

CIFA 2002

Deuxième Conférence Internationale Francophone d'Automatique

Nantes, France, 8-10 juillet 2002



GdR Automatique

Commande d'Ordre Fractionnaire Position/Force d'un Manipulateur Mécanique

MACHADO J. A. T.¹, BARBOSA R. S.¹, FERREIRA N. M.²

¹ Instituto Superior de Engenharia do Porto
Departamento de Engenharia Electrotécnica
4200-072 Porto Codex, Portugal
{jtm,rbarbosa}@dee.isep.ipp.pt

² Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Engenharia Electrotécnica
3031-601 Coimbra Codex, Portugal
nunomig@isec.pt

Résumé— Cet article étudie l'implantation d'algorithmes d'ordres fractionnaires pour la commande hybride position/force de robots manipulateurs. Les performances du système sont analysées en termes de temps de réponse et de robustesse. Une comparaison avec une stratégie de commande basée sur des algorithmes de type PID est également effectuée. Par ailleurs, des phénomènes non linéaires issus des joints tels que les frottements, les jeux de transmission dynamiques et la flexibilité non linéaires sont étudiés.

Mots clés— Contrôle, Commande position/force, systèmes d'ordre fractionnaire, robotique.

I. INTRODUCTION

Dans les années quatre-vingt Raibert et Craig [1] ont introduit l'idée du contrôle de force basé sur un algorithme hybride et, par la suite, beaucoup d'autres chercheurs ont développé ses idées et présenté d'autres algorithmes [2–7].

Cet article étudie la commande position/force des robots manipulateurs intégrés à des processus qui impliquent un contact permanent entre la pince du robot et l'environnement en mettant en œuvre des contrôleurs d'ordre fractionnaire (CFs).

Cette application de la théorie du calcul fractionnaire est encore en phase de développement, mais le progrès atteint récemment dans le domaine suggère des aspects engageants pour le futur [8–22].

Ce travail se développe comme suit. Les paragraphes deux et trois introduisent respectivement le schéma de commande hybride position/force et des bases de calcul fractionnaire. Le paragraphe quatre présente plusieurs expérimentations pour l'évaluation des performances d'algorithmes de contrôle d'ordres fractionnaires et PID, dans le cas de robots ayant différents types de phénomènes dynamiques dans les joints. Finalement, le paragraphe cinq souligne les principales conclusions.

II. LE CONTROLEUR HYBRIDE

L'équation dynamique d'un robot avec n membrures qui interagissent avec l'environnement est:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F} \quad (1)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur $n \times 1$ des couples appliqués par les actionneurs, \mathbf{q} est le vecteur $n \times 1$ des coordonnées des joints, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ est la matrice $n \times n$ d'inertie, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ est le vecteur $n \times 1$ des termes centrifuges/Coriolis et $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ est le vecteur $n \times 1$ des termes gravitationnels. La matrice $n \times m$ $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$ est la transposée du Jacobien du robot et \mathbf{F} est le vecteur $m \times 1$ des efforts appliqués par l'environnement sur la pince du robot. Dans ce travail le prototype de manipulateur retenu est le robot 2R dont la dynamique est définie par:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + & m_2r_2^2 + \\ 2m_2r_1r_2C_2 + J_{1m} + J_{1g} & m_2r_1r_2C_2 \\ m_2r_2^2 + m_2r_1r_2C_2 & m_2r_2^2 + \\ & J_{2m} + J_{2g} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2r_1r_2S_2\dot{q}_2^2 - 2m_2r_1r_2S_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ m_2r_1r_2S_2\dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g(m_1r_1C_1 + m_2r_1C_1 + m_2r_2C_{12}) \\ gm_2r_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (2c)$$

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -r_1S_1 - r_2S_{12} & r_1C_{11} + r_2C_{12} \\ -r_2S_{12} & r_2C_{12} \end{bmatrix} \quad (2d)$$

où $C_i = \cos(q_i)$, $C_{ij} = \cos(q_i + q_j)$, $S_i = \sin(q_i)$, $S_{ij} = \sin(q_i + q_j)$. Le tableau I regroupe les valeurs numériques des différents paramètres du robot 2R tandis que la Figure 1 présente le plan de contrainte défini par l'angle θ .

Tableau I – Paramètres du robot 2R.

i	m_i (Kg)	r_i (m)	J_{im} (Kgm ²)	J_{ig} (Kgm ²)
1	0.5	1.0	1.0	4.0
2	6.25	0.8	1.0	4.0

La trajectoire de contact x_c de la pince du robot avec la surface de contrainte est modélisée par un système linéaire de masse M , d'amortissement B et de rigidité K avec dynamique:

$$F = M\ddot{x}_c + B\dot{x}_c + Kx_c \quad (3)$$

La Figure 2 montre la structure de l'algorithme de contrôle hybride position/force. La matrice de sélection diagonale \mathbf{S} , $n \times n$, a des éléments égaux à un (resp. zéro) dans les directions contrôlées en position (resp. force) et \mathbf{I} est la matrice identité, $n \times n$. Les coordonnées Cartésiennes y_c (x_c) contrôlées en position (resp. force) sont:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -r_1 C_{\theta 11} - r_2 C_{\theta 12} & -r_2 C_{\theta 12} \\ r_1 S_{\theta 11} + r_2 S_{\theta 12} & r_2 S_{\theta 12} \end{bmatrix} \quad (4b)$$

où $C_{\theta 1} = \cos(\theta - q_1)$, $C_{\theta 12} = \cos(\theta - q_1 - q_2)$, $S_{\theta 1} = \sin(\theta - q_1)$ et $S_{\theta 12} = \sin(\theta - q_1 - q_2)$.

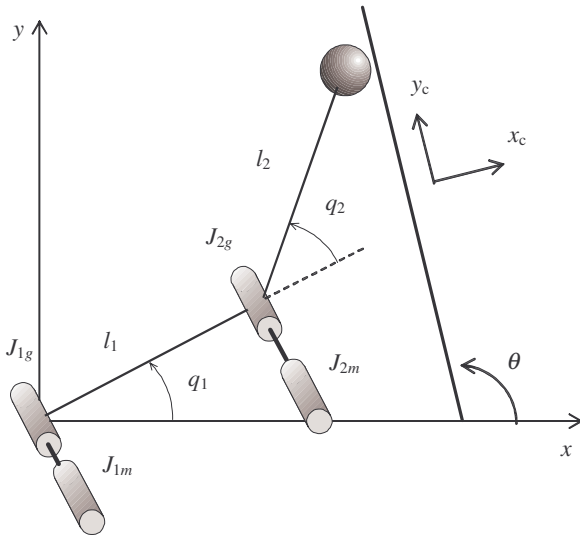


Figure 1 – Robot 2R et surface de contrainte.

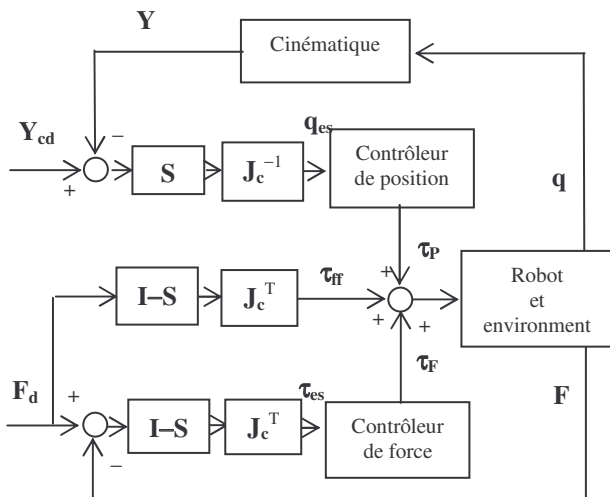


Figure 2 – Contrôleur hybride position/force.

On constate que la structure du contrôleur hybride n'impose pas les sous-contrôleurs des boucles de position et de force. Raibert et Craig [1] ont adopté des sous-contrôleurs PD et PI respectivement pour la position et force, cependant d'autres algorithmes plus performants peuvent être introduits, d'autant que des problèmes de robustesse peuvent intervenir. Ainsi, les paragraphes suivants étudient l'application et les caractéristiques des algorithmes d'ordres fractionnaires.

III. ALGORITHMES D'ORDRES FRACTIONNAIRES

Les contrôleurs d'ordres fractionnaires adoptés soit dans les boucles de contrôle de position soit dans les boucles de contrôle de force sont maintenant présentés.

La définition mathématique d'une dérivée d'ordre fractionnaire a fait l'objet de plusieurs approximations. Par exemple, la définition de Grünwald-Letnikov, basée sur la discrétisation de l'opérateur de dérivation, conduit à l'expression de la dérivée fractionnaire d'ordre α suivante:

$$D^\alpha [x(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} x(t-kh) \right] \quad (5)$$

où Γ est la fonction Gamma et h est l'incrément temporel.

Dans le cas d'un algorithme de commande discret avec période d'échantillonnage T , cette expression peut être approximée par une série tronquée à l'ordre r [18–20], ce qui conduit à l'équation suivante:

$$Z\{D^\alpha x(t)\} \approx \left\{ \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=1}^r (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} z^{-k} \right\} X(z) \quad (6)$$

Pour obtenir une bonne approximation, la valeur de r doit être élevée et celle de T doit être petite.

Pour la commande du robot, des dérivateurs fractionnaires purs sont utilisés pour concevoir les lois de commande des boucles de position et de force, à savoir, d'après les relations (5) et (6):

$$C_P(s) = K_{P0} s^{\alpha_P} \Rightarrow C_P(z) \approx K_P \sum_{k=1}^{r_P} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha_P+1)}{k! \Gamma(\alpha_P-k+1)} z^{-k} \quad (7a)$$

$$C_F(s) = K_{F0} s^{\alpha_F} \Rightarrow C_F(z) \approx K_F \sum_{k=1}^{r_F} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha_F+1)}{k! \Gamma(\alpha_F-k+1)} z^{-k} \quad (7b)$$

où $K_P = K_{P0}/T^{\alpha_P}$ et $K_F = K_{F0}/T^{\alpha_F}$.

Les gains de chaque contrôleur sont représentés par la lettre K et les indices P ou F désignent les boucles de position et de force.

Le tableau II présente les valeurs numériques des CFs adoptées dans ce travail. Ces paramètres sont ajustés expérimentalement et conduisent à un équilibre entre transitoires rapides et dépassements élevés.

Tableau II – Valeurs numériques des CFs.

K_P	K_F	α_P	α_F	r_P	r_F
10^5	10^3	1/2	-1/5	17	17

L'approximation (6) peut présenter quelques désavantages parce que un correcteur d'ordre $\alpha = k + \lambda$ ($k \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < 1$) n'est pas plus efficace qu'un intégrateur d'ordre k pour annuler les erreurs en régime permanent. Par ailleurs, si $\alpha < 0$, la discrétisation suivie d'une troncature du correcteur fait disparaître l'effet intégral. Cependant la boucle de force introduit des problèmes de stabilité plus importants que des problèmes liés à l'annulation de l'erreur en régime permanent. Nous avons donc choisi dans le cadre de cet article de ne pas les aborder et de porter toute notre attention sur les problèmes de stabilité.

IV. PERFORMANCES DES CONTROLEURS

Ce paragraphe analyse les performances du système soit pour des manipulateurs idéaux, soit pour robots qui présentent plusieurs phénomènes dynamiques dans les joints, à savoir: des frottements, des jeux de transmission et des flexibilités non linéaires. Pour comparer les performances des CFs, des essais avec les contrôleurs de type PD et PI classiques, sont également effectués. Un contrôleur PD de position et un contrôleur PI de force définis par:

$$\mathbf{q}_{es} = \mathbf{J}_c^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{Y}_{cd} - \mathbf{Y}_c) \quad (8a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_P = a_P \dot{\mathbf{q}}_{es} + b_P \mathbf{q}_{es} \quad (8b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{es} = \mathbf{J}_c^T (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{F}_d - \mathbf{F}) \quad (9a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_F = a_F \int \boldsymbol{\tau}_{es} dt + b_F \boldsymbol{\tau}_{es} \quad (9b)$$

seront en effet utilisés.

Le tableau III présente les valeurs numériques des paramètres des contrôleurs PD et PI utilisés dans ce travail, valeurs également déterminées expérimentalement.

Tableau III – Valeurs numériques des PD/PI.

a_P	b_P	a_F	b_F
10^4	$2.5 \cdot 10^4$	25	10^2

Nous avons effectuée la synthèse des correcteurs (FC et PID) par une série d'essai / erreurs. Une méthode de synthèse plus rigoureuse prenant en compte la cinématique/dynamique du système non linéaire robot/surface/contrôleur hybride est en effet problématique et n'est pas aboutie à l'heure actuelle. De même, la justification de l'amélioration des performances induite par l'utilisation d'un contrôleur fractionnaire pour un robot avec phénomènes non linéaires tel que des frottements, des jeux mécaniques et des flexibilités est uniquement basée sur l'analyse des réponses temporelles, comme pour la plupart des stratégies de contrôle proposées par d'autres auteurs.

Par simulations, les réponses du système sont étudiées pour $\theta = \pi/2$ et pour une position initiale définie par $q_{10} = q_{20} = 15\pi/36$, où q_{10} représente la position initiale du joint i . A $t=0$ un échelon de force d'amplitude $F_d = 1$ N est appliqué sur l'entrée de consigne d'effort tandis que l'entrée de consigne position est maintenue à $y_{cd} = y_{c0}$. Les paramètres de la surface de contrainte sont définis par $M = 0.03$ kg, $B = 1$ N s m⁻¹ et $K = 400$ N m⁻¹, la fréquence d'échantillonnage du contrôleur étant fixée à $f_c = 1$ kHz.

L'analyse des performances dynamiques est tout d'abord menée en analysant les réponses temporelles du robot 2R sous action des CFs et des PD/PI (Figures 3–4). On peut remarquer que le CF permet d'obtenir de meilleures performances, notamment concernant la rapidité du régime transitoire.

Dans un second groupe d'essais, la présence de frottement non linéaire dans les joints du robot est considérée [23–28]. Le modèle de frottement employé dans les joints du robot est:

$$\tau_{\text{frottement}} = \begin{cases} F_H, & |\dot{q}| \leq DV \\ \text{sgn}(\dot{q}) \cdot K + B \cdot \dot{q}, & |\dot{q}| > DV \end{cases} \quad (10)$$

où K est le frottement de Coulomb, B est le frottement visqueux et DV et F_H sont les paramètres statiques. Pour les simulations, les valeurs numériques adoptés sont $K_i = 5$ N m,

$B_i = 0.5$ N m s rad⁻¹, $DV_i = 0.0025$ rad s⁻¹ et $F_{Hi} = 6$ N m ($i = 1,2$). La comparaison des réponses pour les deux types d'algorithmes de contrôle (Figures 5–6), révèle une fois encore de meilleures performances avec des CFs.

Dans une troisième phase, l'analyse de la réponse d'un robot 2R avec jeux de transmission dans les joints est effectuée [26–34]. Pour le réducteur du $i^{\text{ème}}$ joint, les jeux de transmission (h_i) montrent des phénomènes d'impact entre les inerties, qui obéissent au principe de conservation du moment et à la loi de Newton:

$$\dot{q}'_i = \frac{\dot{q}_i (J_{ii} - \varepsilon J_{im}) + \dot{q}'_{im} J_{im} (1 + \varepsilon)}{J_{ii} + J_{im}} \quad (11a)$$

$$\dot{q}'_{im} = \frac{\dot{q}_i J_i (1 + \varepsilon) + \dot{q}'_{im} (J_{im} - \varepsilon J_{ii})}{J_{ii} + J_{im}} \quad (11b)$$

où $0 \leq \varepsilon \leq 1$ est une constante qui définit le type d'impact ($\varepsilon = 0$ impact inélastique, $\varepsilon = 1$ impact élastique) et \dot{q}'_i et \dot{q}'_{im} sont respectivement les vitesses des inerties des joints et des moteurs après le choc. Les paramètres J_{ii} (J_{im}) correspondent aux inerties des membrures (moteurs) du joint i . Les paramètres adoptés sont $h_i = 0.00018$ rad et $\varepsilon_i = 0.5$ ($i = 1,2$).

Tableau IV – Paramètres des contrôleurs réajustés pour compenser les jeux de transmission.

K_P	K_F	α_P	α_F	r_P	r_F
5000	50	1/2	1/5	17	17

a_P	b_P	a_F	b_F
$5 \cdot 10^3$	$12.5 \cdot 10^3$	125	$5 \cdot 10^2$

Lors des essais, des réponses instables ont été obtenues pour les deux types d'algorithmes. Les contrôleurs ont par conséquent été réajustés (Tableau IV). Cette fois encore, les réponses (Figures 7–8) avec CFs réajustés sont meilleures, étant donné que les PD/PI réajustés produisent des réponses plus lentes.

Pour le quatrième groupe d'essais, le robot 2R avec joints compliants est étudié [29]. Dans ce cas le modèle dynamique correspond au modèle (1) augmenté des équations:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{B}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m (\mathbf{q}_m - \mathbf{q}) \quad (12a)$$

$$\mathbf{K}_m (\mathbf{q}_m - \mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (12b)$$

où \mathbf{J}_m , \mathbf{B}_m et \mathbf{K}_m sont respectivement les matrices diagonales $n \times n$ d'inerties, des amortissements et des rigidités des moteurs et des transmissions. Pour les simulations les valeurs numériques adoptés sont $K_{mi} = 2 \cdot 10^7$ N m rad⁻¹ et $B_{mi} = 10^4$ N m s rad⁻¹ ($i = 1,2$).

A nouveau, l'analyse des réponses, permet de constater que les CFs conduisent à de meilleures performances que les PD/PI (Figures 9–10).

V. CONCLUSION

Ce travail présente l'implantation de contrôleurs hybrides pour manipulateurs avec plusieurs types de phénomènes non linéaires dans les joints. Des algorithmes de contrôle d'ordres fractionnaires et de type PID ont été comparés. Les résultats obtenus font apparaître de meilleures performances pour les algorithmes d'ordres fractionnaires.

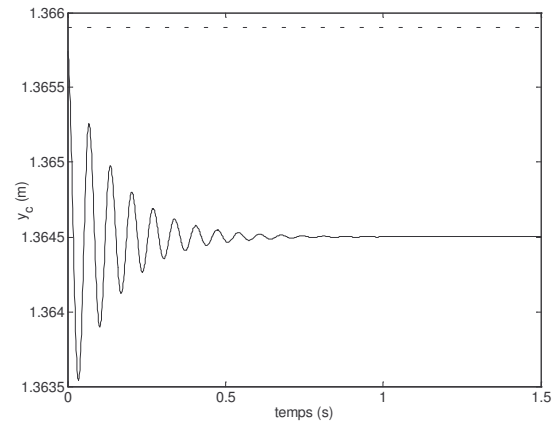
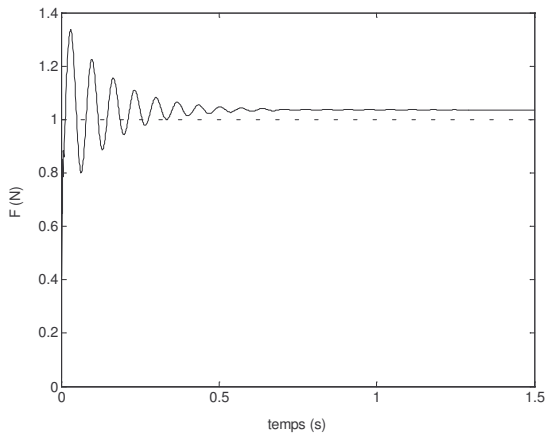


Figure 3 – Réponse temporelle du robot 2R sous l'action des CFs (avec $\alpha_F = -1/5$).

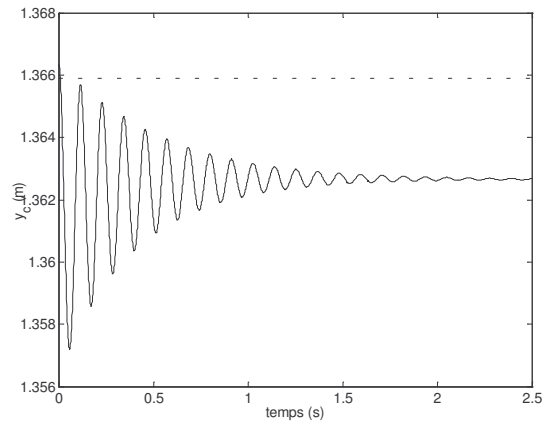
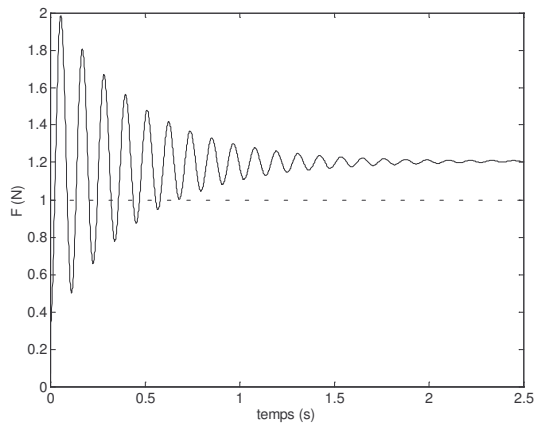


Figure 4 – Réponse temporelle du robot 2R sous l'action des algorithmes PD/PI.

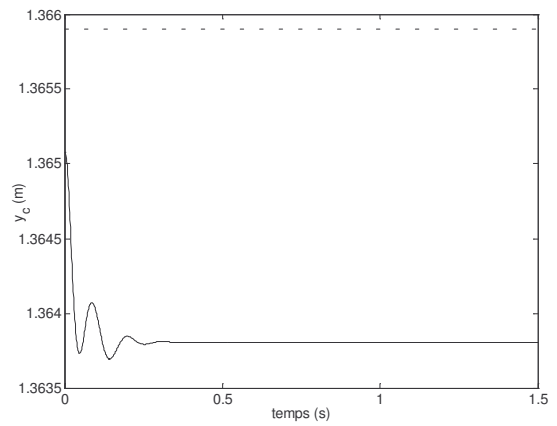
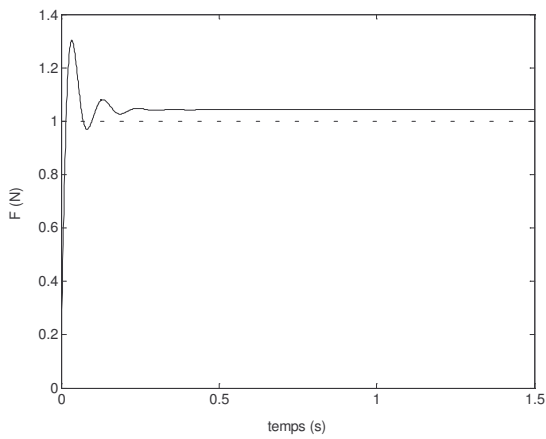


Figure 5 – Réponse temporelle du robot 2R avec frottements non linéaires sous l'action des CFs (avec $\alpha_F = -1/5$).

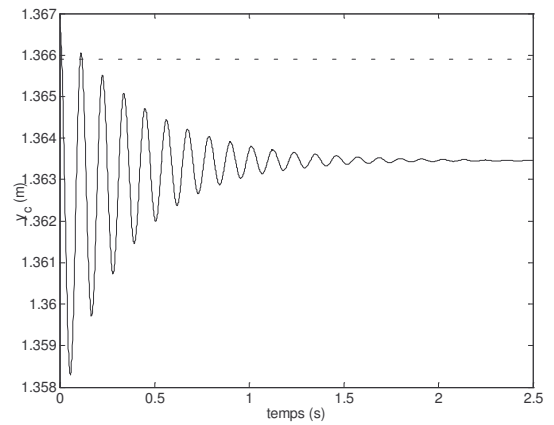
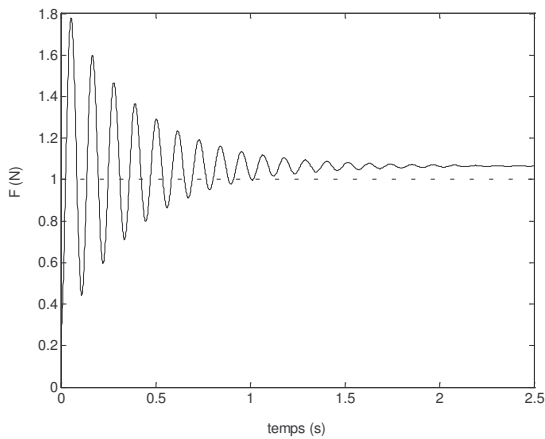


Figure 6 – Réponse temporelle du robot 2R avec frottements non linéaires sous l'action des algorithmes PD/PI.

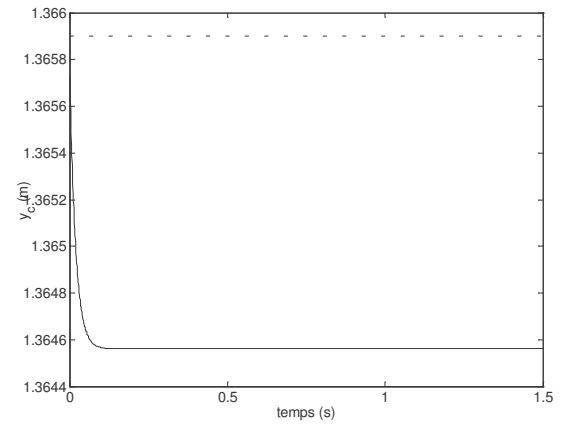
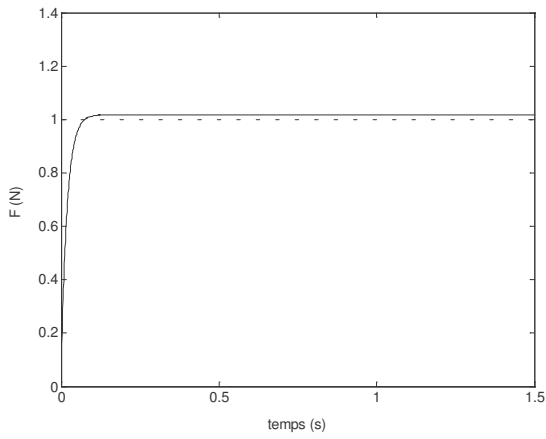


Figure 7 – Réponse temporelle du robot 2R avec jeux de transmission sous l'action des CFs réajustés (avec $\alpha_F = +1/5$).

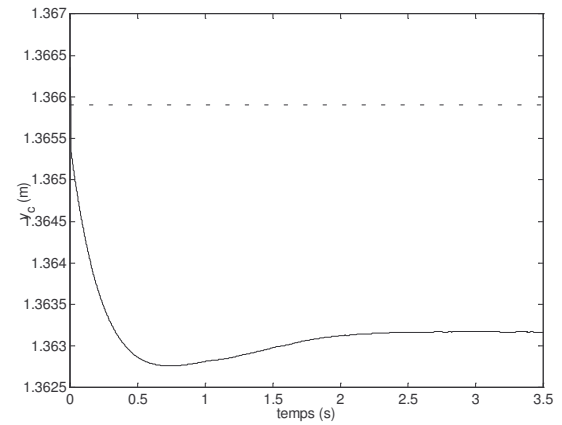
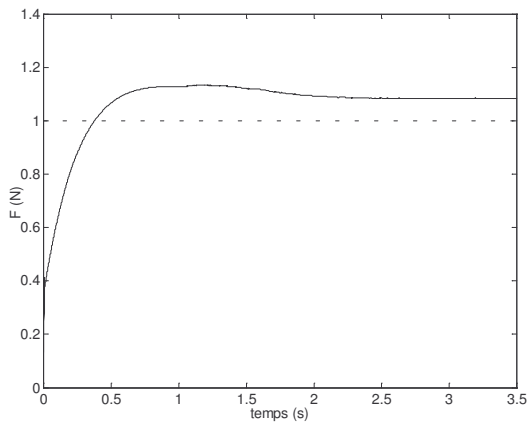


Figure 8 – Réponse temporelle du robot 2R avec jeux de transmission sous l'action des algorithmes PD/PI.

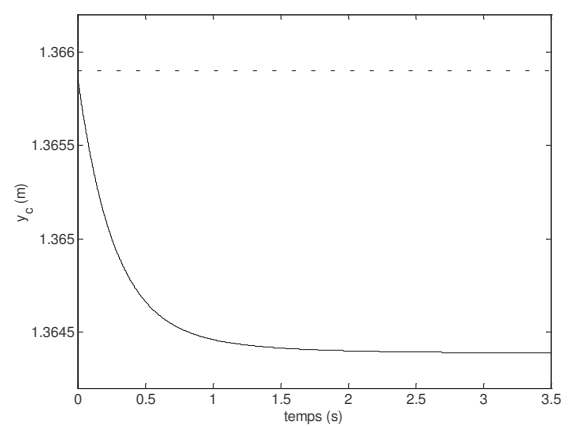
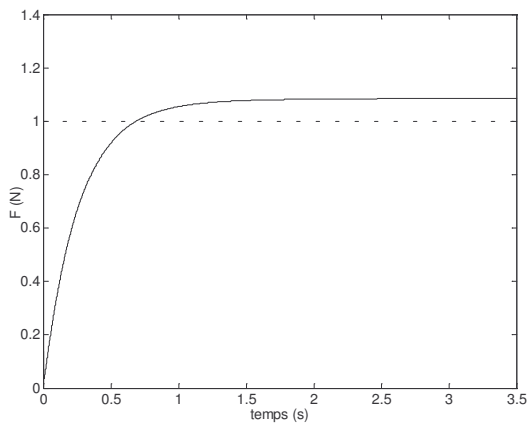


Figure 9 – Réponse temporelle du robot 2R avec joints flexibles sous l'action du CFs (avec $\alpha_F = -1/5$).

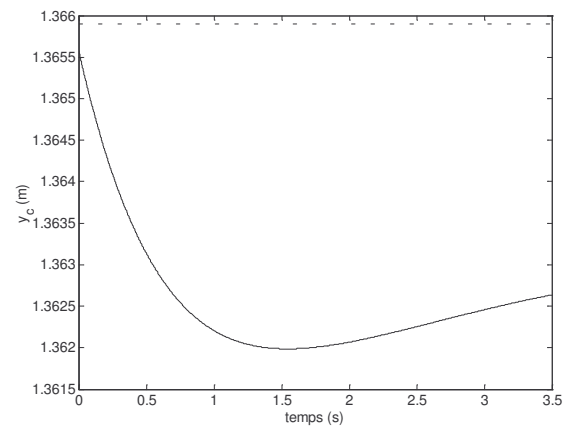
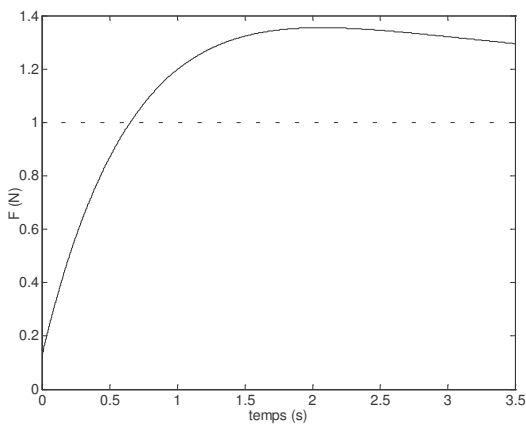


Figure 10 – Réponse temporelle du robot 2R avec joints flexibles sous l'action des algorithmes PD/PI.

VI. REFERENCES

- [1] M. H. Raibert and J. J. Craig, "Hybrid Position/Force Control of Manipulators", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 102, no. 2, pp. 126–133, 1981.
- [2] O. Khatib, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, no. 1, pp. 43–53, 1987.
- [3] W. D. Fisher and M. Mujtaba, "Sufficient Stability Condition for Hybrid Position/Force Control", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, France, pp. 1336–1341, 1992.
- [4] H. Bruyninckx and J. De Schutter, "Specification of Force-Controlled actions in the Task Frame Formalism - A Synthesis", *IEEE Transactions on Robotics Automation*, vol. 12, no. 4, pp. 581–589, 1996.
- [5] M. M. Bridges, J. Cai, D. M. Dawson and M. T. Grubble, "Experimental Results for a Robust Position and Force Controller Implementation on a Direct Drive Robot", *Robotica*, vol. 13, no. 1, pp. 11–18, 1995.
- [6] B. Siciliano and L. Villani, "A Force/Position Regulator for Robot Manipulators Without Velocity Measurements", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, USA, 1996.
- [7] R. Volpe and P. Khosla, "Computational Considerations in the Implementation of Force Control Strategies", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 1, pp. 121–148, 1994.
- [8] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, 1974.
- [9] S. G. Samko, A. A. Kilbas and I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon & Breach Science Publishers, 1993.
- [10] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1993.
- [11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
- [12] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 2000.
- [13] A. Oustaloup, *La Commande CRONE: Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, Editions Hermes, 1991.
- [14] A. Oustaloup, *La Dérivation Non Entier: Théorie, Synthèse et Applications*, Editions Hermes, Paris, 1995.
- [15] Carl F. Lorenzo and Tom T. Hartley, "Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus", NASA/TP-1998-208415, 1998.
- [16] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [17] V. Pommier, P. Lanusse, J. Sabatier and A. Oustaloup, "Input-Output Linearization and Fractional Robust Control of a Non-Linear System", *ECC'01-European Control Conference*, Porto, 2001.
- [18] J. Tenreiro Machado, "Analysis and Design of Fractional-Order Digital Control Systems", *SAMS Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation*, vol. 27, pp. 107–122, 1997.
- [19] J. Tenreiro Machado, "Discrete-Time Fractional-Order Controllers", *FCAA Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 4, n. 1, pp. 47–66, 2001.
- [20] B. M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernández and V. Feliu, "Some Approximations of Fractional Order Operators Used in Control Theory and Applications", *FCAA Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis*, vol. 3, n. 3, pp. 231–248, 2000.
- [21] I. Podlubny, "Fractional-Order Systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -Controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 208–213, 1999.
- [22] Fernando B. M. Duarte and J. A. Tenreiro Machado, "Pseudoinverse Trajectory Control of Redundant Manipulators: A Fractional Calculus Perspective", *ICRA'02-IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 10–17/May/2002, Washington, USA.
- [23] B. Armstrong-Hélouvy, P. Dupont and C. C. De Wit, "A Survey of Models, Analysis Tool and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction", *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083–1138, 1994.
- [24] D. A. Haessig, Jr. and B. Friedland, "On the Modeling and Simulation of Friction", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 113, no. 3, pp. 354–362, 1991.
- [25] D. Karnopp, "Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 107, no. 1, pp. 100–103, 1985.
- [26] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [27] A. Azenha and J. A. Tenreiro Machado, "Variable Structure Control of Robots with Nonlinear Friction and Backlash at the Joints", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Minneapolis, USA, 1996.
- [28] A. Azenha and J. A. Tenreiro Machado, "On the Describing Function Method and the Prediction of Limit Cycles in Nonlinear Dynamical Systems", *SAMS Journal of Systems Analysis, Modelling and Simulation*, Gordon & Breach Science Publishers, vol. 33, pp. 307–320, 1998.
- [29] J. A. Tenreiro Machado, "Variable Structure Control of Manipulators With Joints Having Flexibility and Backlash", *SAMS Journal Systems Analysis, Modelling, Simulation*, Gordon and Breach Science Publishers, vol. 23, pp. 93–101, 1996.
- [30] Ramiro S. Barbosa and J. A. Tenreiro Machado, "Fractional Describing Function Analysis of Systems with Backlash and Impact Phenomena", *INES'2002-6th International Conference on Intelligent Engineering Systems 2002*, 26–29/May/2002, Opatija, Croatia.
- [31] Ramiro S. Barbosa and J. A. Tenreiro Machado, "Describing Function Analysis of Systems with Impacts and Backlash", *Nonlinear Dynamics*, Kluwer, 2002.
- [32] S. Dubowsky, J. F. Deck and H. Costello, "The Dynamic Modelling of Flexible Spatial Machine Systems with Clearance Connections", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, vol. 109, no. 1, pp. 87–94, 1987.
- [33] Y. Stepanenko and T. S. Sankar, "Vibro-Impact Analysis of Control Systems with Mechanical Clearance and Its Application to Robotic Actuators", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 108, no. 1, pp. 9–16, 1986.
- [34] Y. S. Choi and S. T. Noah, "Periodic Response of a Link Coupling with Clearance", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 111, no. 2, pp. 253–259, 1989.