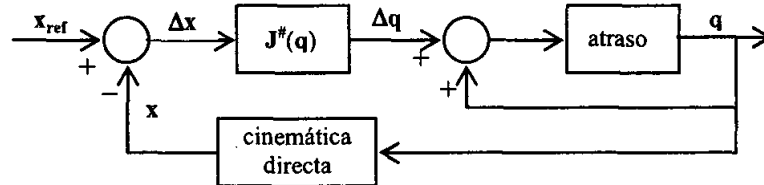


Fig. 3 – Diagrama de blocos do algoritmo CLP.

Para caracterizar a resposta em frequência adoptaram-se dois sinais de excitação alternativos: um sinal em dobrete e um sinal em ruído branco distribuído ao longo de 500 ciclos de trajectórias circulares. A Fig. 4 mostra o diagrama de Bode das amplitudes para uma excitação de entrada sobreposta em $x_{ref}(t)$:

$$Q_1(s)/X_{ref}(s) = K(s^\alpha + z)/(s^\alpha + p) \quad (5)$$

onde K é o ganho, z e p são o zero e o pólo, respectivamente, e α é a ordem fraccionária. Para uma excitação em dobrete resulta $\alpha \approx 1.0$ enquanto que para uma excitação em ruído branco se obtém o valor fraccionario $\alpha \approx 1.3$. Este facto é devido à propriedade de “memória” que os sistemas de ordem fraccionária possuem, pois capturam os fenómenos dinâmicos envolvidos durante todo o “historial” da experiência, ao contrário das derivadas de ordem inteira que apenas capturam a dinâmica “local”.

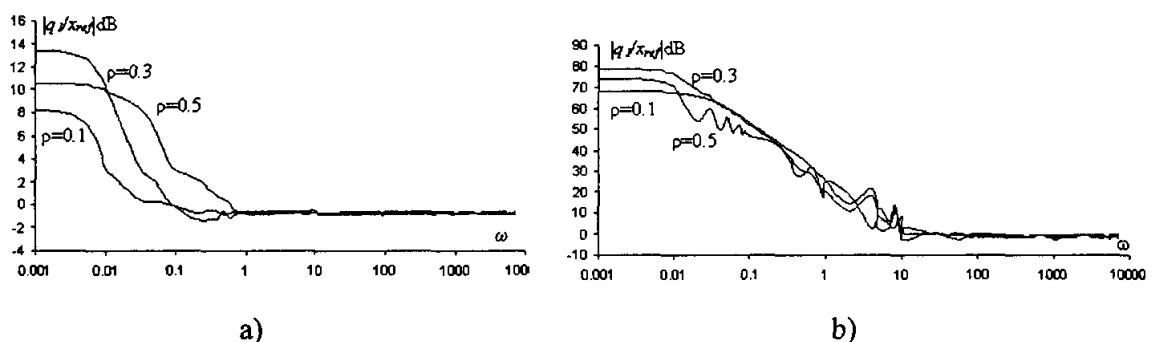


Fig. 4 – Resposta em frequência do robô 3R com $\omega_b = 3$ rad/s, $r = 2$ m e $\rho = \{0.10, 0.30, 0.50\}$ m para uma perturbação: a) tipo dobrete e b) ruído branco durante toda a trajectória.

2.3 Controlo de Posição/Força de Manipuladores

Esta secção estuda o controlo de posição/força de robôs envolvendo o contacto entre a garra e o meio ambiente usando controladores de ordem fraccionária (COFs) na estrutura híbrida proposta por Raibert and Craig [5].

A equação dinâmica de um robô com n elos interagindo com o meio ambiente (Fig. 5a) é dada por:

$$\tau = H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) - J^T(q)F \quad (6)$$

em que τ e q são os vectores dos binários e posições das juntas ($n \times 1$), $H(q)$ é a matriz inércia ($n \times n$), $C(q, \dot{q})$ e $G(q)$ são os vectores ($n \times 1$) dos termos centrífugos/Coriolis e gravitacionais e F é o vector ($m \times 1$) da força que o meio ambiente exerce sobre a garra do robô.

A trajectória de contacto x_c da garra do robô com a superfície de restrição é modelizada por um sistema linear de massa M , amortecimento B e rigidez K de acordo com a equação diferencial:

$$F = M\ddot{x}_c + B\dot{x}_c + Kx_c \quad (7)$$

A Fig. 5b mostra a estrutura do algoritmo de controlo híbrido de posição/força.

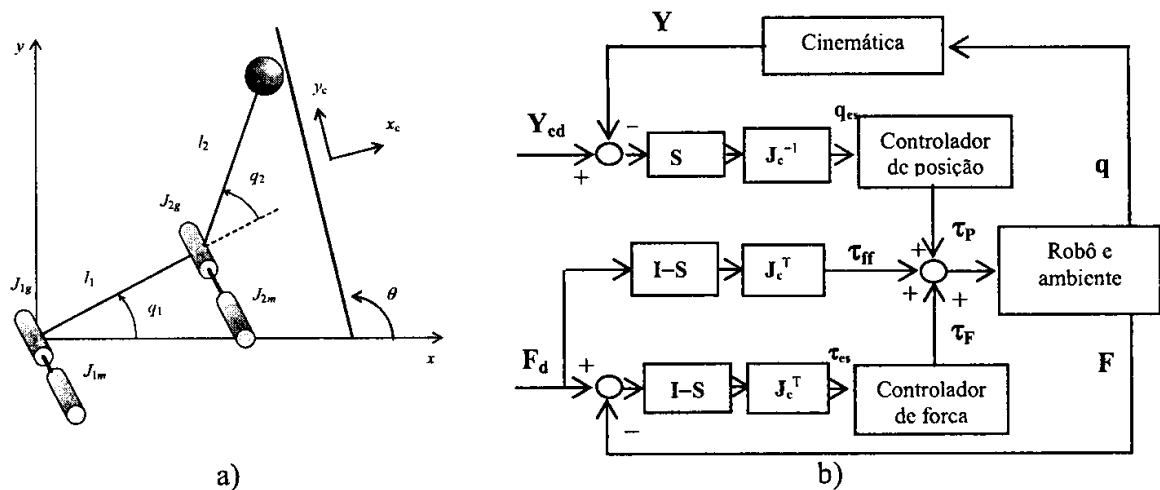


Fig. 5 – a) Robô 2R e a superfície de restrição do meio ambiente; b) Controlador híbrido de posição/força.

Para efeitos de comparação com os controladores fraccionários, foram usados controladores clássicos do tipo PID. Foi adoptado um controlador PD de posição e um controlador PI de força definidos pelas seguintes equações:

$$q_{es} = J_c^{-1}S(Y_{cd} - Y_c), \quad \tau_p = a_p \dot{q}_{es} + b_p q_{es} \quad (8a)$$

$$\tau_{es} = J_c^T(I - S)(F_d - F), \quad \tau_F = a_F \int \tau_{es} dt + b_F \tau_{es} \quad (8b)$$

O controlador fraccionário de posição $C_P(s)$ e de força $C_F(s)$ são dados através das seguintes expressões:

$$C_P(z) \approx K_P \sum_{k=1}^{r_P} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha_P + 1)}{k! \Gamma(\alpha_P - k + 1)} z^{-k}, \quad C_F(z) \approx K_F \sum_{k=1}^{r_F} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha_F + 1)}{k! \Gamma(\alpha_F - k + 1)} z^{-k} \quad (9)$$

onde K_P e K_F são os ganhos do controlador de posição e de força, respectivamente.

A Fig. 6 apresenta a resposta a um degrau na referência de força efectuado para algoritmos de controlo PID e COF. Consta-se que os controladores fraccionários apresentam um desempenho superior ao dos controladores PID clássicos. Realizaram-se também experiências para robôs com vários fenómenos dinâmicos nas juntas, tais como atrito não-linear, folga e flexibilidade, tendo-se verificado em todos os casos, um melhor desempenho dos controladores fraccionários [8].

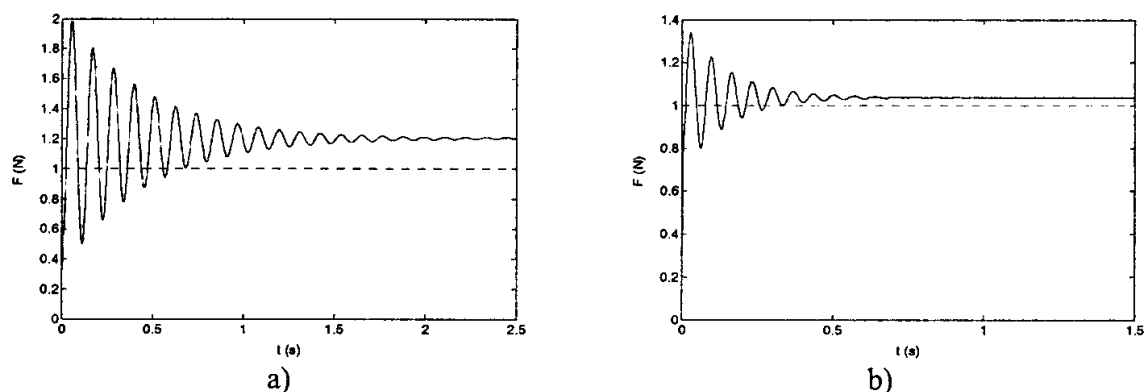


Fig. 6 – Resposta nos tempos da força F do robô $2R$ sobre a acção de um: a) controlador PD/PI e b) controlador fraccionário COF (com $\alpha_p = +1/5$ e $\alpha_f = -1/5$).

3. Conclusões

A teoria do CF é ainda pouco divulgada mas apresenta fortes potencialidades de aplicação nas várias áreas científicas. No campo do controlo de sistemas foi já desenvolvido algum trabalho e os resultados conseguidos revelam numerosas possibilidades de aplicação. Nesta perspectiva, encontra-se em curso investigação relativa à aplicação das DIFs, de ferramentas de análise e de métodos eficientes de simulação e de identificação.

Referências

- [1] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, 1974, New York.
- [2] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1993, New York.
- [3] Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999, San Diego.
- [4] Alain Oustaloup, *La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications*, Hermes, 1995, Paris.
- [5] M. H. Raibert, J. J. Craig, *Hybrid Position/Force Control of Manipulators*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 102, no. 2, pp. 126–133, 1981.
- [6] J. A. Tenreiro Machado, *Analysis and Design of Fractional-Order Digital Control Systems*, SAMS Systems Analysis, Modelling and Simulation, vol. 27, pp. 107–122, 1997.
- [7] Ramiro S. Barbosa, J. A. Tenreiro Machado, *Describing Function Analysis of Systems with Impacts and Backlash*, Nonlinear Dynamics, vol. 29, no. 1–4, pp. 235–250, 2002.
- [8] J. A. Tenreiro Machado, Ramiro S. Barbosa, N. M. Fonseca Ferreira, *Fractional-Order Position/Force Control of Mechanical Manipulators*, CIFA'2002 - Conférence Internationale Francophone d'Automatique, pp. 641–646, 2002, Nantes, France.
- [9] Fernando Duarte, J. A. Tenreiro Machado, *Chaotic Phenomena and Fractional-Order Dynamics in the Trajectory Control of Redundant Manipulators*, Nonlinear Dynamics, vol. 29, no. 1–4, pp. 315–342, 2002.