

Otimização Estrutural de um Braço de Suspensão Recorrendo a um Algoritmo de Remodelação Bio-Inspirado Combinado com Métodos Sem Malha

CARLOS DAVID FERREIRA OLIVEIRA

julho de 2024

Otimização Estrutural de um Braço de Suspensão Recorrendo a um Algoritmo de Remodelação Bio-Inspirado Combinado com Métodos Sem Malha

Carlos David Ferreira Oliveira

**Dissertação para Obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Automóvel**

**Orientador: Prof. Dr. Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha
Co-Orientador: Prof. Ana Isabel Lopes Pais**

Declaração de Integridade

Declaro ter conduzido este trabalho académico com integridade.

Não plagiei ou apliquei qualquer forma de uso indevido de informações ou falsificação de resultados ao longo do processo que levou à sua elaboração.

Portanto, o trabalho apresentado neste documento é original e de minha autoria, não tendo sido utilizado anteriormente para nenhum outro fim.

Declaro ainda que tenho pleno conhecimento do Código de Conduta Ética do P.PORTO.

ISEP, Porto, 24 de julho de 2024

*You know, a lot of people don't love themselves.
And they go through life with deep and haunting emotional conflicts.
So the length of life means that you must love yourself.
And you know what loving yourself also means?
It means that you've got to accept yourself.*

Martin Luther King Jr.

Agradecimentos

Um especial agradecimento ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Belinha, por toda a disponibilidade, paciência depositada em mim e acima de tudo, todo o conhecimento transmitido na execução desta dissertação. Demonstrou em todos os momentos ser um exemplo no aconselhamento e na minha elucidação, e é com enorme prazer que consigo dizer que não poderia ter selecionado um melhor orientador para me auxiliar na conclusão do mestrado.

À minha co-orientadora, Prof. Ana Pais, pelo esclarecimento constante de todas as minhas dúvidas e por todo o tempo investido na construção de ferramentas computacionais que foram fulcrais ao enriquecimento do conteúdo da dissertação. Devo-te uma enorme parte do conhecimento adquirido de todo o procedimento de impressão deste trabalho.

À minha namorada, Bia. Em todos os momentos emprestou-me todo o conhecimento que possui da própria experiência dela no ramo da engenharia mecânica, demonstrando constantemente disponibilidade para me auxiliar em tudo o que eu precisasse. Simultaneamente, ofereceu-me todo o apoio emocional e moral que eu poderia pedir e muito mais, e esteve sempre ao meu lado pronta a me confortar. Devo todo o percurso que fiz e todas as decisões que tomei a ela, e é por isso que será para sempre o meu exemplo. Espero que estejas tão orgulhosa de mim como eu estou de ti, adoro-te imenso.

Aos meus pais, Cidália e Alberto, porque lhes devo tudo o que me deram. Apoiaram-me em todas as decisões que tomei e ofereceram-me todas as condições para estar onde eu estou. Estarei para sempre grato por tudo o que fizeram por mim, a minha dívida perante vocês é imensurável.

À minha família, por todos os momentos partilhados e todo o apoio dado ao longo desta minha etapa.

A todos os meus melhores amigos que conheci durante todo o meu percurso académico, e ao conhecimento trocado diariamente com eles, que foi crucial para o meu sucesso académico. Obrigado por fazerem todos os dias que passei na faculdade melhores.

Ao ISEP e ao Departamento de Engenharia Mecânica por me providenciarem com todas as condições para a execução desta dissertação, nomeadamente os meios de impressão 3D e o laboratório para execução dos ensaios experimentais.

Resumo

O panorama da indústria automóvel presenciou uma transformação disruptiva ao longo do século XXI, caracterizada por uma transformação no paradigma do setor, impulsionada por dois vetores: a revolução tecnológica eletrónica e a ascensão da eletromobilidade. Consequentemente, a massa total média do veículo ligeiro convencional aumentou substancialmente. Tratando-se de um parâmetro preponderante no desempenho global de um veículo, a sua redução permite melhorias na economia de energia, na pegada ecológica associada ao fabrico e às emissões de gases poluentes (no caso dos motores de combustão interna), na performance de condução do veículo e da sua resposta às contínuas exigências do condutor. Com a necessidade de adaptar e otimizar componentes mecânicos que são submetidos a determinadas condições de utilização, têm surgido ao longo dos anos várias técnicas de otimização, complementadas por metodologias de avaliação estrutural computacional, que permitem a obtenção de designs que respeitam os padrões de resistência estrutural estabelecidos pelo utilizador, simultaneamente minimizando a massa total do modelo de estudo. Paralelamente, o método utilizado para a avaliação estrutural tem vindo a revelar-se como preponderante nos resultados obtidos, o que motiva também o estudo contínuo de novas técnicas mais eficientes que promovam melhores soluções. No presente estudo, foi empregue um algoritmo BESO (Bi-Evolutionary Structural Optimization), inspirado no conceito de remodelação óssea, a fim de conseguir melhorar o desenho de um braço de suspensão de um veículo ligeiro. No processo de otimização, dois métodos numéricos foram avaliados e comparados com o mais popular e convencional *Finite Element Method* (FEM): os métodos sem malha *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) e *Natural Neighbors Radial Point Interpolation Method* (NNRPIM), de modo a contemplar a existência de um método numérico mais apropriado para aplicações de otimização estrutural. A comunidade da mecânica computacional apresenta os métodos sem malha como uma alternativa promissora ao FEM. Este facto é suportado com base em literatura credível, onde estas metodologias demonstram uma melhoria da precisão nas simulações numéricas, especialmente evidente em análises com grandes deformações. A partir das melhores soluções obtidas com o algoritmo utilizado, foram testados numericamente e experimentalmente vários modelos. Os modelos testados foram impressos utilizando a tecnologia FFF/FDM. Estes abrangeram duas categorias: modelos que refletem técnicas convencionais de remoção de material de um braço de suspensão e modelos com gradiente de densidade inspirados diretamente nas soluções obtidas no algoritmo de otimização. Estes últimos utilizaram material celular, nomeadamente enchimento em forma de giróide, com o objetivo de gerar estruturas celulares funcionalmente graduadas, de modo a alcançar relações rigidez/peso superiores. Os modelos foram construídos com base no mapa de densidade obtido numa das iterações do ficheiro gerado pelo algoritmo empregue. O mapa de densidade foi convertido num ficheiro estereolitográfico (.stl) através de um script construído para o efeito.

Palavras-chave: Otimização Estrutural, Método de Elementos Finitos, Métodos Sem Malha, Indústria Automóvel, Algoritmo Evolucionário

Abstract

The automotive industry has undergone a dramatic transformation over the course of the XXI century, marked by a paradigm shift influenced by two overarching factors: the electronic technological revolution and the advancement of electromobility. Consequently, the mean total mass of the conventional light vehicle has substantially increased. Given its critical role in overall vehicle performance, reducing this mass yields benefits such as energy savings, a reduced ecological footprint associated with manufacturing, and decreased emissions from internal combustion engines. Additionally, it enhances driving performance and responsiveness to the driver's continuous demands. With the need to adapt and optimize mechanical systems that undergo certain conditions of use, various optimization techniques have emerged over the years, complemented by computational structural evaluation methods, enabling the development of designs that respect the structural resistance standards established by the user, while minimizing the total mass of the studied model. In parallel, the method used for the structural assessment has proved to be decisive in the outcome, encouraging the continuous study of new, more efficient techniques that promote overall better solutions. In this study, a Bi-Evolutionary Structural Optimization (BESO) algorithm, inspired by the concept of bone remodelling, was used to improve the design of a light vehicle suspension control arm. In the optimization process, two numerical methods were evaluated and compared with the more popular Finite Element Method (FEM): the meshless methods Radial Point Interpolation Method (RPIM) and Natural Neighbours Radial Point Interpolation Method (NNRPIM), in order to consider the existence of a more suitable numerical method for structural optimization applications. The computational mechanics community presents meshless methods as a promising alternative to FEM. This is supported by credible literature, where such methods demonstrate improved accuracy in numerical simulations, especially evident in analyses assuming high deformations. Based on the best solutions obtained in the algorithm used, different models were tested numerically and experimentally. The models were printed using FFF technology. They comprised two categories: models reflecting conventional techniques for removing material from the control arm, and models with a density gradient directly inspired by the solutions obtained in the optimization algorithm. The latter used cellular material, namely a gyroid-shaped infill, creating functionally graded cellular structures to achieve higher stiffness-to-weight ratios. The models were built based on the density map obtained in one of the iterations of the file generated by the used optimization algorithm. The density map was converted into a stereolithographic file (.stl) through a purposebuilt script.

Conteúdo

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
Lista de Abreviações	xxi
Lista de Símbolos	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização e Enquadramento	1
1.2 Motivação	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Estrutura	5
2 Métodos Sem Malha	7
2.1 Estado de Arte	7
2.1.1 Método de Interpolação Pontual Radial - RPIM	8
2.1.2 Método de Interpolação Pontual Radial com Vizinhos Naturais - NNRPIM	9
2.2 Procedimento dos Métodos Sem Malha	9
2.3 Conceitos Geométricos Aplicados ao NNRPIM	10
2.3.1 Diagrama de Voronoï	10
2.3.2 Triangulação de Delaunay	13
2.4 Integração Numérica	13
2.4.1 Integração da Quadratura de Gauss-Legendre	14
2.4.2 Integração de Base Nodal	15
2.5 Conectividade Nodal	16
2.5.1 Conectividade Nodal no RPIM - Domínios de Influência	16
2.5.2 Conectividade Nodal no NNRPIM - Células de Influência	17
2.6 Funções de Forma de Interpolação Pontual Radial	17
2.7 Mecânica dos Sólidos	20
2.7.1 Forma Fraca de Galerkin	21
3 Otimização Estrutural	23
3.1 Estado de arte	23
3.2 Formulação do Problema de Otimização	25
3.3 Métodos de Otimização por Interpolação	26
3.3.1 Método SIMP	26
3.4 Métodos de Otimização Evolucionários	27
3.4.1 Método ESO	27
3.4.2 Método BESO	28
Metodologia BESO	28
3.5 Algoritmo de Remodelação Óssea	29

3.5.1	Discretização do Modelo de Carter Modificado	31
3.5.2	Procedimento de Otimização de Remodelação Óssea	32
3.6	Métodos Sem Malha na Otimização Estrutural	33
3.7	Aplicação da Otimização Estrutural na Indústria Automóvel	39
4	Fabrico Aditivo	45
4.1	Regulamentação e Categorização do Fabrico Aditivo	47
4.2	Fabrico de Filamento Fundido (FFF)	47
4.2.1	Polímeros Termoplásticos no FDM/FFF	48
4.3	Aplicação do Fabrico Aditivo na Indústria Automóvel	50
4.3.1	Papel do Fabrico Aditivo na Transição Elétrica	51
4.4	Otimização do Enchimento	52
4.5	Estruturas celulares c/ gradiente funcional obtidas por algoritmos de otimização	54
4.6	Giróide	57
5	Simulação Numérica	59
5.1	Estudo de Convergência Preliminar	59
5.1.1	Viga Cantilever - Análise Elasto-estática	60
5.2	Exemplos de Otimização Estrutural de Referência	64
5.2.1	Viga Cantilever	65
	Análise Computacional	75
5.3	Otimização de Componente da Indústria Automóvel	79
5.3.1	Braço de Suspensão	79
5.3.2	<i>Design</i> de Topologias e Análise Estrutural	87
5.4	Discussão de Resultados	93
6	Prototipagem Rápida	95
6.1	Preparação da Impressão	95
6.1.1	Conversão de Soluções Otimizadas	95
6.1.2	Equipamento e Acessórios de Impressão	97
6.1.3	Impressão dos Provetes	98
6.2	Defeitos de Impressão	100
7	Conclusão	103
7.1	Conclusões Gerais	103
7.2	Trabalhos Futuros	104
	Bibliografia	107

Lista de Figuras

1.1	Esquema da metodologia proposta para a dissertação	4
2.1	Número de publicações de métodos sem malha por ano (Pesquisa do termo " <i>Meshless Method</i> ", no <i>Web Of Science</i>)	7
2.2	a) Domínio sólido b) Exemplo de discretização nodal regular c) Exemplo de discretização nodal irregular	10
2.3	Esquema comparativo de fluxograma da formulação do FEM e dos métodos sem malha	11
2.4	a) Conjunto inicial de nós de potenciais vizinhos naturais do nó n_0 b) Primeiro plano de seleção c) Segundo plano de seleção d) Célula de Voronoï primordial, contendo apenas os vizinhos naturais do nó n_0	12
2.5	a) Diagrama de Voronoï inicial b) Triangulação de Delaunay c) Circunferência circunscrita de vizinhos naturais	13
2.6	a) Quadrilátero inicial retirado de uma célula da grelha b) Transformação do quadrilátero inicial na forma de um quadrado isoparamétrico, e aplicação da regra do ponto de quadratura c) Retorno à forma do quadrilátero inicial	14
2.7	a) Malha de integração Gaussiana geral b) Malha de integração Gaussiana ajustada	15
2.8	a) Célula de Voronoï e os respectivos pontos de integração P_{Ii} b) Pontos medianos M_{Ii} e os respectivos quadriláteros gerados c) Quadrilátero $\overline{n_I M_{I4} P_{I4} M_{I5}}$	15
2.9	a) Célula de Voronoï e os respectivos pontos de integração P_{Ii} b) Pontos medianos M_{Ii} e os respectivos quadriláteros gerados c) Triângulo $\overline{n_I P_{I8} M_{I1}}$	16
2.10	(a) Domínios de influência com forma fixa (retangular) e tamanho constante (b) Domínios de influência com forma fixa (circular) e tamanho constante (c) Domínios de influência com forma fixa e tamanho variável	17
2.11	(a) Célula de influência de primeiro grau (b) Célula de influência de segundo grau	18
3.1	Número de publicações de otimização estrutural por ano, (pesquisa do termo " <i>Structural Optimization</i> ", no <i>Web Of Science</i>)	24
3.2	Tipos de otimização estrutural existentes (a) otimização de tamanho (b) otimização de forma (c) otimização topológica	25
3.3	Esquema de remodelação óssea proposto	33
3.4	Comparação dos valores de área do design final com a área de design inicial (Bobaru e Mukherjee 2001)	34
3.5	Resultados obtidos no estudo de comparação de Shobeiri 2015, exemplo 1: (a) Solução obtida com SIMP sem filtro de sensibilidade; (b) Solução obtida com SIMP com filtro de sensibilidade (c) Solução obtida com BESO.	34
3.6	Resultados obtidos no estudo de comparação de Shobeiri 2015, exemplo 2: (a) Solução obtida com SIMP sem filtro de sensibilidade; (b) Solução obtida com SIMP com filtro de sensibilidade (c) Solução obtida com BESO.	35
3.7	Geometria, forças aplicadas e condições de fronteira impostas no exemplo 1: (a) Exemplo 1 (b) Exemplo 2 (Zou et al. 2007)	35

3.8	Visualização de otimização obtida por Zou et al. 2007 no exemplo 1: (a) Distribuição de nós (b) campo de tensões de Von Mises	36
3.9	Visualização de otimização obtida por Zou et al. 2007 no exemplo 2: (a) Distribuição de nós (b) campo de tensões de Von Mises	36
3.10	Comparação dos históricos de otimização de um método verdadeiramente sem malha e de um método sem malha clássico (a) Exemplo 1 (b) Exemplo 2 (Zou et al. 2007)	37
3.11	Comparação dos resultados de otimização (a) problema e estrutura base (b) resultado com utilização do FEM (c) resultado com utilização do FEM, com filtro de sensibilidade (d) resultado com utilização do RPIM (Zheng, Long e Xiong 2010)	37
3.12	Comparação dos resultados de otimização (a) problema e estrutura base (b) design final resultante da otimização com a utilização do RPIM (c) Visualização do CAD com o design final (Gonçalves et al. 2022a)	38
3.13	Comparação dos resultados de otimização (a) estrutura base (b) design final resultante da otimização com a utilização do RPIM (c) design final resultante da otimização com a utilização do FEM (d) design final selecionado para o componente, após a otimização (Gonçalves et al. 2022a)	39
3.14	Otimização estrutural topológica aplicada a manga de eixo (a) design inicial (b) design intermédio (c) design final (J. Li, Tan e Dong 2020)	40
3.15	Otimização estrutural topológica aplicada ao braço de suspensão (a) design inicial (b) design conseguido com otimização topológica (c) design final conseguido com otimização de forma (Marzbanrad e Hosseinpour 2017)	41
3.16	Otimização estrutural topológica aplicada ao chassis (a) design inicial (b) design intermédio (c) design final (Cavazzuti et al. 2011)	42
3.17	<i>Designs</i> otimizados de painéis soldados de uma porta de um automóvel, quando sujeita a determinados casos de carga, com representação de várias espessuras a utilizar (a) caso de carga 1 (b) caso de carga 2 (c) caso de carga 3 (d) caso de carga 4 (G. Li et al. 2015)	43
4.1	(a) Áreas de aplicação para equipamento industrial (b) Influência no mercado de cada setor industrial (<i>Wohlers Report, 2019</i>)	46
4.2	Gráfico de estimativa de sistemas de FA de metal vendidos nos últimos 21 anos, apresentado no <i>Wohlers Report 2024</i>	46
4.3	Esquema de funcionamento do FDM, ou <i>Fused Filament Fabrication</i> (Universidade de <i>Maryland</i>)	48
4.4	Esquema representativo do processo FDM/FFF	49
4.5	Amostras de componentes de um automóvel construídos com fabrico aditivo (a) selantes de portas (b) conjunto de botões (c) ventilação de ar (FormLabs 2022)	50
4.6	Protótipo de um quadro monocoque e o <i>body</i> , em escala 1/6 (Mackay 2016)	51
4.7	Amostras fabricadas com fabrico aditivo (a) Distribuição nominal (b) Distribuição gradiente (Pais, Alves e Belinha 2021)	52
4.8	Representação de geometrias de células unitárias da biblioteca do algoritmo e construção de camada (a) biblioteca de células unitárias (b) construção da camada (Nguyen e Vignat 2016)	53
4.9	Representação de geometrias de células unitárias da biblioteca do algoritmo e construção de camada (a) biblioteca de células unitárias (b) construção da camada (Tang, Kurtz e Zhao 2015)	53
4.10	Metodologia utilizada na aplicação da otimização e impressão 3D de estruturas celulares	54

4.11	(a) Caso de carga admitido (b) Soluções de otimização obtidas para determinadas iterações (c) Estrutura otimizada e suavizada impressa (Pais, Alves e Belinha 2021)	55
4.12	Teste da viga MBB (a) impressão 3D e preparação para testagem de flexão em três pontos (b) curvas força/deslocamento dos testes realizados (D. Li et al. 2018)	56
4.13	Resultados de otimização do braço do <i>quadcopter</i> (a) Forma inicial (b) Resultado inicial da otimização topológica (c) Resultado do <i>design</i> de treliças tradicional (d) Resultado da otimização FGCS (D. Li et al. 2018)	56
4.14	Vista do topo e isométrica das superfícies mínimas triplicamente periódicas mais populares (a) Diamante (b) Giróide (c) Neovius (d) Schwarz D (e) Schwarz P (Hameed et al. 2021)	57
4.15	Estruturas em giróide, diamante e primitiva, impressas em SLS (Maskery et al. 2018)	58
5.1	Viga cantilever, para estudo preliminar de convergência	60
5.2	Malhas utilizadas para estudo de convergência (a) Malha 2x4 com elementos quadriláteros (b) Malha 32x16 com elementos quadriláteros (c) Malha 2x4 com elementos triangulares (d) Malha 32x16 com elementos triangulares	61
5.3	Gráficos de análise de convergência ao deslocamento na direção y no ponto C: Deslocamentos na direção y e erros relativos dos deslocamentos na direção y	62
5.4	Gráficos de análise de convergência de σ_{xx} em D e de τ_{xy} em B: Valores de σ_{xx} , respetivo erro relativo de σ_{xx} no ponto D, valores de τ_{xy} e respetivo erro relativo no ponto B	63
5.5	Estudo de convergência da tensão normal σ_{xx} ao longo de $x = 0$ e $y = [-D/2; D/2]$, nas malhas 2x4, 4x8, 8x16, 16x32, 32x64 e 64x128, respetivamente	63
5.6	Estudo de convergência da tensão de corte τ_{xy} ao longo de $x = L/2$ e $y = [-D/2; D/2]$, nas malhas 2x4, 4x8, 8x16, 16x32, 32x64 e 64x128, respetivamente	64
5.7	Erro médio relativo ao longo de $x = 0$ e $y = [-D/2; D/2]$ da tensão normal σ_{xx} e da tensão de corte τ_{xy}	64
5.8	Soluções de otimização evolucionária para uma viga <i>cantilever</i> , encontradas na literatura (a) Das, Jones e Y. Xie 2012 (b) Gonçalves et al. 2022b (c) Cai e Zhang 2015 (d) Yang, Zheng e Long 2017	65
5.9	Viga cantilever, para estudo preliminar de otimização	66
5.10	Malhas de elementos quadriláteros (a) 32x16 (561 nós) (b) 64x32 (2145 nós)	66
5.11	Análise computacional da viga <i>cantilever</i> , para malha 32x16 e PR = 1 %, PR = 2 %, PR = 5 % e PR = 10 %, respetivamente	76
5.12	Análise computacional da viga <i>cantilever</i> , para malha 64x32 e PR = 1 %, PR = 2 %, PR = 5 % e PR = 10 %, respetivamente	76
5.13	(a) Sistema de suspensão Opel Corsa D (b) foto do braço de suspensão real (c) representação do braço 3D CAD (d) representação do braço 2D CAD	79
5.14	Malhas criadas para análise do braço de suspensão (a) malha com furo (b) malha sem furo (c) malha com furo, constituída por quatro <i>patches</i> (d) malha sem furo, constituída por quatro <i>patches</i>	80
5.15	Condições de fronteira do braço de suspensão	80
5.16	Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo, para PR = 5%, na iteração 33 (a) Método FEM (b) Método RPIM (c) Método NNRPIM	86
5.17	Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira, para PR = 5%, na iteração 30 (a) Método FEM (b) Método RPIM (c) Método NNRPIM	86
5.18	Braços de suspensão com diferentes <i>designs</i> de otimização (a) braço de suspensão <i>Destroy or Die</i> para Mazda MX-5 MK1 e MK2 (b) braço de suspensão da <i>General Motors</i> (c) braço de suspensão <i>Ridex</i> para BMW Series 3 E46	87

5.19	(a) solução de referência algoritmo de otimização (b) Modelo 1, construído com tramos (c) Modelo 2, construído com remoção de material em círculos (d) Modelo 3, construído com remoção de material em triângulos	87
5.20	Modelos do braço de suspensão desenhados, com correções (a) Modelo 1, construído com tramos (b) Modelo 2, construído com remoção de material circular (c) Modelo 3, construído com remoção de material triangular (d) Modelo 4, construído com remoção de material triangular e diferenciação de espessura .	90
6.1	Iteração base (iteração 20) para conversão de mapa de densidades num ficheiro .stl, para cada método numérico utilizado (a) FEM (b) RPIM (c) NNRPIM	96
6.2	Fluxograma de conversão de soluções do algoritmo para ficheiros .stl	97
6.3	(a) Prusa i3 MK3S (b) <i>Filament PM®</i> PLA 1,75 mm - <i>Pearl Red</i>	97
6.4	Preparação do provete RPIM com rácio de suavização de 0,05 e com escala de 20% aplicada, visualizado no <i>PrusaSlicer</i>	99
6.5	(a) Sólido (b) Tramos (c) Círculos (d) Triângulos (e) Triângulos com diferença de espessura (f) Otimizado, sem sensibilidade, NNRPIM (g) Otimizado, com rácio de suavização = 0,05, NNRPIM (h) Otimizado, com rácio de suavização = 0,1, NNRPIM	100
6.6	Comparação do efeito warping observado num dos provetes impressos (a) provete intacto (b) Proвете com deformação visível	101
6.7	(a) Simulação de impressão no <i>PrusaSlicer</i> do Modelo 4 para testagem (b) Modelo 4 para testagem impresso, com suporte por remover	101

Lista de Tabelas

3.1	Comparação dos resultados de um problema de otimização estrutural com a aplicação de diferentes métodos sem malha do exemplo 1 (Zou et al. 2007) . . .	36
3.2	Comparação dos históricos de otimização de um método verdadeiramente sem malha e de um método sem malha clássico do exemplo 2 (Zou et al. 2007)	36
3.3	Tabela de comparação de resultados da análise estrutural da viga em L (Gonçalves et al. 2022a)	38
3.4	Tabela de comparação de resultados da análise estrutural da viga em L (Gonçalves et al. 2022a)	39
3.5	Tabela de comparação dos resultados obtidos nas respectivas otimizações (Marzbanrad e Hosseinpour 2017)	41
3.6	Massa dos painéis TWB da porta antes e depois da otimização (G. Li et al. 2015) .	43
4.1	Propriedades mecânicas e físicas de termoplásticos comumente aplicados na indústria	49
5.1	Soluções de otimização obtidas para malha 32x16 para critério SEF	69
5.2	Soluções de otimização obtidas para malha 32x16 para critério SED	70
5.3	Soluções de otimização obtidas para malha 64x32 para critério SEF	71
5.4	Soluções de otimização obtidas para malha 64x32 para critério SED	72
5.5	Classificação qualitativa de soluções do estudo preliminar de otimização estrutural	73
5.6	Soluções de otimização obtidas para malha 32x16, para os critérios SEF e SED, dado um PR = 5%	74
5.7	Soluções de otimização obtidas para malha 32x16, para os critérios SEF e SED, dado um PR = 10%	74
5.8	Tabela classificativa para análise computacional, para PR = 5%	77
5.9	Tabela classificativa para análise computacional, para PR = 10%	78
5.10	Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo	82
5.11	Soluções de otimização de um braço de suspensão com furo	83
5.12	Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira	84
5.13	Soluções de otimização de um braço de suspensão com o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira	85
5.14	Resultados da análise estrutural obtidos na estrutural sólida e nos modelos criados, com o NNRPIM	88
5.15	Valores de volume total dos modelos analisados	88
5.16	Resultados de análise estrutural no modelo sólido do braço de suspensão, com o NNRPIM	89
5.17	Resultados de análise estrutural nos modelos desenhados do braço de suspensão, com o NNRPIM	89
5.18	Campos de deslocamento e de tensão de Von Mises nos modelos desenhados e corrigidos do braço de suspensão, com o FEM	91

5.19	Campos de deslocamento e de tensão de Von Mises nos modelos desenhados e corrigidos do braço de suspensão, com o RPIM	92
5.20	Campos de deslocamento e de tensão de Von Mises nos modelos desenhados e corrigidos do braço de suspensão, com o NNRPIM	92
5.21	Resultados da análise estrutural obtidos na estrutural original e nos modelos criados	93
6.1	Propriedades do filamento <i>Filament PM®</i> PLA 1,75 mm - <i>Pearl Red</i>	98
6.2	Categorização de provetes impressos para testagem	100

Lista de Abreviações

ABS	A crylonitrile B utadiene S tyrene
AESO	A ddition E volutionary S tructural O ptimization
BCM	B oundary C loud M ethod
BEM	B oundary E lement M ethod
BESO	B i-directional E volutionary S tructural O ptimization
CAD	C omputer- A ided D esign
DEM	D iffuse E lement M ethod
EFGM	E lement F ree G alerkin M ethod
ESO	E volutionary S tructural
FA	F abrico A ditivo
FDM	F used D eposition M odelling
FDM	F inite D ifference M ethod
FEM	F inite E lement M ethod
FFF	F used F ilament F abrication
FGCS	F unctional G radient C ellular S tructures
FPM	F inite P oint M ethod
FSM	F inite S pheres M ethod
HB	H eat of B ed
HDT	H eat D eflection T emperature
HE	H eat of E xtrusion
I&D	I vestigação e D esenvolvimento
MCI	M otor de C ombustão I nterna
MLPG	M eshless L ocal P etrov - G alerkin
MLS	M oving L east S quare M ethod
NNRPIM	N atural N eighbors R adial P oint I nterpolation M ethod
PEEK	P olyether E ther K etone
PETG	P oly E thylene T erephthalate G lycol
PI	P erformance I ndex
PIM	P oint I nterpolation M ethod
PLA	P olylactic A cid
PP	P olypropylene
PR	P enalization R atio
RKPM	R eproducing K ernel P article M ethod
RPI	R adial P oint I nterpolators O ptimization
RPIM	R adial P oint I nterpolation M ethod
SAE	S ociety of A utomobile E ngineers
SED	S train E nergy D ensity
SEF	S afety E ffective F actor
SIMP	S olid I sotropic M aterial with P enalization
SLS	S interização a L aser S eletiva
SQP	S equential Q uadratic P rogramming

TPE	T hermo p lastic E lastomer
TPMS	Triply P eriodic M inimal S urfaces
TPU	T hermo p lastic P olyurethane
TWB	Tailored W elded B lanks

Lista de Símbolos

$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$	Coeficientes das funções de base radial
$\mathbf{B}$	Matriz de deformabilidade
$\mathbf{b}$	Vetor de força
$\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$	Coeficientes das funções de base radial
$\mathbf{c}$	Matriz constitutiva
C	Conformidade média
d	Dimensão do domínio
d_{0i}	Distância entre o nó 0 e o vizinho natural do nó i
d_{ref}	Dimensão de referência do domínio de influência
E	Módulo de Elasticidade / Módulo de Young
$\bar{E}$	Conjunto de elementos discretos
E_R	Relação Evolucionária
F	Força representativa
$\mathbf{f}_b$	Vetor de força de corpo
$\mathbf{f}_t$	Vetor de força externa
$\mathbf{H}$	Matriz de interpolação
h_{av}	Média de nós encontrados na vizinhança de x_I
k	Parâmetro adimensional do domínio de influência
K	Rigidez
$\mathbf{K}$	Matriz global de rigidez
L	Comprimento de referência
$\mathbf{L}$	Matriz de operadores diferenciais
m	Massa
n	Nó
N	Conjunto de nós
n_i	Nó de interesse
P_i	Índice de desempenho
P_I	Vértice da célula de Voronoï
Q_e	Volume do elemento
R_{ri}	Rácio de rejeição
$\mathbb{R}^d$	Conjunto de números reais d-dimensionais
$\mathbb{R}^d$	Conjunto de números reais bi-dimensionais
$\bar{t}$	Força de tração na fronteira natural
u	Valores nodais
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos
$\mathbf{U}$	Densidade de energia de deformação
$\bar{u}$	Deslocamento da fronteira essencial
V	Volume
$\mathbf{V}$	Vetor de células de Voronoï
V_e	Volume de um elemento
V_f	Fração volúmica

V_i	Célula de Voronoï
$\tilde{w}_i$	Peso do ponto de integração
$\tilde{w}_i^*$	Peso do ponto de integração na superfície/curva
W_i	Massa do nó
$\mathbf{X}$	Vetor de coordenadas nodais
x_e	Fator ESO
x	Coordenadas do nó no eixo x
y	Coordenadas do nó no eixo y
z	Coordenadas do nó no eixo z
α	Rácio de incremento
α_{SE}	Energia de deformação nodal
β	Rácio de redução
γ, p	Parâmetros das funções de base radial quadráticas
ϵ	Vetor de deformação
ζ	vetor de coordenadas SIMP
μ_1, μ_2	Coeficientes da matriz constitutiva
σ	Tensor tensão de Cauchy
$\bar{\sigma}$	Tensão de Von Mises
ν	Coeficiente de Poisson
ρ	Massa volúmica
ρ_{app}	Densidade aparente
$\varphi(\mathbf{x}_I)$	Vetor de interpolação
Ψ	Trabalho virtual
$\Psi(\mathbf{x}_I)$	Vetor de subproduto
Γ	Domínio de fronteira
Γ_u	Fronteiras essenciais
Γ_t	Fronteiras naturais
Ω	Domínio sólido
%	Porcentagem
:	De tal modo que
$\forall$	Para todos
$\in$	Pertencente a
$\subset$	Sub-conjunto
∇	Gradiente

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e Enquadramento

Com a revolução tecnológica observada nos últimos 30 anos, os métodos numéricos assumiram um papel fundamental na progressão de todo o tipo de tecnologia relacionada com problemas de engenharia, nomeadamente na área da engenharia mecânica. No final do século XX e ao longo do século XXI, assistiu-se a um avanço exponencial da tecnologia informática. Esta transformação tornou possível a aplicação de métodos numéricos de forma mais expedita, pragmática, flexível e eficiente do que nunca.

Em particular, a aplicação de métodos numéricos em ferramentas computacionais transformou todo o domínio da construção mecânica, permitindo a conceção de componentes otimizados para determinadas restrições impostas pelo fabricante e a previsão do seu comportamento quando sujeitos a determinadas condições. Na indústria automóvel, a otimização estrutural dos diversos constituintes é um fator importante no desempenho do veículo e no seu comportamento quando sujeito a solicitações no decorrer de todo o seu processo de condução. Como complemento ao método iterativo efetuado pelo algoritmo de otimização, a avaliação estrutural computacional é utilizada como meio de simulação e previsão do comportamento estrutural da estrutura quando submetida a determinadas cargas e condições de fronteira. Um dos métodos numéricos mais amplamente adotado na avaliação estrutural computacional é o *Finite Element Method* (FEM). No entanto, têm surgido várias alternativas, visando ultrapassar alguns dos problemas e limitações que o próprio apresenta, nomeadamente os métodos sem malha (ou métodos *meshless*), como o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) e o *Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method* (NNRPIM).

O presente trabalho enquadra as metodologias sem malha num algoritmo de otimização estrutural bi-evolucionário, inspirado no conceito de remodelação óssea, aplicado a um componente automóvel. A partir dos resultados obtidos na otimização computacional da geometria inicial, procedeu-se à construção de modelos baseados numa das soluções obtidas do algoritmo e nos tipos de *designs* habitualmente aplicados na remoção de material do componente em causa. Uma comparação do desempenho dos modelos foi efetuada através de uma análise linear-estática convencional, nas mesmas condições requeridas do algoritmo de otimização. De seguida, foram impressos recorrendo a técnicas de fabrico aditivo provetes baseados nos modelos desenhados previamente no estudo linear-estático e provetes com geometrias baseadas diretamente nas soluções do algoritmo de otimização. Estas geometrias, comparativamente complexas aos modelos convencionais, foram produzidas recorrendo a uma rotina de conversão da informação gerada pelo algoritmo de otimização e *software* empregue, nomeadamente os mapas de densidade obtidos em uma das iterações, em ficheiros .stl. Posteriormente, procedeu-se à preparação da impressão dos provetes, recorrendo a estruturas celulares de gradiente funcional, ou FGCS (*Functional Gradient Cellular Structures*). A impressão

dos provetes inspirados diretamente do algoritmo de otimização seria executada recorrendo à forma de enchimento giróide, forma essa que demonstra resultados gratificantes em toda a literatura na comparação do desempenho mecânico entre geometrias otimizadas com base na forma a geometrias empíricas mais simples.

1.2 Motivação

Foi estimado pela Associação Europeia de Fabricantes de Automóveis (ACEA) que o lucro total gerado pela União Europeia com a venda de automóveis em 2022 foi de cerca de 79.500.000.000€. No mesmo ano, foram fabricados cerca de 10.900.000 automóveis na UE, o que corresponde a um lucro por automóvel por volta dos 7300€, i.e., para um automóvel com um preço de venda ao público (PVP) de cerca de 30.000€, o custo médio para o fabricante seria por volta dos 22.700€. Deste custo, estima-se que entre 50 a 80% dizem respeito a custos de materiais (Veloso et al. 2001). Assim, tomando como exemplo um valor de 60%, ou 13.600€ dos 22.700€, torna-se evidente que a aplicação de várias técnicas de otimização na secção de investigação e desenvolvimento (I&D), na fase de conceção, poderá demonstrar uma influência considerável no lucro total obtido pelo fabricante. Ao efetuar um cálculo hipotético, considerando uma redução de 5% na massa total de todos os modelos de veículos, tomando novamente como exemplo um automóvel de 30.000€, esta redução de massa representaria aproximadamente uma redução de 5% no custo total dos materiais, i.e., uma redução de 680 € no custo total de cada automóvel. Considerando que em 2022 foram produzidos 10.900.000 automóveis na UE, esta redução de massa representaria uma redução de custos de aproximadamente 7.500.000.000€, correspondendo a aproximadamente 10% do lucro gerado anualmente.

Para além do motivo financeiro proveniente da aplicação da otimização estrutural, a procura crescente e as exigências legislativas na indústria automóvel têm criado a necessidade de evolução e desenvolvimento de todo o tipo de componentes intervenientes nos vários conjuntos funcionais do veículo, de modo a que os mesmos apresentem leveza, segurança, eficiência no custo de produção e, mais especificamente em determinados componentes, no conforto. Com a necessidade de responder a estes requisitos, a aplicação deste tipo de técnicas no setor automóvel tem crescido vertiginosamente com o decorrer dos anos. A eletrificação e o aumento dos sistemas eletrónicos inteligentes, já normalizados e popularizados em todo o tipo de veículos e modelos, refletem uma tendência crescente na massa total dos veículos de passageiros e, respetivamente, da sua inércia. A redução da massa total de um veículo permite melhorias globais em vários aspetos preponderantes no seu funcionamento, nomeadamente:

- Redução de consumos de energia;
- Redução de emissões de gases poluentes;
- Melhoria de acelerações e desacelerações;
- Melhoria da dirigibilidade;
- Redução de desgaste de vários componentes, como pneus, travões, componentes da suspensão, do motor e da transmissão;
- Melhoria da segurança para os peões e para o próprio condutor e passageiros;
- Redução do desgaste das vias públicas rodoviárias (Matsimbi et al. 2021).

A aplicação de materiais com menor densidade tem revelado sucesso e crescimento consideráveis na integração na indústria automóvel. No entanto, estas soluções acarretam um aumento significativo do custo de produção e do material para o fabrico, razão pela qual muitos fabricantes optam por utilizar materiais mais convencionais e economicamente acessíveis e pela aplicação de técnicas de otimização computacional. Deste modo, é conseguida uma redução notável da massa em comparação com a massa inicial, mantendo o desempenho mecânico necessário ao bom funcionamento da peça face as restrições estruturais exigidas, evitando investimentos consideráveis em materiais menos usuais.

1.3 Objetivos

O objetivo do presente trabalho incide na realização de um estudo comparativo entre o desempenho dos métodos sem malha RPIM e NNRPIM face ao FEM, demonstrando simultaneamente a sua viabilidade na aplicação em algoritmos de otimização estrutural, nomeadamente na construção mecânica automóvel. Paralelamente, é estudado o desempenho de componentes construídos com base direta das soluções do algoritmo de otimização, através de técnicas de fabrico aditivo, que potencialmente permitem a construção de geometrias complexas incompatíveis com processos de fabrico mais convencionais, em comparação com *designs* populares do tipo de componente em estudo. O procedimento do trabalho pode ser descrito da seguinte forma:

- Realização de estudos preliminares, de modo a adquirir experiência no *software* utilizado e a efetuar uma comparação inicial entre possíveis diferenças nos métodos. Essa análise permite perceber qual a parametrização mais benéfica a utilizar na futura aplicação do algoritmo de otimização na geometria de análise;
- Execução do algoritmo de otimização no componente automóvel selecionado e averiguação das soluções obtidas;
- Desenho de modelos de manufatura prática e facilitada com base numa das soluções obtidas no algoritmo de otimização e com base em filosofias de remoção de material aplicadas usualmente na indústria para o tipo de componente em estudo;
- Simulações numéricas linear-estáticas dos modelos desenhados e averiguação dos resultados obtidos, nomeadamente de rigidez, rigidez específica e tensão de Von Mises máxima;
- Preparação de modelos físicos das soluções numéricas obtidas, incluindo a conversão de ficheiros do FEMAS (*Finite Element and Meshless Method Analysis Software*), *software* de análise estrutural numérica desenvolvido por Belinha 2014, para ficheiro .stl para o respetivo fabrico aditivo de topologias obtidas no algoritmo de otimização, através de uma rotina previamente desenvolvida;

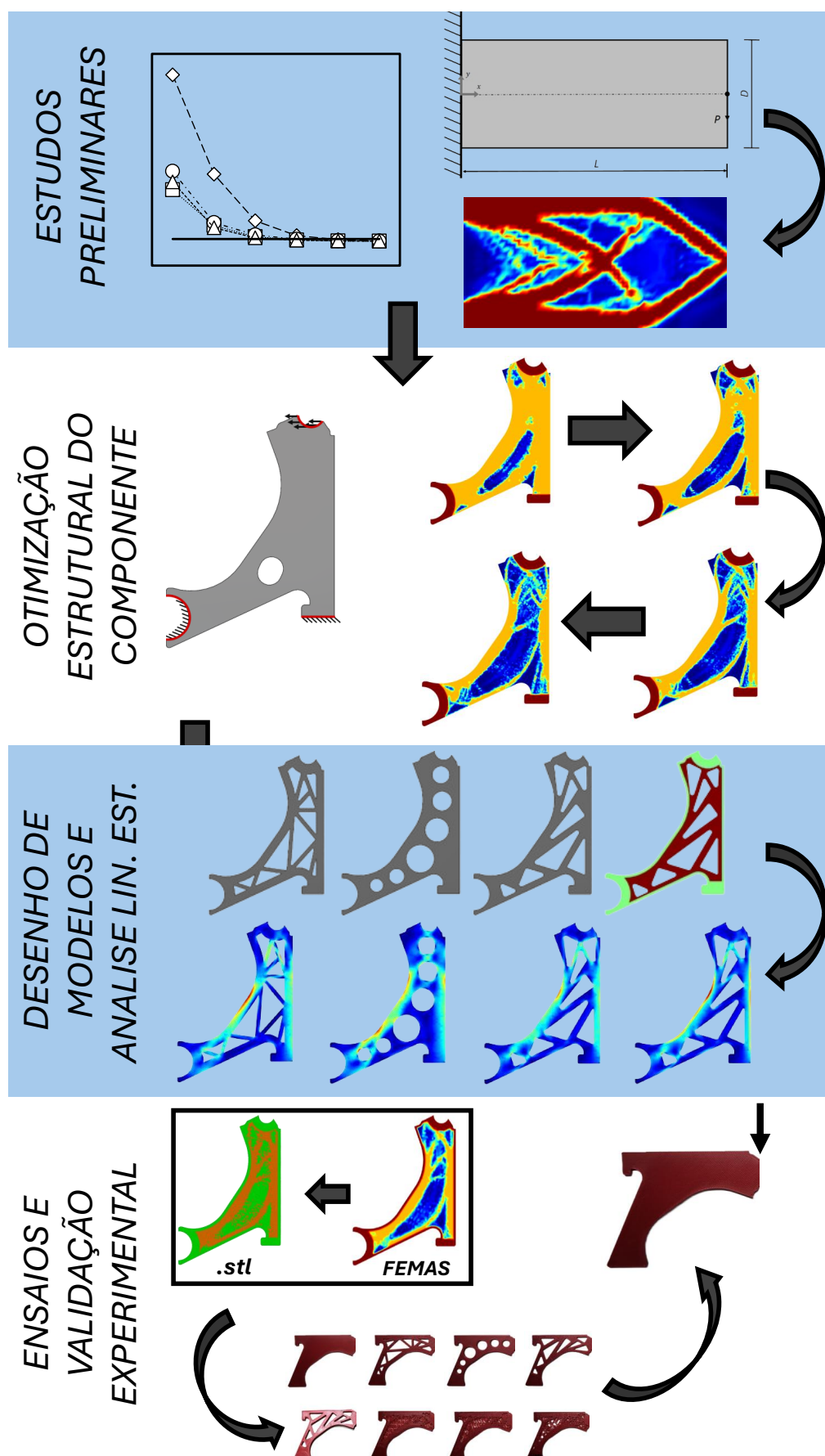


FIGURA 1.1: Esquema da metodologia proposta para a dissertação

1.4 Estrutura

A estrutura da dissertação divide-se em sete capítulos principais: Introdução (1), Métodos Sem Malha (2), Otimização Estrutural (3), Fabrico Aditivo (4), Simulação Numérica (5), Estudo Experimental (6) e Conclusão (7).

No Capítulo 1, é efetuada uma introdução concisa ao trabalho proposto, contextualizando os temas abordados na dissertação. São descritos os motivos pelos quais um estudo aprofundado na área da otimização estrutural pode beneficiar a evolução da construção mecânica na indústria automóvel, e é apresentada a estrutura geral da dissertação.

No Capítulo 2, são revistos vários conteúdos referentes à área da mecânica computacional, onde é analisado o estado de arte do tema e são discretizados o RPIM e o NNRPIM. Como complemento à compreensão dos métodos numéricos estudados, são revistos alguns conteúdos base da mecânica dos sólidos.

No Capítulo 3, é realizada uma revisão dos conteúdos base da otimização estrutural, abordando metodologias como a otimização por interpolação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), otimizações evolucionárias ESO e BESO, e o conceito de remodelação óssea, base do algoritmo de otimização utilizado. São apresentados estudos que comprovam o sucesso da combinação de otimização estrutural com métodos sem malha e com componentes integrados num contexto automóvel, justificando a sua relevância e demonstrando os resultados obtidos na investigação corrente.

No Capítulo 4, é efetuado um breve estado de arte do fabrico aditivo (FA), contextualizando a sua importância e o seu crescimento na indústria automóvel. São demonstradas técnicas de otimização apresentadas na literatura atual de componentes fabricados com recurso ao FA, nomeadamente de estruturas celulares com gradiente funcional (FGCS).

No Capítulo 5, é iniciado o trabalho prático da dissertação. São executados os estudos preliminares, de modo a perceber a viabilidade e distinções entre os métodos numéricos aplicados e a parametrização ideal a aplicar no algoritmo de otimização do componente automóvel. De seguida, é executado o próprio algoritmo num braço de suspensão, e são obtidas e avaliadas as soluções calculadas. A partir das melhores soluções, são construídos modelos de manufatura prática baseados em *designs* comuns para o tipo de componente utilizado, e é feita uma análise linear-estática dos próprios.

No Capítulo 6, é descrito o procedimento para a construção de modelos físicos baseados nos modelos desenhados e testados numericamente no capítulo prévio, e em três soluções retiradas diretamente do algoritmo de otimização, recorrendo a estruturas celulares de gradiente funcional.

No Capítulo 7, são apresentadas as conclusões, as sugestões para futuros trabalhos que poderiam complementar os dados obtidos na dissertação, e as observações finais.

Capítulo 2

Métodos Sem Malha

2.1 Estado de Arte

Nas últimas três décadas, os métodos sem malha emergiram como uma alternativa viável ao FEM, despertando o interesse na comunidade científica dedicada à mecânica computacional (Gwinner e Stephan 2018). A investigação nesta área tem registado um crescimento substancial ao longo dos anos. A Fig. 2.1 representa, graficamente, a evolução do número de publicações que abordam métodos sem malha na base de dados de literatura científica *Web Of Science*, desde os trabalhos seminais do tema até ao ano atual.

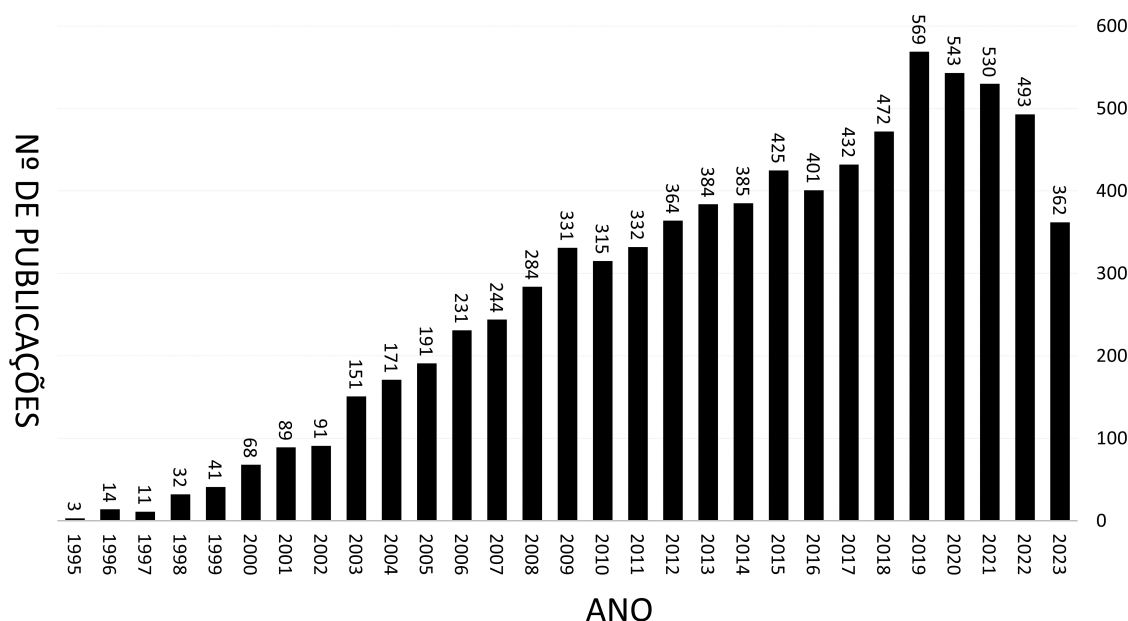


FIGURA 2.1: Número de publicações de métodos sem malha por ano (Pesquisa do termo "Meshless Method", no *Web Of Science*)

O primeiro método sem malha aplicado no contexto de mecânica computacional foi o DEM (*Diffuse Element Method*), desenvolvido por Nayroles, Touzot e Villon 1992, método este que utilizava as funções aproximadoras do método dos mínimos quadrados móveis, mais conhecido como MLS (*Moving Least Square*), na construção de funções de aproximação, técnica sugerida por Lancaster e Salkauskas 1981 (Dinis, Natal Jorge e Belinha 2007; Poiate et al. 2011). Mais tarde, Belytschko melhorou o método previamente referido e desenvolveu um dos métodos sem malha mais populares: o Método de Galerkin Sem Elementos, ou *Element Free Galerkin Method* (EFGM)

(Belytschko, Lu e L. Gu 1994). Ao longo do tempo, foram também desenvolvidos outros métodos, como o Método Sem Malha Local de Petrov-Galerkin (MLPG) (Atluri e Zhu 1998), o Método de Pontos Finitos (FPM) (Oñate et al. 1996) e o Método de Esferas Finitas (FSM) (De e Bathe 2001). Embora estas técnicas tenham sido empregues com sucesso em diversos problemas no campo da mecânica computacional, todas elas apresentam limitações. A utilização de funções de aproximação em detrimento das funções de interpolação convencionais apresenta um problema preponderante: a dificuldade na imposição das condições de fronteira essenciais, decorrente da ausência da propriedade delta de Kronecker nas funções de aproximação. Na tentativa de resolução deste problema, surgiram novos métodos sem malha, que fazem uso da interpolação por pontos (ou PIM, *Point Interpolation Method*). O PIM revela ser uma abordagem particularmente atrativa, uma vez que resolve eficazmente o problema demonstrado pelas funções de aproximação. O aprimoramento é alcançado por meio da construção de funções de forma que possuem a propriedade delta de Kronecker, tornando-as, por conseguinte, mais simples em comparação com métodos como o EFGM mencionado anteriormente. Adicionalmente, o PIM simplifica o processo de obtenção das derivadas das funções de forma. Entretanto, o PIM evoluiu com a incorporação de funções de base radial para a resolução de equações diferenciais parciais (Belinha 2014; J. Wang e Liu 2002).

Os métodos sem malha surgem como uma alternativa promissora ao FEM na análise estrutural de problemas complexos. A sua principal vantagem reside na capacidade de superar as limitações do FEM em relação à precisão dos resultados para deformações elevadas, decorrentes da distorção dos elementos da malha. Essa distorção pode afetar significativamente o desempenho da análise e a fiabilidade dos resultados. Os métodos sem malha contornam o problema uma vez que, ao contrário do FEM, empregam uma distribuição arbitrária de nós, aproximando as funções de campo com base em domínios de influência ao invés de elementos. Nos métodos sem malha, os domínios de influência podem e devem sobrepor-se, ao contrário dos elementos no caso do FEM.

Devido à sua capacidade de lidar com fronteiras de domínio transientes sem a necessidade de remalhamento, os métodos sem malha consolidam-se como uma alternativa mais precisa ao FEM em áreas como a mecânica de fratura e de impacto. No FEM, as fronteiras transientes exigem remalhamento frequente, o que pode levar a perdas de precisão e aumentar significativamente o custo computacional. Em contraste, os métodos sem malha não possuem essa limitação, permitindo análises mais precisas e eficientes em problemas com fronteiras dinâmicas (Belinha 2014).

2.1.1 Método de Interpolação Pontual Radial - RPIM

O RPIM é um método sem malha que utiliza interpoladores radiais pontuais (RPI), uma técnica numérica baseada em métodos de interpolação pontuais (PIM) que combinam funções polinomiais e radiais (Liu e Y. Gu 2001). As técnicas de aproximação por funções de base radial foram inicialmente desenvolvidas para ajuste de curvas e posteriormente aplicadas a equações diferenciais parciais, principalmente no trabalho de Kansa 1990, cujo algoritmo se assemelhava ao Método das Diferenças Finitas (FDM). A utilização de funções radiais no PIM visa eliminar singularidades que possam surgir no método sem malha, permitindo a construção de funções de forma com bom desempenho. Adicionalmente, a propriedade delta de Kronecker facilita a imposição das condições de fronteira e a obtenção das funções de forma (e suas derivadas parciais) no PIM, tornando o problema numericamente mais simples e menos complexo em comparação com métodos aproximadores (J. Wang e Liu 2002). A formulação polinomial do PIM

oferece soluções numéricas mais precisas, porém contém um custo computacional associado mais elevado em decorrência de sua maior complexidade.

2.1.2 Método de Interpolação Pontual Radial com Vizinhos Naturais - NNRPIM

O NNRPIM surge do resultado da combinação do conceito geométrico dos vizinhos naturais, mais conhecido como *Natural Neighbors* na literatura, com o RPI (Belinha 2014). Ao contrário do RPIM, este método não define a conectividade entre nós por meio de domínios de influência. Ao invés, utiliza células de influência, as quais são determinadas pela técnica do Diagrama de Voronoï (Voronoi 1908), complementado com a Triangulação de Delaunay (Ito 2015).

O Diagrama de Voronoï é utilizado para gerar as células de influência a partir de um conjunto de nós não estruturados no domínio. A triangulação de Delaunay é então aplicada para criar uma malha de fundo com dependência nodal, que é posteriormente utilizada na integração das funções de interpolação do NNRPIM. O NNRPIM distingue-se dos métodos sem malha convencionais pela sua natureza verdadeiramente sem malha. A integração da malha neste método depende unicamente da distribuição nodal, dispensando a necessidade de uma malha pré-definida, em detrimento dos outros métodos sem malha (Belinha 2014).

Recentemente desenvolvido, o NNRPIM é um método sem malha que já encontrou aplicação em diversos contextos científicos e de engenharia no campo da mecânica computacional. Esta técnica foi empregue com sucesso em análises estáticas estruturais de placas isotrópicas e ortotrópicas e na formulação de cascas 3D para placas laminadas (Dinis, Natal Jorge e Belinha 2010), e também em problemas de análise dinâmica (Dinis, Natal Jorge e Belinha 2011).

2.2 Procedimento dos Métodos Sem Malha

Em consonância com a maioria dos métodos de discretização numérica baseados em nós, a maior parte dos métodos sem malha respeitam o seguinte procedimento:

1. Inicialmente, o problema geométrico é devidamente estudado e o domínio estabelecido;
2. De seguida, as condições de fronteira são identificadas (Fig. 2.2 a));
3. Por fim, o problema domínio e a fronteira são numericamente discretizados por um conjunto de nós, seguindo uma distribuição regular ou irregular (Fig. 2.2, b) e c)) (Belinha 2014).

O desempenho dos métodos numéricos é consideravelmente influenciado pela densidade e distribuição espacial dos nós na discretização. Encontrar o equilíbrio ideal entre a precisão dos resultados e o custo computacional é fundamental. Uma distribuição nodal desequilibrada do domínio pode levar à perda de precisão nos resultados. O refinamento localizado da malha nodal é habitualmente efetuado em regiões que apresentam: concentrações de tensões previstas, zonas de abertura de fendas, áreas de aplicação de condições de fronteira, entre outras. (Fig. 2.2 c)) (Belinha 2014).

Após a discretização é construída uma malha de integração, sendo a mesma dependente (NNRPIM) ou independente (RPIM) da distribuição nodal. A malha é subsequentemente utilizada na integração das equações que regem o fenómeno físico. Uma das técnicas de integração mais amplamente adotadas trata-se da construção de uma malha de integração complementada pela aplicação da quadratura de Gauss-Legendre. Porém, no caso dos métodos sem malha, outras abordagens são normalmente utilizadas, como a aplicação do conceito de vizinhos naturais complementado com diagramas de Voronoï, em que a distribuição dos pontos de integração dá-se através da subdivisão ordenada das células de Voronoï criadas.

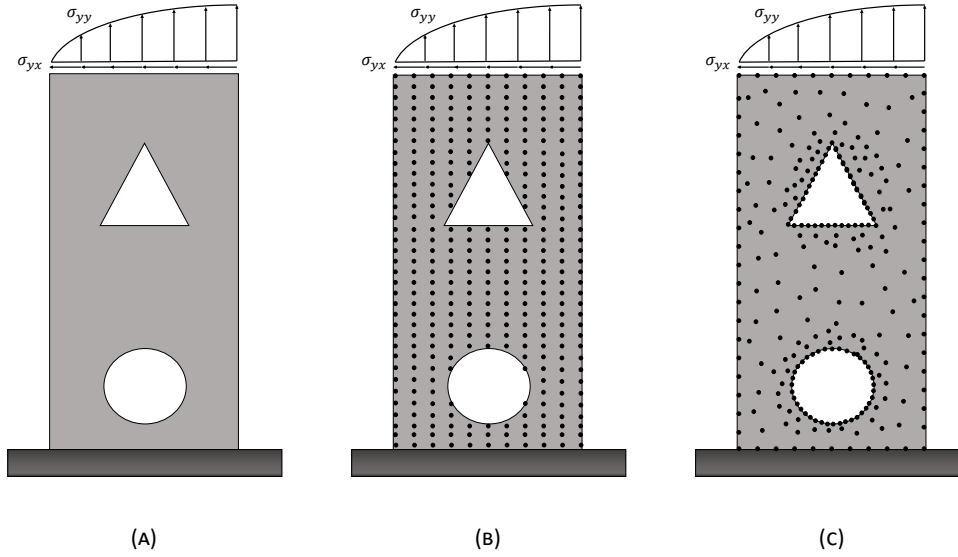


FIGURA 2.2: a) Domínio sólido b) Exemplo de discretização nodal regular c) Exemplo de discretização nodal irregular

Com a malha de integração criada, o passo seguinte consiste em estabelecer a conectividade nodal. No caso do FEM, a conectividade nodal é definida através dos elementos previamente definidos. Como mencionado anteriormente na Secção 2.1, os métodos sem malha não fazem uso de elementos, mas sim de domínios de influência, no caso do RPIM, e de células de influência, no caso do NNRPIM, sendo a conectividade nodal estabelecida através da sobreposição dos mesmos.

Por fim, é estabelecido o sistema de equações, que é transformado numa matriz global, e são resolvidas as equações e encontrada a solução (Belinha 2014). Na Fig. 2.3, é observado um esquema comparativo das formulações dos métodos sem malha em relação ao FEM.

2.3 Conceitos Geométricos Aplicados ao NNRPIM

A presente secção destina-se a descrever os conceitos geométricos fundamentais para a formulação do NNRPIM, a saber: Diagrama de Voronoi, Triangulação de Delaunay e Vizinhos Naturais.

2.3.1 Diagrama de Voronoï

O diagrama de Voronoï de um conjunto de nós discretizados é obtido através da utilização do conceito geométrico dos vizinhos naturais, introduzido por Sibson 1981.

Considerando o conjunto de nós $\mathbf{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, que discretiza o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \in \Omega$. O diagrama de Voronoï de $\mathbf{N}$ trata-se da partição do domínio espacial discretizado por $\mathbf{X}$, em V_i . Cada sub-região V_i está associada a um nó n_i de forma a que qualquer ponto dentro de V_i se encontre mais perto de n_i do que de qualquer outro nó $n_j \in \mathbf{N} \wedge j \neq i$ (Belinha 2014). O conjunto de células de Voronoï $\mathbf{V}$ define o diagrama de Voronoï, sendo este: $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$. A célula de Voronoï pode ser definida por:

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{x}_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i\| < \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \forall j \neq i\} \quad (2.1)$$

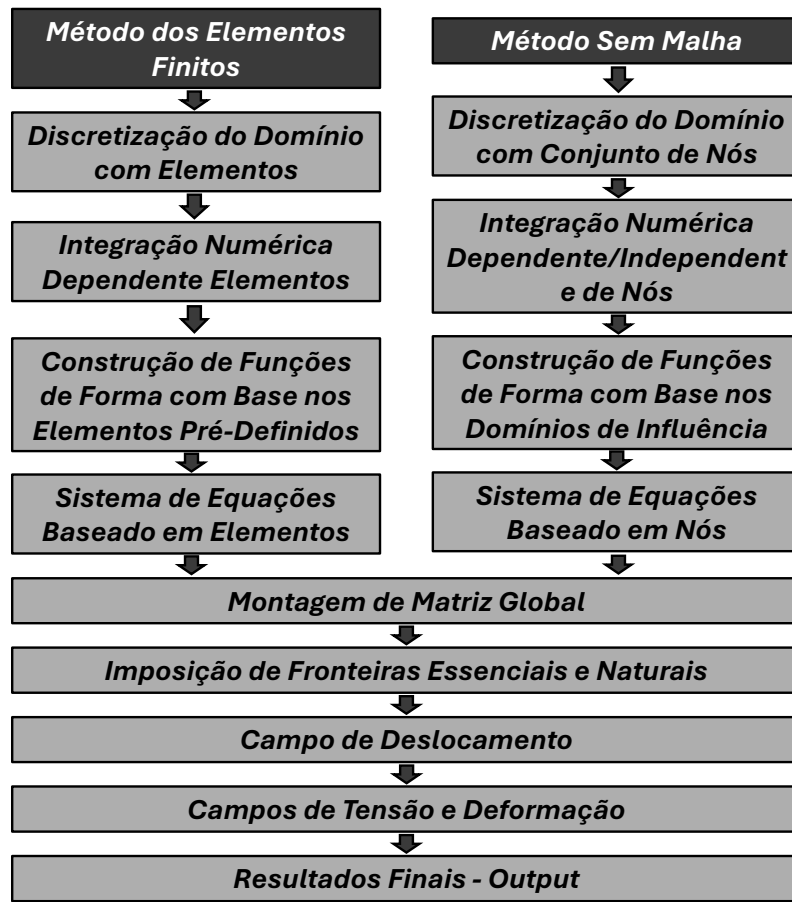


FIGURA 2.3: Esquema comparativo de fluxograma da formulação do FEM e dos métodos sem malha

, sendo $\mathbf{x}_i$ o ponto de interesse. As aplicações dos diagramas de Voronoï estendem-se a vários tipos de aplicações, das ciências naturais até à engenharia (Belinha 2014). De modo a permitir uma compreensão e visualização simplificada do conceito geométrico, a seguir é feita a sua análise num domínio bi-dimensional.

Considerando o conjunto de nós representados na Fig. 2.4, e definindo como objetivo a obtenção da célula de Voronoï V_0 do nó n_0 . Assim, os nós da Fig. 2.4 são escolhidos como potenciais vizinhos do nó n_0 . Um dos nós é escolhido como o vizinho potencial, e assim, o seguinte vetor é calculado:

$$\mathbf{u}_{40} = \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_4)}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_4\|} \quad (2.2)$$

Sendo $\mathbf{u}_{40} = \{u_{40}, v_{40}, w_{40}\}$. Com o vetor normal $\mathbf{u}_{40}$, é possível definir o plano π_{40} :

$$u_{40} \cdot x + v_{40} \cdot y + w_{40} \cdot z = (u_{40} \cdot x_4 + v_{40} \cdot y_4 + w_{40} \cdot z_4) \quad (2.3)$$

Quando definido o plano π_{40} , é realizado um processo de seleção dos vizinhos naturais do nó n_0 , definindo que todos os nós que não respeitarem a seguinte condição, são eliminados da possibilidade de serem definidos como vizinhos naturais de n_0 (Belinha 2014):

$$u_{40} \cdot x + v_{40} \cdot y + w_{40} \cdot z \geq (u_{40} \cdot x_4 + v_{40} \cdot y_4 + w_{40} \cdot z_4) \quad (2.4)$$

Exemplificando o processo com a Fig. 2.4, é possível verificar o seguinte:

- Em (b), o nó n_8 é rejeitado como vizinho natural do nó n_0 ;
- Em (c) e (d), o processo é repetido para cada nó do conjunto de nós considerado inicialmente;
- Com isto, é possível rejeitar os nós n_7, n_8 e n_9 como vizinhos naturais do nó n_0 .
- Por fim, cada um dos 6 nós considerados vizinhos naturais de n_0 respeitam as 6 condições seguintes (Belinha 2014):

$$\begin{cases} u_{10} \cdot x + v_{10} \cdot y + w_{10} \cdot z \geq u_{10} \cdot x_1 + v_{10} \cdot y_1 + w_{10} \cdot z_1 \\ u_{20} \cdot x + v_{20} \cdot y + w_{20} \cdot z \geq u_{20} \cdot x_2 + v_{20} \cdot y_2 + w_{20} \cdot z_2 \\ \vdots \\ u_{60} \cdot x + v_{60} \cdot y + w_{60} \cdot z \geq u_{60} \cdot x_6 + v_{60} \cdot y_6 + w_{60} \cdot z_6 \end{cases} \quad (2.5)$$

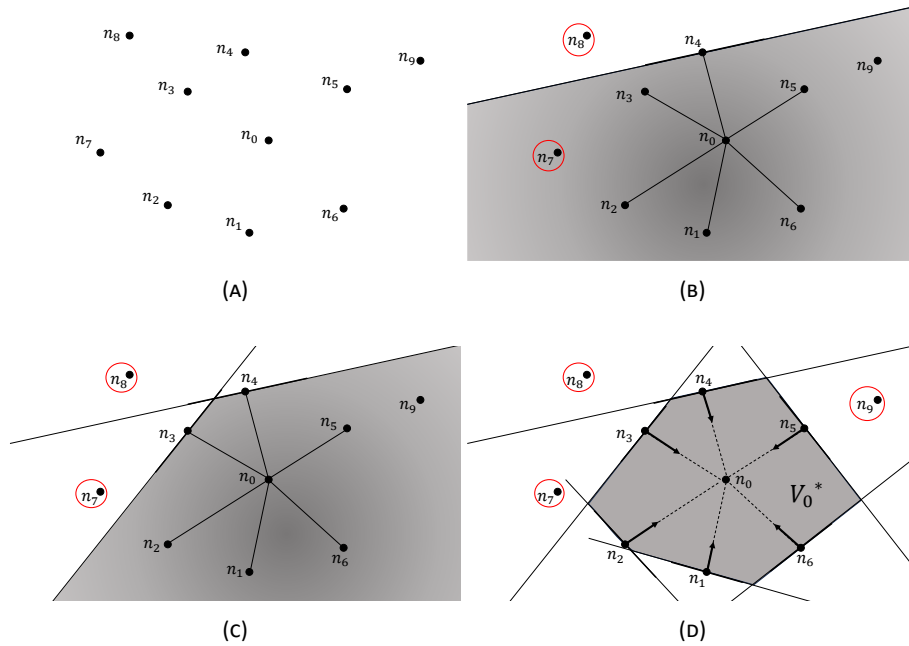


FIGURA 2.4: a) Conjunto inicial de nós de potenciais vizinhos naturais do nó n_0
 b) Primeiro plano de seleção c) Segundo plano de seleção d) Célula de Voronoï primordial, contendo apenas os vizinhos naturais do nó n_0

Por definição, apenas os nós no perímetro do domínio final obtido V_0^* , podem ser realmente considerados como nós vizinhos, como representado na Fig. 2.4 d). A célula de Voronoï V_0 é determinada como indicado na Fig. 2.4, onde é possível observar a célula de Voronoï V_0 na sua forma homotética do domínio auxiliar V_0^* , sendo (Belinha 2014):

$$d_{0i}^* = \frac{d_{0i}}{2} = \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i\|}{2} \quad (2.6)$$

2.3.2 Triangulação de Delaunay

A triangulação de Delaunay é implementada como complemento geométrico do diagrama de Voronoï. Na medida em que o diagrama de Voronoï discretiza o domínio do problema através da conectividade nodal, a triangulação de Delaunay é responsável pela construção da malha de integração de fundo. Os triângulos são construídos com a conexão dos nós cujas células de Voronoï contém fronteiras em comum, como demonstrado na Fig. 2.5. Uma propriedade importante que deve ser considerada é o denominado "critério da circunferência circunscrita vazia", que descreve o seguinte:

Se um conjunto de nós $\mathbf{N}_t = \{n_j, n_k, n_l\} \in \mathbb{N}$ forma um triângulo de Delaunay, então a circunferência circunscrita formada pelo triângulo N_t não contém mais nós do conjunto nodal global N . No contexto de aplicação da interpolação dos vizinhos naturais, estes círculos são denominados de "circunferências circunscritas de vizinhos naturais", cujo seu centro é o vértice da respectiva célula de Voronoï. A propriedade é apresentada e esquematizada na Fig. 2.5.

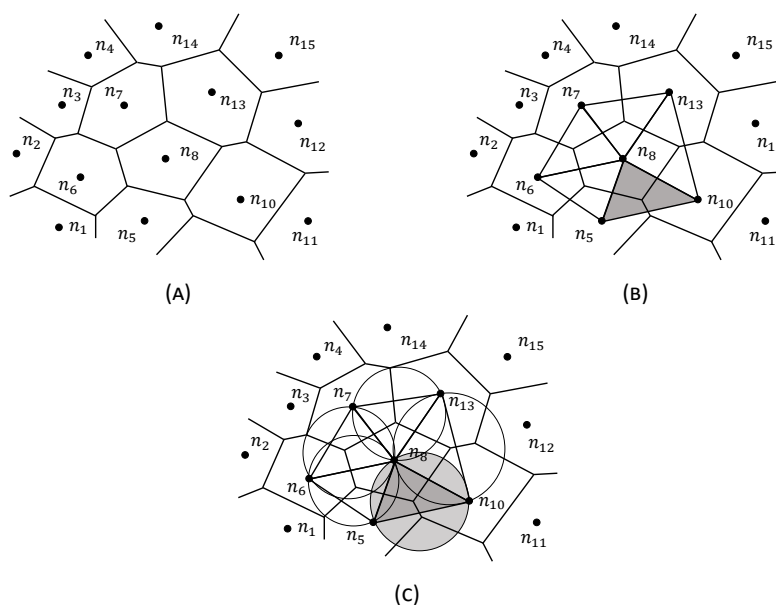


FIGURA 2.5: a) Diagrama de Voronoï inicial b) Triangulação de Delaunay c) Circunferência circunscrita de vizinhos naturais

2.4 Integração Numérica

Nesta secção, são apresentados e descritos os esquemas de integração mais utilizados na aplicação do RPIM e do NRPIM.

A integração numérica exige um estudo aprofundado para compreender os procedimentos subjacentes aos métodos sem malha. Desde os primeiros estudos, os investigadores têm enfrentado o desafio de que a integração numérica nos métodos sem malha tende a ser mais complexa do que a integração numérica no FEM (Belinha 2014). A parametrização de todo o processo de integração deve ser meticulosa e bem fundamentada, dado que a integração representa uma parte significativa do custo computacional de uma análise. Conforme discutido na Secção 2.2, é essencial determinar uma densidade de discretização e uma malha de fundo que atendam às exigências de precisão e eficiência computacional do utilizador. Com o avanço

dos estudos sobre métodos sem malha, diversos autores propuseram relações, baseadas em conhecimento experimental, entre o número total de nós do campo e o número total de nós de integração utilizados na discretização do domínio-problema (Belinha 2014).

De seguida, serão apresentados dois esquemas de integração: a quadratura de Gauss-Legendre e a integração com base nodal.

2.4.1 Integração da Quadratura de Gauss-Legendre

Este tipo de esquema de integração apresenta vasta aplicação no FEM, devido à sua simplicidade e eficiência. Na integração da quadratura de Gauss-Legendre, o domínio sólido é dividido numa grelha. Cada célula da grelha é preenchida com pontos de integração, respeitando a regra da quadratura de Gauss-Legendre (Belinha 2014). Para melhor compreensão do funcionamento do esquema, uma ilustração é fornecida na Fig. 2.6.

O quadrilátero inicial (Fig. 2.6 (a)), é transformado num quadrado isoparamétrico (Fig. 2.6 (b)), onde de seguida os pontos de quadratura de Gauss-Legendre são distribuídos no interior do quadrado, utilizando uma quadratura de, no caso apresentado, 2×2 . De seguida, com a utilização de funções de interpolação paramétricas são obtidas as coordenadas cartesianas dos pontos de quadratura no quadrilátero original (Fig. 2.6 (c)).

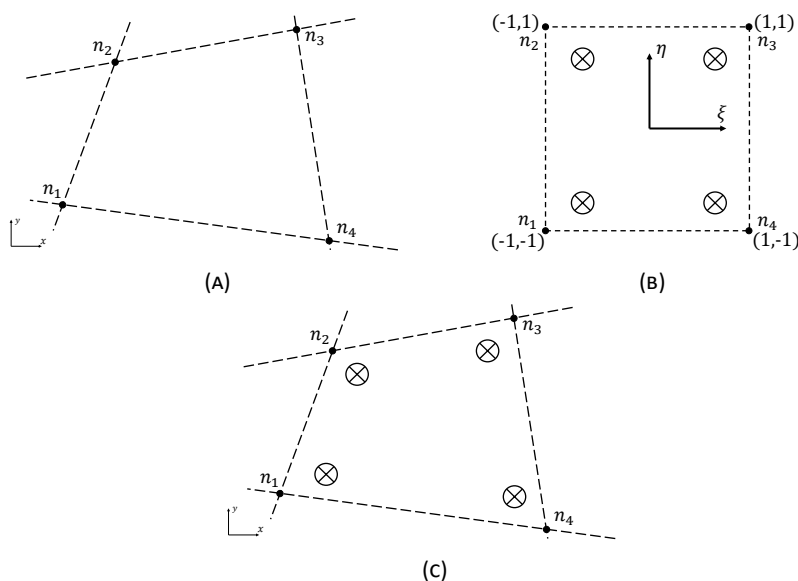


FIGURA 2.6: a) Quadrilátero inicial retirado de uma célula da grelha b) Transformação do quadrilátero inicial na forma de um quadrado isoparamétrico, e aplicação da regra do ponto de quadratura c) Retorno à forma do quadrilátero inicial

O peso de integração de cada ponto de quadratura pode ser obtido multiplicando o peso isoparamétrico do ponto de quadratura com o inverso da matriz determinante jacobiana da respetiva célula da grelha. Caso a grelha seja completamente ajustada com o domínio sólido, não existe a necessidade de pós-tratamento da mesma (Fig. 2.7 (a)). Caso contrário, se a grelha for maior que o domínio sólido, todos os pontos de integração fora do domínio devem ser removidos (Fig. 2.7 (b)) (Belinha 2014).

Uma malha de integração completamente ajustada ao domínio sólido contém um custo computacional mais elevado. Porém, em geral, também se traduz em resultados mais precisos e mais estáveis (Belinha 2014).

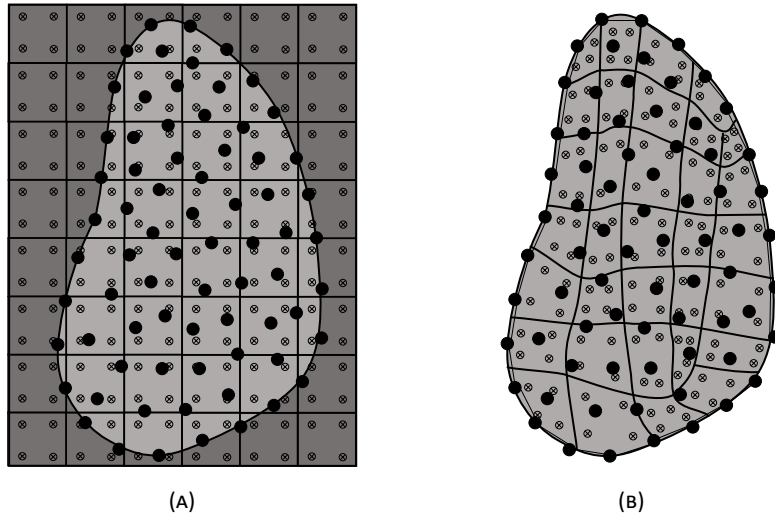


FIGURA 2.7: a) Malha de integração Gaussiana geral b) Malha de integração Gaussiana ajustada

De modo a aplicar a integração numérica, considera-se uma função $F(\mathbf{x})$ definida no domínio Ω . A integração global pode ser descrita num somatório, seguindo a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} F(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i F(\mathbf{x}_i) \quad (2.7)$$

onde $\mathbf{x}_i$ é a localização de cada ponto de integração Gaussiano e $\tilde{w}_i$ o peso do ponto de integração $\mathbf{x}_i$.

2.4.2 Integração de Base Nodal

O esquema de integração de base nodal é o método de integração utilizado no NNRPIM, o qual recorre unicamente à malha de nós para construir uma malha de integração de fundo. Um método sem malha que empregue esta técnica de integração pode ser categorizado como verdadeiramente sem malha, sendo que não necessita de informação adicional, à exceção da localização dos nós, para estabelecer a conectividade nodal, determinar os pontos de integração ou construir as funções de forma (Belinha 2014). Para facilitar a compreensão, o esquema de integração será apresentado em uma aplicação bidimensional.

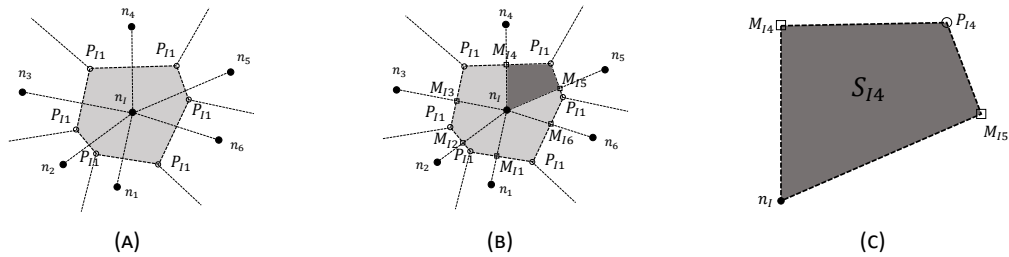


FIGURA 2.8: a) Célula de Voronoï e os respetivos pontos de integração P_{Ii} b) Pontos medianos M_{Ii} e os respetivos quadriláteros gerados c) Quadrilátero $n_I M_{I4} P_{I4} M_{I5}$

Considerando um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, discretizado por um conjunto de nós $\mathbf{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$. Os nós $\mathbf{N}$ são irregularmente distribuídos, sendo as suas coordenadas $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \in \mathbb{R}$. Os vizinhos naturais do nó n_I , definidos pelo conjunto nodal finito $\mathbf{N}_i = \{n_1, n_2, \dots, n_6 \subset \Omega\}$ (Fig. 2.8 a.), permitem construir a célula de Voronoï V_I do nó n_I e determinar os vértices P_{Ii} do polígono definido por V_I (Fig. 2.8 a.). De seguida, são obtidos os pontos medianos M_{Iii} entre n_I e cada um dos nós vizinhos $n_i \subset N_I$ (Fig. 2.8 b.). Assim, as células de Voronoï são divididas em n quadriláteros sub-células, S_{Ii} , sendo n o número de vizinhos naturais do nó n_I . Caso o campo de nós N esteja distribuído regularmente, as células de Voronoï passam a estar divididas em sub-células triangulares, e não quadriláteros.

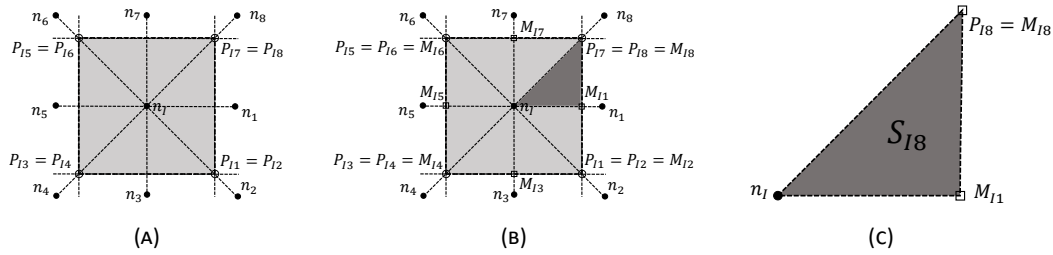


FIGURA 2.9: a) Célula de Voronoï e os respectivos pontos de integração P_{Ii} b) Pontos medianos M_{Ii} e os respectivos quadriláteros gerados c) Triângulo $n_I P_{I8} M_{I1}$

Com a divisão de cada célula de Voronoï em sub-células, é possível distribuir dentro de cada quadrilátero ou triângulo gerado os pontos de integração de Gauss, através da técnica de integração já documentada na Secção 2.4.1. É possível utilizar ordens de integração variadas, o que irá influenciar no número de pontos de integração por sub-célula.

2.5 Conectividade Nodal

A conectividade nodal no FEM é assegurada a partir da predefinição da malha de elementos finitos. Nos métodos sem malha, existe a necessidade de determinar a conectividade após terminada a distribuição nodal. A presente secção descreve o procedimento de conectividade nodal realizado no RPIM e no NNRPIM.

2.5.1 Conectividade Nodal no RPIM - Domínios de Influência

No RPIM, a conectividade nodal é estabelecida por meio da sobreposição dos domínios de influência em cada nó. Os mesmos são definidos pela busca por nós inseridos em uma área ou volume (dependendo da dimensionalidade do problema). Essa abordagem é amplamente utilizada em diversos métodos sem malha devido à sua simplicidade e baixo custo computacional. A importância do tamanho e da forma dos domínios de influência no desempenho do RPIM deve ser considerada para garantir a obtenção de soluções precisas e satisfatórias (Belinha 2014). Embora a definição de uma dimensão única não seja a estratégia mais adequada, a literatura de Belinha 2014 sugere a adoção de uma dimensão de referência fixa, expressa pela seguinte equação:

$$d_{ref} = k \cdot h_{av} \quad (2.8)$$

, sendo h_{av} a média de nós encontrados na vizinhança de $\mathbf{x}_I$ e k um parâmetro adimensional escolhido pelo utilizador, que deve variar entre 1,5 e 2,5. Em análises bi-dimensionais, são normalmente adotados dois tipos de formas: domínios de influência circulares e domínios

de influência retangulares (Fig. 2.10). Depois de definida a forma geométrica a utilizar, são calculadas as dimensões dadas pelas formas, correspondendo às arestas d_x e d_y no caso da forma retangular ou a d_R no caso da forma circular. De seguida, para cada ponto x_i , são identificados os nós que se encontram no interior do domínio de influência, definido pela forma geométrica e dimensão seleccionada. Dependendo da distribuição nodal, é normal que, no caso de domínios de influência de tamanho espacial fixo, alguns domínios de influência conttenham mais nós que outros domínios de influência. Esta observação é bastante comum quando se compara o número de nós dos domínios de influencia de pontos de integração perto da fronteira física do problema com os domínios de influência de pontos de integração situados no interior do sólido. Apesar de, como já mencionado, a aplicação de domínios de influência de tamanho fixo ser a mais utilizada, a utilização de domínios de influência de tamanho variável uniformiza a conectividade nodal e a complexidade das funções de forma ao longo do domínio (Belinha 2014).

2.5.2 Conectividade Nodal no NRPIM - Células de Influência

Foi proposto, por Belinha 2014 uma nova técnica para estabelecer domínios de influência. Esta técnica determina a conectividade nodal a partir da discretização nodal já apresentada na Secção 2.3, isto é, é reaproveitado o diagrama de Voronoï para a imposição da conectividade nodal. Como a técnica é dependente dos conceitos geométricos anteriormente mencionados, os domínios de influência são denominados de "células de influência". A abordagem utilizada é semelhante à metodologia apresentada na Sub-subsecção 2.5.1, na medida em que a conectividade nodal é dada a partir da sobreposição dos domínios de influência, neste caso as células de influência, estando a diferença na utilização de um método distinto de procura dos nós pertencentes aos domínios de influência: o diagrama de Voronoï.

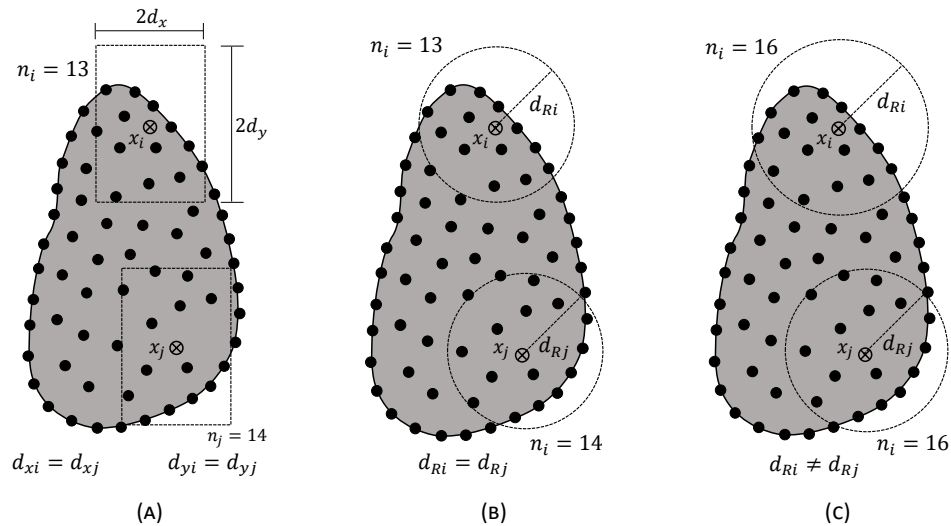


FIGURA 2.10: (a) Domínios de influência com forma fixa (retangular) e tamanho constante (b) Domínios de influência com forma fixa (circular) e tamanho constante (c) Domínios de influência com forma fixa e tamanho variável

2.6 Funções de Forma de Interpolação Pontual Radial

De modo a melhorar o desempenho e eficiência das funções de forma, várias técnicas foram desenvolvidas. Como já mencionado na Secção 2.1, vários métodos sem malha fazem uso

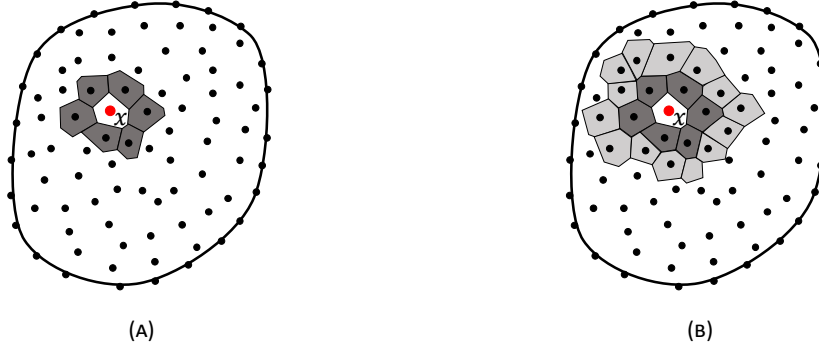


FIGURA 2.11: (a) Célula de influência de primeiro grau (b) Célula de influência de segundo grau

de técnicas de construção de funções de aproximação, nomeadamente o EFGM e o MLPG. A maior desvantagem que a utilização de funções de aproximação apresenta é a complexificação da imposição das condições de fronteira devido à falta da propriedade delta de Kronecker. Deste modo, o PIM surgiu como uma técnica mais adequada, devido à utilização de funções de interpolação que utilizam a propriedade anteriormente mencionada (Belinha 2014).

As funções de forma permitem a interpolação de funções de campos e a obtenção de soluções numéricas. Ambos os métodos anteriormente apresentados, o RPIM e o NNRPIM fazem uso do RPI para a construção das funções de forma.

Considerando uma função u_x , definida no domínio Ω , discretizado por um conjunto de nós $\mathbf{N}$, e assumindo que apenas os nós incluídos na célula de influência do ponto de interesse $\mathbf{x}_I$ surtem efeito em $u(\mathbf{x}_I)$. O valor da função no ponto $\mathbf{x}_I$ pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$u(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_I) \cdot a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_I) \cdot b_j(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I), \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}_j(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

, em que r_i representa uma função de base radial, n o número de nós no interior da célula de influência $\mathbf{x}_I$ e $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}_j(\mathbf{x}_I)$ coeficientes não constantes de $R_i(\mathbf{x}_I)$ e $p_j(\mathbf{x}_I)$, respetivamente. Os monomiais da base polinomial são definidos por $p_j(\mathbf{x}_I)$, sendo m o número da base monomial. Os vetores da Equação 2.9 são definidos como:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I) = \{R_1(\mathbf{x}_I), R_2(\mathbf{x}_I), \dots, R_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) = \{p_1(\mathbf{x}_I), p_2(\mathbf{x}_I), \dots, p_m(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}_I) = \{a_1(\mathbf{x}_I), a_2(\mathbf{x}_I), \dots, a_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{b}^T(\mathbf{x}_I) = \{b_1(\mathbf{x}_I), b_2(\mathbf{x}_I), \dots, b_m(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.13)$$

Várias funções de base radial podem ser implementadas, e várias foram estudadas e desenvolvidas ao longo dos anos. Neste trabalho, será aplicada a função multiquadrática, proposta inicialmente por Hardy 1990 e afirmada como sendo o tipo de função de base radial

que proporciona os melhores resultados e mais frequentemente combinada com o RPI (Dinis, Natal Jorge e Belinha 2007). A função pode ser descrita da seguinte forma:

$$r_i(\mathbf{x}_I) = (d_{iI}^2 + (\gamma \cdot d_a)^2)^p \quad (2.14)$$

, em que d_{iI} representa a distância entre os nós do domínio e o ponto de interesse, dado por $d_{iI} = \sqrt{(x_I - x_i)^2 + (y_I - y_i)^2 + (z_I - z_i)^2}$, d_a um coeficiente representativo do tamanho do domínio/célula de influência e γ e p parâmetros a ser otimizados, em que a variação dos mesmos deve ser cuidadosamente estudada, uma vez que influencia no desempenho das funções de base radial, e assim na precisão dos resultados obtidos. Vários valores de γ e p podem ser assumidos. A literatura de Belinha 2014 recomenda, como ponto de partida, para o NNRPIM, valores de $\gamma = 0,0001$ e $p = 0,9999$, de modo a evitar os valores exatos de 0 e 1, respetivamente, que levam ao cálculo de matrizes singulares. Na literatura, são implementadas funções polinomiais de vários tipos para análises bi-dimensionais, como funções:

- Polinomiais de base nula - $\mathbf{x}^T = \{x, y\}$; $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{0\}$; $m = 0$;
- Polinomiais de base constante - $\mathbf{x}^T = \{x, y\}$; $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1\}$; $m = 1$;
- Polinomiais de base linear - $\mathbf{x}^T = \{x, y\}$; $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}$; $m = 3$;
- Polinomiais de base quadrática - $\mathbf{x}^T = \{x, y\}$; $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$; $m = 6$.

De modo a garantir a existência de apenas uma aproximação, é ainda adicionado o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{i=1}^n p_j(\mathbf{x}_i) \cdot a_i(\mathbf{x}_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.15)$$

Assim, é possível reformular a Equação 2.9 no seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

, onde $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{P}$ podem ser definidos da seguinte forma, considerando uma análise bidimensional:

$$\mathbf{u}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (2.17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (d_{11}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p & (d_{21}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p & \dots & (d_{n1}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p \\ (d_{12}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p & (d_{22}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p & \dots & (d_{n2}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (d_{1n}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p & (d_{2n}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p & \dots & (d_{nn}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

A matriz $\mathbf{G}$ apresentada na Equação 2.16 trata-se de uma matriz geométrica, traduzindo-se na igualdade $(d_{ij}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p = (d_{ji}^2 + (\gamma \cdot d_c)^2)^p$. Assim, com a resolução da Equação 2.16:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

e substituindo a Equação 2.9:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I), \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I)\} \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\varphi(\mathbf{x}_I), \psi(\mathbf{x}_I)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

O vetor de interpolação $\varphi(\mathbf{x}_I)$ e o produto vetorial $\psi(\mathbf{x}_I)$ são definidos da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I) = \{\varphi_1(\mathbf{x}_I) \ \varphi_2(\mathbf{x}_I) \ \cdots \ \varphi_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_I) = \{\psi_1(\mathbf{x}_I) \ \psi_2(\mathbf{x}_I) \ \cdots \ \psi_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.23)$$

$\psi(\mathbf{x}_I)$ é desprezado, uma vez que é multiplicado por um vetor nulo, como demonstrado na Equação 2.21. Por fim, é efetuada a interpolação de $\mathbf{u}$ para um ponto de interesse $\mathbf{x}_I$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{u}_s \quad (2.24)$$

2.7 Mecânica dos Sólidos

Considere-se um sólido com o domínio Ω com a superfície de fronteira Γ . As equações de equilíbrio podem ser expressas por:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad \in \Omega \quad (2.25)$$

, sendo ∇ o gradiente, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de Cauchy e $\mathbf{b}$ o vetor de força de corpo. A superfície de fronteira pode ser dividida em dois tipos de fronteiras:

- Fronteiras essenciais (Γ_u), dadas por $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$
- Fronteiras naturais (Γ_t), dadas por $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$

, onde $\bar{\mathbf{u}}$ corresponde ao deslocamento da fronteira essencial, Γ_u , $\bar{\mathbf{t}}$ a força de tração imposta na fronteira natural Γ_t e $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal ao domínio Ω . O tensor tensão de Cauchy é normalmente expresso na notação de Voigt, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T \quad (2.26)$$

A expressão que define a relação constitutiva do material é definida da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{c} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

, em que $\mu_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ e $\mu_2 = \frac{1-\nu}{2}$

O vetor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ é definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \quad (2.29)$$

As deformações são obtidas com base nos deslocamentos, através da relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \quad (2.30)$$

, sendo:

$$\mathbf{u} = \{u \quad v \quad w\} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (2.32)$$

2.7.1 Forma Fraca de Galerkin

A técnica de aproximação de soluções das equações diferenciais parciais depende da sua aplicação específica. No campo da mecânica computacional, as técnicas mais populares são as formas forte e fraca de Galerkin. A forma forte destaca-se por ser mais direta e mais precisa em determinados casos. Porém, a mesma pode representar uma dificuldade de implementação em casos mais complexos. Nestes casos, a forma fraca acaba por ser mais vantajosa, uma vez que produz um sistema de equações mais estável, e assim fornece resultados mais satisfatórios do que a forma forte. A partir da Equação 2.25, a forma fraca de Galerkin pode ser representada com a seguinte expressão:

$$\Psi = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2.33)$$

, podendo a Equação 2.33 ser simplificada:

$$\Psi = \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f}_b - \mathbf{f}_t) = 0 \quad (2.34)$$

, resultando na expressão:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t \quad (2.35)$$

, sendo $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez global, que após manipulação matricial, pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega = \sum_{i=1}^{n_Q} \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \cdot \widehat{w}_I \quad (2.36)$$

, em que a matriz $\mathbf{B}$, denominada de matriz de deformabilidade, pode ser definida como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

A partir da Equação 2.33, é possível definir os vetores de força de corpo ($\mathbf{f}_b$) e força externa ($\mathbf{f}_t$):

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega = \sum_{i=1}^{n_Q} \mathbf{H}(\mathbf{x}_I)^T \cdot \mathbf{b} \cdot \widehat{w}_I \quad (2.38)$$

$$\mathbf{f}_t = \int_{\Gamma} \mathbf{H}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \sum_{i=1}^{n_Q^*} \mathbf{H}(\mathbf{x}_I)^T \cdot \mathbf{f} \cdot \widehat{w}_I^* \quad (2.39)$$

, sendo $\widehat{w}_I^*$ o peso do ponto de integração na superfície onde a força externa $\mathbf{f}_t$ está a ser aplicada, n_Q^* o número de pontos de integração que definem a fronteira onde a força é aplicada e $\mathbf{H}$ a matriz de interpolação definida como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

As condições de fronteira essenciais são impostas diretamente na matriz de rigidez $\mathbf{K}$, uma vez que as funções de forma RPI possuem a propriedade de delta Kronecker.

Capítulo 3

Otimização Estrutural

No presente capítulo, é efetuada uma revisão ao estado da arte da otimização estrutural. São explorados alguns tipos de métodos de otimização utilizados na área da mecânica computacional, e é feita uma breve descrição numérica dos seus procedimentos. Por fim, são enquadradas as metodologias de otimização com os métodos sem malha já elaborados anteriormente, seguido da demonstração de exemplos práticos dos próprios na indústria automóvel, de modo a comprovar e a entender a importância que possuem como ferramenta de projeto e de conceção do *design* automóvel.

3.1 Estado de arte

A otimização estrutural desempenha um papel fundamental na construção mecânica, representando um conjunto de técnicas e métodos essenciais para o aprimoramento do desempenho, eficiência e durabilidade de todo o tipo de estruturas mecânicas. A sua abrangência estende-se a inúmeras indústrias que de alguma forma utilizam a construção mecânica na sua base, como é o caso da indústria automóvel. A otimização estrutural de diversos componentes de um veículo, como já abordado na Secção 1.1, oferece diversas vantagens no desempenho do veículo, tornando-se cada vez mais uma etapa crucial no processo de engenharia de design automóvel. Ao longo dos anos, com o avanço das tecnologias de processamento de dados, diversas técnicas computacionais de otimização estrutural foram desenvolvidas e aprimoradas. Essas técnicas demonstram-se essenciais para o desenvolvimento de componentes, uma vez que proporcionam um aumento significativo na eficiência do processo de design, permitindo a obtenção de geometrias otimizadas que atendem às exigências de modo eficiente em comparação com métodos tradicionais e empíricos, como métodos manualmente iterativos.

As técnicas computacionais de otimização estrutural, assim como os métodos sem malha, têm sido alvo de um crescimento acentuado de interesse por parte da comunidade científica. Essa tendência é ilustrada na Fig. 3.1, que apresenta a evolução notavelmente exponencial do número de publicações relacionadas ao tema ao longo dos anos, com base numa pesquisa na plataforma *ScienceDirect*. A investigação de métodos de otimização estrutural tem atraído grande atenção de diversos setores da indústria que lidam de algum modo com a construção mecânica avançada, incluindo o setor automóvel, objeto de análise neste trabalho. O notável crescimento do fabrico aditivo nos últimos anos impulsionou significativamente o interesse por estas técnicas. Esta popularidade deve-se à capacidade de produção de peças com geometrias complexas e altamente personalizadas, atendendo às exigências específicas do fabricante de modo mais eficiente do que os métodos tradicionais de design manual, que dependem da observação empírica do utilizador.

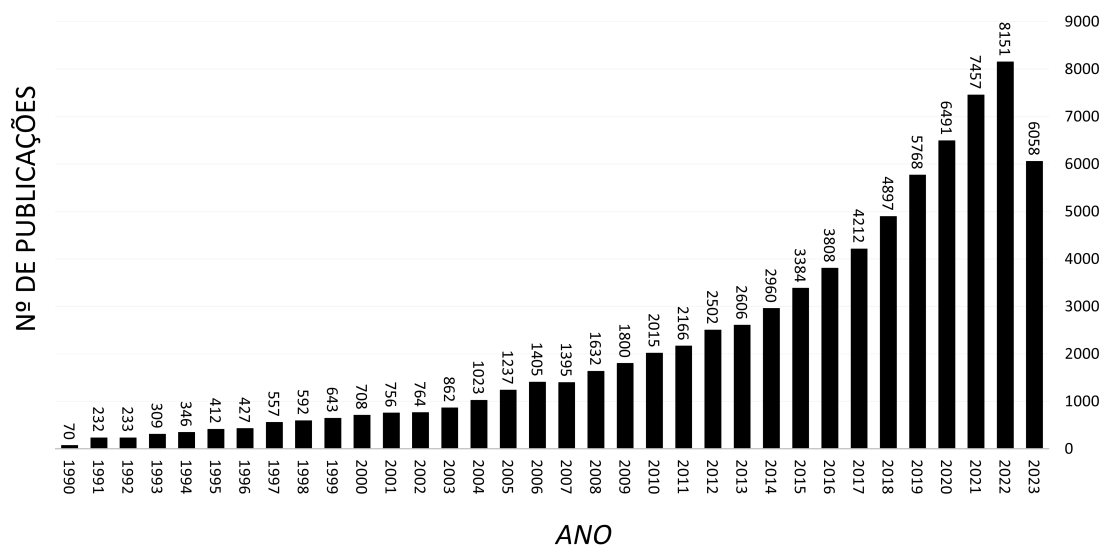


FIGURA 3.1: Número de publicações de otimização estrutural por ano, (pesquisa do termo "*Structural Optimization*", no *Web Of Science*)

A aplicação seminal da otimização estrutural não pode ser datada com precisão, uma vez que o princípio já seria praticado de forma intuitiva através de algum tipo de conhecimento empírico na concepção e projeto de estruturas. Contudo, é possível acompanhar o seu progresso considerando uma era contemporânea da área, que, de acordo com Spillers e MacBain 2009, pode ser datada aos anos 70, com um artigo científico de L. Schmidt 1977. Previamente, a literatura de programação não linear era inexistente, e a única possibilidade de aplicação de otimização estrutural consistia na utilização de programação linear. Os anos que se seguiram foram caracterizados por uma dificuldade em resolver problemas de otimização computacionalmente. Apenas nos anos 90 foram desenvolvidos com sucesso métodos de programação matemática para sistemas complexos, com o trabalho de Bixby et al. 1992. Com o avanço da programação matemática, surgiram diversas oportunidades de automatização da otimização em várias áreas da ciência.

Durante vários anos, apesar da possibilidade de aplicação de algoritmos de otimização avançados, o resultado final da estrutura otimizada teria de ser corrigida de modo a possibilitar um processo de fabrico com um custo apropriado. Recentemente, tem sido possível observar o crescimento do fabrico aditivo, e a possibilidade de produção de um componente com uma topologia fiel à solução gerada pelo algoritmo empregue já se demonstra consideravelmente acessível.

Bendsøe e Sigmund 2004 referem que os problemas de otimização do design estrutural podem ser organizados em três grupos: otimização de tamanho, de forma ou topológica. A otimização de tamanho concentra-se em determinar os parâmetros dimensionais de uma estrutura pré-definida, como a espessura de uma placa elástica ou o número de elementos numa estrutura complexa. A otimização de forma procura a forma geométrica ideal para um domínio pré-estabelecido, mantendo suas propriedades topológicas. A otimização topológica vai além da otimização de forma e tamanho, e procura determinar a topologia ideal da estrutura, incluindo a localização, forma, conectividade e até mesmo a presença de furos no domínio. Essa abordagem é particularmente útil para problemas complexos e com restrições de espaço, onde a topologia da estrutura pode ser drasticamente alterada para otimizar seu desempenho.

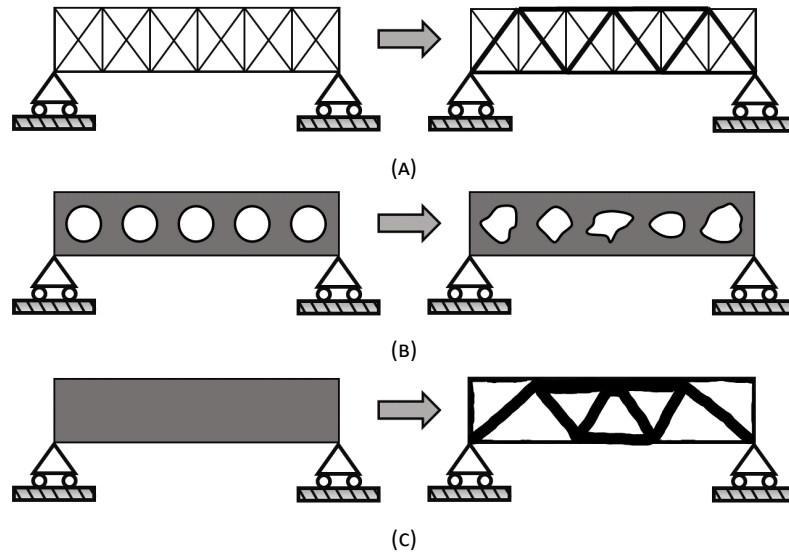


FIGURA 3.2: Tipos de otimização estrutural existentes (a) otimização de tamanho (b) otimização de forma (c) otimização topológica

Na mecânica computacional, a otimização topológica é um dos tipos de otimização mais estudados, devido à capacidade de geração de *designs* mais eficientes e inovadores. Envolve a redistribuição estratégica de material numa estrutura, resultando em formas e geometrias otimizadas para atender a critérios específicos, como resistência, rigidez ou outros critérios de desempenho mecânico.

3.2 Formulação do Problema de Otimização

Considere-se um exemplo de um problema de otimização estrutural de uma estrutura, onde o objetivo é a obtenção de um *layout* que apresente a maior rigidez possível, restringindo a massa da estrutura. O problema pode ser formulado através da minimização da conformidade média, com uma restrição de peso do material. O problema pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } C = \frac{1}{2} \cdot f_T \cdot u \\
 &s.t. : W^* - \sum_{i=1}^n W_i \cdot x_i = 0 \\
 &x_i = 0 \text{ ou } 1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

, onde C representa a conformidade média da estrutura, W^* a massa da estrutura selecionada e W_i a massa do nó i . A variável de *design* x_i indica a presença ($x_i = 1$) ou a ausência ($x_i = 0$) de um nó no *layout* do domínio definido. Dependendo do método de otimização selecionado, o algoritmo realizará sucessivas iterações de modo a adicionar ou remover nós através das condições anteriormente definidas. O critério de remoção e/ou adição de nós depende do estudo efetuado. Um critério habitualmente definido em problemas de otimização estrutural trata-se da energia de deformação nodal (α^{SE}) (Shobeiri 2015).

3.3 Métodos de Otimização por Interpolação

3.3.1 Método SIMP

O método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) trata-se de um dos métodos de otimização que utiliza esquemas de interpolação mais populares (Bendsøe e Sigmund 1999). A formulação do SIMP tem como base um problema de minimização de conformidade C , que pode ser parametrizado com um vetor de coordenadas $\zeta \in \Omega$, com uma restrição de volume Q_c :

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} : C \\ &s.t. : Q \leq Q_c \end{aligned} \quad (3.2)$$

Um conjunto de elementos n no domínio $\zeta \in \Omega$ representam uma estrutura, e a variável $x(\zeta)$ representa uma variável de *design*, programada de modo a ser igual a 0 e 1, continuamente. Os valores intermédios são penalizados através de um sistema de penalização, dado por p . O problema de otimização é restringido de modo a satisfazer a expressão de equilíbrio elástico para uma dada matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ e uma carga $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.3)$$

A rigidez de cada elemento K_i pode ser expressa como uma função de $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$\mathbf{K}_i = x_i^p \cdot \mathbf{K}_0 \quad (3.4)$$

, onde, como já mencionado, x_i toma valores de 0 ou 1, e $\mathbf{K}_0$ retrata a constante de rigidez do elemento, em que $x_i = 1$. Utilizando a notação acima apresentada para um K simétrico, a conformidade total pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_p(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \sum_i x_i^p \cdot \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.5)$$

Deste modo, o problema de otimização baseado na metodologia SIMP pode ser definido seguindo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} : C_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^p \cdot \mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{u}_i \\ &Q(\mathbf{x}) \leq Q_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$s.t. : 0 < x(\zeta)_{min} \leq x(\zeta) \leq 1$$

, onde $\mathbf{x}(\zeta)_{min}$ representa um vetor de massas volúmicas mínimas, de modo a evitar a ocorrência de singularidades, e $Q(x)$ o volume de material total atual. O processo de otimização SIMP resulta num *design* final discreto com pontos de massa volúmica binária (0 ou 1), caracterizando um modelo "preto e branco". A literatura demonstra que a obtenção dessa solução discreta com o SIMP depende da utilização de um sistema com penalização suficientemente elevada (Edwards, Kim e Budd 2007).

3.4 Métodos de Otimização Evolucionários

A computação evolucionária, como o nome indica, trata-se de uma técnica computacional moderna de procura que processa uma evolução e uma seleção. A terminologia foi dada através das semelhanças que a técnica apresenta com processos encontrados na área da biologia, como na genética e na teoria evolucionária. Um algoritmo evolucionário pode ser descrito como um algoritmo que baseia todo o seu processo de procura numa simulação da evolução individual das estruturas, através da correlação entre processos de seleção, de reprodução e de variação (Bendsøe e Sigmund 2004). O processo algorítmico evolucionário pode ser descrito no seguinte procedimento:

1. Inicialização da população: Gerar um conjunto inicial de soluções;
2. Avaliar todos os membros da população;

Enquanto as condições impostas não forem satisfeitas:

3. Selecionar indivíduos com maior aptidão para serem os progenitores na próxima geração;
4. Criar novos indivíduos descendentes a partir dos progenitores selecionados anteriormente;
5. Avaliar aptidões dos novos descendentes;
6. Substituir indivíduos na população pelos novos indivíduos descendentes gerados (Kicinger, Arciszewski e De Jong 2005).

Este procedimento é denominado de algoritmo evolucionário simples, e contém as condições mínimas para estabelecer um sistema evolucionário Darwiniano. Na aplicação desta algoritmia à engenharia em si, os maiores problemas de design são: a seleção de uma representação apropriada, a definição de operadores genéticos eficientes, e providenciar funções de avaliação adequadas para os indivíduos gerados.

3.4.1 Método ESO

O método ESO (Evolutionary Structural Optimization) é um método evolucionário de otimização que tem sido amplamente aplicado a problemas de otimização estrutural nos últimos anos. O mesmo baseia-se na remoção de material de um domínio específico através de um processo iterativo, material este considerado ineficiente e redundante, de modo a obter um design considerado ótimo (Abolbashari e Keshavarzmanesh 2006). O método foi desenvolvido por Y. M. Xie e Steven 1994, para fins de otimização de forma e de *layout* em problemas de tensão, tendo sido expandido a outras áreas com o passar dos anos. Nos métodos evolucionários, é usado também o critério de tensão de Von Mises, comparando com um rácio de rejeição, como já demonstrado na Secção 3.2. No FEM este critério de rejeição traduz-se na remoção de elementos em zonas onde é exigido menor esforço da estrutura. As tensões são diretamente comparadas com a tensão de Von Mises equivalente do elemento com o maior valor de tensão de toda a estrutura, traduzindo-se no rácio de rejeição RR_i :

$$RR_i = \frac{\bar{\sigma}_{element}}{\bar{\sigma}_{max}} \quad (3.7)$$

, sendo $\bar{\sigma}_{element}$ a tensão de Von Mises equivalente do elemento e $\bar{\sigma}_{max}$ a tensão de Von Mises máxima em toda a estrutura. Quando é atingido um estado estacionário, estado onde já não

existem mais pontos de integração a serem eliminados na iteração, uma relação evolucionária (E_r) é introduzida e adicionada ao rácio de rejeição:

$$R_{r,i+1} = R_{r,i} + E_r, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Com a adição da relação evolucionária, é iniciado um novo ciclo de análise estrutural e a remoção de pontos de integração repete-se até ser atingido um novo estado estacionário. O processo evolucionário continua até ser atingido um *layout* ótimo, isto é, por exemplo, até não existir material na estrutura final cujo nível de tensão não seja inferior a uma determinada percentagem do valor máximo de Von Mises. De acordo com Seffen 2000, para efeitos de teste, é recomendado a utilização de um rácio de rejeição inicial ($R_{r,0}$) de 1% e uma relação evolucionária de 1%, sendo a seleção dos mesmos valores, após algumas tentativas, realizada através de uma avaliação visual, em relação à quantidade de material que foi removido do domínio inicial.

3.4.2 Método BESO

Apesar da ampla utilização do método ESO, o mesmo apresenta problemas e limitações que apelaram à necessidade de investigação de novas metodologias. De modo a melhorar a viabilidade das soluções obtidas na otimização, surgiu a ideia da criação de um algoritmo bidirecional, que permitisse não só a remoção do material de modo a eliminar zonas de tensão baixa, mas também a adição de material para compensar zonas de tensão elevada. Assim, surgiu o método bidirecional evolucionário de otimização estrutural, ou BESO (*Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization*), um método inspirado não só nas capacidades do ESO de remoção de material, como também nas capacidades aditivas de material do AESO, um método evolucionário de otimização estrutural aditivo (*Addition Evolutionary Structural Optimization*), que permite uma procura no domínio de *design* mais cuidada, oferecendo também uma capacidade superior para encontrar o mínimo global (Querin et al. 2000).

Metodologia BESO

Através da análise elasto-estática, são calculados o deslocamento, a deformação e a tensão para cada ponto de integração. Desta forma, é possível calcular a tensão de Von Mises equivalente para cada ponto de integração, bem como a média cúbica do campo de tensão de Von Mises, que serve como referência para ajudar a detetar alterações súbitas de tensão. Com um valor elevado de tensão, a média cúbica é altamente afetada. Entretanto, com valores baixos de tensão, a média é praticamente inalterada.

$$\bar{\sigma}(x_I) = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (3.9)$$

$$\bar{\sigma}_{cube} = \sqrt[3]{\frac{1}{n_Q} \sum_{i=1}^{n_Q} \bar{\sigma}(x_I)^3} \quad (3.10)$$

De seguida, é aplicado um sistema de penalização, de modo a descrever e atribuir um parâmetro específico, neste caso a densidade, a cada ponto de integração. O intervalo definido para a penalização é normalmente $\xi \in [10^{-3}, 1]$, em que 1 representa o domínio recompensado, ou material sólido, e 10^{-3} o domínio penalizado, ou material removido. O desempenho do

procedimento BESO depende do rácio de incremento, α , e do rácio de redução, β . São identificados os pontos de integração n_Q^α com o maior valor de tensão $\sigma(x_I)$ e os pontos de integração n_Q^β com o menor valor de tensão $\sigma(x_I)$, dados por:

$$n_Q^\alpha = \alpha \cdot n_Q \quad (3.11)$$

$$n_Q^\beta = \beta \cdot n_Q \quad (3.12)$$

Os pontos n_Q^α são recompensados com $\xi(x_I) = 1$, enquanto os pontos n_Q^β são penalizados com $\xi(x_I) = 10^{-3}$. A cada nó x_I é então atribuído um parâmetro de penalização $\eta(x_i)$. Para cada ponto de integração x_I , os nós mais próximos atualizam os seus valores de penalização com $\eta(x_i)^{new} = 0,5 (\eta(x_i)^{old} + \xi(x_I))$. Depois de atualizados todos os nós, os parâmetros de penalização para cada ponto de integração são recalculados de forma a filtrar e suavizar os parâmetros de penalização selecionados, através da função de interpolação seguinte:

$$\xi(x_I) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i(x_I) \cdot \eta(x_i) \quad (3.13)$$

, em que n representa o número de nós no domínio de influência analisado de x_I e $\boldsymbol{\varphi}(x_I)$ o vetor da função de forma do ponto de integração x_I .

No final da primeira iteração, alguns valores ξ diferem de 1, assinalando a ausência de material. O processo pode, deste modo, prosseguir para a iteração seguinte. Na iteração j , os parâmetros de penalização ξ serão utilizados para modificar a matriz constitutiva do material. Consequentemente, é calculada a matriz constitutiva do material penalizada $c_p(x_I) = \xi(x_I) \cdot c(x_I)$. Na iteração seguinte j , a matriz de rigidez é calculada, utilizando $c_p(x_I)$ em vez de $c(x_I)$. Seguem-se os mesmos passos e obtém-se um novo campo de tensões de Von Mises equivalente. Através dele, é calculada a nova tensão média cúbica e a comparação $\sigma_{cubic}^j \geq \delta \cdot \sigma_{cubic}^{j-1}$ é efetuada.

Se a condição for verdadeira, os pontos de integração com $\xi(x_I) > \lambda$ são recompensados com $\xi(x_I) = 1$. Os parâmetros de penalização são recalculados, atualizando o domínio material para a iteração seguinte $j + 1$.

3.5 Algoritmo de Remodelação Óssea

O algoritmo de otimização estrutural empregue no presente trabalho trata-se de um algoritmo BESO inspirado e desenvolvido para aplicações no ramo da biomecânica, nomeadamente na remodelação óssea. A resposta dos ossos com base na aplicação de esforço diferencia-se da resposta de corpos não biológicos, na medida em que a forma geral do osso é alterada através de um processo de remodelação, visando a melhoria da sua resistência face à carga imposta. De modo a prever este comportamento, vários investigadores desenvolveram leis baseadas na observação e testes experimentais efetuados, que prevêm o comportamento ósseo com base em diferentes casos de carga considerados. Este tipo de leis é a base para a análise computacional óssea, demonstrando-se como preponderante nos resultados das simulações efetuadas. Vários modelos foram desenvolvidos e investigados, desde o modelo de Pauwels 1966, até outros modelos que apresentavam considerações extraordinárias ou abordagens distintas ao problema, como os modelos de Cowin e de Carter (Carter, Fyhrie e Whalen 1987; Cowin 1985).

O modelo de Carter é idêntico ao modelo de Pauwels na medida em que exige um estímulo mecânico para que ocorra a remodelação. Este estímulo é calculado com base na tensão efetiva, que considera tanto o estado de tensão local como a densidade do osso, e o número de ciclos de carga ao qual o osso é submetido. Quanto maior for a magnitude da tensão (representada pelo expoente k), mais forte será o estímulo para a remodelação (Belinha 2014).

$$S_n \propto \sum_{i=1}^l m_i \bar{\sigma}_i^k \quad (3.14)$$

sendo S_n o estímulo mecânico, m_i o número de ciclos e $\bar{\sigma}_i$ a tensão efetiva. O modelo assume que a tensão induzida atua como uma ferramenta de otimização incorporada. O objetivo é alcançar um equilíbrio entre a maximização da integridade estrutural do osso (resistência) e a minimização da sua massa. Isto pode ser conseguido através da minimização de uma função objetiva que representa matematicamente este objetivo.

O modelo oferece ainda a opção de utilizar a energia de tensão ou deformação como base para a otimização. A energia de deformação centra-se na maximização da rigidez do osso (resistência à flexão), enquanto a tensão se centra na otimização da resistência do material. Ao usar a energia de deformação, o modelo relaciona a densidade aparente do osso com a energia de deformação local que ele experimenta. Isto permite a estimativa da densidade do osso em equilíbrio de remodelação, um estado em que a reabsorção e a formação óssea estão equilibradas (Belinha 2014).

$$\rho_{app} \propto \left(\sum_{i=1}^l m_i U_i^k \right) \quad (3.15)$$

sendo U_i a energia de deformação local e ρ_{app} a densidade aparente. Se o osso é sujeito a tensões de várias direções, o modelo combina os efeitos de cada padrão de tensão numa única direção. Esta direção é designada por vetor normal ($\mathbf{n}$) e representa o alinhamento ideal para as estruturas de suporte internas do osso (trabéculas) para uma resistência ótima. Para calcular esta direção ideal, o modelo considera a tensão normal que atua em todo o osso, que é definida na Equação 3.16.

$$\bar{\sigma}_n(\mathbf{n}) = \left(\sum_{i=1}^l \frac{m_i}{\sum_{j=1}^l m_j} \bar{\sigma}_{n_i}^k(\mathbf{n}) \right)^{\frac{1}{k}} \quad (3.16)$$

O modelo aplicado no *Finite Element and Meshless Method Analysis Software* (FEMAS), *software* de análise computacional de estruturas empregue em todas as simulações numéricas deste trabalho, utiliza uma adaptação do modelo de Carter para acomodar métodos sem malha, desenvolvido por Belinha, Natal Jorge e Dinis 2013. Esta nova abordagem assume que um estímulo mecânico, adequadamente representado por métricas de tensão e potencialmente deformação, serve como o fator chave que influencia o processo de remodelação do tecido ósseo. Uma descrição detalhada de todo o modelo pode ser encontrada na literatura de Belinha 2014. Através do procedimento de remodelação óssea descrito, a própria remodelação funciona como um algoritmo de otimização topológica, na medida em que, a cada iteração, apenas os pontos com valores altos/baixos de densidade de deformação de energia otimizam a densidade com base no próprio estímulo mecânico (Belinha 2014).

3.5.1 Discretização do Modelo de Carter Modificado

Para o funcionamento do algoritmo de otimização, a equação não-linear da remodelação óssea é introduzida, e combinada com os métodos numéricos sem malha reforçados neste trabalho:

$$\frac{\partial \rho_{app}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cong \frac{\Delta \rho_{app}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = (\rho_{app}^{model})_{t_j} - (\rho_{app}^{model})_{t_{j+1}} = 0 \quad (3.17)$$

, sendo $\rho_{app}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^{d+1} \mapsto \mathbb{R}$ definido para o temporal uni-dimensional e o espaço com d dimensões (Belinha 2014). O problema analisado deve ser discretizado no espaço e no tempo. Para o efeito, é assumido que o domínio espacial d -dimensional é discretizado em N nós: $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \in \Omega$, nos pontos de interesse $\mathbf{Q} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_Q\} \in \Omega$, sendo $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$. O domínio temporal é discretizado em iterações temporais fictícias $t_j \in \mathbb{R}$, com $j \in \mathbb{N}$. A densidade média aparente para o domínio completo do modelo estudado é definida por $(\rho_{app}^{model})_{t_j}$, no instante de tempo fictício t_j (Belinha 2014). Dentro da mesma iteração, a densidade média aparente do modelo ρ_{app}^{model} pode ser determinada da seguinte forma:

$$\rho_{app}^{model} = Q^{-1} \sum_{i=1}^Q (\rho_{app})_i \quad (3.18)$$

, sendo $(\rho_{app})_I$ a densidade aparente infinitesimal no ponto de interesse $\mathbf{x}_I$, definida por $\rho_I = g(\sigma_I)$. $g(\sigma_I) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ é definido por $g(\sigma_I) = \max(\{\sigma_1^{-1}(\rho_I), \sigma_2^{-1}(\rho_I), \sigma_3^{-1}(\rho_I)\})$. Nota-se que σ_j corresponde às três tensões principais obtidas para o ponto de interesse $\mathbf{x}_I$, tratando-se das funções inversas de $\sigma_1^{-1}(\rho_I)$ (Belinha 2014). Deste modo, é possível obter as seguintes expressões para a tensão principal σ_1 e para as restantes tensões principais σ_j , $j = \{2, 3\}$:

$$\sigma_{axial}^c = \sum_{j=0}^3 c_j \cdot (\rho_{app})^j \quad (3.19)$$

$$\sigma_{trans}^c = \sum_{j=0}^3 e_j \cdot (\rho_{app})^j \quad (3.20)$$

$$\sigma_1^{-1}(\rho_I) = \sigma_{axial}^{-1}(\rho_I) = \rho_{axial} = 8,14 \times 10^{-4} \cdot f_1(\sigma_1) + \frac{235,3}{f_1(\sigma_1)} - 0,439 \quad (3.21)$$

$$\sigma_j^{-1}(\rho_I) = \sigma_{trans}^{-1}(\rho_I) = \rho_{trans} = 1,34 \times 10^{-3} \cdot f_2(\sigma_j) + \frac{3,34 \times 10^4}{f_2(\sigma_j)} - 0,669 \quad (3.22)$$

As funções $f_1(\sigma_1) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ e $f_2(\sigma_j) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ são definidas como:

$$f_1(\sigma_1) = Re(-1,54 \times 10^8 + 4,47 \times 10^7 \sigma_1 + 2,44 \times 10^3 \sqrt{-2,31 \times 10^9 \sigma_1 + 3,35 \times 10^9 \sigma_1^2}) \quad (3.23)$$

$$f_2(\sigma_j) = Re(-1,25 \times 10^{11} + 1,68 \times 10^8 \sigma_j + 1,49 \times 10^4 \sqrt{-1,88 \times 10^{11} \sigma_j + 1,26 \times 10^8 \sigma_j^2}) \quad (3.24)$$

As Equações 3.21 e 3.22 são aplicadas aos pontos de interesse com os valores de densidade de energia de deformação pertencentes ao seguinte intervalo:

$$U(\mathbf{x}_I) \in [U_m, U_m + \alpha \cdot \Delta U] \cup]U_M - \beta \cdot \Delta U, U_M], \quad \forall U(\mathbf{x}_I) \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

, sendo $U_m = \min(\mathbf{U})$, $U_M = \max(\mathbf{U})$ e $\Delta(U) = U_M - U_m$. É possível definir o campo de densidade de energia de deformação do domínio como $\mathbf{U} = \{U(\mathbf{x}_1) \ U(\mathbf{x}_2) \ \dots \ U(\mathbf{x}_Q)\}$.

Os parâmetros α e β definem a taxa de crescimento e de decadência, respetivamente, da densidade aparente (Belinha 2014). O equilíbrio da remodelação é atingido quando a seguinte condição é encontrada:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = 0 \quad \forall \quad (\rho_{app}^{model})_{t_j} = \rho_{app}^{control} \quad (3.26)$$

3.5.2 Procedimento de Otimização de Remodelação Óssea

Na presente subsecção, é feito um resumo do procedimento de otimização estrutural através do conceito de remodelação óssea apresentado previamente, para o NNRPIIM. Deste modo, as seguintes etapas podem ser descritas:

1. Pré-processamento. Nesta etapa, é efetuada a discretização do domínio do problema. É efetuada a conectividade nodal, é construída a malha de integração, são definidas as funções de interpolação, são impostas as condições de contorno essenciais e naturais e são atribuídas as propriedades do material às áreas do domínio correspondentes (Belinha 2014);
2. O algoritmo iterativo de remodelação é iniciado. É efetuada a análise linear inicial do problema, é construída a matriz de rigidez global para cada caso de carga, são obtidos os deslocamentos, tensões e deformações, e são calculadas as tensões e direções principais de tensão para cada ponto de interesse.
De seguida, são identificados os pontos de interesse com os valores de densidade de energia de deformação ou de tensão de Von Mises eficaz. Dependendo do critério aplicado na otimização, é calculado o novo campo de tensão principal ponderado para os pontos de interesse com o menor valor de SED/SEF, e são atualizados os valores de densidade aparente dos pontos de interesse avaliados (Belinha 2014);
3. As propriedades do material de cada ponto de interesse são atualizadas com base na nova densidade aparente. A matriz constitutiva é atualizada com base na informação nova gerada (Belinha 2014);
4. É considerada a convergência da otimização. O processo iterativo é terminado quando:
 - A densidade aparente média do modelo (ρ_{app}^{med}) atinge o valor de controlo ($\rho_{app}^{control}$) definido pelo utilizador inicialmente;
 - Duas iterações consecutivas apresentarem a mesma densidade aparente média $\Delta \rho_{app}^{med} = 0$ (Belinha 2014).

A Fig. 3.3 apresenta uma representação do algoritmo descrito.

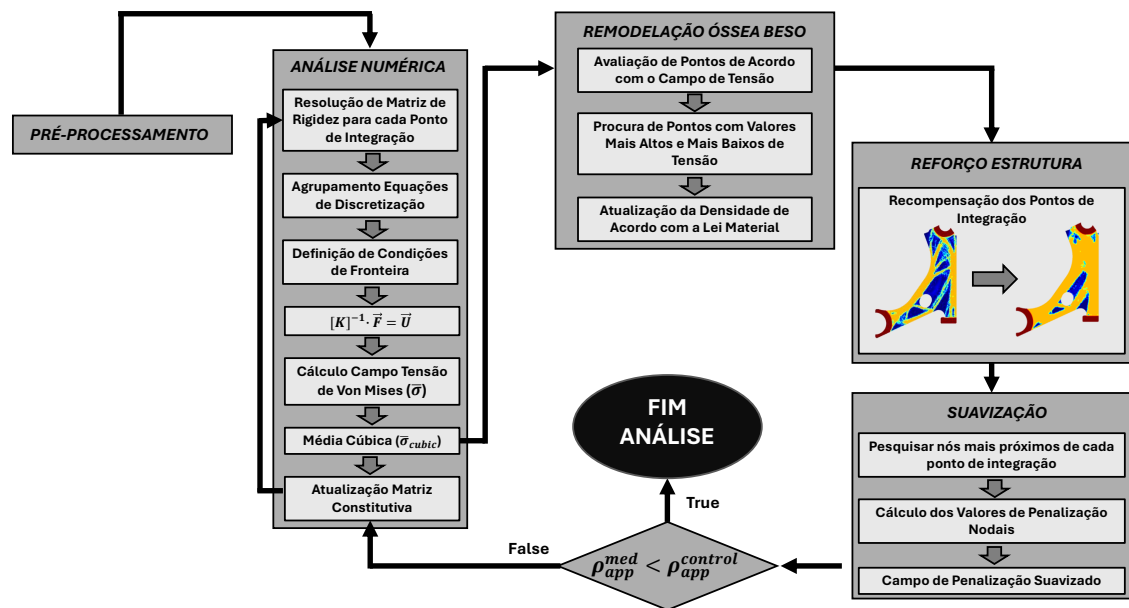


FIGURA 3.3: Esquema de remodelação óssea proposto

3.6 Métodos Sem Malha na Otimização Estrutural

A primeira aplicação da otimização estrutural com a utilização de métodos sem malha foi realizada por Grindeanu et al. 1998, com uma análise a estruturas hiperelásticas. Uma vez que, como já referido na Secção 2.1, os métodos sem malha provam ser mais precisos para problemas que envolvem grandes deformações, os autores da análise decidiram empregar o Método de Reprodução de Partículas de Kernel (ou RKPM, Reproducing Kernel Particle Method) em detrimento do FEM.

A aplicação do EFGM (*Element-Free Galerkin Method*) tem gerado resultados favoráveis, e vários estudos da combinação desta metodologia com técnicas de otimização podem ser encontrados na literatura, sendo um dos métodos sem malha mais aplicados nesta área. A combinação foi introduzida por Bobaru e Mukherjee 2001, num artigo que analisa a otimização de forma de um raio de curvatura de dimensão relativamente reduzida. No artigo, e analisando os valores de percentagem de área de *design* final em relação à área inicial encontrados na Fig. 3.4, é possível concluir que com a utilização dos métodos sem malha, nomeadamente do EFGM, são obtidos melhores resultados do que aqueles obtidos com o Método de Elementos de Fronteira (*Boundary Element Method*, BEM) e com o Método de Nuvens de Fronteira (*Boundary Cloud Method*, BCM). Observou-se que, para um determinado critério, a utilização do EFGM resultou numa maior redução da área do domínio e, consequentemente, da massa, demonstrando a superioridade dos resultados obtidos pela metodologia sem malha em comparação direta com metodologias dependentes de malha.

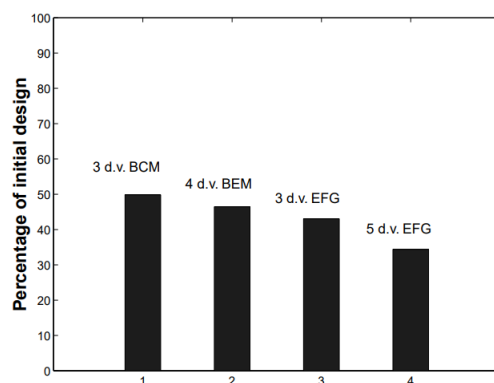


FIGURA 3.4: Comparação dos valores de área do design final com a área de design inicial (Bobaru e Mukherjee 2001)

Vários estudos ao longo dos anos têm combinado o EFGM com métodos de otimização estrutural com sucesso, como comprovado nos artigos de Juan, Shuyao e Guangyao 2010, Luo et al. 2013 e Y. Wang et al. 2015. Esses estudos confirmam o sucesso dessa combinação em alcançar resultados satisfatórios, mesmo quando aplicada a formas consideravelmente complexas.

No artigo de Shobeiri 2015, a avaliação estrutural sem malha EFGM foi combinada com os métodos BESO e SIMP, utilizando vários exemplos de referência para estudar e analisar os resultados obtidos com essas duas técnicas de otimização distintas. Os resultados obtidos encontram-se representados nas Fig. 3.5 e 3.6.

Comparando ambos os algoritmos de otimização, observou-se que, para evitar o “padrão em xadrez” característico do método SIMP, foi necessário utilizar um filtro de sensibilidade (Fig. 3.5 (a) e (b) e Fig. 3.6 (a) e (b)). Por outro lado, o BESO permitiu a obtenção de um design sem o “padrão em xadrez” visível no SIMP, dispensando assim qualquer tipo de filtro e resultando imediatamente numa solução mais sofisticada (Fig. 3.5 (c) e 3.6 (c)). Com a aplicação do BESO com o EFGM, foi obtido um design completamente independente da malha (Fig. 3.5 (c) e 3.6 (c)), melhorando também a eficiência do processo ao eliminar a necessidade do filtro.

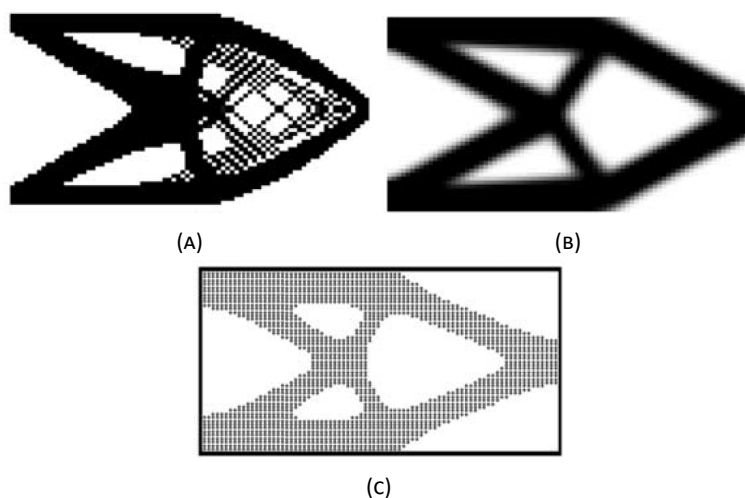


FIGURA 3.5: Resultados obtidos no estudo de comparação de Shobeiri 2015, exemplo 1: (a) Solução obtida com SIMP sem filtro de sensibilidade; (b) Solução obtida com SIMP com filtro de sensibilidade (c) Solução obtida com BESO.

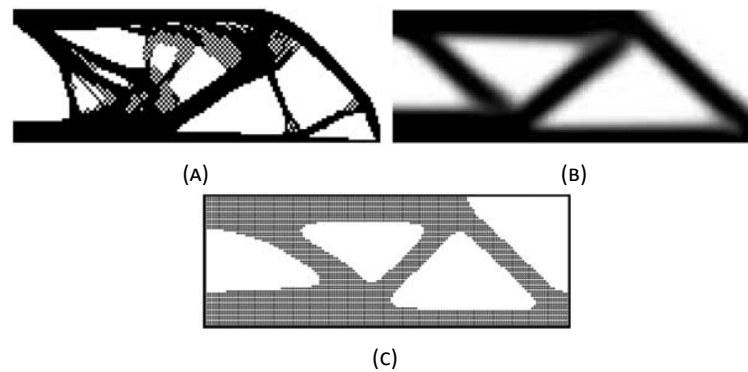


FIGURA 3.6: Resultados obtidos no estudo de comparação de Shobeiri 2015, exemplo 2: (a) Solução obtida com SIMP sem filtro de sensibilidade; (b) Solução obtida com SIMP com filtro de sensibilidade (c) Solução obtida com BESO.

Posteriormente, foi realizada uma comparação do desempenho da otimização estrutural numa região com um raio de curvatura relativamente reduzido, utilizando o método SQP (*Sequential Quadratic Programming*). No primeiro exemplo, foram analisadas e comparadas quatro metodologias de avaliação estrutural: duas encontradas na literatura (BEM e EFG) e duas aplicadas pelo autor e co-autores do artigo (RKPM e métodos verdadeiramente sem malha). No segundo exemplo, foram comparadas apenas as metodologias RKPM e métodos verdadeiramente sem malha (Zou et al. 2007). O desempenho foi avaliado pelo número de iterações realizadas, pela capacidade de remoção de material e pelo tempo computacional, no caso dos métodos testados pelos autores.

Ao analisar as Tabelas 3.1 e 3.2, juntamente com os gráficos da Fig. 3.10, é visível que os métodos verdadeiramente sem malha realizaram um número menor de iterações em comparação com todos os outros métodos, ao mesmo tempo que apresentaram uma remoção de material mais drástica. Em comparação com o RKPM, esses métodos mostraram-se mais eficientes computacionalmente.

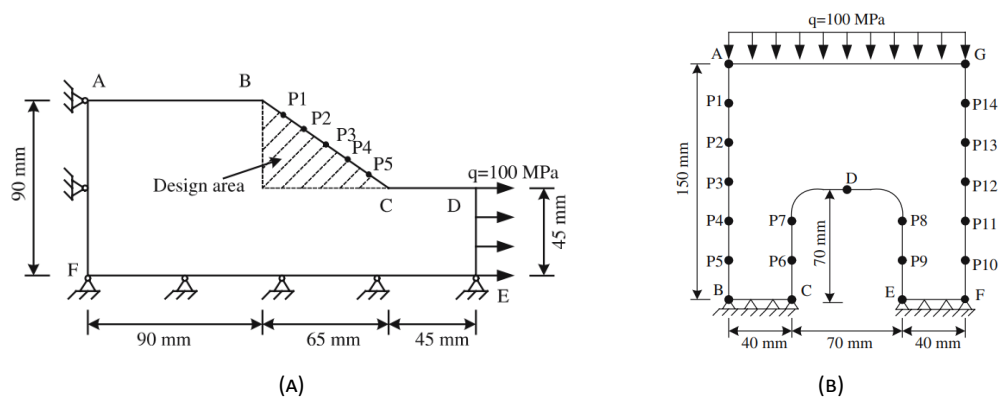


FIGURA 3.7: Geometria, forças aplicadas e condições de fronteira impostas no exemplo 1: (a) Exemplo 1 (b) Exemplo 2 (Zou et al. 2007)



FIGURA 3.8: Visualização de otimização obtida por Zou et al. 2007 no exemplo 1:
(a) Distribuição de nós (b) campo de tensões de Von Mises

TABELA 3.1: Comparação dos resultados de um problema de otimização estrutural com a aplicação de diferentes métodos sem malha do exemplo 1 (Zou et al. 2007)

Método	$A_{final} (mm^2)$	Iterações	$t_{comp} (s)$
BEM	670 (45,8%)	-	-
EFGM	550 (37,6%)	15	-
RKPM	546 (37,3%)	13	3110
Métodos verd. sem malha	520,5 (35,5%)	7	1860

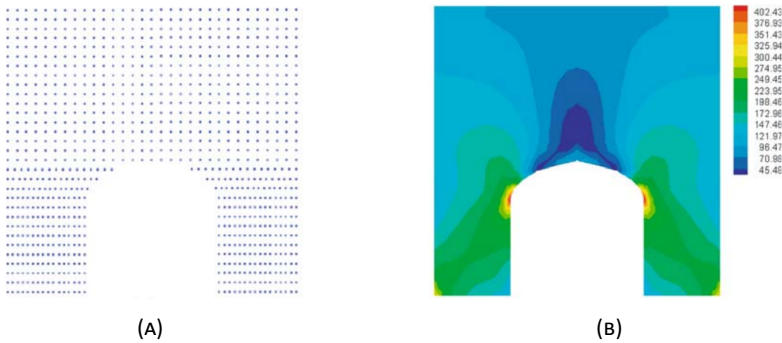


FIGURA 3.9: Visualização de otimização obtida por Zou et al. 2007 no exemplo 2:
(a) Distribuição de nós (b) campo de tensões de Von Mises

TABELA 3.2: Comparação dos históricos de otimização de um método verdadeiramente sem malha e de um método sem malha clássico do exemplo 2 (Zou et al. 2007)

Método	$A_{final} (mm^2)$	Iterações	$t_{comp} (s)$
RKPM	7202 (79,5%)	12	8380
Métodos verd. sem malha	6908 (76,3%)	8	5620

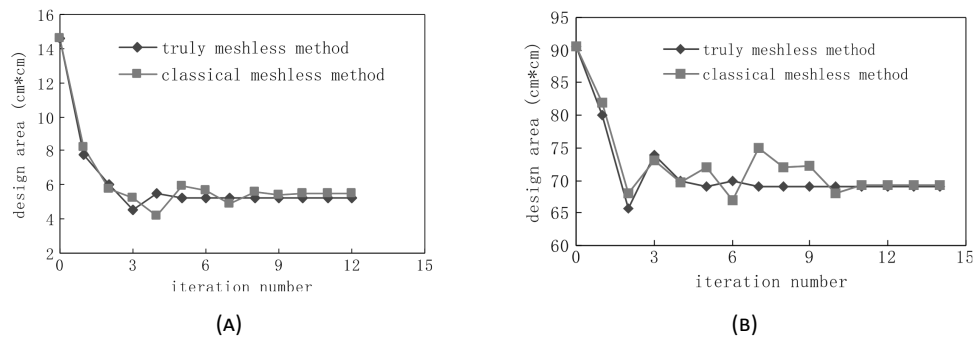


FIGURA 3.10: Comparação dos históricos de otimização de um método verdadeiramente sem malha e de um método sem malha clássico (a) Exemplo 1 (b) Exemplo 2 (Zou et al. 2007)

A aplicação da otimização estrutural em conjunto com os métodos sem malha RPIM e NNRPIM não apresenta, atualmente, uma forte presença na literatura da otimização estrutural em geral, em comparação com métodos dependentes de malha mais populares. No entanto, existem exemplos bem-sucedidos que combinam, por exemplo, o RPIM com as técnicas de otimização por interpolação e evolucionárias.

O estudo conduzido por Zheng, Long e Xiong 2010 comparou os desempenhos dos métodos RPIM e FEM, combinados com um algoritmo de otimização estrutural SIMP. Os resultados foram semelhantes aos previamente apresentados na comparação do SIMP com as metodologias EFGM e FEM, conforme ilustrado na Fig. 3.11. Observou-se que a metodologia sem malha eliminou com sucesso o padrão em xadrez típico criado pela otimização com FEM, enquanto a metodologia FEM necessitou novamente de um filtro de sensibilidade para erradicar o padrão gerado.

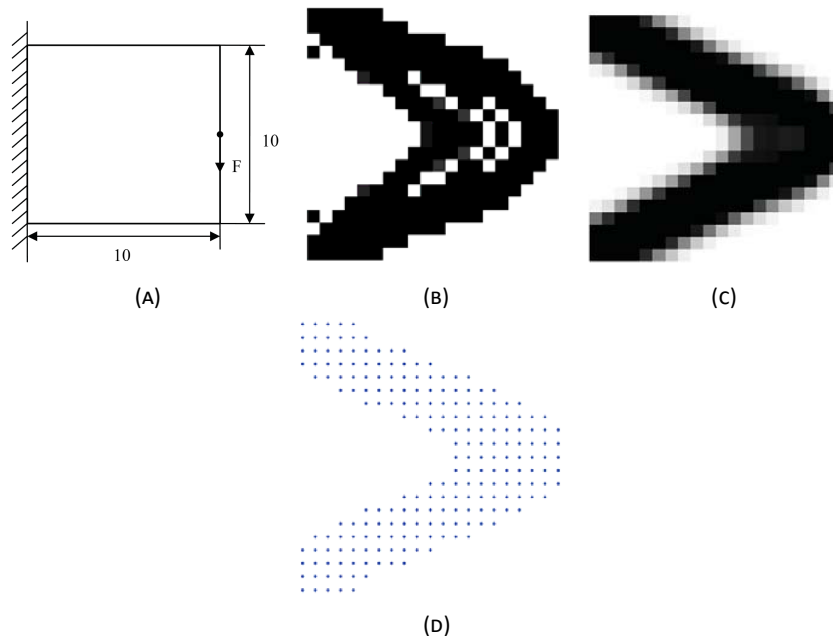


FIGURA 3.11: Comparação dos resultados de otimização (a) problema e estrutura base (b) resultado com utilização do FEM (c) resultado com utilização do FEM, com filtro de sensibilidade (d) resultado com utilização do RPIM (Zheng, Long e Xiong 2010)

Recentemente, Gonçalves et al. 2022a investigou a integração do RPIM com a técnica de otimização bi-evolucionária BESO. O estudo avaliou o desempenho da otimização considerando não apenas a percentagem de massa removida do design inicial, mas também a tensão máxima de Von Mises e a rigidez específica alcançada. Os resultados obtidos foram comparados com a solução obtida com o FEM. O artigo apresentou diversos exemplos, incluindo a análise da otimização de uma viga em L. Conforme indicado na Tabela 3.3, os valores de deslocamento máximo e de tensão máxima de Von Mises foram superiores na estrutura otimizada em relação à estrutura original. No entanto, foi possível reduzir aproximadamente 55% da massa da estrutura inicial, além de observar uma melhoria considerável na rigidez específica da estrutura. O aumento da tensão máxima de Von Mises seria expectável, dado que a redução de material na estrutura analisada leva à diminuição da área da secção transversal. Isso implica que a carga aplicada se concentra numa área menor, resultando num aumento da tensão. Analogamente, o incremento do deslocamento máximo e da tensão de Von Mises não é inesperado, uma vez que a redução de material e da massa está diretamente relacionada com uma diminuição da rigidez global da estrutura.

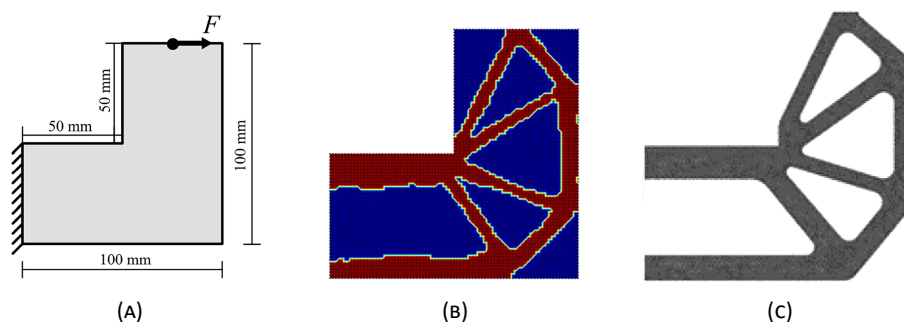


FIGURA 3.12: Comparação dos resultados de otimização (a) problema e estrutura base (b) design final resultante da otimização com a utilização do RPIM (c) Visualização do CAD com o design final (Gonçalves et al. 2022a)

TABELA 3.3: Tabela de comparação de resultados da análise estrutural da viga em L (Gonçalves et al. 2022a)

	Estrutura Original	Estrutura Otimizada
m (%)	100	45
$\bar{\sigma}_{max}$ (MPa)	55,99	72,51
u (mm)	0,054	0,085
K/V_f ($N \cdot mm^{-1} \cdot kg^{-1}$)	18,6	26,2

Um outro exemplo abordado no artigo foi a análise da otimização de um pedal de travão (Fig. 3.13). Com base nos resultados apresentados na Tabela 3.4, concluiu-se que a otimização resultou numa redução de volume de aproximadamente 47,4% e num aumento da rigidez específica de 9%. Novamente, observou-se um ligeiro aumento nos valores de tensão de Von Mises e no deslocamento máximo, mas o equilíbrio alcançado entre a redução de peso e o aumento da rigidez específica são mais do que satisfatórios para a estrutura otimizada desejada.

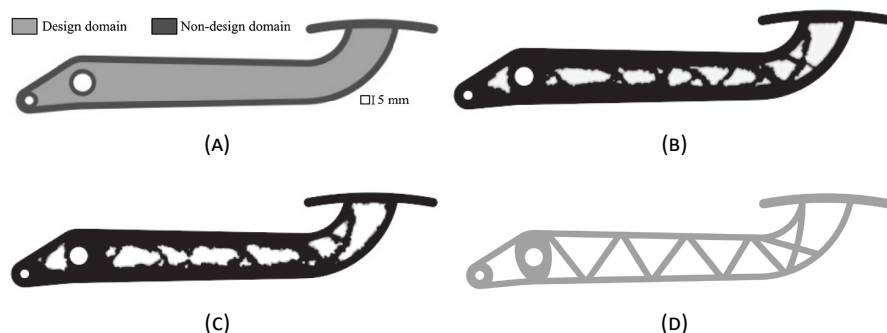


FIGURA 3.13: Comparação dos resultados de otimização (a) estrutura base (b) design final resultante da otimização com a utilização do RPIM (c) design final resultante da otimização com a utilização do FEM (d) design final selecionado para o componente, após a otimização (Gonçalves et al. 2022a)

TABELA 3.4: Tabela de comparação de resultados da análise estrutural da viga em L (Gonçalves et al. 2022a)

	Estrutura Original	Estrutura Otimizada
m (%)	100	52,6 (-47,4)
$\frac{K}{V_f}$ (N/m)	LC 1 = $2,27 \times 10^8$	LC 1 = $2,5 \times 10^8$ (+ 9,86%)
	LC 2 = $2,21 \times 10^8$	LC 2 = $2,4 \times 10^8$ (+ 8,52%)
	LC 3 = $1,85 \times 10^8$	LC 3 = $2,04 \times 10^8$ (+ 9,81%)
	LC 4 = $1,86 \times 10^8$	LC 4 = $2,02 \times 10^8$ (+ 8,73%)
$\bar{\sigma}_{max}$ (Pa)	LC 1 = $1,54 \times 10^8$	LC 1 = $2,13 \times 10^8$ (+ 38,4%)
	LC 2 = $1,53 \times 10^8$	LC 2 = $2,01 \times 10^8$ (+ 31,2%)
	LC 3 = $2,38 \times 10^8$	LC 3 = $2,79 \times 10^8$ (+ 17,4%)
	LC 4 = $2,14 \times 10^8$	LC 4 = $2,44 \times 10^8$ (+ 14,2%)

3.7 Aplicação da Otimização Estrutural na Indústria Automóvel

As técnicas de otimização estrutural demonstram uma significativa e crescente aplicação em toda a indústria de construção mecânica avançada, nomeadamente a indústria automóvel. A aplicação deste tipo de técnicas na conceção de componentes intervenientes num automóvel é preponderante no comportamento do próprio veículo, como já demonstrado na Secção 1.1. Nesta secção, serão analisados vários exemplos de aplicação da otimização estrutural na indústria automóvel, evidenciando a tendência crescente dessa prática nos últimos anos. Adicionalmente, será enfatizada a flexibilidade e a eficácia que essa metodologia oferece.

A massa geral do veículo demonstra-se como um parâmetro cuja redução apresenta-se como preponderante e indispensável na melhoria do seu desempenho geral. Quando o objetivo para o automóvel se enquadra na melhoria focada na velocidade, aceleração e dirigibilidade do mesmo, é dado um foco adicional na redução não só da massa geral do veículo, como também na redução das massas não suspensas do próprio veículo. As massas não suspensas referem-se aos componentes de um veículo que não são suportados pelas molas da suspensão. Exemplos destes componentes incluem os pneus, as jantes, as mangas de eixo e os braços de suspensão

(W. Milliken e D. Milliken 1995). A aplicação da otimização topológica em componentes como as mangas de eixo é particularmente relevante devido à sua geometria altamente específica, determinada pelos casos de carga definidos e pelos elementos de ligação. Este componente representa uma parte considerável da massa não suspensa por roda.

A seguir, são apresentados os resultados do desenvolvimento de uma manga de eixo para um veículo elétrico Fórmula SAE, cujo objetivo passaria por desenvolver o design mais leve possível, mantendo a maquinabilidade acessível do componente (J. Li, Tan e Dong 2020). A manga de eixo foi submetida a três casos de carga: simulações de travagem em curva, travagem de emergência e curva apertada.

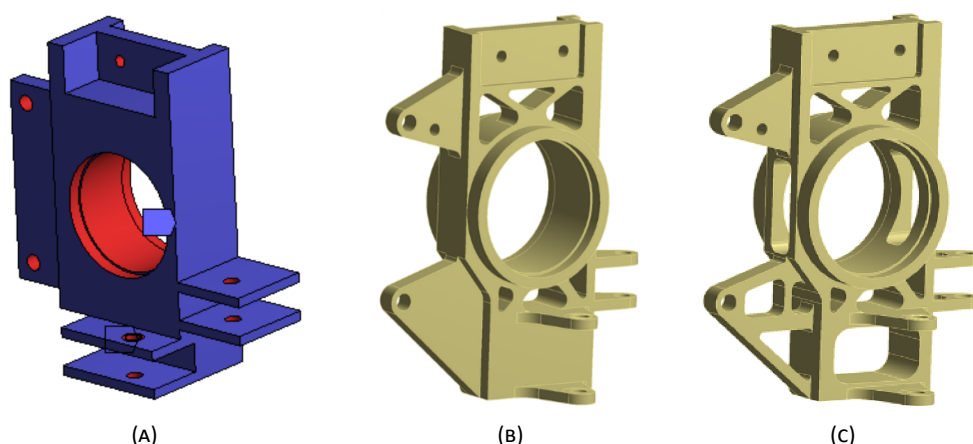


FIGURA 3.14: Otimização estrutural topológica aplicada a manga de eixo (a) design inicial (b) design intermédio (c) design final (J. Li, Tan e Dong 2020)

Através da otimização realizada, foi conseguida uma redução de massa da manga de eixo de cerca de 60,43% da massa inicial, de 1,2056 kg para 0,7285 kg. Os veículos Fórmula FSAE elétricos apresentam uma massa total compreendida entre 180 kg e 250 kg, e a redução de massa conseguida com a otimização de mangas de eixo, considerando que o veículo contém quatro, é de aproximadamente 1,9 kg. Considerando para efeito exemplificativo uma massa do veículo igual a 225 kg, é observável que uma redução de massa das mangas de eixo representaria uma diferença da massa total do veículo de aproximadamente 0,85%. Adicionalmente, espera-se uma melhoria no desempenho geral do veículo, especialmente considerando que o próprio foi projetado visando a competição automóvel.

Para além da redução de massa nas mangas de eixo, a otimização estrutural de componentes correspondentes às massas não suspensas de um veículo é amplamente empregue nos braços de suspensão. A remoção de material neste tipo de componente não só permite uma redução da massa não suspensa considerável, como também beneficia todo o sistema de suspensão e transmissão à roda, criando espaço para a implementação de outros componentes ou para a realização de todas as conexões necessárias ao bom funcionamento do sistema.

A seguir, apresenta-se um exemplo da aplicação de um algoritmo de otimização num braço de suspensão de um sistema MacPherson (Fig. 3.15), recorrendo a uma análise estrutural à fadiga, com base em padrões específicos de forças aplicadas durante a condução e considerando determinados valores de tempo e velocidade (Marzbanrad e Hosseinpour 2017).

O procedimento de trabalho envolveu a aplicação de um algoritmo de otimização topológica, seguido da suavização do modelo obtido. Finalmente, foi efetuada uma otimização de forma.

A redução de massa no braço de suspensão, conforme apresentado na Tabela 3.5, foi de aproximadamente 2,85 kg por braço, totalizando 11,4 kg para o veículo inteiro. Considerando uma massa total do veículo de 1300 kg, isso representa uma diminuição de 0,87%. Este resultado evidencia que a aplicação de algoritmos de otimização em outros componentes do veículo poderia hipoteticamente levar a uma redução de massa ainda mais considerável, melhorando diversos parâmetros cruciais para o desempenho do veículo. Por exemplo, uma redução de 11,4 kg em mais nove componentes, além do braço de suspensão, resultaria numa diminuição total de massa de cerca de 8,7% para um veículo de 1300 kg, sublinhando a importância das técnicas de otimização estrutural na construção de veículos mais leves.

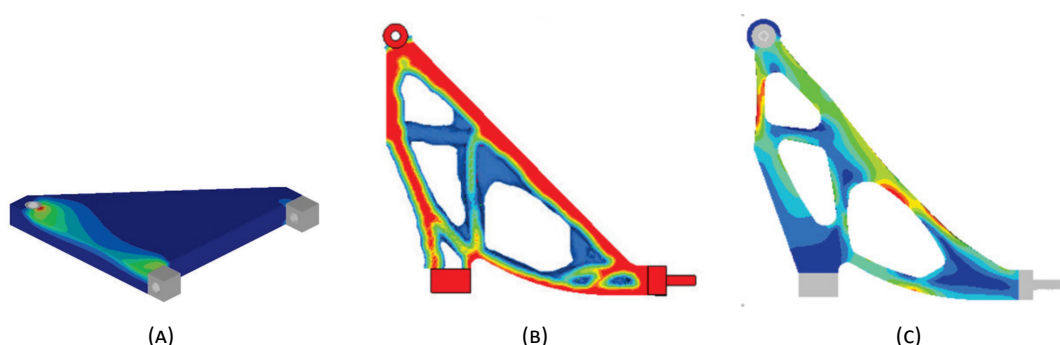


FIGURA 3.15: Otimização estrutural topológica aplicada ao braço de suspensão (a) design inicial (b) design conseguido com otimização topológica (c) design final conseguido com otimização de forma (Marzbanrad e Hosseinpour 2017)

TABELA 3.5: Tabela de comparação dos resultados obtidos nas respectivas otimizações (Marzbanrad e Hosseinpour 2017)

Método	Massa (kg)	Núm. ciclos de fadiga (10^6)	$\bar{\sigma}_{max}$ (MPa)
Modelo original	3,6	1,9	70,6
Otimização Topológica	1,8	-	-
Modelo suavizado	2,2	1,46	70,8
Modelo Final	0,75	1,33	157,6

Embora a redução das massas não suspensas de um automóvel tenha um impacto significativo no desempenho da condução, estas não constituem uma percentagem substancial da massa total do veículo. Para alcançar reduções expressivas no consumo de combustível e nas emissões de gases poluentes, a aplicação de técnicas de otimização estrutural seria mais benéfica se aplicada a componentes como o chassis do automóvel. Este componente, que representa aproximadamente 20% a 30% da massa total do veículo, constitui uma parte substancial do peso total de um veículo.

A seguir, apresenta-se um exemplo de otimização de um chassis automóvel do tipo monocoque, baseado no chassis de um Ferrari F458 Italia, através da combinação do método numérico FEM com um algoritmo de otimização estrutural SIMP (Cavazzuti et al. 2011). Foram considerados cinco casos de carga: rigidez fletora global, rigidez torsional global, rigidez local na

ligação do chassis com a suspensão, motor e caixa de velocidades, resposta em frequência modal quando a estrutura é submetida aos casos de carga de rigidez fletora e torsional global, e uma simulação de impacto frontal.

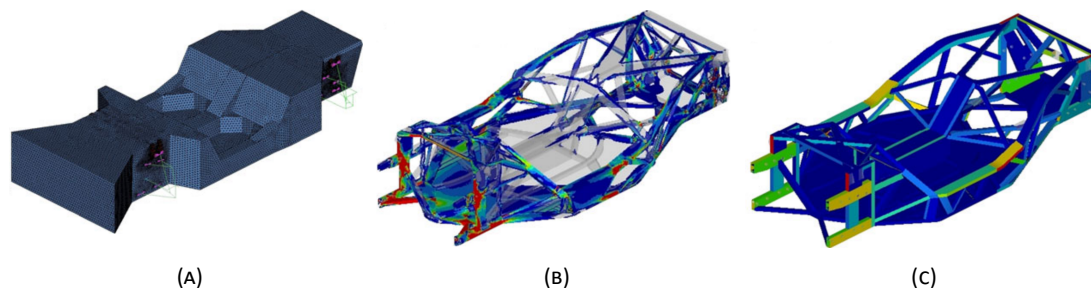


FIGURA 3.16: Otimização estrutural topológica aplicada ao chassis (a) design inicial (b) design intermédio (c) design final (Cavazzuti et al. 2011)

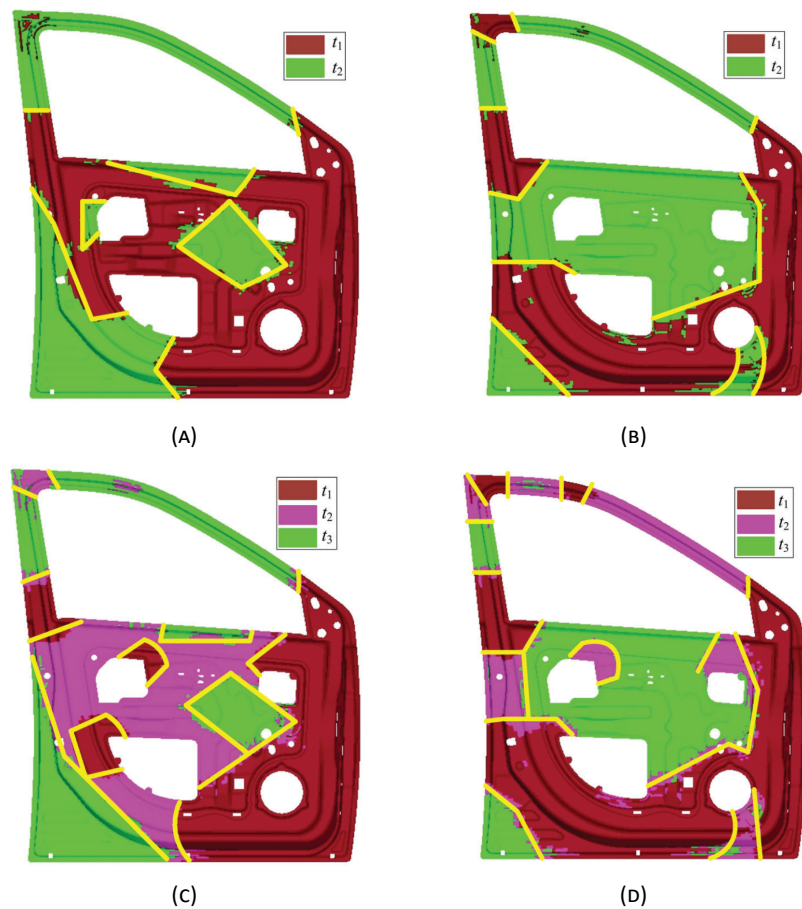
Na análise dos resultados, foi observável que os valores de massa obtidos no *design* final flutuaram quando comparando casos de carga e definições de condições de fronteira diferentes, sendo que em determinados casos, os valores de massa não chegaram sequer a convergir. Deste modo, foi concluído que, mesmo que o problema seja bem definido, a massa total do chassis obtida não é um parâmetro fulcral para este problema de otimização. Os casos de carga aplicados são demasiado distintos e sensíveis às parametrizações das condições de fronteira, não permitindo uma simulação fidedigna do comportamento real. No caso apresentado, a melhor forma de analisar a otimização é através da análise da topologia obtida no design final, que, ao contrário dos resultados numéricos, é definida com maior clareza (Fig. 3.16).

Para além da utilidade na redução de massa e na remoção de material de componentes automóveis, a otimização estrutural pode também servir como um meio de desenvolvimento e melhoramento do processo de fabrico utilizado na construção de determinados componentes. A soldadura é amplamente empregue na construção automóvel, especialmente na fase de fabrico da carroçaria. A aplicação de um algoritmo evolucionário de otimização permite melhorar o processo de soldadura através da modificação topológica das peças a serem soldadas. Num novo exemplo que implementa o conceito apresentado, é utilizada a técnica de otimização evolucionária BESO, que se destaca por permitir não só a remoção de material do *layout*, mas também a sua adição, caso necessário. O exemplo deste artigo explora a otimização do painel interior de uma porta com soldadura de camadas, com o objetivo de melhorar a localização das linhas de soldadura e a espessura do domínio, quando a própria porta é submetida a determinados casos de carga definidos pelo autor (G. Li et al. 2015).

Com a Tabela 3.6, é possível observar que a redução de massa conseguida foi notória face aos valores de massa do *design* inicial. Com a otimização, não só foi possível conseguir a característica redução de massa, como também foram obtidas as várias camadas de espessuras diferentes para prosseguir com o seu fabrico, denotando também as próprias linhas de soldadura a adotar na construção da porta. Deste modo, é demonstrada a eficiência da metodologia BESO para aplicações de otimização de camadas para aplicação de processos de ligação.

TABELA 3.6: Massa dos painéis TWB da porta antes e depois da otimização (G. Li et al. 2015)

Caso de Carga	m_i (kg)	m_f (kg)	Relação de massa removida (%)
a)	8,124	6,516	19,79%
b)	9,749	7,455	23,53%
c)	10,560	7,459	29,37%
d)	11,370	8,951	21,28%

FIGURA 3.17: *Designs* otimizados de painéis soldados de uma porta de um automóvel, quando sujeita a determinados casos de carga, com representação de várias espessuras a utilizar (a) caso de carga 1 (b) caso de carga 2 (c) caso de carga 3 (d) caso de carga 4 (G. Li et al. 2015)

Capítulo 4

Fabrico Aditivo

O fabrico aditivo trata-se de um processo que envolve a construção de um objeto tridimensional através da deposição sucessiva de material, camada por camada, até que a forma desejada seja completa. A génese deste tipo de processo remete aos anos 80. A primeira patente registada de um processo de fabrico aditivo foi efetuada por Chuck Hull, com a máquina de estereolitografia, que fazia uso da fotoquímica para produção de peças por camadas. Deckard, Beaman e Forderhase, em 1986, desenvolveram a ideia de Hull e patentearam a sinterização a laser seletiva (SLS) (Gargiulo 2023). Em 1989, Crump 1991 patenteou o fabrico de filamento fundido, que apresenta uma abordagem distinta das apresentadas e patenteadas anteriormente, com a aplicação de filamento fundido contínuo impresso em camadas (Balletti, Ballarin e Guerra 2017).

O avanço da tecnologia robótica impulsionou o fabrico aditivo, tornando-a um processo mais comum não apenas na prototipagem, mas também no fabrico de auxiliares de produção e produtos finais. Ao longo dos anos, diversas técnicas foram criadas e aperfeiçoadas, impulsionando a popularidade crescente desse processo, devido a diversas vantagens que o mesmo apresenta em relação aos processos de fabrico tradicionais, como a prototipagem rápida de componentes, produção de peças com geometrias complexas e impossíveis de serem concebidas por outros métodos, agilidade para fins de desenvolvimento e pesquisa, e a necessidade de um número reduzido de máquinas (Dutkowski, Kruzel e Rokosz 2022). Num estudo estatístico anual efetuado pela *Wohlers Association*, o *Wohlers Report*, é realizado um questionário a várias empresas de diversos setores industriais sobre a aplicação da sua maquinaria. Na Fig. 4.1, são apresentados alguns dos resultados do estudo efetuado sobre as aplicações de equipamento e respetivas secções industriais. É observável que a indústria automóvel representa uma parte considerável da indústria mundial (17 % do total), sendo a sua influência apenas inferior à indústria de maquinagem e de produtos de consumidor e eletrónica. As áreas de aplicação de equipamento industrial incluem várias secções que demonstram potencial revolucionário com a aplicação de técnicas de FA, como a prototipagem, moldes, gabaritos e produção direta, que representam perto de 70 % das áreas de aplicação demonstradas. Das áreas de aplicação mencionadas, as mesmas representam uma parte considerável do processo de conceção automóvel, demonstrando a influência e a abrangência das técnicas de fabrico aditivo com uma forte aposta nas mesmas.

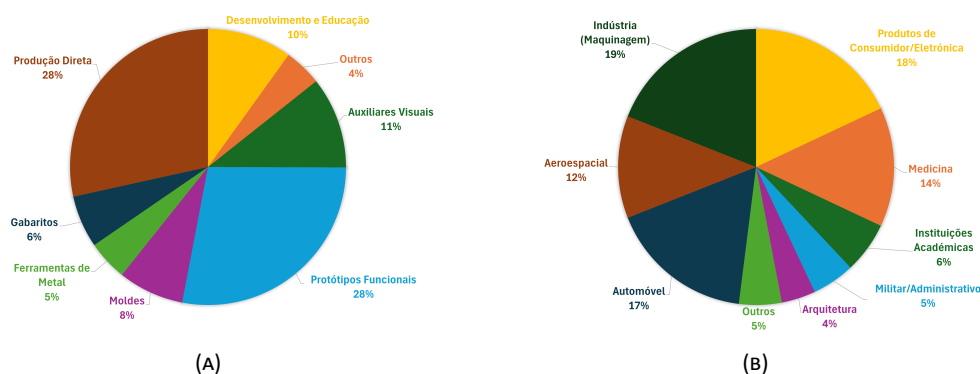


FIGURA 4.1: (a) Áreas de aplicação para equipamento industrial (b) Influência no mercado de cada setor industrial (*Wohlers Report, 2019*)

A Fig. 4.2 apresenta uma estimativa de sistemas de FA de material metálico vendidos ao longo dos anos, apresentada no *Wohlers Report* de 2024. A tendência exponencial observada, à exceção dos anos de 2020 e 2021, em que uma boa parte das empresas entraram num período de recessão devido à pandemia de COVID-19, impossibilitando o avanço tecnológico e o investimento no aprimoramento da tecnologia, justifica o significativo crescimento deste tipo de processo, com o constante aumento da procura destes sistemas por parte das grandes empresas. O crescimento global pode ser atribuído ao crescente interesse na modernização tecnológica de maquinaria de ponta, ao incremento das margens de lucro nos processos de conceção e à crescente procura por métodos de fabrico mais sustentáveis.

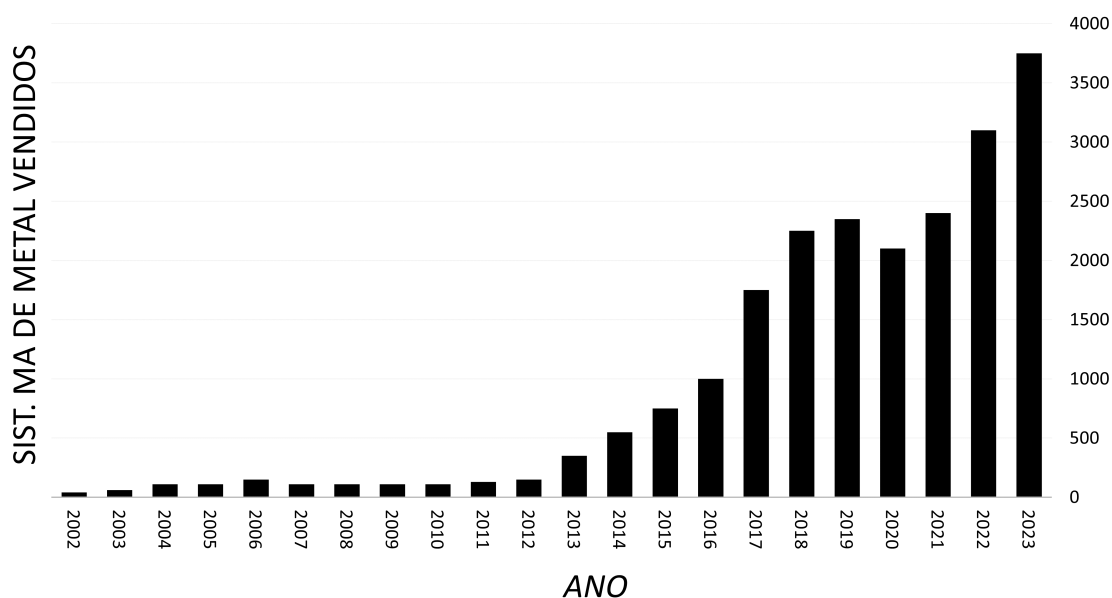


FIGURA 4.2: Gráfico de estimativa de sistemas de FA de metal vendidos nos últimos 21 anos, apresentado no *Wohlers Report 2024*

Uma das técnicas de FA mais populares trata-se do fabrico por filamento fundido (ou FFF), tecnologia popular na construção de peças termoplásticas. No caso do fabrico de peças em material metálico, são normalmente empregues técnicas como a sinterização seletiva por laser,

a fusão por feixe de eletrões, o jato de ligante metálico ou a fotopolimerização em cuba. A adoção das técnicas mencionadas permite a criação de componentes com um interior reticulado, o que resulta em economias de material e reduções de peso consideravelmente notáveis, especialmente em comparação com os processos de maquinagem mais convencionais (Birosz, Ledenyák e Andó 2022).

Na construção mecânica avançada, o comportamento mecânico dos componentes assume um papel crucial para garantir a sua funcionalidade e viabilidade. No FA, a resistência dos componentes depende intrinsecamente dos parâmetros do processo selecionados e da geometria de preenchimento selecionada (Lubombo e Huneault 2018). O efeito do padrão de preenchimento no desempenho mecânico de estruturas tem sido objeto de crescente interesse e investigação. Diversos estudos são publicados regularmente, expandindo e complementando as ideias existentes ou propondo novas perspetivas e argumentos. O foco da literatura referente a este tema varia, sendo possível encontrar estudos que analisam a resistência à flexão (Chacón et al. 2017; Pais, Alves e Belinha 2021, a resistência à compressão e à fratura (Song et al. 2017), e a resistência ao impacto (L. Wang, Gramlich e Gardner 2017).

4.1 Regulamentação e Categorização do Fabrico Aditivo

A normalização e classificação das subsecções de processos dentro do fabrico aditivo é dada através do documento de standardização ISO/ASTM 52900 - 2021. O mesmo os classifica e descreve da seguinte forma:

- **Jato de Aglutinante:** processo no qual um agente de ligação líquido é depositado seletivamente para unir materiais em pó;
- **Deposição por Energia Dirigida:** processo em que a energia térmica concentrada é utilizada para fundir materiais por fusão à medida que os mesmos são depositados;
- **Extrusão de Material:** processo no qual o material é distribuído seletivamente através de um bocal ou orifício. O FDM (*Fused Deposition Modelling*) e o FFF (*Fused Filament Fabrication*) pertencem a esta categoria;
- **Impressão por Jato de Material:** processo no qual as gotículas de matéria-prima são depositadas seletivamente
- **Fusão em Leito de Pó:** processo em que a energia térmica funde seletivamente regiões de uma cama de pó
- **Impressão por Laminação de Folhas:** processo em que folhas de material são coladas para formar uma peça
- **Fotopolimerização em Cubo:** processo no qual o fotopolímero líquido numa cuba é curado seletivamente por polimerização ativada por luz

4.2 Fabrico de Filamento Fundido (FFF)

O fabrico de filamento fundido, também conhecido por FFF, ou FDM (Modelação por Deposição Fundida) apresenta-se como a técnica de impressão tri-dimensional mais popular no mercado. Patentado em 1989 pela Stratasys® (Crump 1991), o processo é baseado na extrusão de um filamento de material termoplástico aquecido, onde são depositadas respetivas camadas bi-dimensionais numa plataforma de modo a construir um componente completo, camada a camada, através de um modelo digital do mesmo. Destaca-se pela sua simplicidade, fiabilidade e

acessibilidade, três características que justificam a sua popularidade na indústria, na investigação e na comercialização de impressoras para uso próprio (Masood 2014). Na Fig. 4.3, é observável uma representação do funcionamento do processo FDM/FFF.

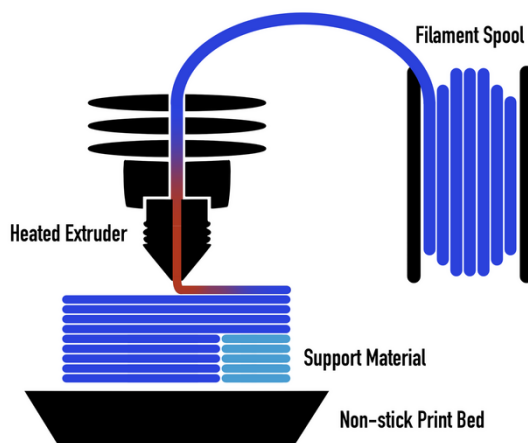


FIGURA 4.3: Esquema de funcionamento do FDM, ou *Fused Filament Fabrication* (Universidade de Maryland)

A limitação mais preponderante e notável do FDM/FFF trata-se do tempo de processamento da impressão. Convencionalmente, a limitação é ultrapassada com a utilização de processos como o jato de aglutinante, que permite velocidades de impressão superiores e uma melhor compatibilidade com produções de série elevada.

Na Fig. 4.4, é apresentado um esquema de um processo de impressão 3D por FFF/FDM. O mesmo pode ser descrito da seguinte forma:

1. Criação de ficheiro CAD, seja o mesmo construído pelo utilizador ou digitalizado. O ficheiro resultante consiste numa superfície tri-dimensional fechada e recortada;
2. É criada uma malha através da triangulação da superfície exterior, criando o ficheiro .stl;
3. Através de um *software* de fatiamento, é escolhida a parametrização de impressão requerida para a impressora e o componente e é realizada a tradução do modelo digital num código .gcode, que contém as instruções para a construção da peça camada a camada;
4. É enviado o arquivo .gcode para a respetiva impressora e é iniciado o processo de impressão (Pais, Alves e Belinha 2021).

4.2.1 Polímeros Termoplásticos no FDM/FFF

A variedade de materiais disponíveis para aplicação no FDM/FFF oferece uma abundância de propriedades e características que atendem aos requisitos do fabricante. Os termoplásticos apresentam-se como o material mais popular na impressão 3D, devido à sua facilidade de utilização, baixa temperatura de fusão e extrusão, excelente relação entre custo e qualidade para a maior parte das aplicações desejadas, elevada compatibilidade com uma grande parte das impressoras e versatilidade de propriedades dada a seleção de um termoplástico em específico.

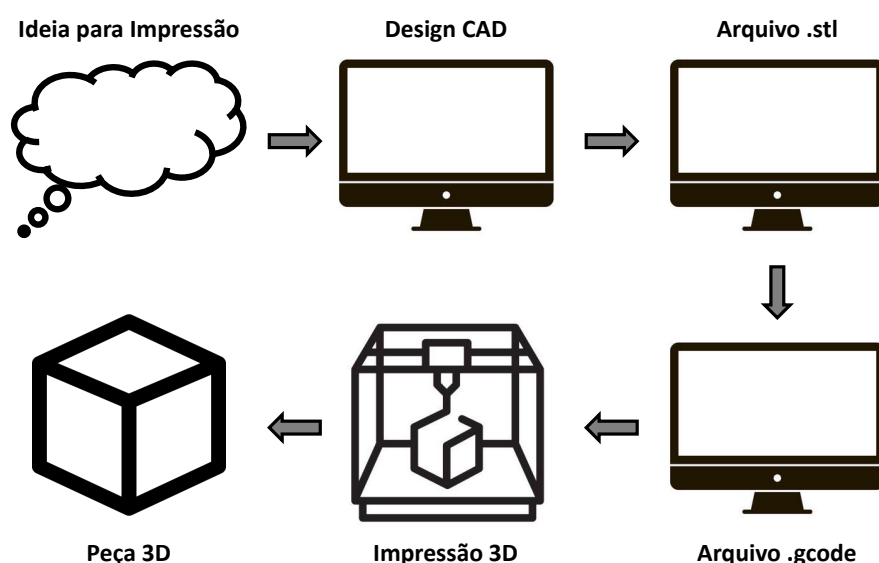


FIGURA 4.4: Esquema representativo do processo FDM/FFF

Na Tabela 4.1 são apresentadas propriedades mecânicas e físicas de alguns termoplásticos que apresentam relevância em processos de fabrico aditivo.

TABELA 4.1: Propriedades mecânicas e físicas de termoplásticos commumente aplicados na indústria

Polímero	E (GPa)	Massa Volúmica (g/cm^3)	Tg (°C)
Termoplásticos Rígidos			
PLA	0,35 - 3,5	1,25	45 - 60
PP	0,90 - 1,55	0,89 - 0,91	- 25 - (-15)
PC	2 - 2,44	1,14 - 1,21	142 - 205
PETG	2,2	1,18 - 1,37	81
PVA	3,86	1,23	163
PEI	2,45 - 2,60	1,34	180
PA	2,62 - 3,2	1,12 - 1,14	44 - 56
ABS	1,1 - 2,9	1,01 - 1,21	88 - 128
ASA	2 - 2,14	1,14	103
Termoplásticos Flexíveis			
TPE	0,0036 - 0,12	0,9 - 1,2	-90 - (-40)
TPU	0,48 - 5,5	1,28 - 1,66	-27

Vários estudos que aprofundam a parametrização ou a análise estrutural de componentes impressos com os materiais da Tabela 4.1 podem ser encontrados, como a investigação de propriedades mecânicas e microestruturais de componentes impressos em ABS (acrilonitrila butadieno estireno) (Le et al. 2021), PEEK (poliéter éter cetona) (P. Wang et al. 2021), PP (polipropileno) (Zander et al. 2019), PETG (polietileno tereftalato de etileno glicol) (Kumar, Khan e Mishra 2020), e nos termoplásticos macios TPE (elastómero termoplástico) e TPU (poliuterano termoplástico) (Xu et al. 2020).

O PLA (ácido poliático) é destacado pela sua clara popularidade e por vantagens como a sua biodegradabilidade, facilidade de impressão e excelente relação entre custo e qualidade superficial conseguida. Consequentemente, a sua contribuição investigativa na área do fabrico aditivo, e especificamente, na tecnologia FDM/FFF é abundante, demonstrando uma vasta literatura em análises de desempenho mecânico, como na influência da orientação de impressão nas propriedades mecânicas de um componente (Eryildiz 2021), no impacto da densidade de preenchimento (Ambati e Ambatipudi 2022) e na influência e efeito na temperatura de extrusão (Ansari e Kamil 2021).

4.3 Aplicação do Fabrico Aditivo na Indústria Automóvel

Com o decorrer dos anos e com a respetiva evolução da tecnologia eletrónica, o fabrico aditivo tem demonstrado um crescimento exponencial da sua adoção pela indústria automóvel, impulsionado pelo contínuo aprimoramento das técnicas, permitindo a sua aplicação e utilização em grande escala. O processo de fabrico sempre se demonstrou apelativo nos processos de conceção iniciais e prototipagem, mas tem demonstrado forte presença na construção de moldes e, em casos específicos, de componentes finalizados. A fase de prototipagem beneficia de forma considerável com a aplicação do fabrico aditivo, devido ao baixo tempo despendido nas fases de manufatura dos componentes a testar. Este aspeto é preponderante, uma vez que permite uma redução de custos e uma agilidade superior durante o processo de manufatura. Ademais, apresenta benefícios ecológicos, na redução do consumo, de desperdícios de material e na simplificação de logística do ciclo de vida de um componente (Mohanavel et al. 2021).

Na Fig. 4.5, são apresentados 3 tipos de componentes de um veículo construídos com recurso, exclusivamente, ao fabrico aditivo e a um possível acabamento superficial.

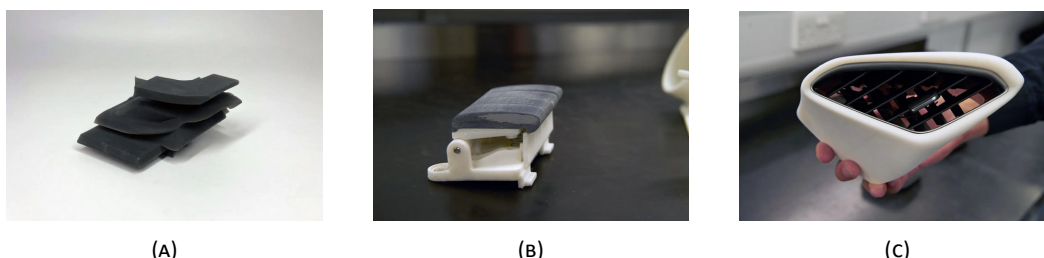


FIGURA 4.5: Amostras de componentes de um automóvel construídos com fabrico aditivo (a) selantes de portas (b) conjunto de botões (c) ventilação de ar (FormLabs 2022)

Na Fig. 4.6, é observável o protótipo de um quadro monocoque e do *body* correspondente, impresso em escala 1/6. Relativamente aos custos da impressão 3D realizada em comparação com o processo de maquinagem anteriormente utilizado, foi observado que:

- O processo tradicional apresentou um custo total a rondar os 40.000\$, em comparação com os 3.090\$ da impressão (FDM);
- O processo tradicional levou um tempo aproximado de preparação de 120 dias, em comparação com os 20 dias impressão e da preparação do protótipo, que incluiu a remoção dos suportes, a lixagem, a pintura, etc. (Mackay 2016).



FIGURA 4.6: Protótipo de um quadro monocoque e o *body*, em escala 1/6 (Mackay 2016)

Deste modo, é possível concluir que existe uma forte possibilidade de poupança económica na redução de custos e de tempo na construção de componentes envolvidos na fase de prototipagem, assim como na redução da logística por detrás do processo de conceção de componentes auxiliares de um automóvel, através da sua simplificação com a impressão direta das peças desejadas.

4.3.1 Papel do Fabrico Aditivo na Transição Elétrica

A indústria automóvel foi alvo de uma mudança de paradigma nos últimos 20 anos, com a transição dos veículos convencionais com unidade motriz de combustão interna para veículos com unidade motriz elétrica. Simultaneamente, a procura crescente associada a este mercado exige ciclos de produção com maior eficiência e a necessidade de processos de construção sustentáveis tem sido um foco preponderante em várias discussões políticas (Charles et al. 2021). A transição para energia elétrica surgiu como resolução de diversos problemas e desvantagens associados aos MCI. Contudo, a tecnologia eletrónica automóvel atual apresenta diversas limitações nas quais os líderes mundiais da indústria aplicam os recursos de desenvolvimento e investigação para as colmatar. Uma das maiores limitações trata-se da autonomia do veículo. A melhoria da autonomia é conseguida com a investigação e desenvolvimento da tecnologia empregue nas baterias do veículo. Contudo, o desenvolvimento da tecnologia é relativamente demorado, e é possível conseguir bons resultados no aumento da autonomia através da redução da massa total do automóvel, o que permite diretamente uma melhor eficiência no consumo de energia do veículo. A vantagem característica do fabrico aditivo trata-se da redução de massa de uma estrutura sem comprometer a sua rigidez, mostrando-se compatível com o objetivo debatido.

Assim como a tecnologia eletrónica automóvel apresenta como principal foco a sustentabilidade adicional em relação à tecnologia automóvel convencional, o fabrico aditivo possibilita a conceção de componentes com um comportamento mecânico comparável ou superior ao componente original sólido, simultaneamente reduzindo o impacto ambiental associada ao ciclo de vida de uma peça. Esta redução é conseguida através da redução da extração de recursos e uma simplificação no processamento e fornecimento, que por sua vez apresentam um impacto ambiental considerável associado (Charles et al. 2021).

O FA apresenta, para além da redução de massa e da possibilidade de otimização mecânica, a possibilidade de otimização funcional de determinados componentes intervenientes no funcionamento do automóvel. Por exemplo, a impressão de canais de refrigeração em componentes que dos mesmos necessitam, ou a impressão funcional de encaixes específicos para sensores, cujo número tem aumentado ao longo dos anos, que seriam de difícil fabrico nos

processos de fabrico tradicionais (Schuh et al. 2020).

Apesar deste tipo de mudança de relance parecer insignificante, as suas consequências podem ser consideráveis através da sua utilização em grande escala. Com a implementação do fabrico aditivo numa escala considerável na fase de produção do veículo, pode ser reduzida de forma significativa a complexidade da cadeia de abastecimento global. A produção em massa de vários componentes envolve vários fornecedores e subfornecedores, que por sua vez utilizam uma quantidade considerável de material para a construção de moldes e maquinaria variada, resultando no consumo de recursos e energia que poderia ser evitada com a aplicação de técnicas de impressão por fabrico aditivo (Delic e Eyers 2020).

Com a análise às tendências observadas na indústria automóvel, é expectável que o envolvimento de técnicas de fabrico aditivo continue a crescer, uma vez que a mesma tem demonstrado resultados promissores e uma forte aposta por parte das grandes marcas. Adicionalmente, a sua combinação com o foco tecnológico atual e popular, a inteligência artificial, complementa a expectativa criada, demonstrando-se promissora e um tema crucial para a sofisticação do processo de construção automóvel.

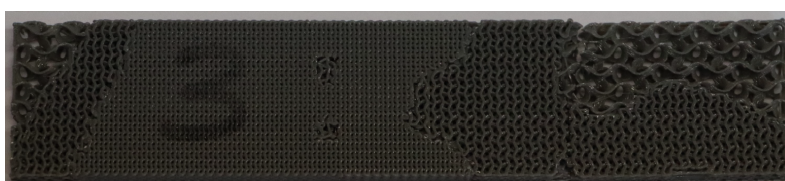
4.4 Otimização do Enchimento

O enchimento, ou *infill* de um componente produzido de modo aditivo refere-se à sua estrutura interna, composta por um padrão reticulado de material que preenche o volume entre os contornos externos. No processo de fatiamento da modelação CAD do componente a imprimir, são selecionados vários parâmetros de impressão, nos quais alguns se referem à caracterização do enchimento, como a sua topologia base ou a sua densidade. A otimização do enchimento tem como objetivo a melhoria da rigidez específica através da redução da massa total do componente impresso e da maximização da sua rigidez total.

O conceito de estruturas celulares de gradiente funcional (FGCS) é extremamente apelativo na construção de estruturas relativamente leves e que simultaneamente satisfaçam as necessidades mecânicas impostas. Trata-se de um tipo de material caracterizado pela sua distribuição gradiente ao longo de uma estrutura. Deste modo, é possível construir estruturas com uma gradação das propriedades, variando parâmetros ao longo do componente, como a densidade do material ou a distribuição porosa do objeto (Pais, Alves e Belinha 2021).



(A)



(B)

FIGURA 4.7: Amostras fabricadas com fabrico aditivo (a) Distribuição nominal (b) Distribuição gradiente (Pais, Alves e Belinha 2021)

A otimização do preenchimento em fabrico aditivo tem sido um tópico de pesquisa e investigação ativo ao longo dos anos, complementado pelo crescimento observado da tecnologia de FA. Nguyen e Vignat 2016 desenvolveram uma metodologia incidente na criação de estruturas reticuladas para impressão 3D. O algoritmo identifica as células unitárias mais comuns e a partir da informação obtida, aplica as mesmas de modo a atender aos requisitos mecânicos exigidos. Na Fig. 4.8, é encontrada a biblioteca de geometrias de células unitárias para o estudo em questão, assim como uma exemplificação de uma camada criada com uma das geometrias disponibilizadas na biblioteca.

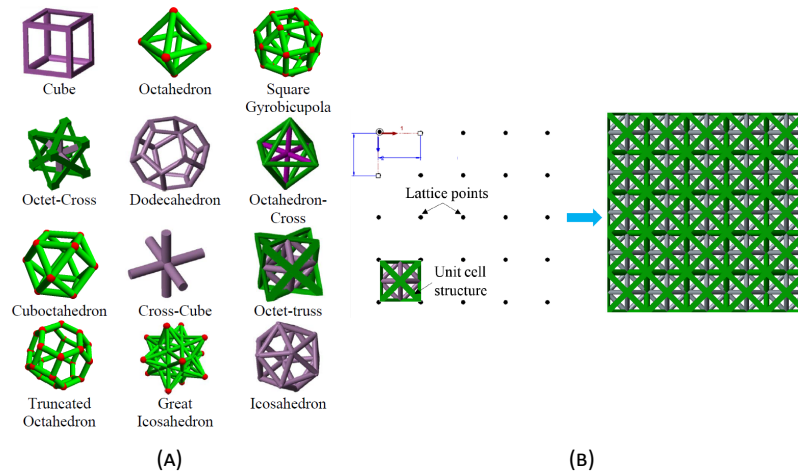


FIGURA 4.8: Representação de geometrias de células unitárias da biblioteca do algoritmo e construção de camada (a) biblioteca de células unitárias (b) construção da camada (Nguyen e Vignat 2016)

De seguida, é construído o volume da estrutura celular. Depois, com o espaço cúbico celular criado, é embutido o objeto requerido e é eliminado o espaço de sobra desnecessário. O procedimento numérico proporcionou uma redução de 49,58% da massa da roda dentada helicoidal em relação à estrutura original. Além disso, as propriedades mecânicas do material, como o módulo de Young (e consequentemente, a rigidez), apresentaram uma melhoria considerável.

Tang, Kurtz e Zhao 2015 propõe um método de projeto para estruturas celulares focado na criação de estruturas através da aplicação de um algoritmo BESO, cuja otimização incide na espessura dos tramos da estrutura ao invés da adição ou remoção dos mesmos.

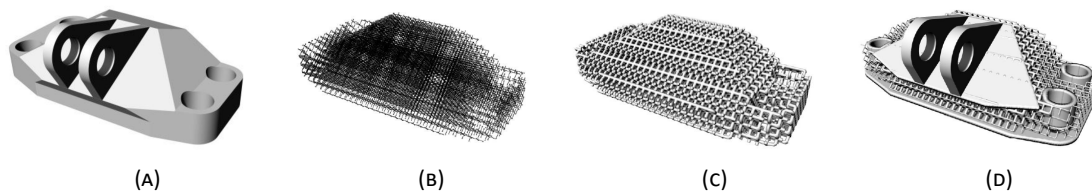


FIGURA 4.9: Representação de geometrias de células unitárias da biblioteca do algoritmo e construção de camada (a) biblioteca de células unitárias (b) construção da camada (Tang, Kurtz e Zhao 2015)

Através do método proposto, foi conseguida uma redução da massa de 75%. Adicionalmente, a tensão de Von Mises máxima foi reduzida em 65,7% e a rigidez da estrutura foi consideravelmente

melhorada, com uma diminuição do deslocamento máximo em 70,4%, em relação a uma estrutura homogénea com o mesmo volume.

Os estudos previamente apresentados demonstraram que o FA foi aplicada com sucesso no melhoramento do desempenho funcional de componentes com a aplicação de algoritmos de otimização da sua constituição e preenchimento. Adicionalmente, a integração de estruturas reticulares na topologia da peça possibilita uma redução significativa de peso e uma possível melhoria no seu desempenho mecânico em comparação com uma peça original maciça.

4.5 Estruturas celulares c/ gradiente funcional obtidas por algoritmos de otimização

O estudo de Pais, Alves e Belinha 2021 apresenta uma abordagem de otimização para a criação de estruturas celulares com um gradiente funcional, através da implementação de algoritmos evolucionários de otimização estrutural. O objetivo passaria por desenvolver estruturas com melhor desempenho mecânico e menor massa volúmica em relação ao modelo original, conservando a própria geometria principal. Para o efeito, os autores recorreram a materiais celulares com preenchimento em forma de giróide, visando a obtenção de relações rigidez/massa total superiores. Em complemento ao BESO, foi também adotado um algoritmo bi-evolucionário inspirado no conceito de remodelação óssea. Com o mapa de densidade obtido, foram aplicadas as respetivas funções de suavização, de modo a evitar gradientes drásticos de densidade na estrutura estudada. Através de uma rotina de conversão construída pelo próprio autor, foram convertidos os ficheiros de caracterização do modelo otimizado (mapa de densidade obtido através do algoritmo de otimização) em vários ficheiros .stl, de modo a permitir a impressão do novo modelo.

O procedimento convencionalmente adotado para a otimização topológica de estruturas para esta categoria de otimizações pode ser encontrado na Fig. 4.10. Na Fig. 4.11 é observável um dos casos de carga analisados neste estudo, assim como soluções de otimização obtidas e uma das respetivas impressões da estrutura para o caso de carga em questão.

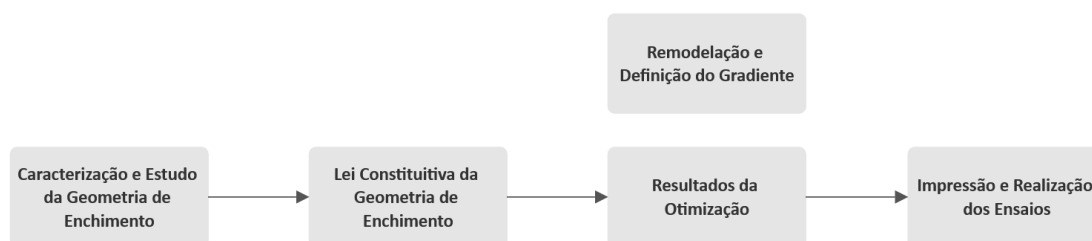


FIGURA 4.10: Metodologia utilizada na aplicação da otimização e impressão 3D de estruturas celulares

Na rotina de conversão, são selecionados três níveis de densidade, correspondentes à densidade máxima, mínima e média observada. A fim de evitar gradientes de densidade abruptos na estrutura, pode ser efetuada uma suavização de acordo com um rácio w_{ij} definido para a mesma. Desta forma, é calculado um novo nível de densidade $\rho_i^{suav.}$, com base na distância entre os centróides dos elementos i e j (Equação 4.1).

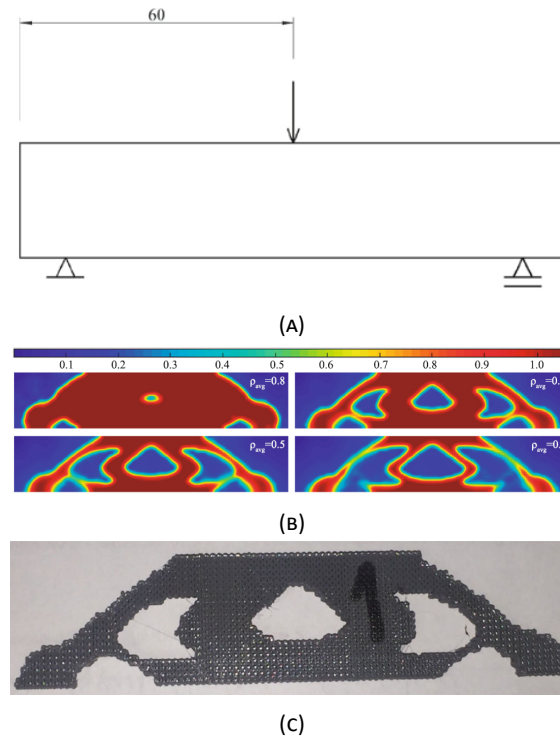


FIGURA 4.11: (a) Caso de carga admitido (b) Soluções de otimização obtidas para determinadas iterações (c) Estrutura otimizada e suavizada impressa (Pais, Alves e Belinha 2021)

$$\rho_i^{suav.} = \frac{\sum_{i=j}^{N_{elem}} \cdot \rho_i}{\sum_{i=j}^{N_{elem}}} \quad (4.1)$$

Vários tipos de suavização podem ser descritos com base no grau da função polinomial do rácio de suavização w_{ij} , sendo a função de primeiro grau descrita como $w_{ij} = 1 - d_{ij}$. No artigo de Pais, Alves e Belinha 2021, os resultados analisados variaram consoante a função de suavização utilizada e a direção de impressão. Foi observável que o fator preponderante nos valores de rigidez obtidos foi a direção de impressão.

O trabalho realizado por D. Li et al. 2018 propõe um método de otimização por *design* generativo através de estruturas celulares com gradiente de densidade, de modo a combinar as vantagens provenientes da otimização topológica com o *design* de treliças, visando a melhoria da rigidez e da capacidade de manufatura do componente. Na Fig. 4.12, é observável o ensaio mecânico do caso de estudo de referência selecionado, onde uma treliça em giróide e uma viga otimizada com a utilização de estruturas FGCS foram impressas e testadas em flexão em três pontos, e os resultados comparados com os resultados da simulação numérica. Foi observado que a viga otimizada demonstrou uma rigidez superior à viga uniforme, uma vez que foi dimensionada para a minimização da sua deformação. Adicionalmente, foi verificado que a resistência da viga otimizada mostrou ser 161,9 % superior à viga uniforme. Através dos resultados obtidos do caso de estudo de referência, foi demonstrada a eficiência do método de otimização na projeção de estruturas treliçadas com gradiente funcional com melhor desempenho mecânico.

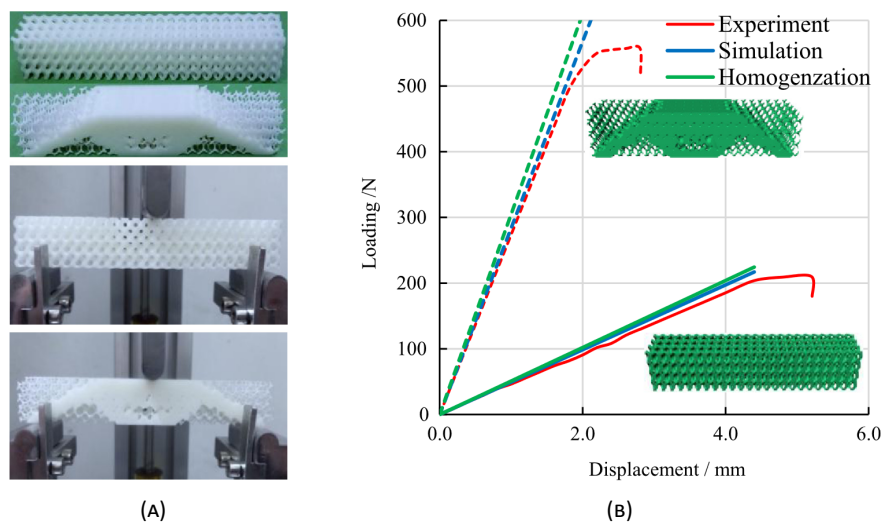


FIGURA 4.12: Teste da viga MBB (a) impressão 3D e preparação para testagem de flexão em três pontos (b) curvas força/deslocamento dos testes realizados (D. Li et al. 2018)

De seguida, foi aplicado este mesmo processo e filosofia de otimização à viga estrutural de um *quadcopter*, que originalmente apresenta um *design* de treliças. Novamente, a comparação foi feita através de uma simulação por elementos finitos e com testes efetuados em protótipos impressos. Na Fig. 4.13, são apresentados os *designs* originais e da otimização primária, assim como os *designs* de treliças e de estruturas FGCS a serem comparados.

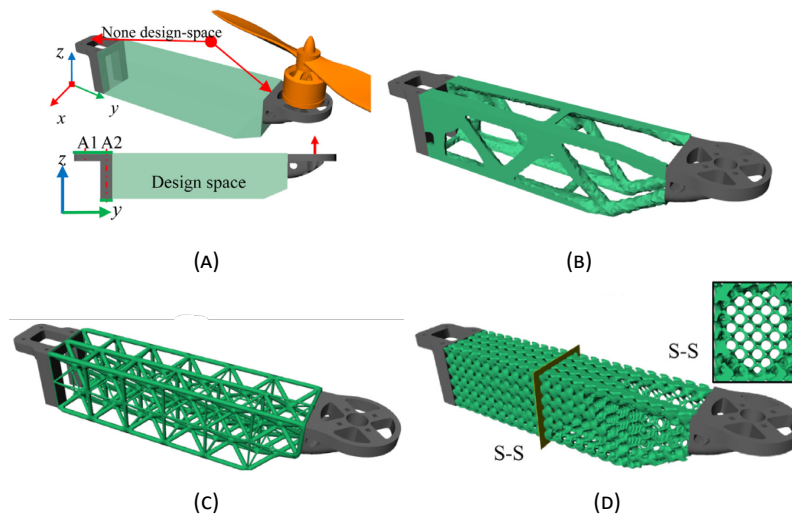


FIGURA 4.13: Resultados de otimização do braço do *quadcopter* (a) Forma inicial (b) Resultado inicial da otimização topológica (c) Resultado do *design* de treliças tradicional (d) Resultado da otimização FGCS (D. Li et al. 2018)

Os resultados obtidos do estudo da deformação indicaram que, para as simulações numéricas, o braço otimizado pelo método FGCS sofreu uma deformação 44,7 % menor que o projeto da treliça tradicional, sob as mesmas condições impostas. Na realização dos ensaios físicos, foi observada a mesma tendência, onde a deformação do braço FGCS foi 43,6 % menor que a deformação no braço de treliça tradicional. Contudo, a tensão de Von Mises máxima observada

nas simulações numéricas foi 284,4 % superior no braço FGCS.

Este caso de estudo comprovou o já observado no caso de estudo de referência previamente mencionado. O método de otimização através de estruturas FGCS, nomeadamente com a utilização da geometria de preenchimento giróide, melhorou significativamente a rigidez estrutural do braço *quadcopter*, comprovando assim a robustez e eficiência deste tipo de processo de otimização através da realização e comparação de resultados ensaiados numericamente e fisicamente.

4.6 Giróide

As superfícies giróides retratam um tipo de superfície mínima triplicamente periódica (TPMS) descoberta por Schoen 1970, cuja curvatura média é cerca de zero (isto é, superfície lisa, sem pontos como uma esfera ou bordas afiadas). Na Fig. 4.14, é possível encontrar quatro tipos de superfícies TPMS comumente utilizadas.

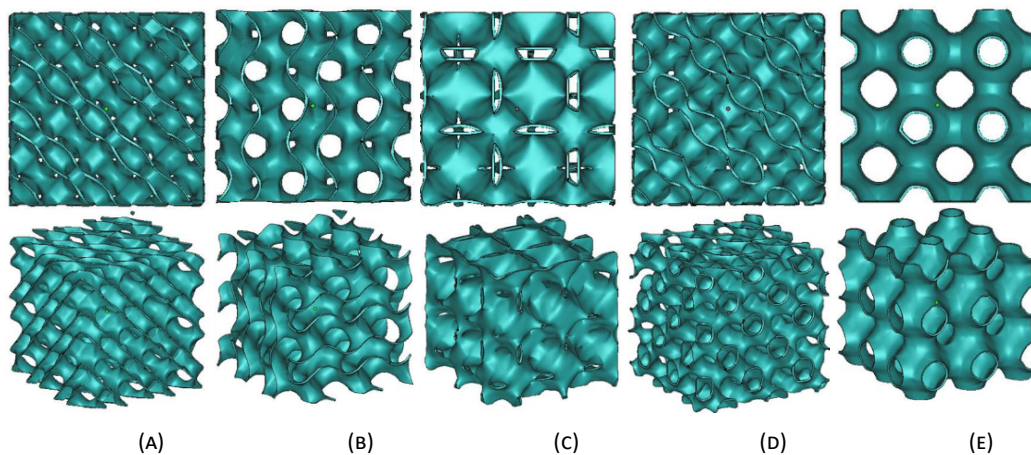


FIGURA 4.14: Vista do topo e isométrica das superfícies mínimas triplicamente periódicas mais populares (a) Diamante (b) Giróide (c) Neovius (d) Schwarz D (e) Schwarz P (Hameed et al. 2021)

A utilização de superfícies TPMS é alvo de estudo intensivo, nomeadamente na aplicação das mesmas em aplicações de FA e na investigação de melhoria do desempenho geral com as FGCS. Estas oferecem melhores relações superfície-volume em comparação com as estruturas celulares mais convencionais. Deste modo, as TPMS demonstram-se apelativas para casos de transferência de calor, filtração ou, no caso fulcral do presente trabalho, na procura por estruturas com rigidez específica melhorada.

Abueidda et al. 2019 demonstraram que dentro das TPMS utilizadas, a giróide demonstrou um comportamento mecânico apelativo e merecedor de análise cuidada. Foi concluído que este tipo de estrutura, sejam utilizadas giróides com densidade variável ou não, demonstra uma deformação uniforme e consistente quando sujeita a uma compressão, facilmente visível na fase inicial do seu comportamento elástico. Adicionalmente, com o aumento da densidade de material, é possível observar uma deformação ainda mais uniforme, mesmo para além do limite elástico do material. No artigo analisado, foi ainda realizada uma comparação da estrutura giróide com a Neovius, a Schoen I-WP e a primitiva. Com os testes de resistência à compressão, foi verificado que a estrutura Neovius demonstrou os resultados mais satisfatórios, seguido da

giróide e da Schoen I-WP. No que respeita à absorção de energia em compressão, a giróide demonstrou-se como a estrutura menos resistente, seguido da Neovius e da Schoen I-WP. Em todos os casos de estudo, a estrutura primitiva demonstrou piores resultados.

No estudo efetuado por Maskery et al. 2018, é avaliado o comportamento mecânico à compressão de três TPMS's: giróide, diamante e primitiva, onde foram efetuadas as simulações numéricas e a respetiva análise experimental. Na Fig. 4.15, são apresentadas as estruturas impressas para a realização dos respetivos testes mecânicos.

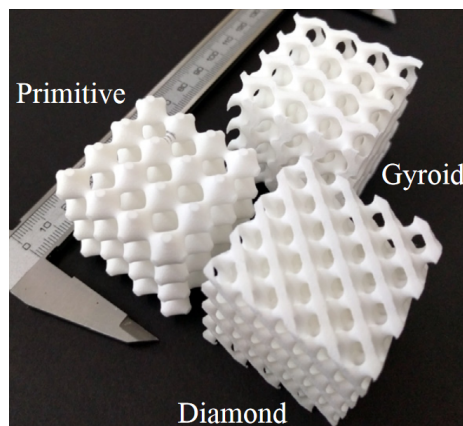


FIGURA 4.15: Estruturas em giróide, diamante e primitiva, impressas em SLS (Maskery et al. 2018)

Ao observar os resultados obtidos, foi concluído que a estrutura primitiva demonstrou uma rigidez superior às outras duas estruturas, sendo a mesma a estrutura recomendada caso exista a necessidade de um componente com uma elevada rigidez e uma direção de carga bem definida. Contudo, se o pretendido é suportar uma deformação elevada antes da rotura, células em giróide ou em diamante são preferíveis.

Capítulo 5

Simulação Numérica

Este capítulo detalha o desenvolvimento do trabalho numérico da dissertação, aplicando de maneira prática os conhecimentos adquiridos na revisão de literatura. Para avaliar a viabilidade dos métodos numéricos selecionados e analisar o impacto das variações nos parâmetros e características da malha, foram conduzidos estudos preliminares. Esta fase incluiu a investigação da convergência dos resultados numa análise linear-estática, bem como a aplicação de um algoritmo de otimização BESO, inspirado no conceito de remodelação óssea, num estudo de um caso de uma viga *cantilever*, com subsequente análise das diversas soluções obtidas. Posteriormente, o mesmo algoritmo de otimização foi aplicado a um braço de suspensão de um Opel Corsa D, onde foram observadas as diferenças entre os diversos métodos e parâmetros utilizados. Finalmente, foram desenvolvidos modelos inspirados nas melhores soluções de otimização obtidas pelo algoritmo e em filosofias de *design* de remoção de material comumente aplicadas ao tipo de componente estudado. Com os modelos construídos, foi realizada a respetiva análise linear-estática, comparando-os com um modelo completamente sólido nas mesmas condições do estudo de otimização anterior, e extraídas as conclusões sobre os resultados obtidos.

5.1 Estudo de Convergência Preliminar

A análise à convergência de um caso de estudo é realizada de modo a avaliar a fiabilidade e a precisão dos resultados de uma simulação. Para o efeito, é verificado se um dos resultados da solução numérica obtida converge para um valor único e estável (para casos de estudo de referência, para um valor analítico previsto) à medida que a malha é refinada.

O objetivo deste estudo trata-se de garantir que o método é convergente, e aferir qual a densidade da malha a utilizar em estudos posteriores. A realização deste tipo de estudos no contexto deste trabalho, isto é, para comparação do desempenho dos métodos numéricos, demonstra-se como preponderante, uma vez que permite:

1. Obter as competências básicas para uma utilização adequada do *software* em questão;
2. Avaliar a precisão e a fiabilidade dos métodos e comparar os mesmos com um valor teórico (ou de referência);
3. Comparar as taxas de convergência e os erros relativos obtidos por cada metodologia utilizada, de modo a identificar possíveis vantagens e desvantagens na sua aplicação;
4. Perceber os recursos computacionais disponíveis.

5.1.1 Viga Cantilever - Análise Elasto-estática

O caso de estudo introdutório para a respetiva análise de convergência selecionado consiste na análise linear estática de uma viga cantilever, isto é, uma viga onde são restringidas as translações de uma das extremidades, e aplicada uma força distribuída na extremidade livre. As propriedades do material consideradas foram as seguintes: módulo de Young (E) = 1 kPa e coeficiente de Poisson (ν) = 0,3. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com os valores analíticos obtidos através da Equação de deslocamento 5.1 e das Equações de tensão normal e tensão de corte 5.2 e 5.3. Dadas as condições geométricas demonstradas na Fig. 5.1, correspondendo $D = 1\text{ m}$ à altura da viga, $L = 2\text{ m}$ o comprimento da viga, $I = D^3/12$ ao momento de inércia, e $P = 1\text{ N}$ à força aplicada:

$$v(x) = \frac{2 \cdot P}{E \cdot D^3} \left[x^2 \cdot (3L - x) + 3\nu \cdot (L - x) \cdot y^2 + x \cdot (4 + 5\nu) \cdot \frac{D^2}{4} \right] \quad (5.1)$$

$$\sigma_{xx}(x) = -\frac{P \cdot (L - x) \cdot y}{I} \quad (5.2)$$

$$\tau_{xy}(x) = -\frac{P \cdot D^2}{8I} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{D^2}\right) \quad (5.3)$$

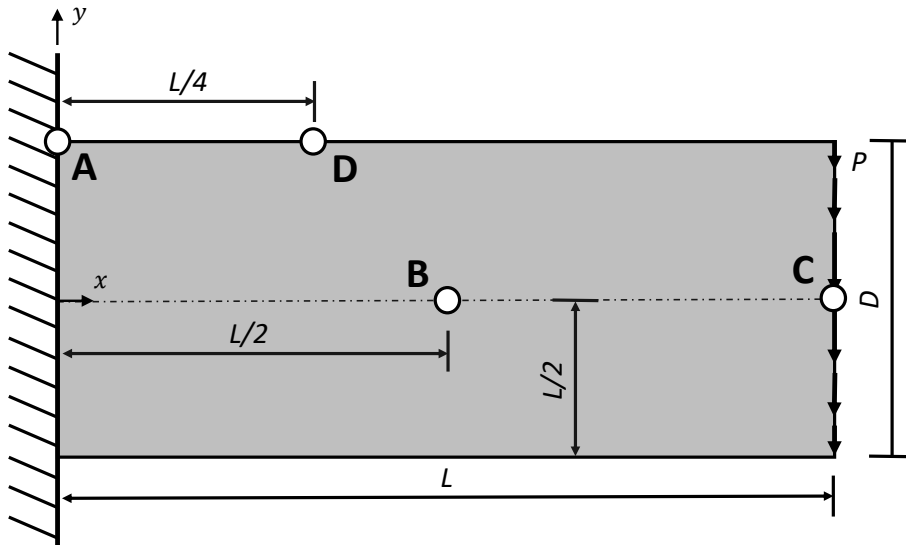


FIGURA 5.1: Viga cantilever, para estudo preliminar de convergência

A análise numérica foi conduzida, recorrendo aos métodos sem malha RPIM e NNRPIM, apresentados e discretizados no Capítulo 2, e o FEM. O objetivo incidia na comparação das taxas de convergência dos métodos considerando um estado plano de tensão, onde o vetor de tensão normal ao plano xy é zero. A parametrização utilizada na definição de cada método foi a seguinte:

- FEM 3n - Elemento finito triangular com três nós, linear e deformação constante ;
- FEM 4n - Elemento finito quadrangular Lagrangeano de quatro nós, com esquema de integração completo 2x2 pontos de integração;

- RPIM - Utilização de parametrização padrão do FEMAS para metodologia RPIM: domínios de influência de 16 nós, parâmetros das funções de forma c e p de 1,42 e 1,03, respetivamente, base polinomial linear, esquema de integração gaussiano triangular, com 1x1 pontos de integração;
- NNRPIM - Utilização de parametrização padrão do FEMAS para metodologia NNRPIM: células de influência de segundo grau, parâmetros das funções de forma c e p de 0,0001 e 0,9999, respetivamente, base polinomial linear e esquema de integração gaussiano completo.

Para efeitos de análise, foram construídas 12 malhas com distinção entre o número de nós e o tipo de elemento utilizado. Em cada malha subsequente, o número de divisões de cada aresta foi duplicado, resultando nas seguintes configurações: 2x4 (15 nós), 8x4 (45 nós), 16x8 (153 nós), 32x16 (561 nós), 64x32 (2145 nós) e 128x64 (8385 nós).

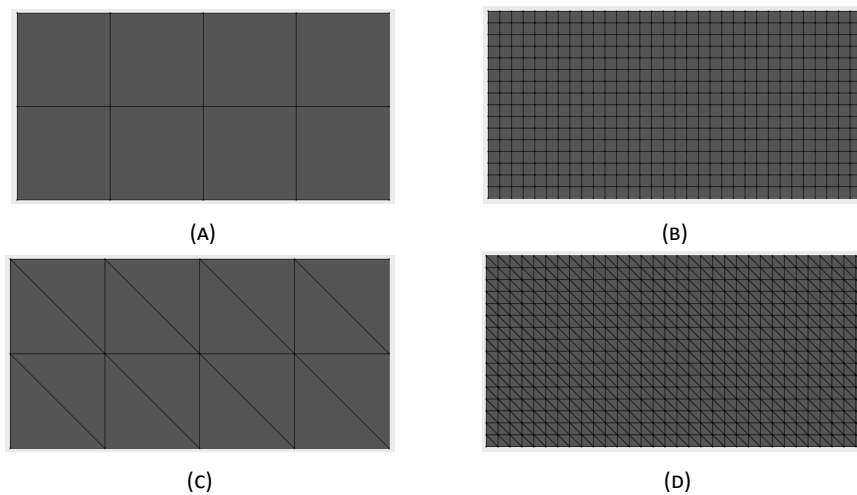


FIGURA 5.2: Malhas utilizadas para estudo de convergência (a) Malha 2x4 com elementos quadriláteros (b) Malha 32x16 com elementos quadriláteros (c) Malha 2x4 com elementos triangulares (d) Malha 32x16 com elementos triangulares

Na Fig. 5.3 são apresentados os valores do deslocamento na direção y no ponto C, assim como o respetivo erro relativo face ao deslocamento analítico. É observável que o NNRPIM, o RPIM e o FEM com elementos quadriláteros apresentam taxas de convergência praticamente idênticas. O FEM 3n demonstrou uma taxa de convergência significativamente lenta em comparação com as demais metodologias analisadas.

A Fig. 5.4 ilustra os resultados obtidos da tensão normal σ_{xx} no ponto D e da tensão de corte τ_{xy} no ponto B. Observa-se que o FEM com elementos triangulares apresentou um desempenho divergente nas duas tensões analisadas. No caso da tensão normal σ_{xx} , destacou-se por demonstrar a maior taxa de convergência. Já para a tensão de corte τ_{xy} , apresentou uma taxa de convergência inferior, demonstrando um comportamento distinto em comparação com as outras técnicas.

Nas Fig. 5.5 e 5.6 são ilustradas as tensões normais σ_{xx} ao longo de $x = 0$ e $y = [-D/2; D/2]$ e as tensões de corte τ_{xy} ao longo de $x = L/2$ e $y = [-D/2; D/2]$, respetivamente, para as diferentes malhas construídas. Os valores de tensão normal máxima e mínima demonstram um crescimento considerável à medida que o número de nós da malha aumentou. O mesmo pode

ser justificado como consequência da localização dos nós com tensão normal superior nas arestas vivas da geometria analisada, resultando na não convergência dos valores. Contudo, os valores intermédios não sofrem qualquer tipo de desvio face à sua localização na aresta, e o estudo de convergência e respetiva comparação entre metodologias e valores analíticos pode ser efetuado. Em geral, o FEM 3n demonstrou o pior desempenho, apresentando desvios consideravelmente superiores em relação ao FEM 4n e aos métodos sem malha. Estes últimos evidenciaram taxas de convergência idênticas.

A Fig. 5.7 apresenta os erros médios da tensão normal e da tensão de corte obtidos para a análise de tensão ao longo das arestas analisadas. Ao avaliar o desempenho nos valores de tensão normal σ_{xx} , verifica-se que para malhas com menor número de nós, o FEM com elementos quadriláteros destaca-se ao apresentar menores valores de erro em comparação com as outras técnicas. No entanto, com o respetivo refinamento, os métodos sem malha apresentam erros médios mais baixos e mais consistentes. Nos resultados dos erros na tensão de corte τ_{xy} , a superioridade na convergência dos métodos sem malha é observável.

A análise de convergência indica que todos os métodos comparados produzem resultados precisos, com erros relativamente baixos em malhas com 153 nós ou mais. Este bom desempenho geral é atribuído à simplicidade do caso de estudo analisado. Em estudos mais complexos, como análises de fratura ou impacto em geometrias complexas, espera-se que as diferenças nos erros entre os métodos sejam mais acentuadas, exigindo uma escolha criteriosa do método mais adequado para cada aplicação.

De modo geral, os resultados indicam que o NNRPIM e o RPIM apresentam taxas de convergência comparáveis com o FEM 4n, demonstrando uma ligeira superioridade na convergência nos valores de deslocamento pontual e no estudo da tensão normal σ_{xx} e τ_{xy} efetuado ao longo de uma das arestas. O FEM com elementos quadriláteros demonstrou um melhor desempenho numérico na convergência dos valores em relação ao FEM com elementos triangulares.

Entre os métodos avaliados, o FEM 3n apresentou o desempenho mais insatisfatório, com erros relativos mais elevados na maioria dos casos analisados. A única exceção visualizada foi nos resultados de tensão normal σ_{xx} no ponto D, onde o FEM 4n demonstrou a taxa de convergência mais rápida.

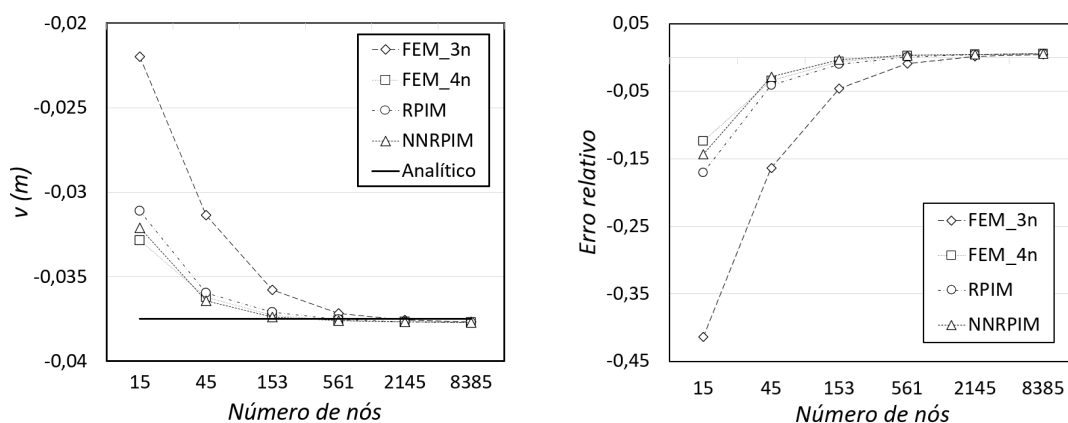


FIGURA 5.3: Gráficos de análise de convergência ao deslocamento na direção y no ponto C: Deslocamentos na direção y e erros relativos dos deslocamentos na direção y

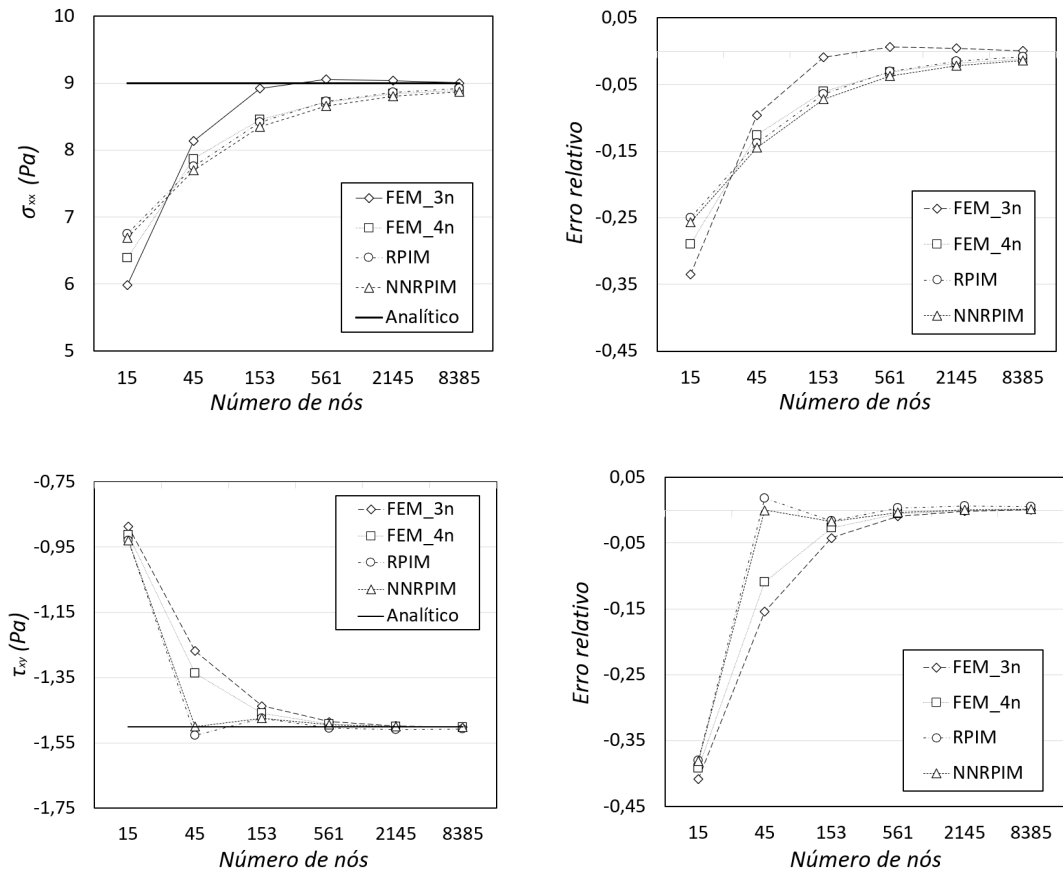


FIGURA 5.4: Gráficos de análise de convergência de σ_{xx} em D e de τ_{xy} em B: Valores de σ_{xx} , respectivo erro relativo de σ_{xx} no ponto D, valores de τ_{xy} e respectivo erro relativo no ponto B

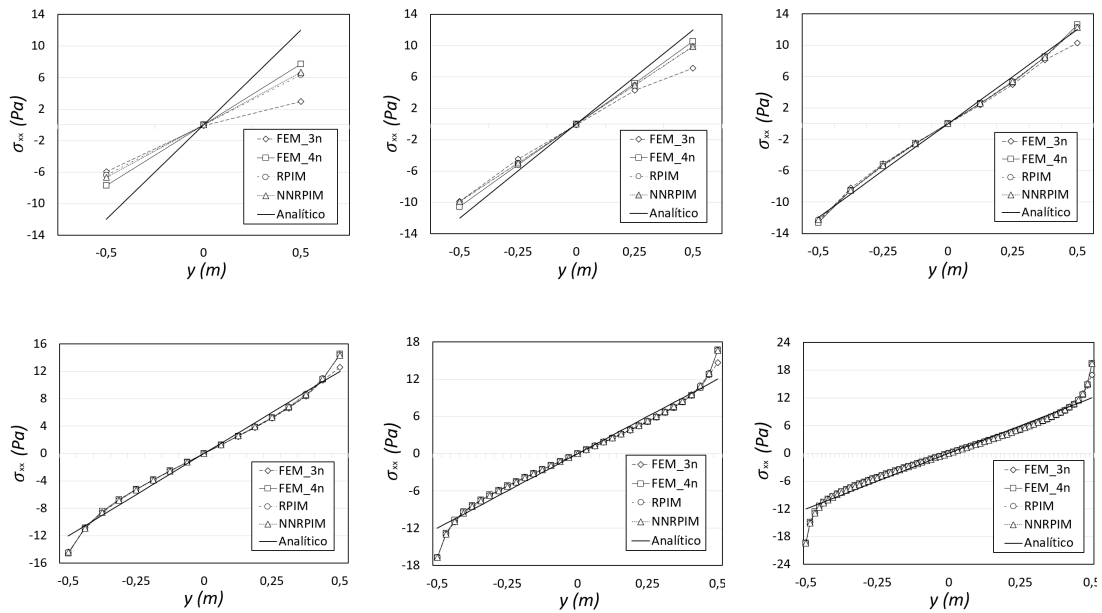


FIGURA 5.5: Estudo de convergência da tensão normal σ_{xx} ao longo de $x = 0$ e $y = [-D/2; D/2]$, nas malhas 2x4, 4x8, 8x16, 16x32, 32x64 e 64x128, respectivamente

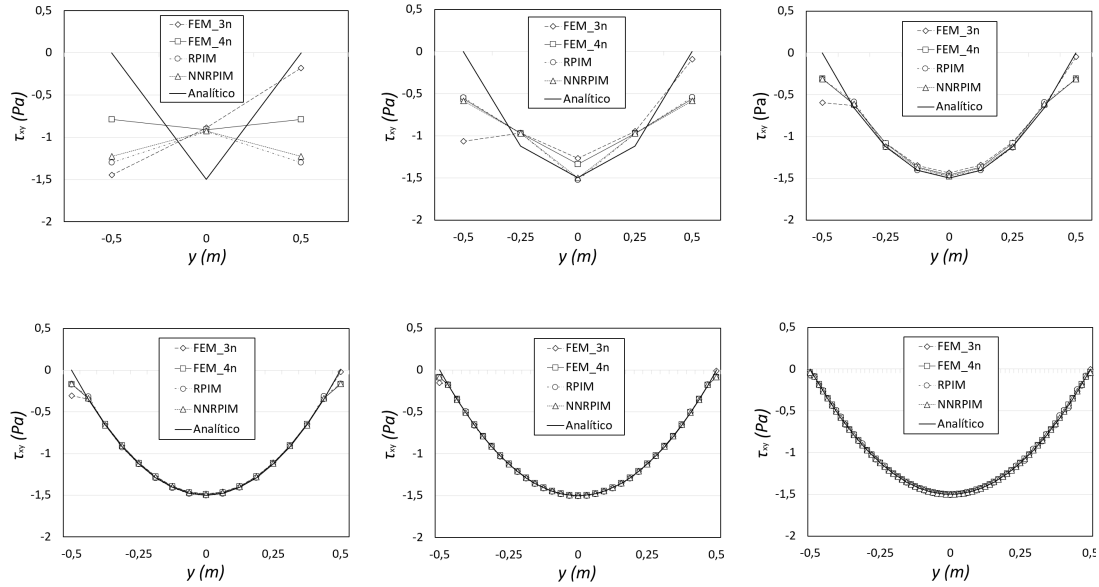


FIGURA 5.6: Estudo de convergência da tensão de corte τ_{xy} ao longo de $x = L/2$ e $y = [-D/2; D/2]$, nas malhas 2x4, 4x8, 8x16, 16x32, 32x64 e 64x128, respetivamente

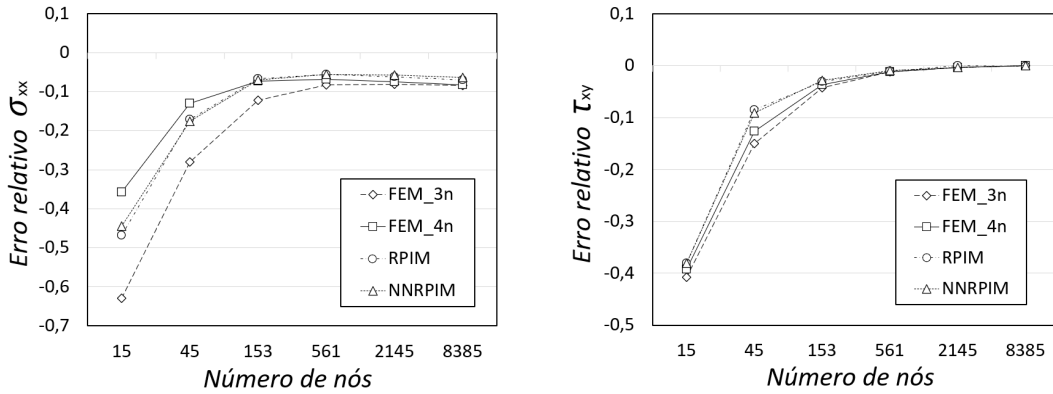


FIGURA 5.7: Erro médio relativo ao longo de $x = 0$ e $y = [-D/2; D/2]$ da tensão normal σ_{xx} e da tensão de corte τ_{xy}

5.2 Exemplos de Otimização Estrutural de Referência

Na presente secção, são analisadas soluções obtidas através da aplicação de um algoritmo de otimização estrutural evolucionário, inspirado no conceito de remodelação óssea, para um estudo de referência preliminar. Para o efeito, o exemplo selecionado trata-se de uma viga cantilever, semelhante ao caso de estudo apresentado na secção anterior. A realização de uma análise preliminar às técnicas de otimização que se pretende investigar permite:

1. Estudar e perceber a influência dos diferentes parâmetros e critérios na obtenção das respetivas topologias;
2. Encontrar possíveis diferenças na utilização de diferentes tipos de malhas;
3. Avaliar os recursos computacionais disponíveis e comparar a utilização dos mesmos nas diferentes situações consideradas;

4. Perceber as diferenças de eficiência de cada metodologia face à obtenção de soluções semelhantes às soluções encontradas na literatura disponível.

Os exemplos de referência são analisados através da comparação das soluções obtidas ao utilizar as metodologias FEM (com elementos quadriláteros), RPIM e NNRPIM, seguindo um estado plano de tensão, onde o vetor de tensão normal ao plano xy é zero. As formulações e parametrização utilizadas no RPIM e no NNRPIM são as mesmas apresentadas e aplicadas na Secção 5.1.

5.2.1 Viga Cantilever

O algoritmo de otimização utilizado em todo este trabalho trata-se de um algoritmo evolucionário, construído visando aplicação na área da biomecânica, baseado no princípio da remodelação óssea. O algoritmo apresenta semelhanças aos algoritmos BESO convencionais, mas distinto na medida em que a otimização permitiria a procura de densidades intermédias para além da densidade máxima e mínima características das otimizações binárias. O caso de estudo preliminar analisado retrata um dos casos mais aprofundados e populares na literatura em análises preliminares de algoritmos de otimização estrutural e no estudo de parametrização e da malha envolvida: a viga cantilever. Deste modo, demonstra-se como um dos casos de estudo mais estudados para análises preliminares de otimização, uma vez que para fins de comparação direta com os resultados de artigos, a literatura disponível é abundante.

Na Fig. 5.8, é possível encontrar as topologias mais frequentemente obtidas em quatro artigos analisados, para o caso de estudo preliminar a ser analisado. É evidente que as topologias solucionadas, embora exibam pequenas variações, nomeadamente devido à utilização de algoritmos ou geometrias base distintas, são idênticas, indicando assim uma boa previsão do que deveria ser obtido no presente estudo efetuado.

As dimensões utilizadas nos artigos analisados não foram as dimensões utilizadas no caso de estudo em questão. Contudo, seria expectável que a topologia geral obtida fosse semelhante.

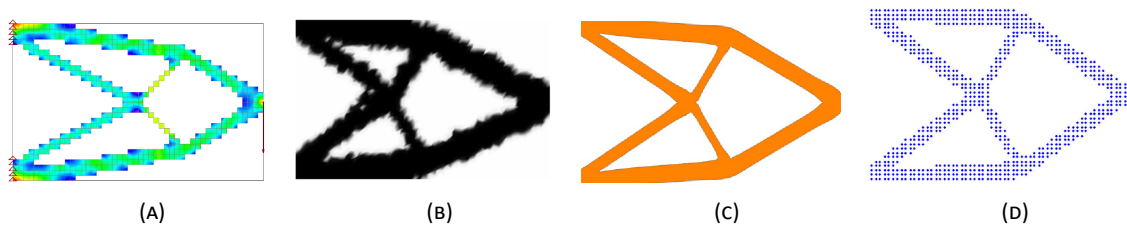


FIGURA 5.8: Soluções de otimização evolucionária para uma viga *cantilever*, encontradas na literatura (a) Das, Jones e Y. Xie 2012 (b) Gonçalves et al. 2022b (c) Cai e Zhang 2015 (d) Yang, Zheng e Long 2017

Um esquema da viga e do problema a ser analisado e simulado encontra-se na Fig. 5.9. As dimensões da viga considerada são $L = 2\text{ m}$ e $D = 1\text{ m}$, e a força pontual aplicada na extremidade $P = 1\text{ N}$. As propriedades mecânicas do material utilizadas são $E = 1\text{ kPa}$, $\nu = 0,3$ e $\sigma_y = 100\text{ Pa}$. De modo a evitar singularidades e concentração de tensões, a força considerada foi distribuída ao longo de 3 nós.

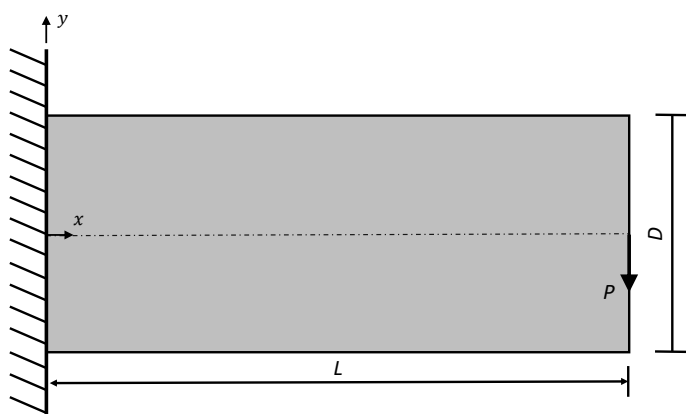


FIGURA 5.9: Viga cantilever, para estudo preliminar de otimização

A seleção das malhas a estudar foi realizada com base num compromisso entre um tempo médio por simulação satisfatório, recursos computacionais disponíveis, diferença entre o número de nós significativa entre as malhas analisadas e na visualização clara de diferenças entre soluções obtidas nas diferentes malhas comparadas. Assim, foram analisadas duas malhas distintas: malha 32x16 (561 nós, regular, com elementos quadriláteros) e uma malha 64x32 (2145 nós, regular, com elementos quadriláteros).

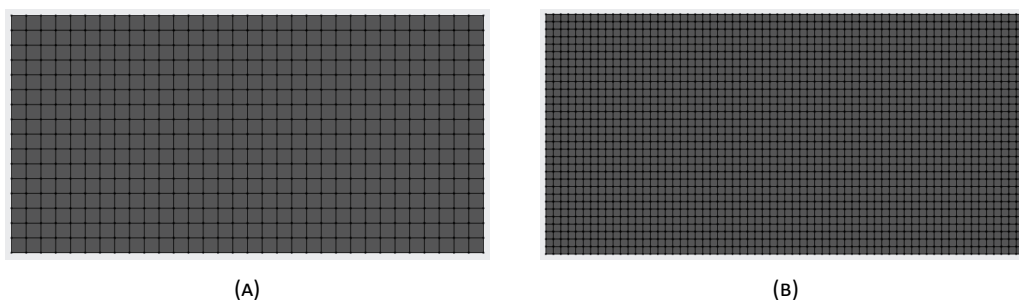


FIGURA 5.10: Malhas de elementos quadriláteros (a) 32x16 (561 nós) (b) 64x32 (2145 nós)

O algoritmo de otimização aplicado exigiu a seleção de alguns parâmetros, como:

- Densidade máxima;
- Densidade de transição;
- Densidade mínima;
- Rácio de penalização;
- Rácio de recompensa;
- Remodelações máximas à qual um ponto pode ser sujeito.

Os valores de densidade máxima e mínimo definidos foram de cerca de 2,1 e 0,1 g/cm^3 , respetivamente. O valor de densidade de transição selecionado, e seguindo indicações da literatura de Belinha 2014, foi de 0,3 g/cm^3 , considerando que a densidade média final não deveria ser inferior a esse valor. A lei material selecionada foi a desenvolvida e aprofundada na literatura de Belinha 2014. O número de remodelações máximas às quais um ponto pode

ser sujeito definido foi de 3. O principal parâmetro variável da análise realizada foi o rácio de penalização do algoritmo, ou *Penalization Ratio* (PR). Os rácios de penalização considerados foram de cerca de 1%, 2%, 5% e 10%, e o rácio de recompensa foi sempre mantido a 1%. Adicionalmente, foram comparados dois critérios de otimização distintos: o critério da tensão de Von Mises equivalente (SEF) e o critério da densidade de energia de deformação (SED). Nas Tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, é possível observar as soluções de otimização obtidas consoante a parametrização anteriormente mencionada, assim como a iteração da otimização (canto inferior esquerdo) e a fração volúmica (canto superior esquerdo) de cada solução.

A avaliação do desempenho de cada solução baseia-se em diversas características visuais, como a topologia geral obtida em comparação com as soluções apresentadas na literatura. Neste estudo, as melhores soluções serão aquelas que exibem uma semelhança significativa com as topologias da Fig. 5.8, predominantemente binárias. No entanto, dado que o algoritmo utilizado trata-se de um algoritmo de remodelação óssea, é esperado que soluções ótimas apresentem várias densidades intermediárias, representando soluções ideais para a construção de componentes com gradiente de densidade. Considerando que o foco do estudo é o FA, tais soluções foram também consideradas satisfatórias. Adicionalmente, uma solução foi considerada inadequada ou insatisfatória caso não fosse observada uma evolução considerável da remoção de material e caso a topologia resultante não apresente as secções e ligações características das soluções binárias descritas na literatura (Fig. 5.8).

Na Tabela 5.5, é encontrada uma tabela com uma classificação qualitativa da progressão da otimização e das soluções obtidas para cada PR, método, critério e malha utilizada, de modo a auxiliar o processo de comparação direta entre os vários parâmetros distintos empregues. Ao analisar as soluções encontradas para as malhas, métodos e diferentes parâmetros utilizados, é possível perceber que várias soluções não foram ao encontro das topologias documentadas (Fig. 5.8).

Para todas as metodologias e malhas, o parâmetro $PR = 1\%$ revelou-se inadequado, uma vez que em todos os casos de estudo a análise foi interrompida na quarta iteração, indicando que o parâmetro não foi suficiente para uma otimização significativa do domínio.

Com $PR = 2\%$, o algoritmo mostrou um progresso considerável na redução da fração volúmica ao longo das iterações, em comparação com o PR anterior. No entanto, para a malha menos densa, não foram encontradas topologias que apresentassem semelhanças com as secções de alta densidade características das soluções descritas na literatura (Fig. 5.8), à exceção do contorno exterior. Para a malha mais robusta, especialmente no critério SEF, surgiram soluções com os tramos cruzados característicos das topologias de referência, representando soluções razoáveis. No geral, as soluções obtidas com este PR foram insuficientes em número e qualidade, justificando a necessidade de aumentar o rácio de penalização.

Ao aumentar o PR para 5%, observou-se uma melhoria abrupta na qualidade e no número de soluções atrativas obtidas para a malha refinada, enquanto a malha menos densa continuou a demonstrar a necessidade de um aumento no rácio de penalização. Para a malha 64x32, várias soluções apresentaram ramificações bem definidas e soluções binárias, indicando um desempenho significativamente melhor do algoritmo em comparação com o PR anterior.

Dado $PR = 10\%$, verificou-se uma clara tendência para a geração de soluções predominantemente binárias em comparação com um PR de 5%. Deste modo, foram encontradas várias soluções idênticas às soluções representadas na literatura analisada. Este PR foi particularmente substancial para a malha menos robusta, onde apenas foram encontradas soluções satisfatórias com esta parametrização.

Verificou-se que o critério de otimização utilizado teve um impacto significativo nas soluções

geradas exclusivamente na malha mais densa. Para um PR de 5%, a qualidade geral das topologias geradas foi superior no critério SEF, com uma redução mais acentuada da fração volúmica e secções de alta densidade melhor definidas e refinadas.

TABELA 5.1: Soluções de otimização obtidas para malha 32x16 para critério SEF

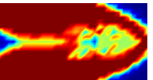
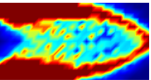
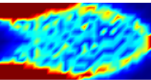
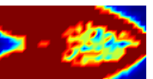
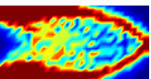
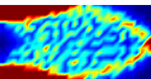
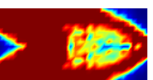
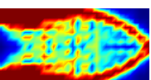
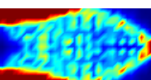
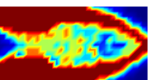
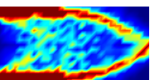
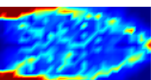
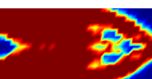
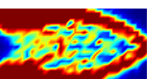
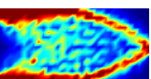
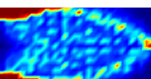
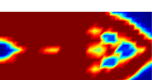
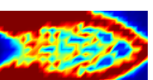
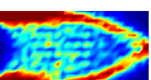
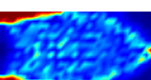
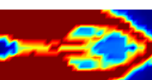
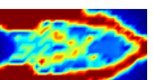
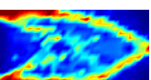
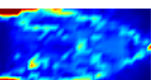
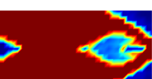
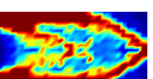
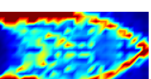
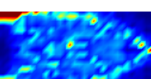
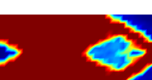
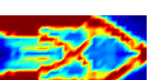
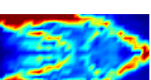
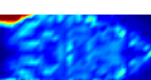
PR	Método	Solução			
1 %	FEM	98,45 %	98,35 %	98,35 %	
		2 	3 	4 	
	RPIM	98,41 %	98,30 %	98,30 %	
		2 	3 	4 	
	NNRPIM	98,46 %	98,37 %	98,37 %	
		2 	3 	4 	
2 %	FEM	91,10 %	80,23 %	61,15 %	46,62 %
		12 	32 	70 	102 
	RPIM	92,79 %	79,53 %	60,63 %	46,89 %
		10 	34 	72 	103 
	NNRPIM	92,77 %	79,56 %	60,52 %	46,28 %
		10 	34 	72 	104 
5 %	FEM	89,19 %	68,78 %	45,99 %	33,82 %
		7 	22 	40 	53 
	RPIM	83,06 %	66,32 %	49,25 %	33,94 %
		11 	24 	38 	53 
	NNRPIM	83,29 %	66,32 %	48,41 %	31,14 %
		11 	24 	38 	53 
10 %	FEM	74,79 %	57,57 %	37,46 %	26,66 %
		9 	16 	23 	31 
	RPIM	82,01 %	59,77 %	43,99 %	28,86 %
		7 	15 	22 	31 
	NNRPIM	81,73 %	59,67 %	43,14 %	26,32 %
		7 	15 	22 	31 

TABELA 5.2: Soluções de otimização obtidas para malha 32x16 para critério SED

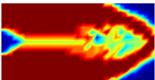
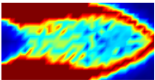
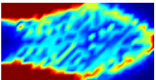
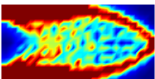
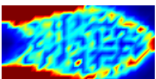
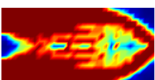
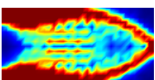
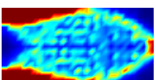
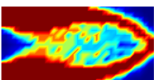
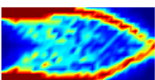
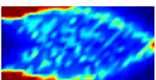
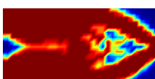
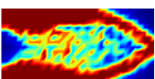
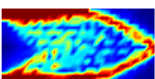
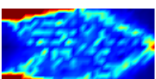
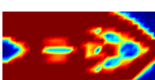
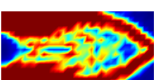
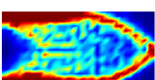
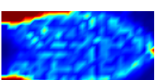
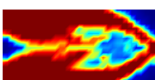
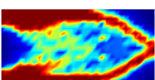
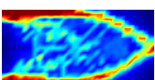
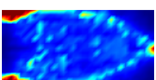
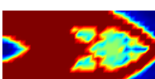
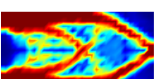
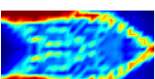
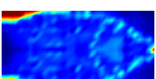
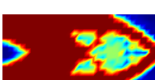
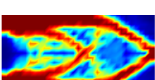
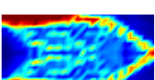
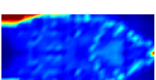
PR	Método	Solução			
1 %	FEM	98,45 %	98,35 %	98,35 %	
		2 	3 	4 	
	RPIM	98,41 %	98,30 %	98,30 %	
		2 	3 	4 	
	NNRPIM	98,46 %	98,37 %	98,37 %	
		2 	3 	4 	
2 %	FEM	91,05 %	80,18 %	60,87 %	46,24 %
		12 	32 	70 	103 
	RPIM	91,17 %	80,22 %	61,20 %	46,73 %
		12 	32 	70 	103 
	NNRPIM	92,68 %	79,27 %	60,10 %	45,71 %
		10 	34 	72 	104 
5 %	FEM	88,83 %	68,09 %	45,53 %	32,97 %
		7 	22 	40 	53 
	RPIM	83,23 %	65,82 %	48,18 %	32,86 %
		12 	24 	38 	53 
	NNRPIM	81,78 %	69,83 %	50,55 %	31,43 %
		12 	21 	36 	54 
10 %	FEM	74,74 %	56,68 %	38,80 %	26,29 %
		9 	16 	23 	31 
	RPIM	79,23 %	59,93 %	41,05 %	24,76 %
		7 	15 	22 	31 
	NNRPIM	79,23 %	59,93 %	41,05 %	24,76 %
		7 	15 	22 	31 

TABELA 5.3: Soluções de otimização obtidas para malha 64x32 para critério SEF

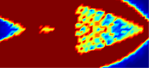
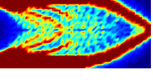
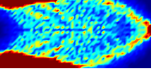
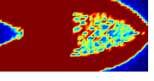
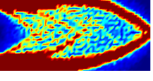
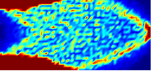
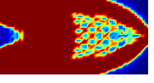
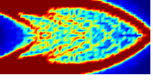
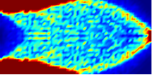
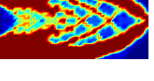
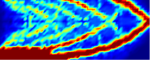
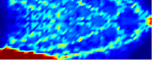
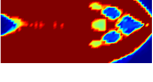
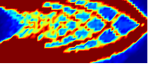
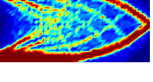
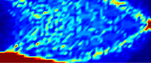
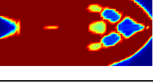
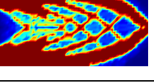
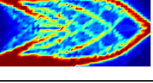
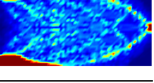
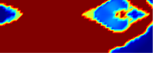
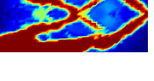
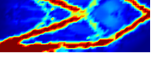
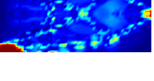
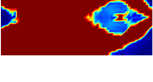
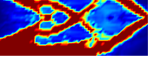
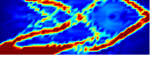
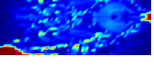
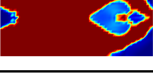
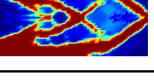
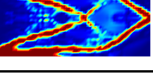
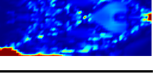
PR	Método	Solução			
1 %	FEM	98,73 %	98,67 %	98,67 %	
		2 	3 	4 	
	RPIM	98,73 %	98,67 %	98,67 %	
		2 	3 	4 	
	NNRPIM	98,72 %	98,66 %	98,66 %	
		2 	3 	4 	
2 %	FEM	93,49 %	80,36 %	60,63 %	45,84 %
		10 	34 	72 	104 
	RPIM	93,53 %	80,35 %	60,31 %	45,33 %
		10 	34 	72 	104 
	NNRPIM	93,53 %	80,54 %	60,27 %	45,15 %
		10 	34 	72 	104 
5 %	FEM	90,00 %	70,00 %	46,40 %	32,04 %
		7 	22 	40 	53 
	RPIM	83,79 %	66,76 %	48,13 %	31,50 %
		11 	24 	38 	53 
	NNRPIM	83,77 %	66,43 %	47,93 %	30,82 %
		11 	24 	38 	53 
10 %	FEM	81,99 %	57,29 %	40,00 %	22,18 %
		7 	15 	22 	31 
	RPIM	82,01 %	57,89 %	39,48 %	21,71 %
		7 	15 	22 	31 
	NNRPIM	82,07 %	56,48 %	37,73 %	19,56 %
		7 	15 	22 	31 

TABELA 5.4: Soluções de otimização obtidas para malha 64x32 para critério SED

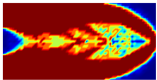
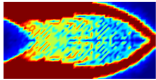
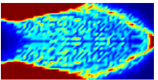
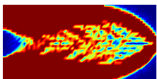
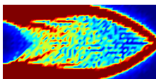
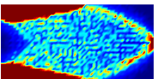
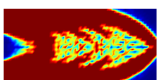
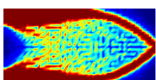
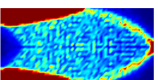
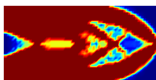
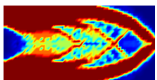
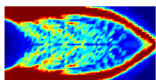
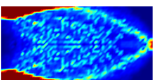
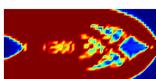
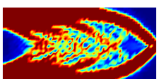
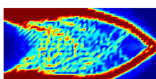
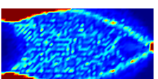
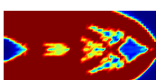
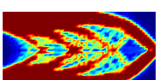
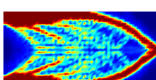
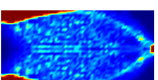
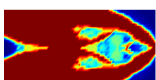
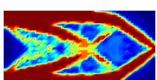
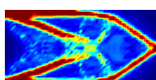
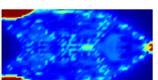
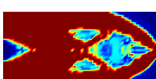
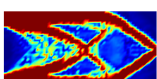
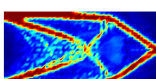
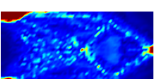
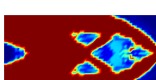
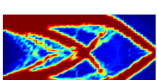
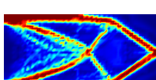
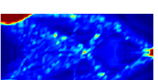
PR	Método	Solução			
1 %	FEM	98,73 %	98,67 %	98,67 %	
		2 	3 	4 	
	RPIM	98,73 %	98,67 %	98,67 %	
		2 	3 	4 	
	NNRPIM	98,72 %	98,66 %	98,66 %	
		2 	3 	4 	
2 %	FEM	93,60 %	80,66 %	61,43 %	45,11 %
		9 	32 	69 	104 
	RPIM	93,39 %	79,68 %	59,96 %	44,90 %
		10 	34 	72 	104 
	NNRPIM	93,42 %	79,92 %	59,84 %	44,39 %
		10 	34 	72 	104 
5 %	FEM	82,10 %	69,94 %	50,27 %	31,14 %
		12 	21 	36 	54 
	RPIM	82,22 %	70,11 %	50,21 %	31,00 %
		12 	21 	36 	54 
	NNRPIM	82,26 %	70,12 %	50,35 %	30,25 %
		12 	21 	36 	54 
10 %	FEM	79,29 %	59,45 %	41,03 %	24,24 %
		7 	15 	22 	31 
	RPIM	78,12 %	58,20 %	39,66 %	22,71 %
		7 	15 	22 	31 
	NNRPIM	78,13 %	56,96 %	38,41 %	20,33 %
		7 	15 	22 	31 

TABELA 5.5: Classificação qualitativa de soluções do estudo preliminar de otimização estrutural

		PR = 1%	PR = 2%	PR = 5%	PR = 10%
32x16 SEF	FEM	●	●	●	●
	RPIM	●	●	●	●
	NNRPIM	●	●	●	●
32x16 SED	FEM	●	●	●	●
	RPIM	●	●	●	●
	NNRPIM	●	●	●	●
64x32 SEF	FEM	●	●	●	●
	RPIM	●	●	●	●
	NNRPIM	●	●	●	●
64x32 SED	FEM	●	●	●	●
	RPIM	●	●	●	●
	NNRPIM	●	●	●	●

● Resultados insatisfatórios

● Resultados próximos de topologia requerida, com densidades intermediárias notáveis

● Solução satisfatória

A análise evidencia a viabilidade de obter soluções otimizadas satisfatórias através da aplicação de métodos computacionais iterativos, mesmo utilizando malhas com um número reduzido de nós. No entanto, é fundamental destacar a importância da seleção criteriosa dos parâmetros do algoritmo de otimização. Nesse contexto, os melhores resultados foram observados para valores de PR de 5% e 10%. De modo geral, para a malha mais robusta, não foram observadas diferenças consideráveis no desempenho dos métodos, devido à convergência dos valores e à precisão dos resultados semelhantes, como consequência do refinamento da malha. Conforme observado no estudo de convergência realizado anteriormente, a distinção entre os valores para cada método numérico torna-se irrelevante com o respectivo aumento do número nodal da malha da estrutura analisada.

Contudo, para a malha 32x16, foram notáveis algumas distinções entre a evolução iterativa da otimização. Para simplificação visual, é possível observar nas Tabelas 5.6 e 5.7 as evoluções iterativas para a malha 32x16, quando utilizado um PR de 5% e 10%, respectivamente, para ambos os critérios de otimização.

Ao examinar os resultados com um PR de 5%, observam-se algumas distinções subtis entre os métodos numéricos. Em ambos os critérios, e nas segundas iterações apresentadas na tabela, é evidente o início da formação dos tramos centrais cruzados nos métodos sem malha. Em contraste, na mesma iteração, o FEM ainda mostra apenas o contorno exterior bem definido, indicando um atraso relativo no processo iterativo em comparação com os métodos sem malha. Para um PR de 10%, as diferenças tornam-se significativamente mais pronunciadas. Em ambos os critérios, as iterações 15 e 16 revelam uma melhor definição da geometria nos métodos sem malha. Além disso, a geometria obtida pelo NNRPIM na iteração 15, para o critério SEF, mostrou maior semelhança com as topologias de referência da literatura analisada. Não foi visualizada qualquer tipo de correlação entre o método numérico empregue e o valor de fração volumica final obtido, e as discrepâncias visualizadas foram consideradas residuais.

Toda esta análise é esclarecedora ao demonstrar a superioridade do desempenho dos métodos sem malha em relação ao FEM.

TABELA 5.6: Soluções de otimização obtidas para malha 32x16, para os critérios SEF e SED, dado um PR = 5%

Critério	Método	Solução							
SEF	FEM	89,19 %		68,78 %		45,99 %		33,82 %	
		7		22		40		53	
	RPIM	83,06 %		66,32 %		49,25 %		33,94 %	
		11		24		38		53	
	NNRPIM	83,29 %		66,32 %		48,41 %		31,14 %	
		11		24		38		53	
SED	FEM	88,83 %		68,09 %		45,53 %		32,97 %	
		7		22		40		53	
	RPIM	83,23 %		65,82 %		48,18 %		32,86 %	
		12		24		38		53	
	NNRPIM	81,78 %		69,83 %		50,55 %		31,43 %	
		12		21		36		54	

TABELA 5.7: Soluções de otimização obtidas para malha 32x16, para os critérios SEF e SED, dado um PR = 10%

Critério	Método	Solução							
SEF	FEM	74,79 %		57,57 %		37,46 %		26,66 %	
		9		16		23		31	
	RPIM	82,01 %		59,77 %		43,99 %		28,86 %	
		7		15		22		31	
	NNRPIM	81,73 %		59,67 %		43,14 %		26,32 %	
		7		15		22		31	
SED	FEM	74,74 %		56,68 %		38,80 %		26,29 %	
		9		16		23		31	
	RPIM	79,23 %		59,93 %		41,05 %		24,76 %	
		7		15		22		31	
	NNRPIM	79,23 %		59,93 %		41,05 %		24,76 %	
		7		15		22		31	

Análise Computacional

Os resultados da análise computacional efetuada encontram-se nas Fig. 5.11 e 5.12, onde podem ser encontrados os gráficos dos tempos computacionais retirados de quatro iterações diferentes de cada otimização realizada, para os diferentes métodos, malhas e PR considerados. Ao comparar os tempos computacionais nas diferentes malhas estudadas, verifica-se que o processo de otimização da malha mais densa foi significativamente mais demorado. Os critérios SEF e SED não demonstraram influência nos tempos computacionais obtidos, justificado pela falta de correlação nas curvas investigadas.

Nas Tabelas 5.8 e 5.9, são apresentadas tabelas classificativas para auxílio de comparação, para $PR = 5\%$ e 10% , respetivamente. Observou-se que os métodos sem malha apresentaram um tempo computacional superior, o que era esperado devido à maior complexidade da sua discretização numérica em comparação com o FEM.

Para $PR = 5\%$, a comparação do desempenho iterativo face à qualidade das soluções geradas não é exequível, uma vez que existiu uma clara diferença entre a qualidade das soluções obtidas entre as malhas analisadas. Simultaneamente, a malha mais robusta apresentou resultados adequados apropriados para todos os métodos e critérios, não diferindo consideravelmente na qualidade dos resultados.

No entanto, para $PR = 10\%$, as diferenças foram evidentes. Na malha 32×16 , as melhores soluções foram obtidas pelos métodos sem malha no critério SEF e no critério SED. Este resultado demonstra que, ao contrário do FEM, os métodos sem malha foram capazes de obter soluções satisfatórias a partir de malhas com um menor número de nós.

Conclui-se, portanto, que embora os métodos sem malha apresentem um tempo computacional ligeiramente superior ao do FEM, o seu desempenho na otimização é mais adequado. Estes métodos demonstram uma capacidade notável de gerar soluções melhor conectadas e com uma progressão iterativa mais eficiente, justificando assim sua aplicação em algoritmos de otimização estrutural.

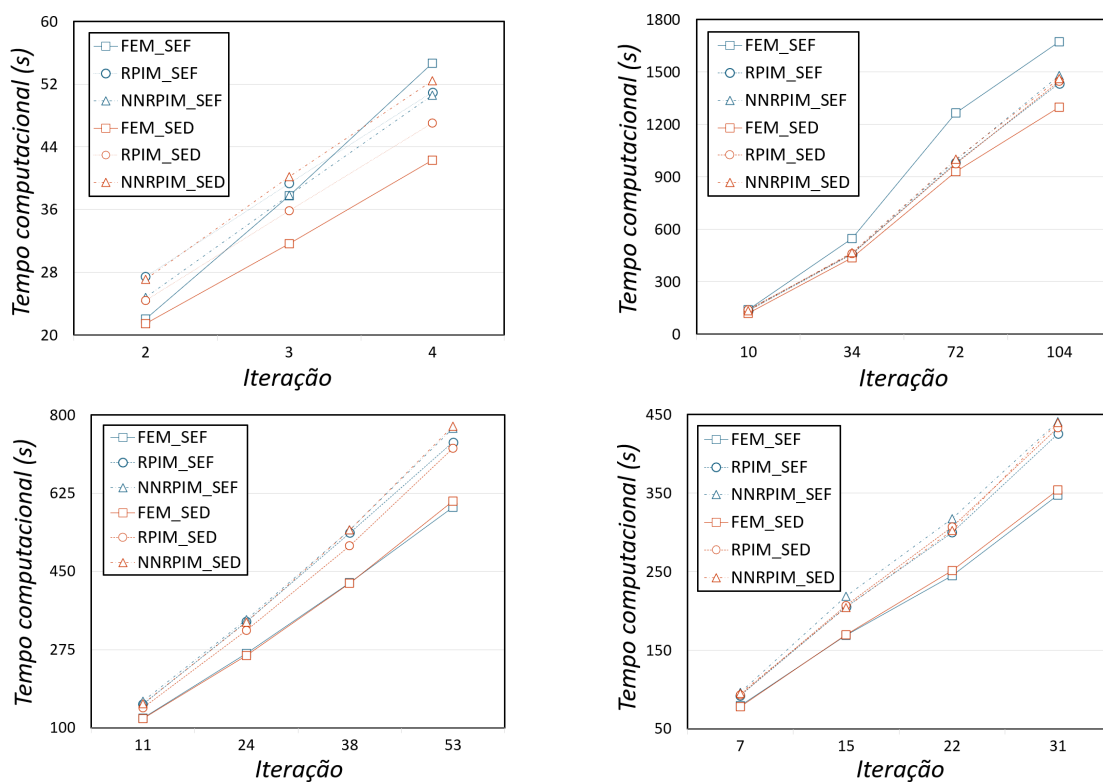


FIGURA 5.11: Análise computacional da viga *cantilever*, para malha 32x16 e PR = 1 %, PR = 2 %, PR = 5 % e PR = 10 %, respetivamente

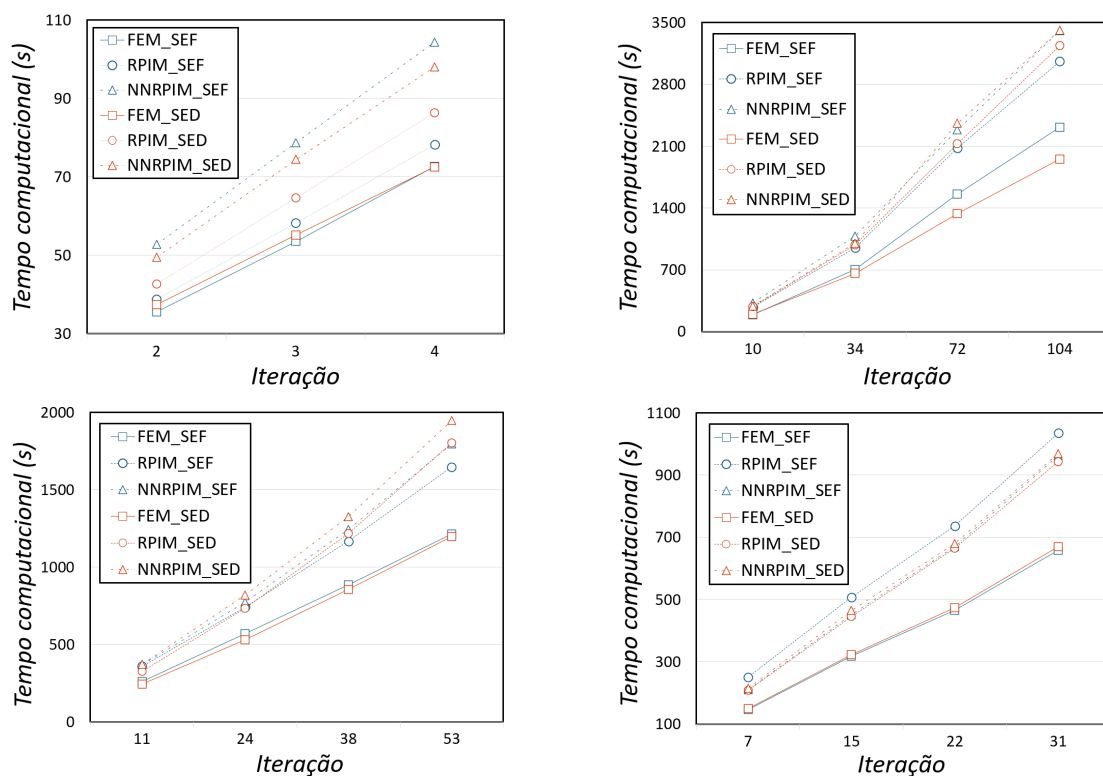


FIGURA 5.12: Análise computacional da viga *cantilever*, para malha 64x32 e PR = 1 %, PR = 2 %, PR = 5 % e PR = 10 %, respetivamente

TABELA 5.8: Tabela classificativa para análise computacional, para PR = 5%

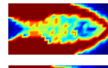
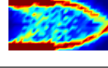
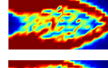
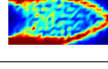
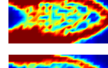
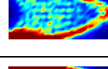
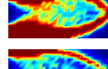
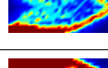
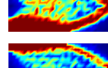
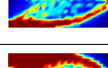
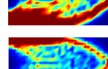
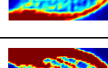
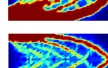
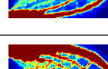
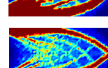
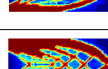
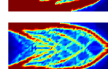
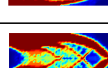
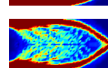
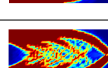
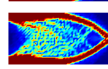
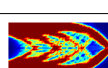
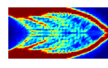
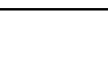
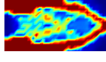
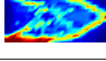
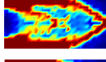
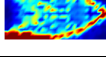
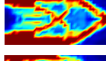
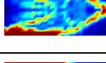
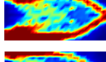
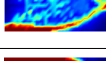
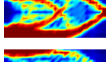
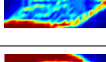
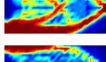
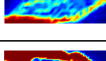
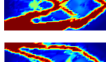
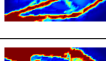
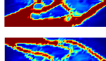
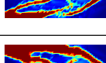
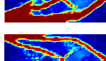
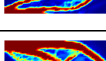
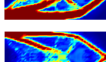
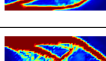
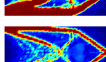
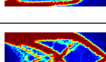
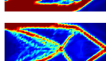
Malha/Critério	Método	Iteração	Tempo Computacional (s)	Solução	Classificação
32x16 SEF	FEM	24	266,77		
		38	425,31		
	RPIM	24	337,81		
		38	536,41		
	NNRPIM	24	342,46		
		38	543,13		
32x16 SED	FEM	24	261,45		
		38	423,10		
	RPIM	24	317,75		
		38	507,67		
	NNRPIM	24	336,62		
		38	542,93		
64x32 SEF	FEM	24	569,27		
		38	885,07		
	RPIM	24	740,54		
		38	1166,76		
	NNRPIM	24	773,63		
		38	1245,03		
64x32 SED	FEM	24	528,73		
		38	854,02		
	RPIM	24	734,40		
		38	1218,96		
	NNRPIM	24	818,04		
		38	1325,15		

TABELA 5.9: Tabela classificativa para análise computacional, para PR = 10%

Malha/Critério	Método	Iteração	Tempo Computacional (s)	Solução	Classificação
32x16 SEF	FEM	15	168,91		
		22	244,94		
	RPIM	15	205,31		
		22	299,98		
	NNRPIM	15	218,62		
		22	317,33		
32x16 SED	FEM	15	169,93		
		22	251,75		
	RPIM	15	206,71		
		22	307,06		
	NNRPIM	15	204,62		
		22	302,52		
64x32 SEF	FEM	15	318,63		
		22	465,26		
	RPIM	15	508,29		
		22	737,28		
	NNRPIM	15	452,43		
		22	670,37		
64x32 SED	FEM	15	323,58		
		22	474,64		
	RPIM	15	445,93		
		22	665,41		
	NNRPIM	15	465,68		
		22	679,68		

- Resultados insatisfatórios
- Resultados intermédios
- Solução satisfatória

5.3 Otimização de Componente da Indústria Automóvel

Na presente secção, é empregue o algoritmo de otimização estrutural a uma aplicação da indústria automóvel, com a utilização das metodologias FEM (com elementos triangulares), RPIM e NNRPIM apresentadas anteriormente. A parametrização dos métodos numéricos sem malha assumida é igual aos exemplos de referência analisados anteriormente. Os parâmetros associados ao algoritmo de otimização foram selecionados considerando as soluções mais consistentes e satisfatórias do exemplo de referência da viga cantilever. Assim, serão considerados rácios de penalização de 5 % e 10 %, e será utilizado exclusivamente o critério de tensão de Von Mises equivalente.

O procedimento de trabalho consistiu na procura de um modelo CAD tri-dimensional de um componente relativamente funcional, onde a sua geometria seria simplificada para um formato bi-dimensional no *Solidworks® Student Edition 2023 SP2.1*. Posteriormente, o *sketch* criado foi exportado para o FEMAP 2021.2 MP1, onde foi criada a respetiva malha, que a seguir foi importada para o FEMAS, onde foram aplicadas as condições de fronteira e o respetivo algoritmo de otimização.

5.3.1 Braço de Suspensão

A aplicação de técnicas de otimização em componentes da suspensão de um automóvel apresenta-se como consideravelmente benéfica, uma vez que as massas não suspensas do automóvel representam uma influência preponderante no seu comportamento. Na Fig. 5.13 é apresentado um sistema de suspensão e o próprio braço de suspensão de um Opel Corsa D (2006 - 2014), assim como uma recriação do próprio braço em CAD, recriada por Doğan Taş, e o *sketch* 2D criado através do contorno principal da peça.

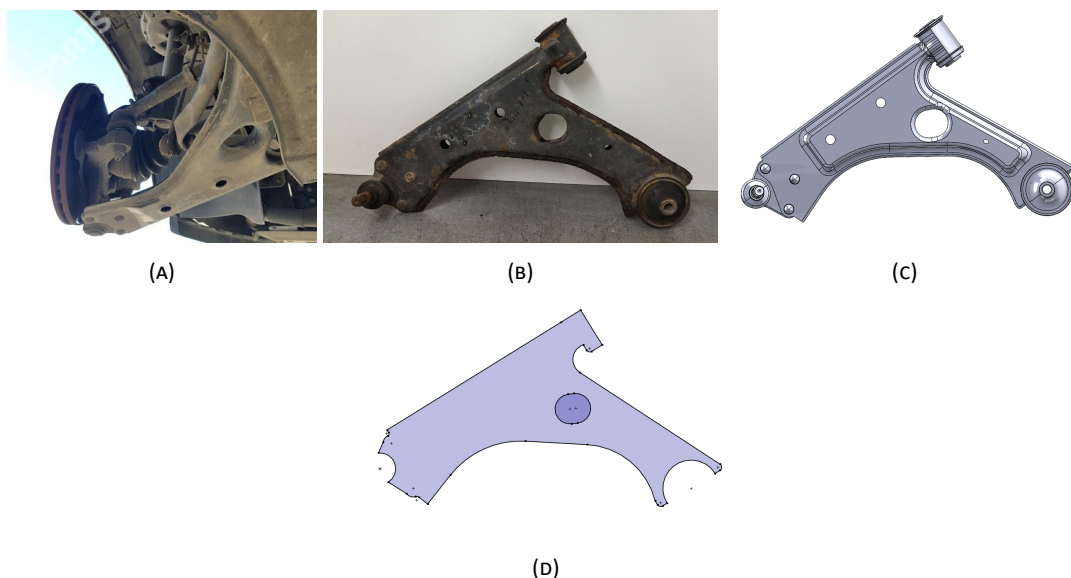


FIGURA 5.13: (a) Sistema de suspensão Opel Corsa D (b) foto do braço de suspensão real (c) representação do braço 3D CAD) (d) representação do braço 2D CAD

Foram desenvolvidas quatro malhas distintas, correspondendo a quatro casos de estudo que serão analisados: uma malha sem o furo característico do braço, uma malha com o furo, e as versões correspondentes criadas com a divisão das secções do braço, com o objetivo de evitar a redução da densidade do material nas áreas com restrições aplicadas (Fig. 5.14).

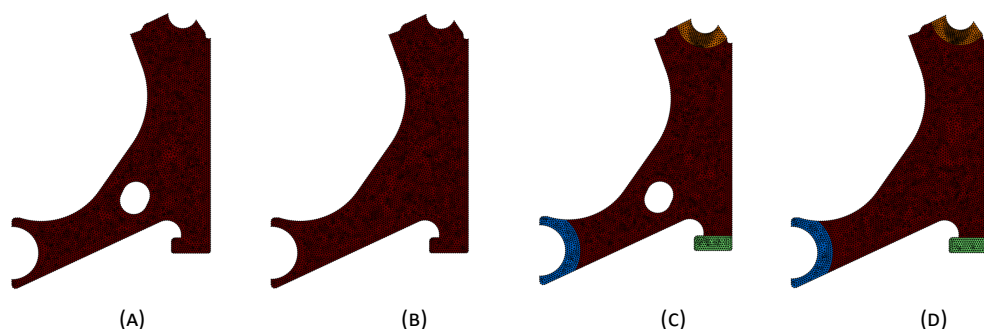


FIGURA 5.14: Malhas criadas para análise do braço de suspensão (a) malha com furo (b) malha sem furo (c) malha com furo, constituída por quatro *patches* (d) malha sem furo, constituída por quatro *patches*

As características do material consideradas para análise inicial são: Módulo de Young (E) = 1000 MPa, coeficiente de Poisson (ν) = 0,3 e tensão de cedência (σ_y) = 100 MPa. As condições de fronteira essenciais consideradas correspondem a um encastramento dos deslocamentos nas faces correspondentes às ligações pivot do braço. A carga aplicada corresponde a uma carga distribuída ao longo da face do braço onde liga a rótula na manga de eixo, aplicada no sentido negativo e na direção do eixo x (Fig. 5.15). Em cada canto da superfície circular, nos três primeiros nós, foi aplicada uma carga de cerca de 0,5 N, e nos restantes nós a carga aplicada foi de 1 N. Com a imposição das restrições descritas, simula-se uma situação de flexão do braço, uma condição frequentemente enfrentada por este tipo de componente ao longo de sua vida útil.

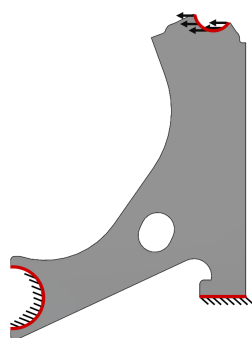


FIGURA 5.15: Condições de fronteira do braço de suspensão

Nas Tabelas 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13, são apresentadas as topologias resultantes para as diferentes malhas e configurações do braço analisadas. A análise das soluções revelou que o furo presente no braço de suspensão foi inicialmente incorporado no *design* com o objetivo de reduzir a massa total do componente. Esta decisão é justificada pela sua localização na área primária de remoção de material, conforme ilustrado na montagem da suspensão do veículo (Fig. 5.13 (a)). Observa-se que o furo não desempenha qualquer função no funcionamento do sistema. No entanto, as soluções obtidas indicam a possibilidade de uma remoção de material ainda mais drástica. As soluções apresentadas evidenciaram uma binariedade relativamente elevada no

campo de densidades, em comparação com o estudo de otimização preliminar realizado. De modo geral, as melhores soluções foram alcançadas com a utilização de um PR de 5%. Estas soluções mostraram um refinamento superior e uma melhor conexão das secções geradas, especialmente perceptível nas iterações iniciais e finais das metodologias RPIM e NNRPIM. A solução obtida através do NNRPIM, com um PR de 5%, e com a restrição de redução de material nas áreas de aplicação de condições de fronteira na iteração 24, foi considerada como a mais congruente. Esta solução servirá de base para o desenvolvimento dos novos designs propostos para o braço, funcionando como uma referência empírica e visual da localização onde a remoção de material foi mais significativa.

TABELA 5.10: Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo

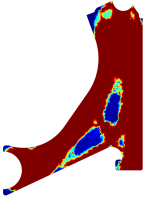
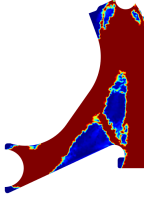
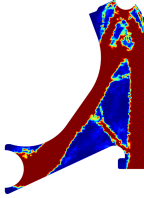
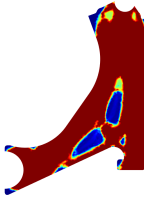
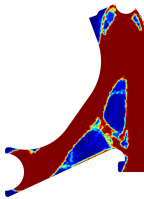
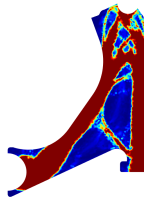
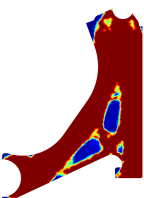
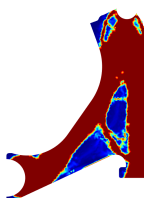
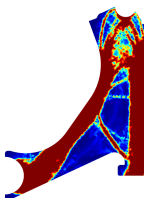
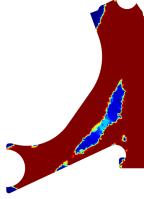
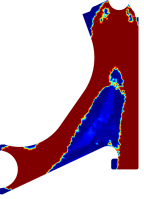
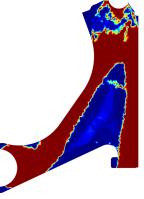
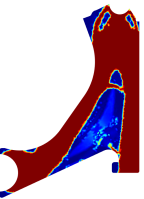
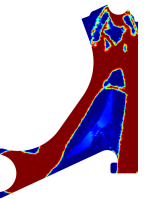
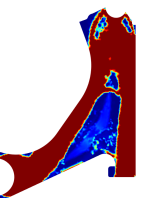
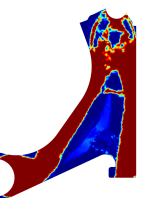
PR	Método	Solução			
5 %	FEM	86,06 %		77,00 %	
		8		24	
	RPIM	88,25 %		77,29 %	
		8		24	
	NNRPIM	88,24 %		77,18 %	
		8		24	
10 %	FEM	90,12 %		72,03 %	
		4		13	
	RPIM	90,53 %		72,56 %	
		4		13	
	NNRPIM	90,47 %		72,40 %	
		4		13	

TABELA 5.11: Soluções de otimização de um braço de suspensão com furo

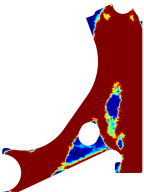
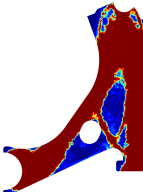
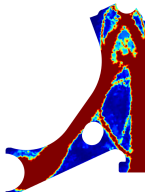
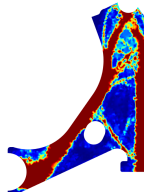
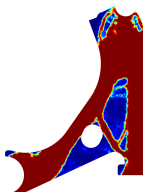
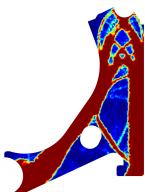
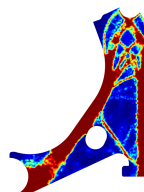
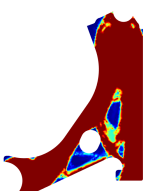
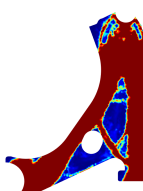
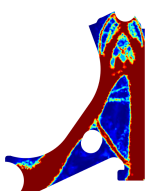
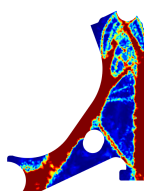
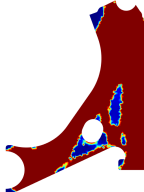
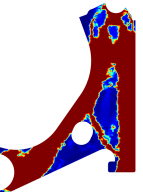
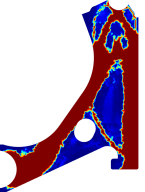
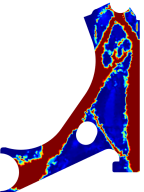
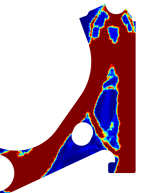
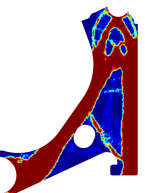
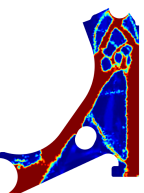
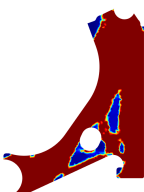
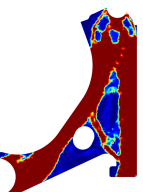
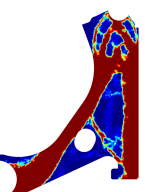
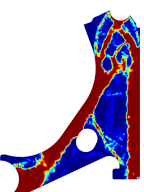
PR	Método	Solução							
5 %	FEM	87,76 %		77,12 %		65,50 %		55,93 %	
		8		15		24		33	
	RPIM	87,36 %		76,90 %		63,70 %		53,95 %	
		8		15		24		33	
	NNRPIM	87,53 %		76,66 %		63,78 %		53,37 %	
		8		15		24		33	
10 %	FEM	90,24 %		72,08 %		62,16 %		50,81 %	
		4		9		13		18	
	RPIM	90,34 %		72,27 %		62,30 %		50,80 %	
		4		9		13		18	
	NNRPIM	90,22 %		72,23 %		62,26 %		50,68 %	
		4		9		13		18	

TABELA 5.12: Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira

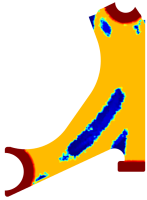
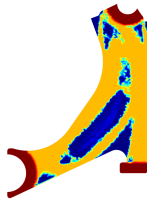
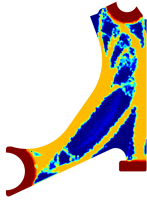
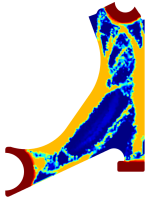
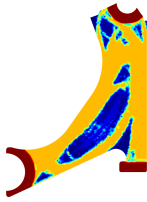
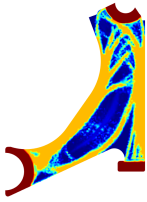
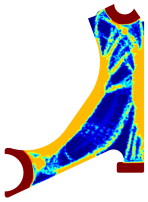
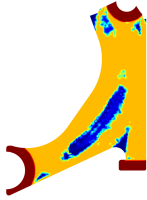
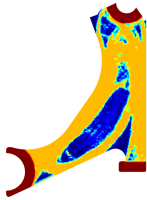
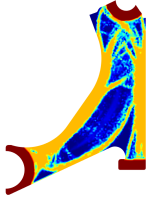
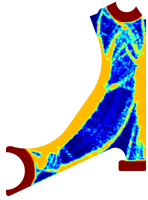
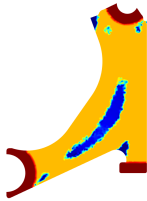
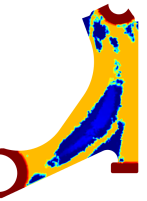
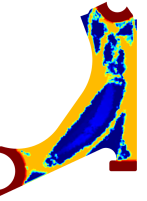
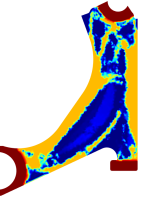
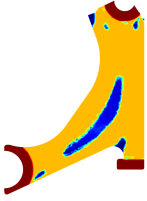
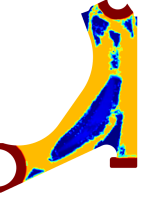
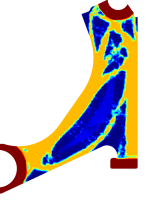
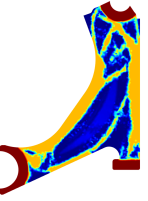
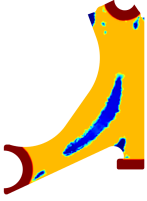
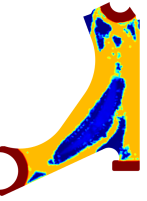
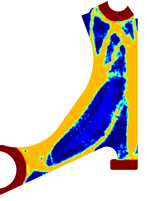
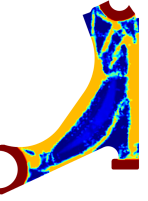
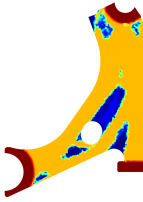
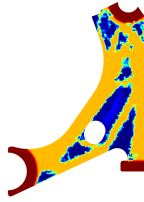
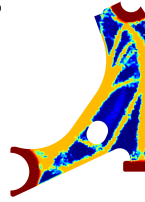
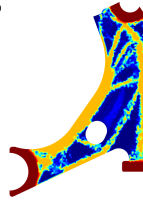
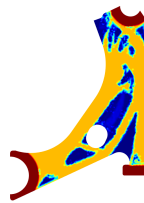
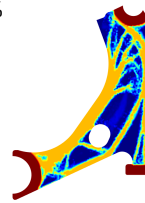
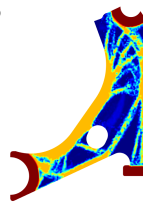
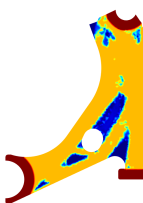
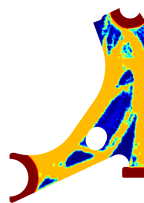
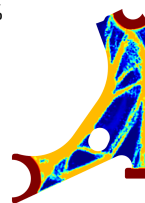
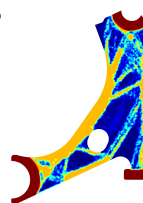
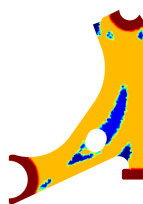
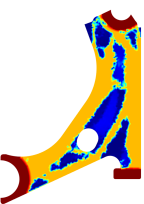
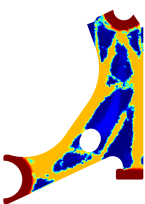
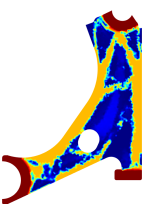
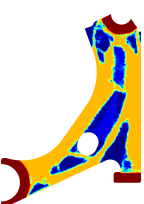
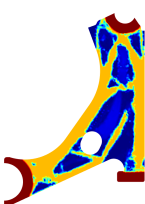
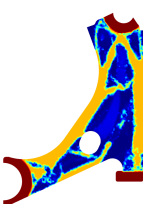
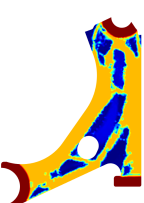
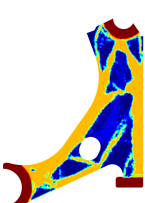
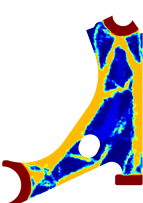
PR	Método	Solução			
5 %	FEM	88,11 %		78,53 %	
		8		24	
					
	RPIM	88,04 %		78,64 %	
		8		24	
					
	NNRPIM	88,01 %		78,72 %	
		8		24	
					
10 %	FEM	91,54 %		74,82 %	
		4		13	
					
	RPIM	91,18 %		74,66 %	
		4		13	
					
	NNRPIM	91,24 %		74,46 %	
		4		13	
					

TABELA 5.13: Soluções de otimização de um braço de suspensão com o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira

PR	Método	Solução									
5 %	FEM	87,76 %		77,12 %		65,50 %		55,93 %			
		8		15		24		30			
		87,36 %		76,90 %		63,70 %		53,95 %			
		8		15		24		30			
	NNRPIM	87,53 %		76,66 %		63,78 %		53,37 %			
		8		15		24		30			
		10 %	FEM	90,24 %		72,08 %		62,16 %		50,81 %	
				4		9		13		17	
	RPIM			90,34 %		72,27 %		62,30 %		50,80 %	
				4		9		13		17	
		NNRPIM	90,22 %		72,23 %		62,25 %		50,68 %		
			4		9		13		17		

Para comparação mais prática e direta, foram separadas da Tabela 5.10 e 5.12 três soluções de cada método numérico.

Na Fig. 5.16, são apresentadas três soluções da otimização do braço de suspensão sem o furo, para PR = 5%, na iteração 33. Ao analisar as topologias obtidas, observa-se que o método FEM produziu a solução mais binária entre os métodos comparados. No entanto, o NNRPIM

gerou a topologia com o maior número de densidades intermediárias, seguido pelo RPIM, que demonstrou uma capacidade superior de criar uma topologia com secções mais refinadas e conexões melhor definidas em comparação com o FEM.

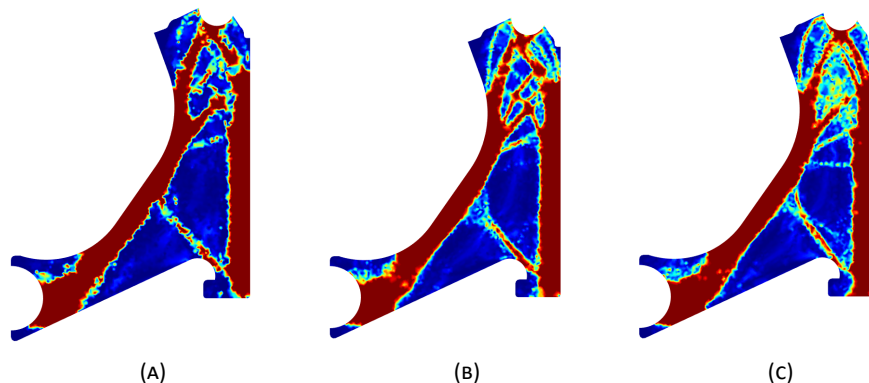


FIGURA 5.16: Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo, para $PR = 5\%$, na iteração 33 (a) Método FEM (b) Método RPIM (c) Método NNRPIM

Na Fig. 5.17 são observáveis três soluções de otimização do braço de suspensão sem o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira, para $PR = 5\%$, na iteração 30. Através de uma análise visual, é observável a superioridade das soluções geradas pelos métodos sem malha, dado a melhor conexão entre as secções e o número superior de densidades intermediárias, especialmente visível no NNRPIM.

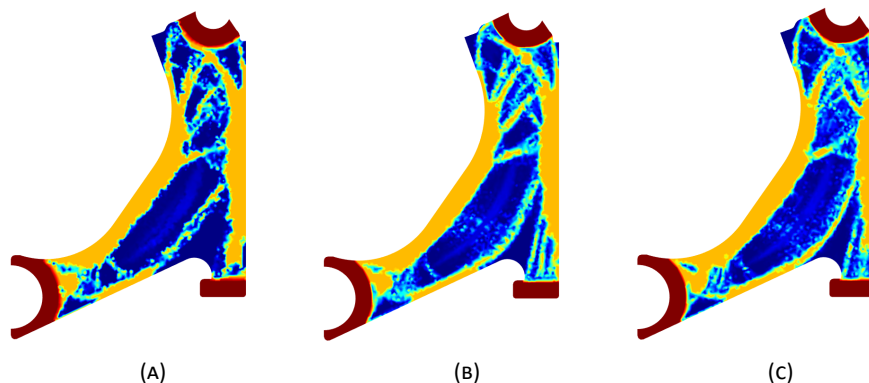


FIGURA 5.17: Soluções de otimização de um braço de suspensão sem o furo, com restrição de redução de material na zona das condições de fronteira, para $PR = 5\%$, na iteração 30 (a) Método FEM (b) Método RPIM (c) Método NNRPIM

Em suma, com ou sem restrição de modificação de material nas zonas de condições de fronteira, a tendência observada foi idêntica. Os métodos sem malha demonstraram uma maior capacidade de gerar soluções que, através de uma análise visual, permitem criar a expectativa de que o seu desempenho mecânico seria superior. Face ao FEM, o RPIM provou ser capaz de gerar soluções semelhantes, mas com um melhor refinamento e definição em geral. Por outro lado, o NNRPIM demonstrou tendência em gerar soluções com um gradiente de densidade superior. Ambos estes aspetos seriam potencialmente importantes na produção dos componentes com recurso ao FA, uma vez que este o gradiente de material demonstra importância para o comportamento estrutural de todo o componente, assim como a conexão entre tramos, que permitiria uma melhor distribuição das tensões.

5.3.2 Design de Topologias e Análise Estrutural

Com base nos resultados do algoritmo de otimização, foram desenvolvidos três modelos utilizando o desenho exterior principal do braço de suspensão original. O objetivo foi reproduzir as melhores soluções obtidas anteriormente em geometrias adequadas para maquinagem e processamento prático. Os modelos criados seguiram designs populares amplamente adotados para este tipo de componente. Na Fig. 5.18, são apresentados três braços de suspensão distintos, cuja filosofia de design serviu de base para a construção dos novos modelos otimizados, em conjunto com as melhores soluções da otimização previamente executada.

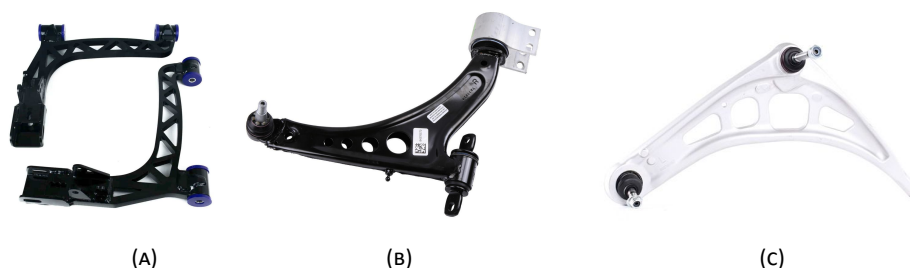


FIGURA 5.18: Braços de suspensão com diferentes *designs* de otimização (a) braço de suspensão *Destroy or Die* para Mazda MX-5 MK1 e MK2 (b) braço de suspensão da *General Motors* (c) braço de suspensão *Ridex* para BMW Series 3 E46

As geometrias desenvolvidas encontram-se ilustradas na Fig. 5.19, juntamente com uma das soluções obtidas pelo algoritmo de otimização utilizadas como referência visual para o desenho dos novos modelos. A avaliação linear estática dessas geometrias seguiu um processo de experimentação e aperfeiçoamento. Inicialmente, foi realizada uma avaliação para verificar as geometrias construídas e seu desempenho geral, utilizando apenas o NNRPIM. De seguida, os resultados foram analisados. Com base nos valores de deslocamento e rigidez obtidos e no campo de tensão de Von Mises, as geometrias foram modificadas visando melhorar o seu desempenho mecânico, sem alterar de modo considerável a sua fração volúmica e geometria base. Por fim, foi realizada uma avaliação linear-estática final, empregando as três metodologias estudadas e inferindo as conclusões correspondentes.

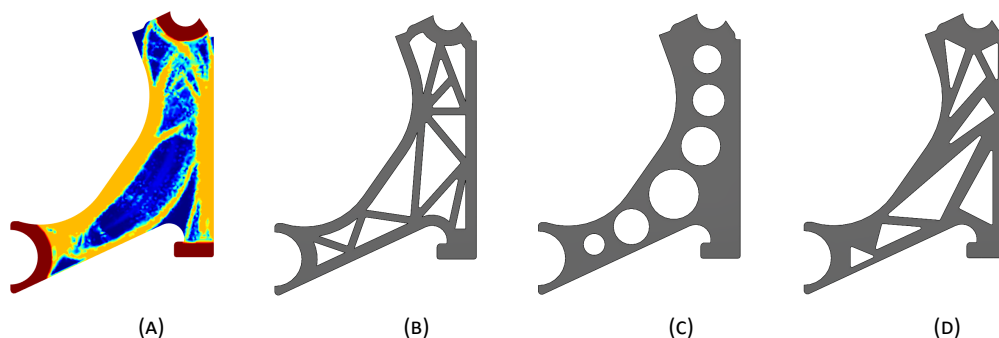


FIGURA 5.19: (a) solução de referência algoritmo de otimização (b) Modelo 1, construído com tramos (c) Modelo 2, construído com remoção de material em círculos (d) Modelo 3, construído com remoção de material em triângulos

Para cada modelo, foi calculada a secção total, cujos valores podem ser encontrados na Tabela 5.15. Os resultados da primeira análise linear estática dos modelos construídos estão apresentados na Tabela 5.14. Os campos de deslocamento total e a tensão de Von Mises

equivalente da estrutura original e das estruturas otimizadas encontram-se representados nas Tabelas 5.16 e 5.17. A rigidez foi determinada através da relação entre a carga aplicada e o deslocamento máximo observado.

Com a redução da massa e do volume total da estrutura, seria esperado um aumento no deslocamento e na tensão de Von Mises máxima, bem como uma diminuição da rigidez, devido à redução considerável da inércia. No entanto, o processo de otimização visa equilibrar a debilitação mecânica com a redução de massa. Assim, a rigidez específica obtida torna-se um parâmetro mais relevante da estrutura, em comparação com a rigidez característica.

As previsões foram confirmadas pelos resultados obtidos. Conforme ilustrado na Tabela 5.14, o braço original exibiu o menor deslocamento e a menor tensão de Von Mises máxima, indicando uma rigidez superior em comparação com os modelos sujeitos à modificação da topologia. As tensões máximas de Von Mises registadas nos Modelos 1 e 2 foram substancialmente menores do que as observadas no Modelo 3. O deslocamento no Modelo 2 foi inferior aos deslocamentos nos Modelos 3 e 1, respetivamente, refletindo-se diretamente nos valores de rigidez. Devido à elevada rigidez do Modelo 2 em comparação com os modelos 1 e 3, apesar do valor de fração volúmica ser mais elevado, a rigidez específica apresentou-se ainda assim como superior em relação aos outros modelos desenhados. Foi também observado que apesar do valor de rigidez do Modelo 3 ser superior ao Modelo 1, a rigidez específica de ambos foi idêntica. Ao analisar os campos de tensão de Von Mises do modelo sólido, é visível que a distribuição de tensões é, em geral, idêntica no FEM, RPIM e NNRPIM, isto é, independente do método numérico empregue.

TABELA 5.14: Resultados da análise estrutural obtidos na estrutural sólida e nos modelos criados, com o NNRPIM

	Braço Original	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
$V_f^{\%}$	100 %	62,39 % (-37,61 %)	73,30 % (-26,70 %)	68,98 % (-31,02 %)
u [mm]	5,495	10,392 (+89,12 %)	8,411 (+53,07 %)	9,463 (+72,21 %)
σ_{max}^{VM} [MPa]	7,629	18,386 (+141,00 %)	18,871 (+147,36 %)	22,729 (+197,93 %)
K [N/mm]	0,182	0,0962 (-47,14 %)	0,119 (-34,62 %)	0,106 (-41,76 %)
$K/V_f^{\%}$ [N/mm]	0,182	0,244 (-24,38 %)	0,162 (-10,99 %)	0,244 (-24,38 %)

TABELA 5.15: Valores de volume total dos modelos analisados

Modelo	Secção (mm ²)
Original	43978,07
Modelo 1	27438,25
Modelo 2	32236,37
Modelo 3	30338,07

TABELA 5.16: Resultados de análise estrutural no modelo sólido do braço de suspensão, com o NNRPIM

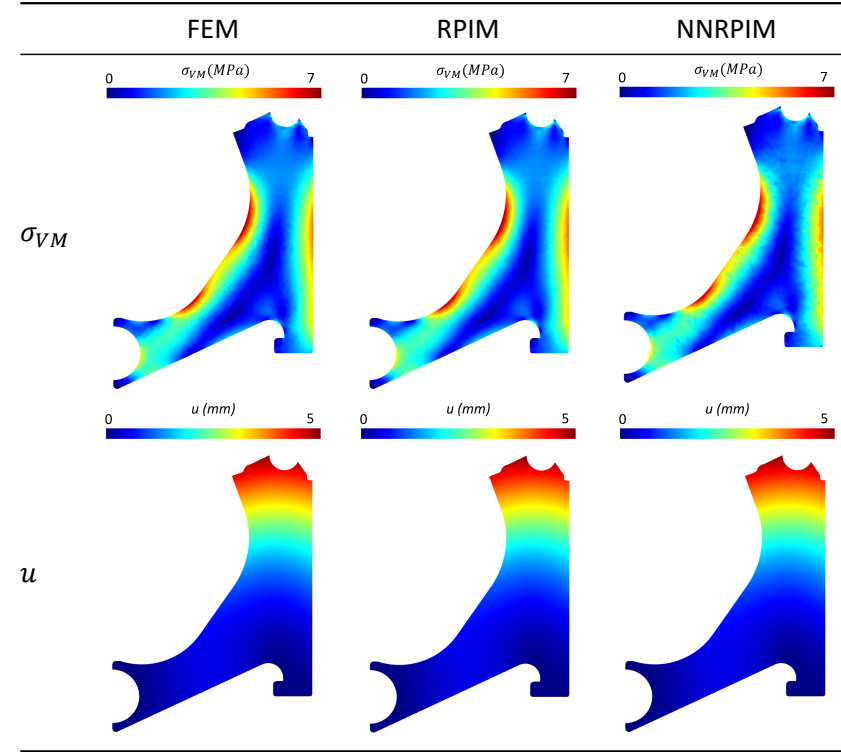
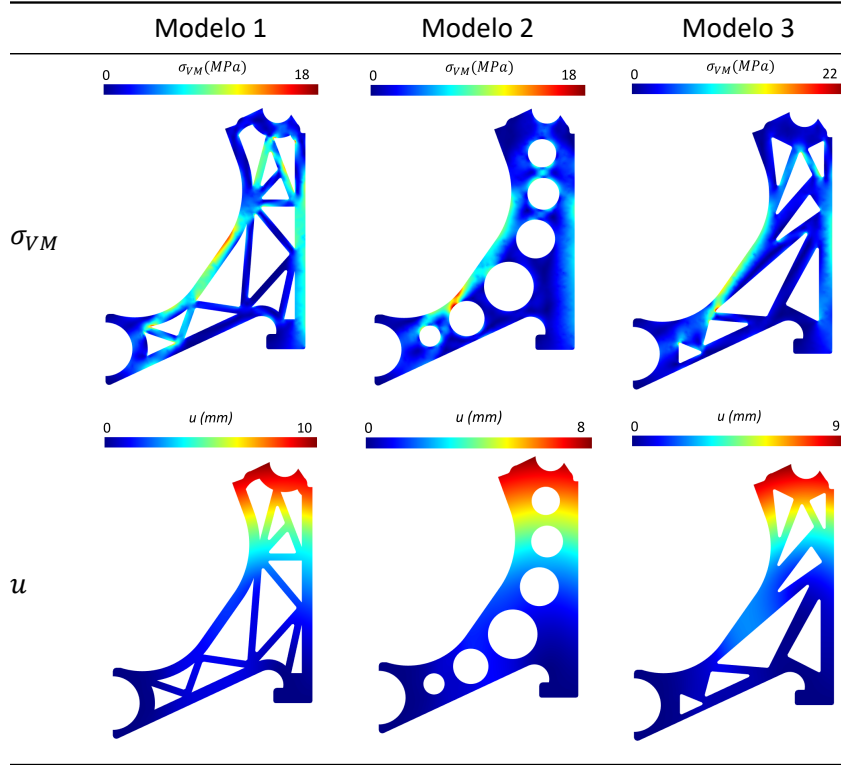


TABELA 5.17: Resultados de análise estrutural nos modelos desenhados do braço de suspensão, com o NNRPIM



Com uma análise visual dos campos de deslocamento e de tensão de Von Mises e uma análise empírica aos valores obtidos, foi notório que determinados pormenores poderiam ser melhorados em todos os modelos, onde uma diferenciação ligeira na topologia criada poderia melhorar consideravelmente os seus desempenhos mecânicos. Foi observado que os três *designs* utilizados beneficiariam de uma remodelação, devido à elevada concentração de tensões em pequenas secções e à elevada tensão de Von Mises máxima em comparação com o modelo maciço. Adicionalmente, seria expectável que um maior reforço geral da topologia pudesse levar a uma melhor rigidez por parte do componente, sem comprometer de modo considerável a redução da massa total da peça, aspeto preponderante da otimização. Deste modo, foram realizadas as seguintes modificações:

- Aumento de 5 mm da distância entre o contorno exterior da peça e o contorno exterior do espaço removido do modelo 1;
- Redução de diâmetro do furo onde as tensões de Von Mises foram mais relevantes no modelo 2;
- Ligeira remodelação da topologia geral e arredondamento mais pronunciado dos cantos dos furos criados no modelo 3.

Para além das modificações previamente mencionadas, foi construído um modelo novo baseado no modelo 3, mas com a adição de cerca de 50 % da espessura num contorno correspondente a cerca de 6 mm da delineação exterior do braço (Fig. 5.20). A adição de espessura foi efetuada com a alteração do módulo de Young na superfície exterior, para cerca de 150 % do módulo de Young previamente utilizado. O volume total do modelo 4 foi de cerca de $35929,23 \text{ mm}^3$, o que se traduziu numa redução volúmica menos drástica considerando as efetuadas anteriormente.

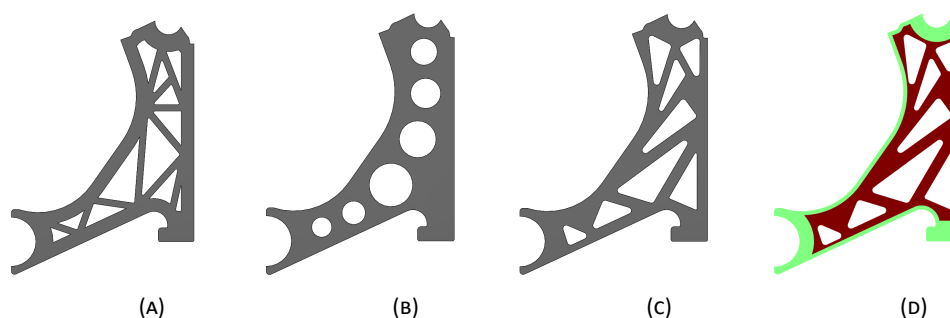


FIGURA 5.20: Modelos do braço de suspensão desenhados, com correções (a) Modelo 1, construído com tramos (b) Modelo 2, construído com remoção de material circular (c) Modelo 3, construído com remoção de material triangular (d) Modelo 4, construído com remoção de material triangular e diferenciação de espessura

As Tabelas 5.18, 5.19 e 5.20 apresentam os campos de tensão de Von Mises equivalente e de deslocamento nos modelos corrigidos e do novo Modelo 4, com os métodos FEM, RPIM e NNRPIM. Com a respetiva modificação dos modelos, em todos os modelos, a concentração de tensões foi consideravelmente melhor distribuída. A Tabela 5.21 apresenta os valores mais relevantes para a análise do desempenho dos modelos e das discrepâncias encontradas entre os diferentes métodos numéricos aplicados. Os valores de deslocamento foram consideravelmente reduzidos em comparação com as versões iniciais dos modelos, resultando em aumentos notáveis nos valores de rigidez, aproximando-se dos valores da estrutura completamente sólida.

Os valores máximos da tensão de Von Mises apresentaram reduções expressivas, justificando assim a eficiência e a preponderância das modificações dos modelos no seu desempenho mecânico.

Com exceção do Modelo 3, as modificações realizadas resultaram num aumento da fração volúmica em relação ao braço original em todos os modelos. No entanto, a rigidez específica foi melhorada em todos os casos.

O Modelo 4, demonstrou, como esperado, uma rigidez superior ao Modelo 3. Contudo, a sua variação de espessura provocou um aumento na fração volúmica, o que demonstrou indiferença na rigidez específica obtida.

A aplicação de diferentes métodos na análise linear-estática revelou algumas distinções nos campos de deslocamentos e tensões e nos valores de comparação considerados e analisados. De modo geral, não foram observadas diferenças significativas ou correlações justificáveis entre o NNRPIM e o RPIM, e os erros entre ambos os métodos sem malha foram residuais em todos os casos. Por outro lado, ao comparar estes métodos com o FEM, é possível efetuar algumas observações relevantes. Ao observar os campos de tensões de Von Mises, verifica-se que a concentração de tensões é melhor distribuída no FEM. Foi também observada uma diferença considerável nos valores máximos de tensão de Von Mises nos Modelos 2, 3 e 4, com o FEM a apresentar, em geral, valores mais baixos que o RPIM e o NNRPIM. Ambas as diferenças observadas não apresentam qualquer correlação com a discretização do método numérico empregue, mas sim com as diferenças no algoritmo de distribuição de tensões, que depende exclusivamente da programação do *software* utilizado.

O FEM demonstrou valores de deslocamento ligeiramente inferiores em relação ao RPIM e ao NNRPIM, resultando numa rigidez estrutural superior. Esta observação pode ser atribuída à natureza intrinsecamente mais rígida dos elementos triangulares sob flexão, um comportamento amplamente documentado na literatura. No entanto, a diferença foi considerada marginal e irrelevante para as comparações realizadas.

TABELA 5.18: Campos de deslocamento e de tensão de Von Mises nos modelos desenhados e corrigidos do braço de suspensão, com o FEM

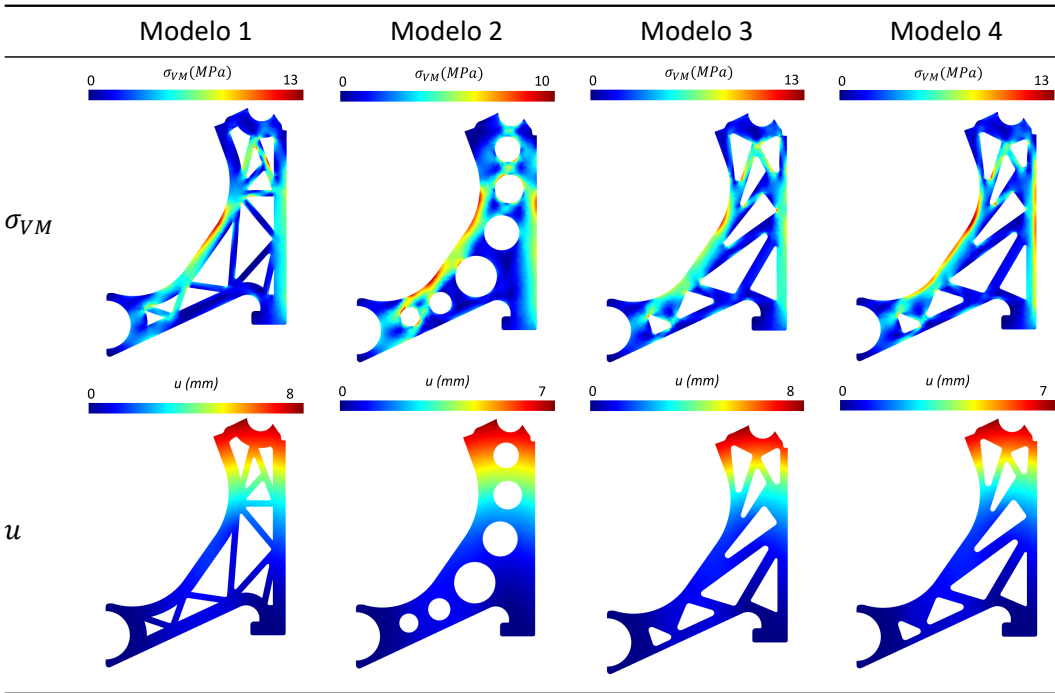


TABELA 5.19: Campos de deslocamento e de tensão de Von Mises nos modelos desenhados e corrigidos do braço de suspensão, com o RPIM

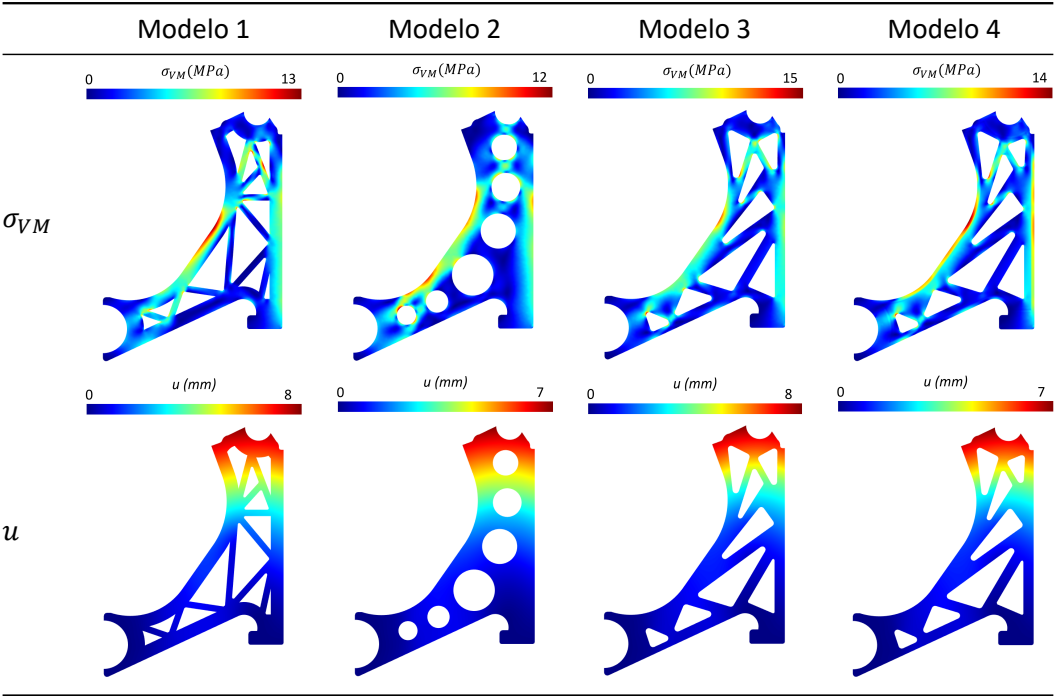


TABELA 5.20: Campos de deslocamento e de tensão de Von Mises nos modelos desenhados e corrigidos do braço de suspensão, com o NRPIM

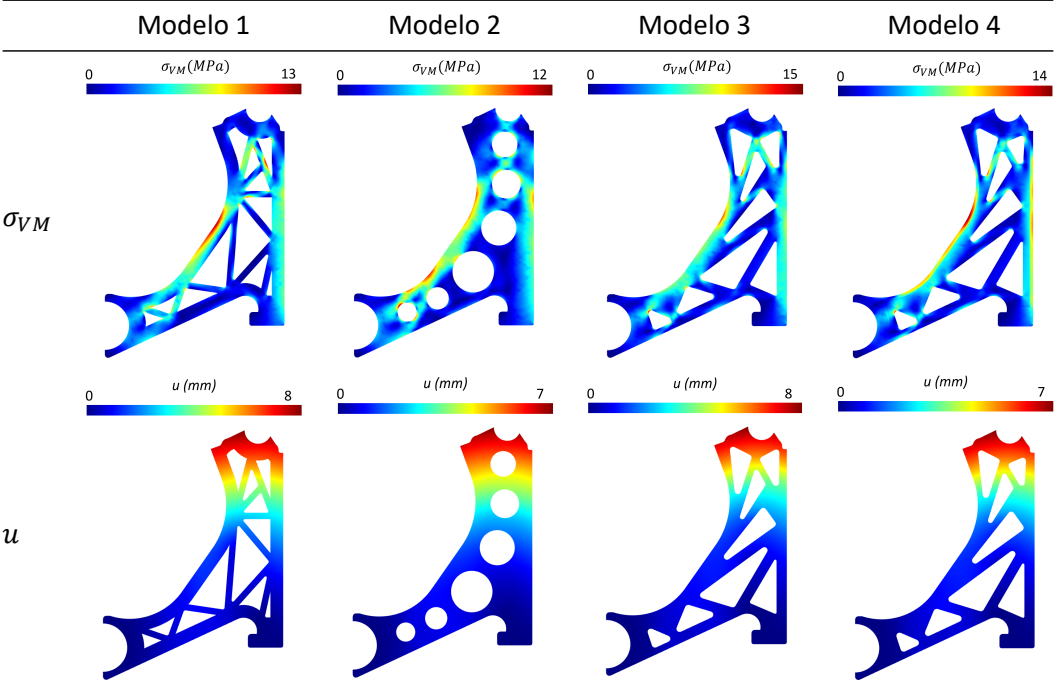


TABELA 5.21: Resultados da análise estrutural obtidos na estrutural original e nos modelos criados

		Braço Original	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
$V_f^{\%}$ (%)		100	70,06 (-29,94 %)	76,78 (-23,22 %)	68,50 (-31,50 %)	81,70 (-18,30 %)
u [mm]	FEM	5,408	8,505 (+57,27 %)	7,422 (+37,24 %)	8,689 (+60,67 %)	7,165 (+32,49 %)
	RPIM	5,420	8,478 (+56,42 %)	7,476 (+37,93 %)	8,790 (+62,18 %)	7,374 (+36,05 %)
	NNRPIM	5,495	8,477 (+54,27 %)	7,537 (+37,16 %)	8,821 (+60,53 %)	7,389 (+34,47 %)
σ_{max}^{VM} [MPa]	FEM	7,567	13,922 (+83,98 %)	10,789 (+42,58 %)	13,896 (+83,64 %)	13,311 (+75,91 %)
	RPIM	7,429	13,391 (+80,25 %)	12,184 (+64,00 %)	15,158 (+104,04 %)	14,428 (+94,21 %)
	NNRPIM	7,629	13,746 (+80,18 %)	12,458 (+63,30 %)	15,203 (+99,28 %)	14,743 (+89,71 %)
K [N/mm]	FEM	0,185	0,118 (-36,22 %)	0,135 (-27,03 %)	0,124 (-37,84 %)	0,140 (-24,32 %)
	RPIM	0,184	0,118 (-35,87 %)	0,134 (-27,17 %)	0,114 (-38,04 %)	0,136 (-26,09 %)
	NNRPIM	0,182	0,118 (-35,17 %)	0,133 (-26,92 %)	0,113 (-37,91 %)	0,135 (-25,82 %)
$K/V_f^{\%}$ [N/mm]	FEM	0,185	0,168 (-9,19 %)	0,175 (-5,41 %)	0,168 (-9,19 %)	0,171 (-7,57 %)
	RPIM	0,184	0,168 (-7,70 %)	0,174 (-5,43 %)	0,166 (-9,78 %)	0,166 (-9,78 %)
	NNRPIM	0,182	0,168 (-7,69 %)	0,173 (-4,95 %)	0,165 (-9,34 %)	0,165 (-9,34 %)

5.4 Discussão de Resultados

Através das soluções aparentemente mais eficientes, foram construídos modelos finais para o componente mecânico estudado. O processo executado foi baseado em técnicas empíricas e manualmente iterativas, onde foram desenhados os modelos, testados, e de seguida melhorados. Ao avaliar os resultados obtidos dos modelos finais, foi possível concluir que:

- O Modelo 2 demonstrou o melhor desempenho mecânico, justificado pela tensão de Von Mises mais baixa, rigidez superior aos demais modelos desenhados e rigidez específica superior ao braço original. Estes resultados sustentaram as expectativas, uma vez a

remoção de material em forma circular permite uma distribuição de tensões na estrutura mais uniforme. Como consequência, o esforço não é concentrado em pontos específicos, o que leva a um aumento da rigidez geral da peça;

- Os Modelos 1 e 3 representam filosofias de *design* relativamente semelhantes, uma vez que ambos resultam na remoção de material em forma de triângulos. Posto isto, os valores obtidos demonstraram-se idênticos. Contudo, a concentração de tensões foi mais uniforme no Modelo 1;
- O Modelo 4, correspondente ao Modelo 3 com um aumento da espessura do contorno exterior, como esperado, demonstrou uma rigidez superior e uma tensão de Von Mises máxima inferior em relação ao Modelo 3. Contudo, uma vez que representou simultaneamente um aumento na fração volúmica, a rigidez específica não variou em relação ao seu modelo base.

O processo adotado mostrou ser eficiente no desenho de geometrias estruturalmente satisfatórias, demonstrando ser prático na obtenção de *designs* otimizados em comparação com a estrutura base original. Para além disso, o processo evidenciou ser simples e direto e vários modelos podem ser testados num tempo razoável, através da análise e averiguação de topologias com a variação de, por exemplo, a espessura principal do componente ou de pormenores gerais da própria topologia.

Apesar das suas vantagens, o processo em questão apresenta algumas limitações que devem ser cuidadosamente consideradas antes da sua aplicação, como a impossibilidade de otimização topológica ideal, inconsistência na produção de resultados, o tempo de processamento extenso provocado pela ausência de automatização, a necessidade de melhorias manuais e uma dificuldade acrescida no processamento de estruturas complexas.

Deste modo, com os respetivos ensaios experimentais, seria expectável que os mesmos comprovassem a importância das técnicas de simulação e otimização estrutural avançadas e da sua combinação com as FGCS, não só na obtenção de geometrias estruturalmente superiores, como na importância do processo na melhoria da eficiência na conceção de componentes otimizados para determinadas condições.

Capítulo 6

Prototipagem Rápida

O presente capítulo apresenta toda a preparação de modelos físicos recorrendo a técnicas de fabrico aditivo, incluindo estes os modelos desenhados no capítulo previamente apresentado, assim como a modelos baseados diretamente em soluções obtidas diretamente do algoritmo de otimização, recorrendo a estruturas celulares de gradiente funcional.

6.1 Preparação da Impressão

6.1.1 Conversão de Soluções Otimizadas

Através do procedimento de otimização apresentado na Secção 5.3, procedeu-se à conversão do mapa de densidades de uma das soluções obtidas num ficheiro .stl, de modo a permitir a impressão de estruturas celulares com gradiente funcional. O processo de otimização foi novamente efetuado e as soluções previamente geradas na Secção 5.3 não puderam ser aproveitadas para o presente processo, uma vez que o número de nós da malha utilizado mostrou ser demasiado elevado para a rotina de conversão, resultando em defeitos nos ficheiros .stl gerado. Deste modo, foi construída uma nova malha com metade do número de nós da malha original.

Após a obtenção do ficheiros .stl, os mesmos foram importados para um *software* de fatiamento, onde foi efetuado todo o pré-processamento e parametrização para a respetiva impressão. Para a conversão, foi utilizada uma rotina desenvolvida e modificada por Pais, Alves e Belinha 2021. O objetivo primário da rotina passaria pela conversão da topologia de densidade variável bi-dimensional para um ficheiro .stl tri-dimensional, através da conversão dos elementos triangulares para elementos tetraédricos com a respetiva extrusão. O procedimento da rotina pode ser descrito da seguinte forma:

- Coletânea de *inputs*, como níveis de densidade desejados, comprimento de extrusão, iteração selecionada, método de análise, densidade do material, suavização e respetivo rácio desejado, tipo de elemento, linear ou quadrática. Para as conversões mencionadas, a iteração selecionada em cada ficheiro .zip exportado do FEMAS foi a iteração 20, para cada método usado (Fig. 6.1);

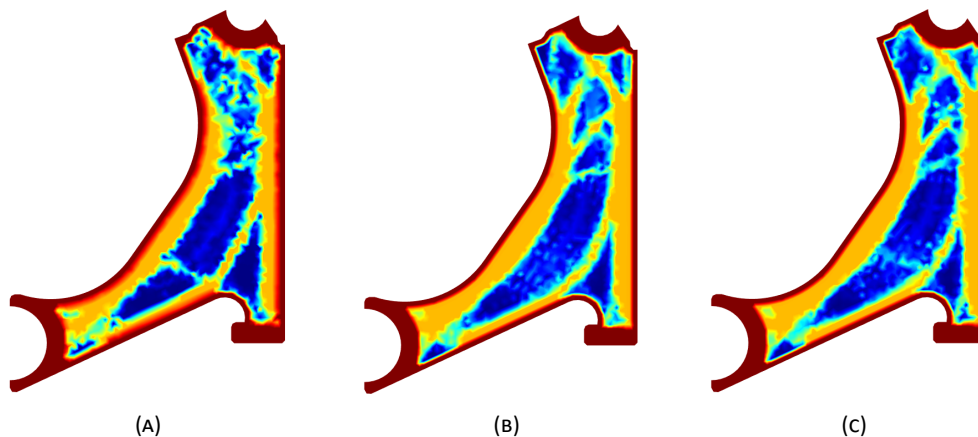


FIGURA 6.1: Iteração base (iteração 20) para conversão de mapa de densidades num ficheiro .stl, para cada método numérico utilizado (a) FEM (b) RPIM (c) NNRPIM

- De seguida, são criados dois ficheiros distintos para criação e atribuição da informação de valores de densidade à nova malha .stl. É efetuada a leitura de ficheiro FEMAS .zip importado e a colheita de informação de valores de densidade, coordenadas, nomes dos nós e centróides. Porém, dependendo do método, o processo é distinto:
 - No caso do FEM, a informação de densidade de cada elemento é explícita. O elemento toma o valor médio dos pontos de integração no seu interior (no caso dos triângulos, só existe 1 ponto de integração). Através do vetor característico dos elementos criado, são atribuídos valores de densidade a cada elemento, e respetivamente, a cada ponto de integração das divisões criadas;
 - No caso dos métodos sem malha, existiu a necessidade de criação de uma malha auxiliar, semelhante à malha do FEM, constituída de pseudo-elementos. De seguida, são verificados os pontos de integração que estão localizados dentro do elemento. O resto do procedimento é idêntico ao FEM.
- Após atribuir os valores de densidade a cada elemento da malha do sólido bi-dimensional, é efetuada a extrusão dos respetivos elementos, através da repetição dos elementos na direção da espessura do objeto;
- De seguida, pode ou não ser efetuada a suavização das densidades, dependendo da decisão do utilizador, através da média das densidades dos elementos mais próximos;
- Depois, a rotina prossegue à criação dos sólidos de modo a executar a triangulação. Começa por efetuar a suavização, e de seguida, com a criação da matriz com a lista dos elementos associados a cada nível de densidade;
- A seguir, são organizados os elementos de cada grupo de densidades que estão em contacto uns com os outros, de modo a prosseguir com a triangulação. É analisado cada nível de densidade e verificado se os elementos estão conectados, com a análise nodal. Se um elemento j partilha todos os seus 4 nós com outro elemento i , então j é adicionado ao mesmo "sólido" que i . Elementos isolados (sem 4 nós partilhados) criam novos sólidos. Se j partilha 4 nós com elementos de diferentes sólidos existentes, esses sólidos são unidos;

- Após a criação dos sólidos, são executadas as triangulações. Por fim, a informação é usada para gerar arquivos .stl individuais para cada sólido. Os sólidos criados são compactados num único arquivo .stl para cada nível de densidade (Pais, Alves e Belinha 2021).

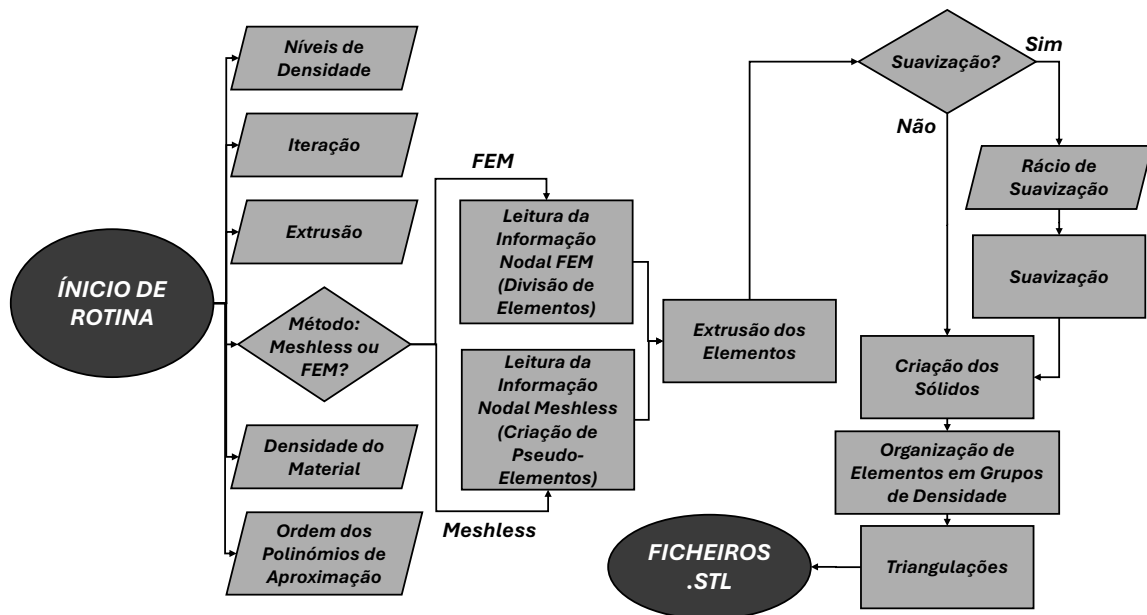
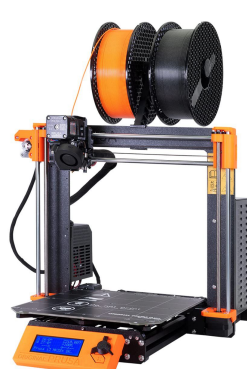


FIGURA 6.2: Fluxograma de conversão de soluções do algoritmo para ficheiros .stl

6.1.2 Equipamento e Acessórios de Impressão

Na Fig. 6.3, é possível observar os equipamentos de impressão utilizados para o fabrico aditivo dos provetes: a impressora Prusa i3 MK3S, uma impressora de extrusão de filamento fundido, que suporta um diâmetro de filamento de 1,75 mm e o filamento usado na construção dos provetes, o *Filament PM*[®] de PLA, de diâmetro 1,75 mm, vermelho pérola. O *software* de fatiamento utilizado foi o *PrusaSlicer* 2.7.4.



(A)



(B)

FIGURA 6.3: (a) Prusa i3 MK3S (b) *Filament PM*[®] PLA 1,75 mm - Pearl Red

As características do filamento utilizado podem ser encontradas na Tabela 6.1.

TABELA 6.1: Propriedades do filamento *Filament PM® PLA 1,75 mm - Pearl Red*

Propriedade	Valor
Propriedades de Impressão	
Temperatura HE	200 – 220°C
Temperatura HB	20 – 60°C
Propriedades de Temperatura do Material	
Temperatura de amolecimento de Vicat	55°C
Temperatura de deflexão de calor (HDT)	55°C
Propriedades Mecânicas do Material	
Resistência ao Impacto (kJ/m^2)	64,5
Módulo de Flexão (GPa)	3,5
Dureza (Shore D)	78,3
Propriedades Físicas	
Massa Volúmica (g/cm^3)	1,24
Índice de Fluxo de Fusão	6g/10 min.

As condições de impressão dos provetes e dos respetivos acessórios são relevantes para garantir uma qualidade consistente nas impressões. Deste modo, foram verificadas e garantidas as seguintes condições:

- Temperaturas ambientes entre cerca de 25° C e 30° C;
- Humidade relativa do ar entre 45% e 55%;
- Impressora posicionada numa superfície rígida, de modo a minimizar vibrações que pudessem colocar o funcionamento do sistema em questão;
- Limpeza regular da cama de impressão com algodão e álcool, de modo a maximizar a adesão da primeira camada e a integridade de cada impressão.

De mencionar que alterações climáticas ligeiras seriam inevitáveis. Contudo, foram reunidas todas as condições possíveis de modo a minimizar este efeito. Utilizou-se a configuração de impressão "0,2 mm *Quality*", disponível no *software* de fatiamento, por apresentar um compromisso aceitável entre tempo de impressão e qualidade dos detalhes impressos. Os principais de parâmetros de impressão selecionados foram os seguintes:

- Temperatura da cama de impressão: 60°C;
- Temperatura de extrusão: 215°C na primeira camada, 210°C nas restantes;
- Altura de camada: 0,2 mm;
- Velocidade de impressão do *infill*: 80 mm/s.

6.1.3 Impressão dos Provetes

Após a importação dos sólidos para o *software* de fatiamento, procedeu-se à definição da forma e da densidade do preenchimento dos provetes. Para os provetes celulares com gradiente funcional, a densidade de preenchimento atribuída a cada parte sólida trata-se da densidade

média de todos os elementos contidos nesse sólido. Adicionalmente, seria possível suavizar o mapa de densidade inicial calculando a média da densidade dos elementos dentro de um determinado raio. Esse raio é definido por um fator de suavização correspondente à distância entre dois elementos, dividida pela distância entre os dois elementos mais afastados. Os provetes suavizados são, então, submetidos ao mesmo procedimento para gerar os ficheiros .stl. Cada ficheiro .stl é importado para o software de fatiamento e preenchido com a densidade correta. Um exemplo detalhado de um dos provetes celulares com gradiente funcional pode ser encontrado na Fig. 6.4.

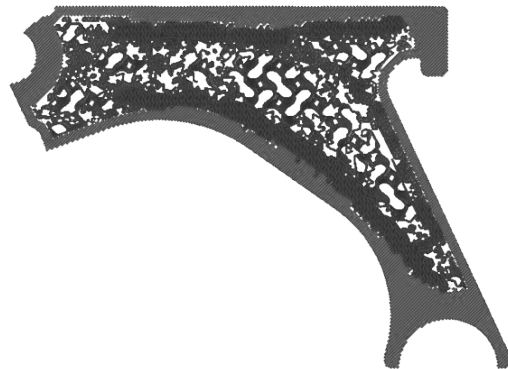


FIGURA 6.4: Preparação do provete RPIM com rácio de suavização de 0,05 e com escala de 20% aplicada, visualizado no *PrusaSlicer*

Os provetes impressos correspondem aos modelos modificados e corrigidos, analisados num domínio linear-estático no Capítulo 5, assim como três provetes celulares com gradiente funcional, recorrendo ao preenchimento em forma de giróide, baseados na iteração 20 da otimização topológica realizada do braço de suspensão, com uma fração volúmica associada de cerca de 80%, aproximadamente. No caso dos provetes de densidade variável, os mesmos diferenciaram-se no processamento de conversão para o formato .stl, devido à modificação do parâmetro de suavização e do método numérico aplicado no algoritmo de otimização. Foram utilizados rácios de suavização de: 0 (sem suavização), 0,05 e 0,1. A espessura selecionada para todos os provetes foi de cerca de 10 mm, espessura que foi modificada com a alteração da escala dos ficheiros .stl, de cerca de 20%, conforme as limitações do equipamento disponível para os ensaios. Na Tabela 6.2 e na Fig. 6.5, podem ser observados a lista dos provetes impressos para a respetiva testagem, assim como os próprios provetes fabricados. O tempo de impressão médio dos provetes foi por volta de 45 minutos para os modelos de densidade binária, e de 1:15h para os modelos FGCS. O tempo de impressão dos provetes total foi de cerca de 43:15h, sem considerar as impressões que foram canceladas e reiniciadas devido a defeitos imprevistos.

TABELA 6.2: Categorização de provetes impressos para testagem

Método	Suavização	Provetes Impressos
FEM	s/suav.	3
	0,05	3
	0,1	3
RPIM	s/suav.	3
	0,05	3
	0,1	3
NNRPIM	s/suav.	3
	0,05	3
	0,1	3
Sólidos	-	3
Tramos	-	3
Círculos	-	3
Triângulos c/dif. de espessura exterior	-	3
Triângulos	-	3

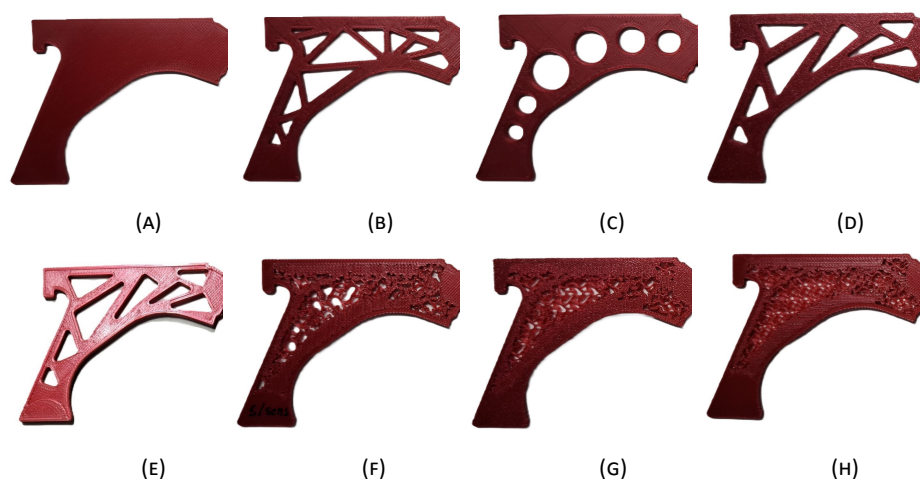


FIGURA 6.5: (a) Sólido (b) Tramos (c) Círculos (d) Triângulos (e) Triângulos com diferença de espessura (f) Otimizado, sem sensibilidade, NNRPIM (g) Otimizado, com rácio de suavização = 0,05, NNRPIM (h) Otimizado, com rácio de suavização = 0,1, NNRPIM

6.2 Defeitos de Impressão

A aplicação do processo FFF resultou em diversos defeitos e erros de impressão, especialmente problemas de aderência da primeira camada em provetes de densidade variável. Era previsível que a adesão desses modelos à plataforma fosse mais difícil, devido à geometria que não permitia uma primeira camada regular com perímetros, reduzindo significativamente a área de superfície para adesão inicial. Isso comprometeu a consistência geral das impressões, levando ao cancelamento e reinício frequente das mesmas. Este problema foi particularmente evidente em geometrias de densidade variável sem suavização, onde o gradiente de densidades entre camadas era mais abrupto.

Um dos defeitos mais visíveis e potencialmente nocivo à integridade de potenciais ensaios experimentais trata-se do *warping*. O mesmo é provocado, novamente, pela falta de aderência da primeira camada, o que resulta no ligeiro empenamento da impressão. Na Fig. 6.6, é possível verificar o fenómeno observado num dos provetes impressos. É observável que o defeito está localizado numa zona de encastramento no ensaio mecânico, o que facilmente poderia provocar resultados inconsistentes na curva força/deslocamento.

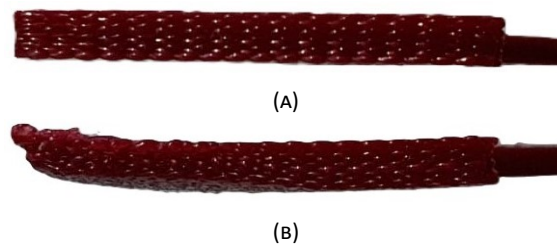


FIGURA 6.6: Comparação do efeito warping observado num dos provetes impressos (a) provete intacto (b) Proвете com deformação visível

Na impressão do Modelo 4, foi observada uma dificuldade acrescida particular. A espessura exterior do modelo, em comparação com a escala e as dimensões do provete a ser impresso, demonstrou ser consideravelmente baixa, o que resultou na impossibilidade de adesão à cama de impressão na tentativa de imprimir o provete íntegro. Para colmatar esta dificuldade, foram construídos suportes para a primeira camada de impressão, com recurso ao próprio *software* de fatiamento. A existência da camada de suporte demonstrou a necessidade de pós-processamento do provete, onde a mesma foi cuidadosamente removida. A pré-visualização do modelo e o modelo impresso ainda com a camada de suporte podem ser observados na Fig. 6.7

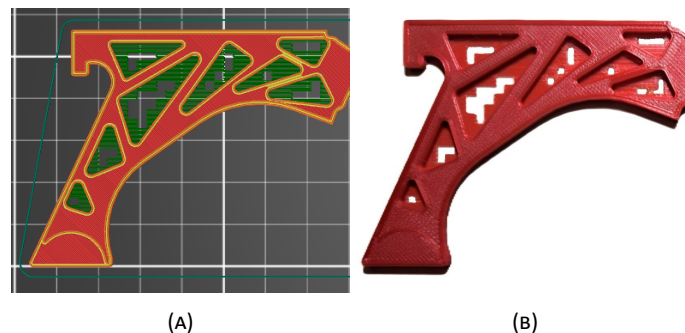


FIGURA 6.7: (a) Simulação de impressão no *PrusaSlicer* do Modelo 4 para testagem (b) Modelo 4 para testagem impresso, com suporte por remover

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusões Gerais

A aplicação de técnicas de otimização estrutural na indústria automóvel tem-se revelado extremamente eficiente na conceção de componentes com massa significativamente reduzida em comparação com as estruturas originais. Teoricamente, a aplicação de componentes obtidos com recurso a estas técnicas pode conduzir a melhorias substanciais no desempenho do automóvel, nomeadamente no desempenho de condução, na satisfação do proprietário, na redução das emissões de gases poluentes e na diminuição do consumo de energia. Adicionalmente, a implementação de procedimentos automatizados de otimização como ferramenta padrão na secção de I&D apresenta uma potencial preponderância financeira, especialmente no aumento do lucro anual, alcançado através da redução do material utilizado no fabrico de cada automóvel.

Inicialmente, foram realizados estudos preliminares para obter uma comparação inicial entre os métodos numéricos analisados no trabalho, tanto numa análise linear-estática quanto na aplicação de um algoritmo de otimização a um caso de estudo simples, especificamente uma viga cantilever. Através da análise linear-estática, observou-se que, para malhas refinadas, o método numérico utilizado não teve impacto significativo nos valores obtidos. No entanto, para malhas menos robustas, as taxas de convergência observadas com a utilização de métodos sem malha foram mais adequadas. Embora este aspeto não tenha sido extremamente influente nos resultados devido à simplicidade do caso de estudo, seria esperado que, na análise linear-estática de uma geometria mais complexa, o método numérico aplicado fosse crucial para obter uma precisão de simulação aceitável. Nesse contexto, estima-se que o RPIM e o NNRPIM mostrariam superioridade na precisão dos resultados obtidos face ao FEM.

No estudo preliminar do algoritmo de otimização, observou-se que os melhores resultados foram alcançados com rácios de penalização de 5% e 10%. Como esperado, os resultados mais adequados foram obtidos com a utilização da malha robusta. A malha mais grosseira produziu soluções significativamente superiores quando empregues os métodos sem malha, evidenciando seu potencial na otimização estrutural. Este aspeto é especialmente relevante quando o tempo computacional é um fator crítico, uma vez que o RPIM e o NNRPIM permitiram obter melhores soluções com um menor número de nós. Para além disso, foram comparados dois critérios de otimização distintos: o critério da tensão de Von Mises equivalente (SEF) e o critério da densidade de energia de deformação (SED). A diferença entre as soluções obtidas com os dois critérios foi perceptível apenas com a utilização da malha refinada, apresentando uma redução mais acentuada da fração volúmica e secções densas mais definidas e conectadas.

Foi aplicado um algoritmo de otimização evolucionário de remodelação óssea num braço de suspensão automóvel, seguindo vários domínios com características ligeiramente distintas,

dependentes das restrições de remoção de material localizadas e da geometria inicial considerada, utilizando os parâmetros e critérios considerados mais congruentes do estudo de otimização preliminar. Com a respetiva análise das topologias geradas, foi concluído que foram obtidas as melhores soluções para $PR = 5\%$. Ao comparar os diferentes métodos numéricos, foi notório que os métodos sem malha apresentaram os melhores resultados, com a produção de um maior número de densidades intermediárias e uma melhor ligação entre secções. Hipoteticamente, foi estimado que ambos os aspetos fossem relevantes no desempenho mecânico do componente, especialmente na construção por manufatura aditiva fiel às soluções obtidas.

Através de uma solução do algoritmo de otimização, foram construídos vários modelos inspirados em *designs* e em formas de remoção de material populares na indústria e na manufatura de braços de suspensão para veículos ligeiros. Os modelos desenhados e um modelo completamente sólido foram submetidos a uma análise linear-estática, aplicando as condições de fronteira correspondentes às utilizadas na otimização preliminar previamente estudada. Com base nos resultados, foi realizada uma comparação do desempenho mecânico de cada modelo, nomeadamente da tensão de Von Mises máxima, rigidez e rigidez específica obtidas. Os maiores valores de rigidez e rigidez específica obtidos, excluindo o modelo sólido, provieram do modelo com remoção de material em forma circular. Este resultado encontrou-se de acordo com as expectativas, uma vez que a forma circular apresenta-se como popular na construção de mecânica, popularidade resultante da ótima dispersão de tensões da forma geométrica.

De modo geral, a análise numérica conduzida no estudo revelou consistentemente a superioridade na aplicação dos métodos sem malha RPIM e NNRPIM.

7.2 Trabalhos Futuros

Em futuros trabalhos, o ênfase principal deveria ser colocado na melhoria integral do processo de fabrico e conceção dos provetes associados às topologias com gradiente de densidade. Para o efeito, duas soluções poderiam satisfazer estas necessidades:

- Estudo da parametização específica do *software* de fatiamento da impressora utilizada. Por exemplo, utilização de uma definição de impressão que exigisse uma melhor precisão na impressão dos provetes. Este aspeto deveria ser cuidadosamente avaliado, uma vez que a utilização de uma definição de impressão mais precisa envolveria um tempo despendido para o fabrico dos provetes adicional;
- Modificação da escala dimensional aplicada aos provetes, e execução de testes experimentais visando corroborar os resultados numéricos obtidos.

Deste modo, e com uma melhor garantia de qualidade do processo de fabrico dos provetes, um estudo comparativo mais rigoroso entre os diferentes modelos testados poderia ser efetuado e as hipóteses iniciais relativas à superioridade do desempenho mecânico dos provetes com gradiente de densidade poderiam eventualmente ser encontradas.

Adicionalmente, a possibilidade de otimização do braço de suspensão no formato tri-dimensional ao invés do bi-dimensional poderia ser explorada. Isso permitiria a remoção de material e alteração da topologia na direção da espessura do componente, possibilitando uma análise de otimização mais complexa. No entanto, esta abordagem não foi adotada no presente estudo devido às limitações do *hardware* disponível e ao tempo computacional excessivo que seria necessário em comparação com o formato bi-dimensional.

Um estudo mais aprofundado poderia ser efetuado em relação à criação de gradiente no

processo de suavização dado na rotina de conversão para ficheiro .stl, uma vez que não foi possível encontrar alguma correlação entre a suavização aplicada e os resultados de rigidez obtidos. Mais valores entre um rácio de suavização entre 0 e 0,1 poderiam ser estudados, e consequentemente a possibilidade de encontrar uma solução ideal.

A influência da direção de impressão dos provetes trata-se de um tema de estudo relevante, uma vez que essa orientação pode ter um impacto considerável no desempenho mecânico dos diversos provetes testados. Em processos de FA, como o FFF, a direção de deposição dos filamentos ou camadas afeta propriedades mecânicas, como a resistência, a tenacidade e a rigidez. Deste modo, otimizar essa orientação seria crucial para garantir a qualidade e funcionalidade das peças impressas, e adicionar um parâmetro de comparação de interesse para o estudo efetuado.

Muitos dos elementos de um veículo estão sujeitos a solicitações cíclicas ao longo do seu tempo de utilização. Um aspeto a ter em consideração no desempenho mecânico de diversos componentes automóveis, é o seu tempo de vida de fadiga. A otimização estrutural focada na melhoria da resistência à fadiga, em particular no braço de suspensão de um automóvel, pode revelar-se promissora, possibilitando a obtenção de geometrias com menor massa, maior rigidez e melhor desempenho sob carregamentos cíclicos.

Bibliografia

- Abolbashari, M. e S. Keshavarzmanesh (2006). «On various aspects of application of the evolutionary structural optimization method for 2D and 3D continuum structures». Em: *Finite Elements in Analysis and Design* 42.6, pp. 478–491. ISSN: 0168-874X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2005.09.004>.
- Abueidda, D. et al. (2019). «Mechanical properties of 3D printed polymeric Gyroid cellular structures: Experimental and finite element study». Em: *Materials Design* 165, p. 107597. ISSN: 0264-1275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107597>.
- Ambati, S. e R. Ambatipudi (2022). «Effect of infill density and infill pattern on the mechanical properties of 3D printed PLA parts». Em: *Materials Today: Proceedings* 64. International Conference on Advanced Materials for Innovation and Sustainability, pp. 804–807. ISSN: 2214-7853. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.05.312>.
- Ansari, A. e M. Kamil (2021). «Effect of print speed and extrusion temperature on properties of 3D printed PLA using fused deposition modeling process». Em: *Materials Today: Proceedings* 45. Second International Conference on Aspects of Materials Science and Engineering (ICAMSE 2021), pp. 5462–5468. ISSN: 2214-7853. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.02.137>.
- Atluri, S. e T. Zhu (1998). «A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach». Em: *Computational Mechanics* 22, pp. 117–127. DOI: 10.1007/s004660050346.
- Balletti, C., M. Ballarin e F. Guerra (2017). «3D printing: State of the art and future perspectives». Em: *Journal of Cultural Heritage* 26, pp. 172–182. ISSN: 1296-2074. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.culher.2017.02.010>.
- Belinha, J. (2014). *Meshless Methods in Biomechanics - Bone Tissue Remodelling Analysis*. Vol. 16. Springer International. ISBN: 978-3-319-06399-7. DOI: 10.1007/978-3-319-06400-0.
- Belinha, J., R. Natal Jorge e L. Dinis (2013). «A meshless microscale bone tissue trabecular remodelling analysis considering a new anisotropic bone tissue material law». Em: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 16, pp. 1170–1184. DOI: 10.1080/10255842.2012.654783.
- Belytschko, T., Y. Lu e L. Gu (1994). «Element-free Galerkin methods». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.2, pp. 229–256. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620370205>.
- Bendsøe, M. e O. Sigmund (1999). «Material interpolation schemes in topology optimization». Em: *Archive of Applied Mechanics* 69, pp. 635–654. DOI: 10.1007/s004190050248.
- (2004). «Topology optimization. Theory, methods, and applications. 2nd ed., corrected printing». Em: DOI: 10.1007/978-3-662-05086-6.
- Birosz, M., D. Ledényák e M. Andó (2022). «Effect of FDM infill patterns on mechanical properties». Em: *Polymer Testing* 113, p. 107654. ISSN: 0142-9418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2022.107654>.
- Bixby, R. et al. (1992). «Very Large-Scale Linear Programming: A Case Study in Combining Interior Point and Simplex Methods». Em: *Oper. Res.* 40, pp. 885–897. DOI: 10.1287/opre.40.5.885.

- Bobaru, F. e S. Mukherjee (2001). «Shape sensitivity analysis and shape optimization in planar elasticity using the element-free Galerkin method». Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.32, pp. 4319–4337. ISSN: 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00321-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00321-2).
- Cai, S. e W. Zhang (2015). «Stress constrained topology optimization with free-form design domains». Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 289. DOI: 10.1016/j.cma.2015.02.012.
- Carter, D., D. Fyhrie e R. Whalen (1987). «Trabecular bone density and loading history: Regulation of connective tissue biology by mechanical energy». Em: *Journal of Biomechanics* 20.8, pp. 785–794. ISSN: 0021-9290. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90058-3](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90058-3).
- Cavazzuti, M. et al. (2011). «High performance automotive chassis design: a topology optimization based approach». Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 44.1, pp. 45–56. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-010-0578-7.
- Chacón, J. et al. (2017). «Additive manufacturing of PLA structures using fused deposition modelling: Effect of process parameters on mechanical properties and their optimal selection». Em: *Materials Design* 124, pp. 143–157. ISSN: 0264-1275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.03.065>.
- Charles, A. et al. (2021). «Additive Manufacturing in the Automotive Industry and the Potential for Driving the Green and Electric Transition». Em: pp. 339–346. ISBN: 978-981-16-6127-3. DOI: 10.1007/978-981-16-6128-0_32.
- Cowin, S. (1985). «The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor». Em: *Mechanics of Materials* 4.2, pp. 137–147. ISSN: 0167-6636. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(85\)90012-2](https://doi.org/10.1016/0167-6636(85)90012-2).
- Crump, S. (1991). «Fast, Precise, Safe Prototypes with FDM». Em: DOI: <https://doi.org/10.15781/T21834K30>.
- Das, R., R. Jones e Y. Xie (2012). «Optimal topology design of industrial structures using an evolutionary algorithm». Em: *Optimization and Engineering* 12, pp. 681–717. DOI: 10.1007/s11081-010-9132-0.
- De, S. e K. Bathe (2001). «Towards an efficient meshless computational technique: the method of finite spheres». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 170.192, pp. 3839–3866. ISSN: 0264-4401. DOI: <https://doi.org/10.1108/02644400110365860>.
- Delic, M. e D. Eysers (2020). «The effect of additive manufacturing adoption on supply chain flexibility and performance: An empirical analysis from the automotive industry». Em: *International Journal of Production Economics* 228, p. 107689. ISSN: 0925-5273. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2020.107689>.
- Dinis, L., R. Natal Jorge e J. Belinha (2007). «Analysis of 3D solids using the natural neighbour radial point interpolation method». Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.13, pp. 2009–2028. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.11.002>.
- (2010). «A 3D shell-like approach using a natural neighbour meshless method: Isotropic and orthotropic thin structures». Em: *Composite Structures - COMPOS STRUCT* 92, pp. 1132–1142. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.10.014.
 - (2011). «A natural neighbour meshless method with a 3D shell-like approach in the dynamic analysis of thin 3D structures». Em: *Thin-Walled Structures* 49, pp. 185–196. DOI: 10.1016/j.tws.2010.09.023.
- Dutkowski, K., M. Kruzel e K. Rokosz (2022). «Review of the State-of-the-Art Uses of Minimal Surfaces in Heat Transfer». Em: *Energies* 15, p. 7994. DOI: 10.3390/en15217994.

- Edwards, C., H. Kim e C. Budd (2007). «An evaluative study on ESO and SIMP for optimising a cantilever tie—beam». Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 34, pp. 403–414. DOI: 10.1007/s00158-007-0102-x.
- Eryildiz, M. (2021). «Effect of Build Orientation on Mechanical Behaviour and Build Time of FDM 3D-Printed PLA Parts: An Experimental Investigation». Em: 5, pp. 116–120. DOI: 10.26701/ems.881254.
- FormLabs (2022). «How the Concept Cars of Tomorrow Are Made With 3D Printing». Em: *FormLabs*. URL: <https://formlabs.com/eu/blog/concept-car-3d-printing/>.
- Gargiulo, P. (2023). «Applications, Integration, and New Directions». Em: *Handbook of Surgical Planning and 3D Printing*. Academic Press. ISBN: 978-0-323-90850-4. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-90850-4.00019-3>.
- Gonçalves, D. et al. (2022a). «An evolutionary structural optimization algorithm for the analysis of light automobile parts using a meshless technique». Em: *Engineering Computations* ahead-of-print. DOI: 10.1108/EC-05-2021-0271.
- (2022b). «Topology optimization using a natural neighbour meshless method combined with a bi-directional evolutionary algorithm». Em: *Mathematics and Computers in Simulation* 194, pp. 308–328. ISSN: 0378-4754. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.11.021>.
- Grindeanu, I. et al. (1998). «Design Sensitivity Analysis of Hyperelastic Structures Using a Meshless Method». Em: *AIAA Journal* 36, pp. 618–627. DOI: 10.2514/2.414.
- Gwinner, J. e E. Stephan (2018). «A Primer to Boundary Element Methods: Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems». Em: pp. 115–222. ISBN: 978-3-319-92000-9. DOI: 10.1007/978-3-319-92001-6_6.
- Hameed, P. et al. (2021). «Biomorphic porous Ti6Al4V gyroid scaffolds for bone implant applications fabricated by selective laser melting». Em: *Progress in Additive Manufacturing* 6. DOI: 10.1007/s40964-021-00210-5.
- Hardy, R. (1990). «Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988». Em: *Computers Mathematics with Applications* 19.8, pp. 163–208. ISSN: 0898-1221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90272-L](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90272-L).
- Ito, Y. (2015). «Delaunay Triangulation». Em: *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*. Ed. por Björn Engquist. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 332–334. ISBN: 978-3-540-70529-1. DOI: 10.1007/978-3-540-70529-1_314.
- Juan, Z., L. Shuyao e L. Guangyao (2010). «The topology optimization design for continuum structures based on the element free Galerkin method». Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34.7, pp. 666–672. ISSN: 0955-7997. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.03.001>.
- Kansa, E. (1990). «Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics: II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations». Em: *Computers Mathematics with Applications* 19.8, pp. 147–161. ISSN: 0898-1221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K).
- Kicinger, R., T. Arciszewski e K. De Jong (2005). «Evolutionary computation and structural design: A survey of the state-of-the-art». Em: *Computers Structures* 83.23, pp. 1943–1978. ISSN: 0045-7949. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.03.002>.
- Kumar, M., M. Khan e S. Mishra (2020). «Effect of machine parameters on strength and hardness of FDM printed carbon fiber reinforced PETG thermoplastics». Em: *Materials Today: Proceedings* 27. First International conference on Advanced Lightweight Materials and Structures, pp. 975–983. ISSN: 2214-7853. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.01.291>.

- L. Schmidt, Jr. (1977). «Structural synthesis from abstract concept to practical tool synopsis». Em: *18th Structural Dynamics and Materials Conference*, pp. 77–359. DOI: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/6.1977-359>.
- Lancaster, P. e K. Salkauskas (1981). «Surfaces generated by moving least squares methods». Em: *Mathematics of Computation* 37, pp. 141–158. DOI: 10.1090/S0025-5718-1981-0616367-1.
- Le, T. et al. (2021). «Microstructure Evaluation and Thermal–Mechanical Properties of ABS Matrix Composite Filament Reinforced with Multi-Walled Carbon Nanotubes by a Single Screw Extruder for FDM 3D Printing». Em: *Applied Sciences* 11.19. ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app11198798.
- Li, D. et al. (2018). «Optimal design and modeling of gyroid-based functionally graded cellular structures for additive manufacturing». Em: *Computer-Aided Design* 104, pp. 87–99. ISSN: 0010-4485. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2018.06.003>.
- Li, G. et al. (2015). «Topology Optimization of an Automotive Tailor-Welded Blank Door». Em: *Journal of Mechanical Design* 137, pp. 055001–055001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4028704>.
- Li, J., J. Tan e J. Dong (2020). «Lightweight Design of Front Suspension Upright of Electric Formula Car Based on Topology Optimization Method». Em: *World Electric Vehicle Journal* 11, p. 15. DOI: 10.3390/wevj11010015.
- Liu, G. e Y. Gu (2001). «A point interpolation method for two-dimensional solid». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50. DOI: 10.1002/1097-0207(20010210)50:4<937::AID-NME62>3.0.CO;2-X.
- Lubombo, C. e M. Huneault (2018). «Effect of infill patterns on the mechanical performance of lightweight 3D-printed cellular PLA parts». Em: *Materials Today Communications* 17, pp. 214–228. ISSN: 2352-4928. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2018.09.017>.
- Luo, Z. et al. (2013). «Topology optimization of structures using meshless density variable approximants». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 93, pp. 443–464. DOI: 10.1002/nme.4394.
- Mackay, R. (2016). «Lamborghini use 3D Printing for development of lightweight components». Em: *Javelin*. URL: <https://www.javelin-tech.com/blog/2016/04/lamborghini-use-3d-printing/>.
- Marzbanrad, J. e A. Hosseinpour (2017). «Structural optimization of MacPherson control arm under fatigue loading». Em: *Tehnicki Vjesnik* 24, pp. 917–924. DOI: 10.17559/TV-20150225090554.
- Maskery, I. et al. (2018). «Insights into the mechanical properties of several triply periodic minimal surface lattice structures made by polymer additive manufacturing». Em: *Polymer* 152. SI: Advanced Polymers for 3DPrinting/Additive Manufacturing, pp. 62–71. ISSN: 0032-3861. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2017.11.049>.
- Masood, S. (2014). «10.04 - Advances in Fused Deposition Modeling». Em: *Comprehensive Materials Processing*. Ed. por Saleem Hashmi et al. Oxford: Elsevier, pp. 69–91. ISBN: 978-0-08-096533-8. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-096532-1.01002-5>.
- Matsimbi, M. et al. (2021). «Topology Optimization of Automotive Body Structures: A review». Em: *International Journal of Engineering Research and Technology* 13.12, pp. 4282–4296. ISSN: 09743154.
- Milliken, W. e D. Milliken (1995). *Race Car Vehicle Dynamics*. SAE International. ISBN: 978-1-56091-526-3.
- Mohanavel, V. et al. (2021). «The roles and applications of additive manufacturing in the aerospace and automobile sector». Em: *Materials Today: Proceedings* 47. NCRABE, pp. 405–409. ISSN: 2214-7853. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.04.596>.

- Nayroles, B., G. Touzot e P. Villon (1992). «Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements». Em: *Computational Mechanics* 10, pp. 307–318. DOI: 10.1007/BF00364252.
- Nguyen, D. e F. Vignat (2016). «A method to generate lattice structure for Additive Manufacturing». Em: *2016 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, pp. 966–970. DOI: 10.1109/IEEM.2016.7798021.
- Oñate, E. et al. (1996). «A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.22, pp. 3839–3866. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961130\)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R).
- Pais, A., J. Alves e J. Belinha (2021). «Design of functionally graded gyroid foams using optimization algorithms and the finite element method: A simple approach on prototyping from simulation to manufacturing». Em: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 114. DOI: 10.1007/s00170-020-06542-w.
- Pauwels, F. (1966). *Gesammelte abhandlungen zur funktionellen anatomie des bewegungsapparates*. Vol. 53, p. 831. ISBN: 3642868428. DOI: 10.1007/978-3-642-86841-2.
- Poiate, i. et al. (2011). «2D and 3D finite element analysis of central incisor generated by computerized tomography». Em: *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 104.2. 7th IFAC Symposium on Modelling and Control in Biomedical Systems, pp. 292–299. ISSN: 0169-2607. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2011.03.017>.
- Querin, O. et al. (2000). «Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation». Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 189.2, pp. 559–573. ISSN: 0045-7825. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00309-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00309-6).
- Schoen, A. (1970). *Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections*. eng. NASA/TN ; D-5541. Washington, D.C: National Aeronautics e Space Administration.
- Schuh, G. et al. (2020). «Topology Optimisation and Metal Based Additive Manufacturing of Welding Jig Elements». Em: vol. 93. DOI: 10.1016/j.procir.2020.04.066.
- Seffen, K. (2000). «Evolutionary Structural Optimization». Em: *Engineering Structures - ENG STRUCT* 22, pp. 1224–1225. DOI: 10.1016/S0141-0296(99)00060-7.
- Shobeiri, V. (2015). «Topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization based on the element-free Galerkin method». Em: *Engineering Optimization* 48. DOI: 10.1080/0305215X.2015.1012076.
- Sibson, R. (1981). «A brief description of natural neighbour interpolation». Em: *Interpreting Multivariate Data*, pp. 21–36. URL: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1572543024689215360>.
- Song, Y. et al. (2017). «Measurements of the mechanical response of unidirectional 3D-printed PLA». Em: *Materials Design* 123, pp. 154–164. ISSN: 0264-1275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.03.051>.
- Spillers, W. e K. MacBain (2009). *Structural Optimization*. Springer International. ISBN: 978-0-387-95864-4. DOI: 10.1007/978-0-387-95865-1.
- Tang, Y., A. Kurtz e Y. Zhao (2015). «Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO) based design method for lattice structure to be fabricated by additive manufacturing». Em: *Computer-Aided Design* 69. DOI: 10.1016/j.cad.2015.06.001.
- Veloso, F. et al. (2001). «Local Content Requirements and Industrial Development Economic Analysis and Cost Modeling of the Automotive Supply Chain». Em: DOI: 10.1111/j.1467-9787.2006.00476.x.

- Voronoi, G. (1908). «Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs.» Em: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 134, pp. 198–287.
- Wang, J. e G. Liu (2002). «A point interpolation meshless method based on radial basis functions». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (11), pp. 1623–1648. ISSN: 00295981. DOI: 10.1002/nme.489.
- Wang, L., W. Gramlich e D. Gardner (2017). «Improving the impact strength of Poly(lactic acid) (PLA) in fused layer modeling (FLM)». Em: *Polymer* 114, pp. 242–248. ISSN: 0032-3861. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2017.03.011>.
- Wang, P. et al. (2021). «Effects of FDM-3D printing parameters on mechanical properties and microstructure of CF/PEEK and GF/PEEK». Em: *Chinese Journal of Aeronautics* 34.9, pp. 236–246. ISSN: 1000-9361. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2020.05.040>.
- Wang, Y. et al. (2015). «Topology optimization of compliant mechanisms using element-free Galerkin method». Em: *Advances in Engineering Software* 85, pp. 61–72. ISSN: 0965-9978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2015.03.001>.
- Xie, Y. M. e G. P. Steven (1994). «Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure». Em: *Engineering Computations* 11.4, pp. 295–302. DOI: 10.1108/02644409410799290.
- Xu, T. et al. (2020). «Mechanical Properties of Additively Manufactured Thermoplastic Polyurethane (TPU) Material Affected by Various Processing Parameters». Em: *Polymers* 12, p. 3010. DOI: 10.3390/polym12123010.
- Yang, X., J. Zheng e S. Long (2017). «Topology optimization of continuum structures with displacement constraints based on meshless method». Em: *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 13. DOI: 10.1007/s10999-016-9337-2.
- Zander, N. et al. (2019). «Recycled polypropylene blends as novel 3D printing materials». Em: *Additive Manufacturing* 25, pp. 122–130. ISSN: 2214-8604. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.11.009>.
- Zheng, J., S. Long e Y. Xiong (2010). «A Topology Optimization Design for the Continuum Structure Based on the Meshless Numerical Technique». Em: *Chinese Journal of Computational Mechanics* 27. DOI: 10.3970/cmcs.2008.034.137.
- Zou, W. et al. (2007). «A Truly Meshless Method based on Partition of Unity Quadrature for Shape Optimization of Continua». Em: *Computational Mechanics* 39, pp. 357–365. DOI: 10.1007/s00466-006-0032-2.