

A C T A S

5<sup>as</sup>

JORNADAS  
HISPANO-LUSAS DE  
INGENIERÍA  
ELÉCTRICA



Salamanca,  
del 3 al 5 de julio  
de 1997

**TOMO III**

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
SECCIÓN DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA  
D.T.O. DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA



# 5<sup>as</sup>

## JORNADAS HISPANO - LUSAS DE INGENIERÍA ELÉCTRICA del 3 al 5 de Julio de 1997, Salamanca (España)

### MATRIZES PSEUDOINVERSAS: ASPECTOS MATEMÁTICOS E APLICAÇÃO AO CONTROLO DE MANIPULADORES REDUNDANTES

Fernando Duarte

J.A. Tenreiro Machado

Esc. Sup. Tecnologia Viseu - Dep. Matemática  
Campus Politécnico, 3510 Viseu, Portugal  
Tel: 351-32-4200500, Fax:351-32-424651  
Email: fduarte@graovasco.ipv.pt

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Dep. de Eng. Electrotécnica e de Computadores  
Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex, Portugal  
Tel: 2-2009913, Fax:2-319280, Email: jtm@ fe.up.pt

#### RESUMO

Este artigo apresenta os aspectos matemáticos fundamentais da teoria das matrizes inversas generalizadas, analisa as suas principais propriedades e explora a sua aplicação no controlo de trajectórias de robots redundantes.

Os manipuladores redundantes apresentam vantagens em relação aos manipuladores clássicos nomeadamente na optimização de trajectórias, no espaço livre ou na presença de obstáculos e na resolução de singularidades. No entanto, para este tipo de manipuladores o controlo cinemático requer o uso de matrizes pseudo inversas. Assim, conceitos associados com o controlo através de pseudo inversas serão apresentados bem como alguns exemplos que mostram as dificuldades que, por vezes, a sua utilização acarreta. Nesta perspectiva, é estudado o controlo de um manipulador planar com três graus de liberdade e é analisado o seu comportamento em pontos de singularidade, mostrando-se que em alguns casos se obtêm configurações não desejáveis.

**Palavras chave:** Matrizes pseudo inversas, robots redundantes, cinemática inversa, singularidades.

#### 1. Introdução

Um robot redundante é um sistema que pode apresentar várias (ou, até, uma infinidade de) configurações para uma determinada posição do órgão terminal no espaço cartesiano. No entanto, é necessário decidir qual a solução particular que deve ser seleccionada de forma a optimizar um determinado conjunto de critérios. Assim, sob o ponto de vista cinemático, estes mecanismos introduzem uma grande versatilidade pois permitem a resolução de tarefas minimizando esforços, evitando eventuais obstáculos e eliminando singularidades indesejáveis. Embora estes robots apresentem as vantagens referidas, a utilização destes mecanismos ainda é pouco frequente. De facto o controlo destes sistemas envolve modelos matemáticos sofisticados, aumentando a sua complexidade com o número de graus de liberdade. Uma análise dos estudos levados a cabo nesta área revela que a solução analítica da cinemática inversa de robots redundantes foi apenas conseguida para algumas estruturas especiais. Na maior parte dos casos a resolução cinemática inversa é somente possível por processos numéricos iterativos que podem apresentar um peso computacional elevado.

Nesta ordem de ideias este artigo encontra-se organizado em cinco secções. A secção 2 começa por introduzir os aspectos matemáticos fundamentais associados à teoria das matrizes inversas generalizadas. De seguida, nas secções 3 e 4, aplicam-se esses conceitos matemáticos à resolução cinemática de robots redundantes e analisa-se o seu desempenho para o caso particular de um robot

planar com três graus de liberdade. Por último, na secção 5 traçam-se as principais conclusões que decorrem do estudo efectuado.

## 2. Matrizes inversas generalizadas

### 2.1 Definições

Para as matrizes  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  a fim de definir a matriz inversa generalizada  $(\mathbf{A}^-)$ , a matriz inversa generalizada reflexiva  $(\mathbf{A}_r^-)$  e a matriz pseudoinversa  $(\mathbf{A}^\#)$  de  $\mathbf{A}$  são usadas as relações:

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{XAX} = \mathbf{X} \quad (2)$$

$$(\mathbf{AX})^T = \mathbf{AX} \quad (3)$$

$$(\mathbf{XA})^T = \mathbf{XA} \quad (4)$$

As condições (1) a (4) são chamadas as *condições de Penrose*. Uma matriz inversa generalizada da matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma matriz  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^- \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  que satisfaz a condição (1). Por outro lado, uma matriz inversa generalizada reflexiva da matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma matriz  $\mathbf{X} = \mathbf{A}_r^- \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  que satisfaz as condições (1) e (2). Por último, uma matriz pseudoinversa da matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma matriz  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\# \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  que satisfaz as condições (1) a (4). A matriz pseudoinversa é normalmente designada por matriz de *Moore-Penrose*.

### 2.2 Matrizes inversas generalizadas

Para uma equação linear

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (5)$$

onde,  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  e  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^m$ , uma condição necessária e suficiente para a existência de solução  $\mathbf{x}$  é:

$$r[\mathbf{A|b}] = r[\mathbf{A}] \quad (6)$$

onde  $r[\mathbf{A}]$  representa a característica da matriz  $\mathbf{A}$ .

A solução de (5) vem:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^- \mathbf{y} \quad (7)$$

Para uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  existe, pelo menos, uma matriz inversa generalizada  $\mathbf{A}^-$  tal que  $r[\mathbf{A}^-] \geq r[\mathbf{A}]$ . Se,  $r[\mathbf{A}^-] = r[\mathbf{A}]$  então  $\mathbf{A}^-$  coincide com a inversa generalizada reflexiva  $\mathbf{A}_r^-$ . Geralmente  $\mathbf{A}^-$  e  $\mathbf{A}_r^-$  não são únicas. Se  $\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada não singular, então a matriz inversa generalizada  $\mathbf{A}^-$  e a matriz inversa generalizada reflexiva  $\mathbf{A}_r^-$  são únicas e verifica-se que  $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}_r^- = \mathbf{A}^{-1}$ . Além disso, as matrizes  $\mathbf{AA}^-$  e  $\mathbf{A}^- \mathbf{A}$  são idempotentes.

Considerando uma matriz arbitrária  $\mathbf{U} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  e a matriz inversa generalizada  $\mathbf{A}^-$ , então todas as inversas generalizadas de  $\mathbf{A}$  podem ser representadas pela matriz  $\mathbf{X}$  dada pela expressão:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^- + \mathbf{U} - \mathbf{A}^- \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{A}^- \quad (8)$$

que se obtém realizando a manipulação algébrica (onde  $\mathbf{AA}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$ )

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^- + \mathbf{U} - \mathbf{A}^- \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{A}^-)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^- \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} - (\mathbf{A}\mathbf{A}^- \mathbf{A})\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{A}^- \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (9)$$

### 2.3 Matrizes pseudoinversas

Para uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  a matriz pseudoinversa  $\mathbf{A}^\# \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  existe e é única, contrariamente ao que ocorre para  $\mathbf{A}_r^-$  e para  $\mathbf{A}^-$  que não são necessariamente únicas. Se os conjuntos de todas as matrizes  $\mathbf{A}^-$ ,  $\mathbf{A}_r^-$  e  $\mathbf{A}^\#$  forem, respectivamente,  $S^-$ ,  $S_r^-$  e  $S^\#$ , então é válida a relação de inclusão:

$$S^\# \subset S_r^- \subset S^- \quad (10)$$

Assim, a matriz pseudoinversa apresenta as propriedades:

- i)  $(\mathbf{A}^\#)^\# = \mathbf{A}$
- ii)  $(\mathbf{A}^T)^\# = (\mathbf{A}^\#)^T$
- iii)  $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^\# \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^\#$ .

Para uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ :

- i) Se  $m < n$  e  $r(\mathbf{A}) = m$ , então  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  é não singular e é válida a relação:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (11)$$

- ii) Se  $m > n$  e  $r(\mathbf{A}) = n$ , então  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é não singular e obtém-se

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (12)$$

- iii) Se  $m = n$  e  $r(\mathbf{A}) = n$  então

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A})^{-1} \quad (13)$$

As matrizes  $\mathbf{A}^\# \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\#$ ,  $\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}$  e  $\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\#$  são idempotentes e simétricas, onde  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade de dimensão apropriada. Se  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica e idempotente, então, para qualquer matriz  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , é válida a seguinte condição

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^\# = (\mathbf{B}\mathbf{A})^\# \quad (14)$$

### 2.4 Resolução de equações lineares

A matriz pseudoinversa tem aplicações na resolução de vários tipos de problemas que envolvam equações lineares. Para uma equação linear em  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (15)$$

onde  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^m$ , a forma geral da solução, no sentido dos mínimos quadrados, é:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\# \mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A})\mathbf{z} \quad (16)$$

onde  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^n$  é um vector arbitrário, e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem apropriada. A solução, de entre as definidas em (16), com norma mínima é:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\# \mathbf{y} \quad (17)$$

Das soluções de (15) a definida no sentido dos mínimos quadrados é a que minimiza o erro da norma:

$$\min \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad (18)$$

onde  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclidiana. A solução, no sentido dos mínimos quadrados, não é necessariamente única. Qualquer outra solução pode ser obtida alterando  $\mathbf{z}$  em (16). A solução (17) é a que minimiza  $\|\mathbf{x}\|$  de entre todas as soluções dadas por (16). Quando existe, pelo menos, uma solução para (15), a equação (16) apresenta a forma geral de todas as soluções exactas. É de notar que ambos os termos do segundo membro de (16) são ortogonais, já que:

$$(\mathbf{A}^\# \mathbf{y})^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}) \mathbf{z} = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^\#)^T (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}) \mathbf{z} = \mathbf{y}^T ((\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}) \mathbf{A}^\#)^T \mathbf{z} = 0 \quad (19)$$

onde se usou (2) e o facto de  $\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}$  ser simétrica.

## 2.5 Cálculo das matrizes pseudoinversas

Nesta sub-secção serão referidos três métodos de cálculo para as matrizes pseudoinversas.

### 2.5.1 Cálculo por decomposição em valores singulares

Se  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , então  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é uma matriz não negativa cujos valores próprios (*i.e.*, as soluções de  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0$ ) são números reais não negativos. Sejam os valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ) e faça-se:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \min(m, n) \quad (20)$$

Obviamente que resulta  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m, n)} \geq 0$ . Agora a matriz  $\mathbf{A}$  pode exprimir-se como o produto de três matrizes

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (21)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m) \in \mathfrak{R}^{m \times m} \text{ e } \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (22)$$

onde  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes ortogonais e  $\mathbf{\Sigma} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é definida por:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_n & \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \text{ se } m \geq n \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & \vdots \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_n & \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \text{ se } m < n \quad (23)$$

Esta decomposição de  $\mathbf{A}$  oferece um esquema para o cálculo da pseudoinversa. Quando  $\mathbf{A}$  é decomposta em valores singulares como em (21) a sua pseudoinversa  $\mathbf{A}^\#$  pode ser representada por:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^\# \mathbf{U}^T \quad (24)$$

onde  $\mathbf{\Sigma}^\#$  é a matriz  $(n \times m)$  definida por (onde  $p$  é o número de valores singulares não nulos):

$$\mathbf{\Sigma}^\# = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \sigma_p^{-1} & \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 2.5.2 Pseudoinversas de matrizes com característica máxima

Quando a matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  admite característica máxima, a respectiva pseudoinversa é calculada usando a matriz inversa de uma matriz não singular. A partir de (11) e (12) a pseudoinversa vem:

i) Se  $m < n$  e  $r(\mathbf{A}) = m$ , então

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (26)$$

ii) Se  $m > n$  e  $r(\mathbf{A}) = n$  então

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \quad (27)$$

A partir de (13)  $\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^{-1}$ , se  $m = n$  e  $r(\mathbf{A}) = m$ . Deve-se notar que (27) sugere que a pseudoinversa de um vector  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$  pode ser calculada por

$$\mathbf{a}^\# = \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|^2} \quad (28)$$

### 2.5.3 Solução geral de equações lineares

No sentido de controlar a redundância cinemática é importante o cálculo da solução (16). Supondo que  $\mathbf{A}$  admite característica máxima, Klein [1] mostrou que se pode calcular de forma eficiente essa solução usando a equação (26), sem a necessidade do cálculo de qualquer matriz inversa. O algoritmo seguinte permite esse cálculo:

i)  $\mathbf{p} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$

ii) Resolve-se o sistema  $\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{q}$

iii)  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{q} + \mathbf{z}$

O algoritmo pode ser obtido substituindo a condição (26) na condição (16).

## 3. A cinemática de um robot redundante

Como é sabido o modelo cinemático para um robot é descrito pelas seguintes relações:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}) \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (30)$$

onde  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  são vectores  $(n \times 1)$  das posições e velocidades nas juntas,  $\mathbf{x}$  e  $\dot{\mathbf{x}}$  são os vectores  $(m \times 1)$  das posições e velocidades do órgão terminal no espaço cartesiano,  $f$  é a função vectorial que descreve a estrutura cinemática do robot e  $\mathbf{J}$  é a matriz  $(m \times n)$  correspondente ao Jacobiano de  $f(\mathbf{q})$ .

Para uma determinada posição do órgão terminal no espaço operacional, a cinemática inversa do robot tem como objectivo a determinação de um conjunto de valores de junta  $\mathbf{q}(t)$  tal que a relação  $f(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{x}(t)$  seja verificada. No caso de um robot redundante, isto é para  $m < n$ , o problema da determinação da cinemática inversa admite soluções múltiplas. Isto sugere que é possível explorar de forma conveniente o aspecto redundante, introduzindo determinadas condições que possibilitem obter um maior grau de “manipulabilidade” do robot na execução das tarefas. Outro aspecto importante consiste na possibilidade de se evitarem as singularidades cinemáticas, que ocorrem quando a matriz  $\mathbf{J}$ , para certas soluções  $\mathbf{q}(t)$ , tem característica inferior a  $m$ . Nestas situações o robot perde a capacidade de se mover numa determinada direcção, significando isto que a sua “manipulabilidade” foi reduzida. A medida da “manipulabilidade” de um robot foi definida por Yoshikawa [2] como,  $\mu = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}$ . Esta

definição significa que o valor do determinante da matriz  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ , pode ser entendido como um índice da capacidade de posicionamento do órgão terminal do robot.

### 3.1 Resolução da cinemática inversa

A resolução da cinemática inversa de posição pode ser obtida à custa da forma diferencial:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} \quad (31)$$

onde  $\mathbf{K}$  é uma matriz ( $n \times m$ ) determinada a partir do Jacobiano. Whitney [3] propôs o uso da matriz pseudoinversa de *Moore-Penrose* para a matriz  $\mathbf{K}$ , vindo a relação (3) da forma:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} \quad (32)$$

onde  $\mathbf{J}^+$  é uma matriz definida como  $\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$ . À primeira vista, esta solução é interessante, tanto mais que a matriz pseudoinversa gera um vector solução (de posição de juntas) que admite norma mínima, no sentido dos mínimos quadrados. Contudo, Bailieul [4] provou que, na prática, as singularidades cinemáticas não são evitadas, já que as velocidades das juntas são apenas minimizadas instantaneamente, podendo ser arbitrariamente elevadas na vizinhança das configurações de singularidade. Com vista à resolução deste problema, Nakamura e Hanafusa [5] propuseram o uso de uma matriz inversa do Jacobiano calculada pelo método dos mínimos quadrados do Jacobiano, da forma:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \alpha^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (33)$$

onde  $\alpha$  representa um factor de amortecimento, correspondendo a uma modificação do Jacobiano que seja não singular em todo o espaço de trabalho. Usando este método, apenas se obtém uma aproximação da solução da cinemática inversa. Agora o problema consiste em encontrar os valores adequados para  $\alpha$  que conduzam a uma solução de norma mínima e que minimize o erro da posição calculada, isto é, que torne mínimo o valor de  $\|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}\|$ . Valores altos para  $\alpha$  dão uma boa aproximação excepto nas proximidades dos pontos singulares. Note-se que uma escolha apropriada de  $\alpha$  depende do menor valor singular da matriz  $\mathbf{J}$  que é uma medida da proximidade de pontos de singularidade [6].

Para a solução de (32) prova-se que uma solução geral da equação (30) pode ser dada por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} + \left[ \mathbf{I} - \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (34)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade ( $n \times n$ ) e  $\dot{\mathbf{q}}_0$  é um vector arbitrário ( $m \times 1$ ) de velocidade das juntas. Assim, verifica-se que (34) deriva de (32) por adição de um termo homogéneo criado pelo operador projecção  $\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J}$  que selecciona as componentes de  $\dot{\mathbf{q}}_0$  no núcleo de  $\mathbf{J}$ , já que  $\dot{\mathbf{q}}_0$  produz apenas um movimento “interno” das juntas mantendo, sem alteração, a posição do órgão terminal.

Outro problema apresentado pela solução de (32) consiste no facto da *repetibilidade* dos valores de juntas para trajectórias repetitivas (de formas geométricas fechadas) não ser preservada, o que não é desejável em muitas situações.

### 4. Aplicação para o robot planar 3R

Nesta secção aplica-se a formulação matemática desenvolvida anteriormente no controlo de trajectória de um robot planar com 3 graus de liberdade. Este robot é considerado redundante pois tem 3 juntas ( $n = 3$ ) e pretende-se que execute trajectórias no espaço cartesiano ( $m = 2$ ).

A cinemática directa e o Jacobiano do robot 3R são dadas por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde  $S_{i\dots k} = \sin(q_1 + \dots + q_k)$  e  $C_{i\dots k} = \cos(q_1 + \dots + q_k)$ .

Nas experiências considerou-se o robot 3R, com  $l_1 = l_2 = l_3 = 0.5m$ , impondo-se ao órgão terminal uma trajetória circular repetitiva no espaço operacional definida por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.25[1 - \cos(\pi t)] \\ 0.25[2 + \sin(\pi t)] \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 26 \quad (36)$$

A posição inicial das juntas é:

$$\mathbf{q}(0) = [\pi \quad -\pi/2 \quad -\pi/2]^T \quad (37)$$

que corresponde a uma posição inicial do órgão terminal  $\mathbf{x}(0) = [0 \quad 0.5]^T$ . As posições nas juntas são calculadas de acordo com o sistema em malha fechada dada pelas equações:

$$\Delta \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_{ref}(t_k) - \mathbf{x}(t_k) \quad (38)$$

$$\Delta \mathbf{q}(t_k) = \mathbf{J}^+(\mathbf{q}(t_k)) \Delta \mathbf{x}(t_k) \quad (39)$$

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \Delta \mathbf{q}(t_k) \quad (40)$$

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = f(\mathbf{q}(t_{k+1})) \quad (41)$$

onde  $t_k$  e  $t_{k+1}$  são dois instantes consecutivos de amostragem.

A figura 1.-a) mostra as diferentes posições no início de cada novo ciclo. É visível a variação da configuração que ocorre quando se adoptam as matrizes pseudoinversas no controlo da trajectória. A figuras 1.-b) mostra a evolução temporal das posições nas juntas e a variação do índice de manipulabilidade  $\mu$ .

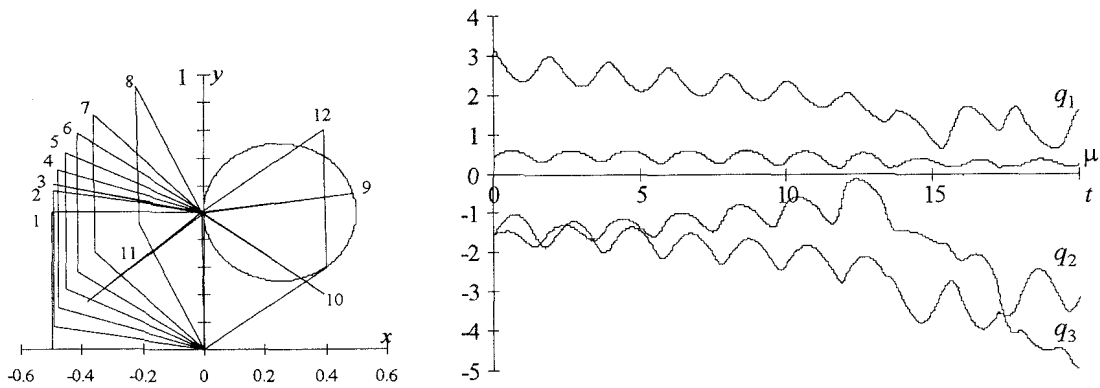


Figura. 1.-a) Trajetória de referência e configuração no início de cada novo ciclo  
b) Evolução temporal das posições das juntas

## 5. Conclusões

Neste trabalho apresentaram-se os aspectos fundamentais da teoria das matrizes inversas generalizadas assim como vários métodos para o cálculo de matrizes pseudoinversas. Nesta perspectiva, foi analisada a cinemática directa de robots redundantes e adoptaram-se matrizes pseudoinversas para a resolução da cinemática inversa.

Estas técnicas foram aplicadas ao controlo de trajetórias de um robot 3R planar verificando-se que não se consegue um comportamento periódico das posições das juntas quando se percorre uma trajetória repetitiva.

## Referências

- [1] C.A Klein, e C. C Huang., "Review of Pseudoinverse Control for Use With Kinematically Redundant Manipulators", *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 13, pp. 245-250, 1983.
- [2] Yoshikawa, T., "*Foundations of Robotics: Analysis and Control*", MIT Press, 1988.
- [3] Whitney, D. , "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses", *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 10, pp. 47-53, 1969
- [4] J. Baillieul, "Kinematic Programming Alternatives for Redundant Manipulators", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, St. Louis, 1985, pp. 722-728.
- [5] Y. Nakamura, "*Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*", Addison-Wesley, 1991
- [6] Bruno Siciliano, " Kinematic Control of Redundant Robot Manipulators: A Tutorial", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 3, pp. 201-212, 1990.
- [7] Bruno Siciliano, "A Closed-loop Inverse Kinematic Scheme for On-line Jointed-based Robot Control", *Robotica*, vol. 8, pp. 231-243, 1990.
- [8] Asada, H. e Slotine, J-J., *Robot Analysis and Control*, Wiley, 1986
- [9] Ben-Israel, A e Greville, T., "*Generalized inverses: theory and applications*", Wiley, 1974.
- [10] C. Radharkrishna Rao, S. Kumar Mitra, "*Generalized Inverse of Matrices and its Applications*", John Wiley & Sons, 1971.
- [11] S. L. Campbell e C. D. Meyer, Jr, "*Generalized Inverses of Linear Transformations*", Dover Publications, 1979.
- [12] J. L. Goldberg, "*Matrix Theory with Applications*", McGraw-Hill., 1992.
- [13] A. A. Maciejewski e J. M. Reagin, "A Parallel Algorithm and Architecture for the Control of Kinematically Redundant Manipulators", *IEEE Trans. Robotics Automation.*, vol. 11, pp. 405-414, 1995
- [14] J. Wunderlich e C. Boncelet, "Local Optimization of Redundant Manipulator Kinematics Within Constrained Workspaces", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Minneapolis, April 1996, pp.127-132.
- [15] Keith L. Doty, C. Melchiorri e C. Bonivento, "A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics", *International Journal of Robotics Research*, vol 12, pp. 1-19, 1993.
- [16] J. Angeles, G. Hommel e P. Kovács (Eds), "*Computational Kinematics*", Kluwer, 1993.
- [17] W.J.Chung, Y. Youm e W. K. Chung, "Inverse Kinematics of Planar Redundant Manipulators via Virtual Links With Configuration Index", *J. of Robotic Systems*, vol. 11, pp. 117-128, 1994.
- [18] A De Luca e G. Oriolo, "Reconfiguration of Redundant Robots Under Kinematic Inversion.", *Advanced Robotics*, vol. 10, pp. 249-263, 1996.
- [19] J. Côté, C. M. Gosselin e D. Laurendeau, "Generalized Inverse Kinematic Functions for the Puma Manipulators", *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 11, pp. 404-408, 1995.
- [20] F. Caccavale, P. Chiacchio, S. Chiaverini e B. Sciliano, "Experiments of Kinematic Control on a Redundant Robot Manipulator with Nonspherical Wrist", *Laboratory Robotics and Automation*, vol. 8, pp. 25-36, 1996.
- [21] S. Ma e D. N. Nenchev, "Local Torque Minimization for Redundant Manipulators: A Correct Formulation", *ICAR '95, 7th Int. Conf. on Advanced Robotics*, Spain, Sept. 1995, pp. 645-650
- [22] Lovass-Nagy, Schilling, N., "Control of kinematically redundant robots using  $\{1\}$ -inverses", *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 17, 1987.
- [23] Paul R., Shimano B., Gordon Mayer, "Kinematic Control Equations for Simple Manipulators", *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 11, 1981
- [24] M. Kircanski e M. Vukobratovic, "Contribution to Control of Redundant Robotic Manipulators in na Environment with Obstacles", *Journal of Robotics Research*, vol. 5, pp. 112-119, 1986.
- [25] Dragomi N. Nenchev, "Redundancy Resolution Trough Local Optimization: A Review", *Journal of Robotic Systems*, vol. 6, pp. 769-798, 1989.
- [26] S. Ma e D.N. Nenchev, "Local Torque Minimization for Redundant Manipulators: A Correct Formulation", *Robotica*, vol. 14, pp. 235-239, 1996
- [27] Sanjeev Seereeram e John T. Wen, "A Global Approach to Path Planning for Redundant Manipulators", *IEEE Trans. Robotics Automation.*, vol. 11, pp.152-159, 1995
- [28] Roberto Horowitz, " Learning Control of Robot Manipulators", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 115, pp. 402-410, 1993