30

MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA II

RESUMO TEÓRICO, EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E PROPOSTOS

Funções reais de várias variáveis
Equações diferenciais ordinárias
Transformadas de Laplace
Integrais duplos

ALZIRA FARIA • HELENA BRÁS • ISABEL FIGUEIREDO

Coleção Matemática

EDIÇÕES SÍLABO

COLEÇÃO MATEMÁTICA

30

COLEÇÃO MATEMÁTICA

1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n
3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS
4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA
5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
8 – CÁLCULO INTEGRAL EM *IR* – PRIMITIVAS
9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS
10 – SUCESSÕES E SÉRIES
11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM *IR*
13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n – EXERCÍCIOS
14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS
16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES
17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS
18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE
19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA – Com Python 3 e R
20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação
21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações
22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos
23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM IR^n
24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS
25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais
26 – ÁLGEBRA LINEAR – TEORIA E PRÁTICA
27 – ANÁLISE MATEMÁTICA I – Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos
28 – MATEMÁTICA ZERO
29 – ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA – TEORIA E PRÁTICA
30 – ANÁLISE MATEMÁTICA II – Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos

Análise Matemática II

Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos

ALZIRA FARIA
HELENA BRÁS
ISABEL FIGUEIREDO

EDIÇÕES SÍLABO

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer
forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, este livro.
As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor.

Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos.
O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Análise Matemática II – Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos
Autoras: Alzira Faria, Helena Brás, Isabel Figueiredo
© Edições Sílabo, Lda.
Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, setembro de 2023
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.
Depósito Legal: 518783/23
ISBN: 978-989-561-324-3

EDIÇÕES SÍLABO, Lda.
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Tel.: 218130345
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

Prefácio

OBJETIVOS

Esta obra foi especialmente concebida para auxiliar estudantes, nomeadamente das Licenciaturas em Faculdades ou Institutos Superiores nas áreas das Ciências Exatas e tem como objetivo principal fornecer uma preciosa ferramenta de treino, constituída por um elevado número de exercícios resolvidos e exercícios propostos com solução, que ilustram os temas que são objeto de estudo. Neste sentido, é uma mais-valia na preparação de estudantes para a realização de provas de avaliação de Análise Matemática ou Cálculo, unidade curricular transversal das Licenciaturas nas áreas das Ciências Exatas.

MOTIVAÇÃO

O atual paradigma do processo de ensino e aprendizagem orienta cada vez mais para um trabalho autónomo de cada estudante. No entanto, é necessário fornecer ao estudante ferramentas de trabalho adequadas aos seus interesses e às suas necessidades. Este projeto arrancou a partir de uma compilação de apontamentos preparados, para responder às necessidades dos estudantes na preparação para os exames, nas unidades curriculares de Matemática, no sentido de facilitar o estudo e a interiorização dos conceitos, auxiliando na consolidação dos mesmos e no desenvolvimento de métodos de trabalho. Procuramos, assim, motivar os estudantes na aprendizagem e, consequentemente, ajudá-los a alcançar o sucesso no seu percurso académico.

CONTEÚDO

Este livro é composto exclusivamente por exercícios retirados dos exames realizados, nos últimos anos, em avaliações de unidades curriculares de várias Licenciaturas em Engenharia. As autoras, tiveram a preocupação de apresentar a resolução dos exercícios com grande detalhe e clareza, de modo que, cada resolução contribua para uma aprendizagem consistente das matérias abordadas. Este livro, Análise Matemática II (Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos), aborda os assuntos: cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$, equações diferenciais ordinárias, transformadas de Laplace e integrais duplos e vem complementar um outro livro já publicado pelas mesmas autoras, Análise Matemática I (Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos) que aborda os assuntos, cálculo diferencial em $\mathbb{R}$, cálculo integral e séries numéricas, para que seja abordada a maior parte das matérias das unidades curriculares de matemática das Licenciaturas em Faculdades ou Institutos Superiores nas áreas das Ciências Exatas.

ORGANIZAÇÃO

A obra é composta por quatro capítulos, estando cada capítulo dividido em três secções. Na primeira secção, é apresentado um breve e sucinto resumo teórico das matérias abordadas nos exercícios. Na segunda secção, estão dez propostas de exames resolvidos. Na terceira secção, estão dez propostas de exames com soluções que se pretende que funcione como barómetro para a avaliação da aquisição de conhecimentos nas duas primeiras secções.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer a todos os colegas que de alguma forma, direta ou indiretamente, ajudaram na concretização deste projeto, assim como o apoio incondicional das nossas famílias.
Gostaríamos também de agradecer à nossa editora, nomeadamente ao nosso editor Manuel Robalo, pelo seu apoio e compreensão em momentos mais sensíveis e ao Pedro Mota pelo seu contributo fundamental na forma e na estrutura desta obra.

1

Funções reais de várias variáveis

– 1.1 –

RESUMO TEÓRICO

1.1.1. Funções reais de n variáveis reais: domínio, contradomínio e representação gráfica

Definição 1.1. Funções de várias variáveis

Uma *função real f de n variáveis reais*, definida em $D \subseteq \mathbb{R}^n$, é uma correspondência que a todo o elemento de D associa um único elemento z de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & z = f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Às variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ dá-se o nome de *variáveis independentes* ou *argumentos* da função f e a z dá-se o nome de *variável dependente*.

Definição 1.2. Domínio de uma função de várias variáveis

O *domínio* de uma função de várias variáveis em $\mathbb{R}^n$, consiste no conjunto dos pontos para os quais a função está definida, ou seja, a região $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que os valores calculados da função para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, resultem em valores $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ finitos e reais.

Definição 1.3. Contradomínio de uma função de várias variáveis

O *contradomínio* ou *imagem*, D', de uma função de várias variáveis consiste no conjunto de todos os valores assumidos pela variável dependente, ou seja,

$$D' = \left\{ f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \right\}.$$

Definição 1.4. Representação gráfica de uma função de várias variáveis

Chama-se *gráfico de uma função*, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ao conjunto,

$$G_f = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \wedge x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\right\}.$$

O gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.1.2. Funções reais de duas variáveis

1.1.2.1. Definição e representação gráfica

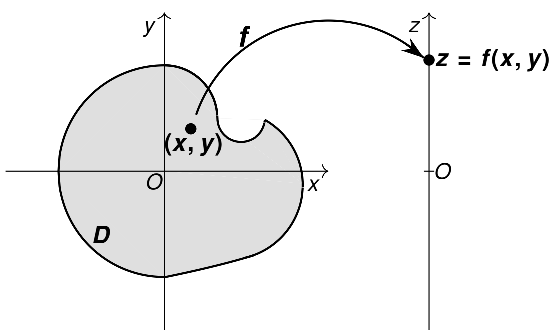
Definição 1.5. Função de duas variáveis

Uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis é uma função com domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e contradomínio $z \in \mathbb{R}$.

À variável z dá-se o nome de *variável dependente* e às variáveis x e y dá-se o nome de *variáveis independentes*.

A Figura 1.1. apresenta uma representação esquemática do domínio e do contradomínio de uma função de duas variáveis.

Figura 1.1. Domínio e contradomínio de uma função de duas variáveis.



Definição 1.6. Representação gráfica de uma função de duas variáveis

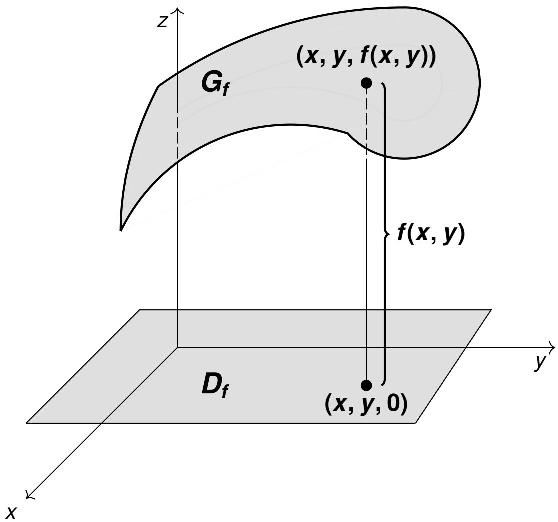
Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com duas variáveis, de domínio D_f. O *gráfico* de f é uma *superfície* de $\mathbb{R}^3$ de equação $z = f(x, y)$,

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f \wedge z = f(x, y)\} \text{ ou}$$
$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f\}.$$

O gráfico G_f de f localiza-se na parte superior ou na parte inferior, relativamente ao seu domínio D_f no plano XOY.

A Figura 1.2. apresenta um exemplo de uma representação gráfica de uma função de duas variáveis.

Figura 1.2. Função de duas variáveis.



1.1.2.2. Curvas de nível

A representação geométrica de uma função de duas variáveis nem sempre é fácil. Quando queremos uma visão geométrica da função, podemos recorrer às curvas de nível, que se obtêm através do corte, por planos horizontais, da superfície representativa da função. As curvas de nível dão-nos assim informação sobre o gráfico da função.

Definição 1.7. Curvas de nível

A *curva de nível* de uma função real de duas variáveis f, de valor k, é a projeção ortogonal sobre o plano XOY da curva obtida pela interseção do gráfico de f com o plano $z = k$. Pertencem à curva de nível k os pontos $(x, y) \in D_f$ para os quais o gráfico de f tem cota k, ou seja, $f(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$

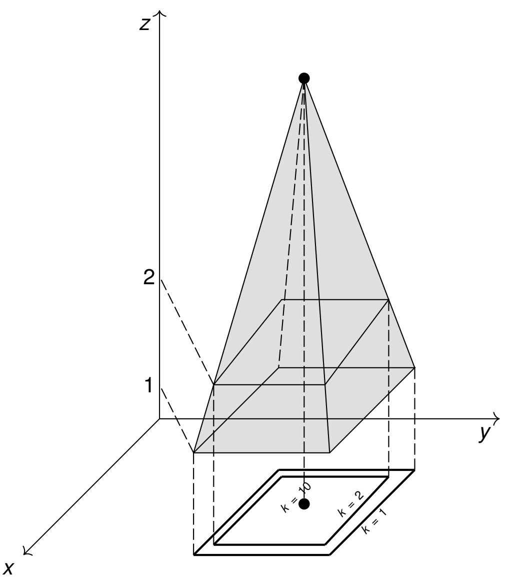
Por exemplo, em topografia, uma curva de nível, une pontos com a mesma altitude relativamente ao nível do mar.

Definição 1.8. Mapa de contornos

Um *mapa de contornos* de uma função f de duas variáveis é a representação gráfica das curvas de nível de f para os diferentes valores de k.

A Figura 1.3. apresenta um exemplo de representação de curvas de nível de uma pirâmide retangular e respetivo mapa de contornos no plano XOY.

Figura 1.3. Curvas de nível e mapa de contornos de uma pirâmide retangular.



1.1.2.3. Derivadas parciais

A taxa de variação de uma função de várias variáveis pode ser estudada tendo por base a taxa de variação de funções com uma só variável, considerando que apenas uma dada variável sofre um incremento, e mantendo-se as restantes constantes.

Consideremos a função real de duas variáveis reais $f(x, y)$. Se fixarmos a ordenada y, no valor y_0, podemos definir a função real de uma só variável real

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Se a função for derivável em x_0, à derivada de g em x_0, $g'(x_0)$, damos o nome de *derivada parcial de f em ordem a x*, no ponto (x_0, y_0) e representamos por,

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0).$$

O mesmo raciocínio é feito se fixarmos a abcissa.

Definição 1.9. Derivadas parciais

Se f é uma função de duas variáveis, as suas duas *derivadas parciais* no ponto (x_0, y_0) são:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Se $z = f(x, y)$, podemos escrever nas seguintes notações:

$$f'_x(x, y) = f'_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$f'_y(x, y) = f'_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Regras de cálculo para as derivadas parciais de $z = f(x, y)$:

1. Para encontrar f'_x, consideramos y como uma constante e derivamos $f(x, y)$ em ordem a x.
2. Para encontrar f'_y, consideramos x como uma constante e derivamos $f(x, y)$ em ordem a y.

Alzira Fernanda M. C. Faria é licenciada em Matemática Aplicada – ramo ciências dos computadores, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, mestre em Métodos Quantitativos em Gestão pela Escola de Gestão do Porto da Universidade do Porto e é doutora em Ensino e Divulgação das Ciências, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Exerce atividade docente no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto desde 1995.

Helena C. M. Brás é licenciada em Matemática Aplicada – ramo ciências dos computadores pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto; é mestre em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores/Telecomunicações pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e é doutora em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Exerce atividade docente no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto desde 1997.

Isabel M. P. Figueiredo é licenciada em Matemática – ramo de especialização científica em matemática aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto; é mestre em Estatística Aplicada e Modelação pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e é doutora em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Exerce atividade docente no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto desde 1999.

Este manual dirige-se aos estudantes das licenciaturas nas áreas das ciências exatas oferecidas pelas faculdades e institutos superiores do país. Os quatro capítulos que integram o livro – funções reais de várias variáveis, equações diferenciais ordinárias, transformadas de Laplace e integrais duplos – iniciam-se com uma síntese teórica da matéria abordada, apresentando depois um vasto conjunto de exercícios resolvidos seguido de um vasto conjunto de exercícios propostos com solução.

O conteúdo teórico e compilação dos exercícios presentes neste livro, proporcionarão aos estudantes uma valiosa ferramenta de estudo e treino para a obtenção de elevados níveis de sucesso nos desafios de avaliação.

753
ISBN 978-989-561-324-3
9 789895 613243

30 COLEÇÃO MATEMÁTICA