

ANÁLISE DO SINAL CARDÍACO ECG ATRAVÉS DA TÉCNICA SVD

Celso Eduardo Real Rodrigues



Departamento de Engenharia Electrotécnica

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Área de Especialização em Automação e Sistemas

2014

Relatório elaborado para satisfação parcial dos requisitos da Unidade Curricular de
Tese/Dissertação do Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Candidato: Celso Eduardo Real Rodrigues, Nº 1020342, 1020342@isep.ipp.pt

Orientação científica: Lino Manuel Baptista Figueiredo, lbf@isep.ipp.pt

António José Matos de Meireles, ajmme@isep.ipp.pt



Departamento de Engenharia Electrotécnica

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Área de Especialização em Automação e Sistemas

2014

Para o meu avô.

Agradecimentos

Aos meus pais, Eduardo e Helena e avós Joaquim e Maria, pelo apoio incondicional e por acreditarem em mim.

Aos professores, Lino Figueiredo e António Meireles pelo tempo que disponibilizaram e pelo conhecimento que partilharam.

A todos um grande abraço!

Resumo

Este trabalho surge no âmbito da área Electromedicina, uma componente da Engenharia Electrotécnica cada vez mais influente e em permanente desenvolvimento, existindo nela uma constante inovação e tentativa de desenvolvimento e aplicação de novas tecnologias.

Este projecto possui como principal objectivo o estudo aprofundado das aplicações da técnica SVD (*Singular Value Decomposition*), uma poderosa ferramenta matemática que permite a manipulação de sinais através da decomposição de matrizes, ao caso específico do sinal eléctrico obtido através de um electrocardiograma (ECG).

Serão discriminados os princípios da operação do sistema eléctrico cardíaco, as principais componentes do sinal ECG (a onda P, o complexo QRS e a onda T) e os fundamentos da técnica SVD.

A última fase deste trabalho consistirá na aplicação, em ambiente Matlab, da técnica SVD a sinais ECG concretos, com ênfase na sua filtragem, para efeitos de remoção de ruído. De modo verificar as suas vantagens e desvantagens face a outras técnicas, os resultados da filtragem por SVD serão comparados com aqueles obtidos, em condições similares, através da aplicação de um filtro FIR de coeficientes estáticos e de um filtro adaptativo iterativo.

Palavras-Chave

SVD, ECG, Coração, Despolarização, Complexo QRS, Compressão de Sinal, Filtragem de Sinal, Vectores Próprios, Valores Singulares.

Abstract

This work arises in the scope of the Electromedicine field, an increasingly influential component of Electrical Engineering, and one which is in constant development, where innovation and the development and application of new technologies are of critical importance.

The goal of this project is the in-depth study of the applications of the SVD (Singular Value Decomposition) technique, a powerful mathematical tool that allows the manipulation of signals using matrix decomposition, in the specific case of the electric signal obtained through an electrocardiogram (ECG).

The principles of the electrical cardiac system will be thoroughly scrutinized, as well as the main components of an ECG signal (the P wave, the QRS complex and the T wave) and theoretical foundations of the SVD technique.

The last phase of this work will consist in the application of the SVD technique to ECG signals in a Matlab environment, with emphasis in signal filtering for the purpose of denoising. In order to identify the strengths and weaknesses of this technique in relation to others, the results of the SVD filtering will be compared to the ones obtained through the application of a static coefficient FIR filter and an iterative adaptive filter.

Keywords

SVD, ECG, Heart, QRS Complex, Signal Compression, Signal Filtering, Eigenvectors, Singular Values.

Índice

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABELAS	XII
ACRÓNIMOS	XIV
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2. OBJECTIVOS.....	3
1.3. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO	3
1.4. CALENDARIZAÇÃO DO PROJECTO	4
2. O SISTEMA CARDÍACO E O ECG	5
2.1. FUNCIONAMENTO DO SISTEMA CARDÍACO	5
2.2. SISTEMA ELÉCTRICO CARDÍACO	10
2.3. O ECG.....	13
2.4. COMPONENTES DO SINAL ECG.....	14
3. TÉCNICA SVD	16
3.1. CONCEITOS ÚTEIS DE ÁLGEBRA LINEAR	16
3.2. FUNDAMENTOS DA TÉCNICA SVD	25
3.3. EXEMPLO DO ALGORITMO	27
3.4. IMPLEMENTAÇÃO EM SINAIS UNIDIMENSIONAIS	31
3.5. SEPARAÇÃO DE SINAIS COM RUÍDO POR COMPONENTES DE ENERGIA	32
4. APLICAÇÃO DA TÉCNICA SVD AO SINAL ECG	33
4.1. FILTRAGEM DE RUÍDO	33
4.2. COMPRESSÃO DE INFORMAÇÃO	37
4.3. SEPARAÇÃO DE SINAIS	43
5. TESTES E RESULTADOS OBTIDOS EM MATLAB	48
5.1. CONTEXTO DA EXPERIÊNCIA.....	48
5.2. RESULTADOS DA FILTRAGEM.....	49
6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	62

6.1.	CONCLUSÕES.....	62
6.2.	TRABALHOS FUTUROS.....	65
	REFERÊNCIAS DOCUMENTAIS.....	66

Índice de Figuras

Figura 1	Camadas do coração (Adp.) [7].....	6
Figura 2	Anatomia Interna do Coração (Adp.) [9]	8
Figura 3	Circulação Sanguínea (Adp.) [10].....	9
Figura 4	Sistema especializado de condução eléctrica (Adp.) [11]	11
Figura 5	Propagação do impulso eléctrico pelo coração (Adp.) [14]	12
Figura 6	Triângulo de Einthovenn [15]	13
Figura 7	Sinal ECG típico (Adp.) [16]	14
Figura 8	projecção Vectorial de v sobre w (Adp.) [22].....	23
Figura 9	Remoção da projecção de v_2 sobre w_1 (Adp.) [18]	24
Figura 10	Interpretação geométrica da técnica SVD [21]	27
Figura 11	Sinal ECG Original [24].....	34
Figura 12	Representação dos valores singulares [24].....	35
Figura 13	Reconstrução do sinal com $k=1$ [24].....	35
Figura 14	Reconstrução do sinal com $k=2$ [24].....	36
Figura 15	Diagrama dos passos para compressão do sinal (Adap.) [25]	37
Figura 16	Exemplo de sinal ECG da MIT-BIH (Adap.) [25].....	38
Figura 17	Exemplo de um ECG normalizado, contido numa matriz A (Adap.) [25]	39
Figura 18	Valor de PRD em função de q para 3 diferentes sinais ECG (Adap.) [25]	41
Figura 19	Exemplo de compressão de sinal ECG (Adp.) [25]	42
Figura 20	Estimativa dos sinais fonte (Adp.) [26].....	45
Figura 21	FECG [26].....	47
Figura 22	70 primeiros Valores Singulares para o sinal ECG da MIT-BIH com ruído de 50 Hz simulado.....	50
Figura 23	Filtragem SVD ao sinal ECG da MIT-BIH contaminado com ruído de 50 Hz simulado.....	51
Figura 24	Filtragem adaptativa ao sinal ECG da MIT-BIH com ruído simulado [27].....	52
Figura 25	70 primeiros Valores Singulares para o sinal ECG recolhido com ruído da rede de alimentação eléctrica verdadeiro	52
Figura 26	Filtragem SVD ao sinal ECG recolhido com ruído real da rede de alimentação eléctrica.....	53
Figura 27	Filtragem adaptativa ao sinal ECG recolhido, com ruído real da rede de alimentação eléctrica [27]	54
Figura 28	Filtragem SVD ao sinal ECG da MIT-BIH de 3 segundos com ruído de 50 Hz simulado.....	55

Figura 29	70 primeiros valores Valores Singulares para o sinal ECG da MIT-BIH com ruído EMG simulado.....	56
Figura 30	Filtragem SVD ao sinal ECG da MIT-BIH com ruído EMG simulado	57
Figura 31	Filtragem adaptativa ao sinal ECG da MIT-BIH com ruído EMG simulado [27]..	57
Figura 32	70 primeiros Valores Singulares para o sinal ECG medido, com ruído EMG real .	58
Figura 33	Filtragem SVD ao sinal ECG recolhido com ruído EMG real..	59
Figura 34	Filtragem adaptativa ao sinal ECG medido, com ruído EMG real [27]..	59
Figura 35	Aplicação de um filtro FIR de coeficientes fixos para filtragem ao sinal ECG recolhido, com ruído EMG real [27]	60

Índice de Tabelas

Tabela 1	Calendarização do projecto	4
Tabela 2	Valores típicos de um ECG [12]	15

Acrónimos

A-V	–	Auriculoventricular
BPM	–	Batimentos por Minuto
ECG	–	Electrocardiograma
EMG	–	Electromiografia
FECG	–	ECG Fetal
G-J	–	Gaus-Jordan
GS	–	Gram-Schmidt
MATLAB	–	Matrix Laboratory
MECG	–	ECG Materno
MIT-BIH	–	Instituto de Tecnologia de Massachusetts – Hospital Beth-Israel
PRD	–	<i>Percent Root Mean Square Difference</i>
RC	–	Rácio de Compressão
RE	–	Rácio de Energia
S-A	–	Sinoauricular
SVD	–	<i>Singular Value Decomposition</i>

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão abordados os motivos que tornam de extrema importância a existência de ferramentas de exame e diagnóstico de doenças cardiovasculares. Será apresentado brevemente e em particular o electrocardiograma, sendo mencionadas as suas necessidades específicas e de que forma a técnica de decomposição em valores singulares (SVD), que será estudada nesta tese, lhes poderá fazer face. Adicionalmente, serão discriminados os objectivos que esta tese se propõe atingir, será indicada a organização global deste relatório, de modo a facilitar a sua leitura e a calendarização do projecto para uma melhor apreensão dos passos necessários à sua realização.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Designam-se por doenças cardiovasculares todas as patologias que, de alguma forma, afectam o coração e os vasos sanguíneos, sendo as principais causas de morte a nível nacional e global (representando cerca de 40% dos óbitos anuais em Portugal) [1] e uma das principais causas de incapacidade. Muitas destas condições são de origem genética, no entanto o sedentarismo, o tabagismo e os maus hábitos nutricionais tendem a agravar consideravelmente este quadro. Face a este cenário, verifica-se a necessidade da existência de ferramentas de exame e diagnóstico capazes de providenciar resultados rápidos e precisos acerca deste tipo de doenças.

Um dos procedimentos mais comuns para a detecção e análise de anomalias cardíacas é o electrocardiograma (ECG), visto ser um exame não invasivo e de baixo custo. Este exame recorre à medida da diferença de potencial eléctrico entre vários pares de eléctrodos colocados à superfície da pele em vários pontos do corpo aos quais se dá o nome de derivações. O ECG permite a visualização do número de batimentos cardíacos por minuto (BPM) e, através da análise da forma de onda, a detecção de condições anómalas tais como ataques cardíacos, hipertensão, lesões isquémicas, problemas no sistema eléctrico cardíaco, entre outras [2].

Na prática, o ECG recolhido é um sinal de tensão que se encontra sujeito a ruído proveniente não só do próprio corpo humano, derivado das restantes actividades biológicas que também envolvem sinais eléctricos (por exemplo a actividade muscular - electromiografia), como de fontes exteriores ao mesmo (rede eléctrica, instrumentação, má fixação dos eléctrodos, etc.) [3]. Dadas estas condições inóspitas e considerando a relativa baixa amplitude do sinal, na ordem dos mV, torna-se assim necessária uma filtragem do mesmo, de modo a garantir que o ruído não seja impeditivo de obter uma informação clara e que não comprometa o diagnóstico clínico.

Adicionalmente, deve-se ter em conta a necessidade de armazenar ou transmitir os sinais recolhidos, de modo a permitir a criação de um historial clínico do doente e, por exemplo, a execução de aplicações de biotelemetria, onde o sinal é recolhido num equipamento (muitas vezes portátil) e depois transmitido para uma outra unidade para processamento e análise. Nestes casos é útil a aplicação de algoritmos de compressão de modo a reduzir o espaço em disco e largura de banda exigidos [4].

No sentido de dar uma resposta a estas necessidades de filtragem e compressão de um sinal ECG, será exposta e estudada a técnica de decomposição em valores singulares (SVD), um algoritmo que permite a manipulação do sinal através da decomposição de matrizes. Durante o estudo da SVD, serão apresentados os conceitos de vectores e valores singulares [5] e a noção do peso destes últimos nos processos de tratamento de sinal. Considerando os vários problemas provocados pelo ruído e a constante presença do mesmo num ECG, será dado um especial ênfase à filtragem de sinal por SVD. Esta última será executada com recurso à plataforma Matlab, tirando partido da sua linguagem de programação integrada e funções já pré-definidas de decomposição e manipulação de matrizes, para a criação das rotinas necessárias à obtenção de resultados.

1.2. OBJECTIVOS

O principal objectivo deste trabalho incide no estudo aprofundado das aplicações da técnica SVD, uma poderosa ferramenta matemática que permite a manipulação de sinais através da decomposição de matrizes, a sinais ECG, com ênfase na sua filtragem. De forma a atingir esta meta, é possível, de uma forma sucinta, enumerar várias tarefas que se encontram intimamente interligadas e que são indissociáveis:

- O estudo do sistema cardíaco.
- O estudo dos princípios do ECG e da informação extraível a partir do mesmo.
- O estudo da técnica SVD, incluindo os seus fundamentos teóricos, descrição do seu algoritmo e a sua adaptação a filtragem de sinais para remoção de ruído.
- A análise das aplicações práticas da técnica SVD ao caso particular do ECG, nas suas vertentes de filtragem, compressão e separação de sinais.
- A aplicação, com recurso ao Matlab, da SVD a sinais ECG concretos, com intuito da remoção do ruído presente nestes últimos.
- Análise dos resultados obtidos e comparação dos mesmos com outras técnicas de filtragem de sinal.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO

No capítulo 1 apresenta-se a introdução que se subdivide na contextualização e motivação deste projecto, na definição dos objectivos gerais do trabalho, na análise e identificação dos seus requisitos e na calendarização do mesmo.

No capítulo 2, é apresentada uma visão geral do funcionamento e anatomia do aparelho cardíaco (a nível da circulação sanguínea e do sistema especializado de condução eléctrica) e é feito um estudo acerca do ECG e do sinal eléctrico que este apresenta (incluindo a discriminação dos seus componentes).

No capítulo 3, é executada uma descrição pormenorizada da técnica SVD, incluindo os seus fundamentos teóricos, explicação detalhada do seu algoritmo e sua adaptação a filtragem de sinais.

De seguida, no capítulo 4, são descritos exemplos específicos da aplicação da SVD ao ECG, contemplando-se a filtragem, compressão e separação de sinais.

2. O SISTEMA CARDÍACO E O ECG

No presente capítulo é apresentado o estudo sobre o funcionamento do sistema cardíaco, incluindo a sua anatomia, as várias etapas da circulação sanguínea e a descrição do seu sistema especializado de condução eléctrica. São adicionalmente descritos os princípios de um electrocardiograma (ECG) e as componentes do seu sinal.

2.1. FUNCIONAMENTO DO SISTEMA CARDÍACO

Nesta secção são descritas as funções do sistema cardiovascular, é apresentada a anatomia do coração e é pormenorizadamente descrita a circulação sanguínea.

2.1.1. O SISTEMA CARDIOVASCULAR

O sistema cardiovascular é um dos mais importantes do corpo humano, sendo responsável pelo transporte de oxigénio (O_2), nutrientes e outras moléculas (por exemplo, hormonas) até aos tecidos, pelo transporte de sangue até aos pulmões, para a libertação de dióxido de carbono (CO_2) do organismo e reoxigenação do sangue e o transporte dos produtos de excreção do metabolismo para os rins e outros órgãos.

Adicionalmente, o sistema cardiovascular possui a função de regulação de temperatura do corpo, através da dilatação e contracção dos vasos sanguíneos, controlando assim o fluxo de sangue pela pele [6].

O coração é o órgão fulcral deste sistema, contraindo-se e relaxando várias vezes por minuto, de modo a bombear o sangue para todo o organismo. Situa-se dentro da caixa torácica, entre os pulmões, sendo considerado um músculo constituído por 3 camadas, conforme a representação da Figura 1:

- Camada interna: designada por endocárdio, formada por células achatadas;
- Camada intermédia: designada por miocárdio, formada por células musculares cardíacas;
- Camada externa: designada por pericárdio, subdividida em 2 camadas, formadas por, entre outros componentes, tecido conjuntivo fibroelástico, vasos coronários, nervos e acumulações de tecido adiposo.

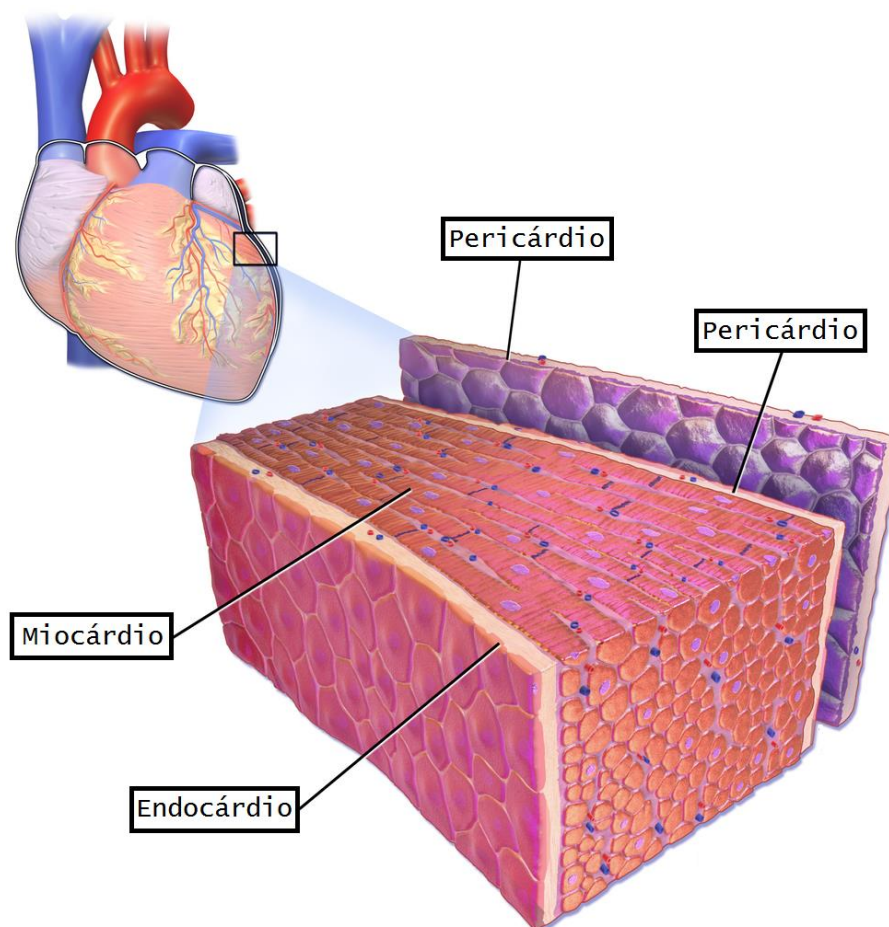


Figura 1 Camadas do coração (Adp.) [7]

Internamente, o coração é constituído por 4 cavidades ocas, designadas por aurículas (2 cavidades superiores) e ventrículos (2 cavidades inferiores), sendo que estes últimos possuem uma maior espessura das suas paredes (como se pode verificar na Figura 2), assim como um maior diâmetro das suas células musculares. As aurículas e ventrículos de cada lado do coração encontram-se separados pelos respectivos septos (interauricular e interventricular) [8].

As aurículas executam, basicamente, a função de reservatórios de sangue, que posteriormente seguirá para os ventrículos, sendo que a aurícula direita recebe sangue venoso (desoxigenado) do corpo através das veias cavas (inferior e superior), e a aurícula esquerda recebe sangue arterial (oxigenado), proveniente dos pulmões, através de 4 veias pulmonares. A contração destas cavidades força o fluxo de sangue para os ventrículos.

Os ventrículos esquerdo e direito, com o auxílio do septo interventricular, funcionam como as câmaras de bombagem do coração, em que o ventrículo direito recebe sangue da respectiva aurícula e impulsiona-o, através das artérias pulmonares, para os pulmões, de modo a que estes o oxigenem e lhe retirem o dióxido de carbono. O ventrículo esquerdo recebe sangue oxigenado da aurícula esquerda e impulsiona-o, através da artéria aorta, para o resto do corpo.

De forma a evitar que o sentido do fluxo de sangue seja invertido, o coração possui 4 válvulas que se abrem e fecham em resposta às alterações de pressão nas câmaras onde fazem ligação. Duas destas válvulas, denominadas por auriculoventriculares, ligam as aurículas aos ventrículos do seu lado respectivo do coração, sendo que a do lado direito é designada por válvula tricúspide e a do lado esquerdo por válvula mitral. As 2 válvulas restantes, denominadas semilunares, ligam os respectivos ventrículos ao resto do corpo: a válvula esquerda (aórtica) liga o ventrículo esquerdo à artéria aorta, a válvula direita (pulmonar) liga o ventrículo direito à artéria pulmonar [8].

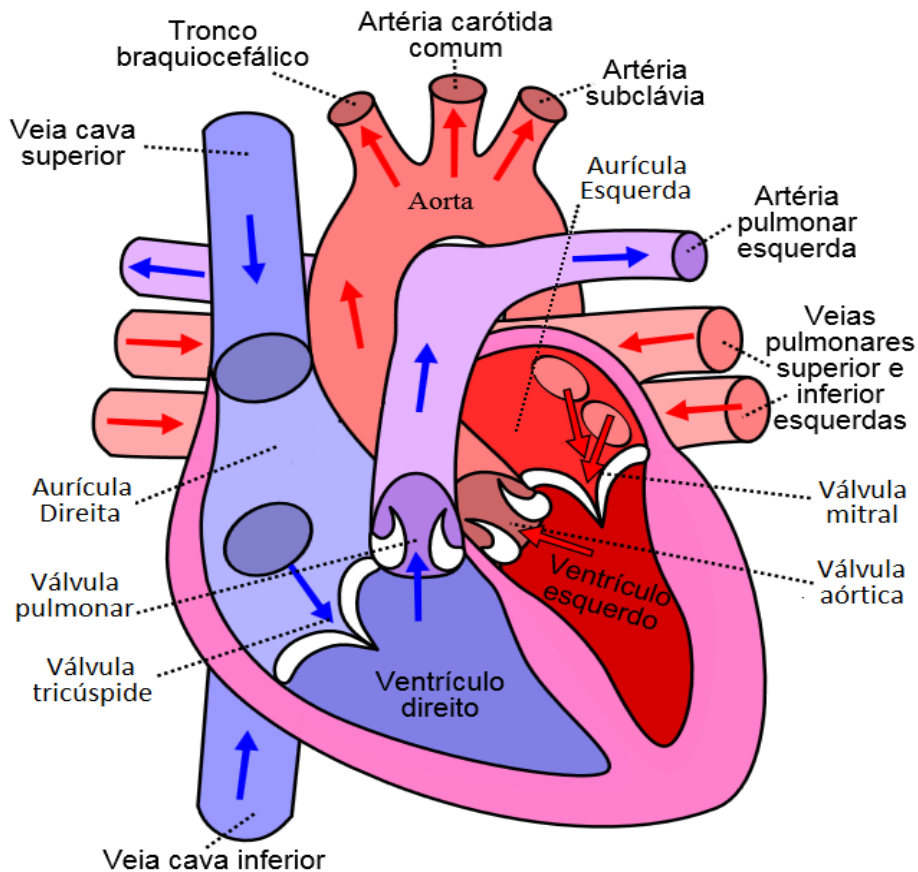


Figura 2 Anatomia Interna do Coração (Adp.) [9]

2.1.2. A CIRCULAÇÃO SANGUÍNEA E O MOVIMENTO CARDÍACO

É possível subdividir circulação sanguínea em duas componentes distintas e complementares: a circulação pulmonar e a circulação sistêmica, que se encontram esquematizadas na Figura 3.

A circulação pulmonar pode ser sintetizada nas seguintes etapas:

- O sangue venoso (pobre em oxigênio) retorna do corpo e entra na aurícula direita através veias cava inferior e superior;
- A pressão na aurícula aumenta até um determinado ponto, altura em que esta se contrai (sístole auricular), impulsionando o sangue, que passa, através da válvula tricúspide, para o ventrículo direito;
- Posteriormente o ventrículo direito contrai-se (sístole ventricular), impulsionando o sangue para a artéria pulmonar através da válvula pulmonar;
- O sangue é encaminhado para os pulmões, para reoxigenação;

- Após este processo, o sangue, agora designado por arterial (rico em oxigênio), retorna ao coração através das veias pulmonares.

Por sua vez, a circulação sistêmica é composta pelas seguintes fases:

- O sangue arterial, proveniente dos pulmões, entra na aurícula esquerda, através das veias pulmonares;
- A pressão nesta aurícula aumenta até um determinado ponto, altura em que existe a sístole auricular, que impulsiona o sangue, através da válvula mitral, para o ventrículo esquerdo;
- Posteriormente dá-se a sístole ventricular contrai-se, impulsionando o sangue para a artéria aorta através da válvula aórtica;
- O sangue circula então pelo resto do corpo distribuindo oxigênio e nutrientes;
- Após esta circulação, o sangue, agora venoso, retorna ao coração através das veias cavas.

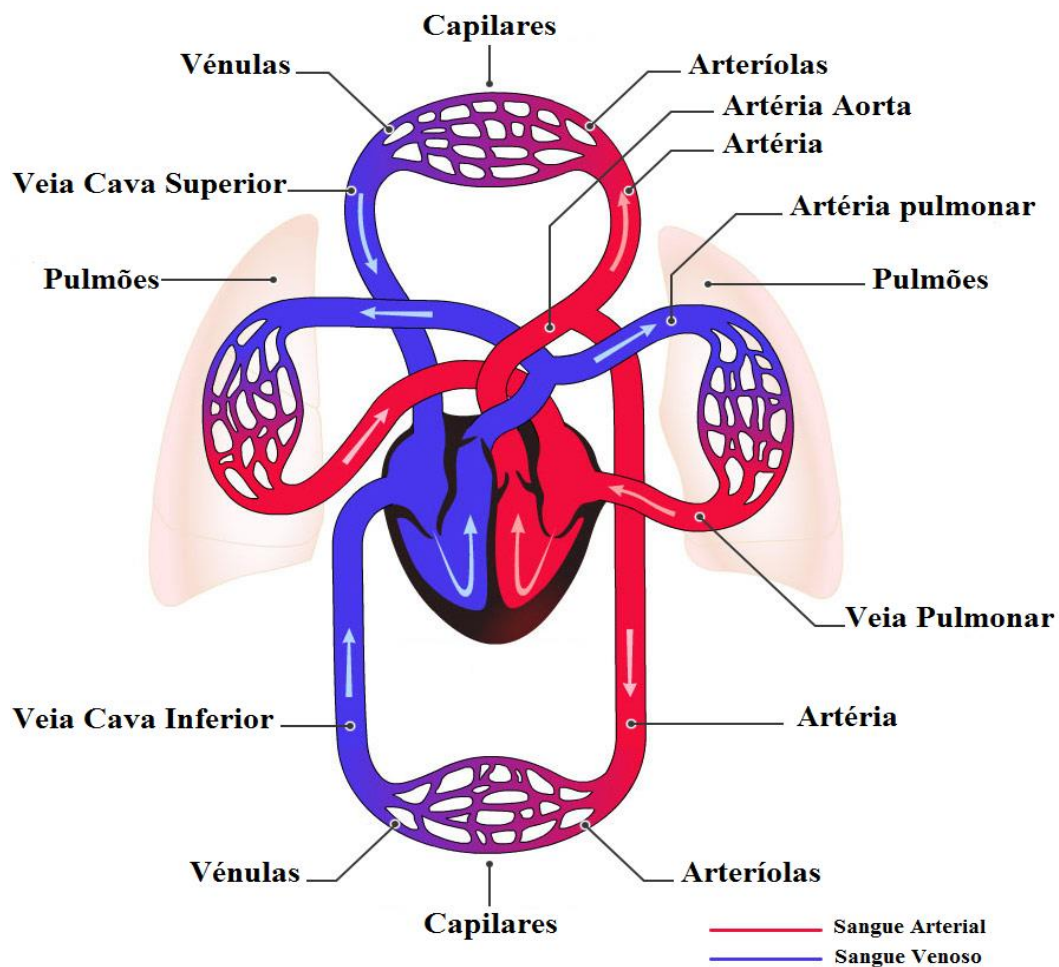


Figura 3 Circulação Sanguínea (Adp.) [10]

Estas duas circulações cíclicas ocorrem em simultâneo, pelo que, conseqüentemente, as contracções das aurículas esquerda e direita se encontram sincronizadas, o mesmo acontecendo com os ventrículos. Quando as aurículas se encontram em fase de sístole, os ventrículos encontram-se em fase de diástole (repouso) e vice-versa. Estes movimentos formam o ciclo cardíaco.

No final cada ciclo dá-se a diástole geral, onde ocorre o relaxamento do miocárdio. As válvulas semilunares estão fechadas e as válvulas auriculoventriculares estão abertas. O sangue que flui das veias para as aurículas passa de um modo passivo das aurículas para os ventrículos.

Durante o ciclo cardíaco, o coração produz dois ruídos característicos que podem ser ouvidos por auscultação. O primeiro corresponde ao encerramento das válvulas auriculoventriculares e marca o início da sístole ventricular; o segundo é produzido pelo fecho das válvulas semilunares e marca o início da diástole geral [8].

2.2. SISTEMA ELÉCTRICO CARDÍACO

De forma a melhor compreender a propagação dos impulsos eléctricos através do coração, devem-se distinguir 2 tipos de tecido cardíaco, o músculo cardíaco contráctil (auricular e ventricular), que compõe a grande maioria do órgão, e o sistema especializado de condução eléctrica, que inclui o nó sinuauricular, nó auriculoventricular, feixe de His e fibras de Purkinje. Este sistema especializado é composto por uma pequena quantidade de células cardíacas, que, na sua maioria, se encontram sujeitas despolarização espontânea, ou seja, o seu potencial eléctrico torna-se mais positivo, chegando a um ponto em que provoca a contracção dos tecidos musculares circundantes (potencial de acção). Isto permite que estas células executem a função de *pacemakers*, sendo assim elas, e não o sistema nervoso geral, as responsáveis pela estimulação directa do músculo cardíaco.

É importante referir que, apesar de ser o sistema especializado de condução o responsável pela criação e propagação do impulso eléctrico que faz o coração bater, este é influenciado pelo sistema nervoso autónomo (responsável pelas respostas involuntárias do nosso organismo), mais precisamente pelos ramos simpático e parassimpático deste último, que, respetivamente, aumentam e diminuem o ritmo cardíaco, em resposta a estímulos externos [8].

O sistema especializado de condução eléctrica, representado na Figura 4, subdivide-se em 3 grandes componentes:

- Nó S-A (Sinoauricular) – situa-se na junção da veia cava superior com a aurícula direita, sendo muitas vezes referido como o *pacemaker* do coração. As suas células são as responsáveis pela criação do impulso eléctrico que produz o batimento cardíaco.
- Nó A-V (Auriculoventricular) – situado no septo interauricular, na junção da aurícula direita com o ventrículo direito, é o elo de ligação eléctrica entre as aurículas e os ventrículos, por onde passa o sinal proveniente do nó anterior.
- Sistema His-Purkinje – constituído pelo feixe de His e fibras de Purkinje, propaga o impulso proveniente do nó A-V pelos ventrículos, provocando a sua contracção.

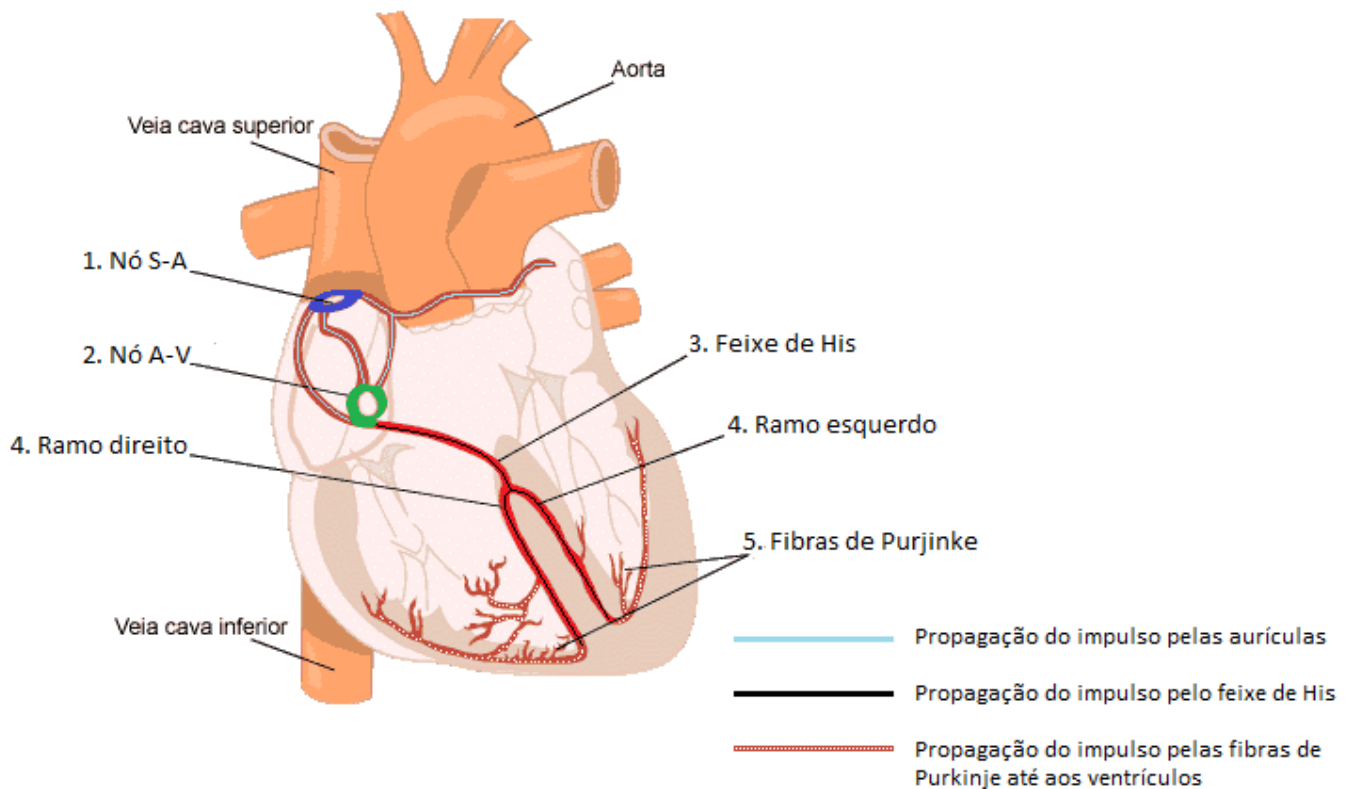


Figura 4 Sistema especializado de condução eléctrica (Adp.) [11]

A frequência de despolarização é progressivamente menor do nó S-A para as fibras de Purkinje, sendo que neste nó esta se encontra entre os 60 a 100 impulsos por minuto. A despolarização do coração, resultante do impulso S-A, suprime a actividade dos outros componentes do sistema especializado, no entanto, caso este impulso por algum motivo

falhe, estes últimos poderão intervir e assumir o controlo, se bem que a uma frequência mais baixa [13].

Assim, em funcionamento normal, o ciclo eléctrico cardíaco inicia-se com despolarização do nó S-A, criando um impulso eléctrico que rapidamente se espalha por ambas as aurículas, provocando a sua contracção.

Este impulso, no entanto, não atinge directamente os ventrículos, devido ao tecido não condutivo que os separa das aurículas. O único ponto que, habitualmente, permite a passagem do impulso é o nó A-V. O nó A-V possui, adicionalmente, a função de atrasar a velocidade com que o impulso eléctrico chega aos ventrículos, assegurando que estes estão relaxados quando se dá a contracção auricular e consequente bombeamento de sangue para os mesmos.

O impulso despolariza o feixe de His, os seus ramos posteriores (esquerdo e direito), a rede de Purkinje chegando finalmente aos músculos ventriculares, provocando a sua contracção e consequente ejeção de sangue para o corpo [13].

Na Figura 5 é ilustrada esta propagação do feixe, através da correspondência do mesmo ao gráfico resultante de um ECG, que será estudado na secção 2.3.

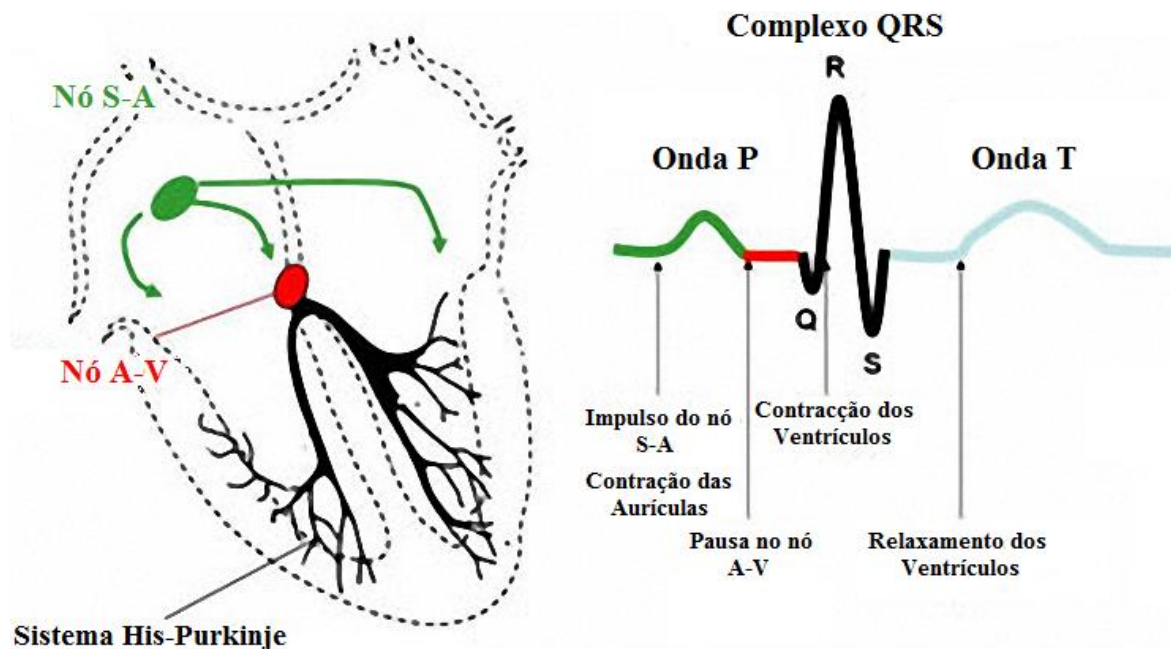


Figura 5 Propagação do impulso eléctrico pelo coração (Adp.) [14]

2.3. O ECG

O ECG é o exame mais utilizado para o diagnóstico de doenças cardíacas, uma vez que trata de um procedimento não invasivo e de baixo custo.

O resultado do ECG consiste num gráfico que representa os potenciais eléctricos com origem cardíaca e que são registados à superfície do organismo através de eléctrodos ligados aos membros e à parede torácica. Os sinais recolhidos, que representam as diferenças de potencial instantâneas entre os eléctrodos, são posteriormente amplificados e registados pelo electrocardiógrafo.

A título de exemplo, considere-se o triângulo de Einthoven (assim designado em honra de Willem Einthoven, o pioneiro da electrocardiografia), no qual são utilizados 3 eléctrodos, colocados na disposição apresentada na Figura 6. A combinação de cada par de eléctrodos é designada por derivação, sendo estas últimas identificadas através de numeração romana (derivação I, II e III). Assim, este caso particular corresponde a um ECG de 3 derivações, sendo recolhido um sinal de cada uma delas.

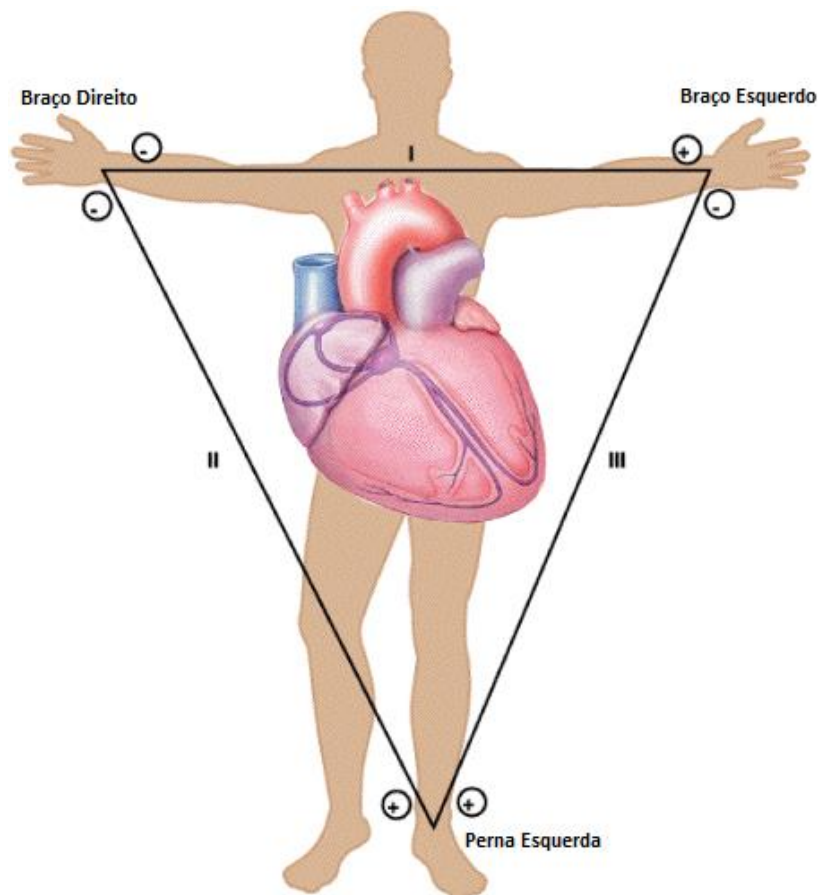


Figura 6 Triângulo de Einthoven [15]

Através do ECG é possível detectar, entre outras situações [13]:

- A orientação anatómica do coração;
- Alterações do ritmo cardíaco;
- Lesões isquémicas do miocárdio (falta de suprimento sanguíneo para um tecido orgânico);
- A influência de determinados fármacos.

2.4. COMPONENTES DO SINAL ECG

O gráfico obtido pelo ECG possui, tipicamente, o aspecto da Figura 7.

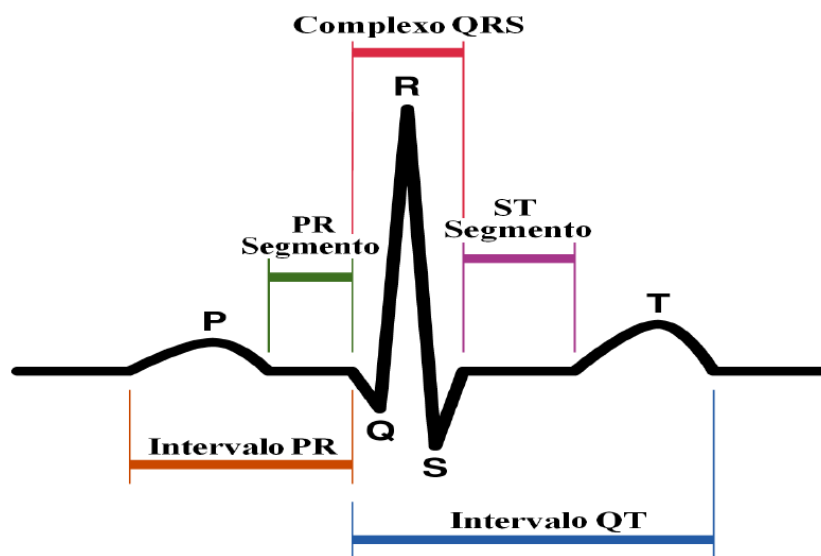


Figura 7 Sinal ECG típico (Adp.) [16]

A onda P resulta da despolarização eléctrica do músculo miocárdio auricular e posterior contracção das aurículas, sendo uma consequência, mas não uma representação directa do impulso gerado no nó S-A.

O impulso eléctrico propaga-se então para o nó A-V e, posteriormente, para o feixe de His e fibras de Purkinje. Esta propagação, no entanto não é registada no ECG, ocorrendo durante o segmento PR.

O complexo QRS representa a despolarização do músculo ventricular.

A repolarização auricular (retorno do potencial eléctrico do miocárdio auricular para um valor mais negativo, o que promove o regresso do músculo estimulado ao estado inicial)

representa uma onda, T_p , que, habitualmente, não é detectada pelo ECG. Já a repolarização ventricular é a origem da onda T [12].

Importante referir que, em geral, a despolarização eléctrica do miocárdio auricular e ventricular precede a contracção mecânica correspondente.

A amplitude dos valores eléctricos registados num ECG depende da corrente gerada no miocárdio e é influenciada pelos tecidos existentes entre o ponto de origem da mesma e os eléctrodos à superfície da pele. Em situações onde a massa de músculo subjacente ao eléctrodo é mais espessa ou mais próxima, o valor de tensão da deflexão é maior [13].

Na Tabela 2 apresentam-se os valores típicos, num adulto, de tensão e duração de cada uma das ondas e segmentos do ECG, recolhidos através da derivação II de um equipamento Biopac MP40:

Tabela 2 Valores típicos de um ECG [12]

Fase	Duração (segundos)	Amplitude (mV)
Onda P	0,06 a 0,11	<0,25
Intervalo PR	0,12 – 0,20	
Segmento PR	0,08	
Complexo QRS	< 0,12	0,8 – 1,2
Segmento QT	0,12	
Intervalo QT	0,36 – 0,44	
Onda T	0,16	< 0,5

3. TÉCNICA SVD

Neste capítulo inicialmente serão apresentados alguns conceitos fundamentais de álgebra linear, que serão úteis para compreensão da técnica SVD. De seguida serão apresentados os fundamentos desta técnica, encerrando-se o capítulo com um exemplo passo a passo do seu algoritmo.

3.1. CONCEITOS ÚTEIS DE ÁLGEBRA LINEAR

3.1.1. MATRIZ TRANSPOSTA

Considerando A como uma matriz de dimensões $m \times n$, a sua transposta, designada A^T , será uma matriz do tipo $n \times m$ cujo elemento da posição (i, j) será igual elemento da posição (j, i) de A . Por outras palavras as colunas de A serão as linhas de A^T e vice-versa.

Seja A uma matriz de dimensão 2×3 com os seguintes elementos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

A sua transposta será:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

3.1.2. MATRIZ DIAGONAL

Trata-se de uma matriz na qual todos os elementos não pertencentes à sua diagonal principal são nulos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Habitualmente são consideradas matrizes diagonais quadradas (n linha por n colunas), no entanto estas também poderão assumir formato rectangular:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } N = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

3.1.3. MATRIZ IDENTIDADE

A matriz identidade é um caso particular de uma matriz diagonal quadrada, na qual todos os elementos da sua diagonal principal possuem valor unitário:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Esta matriz possui a função de elemento neutro na multiplicação de matrizes:

$$AI = A. \quad (6)$$

3.1.4. VECTORES LINEARMENTE INDEPENDENTES

Um conjunto finito de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ será considerado linearmente dependente se existirem valores escalares $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, que satisfaçam a condição:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 + \dots + c_n \vec{v}_n = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Os valores escalares não poderão ser todos nulos.

Isto implica que, se um conjunto de vectores for linearmente dependente, pelo menos um deles poderá ser formado através de combinações lineares dos outros [17].

A título de exemplo considerem-se os vectores:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Neste caso \vec{v}_3 poderá ser formado através da soma de \vec{v}_1 com \vec{v}_2 :

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+0 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{v}_3. \quad (9)$$

Logo este conjunto de vectores poderá ser considerado linearmente dependente.

Caso se esteja perante um conjunto de vectores em que as condições acima não se verifiquem então esse conjunto, pelo contrário, será considerado linearmente independente. Isto significa que não será possível formar qualquer dos vectores do conjunto a partir de combinações lineares dos outros membros e a única solução para a equação (7) será $c_1 = c_2 = c_3 = \dots c_n = 0$.

Um dos exemplos mais perceptíveis de um conjunto deste tipo é aquele que os vectores que definem o espaço cartesiano tridimensional:

$$S = (\vec{e}_x^T \quad \vec{e}_y^T \quad \vec{e}_z^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

3.1.5. CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ

Define-se característica de uma matriz A como sendo o número máximo de colunas e linhas linearmente independentes que esta possui (de acordo com a definição apresentada na secção 3.1.4).

3.1.6. PRODUTO INTERNO VECTORIAL

O produto interno entre 2 vectores, $\vec{v}_1 = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ e $\vec{v}_2 = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$, será dado pela expressão:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \sum_1^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (11)$$

Quando o produto interno de 2 vectores é nulo estes são considerados ortogonais entre si e, no caso do espaços geométricos bidimensionais e tridimensionais, isto significa que o ângulo entre eles é de 90° .

3.1.7. VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

Considerando uma matriz quadrada A , de ordem n , supõe-se que exista uma matriz coluna não nula com n linhas, designada por \vec{X} , de forma a que a seja satisfeita a condição da equação (12):

$$A\vec{X} = \vec{X}\lambda . \quad (12)$$

Onde λ é um valor escalar pertencente a R ou C e será designado por valor próprio da matriz. Já \vec{X} denomina-se como vector próprio da matriz.

Considere-se, como exemplo, a seguinte matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \quad (13)$$

Seguindo o princípio da equação (12) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} . \quad (14)$$

Explicitando estas operações num sistema de equações, obtém-se:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ (3 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} . \quad (15)$$

Este sistema poderá ser solucionado através do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad (16)$$

Obtendo-se assim os valores próprios de A : $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

De seguida substitui-se, na equação (15), λ pelos valores próprios calculados, sendo que para $\lambda_1 = 1$ chega-se a $(1 - 1)x_1 + 2x_2 = 0$, ou seja, $x_2 = 0$. Este resultado permite um número infinito de soluções, logo o vector próprio ao correspondente a λ_1 será da forma:

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0 . \quad (17)$$

Para $\lambda_2 = 3$, obtém-se o resultado $x_1 = x_2$, logo o respectivo vector próprio será da forma:

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, x_1 \neq 0. \quad (18)$$

Atribuindo valores, um possível vector próprio para A será:

$$\vec{X} = [\vec{X}_1^T \quad \vec{X}_2^T](=)\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

3.1.8. MATRIZ INVERSA

O conceito de matriz inversa aplica-se a matrizes quadradas (com n linhas por n colunas). Considerando uma matriz A , a sua inversa será representada por A^{-1} . Ao multiplicar um valor escalar ou uma matriz por A e depois por A^{-1} , obter-se-á o mesmo valor ou matriz inicial.

Genericamente:

$$\text{Se } b = Ax \text{ então } A^{-1}b = x. \quad (20)$$

Deve-se ter em conta que nem todas as matrizes quadradas possuem inversa, existindo algumas condições obrigatórias para que seja possível o cálculo de A^{-1} [17]:

Deverão existir pelo menos n pivôs (igual ao número de linhas e colunas da matriz original);

Uma matriz A poderá possuir apenas uma inversa A^{-1} e a multiplicação das duas resultará sempre numa matriz identidade:

$$AA^{-1} = I \text{ e } A^{-1}A = I. \quad (21)$$

No seguimento da equação (21), conclui-se que se existir A^{-1} então o sistema $Ax = b$ possuirá uma possível solução, representada por $x = A^{-1}b$;

No caso específico do sistema $Ax = 0$, a única solução possível será então $x = 0$;

Uma matriz quadra poderá ser invertível apenas se o valor do seu determinante for diferente de zero;

Uma matriz diagonal quadrada poderá ser invertível apenas se nenhum dos elementos da sua diagonal principal for nulo.

O cálculo de A^{-1} poderá ser executado através do método de Gaus-Jordan (G-J), conforme o seguinte exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3]. \quad (22)$$

Aplicando o método G-J, obter-se-á a matriz:

$$[A \quad \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A partir deste ponto utilizar-se-ão operações aritméticas até se encontrar uma matriz da forma $[I \quad A^{-1}]$:

$$pivô = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

$$pivô = -8 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

$$pivô = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

$$zeros \text{ acima dos pivôs} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Dividindo-se, por fim, as várias filas pelos pivôs, chega-se ao resultado final:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \quad A^{-1}]. \quad (28)$$

3.1.9. DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Poder-se-á declarar que 2 matrizes quadradas A e B de ordem n são semelhantes, se existir uma matriz invertível P , tal que:

$$A = P^{-1}BP. \quad (29)$$

Note-se que matrizes semelhantes possuem os mesmos valores próprios. [19]

No caso particular em que B é uma matriz diagonal, é possível representar este teorema através da expressão:

$$A = S^{-1}\Lambda S. \quad (30)$$

Onde :

- S é uma matriz semelhança entre A e Λ , sendo muitas vezes referida como a matriz que irá diagonalizar A ;
- S é composta por vectores próprios de A ;
- Λ é designada como a matriz espectral de A ;
- Visto Λ ser uma matriz diagonal, todos os seus valores próprios (que são iguais aos de A) encontram-se na diagonal principal. [20]

A partir da equação (30) obtém-se:

$$\Lambda = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Exemplo:

Considerando a matriz da equação (13):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ com valores próprios } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 3. \quad (32)$$

Considerando S como:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Então, aplicando a equação (31), obtém-se $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ou seja, tal como acima mencionado, Λ é uma matriz diagonal, com os mesmos valores próprios de A .

Uma nota importante a reter é a de que o conceito de diagonalização de matrizes apenas se aplica a matrizes quadradas (com dimensão $n \times n$) e apenas é possível a sua aplicação quando a matriz original possui n vectores próprios linearmente independentes [21].

3.1.10. MATRIZ ORTOGONAL

Define-se uma matriz quadrada como ortogonal quando todos os seus vectores coluna possuem norma unitária e os seus produtos internos são nulos.

Novamente, um dos exemplos mais comuns é a matriz constituída pelo conjunto de vectores que definem o espaço cartesiano tridimensional:

$$C = [\vec{e}_x^T \quad \vec{e}_y^T \quad \vec{e}_z^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

3.1.11. PROJECÇÃO VECTORIAL

A projecção vectorial de um vector \vec{v} sobre um vector \vec{w} será [22]:

$$\vec{p}_w(v) = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \right) * \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}. \quad (35)$$

Onde:

“.” representa o produto interno de 2 vectores;

“*” representa uma multiplicação de um valor escalar por um vector;

“|” representa a norma de um vector.

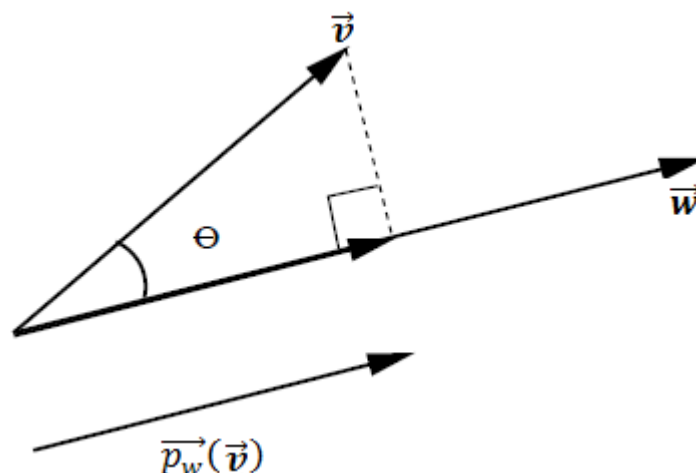


Figura 8 Projecção Vectorial de \vec{v} sobre \vec{w} (Adp.) [22]

Esta expressão pode ser rerepresentada da seguinte forma:

$$\vec{p}_w(v) = \vec{u} \cdot \vec{v} * \vec{u}, \text{ onde } \vec{u} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}. \quad (36)$$

3.1.12. PROCESSO GRAM-SCHMIDT

Supondo 3 vectores independentes e ortonormais \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , a projecção de um 4º vector, \vec{v}_4 , sobre estes será dada pela expressão (36). A projecção de \vec{v}_4 sobre o plano formado por, por exemplo, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 será dada, simplesmente, por $\vec{p}_{v_1}(\vec{v}_4) + \vec{p}_{v_2}(\vec{v}_4)$.

Novamente, estas noções supõem que \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 são ortonormais, o que poderá nem sempre acontecer. Neste caso poderá ser efectuado o processo Gram-Schmidt (GS) para os tornar ortonormais. [17]

Começando por \vec{w}_1 , este poderá possuir a mesma direcção de \vec{v}_1 :

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 \quad (37)$$

Dividindo-se \vec{w}_1 posteriormente pela sua norma, de modo a torna-lo unitário:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}_1}{|\vec{w}_1|} \quad (38)$$

O segundo novo vector, \vec{u}_2 , deverá ser ortogonal a \vec{u}_1 , pelo que será necessário remover qualquer projecção de \vec{v}_2 sobre \vec{w}_1 :

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - p_{\vec{w}_1}(\vec{v}_2) \quad (39)$$

Normalizando \vec{w}_2 , obtém-se \vec{u}_2 :

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|} \quad (40)$$

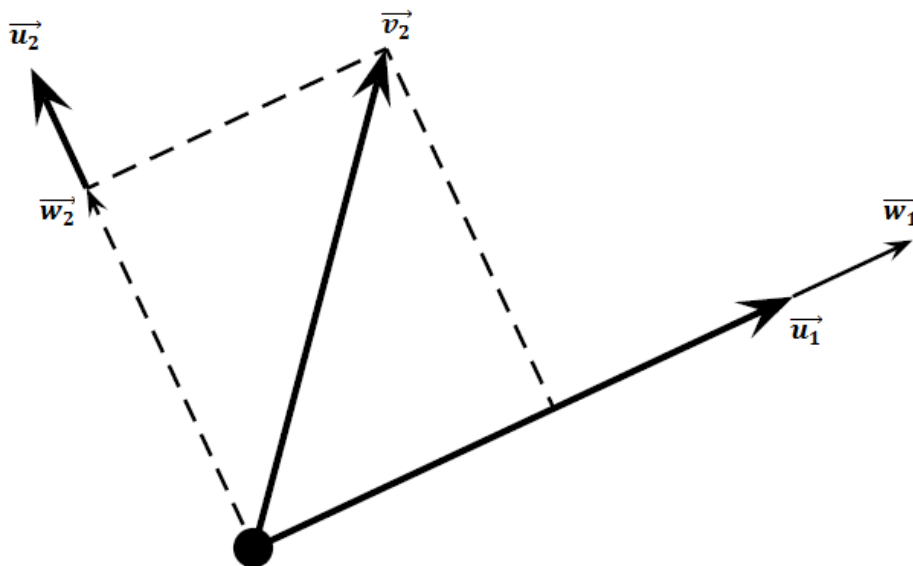


Figura 9 Remoção da projecção de \vec{v}_2 sobre \vec{w}_1 (Adp.) [18]

De igual modo, de modo a obter \vec{u}_3 , devem-se primeiro remover quaisquer projecções de \vec{w}_1 e \vec{w}_2 sobre \vec{v}_3 .

Genericamente, para n dimensões:

$$\vec{w}_i = \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{p_{w_i}}(\vec{v}_i). \quad (41)$$

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{w}_i}{|\vec{w}_i|}. \quad (42)$$

3.2. FUNDAMENTOS DA TÉCNICA SVD

A Decomposição em Valores Singulares - SVD (*Singular Value Decomposition*) é uma técnica matemática de factorização de matrizes, que, entre outras vantagens, possui a capacidade da sua aplicação em qualquer tipo de matriz, independentemente da sua dimensão ou tipo de elementos (números reais ou complexos).

A técnica SVD encontra-se relacionada com a diagonalização de matrizes, estudada na secção 3.1.9. Para se aplicar a diagonalização na matriz A da equação (30) esta teria que ser quadrada ($n \times n$), com n vectores próprios linearmente independentes, o que nem sempre sucede.

Considerando uma matriz A genérica de dimensão $m \times n$, a solução passa pela utilização das matrizes:

$$M_U = AA^T. \quad (43)$$

E:

$$M_V = A^T A. \quad (44)$$

Estas matrizes possuirão, respectivamente, m e n vectores próprios, sendo ambas simétricas.

De uma forma geral, a decomposição em valores singulares de uma matriz A , com $m \times n$ é dada por:

$$A = U\Sigma V^T. \quad (45)$$

Onde:

- A será uma matriz de dimensão $m \times n$;
- U será uma matriz quadrada ortogonal de dimensão $m \times m$, cujas colunas serão compostas pelos vectores próprios da matriz M_U , conforme a equação (43);
- V será uma matriz quadrada ortogonal de dimensão $n \times n$, cujas colunas serão compostas pelos vectores próprios da matriz M_V , conforme a equação (44);
- Σ será uma matriz diagonal de dimensão $m \times n$, cujos elementos da diagonal principal serão as raízes quadradas dos valores próprios das matrizes M_U e M_V .

Ao contrário do que sucede com a diagonalização de matrizes, U e V , designadas de matrizes de vectores singulares, não serão obrigatoriamente matrizes inversas uma da outra, conforme acontece com S e S^{-1} [18].

A matriz Σ possuirá, genericamente, o formato da equação (46):

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sqrt{\lambda_i} \neq 0. \quad (46)$$

Onde $\sqrt{\lambda_1} \geq \sqrt{\lambda_2} \geq \dots \geq \sqrt{\lambda_c}$, com $c = \text{característica}(A)$.

Considerando $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$, será possível representar Σ por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_i \neq 0. \quad (47)$$

Os diversos valores σ_i serão designados por valores singulares de A , ordenados na diagonal principal de Σ por ordem descendente [23]. As colunas e linhas que se encontram, respectivamente, à direita e por baixo do último valor singular apenas serão apenas colocadas de modo a que Σ possua dimensão $m \times n$, podendo não ser necessárias.

Visto Σ ser uma matriz diagonal, é possível reduzir a expressão (45) a:

$$A = \vec{u}_1 \sigma_1 \vec{v}_1^T + \vec{u}_2 \sigma_2 \vec{v}_2^T + \dots + \vec{u}_c \sigma_c \vec{v}_c^T = \sum_{i=1}^c \vec{u}_i \sigma_i \vec{v}_i^T . \quad (48)$$

Onde i corresponde ao índice do valor singular e, respectivamente, à coluna e fila número i de U e V^T .

Geometricamente, poderemos considerar U e V como matrizes rotação e reflexão e Σ como uma matriz de alongamento:

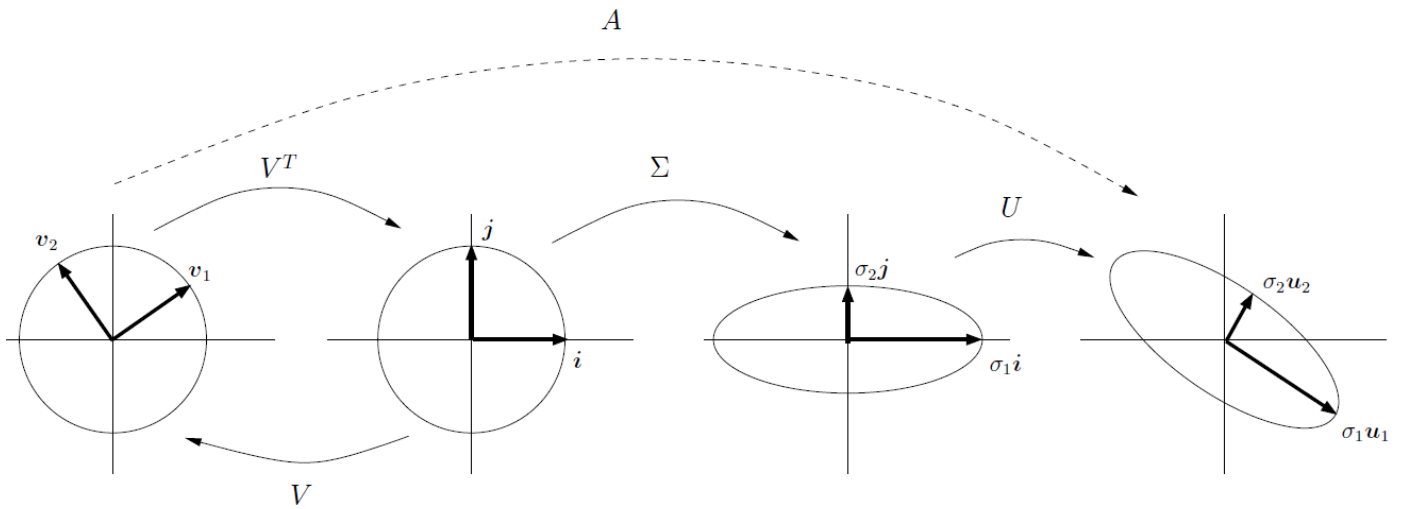


Figura 10 Interpretação geométrica da técnica SVD [21]

Na Figura 10 são considerados 2 vectores de norma unitária, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , pertencentes a uma matriz V . Quando estes vectores são multiplicados por V^T , tornam-se vectores unitários $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. A multiplicação por Σ alonga-os para, respectivamente $\sigma_1 \vec{i}$ e $\sigma_2 \vec{j}$. Por fim os vectores sofrem uma nova rotação através da multiplicação por U , tornando-se $\sigma_1 \vec{u}_1$ e $\sigma_2 \vec{u}_2$ [21].

3.3. EXEMPLO DO ALGORITMO

Considere-se a seguinte matriz A , com dimensão 2×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

e a sua transposta:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Através da expressão (43), será obtida a matriz M_U :

$$M_U = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \quad (51)$$

De seguida é efectuado o cálculo dos valores próprios de M_U :

$$M_U \vec{v} = \vec{v} \lambda = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Originando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + 11x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (11 - \lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (11 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}. \quad (53)$$

Calculando o seu determinante:

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & 1 \\ 1 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

Obtêm-se os valores próprios $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = 10$.

Nota: Tal como referido na secção 3.2, os valores próprios são ordenados por ordem de grandeza, do maior para o menor.

De seguida substitui-se, na equação (53), λ pelos valores próprios calculados, sendo que, para $\lambda_1 = 12$, obtém-se $x_1 = x_2$. Este resultado permite um número infinito de soluções, pelo que serão escolhidos valores que facilitem o cálculo, neste caso $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, sendo, portanto, o 1º vector próprio $\vec{v}_1 = (1 \ 1)$.

Para $\lambda_2 = 10$, obtém-se $x_1 = -x_2$, pelo que, considerando $x_1 = 1$ e, por conseguinte, $x_2 = -1$, o 2º vector próprio será $\vec{v}_2 = (1 \ -1)$.

Assim, os vectores próprios da matriz M_U serão $\vec{v} = (\vec{v}_1^T \ \vec{v}_2^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

De seguida será feita, através da técnica GS estudada na secção 3.1.12, a ortonormalização dos vectores próprios, de forma a calcular os componentes da matriz U :

- \vec{u}_1 será obtido através da normalização de \vec{v}_1 , conforme aplicação da equação (38), chegando-se a $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$;
- O passo seguinte será a remoção da projecção de \vec{v}_2 sobre \vec{v}_1 , recorrendo-se para tal à expressão (39), chegando-se a $\vec{w}_2 = (1 \ -1)$.

- \vec{u}_2 corresponderá à normalização de \vec{w}_2 , obtendo-se $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

A matriz U será dada por:

$$U = [\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \dots \quad \vec{u}_n^T]. \quad (55)$$

Neste caso:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

De seguida será aplicado o mesmo método para o cálculo da matriz V , que toma como base a matriz M_V . Esta última será calculada através da equação (44), obtendo-se:

$$M_V = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Calculando os valores próprios de M_V :

$$M_V \vec{v} = \vec{v} \lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Gera-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (10 - \lambda)x_1 + 2x_3 = 0 \\ (10 - \lambda)x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}. \quad (59)$$

Resolvendo através do respectivo determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10 - \lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (=) \quad \lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12) = 0. \quad (60)$$

Obtêm-se os valores próprios $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 10$ e $\lambda_3 = 0$.

Substituindo, na equação (59), λ pelo 1º valor próprio (λ_1), chega-se a $x_1 = x_3 \wedge x_2 = 2x_3$. Escolhendo $x_1 = x_3 = 1$ e, por conseguinte, $x_2 = 2$, obtém-se $\vec{v}_1 = (1 \quad 2 \quad 1)$. Aplicando o mesmo cálculo com os restantes valores próprios obter-se-ão os vectores próprios $\vec{v}_2 = (2 \quad -1 \quad 0)$ e $\vec{v}_3 = (1 \quad 2 \quad -5)$

Assim, os vectores próprios da matriz M_V serão $\vec{v} = (\vec{v}_1^T \quad \vec{v}_2^T \quad \vec{v}_3^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

De seguida aplica-se novamente o processo GS, para ortonormalização destes vectores, obtendo-se assim os componentes da matriz V : $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \frac{-1}{\sqrt{5}} \quad 0\right)$ e $\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}} \quad \frac{2}{\sqrt{30}} \quad \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$.

A matriz V , de formato:

$$V = [\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \dots \quad \vec{u}_n^T]. \quad (61)$$

Será então:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Para a SVD será utilizada a matriz transposta de V , logo:

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}. \quad (63)$$

A matriz Σ será composta pelos chamados valores singulares da matriz A , que correspondem à raiz quadrada dos valores próprios não nulos de M_U e M_V , conforme a equação (46). Será acrescentada, à direita da matriz, uma coluna composta inteiramente por zeros, de modo a que a dimensão de Σ seja 3×2 , de forma a permitir a multiplicação $U\Sigma V^T$, obtendo-se:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Nota: Os valores próprios não nulos da matriz M_U são sempre iguais aos da matriz M_V .

Aqui foram apenas calculados para comprovar este facto.

De forma a comprovar estes resultados, efectua-se o cálculo da matriz A , de acordo com equação (45):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Utilizando a expressão (48), chegar-se-á ao mesmo resultado:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sqrt{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sqrt{10} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

3.4. IMPLEMENTAÇÃO EM SINAIS UNIDIMENSIONAIS

Em várias situações, como, por exemplo, no caso de um ECG de 1 canal, o sinal a ser decomposto encontra-se inicialmente num formato unidimensional, ou seja, inserido num vector, com N amostras, que, genericamente, possui o seguinte formato:

$$\vec{x} = [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(k) \quad \dots \quad x(N-1) \quad x(N)]. \quad (67)$$

A aplicação da SVD num vector de dimensão $1 \times N$, não é útil, uma vez que retornaria uma matriz Σ com apenas um valor singular (σ_1), não sendo depois possível qualquer posterior manipulação do sinal.

Assim, o primeiro passo será, necessariamente, a segmentação e reestruturação do sinal, para um formato conducente à aplicação da técnica. Uma das formas de o fazer será através da construção de uma matriz de Toeplitz a partir do sinal original, obtendo-se uma matriz do seguinte formato:

$$X = \begin{bmatrix} x(k) & x(k-1) & x(k-2) & \dots & x(2) & x(1) \\ x(k+1) & x(k) & x(k-1) & \ddots & & x(2) \\ x(k+2) & x(k+1) & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x(k-2) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x(k) & x(k-1) \\ x(N) & \dots & \dots & x(k+2) & x(k+1) & x(k) \end{bmatrix}. \quad (68)$$

3.5. SEPARAÇÃO DE SINAIS COM RUÍDO POR COMPONENTES DE ENERGIA

Após a aplicação da SVD a um sinal originalmente poluído, ou seja, composto por uma combinação de informação útil e ruído, serão obtidas as matrizes U e V dos seus vectores singulares e uma matriz, Σ , com todos os valores singulares:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_N \end{bmatrix}. \quad (69)$$

É possível dividir Σ em 2 matrizes, Σ_l e Σ_s , da seguinte forma:

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma_s = \begin{bmatrix} \sigma_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_N \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Ou seja:

- Σ_l é constituída pelos primeiros k maiores valores singulares (*largest singular values*), representando assim as componentes do sinal original com maior energia.
- Σ_s é constituída pelos restantes $N-k$ valores singulares (*smallest singular values*), correspondentes às componentes do sinal original com menor energia.

A partir destas matrizes, e dos seus respectivos vectores singulares, é possível reconstruir 2 diferentes sinais:

$$S_l = U_l \Sigma_l V_l^T = \sum_{i=1}^k \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T. \quad (71)$$

que representará o sinal com maior energia e:

$$S_s = U_s \Sigma_s V_s^T = \sum_{i=k+1}^N \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T. \quad (72)$$

o de menor energia.

Dependendo do valor do índice k seleccionado, do tipo de ruído originalmente presente e da sua energia relativamente à componente de sinal com informação útil, será possível isolar o sinal útil numa destas matrizes.

4. APLICAÇÃO DA TÉCNICA SVD AO SINAL ECG

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos concretos, estudados por diversos autores, das possíveis aplicações práticas da técnica SVD em sinais ECG. Será abordada a aplicação da SVD para filtragem de ruído, compressão e separação de sinais ECG.

4.1. FILTRAGEM DE RUÍDO

Neste exemplo será analisado um sinal proveniente de um ECG, onde N batimentos cardíacos, cada um possuindo M amostras serão organizados numa matriz, A , de dimensão $M \times N$:

$$A = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_N(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_N(2) \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ x_1(M) & x_2(M) & 0 & x_N(M) \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Neste caso em particular, um conjunto de 8 batimentos cardíacos, gravados a partir dos mesmos eléctrodos, com uma frequência de amostragem, $F_s = 200$ Hz, serão divididos em segmentos de 1 segundo cada e centrados no seu pico R, formando uma matriz, A , de dimensão 200×8 [24], cujos valores se encontram representados graficamente na Figura 11.

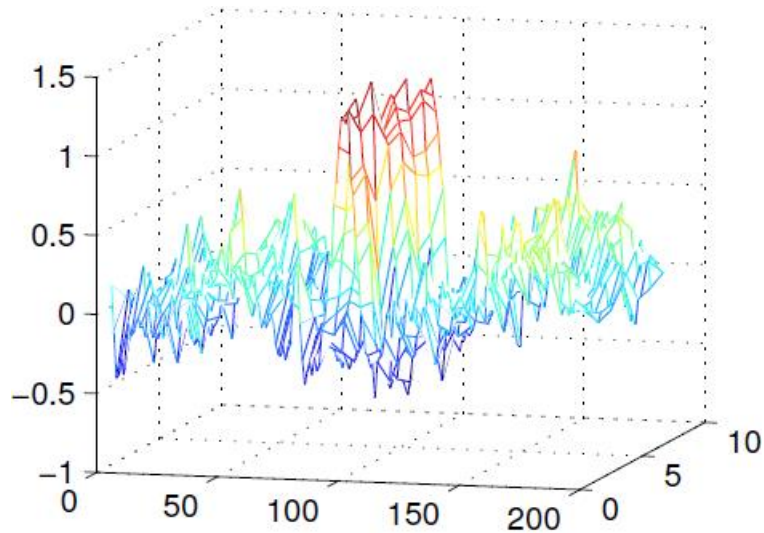


Figura 11 Sinal ECG Original [24]

Os dados possuirão, portanto, 8 segmentos, e a aplicação da SVD a A produzirá, para além das matrizes U e V , uma matriz Σ com 8 valores singulares:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_8 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

O sinal ECG original contido em A poderá então ser representado, na sua totalidade, pelo somatório dos produtos destes valores pelos seus respectivos vectores singulares:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^8 \vec{u}_i \sigma_i \vec{v}_i^T. \quad (75)$$

No caso de, no entanto, se utilizarem apenas os primeiros k valores e vectores singulares para a reconstrução do sinal (em que $k < 8$), obter-se-á uma nova matriz, B , que conterà, efectivamente, um sinal ECG filtrado [24]:

$$B = \sum_{i=1}^k \vec{u}_i \sigma_i \vec{v}_i^T. \quad (76)$$

Para o exemplo em causa verifica-se, através da representação gráfica dos valores singulares na Figura 12, que a maior parte da energia do sinal se encontra no 1º valor singular (σ_1).

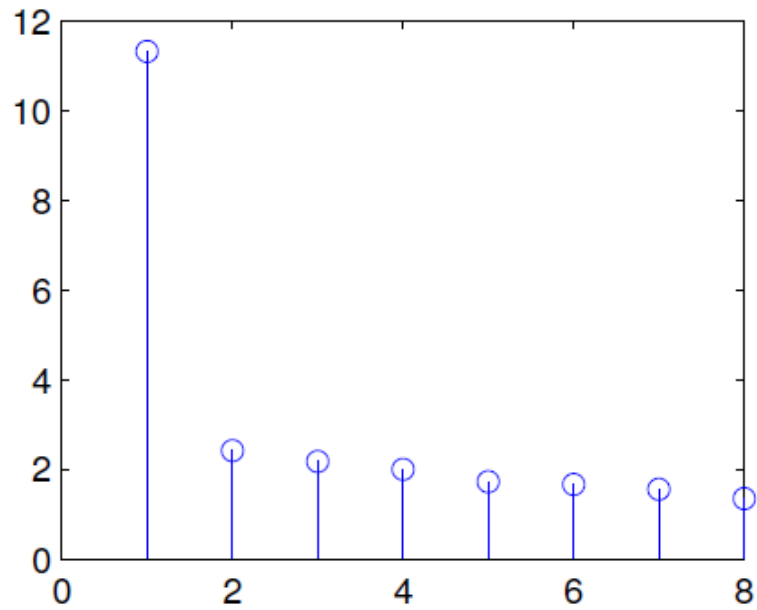


Figura 12 Representação dos valores singulares [24]

Utilizando apenas σ_1 ($k = 1$), para a construção de B :

$$B = \sum_{i=1}^k \vec{u}_i \sigma_i \vec{v}_i^T \xrightarrow{k=1} B = \vec{u}_1 \sigma_1 \vec{v}_1^T . \quad (77)$$

Obter-se-á o sinal filtrado da Figura 13.

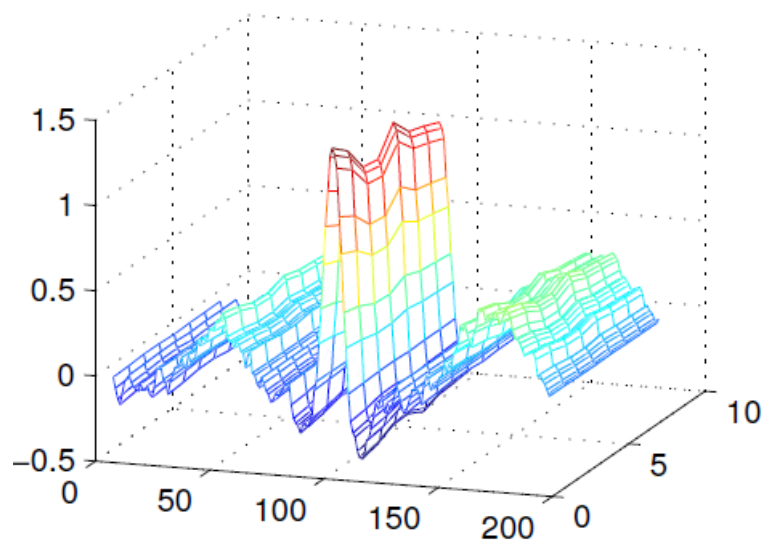


Figura 13 Reconstrução do sinal com k=1 [24]

Já com $k=2$, obter-se-á uma matriz B :

$$B = \vec{u}_1 \sigma_1 \vec{v}_1^T + \vec{u}_2 \sigma_2 \vec{v}_2^T . \quad (78)$$

Que representará o sinal da Figura 14, no qual é possível já constatar a presença de um pouco mais de ruído.

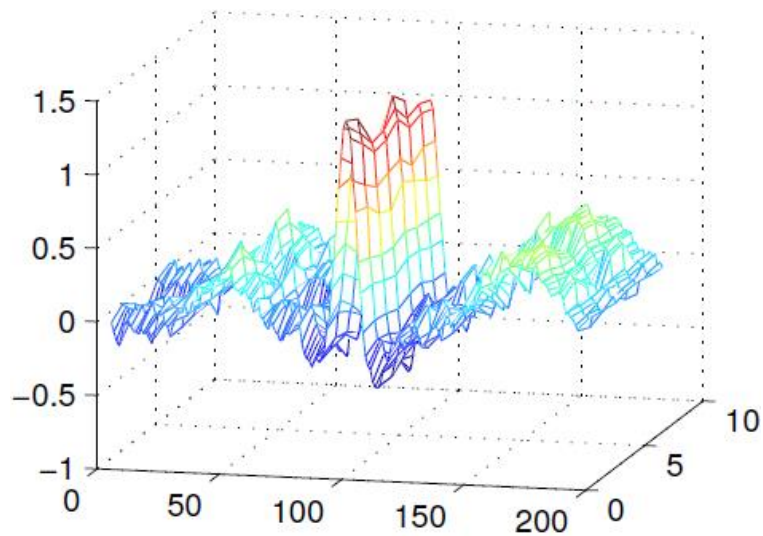


Figura 14 Reconstrução do sinal com $k=2$ [24]

A aplicação desta técnica, com a utilização apenas dos primeiros valores singulares pressupõe, no entanto, que a energia dos sinais provenientes de uma ou mais fontes de ruído não é comparável ou superior à do sinal pretendido. Adicionalmente, é bastante importante garantir que o valor k seja seleccionado de forma a permitir uma boa filtragem do sinal sem, no entanto, remover componentes a este último que eliminem ou distorçam a informação necessária ao diagnóstico clínico.

4.2. COMPRESSÃO DE INFORMAÇÃO

Neste exemplo a SVD será utilizada para a compressão do sinal ECG, de modo a reduzir o espaço necessário para o seu armazenamento ou transmissão.

Genericamente, considerando um sinal periódico, $x(k)$, com m períodos consecutivos, cada um com n amostras, é possível a sua representação através de uma matriz A , de dimensão $m \times n$, a qual será decomposta através da SVD:

$$A = \{x_i(k) | i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, n\}. \quad (79)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(n) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(1) & x_m(2) & \cdots & x_m(n) \end{bmatrix} = U\Sigma V^T. \quad (80)$$

Mais especificamente, no método proposto em [25], é considerado um sinal ECG inicialmente contínuo, que inclui vários batimentos cardíacos seguidos (num formato $I \times N$, onde N é o número total de amostras). Este sinal é posteriormente segmentado e normalizado de modo a criar uma matriz no formato da equação (80). Esta nova matriz é então decomposta através da SVD e os primeiros q valores e vectores singulares resultantes da sua aplicação, juntamente com alguns parâmetros adicionais, são acondicionados e quantificados num pacote de dados para armazenamento ou transmissão. Na Figura 15 é possível observar o fluxograma destes passos, que serão apresentados com mais detalhe nas subsecções abaixo:

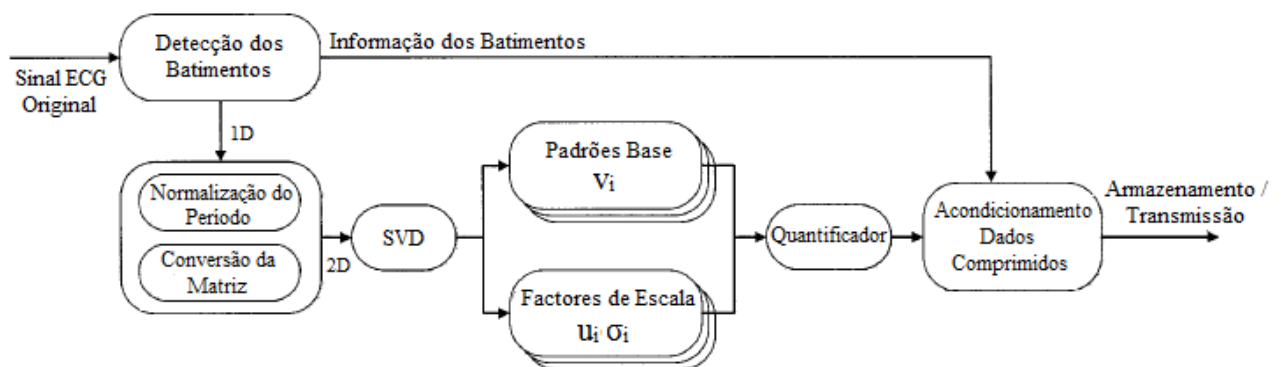


Figura 15 Diagrama dos passos para compressão do sinal (Adap.) [25]

4.2.1. SEGMENTAÇÃO DO SINAL ECG ORIGINAL

Neste passo é utilizada a detecção do complexo QRS para a separação de cada período do ECG, sendo cada segmento definido como sendo o sinal entre 2 complexos seguidos. Nesta fase obter-se-ão m segmentos. O número de amostras de cada segmento é também guardado (n_i^* , onde i é o número do segmento).

4.2.2. NORMALIZAÇÃO DO PERÍODO DOS BATIMENTOS CARDÍACOS

Durante a realização de um ECG o número de batimentos por minuto (BPM) poderá variar, podendo dar origem a intervalos de tempo diferentes entre cada complexo QRS. Considerando uma taxa de amostragem constante e o método delineado no ponto 4.2.1, esta situação dará origem a que a cada segmento possa corresponder um diferente número de amostras (por exemplo $n_i^* > n_{i+1}^*$).

É então aplicado um algoritmo que irá estender ou encurtar o ECG de cada segmento, de modo a criar segmentos normalizados, cada um com o mesmo número de amostras, n , que corresponde ao valor médio das mesmas. Este valor médio será também guardado para posterior reconstrução do sinal original. Um exemplo deste processo é apresentado na Figura 16, cujo ponto de partida foi um sinal ECG obtido através da base de dados do Hospital Beth-Israel do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT-BIH):

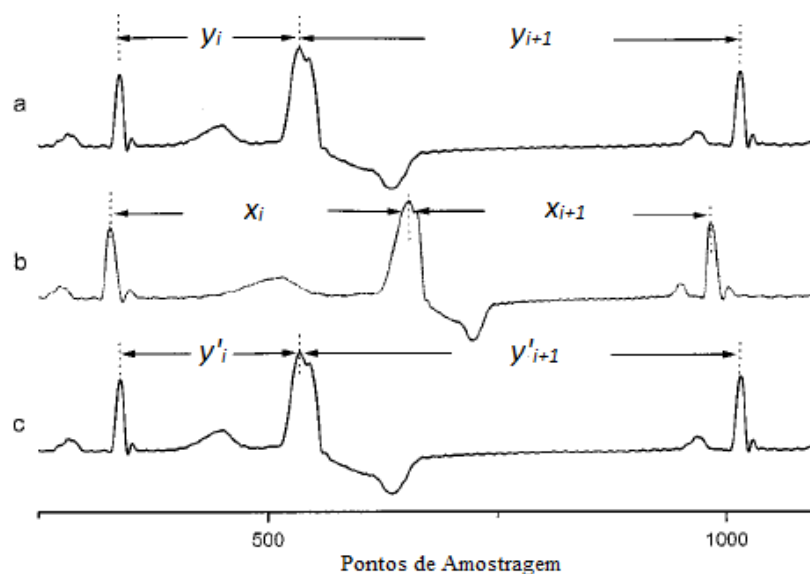


Figura 16 Exemplo de sinal ECG da MIT-BIH a) ECG original b) ECG normalizado c) ECG reconstruído com o período original (Adap.) [25]

Na presente secção apenas será focada a compressão através da SVD, os pormenores da detecção do complexo QRS e do algoritmo de normalização do período poderão ser verificados em [25].

4.2.3. APLICAÇÃO DA SVD NOS BATIMENTOS CARDÍACOS NORMALIZADOS

A partir do sinal obtido no ponto 4.2.2, com m segmentos, cada um composto por n amostras, é possível agora a construção da matriz A (contendo um ECG normalizado semelhante ao da Figura 17) de dimensão $m \times n$ da equação (80) e posterior aplicação da SVD na mesma, para obtenção de U , Σ e V .

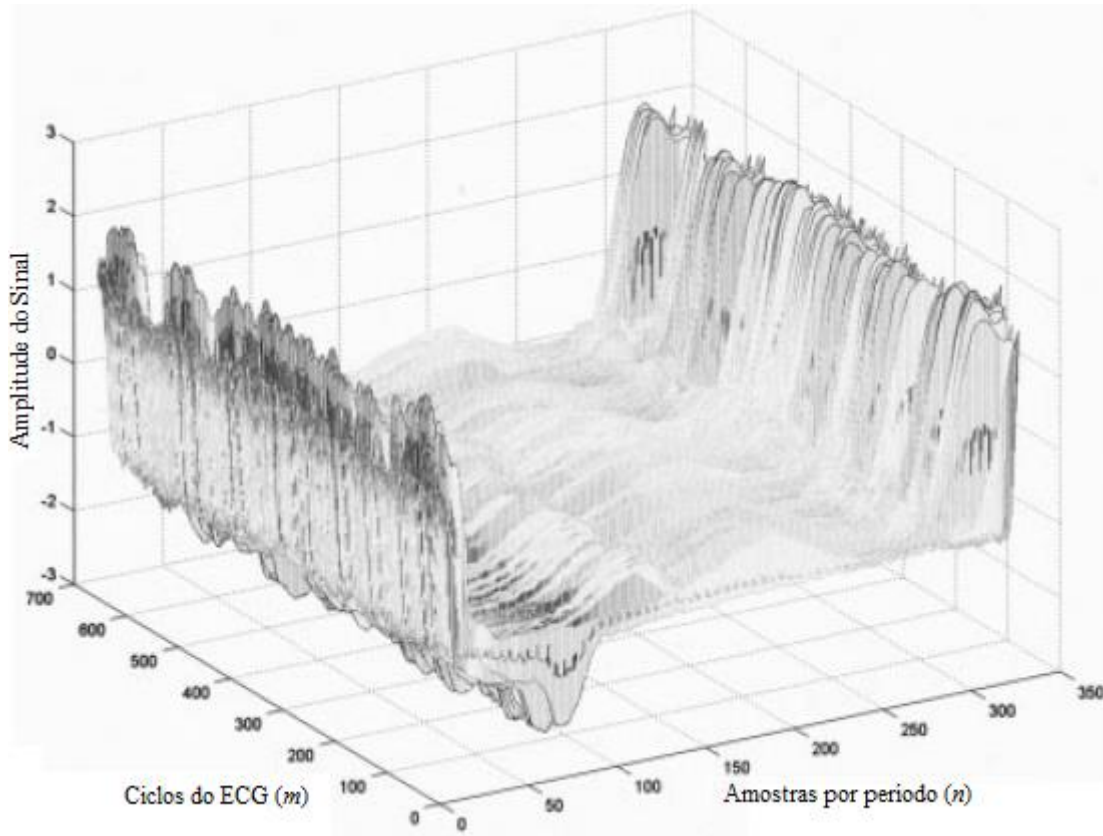


Figura 17 Exemplo de um ECG normalizado, contido numa matriz A (Adap.) [25]

É possível, adicionalmente, definir o conceito de energia da informação de A , a partir dos valores singulares de Σ :

$$Q_A = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_R^2. \quad (81)$$

Onde R corresponde a m (quando $m < n$), ou a n (quando $n < m$), assim como um rácio de energia (RE):

$$RE(\%) = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^q \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^R \sigma_i^2} \right\} \times 100 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2 \times \frac{100}{Q_A}. \quad (82)$$

Da equação (82) entende-se que, de forma a comprimir os sinais, serão considerados apenas os primeiros q valores singulares de Σ e os respectivos vectores de U e V . A posterior reconstrução do sinal dará então origem a uma matriz \hat{A} :

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^q \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T. \quad (83)$$

que conterá a informação principal do sinal.

Para garantir este facto, o valor de q (designado por índice de compressão) é habitualmente seleccionado de modo a que $\sigma_q^2 / \sigma_{q+1}^2 \gg 1$, para que RE se mantenha elevado [25].

4.2.4. QUANTIFICAÇÃO E ARMAZENAMENTO DA INFORMAÇÃO

Após a execução dos passos apresentados nas secções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, será armazenada toda a informação necessária para a posterior reconstrução do sinal comprimido, sendo possível definir o rácio de compressão (RC), como a relação entre o espaço necessário para o armazenamento do sinal original e do sinal comprimido:

$$RC = \frac{b_0 \sum_{i=1}^P T_i}{(M + N + 1) \times q \times b_S + P \times b_P + (b_\alpha + b_\beta + b_\gamma \times 2)}. \quad (84)$$

Na equação (84) o numerador representa o sinal original, onde b_0 será o nível de quantificação, em bits/amostra, T_i corresponde ao número de amostras de cada segmento do ECG original e P corresponde ao número total de segmentos amostrados.

Já o denominador representa o sinal comprimido onde se pode distinguir a quantificação de:

- Elementos resultantes da decomposição em SVD, onde M e N serão, respectivamente, o número de elementos de cada vector \vec{u}_i e \vec{v}_i utilizados, q corresponde ao índice de compressão e b_S será o nível de quantificação, em bits/amostra;

- A informação associada aos batimentos cardíacos, ou seja, o número original de amostras correspondentes a cada segmento antes da sua normalização (n_i^*), com a multiplicação de P segmentos pela quantificação de cada um, b_p , em bits/segmento;
- Os parâmetros diversos, cada um ocupando um determinado número de bits, que incluem o número total de batimentos recolhidos numa trama de dados, o primeiro valor singular e o número de amostras do segmento mais curto e do mais longo.

Uma forma de avaliar o erro entre o sinal original e o sinal reconstruído é através da diferença média quadrática percentual (*percent root mean square difference* – PRD):

$$PRD(\%) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^L [x_0(i) - x_r(i)]^2}{\sum_{i=1}^L x_0^2}} \times 100 \cdot \quad (85)$$

Onde x_0 é o sinal original, x_r é o sinal reconstruído e L é número de amostras presentes numa trama dados.

A Figura 18 demonstra a variação da PRD com o índice de compressão em 3 diferentes sinais da base de dados do MIT-BIH:

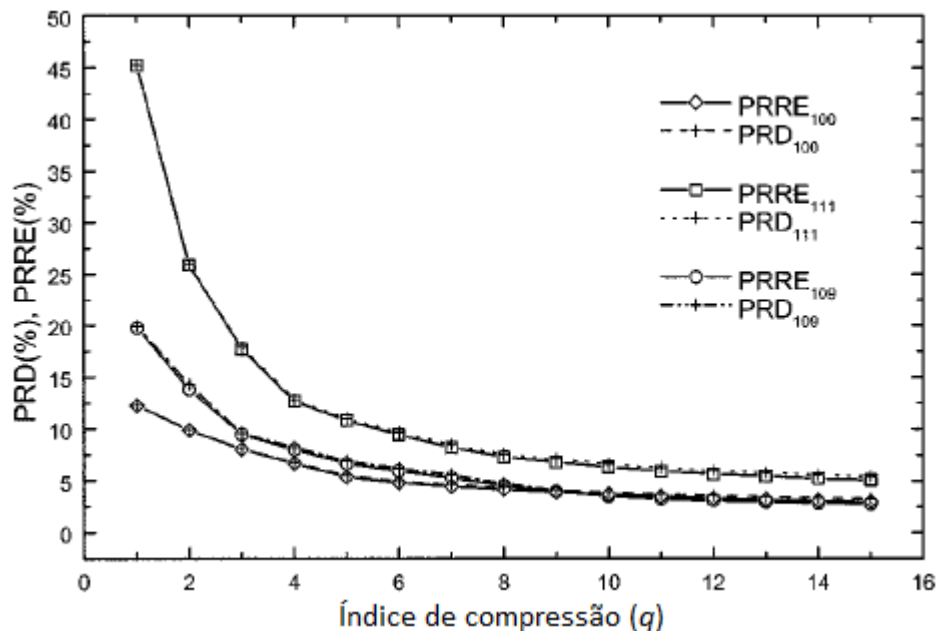


Figura 18 Valor de PRD em função de q para 3 diferentes sinais ECG (Adap.) [25]

O gráfico demonstra, tal como esperado, uma queda da PRD há medida que q é aumentado, sendo esta queda sempre mais notória nos primeiros valores singulares. No gráfico é possível também observar a variação da média quadrática da energia residual percentual (PRRE – *percent of root mean square residual energy*), uma outra forma avaliar o erro entre os sinais, que toma em conta a energia (representada por σ_i) dos mesmos.

Por fim, um pequeno exemplo, obtido a partir do registo 119.dat da base de dados do MIT-BIH. O sinal original possui uma taxa de amostragem de 360 Hz, com 11 bits/amostra, tendo sido considerado $q=5$ para a compressão:

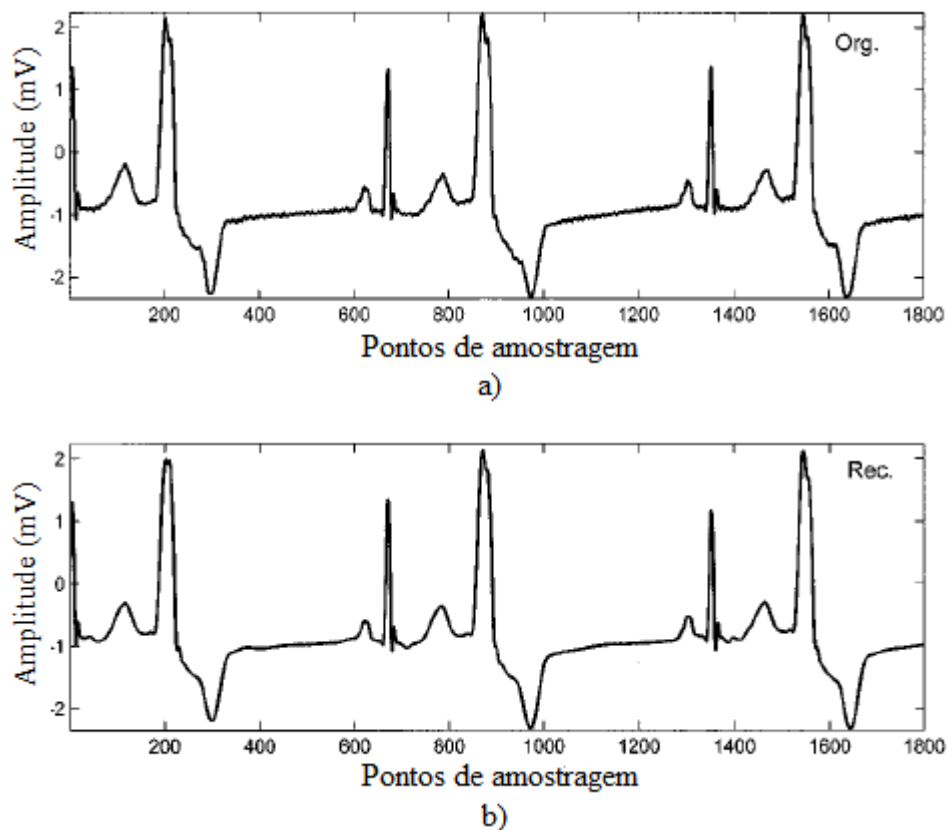


Figura 19 Exemplo de compressão de sinal ECG a) Sinal 119 original b) Sinal 119 reconstruído com $q=5$ (Adp.) [25]

Wei *et al.* [25] verificaram que foi possível obter RC de 36,72 e uma PRD de apenas 6,15% (suficiente para preservar toda a informação clínica necessária).

De uma forma mais genérica, a eficiência deste método depende do sinal original analisado, sendo que em sinais ECG que apresentem mais irregularidades e diferenças entre segmentos, devido a uma patologia, poderá ser necessário aumentar o valor de q para manter uma PRD aceitável, à custa de um RC mais reduzido.

4.3. SEPARAÇÃO DE SINAIS

Neste exemplo a SVD será utilizada para separar o sinal ECG maternal (MECG) do sinal ECG fetal (FEGC) [26].

No caso apresentado assume-se que uma determinada quantidade, r , de sinais fonte possibilitam a correcta representação de todas as fontes de corrente bioeléctricas. Estas fontes poderão ser representadas de um vector, $\vec{s}(t)$, designado por vector de sinal fonte:

$$\vec{s}(t) = (s_1(t) \dots s_r(t))^T . \quad (86)$$

Estes sinais não podem, no entanto, ser medidos directamente através de um ECG, que, em alternativa, recolhe as diferenças de potencial eléctrico entre vários pares de eléctrodos colocados à superfície da pele, sendo cada par designado por um canal. O sinal captado por cada canal será designado por sinal medido (m).

O sinal medido será diferente entre os diversos canais, uma vez que a contribuição de cada sinal fonte para o mesmo depende, entre outros factores, do posicionamento dos respectivos eléctrodos no corpo. No caso de um ECG com p canais, será possível considerar um vector, $\vec{m}(t)$, designado por vector de sinal medido:

$$\vec{m}(t) = (m_1(t) \dots m_p(t))^T . \quad (87)$$

Devido à natureza do corpo humano, que apresenta um comportamento resistivo e praticamente constante para sinais até 100 Hz, existe uma relação linear entre $\vec{s}(t)$ e $\vec{m}(t)$, sendo que o sinal medido por cada canal pode ser expresso através da combinação linear de r sinais fonte e do ruído presente:

$$\begin{cases} m_1(t) = t_{11}s_1(t) + \dots + t_{1r}s_r(t) + n_1(t) \\ \vdots \\ m_p(t) = t_{p1}s_1(t) + \dots + t_{pr}s_r(t) + n_p(t) \end{cases} . \quad (88)$$

Ou, em alternativa:

$$\vec{m}(t) = T\vec{s}(t) + \vec{n}(t) . \quad (89)$$

Onde T , designada por matriz de transferência, contem todos os coeficientes de transformação linear que são determinados pela geometria do corpo humano, pela condutividade dos seus tecidos e pelo posicionamento dos eléctrodos no mesmo.

Tendo em conta as noções acima apresentadas, é possível agora definir a aplicação da SVD na separação de sinais:

$$M_{pxq} = T_{pxr}S_{rxq} + N_{pxq} = U\Sigma V^T . \quad (90)$$

Onde M será uma matriz que contém os sinais medidos por p canais, com q amostras por canal.

Nos casos em que o sinal maternal medido apresenta uma magnitude consideravelmente superior ao sinal fetal, é possível dividir Σ claramente em:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_f & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} . \quad (91)$$

Onde σ_m , σ_f e σ_n , representam, respectivamente, os valores singulares correspondentes aos sinais maternal, fetal e ao ruído. A quantidade de cada tipo de valores singulares varia de acordo com o caso estudado, considerando-se, genericamente, que existem r_m valores maternos, r_f valores fetais e r_n valores de ruído, sendo $p = r_m + r_f + r_n$.

Da mesma forma é possível subdividir a matriz U em:

$$U = \begin{bmatrix} U_m & U_f & U_n \end{bmatrix} . \quad (92)$$

Em que, por exemplo, U_f será uma matriz com dimensão $p \times r_f$, que representará o espaço vectorial fetal. Uma vez que todas as colunas de U são ortonormais (devido ao processo da SVD apresentado no capítulo 3), será possível, através da projecção dos sinais medidos (matriz M) nos diversos espaços vectoriais, a obtenção de uma matriz, \hat{S} , de dimensão $p \times q$:

$$\hat{S} = U^T M = \begin{bmatrix} U_m^T M \\ U_f^T M \\ U_n^T M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}_m \\ \hat{S}_f \\ \hat{S}_n \end{bmatrix} . \quad (93)$$

Onde se encontrarão as estimativas dos sinais fonte mencionados na equação (86). \hat{S}_m e \hat{S}_f representarão, respectivamente, as estimativas dos sinais fonte maternal e fetal e \hat{S}_n a do ruído eléctrico.

A partir deste ponto será possível a construção de uma matriz F , que irá conter apenas as contribuições do feto para o sinal medido em cada canal do ECG, ou seja, o FECG:

$$F = U_f \hat{S}_f = \sum_{i=r_m+1}^{r_m+r_f} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T . \quad (94)$$

A título de exemplo, verifique-se o ECG de 6 canais (matriz M) e as respectivas estimativas dos sinais fonte (matriz \hat{S}) representados na Figura 20:

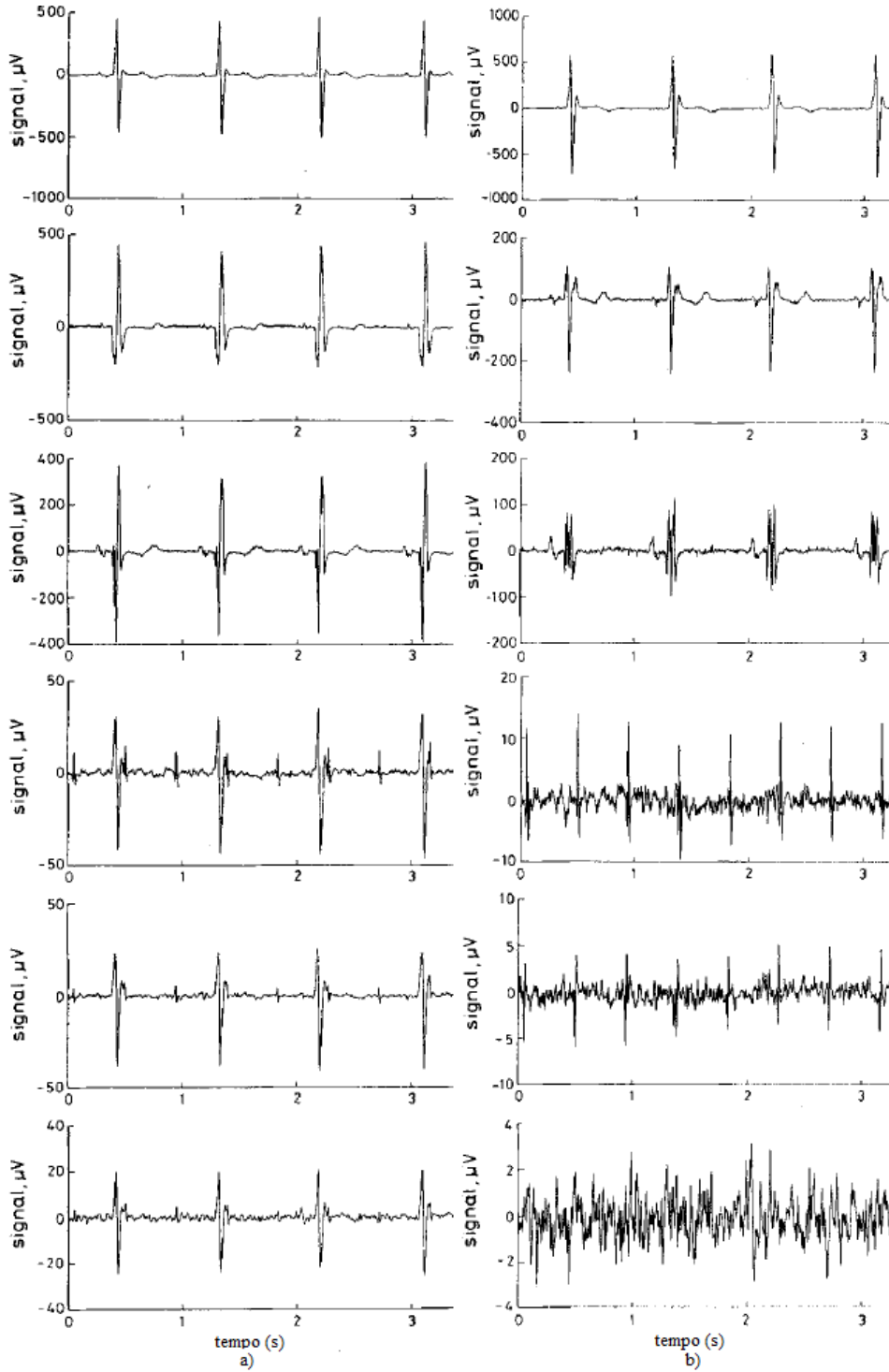


Figura 20 Estimativa dos sinais fonte a) M - ECG de 6 canais medido directamente b) \hat{S} - Projecção do sinal medido na matriz U (Adp.) [26]

É possível verificar na Figura 20 b), que os sinais fonte apresentam amplitude progressivamente menores, existindo:

- 3 sinais fonte com valores de pico absolutos entre, aproximadamente, os 100 e os 500 μV , e com frequência bastante aproximada ao sinal ECG original, que correspondem às contribuições maternas;
- 2 sinais fonte com valores de pico absolutos aproximadamente entre os 5 e os 10 μV , e com frequência superior ao sinal ECG original, que correspondem às contribuições fetais;
- 1 sinal fonte com valores de pico absolutos de cerca de 2 μV e frequência superior aos 5 sinais anteriores, relativo ao ruído.

Isto significa que, para este caso, Σ apresentará 3 valores singulares de maior dimensão ($r_m=3$), correspondentes ao espaço vectorial maternal, 2 valores correspondentes ao espaço fetal ($r_f=2$) e 1 valor correspondente ao ruído eléctrico ($r_n=1$).

Aplicando a equação (94) a este caso particular, será obtido o FEKG de cada um dos canais:

$$F = \sum_{i=4}^5 \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T . \quad (95)$$

Representado no gráfico da Figura 21.

Esta técnica possui a vantagem de ser relativamente sucinta de implementar e de permitir a obtenção do FEKG para cada um dos canos de medição, independentemente da orientação do coração do feto. No entanto, uma vez que o método depende do posicionamento dos eléctrodos no corpo humano, será necessário verificar caso a caso a sua melhor localização.

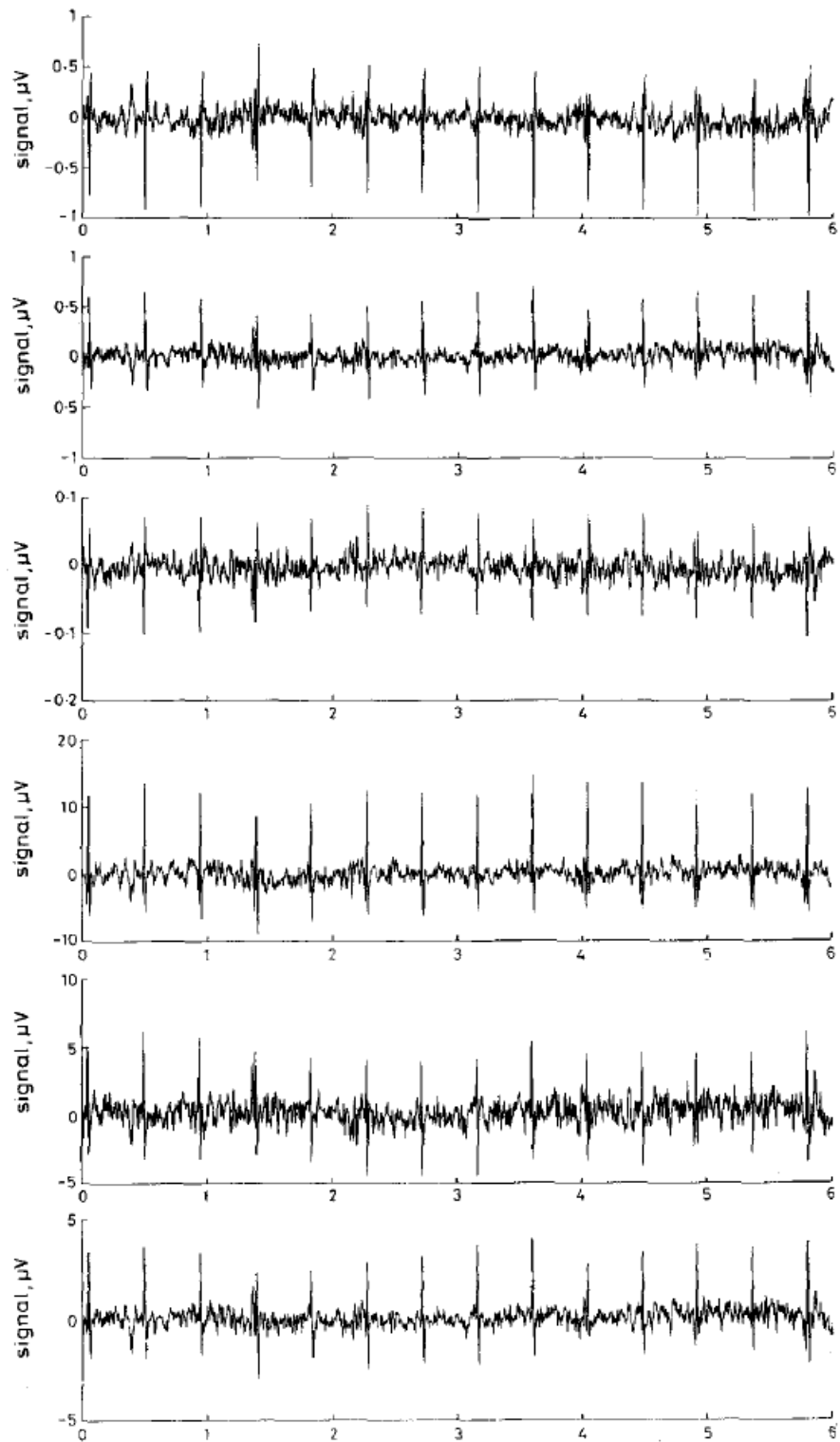


Figura 21 FECG [26]

5. TESTES E RESULTADOS OBTIDOS EM MATLAB

Neste capítulo foi aplicada, com recurso ao Matlab, a técnica SVD a sinais ECG concretos, com o intuito da sua filtragem para remoção de ruído. Os resultados alcançados através desta técnica foram posteriormente analisados e comparados com aqueles obtidos, em condições semelhantes, através de um filtro FIR de coeficientes fixos e de um filtro adaptativo iterativo.

5.1. CONTEXTO DA EXPERIÊNCIA

Esta experiência foi realizada com recurso a 2 sinais ECG, inicialmente sem ruído. O primeiro sinal foi obtido através da base de dados do MIT-BIH, representando um sinal ECG com uma taxa de amostragem de 100 Hz. O segundo sinal foi recolhido directamente, com a mesma taxa de amostragem, num voluntário através da derivação I de um equipamento da Biopac (*System 35*). Esta derivação corresponde ao sinal obtido através colocação de um eléctrodo no braço direito, outro no braço esquerdo e um eléctrodo de referência na perna direita.

A ambos os sinais foi posteriormente adicionado ruído. No caso do ECG da MIT-BIH foram utilizados sinais gerados em Matlab, tendo-se considerado:

- um sinal sinusoidal de 50 Hz, de forma a simular o ruído da rede eléctrica;
- um sinal de ruído branco, de forma a simular o ruído eléctrico provocado pela actividade muscular – electromiografia (EMG).

Já ao sinal ECG da derivação I foram adicionados ruídos verdadeiros, obtidos a partir de um voluntário, de uma forma semelhante ao processo de recolha do sinal ECG em si [27], tendo-se considerado:

- ruído da rede eléctrica;
- ruído EMG.

Todos os sinais utilizados encontravam-se inicialmente no formato $I \times N$ (onde N é o número total de amostras), pelo que, previamente à aplicação da SVD, foi necessária a execução do procedimento descrito na secção 3.4, para sua reformatação numa matriz de Toeplitz. Para execução da filtragem por SVD utilizou-se o algoritmo descrito na secção 3.5, com o objectivo final de isolar o sinal ECG e o ruído em duas matrizes diferentes S_l e S_s . Os resultados da aplicação desta técnica foram posteriormente comparados com aqueles obtidos, em condições similares, através da aplicação de um filtro FIR de coeficientes estáticos e de um filtro adaptativo iterativo, ambos estudados em [27].

5.2. RESULTADOS DA FILTRAGEM

Todo o processo de filtragem por SVD foi implementado em ambiente Matlab, sendo o seu estudo discriminado por tipo ruído, tendo sido adicionado aos sinais ECG (tanto aquele recolhido directamente como ao da base de dados a MIT-BIH) ruído da rede de alimentação e ruído EMG.

5.2.1. FILTRAGEM DE SINAIS COM RUÍDO DE 50 HZ

Visto a filtragem através da SVD ser baseada nas componentes de sinal de diferentes níveis de energia, um primeiro passo útil na selecção de k foi a representação gráfica de todos os valores singulares resultantes da decomposição do sinal ECG com ruído.

No caso da decomposição SVD do sinal ECG da MIT-BIH com ruído simulado de 50 Hz, foram obtidos 500 valores singulares (encontrando-se representados na Figura 22 os

primeiros 70), tendo-se verificado que a maior parte da energia do sinal se encontrava no primeiro valor, existindo logo uma queda abrupta no segundo valor ($\sigma_2/\sigma_1 = 0,0678$).

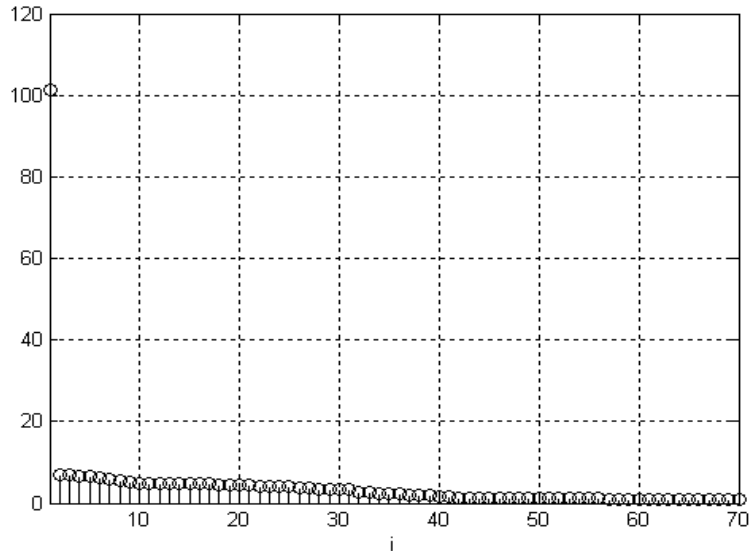


Figura 22 70 primeiros Valores Singulares para o sinal ECG da MIT-BIH com ruído de 50 Hz simulado.

Assim, considerando $k=1$, alcançaram-se os resultados da Figura 23, onde a Figura 23 a) representa o sinal ECG original sem ruído; a Figura 23 b) apresenta o sinal ECG com a adição de ruído de 50 Hz simulado; a Figura 23 c) ilustra o sinal reconstruído utilizando apenas a componente correspondente ao 1º valor singular (σ_1), contido na matriz S_l ; a Figura 23 d) apresenta o sinal reconstruído utilizando as componentes correspondentes aos restantes 499 valores singulares, contido na matriz S_s e a Figura 23 e) demonstra o erro da filtragem (diferença entre o sinal original e o sinal contido em S_s). Neste caso foi possível obter uma muito boa filtragem, sendo o sinal contido em S_s praticamente igual ao sinal ECG original sem ruído, conseguindo-se isolar o ruído em S_l . O erro de filtragem apresentou um valor máximo de $0,675 \mu\text{V}$ e um valor médio de $0,172 \mu\text{V}$.

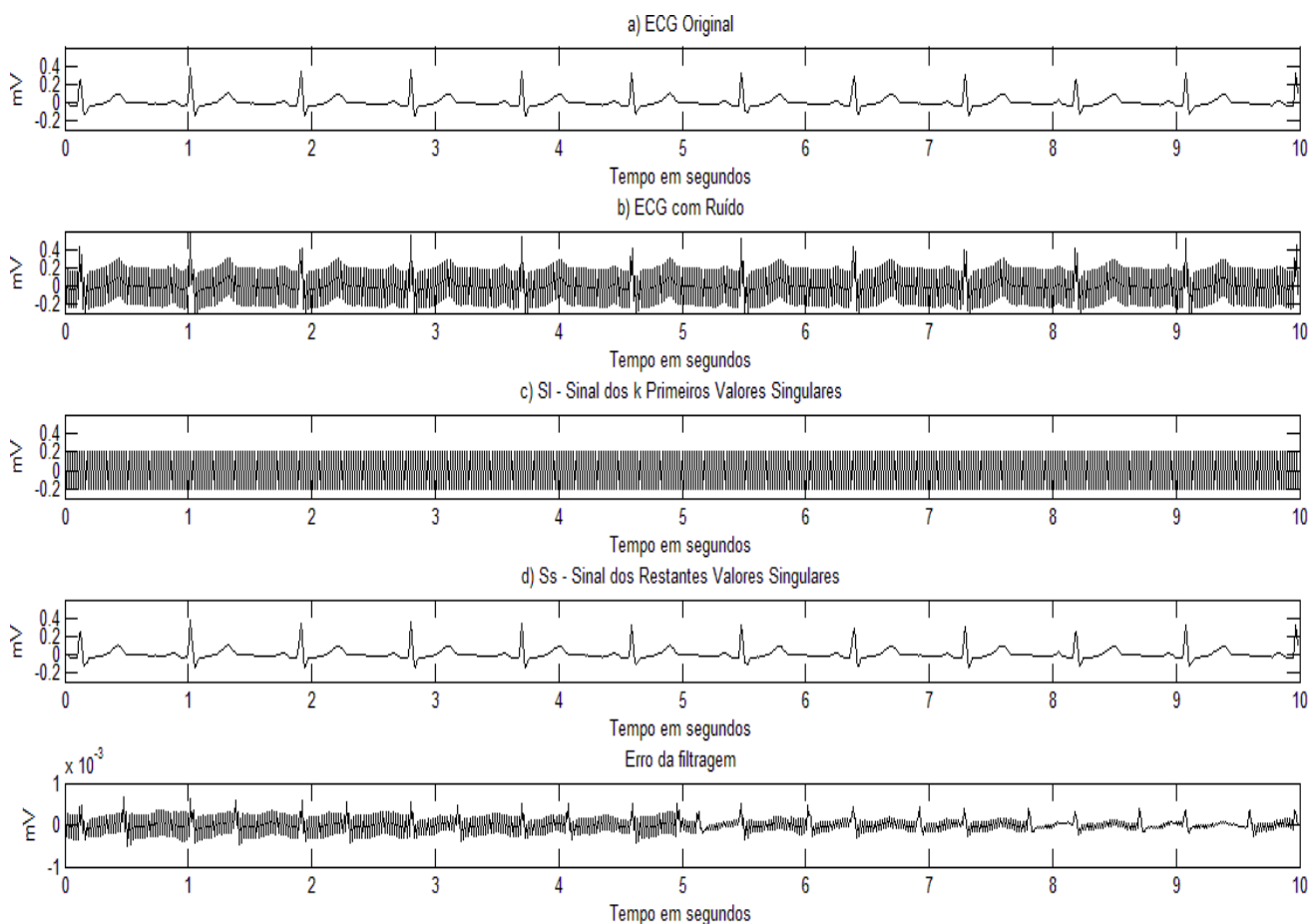


Figura 23 Filtragem SVD ao sinal ECG da MIT-BIH contaminado com ruído de 50 Hz simulado. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG contaminado; c) sinal reconstruído através da SVD com o 1º valor singular; d) sinal reconstruído com os restantes valores singulares; e) erro da filtragem.

No sentido de se conseguir uma melhor apreensão das potencialidades da filtragem por SVD, os resultados da sua aplicação foram comparados com aqueles obtidos, em condições semelhantes, através de um filtro adaptativo, estudado em [27], cujos coeficientes são calculados dinamicamente a cada iteração de forma a se optimizarem ao sinal de entrada.

Os resultados da filtragem através da técnica adaptativa ao ECG da MIT-BIH com ruído simulado de 50 Hz, encontram-se representados na Figura 24, onde a Figura 24 a) representa o sinal ECG original sem ruído; a Figura 24 b) apresenta o sinal ECG com a adição de ruído de 50 Hz simulado; a Figura 24 c) demonstra o progresso da filtragem; e a Figura 24 d) ilustra o erro médio durante o processo de filtragem. Verificou-se que o método adaptativo, à semelhança da SVD, foi também bastante eficiente, demorando, no entanto, cerca de 6 segundos até eliminar o ruído do sinal.

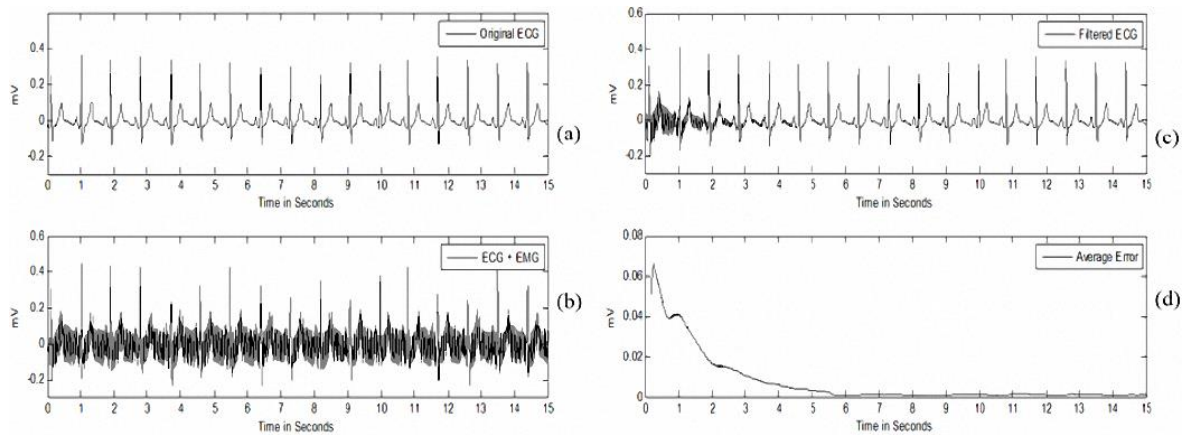


Figura 24 Filtragem adaptativa ao sinal ECG da MIT-BIH com ruído simulado [27]. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído simulado; c) progresso do processo de filtragem; d) erro médio durante o processo de filtragem.

Num segundo caso, com a utilização de um sinal ECG de derivação I, recolhido directamente e ao qual foi posteriormente adicionado ruído verdadeiro da rede de alimentação eléctrica, foi possível verificar, através da Figura 25, que a diferença entre os 2 primeiros valores singulares já não era tão significativa como no caso anterior ($\sigma_2/\sigma_1 = 0,2958$). A diferença de magnitude relativa entre σ_2 e σ_3 foi ainda menor ($\sigma_3/\sigma_2 = 0,3116$).

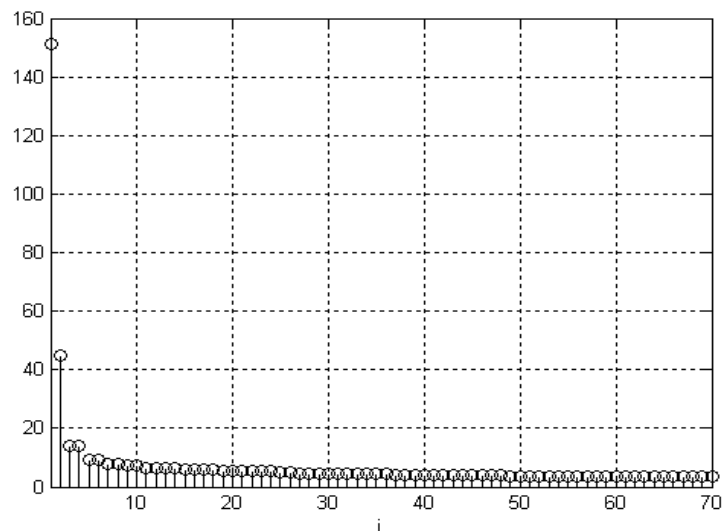


Figura 25 70 primeiros Valores Singulares para o sinal ECG recolhido com ruído da rede de alimentação eléctrica verdadeiro.

Assim, para este sinal, foram obtidos os melhores resultados considerando os 2 primeiros valores singulares, conforme representação da Figura 26, onde a Figura 26 a) representa o

sinal ECG original sem ruído; a Figura 26 b) apresenta o sinal ECG com a adição de ruído verdadeiro da rede eléctrica; a Figura 26 c) ilustra o sinal reconstruído utilizando apenas as componentes correspondentes aos 2 primeiros valores singulares (σ_1 e σ_2), contido na matriz S_l ; a Figura 26 d) apresenta o sinal reconstruído utilizando as componentes correspondentes aos restantes valores singulares, contido na matriz S_s ; e a Figura 26 e) ilustra o erro da filtragem (diferença entre o sinal original e o sinal contido em S_s). Verificou-se que esta filtragem apresentou uma qualidade ligeiramente menor do que aquela executada ao sinal da MIT-BIH (Figura 23), sofrendo com o facto das diferenças entre os primeiros valores singulares serem menos significativas, o que resultou num erro de filtragem maior (com um valor máximo absoluto de $16 \mu\text{V}$ e um valor médio de $6,8 \mu\text{V}$) e, conseqüentemente, em ligeiras discrepâncias entre o sinal ECG original sem ruído e o sinal final contido em S_s .

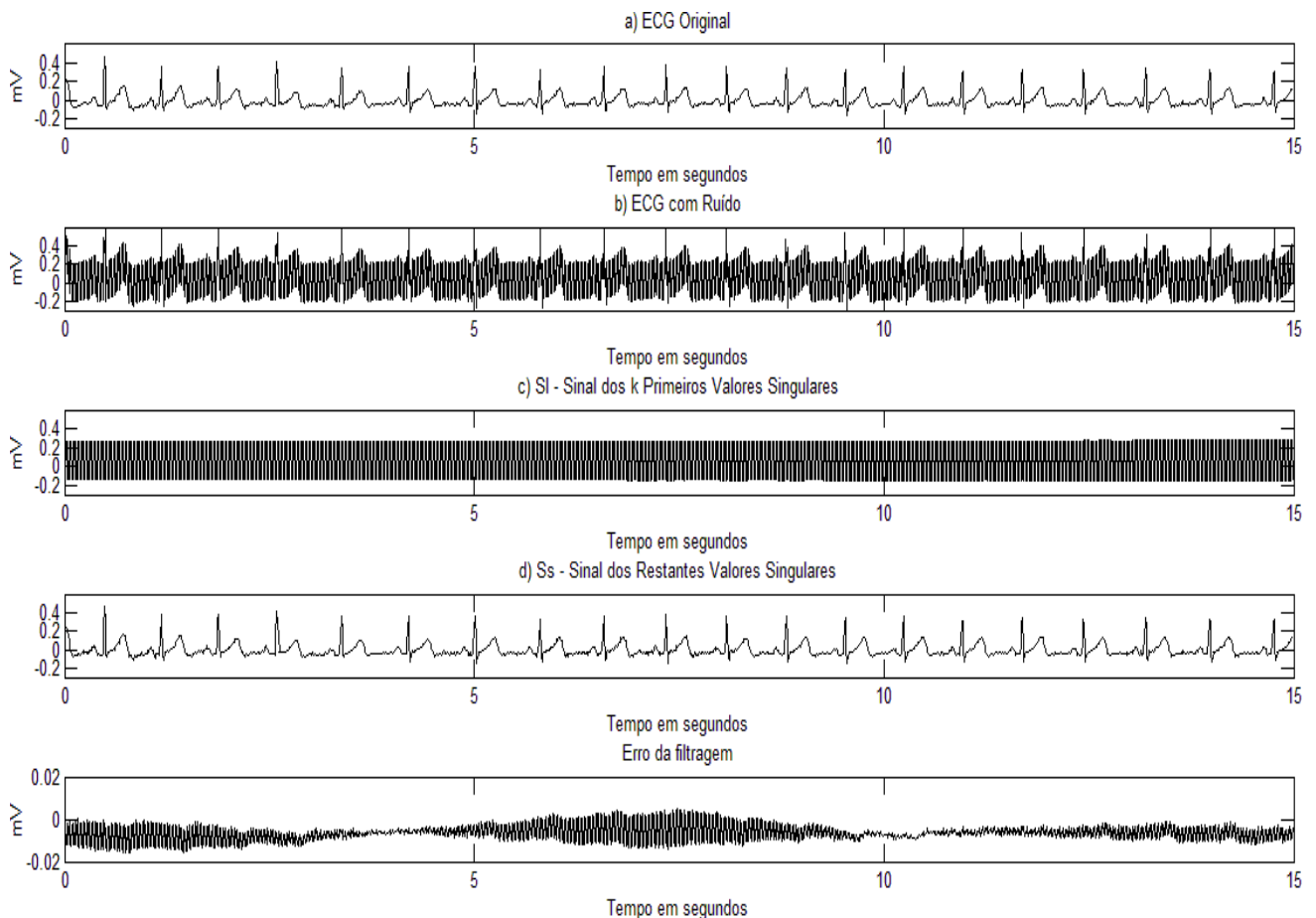


Figura 26 Filtragem SVD ao sinal ECG recolhido com ruído real da rede de alimentação eléctrica. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído; c) sinal reconstruído através da SVD com os 2 primeiros valores singulares; d) sinal reconstruído com os restantes valores singulares; e) erro da filtragem.

Com a aplicação do método adaptativo, em condições similares, foram obtidos os resultados da Figura 27, onde a Figura 27 a) ilustra o sinal ECG original recolhido sem ruído; a Figura 27 b) apresenta o sinal ECG com a adição de ruído verdadeiro da rede eléctrica; a Figura 27 c) representa o progresso do processo de filtragem; e a Figura 27 d) apresenta o erro médio durante o mesmo. Analisando os resultados, verificou-se que o método adaptativo, apresentou resultados ligeiramente piores do que aqueles apresentados na Figura 24, com um erro médio mais elevado, devido aos harmónicos presentes no ruído da rede eléctrica verdadeiro [27].

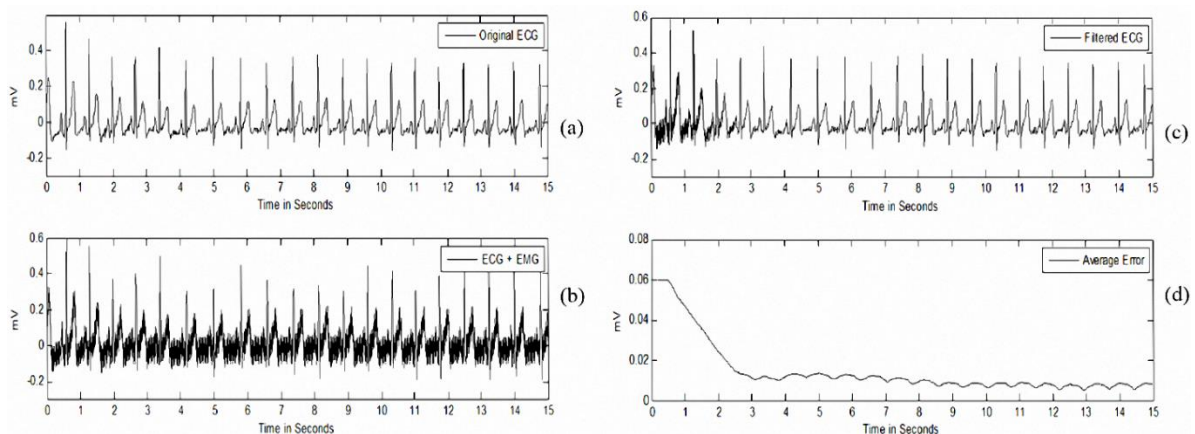


Figura 27 Filtragem adaptativa ao sinal ECG recolhido, com ruído real da rede de alimentação eléctrica [27]. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído; c) progresso do processo de filtragem; d) erro médio durante o processo de filtragem.

Comparando os 2 processos de filtragem, verificou-se que, tanto a SVD como o método adaptativo se comportaram de uma forma bastante robusta para o ruído da rede eléctrica, tanto simulado como medido directamente, apresentando no final um sinal bastante claro, em que não existiu perda de informação clínica importante.

Uma vantagem da SVD sobre o filtro adaptativo prendeu-se com o número de amostras necessário para um boa filtragem, visto que este último, devido à sua natureza iterativa, necessitou de algum tempo até conseguir atingir os coeficientes ideais. Já a SVD apresentou resultados semelhantes, mesmo com um número reduzido de amostras, sendo assim ideal para sinais de curta duração.

A título de exemplo, considere-se a Figura 28, onde se contemplaram apenas os 3 primeiros segundos do sinal ECG da MIT-BIH com adição de ruído de 50 Hz simulado e

se manteve $k=1$, podendo-se observar que a qualidade dos resultados não foi afectada face ao sinal de 10 segundos da Figura 23.

Na SVD foi, no entanto, necessário efectuar uma análise prévia do sinal, através dos seus valores singulares, de forma a descobrir qual o índice k ideal para a posterior filtragem. Adicionalmente, ao contrário da SVD, no caso do filtro adaptativo não foi necessária a pré-formatação dos ECG originais aqui utilizados para um formato matricial, visto este algoritmo aceitar já *inputs* no formato $1 \times N$.

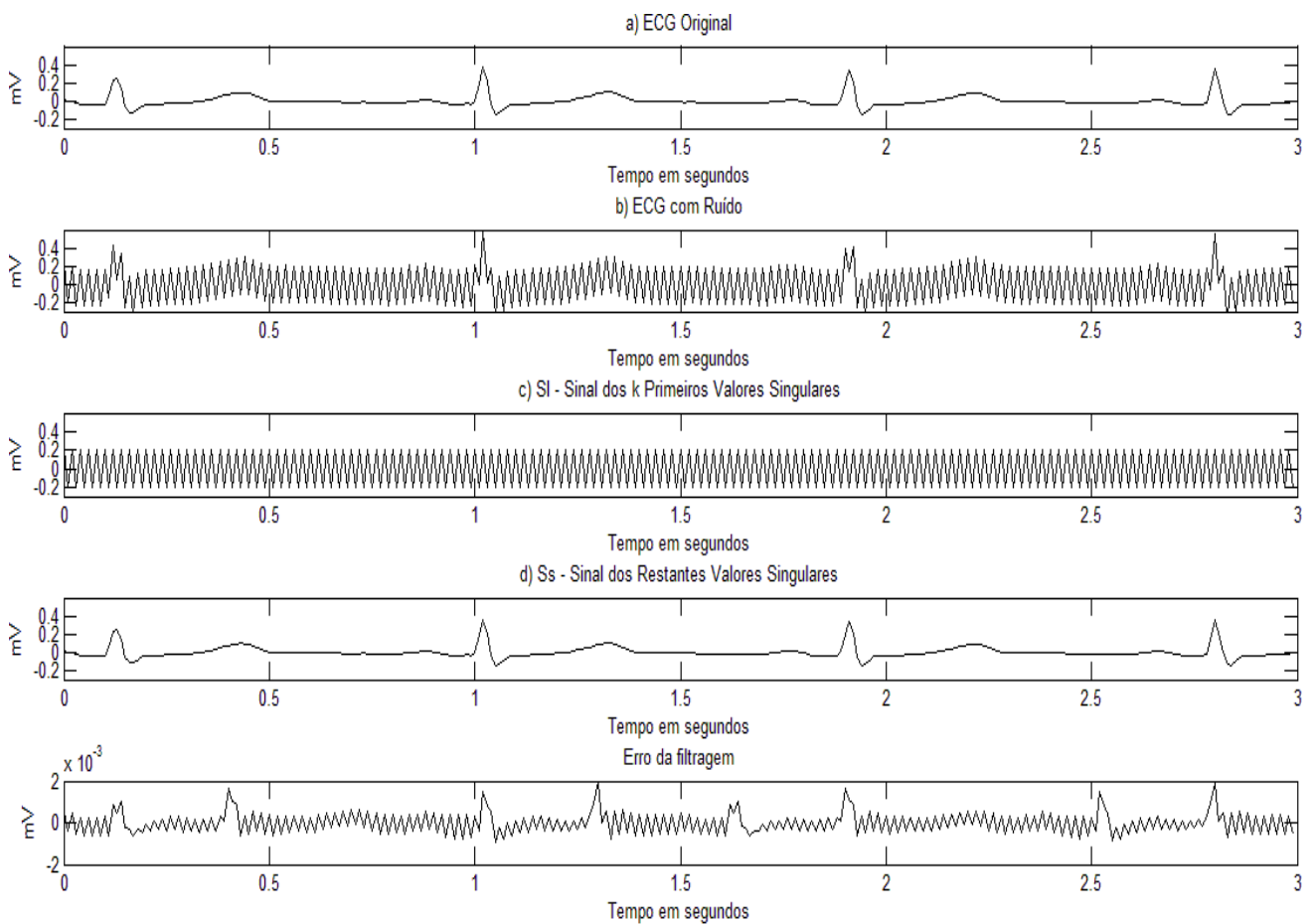


Figura 28 Filtragem SVD ao sinal ECG da MIT-BIH de 3 segundos com ruído de 50 Hz simulado. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído; c) sinal reconstruído através da SVD com o 1º valor singular; d) sinal reconstruído com os restantes valores singulares; e) erro da filtragem.

5.2.2. FILTRAGEM DE SINAIS COM RUÍDO EMG

A decomposição do sinal ECG da MIT-BIH contaminado com ruído branco simulado resultou na distribuição de valores singulares representada na Figura 29 (primeiros 70 valores, de um total de 500). Verificou-se que a variação da sua magnitude foi muito mais suave e contínua do que no caso do ruído de 50 Hz (Figura 22). Mesmo no ponto onde existiu uma queda mais abrupta, σ_9 , esta foi de uma escala significativamente menor ($\sigma_9/\sigma_1 = 0,7915$).

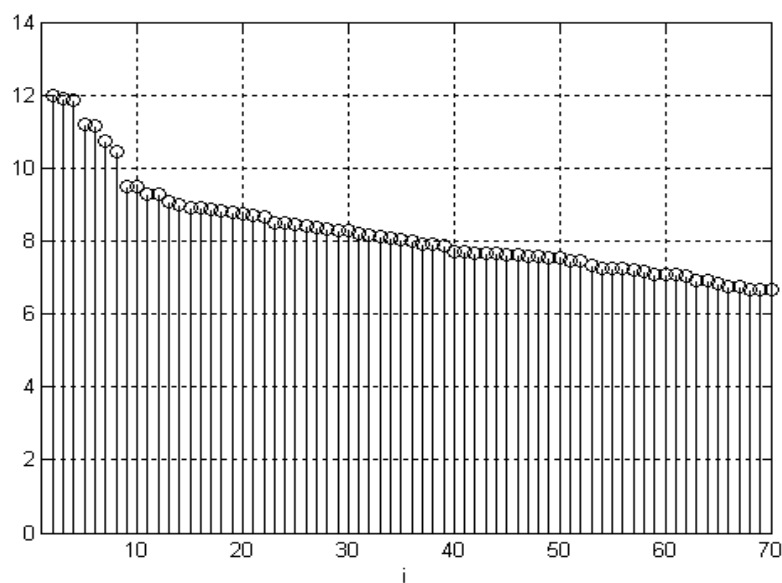


Figura 29 70 primeiros valores Valores Singulares para o sinal ECG da MIT-BIH com ruído EMG simulado.

Na filtragem representada na Figura 30, realizada com um índice de $k = 8$, o sinal ECG original da MIT-BIH, representado na Figura 30 a), foi contaminado com ruído EMG simulado, resultando no sinal apresentado na Figura 30 b). Após a filtragem por SVD obteve-se o sinal reconstruído através das componentes correspondentes aos 8 primeiros valores singulares, contido na matriz S_l e ilustrado na Figura 30 c) e o sinal reconstruído através das componentes correspondentes aos restantes valores singulares, contido na matriz S_s e representado na Figura 30 d).

Analisando os resultados obtidos, constatou-se que não foi possível recuperar o sinal ECG útil quer em S_l , quer em S_s , perdendo-se toda a informação do mesmo.

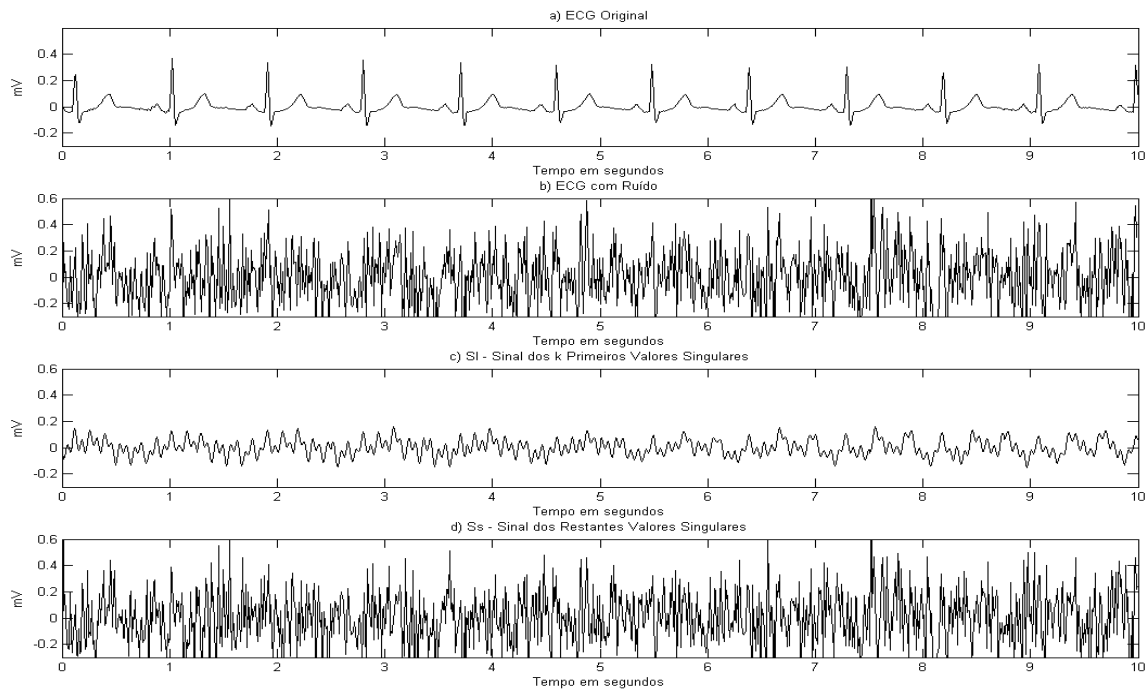


Figura 30 Filtragem SVD ao sinal ECG da MIT-BIH com ruído EMG simulado. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG contaminado; c) sinal reconstruído através da SVD com os 8 primeiros valores singulares; d) sinal reconstruído com os restantes valores singulares.

Já com o filtro adaptativo foi possível obter uma boa filtragem do ruído EMG simulado, podendo-se verificar, através da Figura 31 c), que o sinal ECG final obtido foi bastante semelhante ao ECG original da MIT-BIH, representado na Figura 31 a). A técnica adaptativa demorou apenas mais algum tempo do que no caso do sinal de 50 Hz (Figura 24) a atingir um nível de erro médio aceitável (cerca de 10 segundos), conforme representação da Figura 31 d) [27].

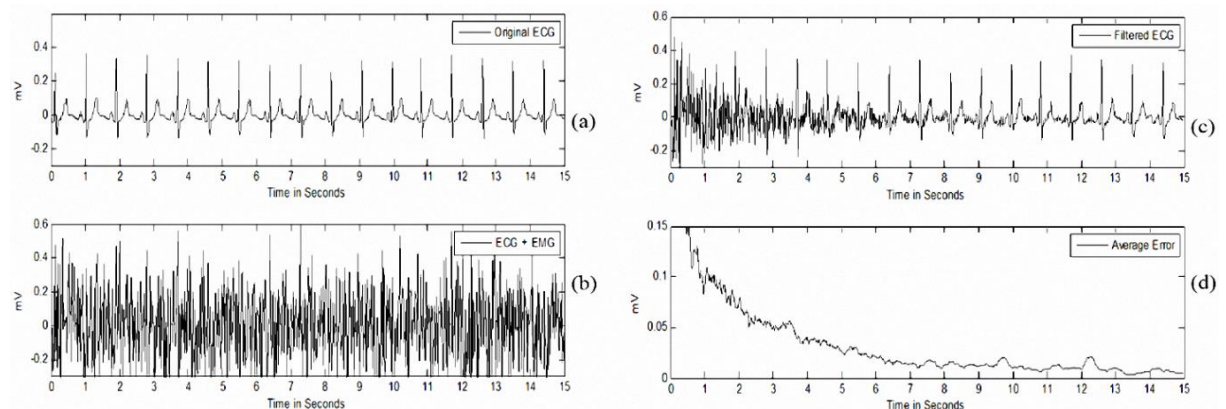


Figura 31 Filtragem adaptativa ao sinal ECG da MIT-BIH com ruído EMG simulado [27]. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído simulado; c) progresso do processo de filtragem; d) erro médio durante o processo de filtragem.

Num segundo caso, com a utilização de um sinal ECG recolhido da derivação I, ao qual foi adicionado ruído EMG verdadeiro, a distribuição dos valores singulares apresentou já uma variação mais abrupta entre os 2 primeiros valores e os restantes, situação observada na Figura 32.

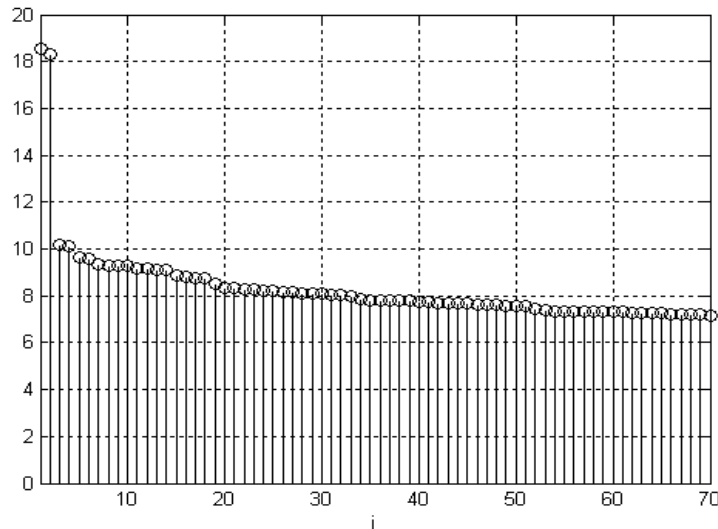


Figura 32 70 primeiros Valores Singulares para o sinal ECG medido, com ruído EMG real.

Esta variação continuou, no entanto, a ser de uma escala muito menor que aquela apresentada nos exemplos do sinal ECG com ruído da rede eléctrica (Figura 22 e Figura 25), verificando-se que $\sigma_3/\sigma_1 = 0,5484$. O resultado visível desta distribuição de valores singulares tomou a forma de uma filtragem de uma qualidade ligeiramente superior aquela representada na Figura 30, mas ainda assim com um desempenho pobre. Considerando uma filtragem SVD com um índice $k = 2$, obtiveram-se os resultados da Figura 33, onde a Figura 33 a) apresenta o sinal ECG original recolhido sem ruído; a Figura 33 b) representa o sinal ECG com a adição de ruído EMG verdadeiro; a Figura 33 c) demonstra o sinal reconstruído utilizando apenas as componentes correspondentes aos 2 primeiros valores singulares (σ_1 e σ_2), contido na matriz S_l ; e a a Figura 33 d) apresenta o sinal reconstruído utilizando as componentes correspondentes aos restantes valores singulares, contido na matriz S_s . Analisando os sinais finais obtidos apenas foi possível ter a noção de que em S_l se encontrava contido um sinal periódico, sem, no entanto, ser possível distinguir ou identificar qualquer tipo de informação útil.

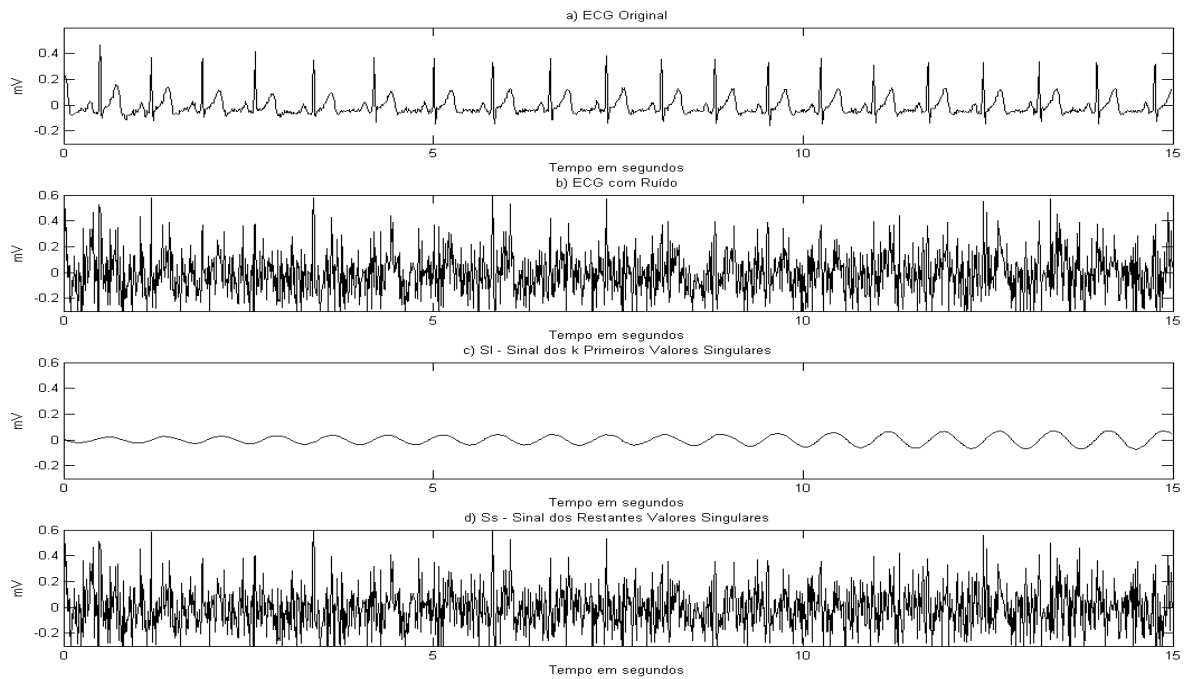


Figura 33 Filtragem SVD ao sinal ECG recolhido com ruído EMG real. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG contaminado; c) sinal reconstruído através da SVD com os 2 primeiros valores singulares; d) sinal reconstruído com os restantes valores singulares.

Já com recurso à técnica adaptativa, cuja aplicação se encontra representada na Figura 34, foi possível remover o ruído EMG verdadeiro do sinal ECG recolhido, tendo-se conseguido chegar a um sinal final, apresentado na Figura 34 c), fiel ao sinal ECG original sem ruído da Figura 34 a). Verificou-se, no entanto que o desempenho desta técnica foi pior que no caso do ruído simulado (Figura 31), demorando mais tempo a atingir resultados idênticos, conforme é possível verificar através do erro médio de filtragem representado na Figura 34 d), visto o ruído EMG verdadeiro não possuir uma distribuição espectral tão uniforme como o ruído branco puro [27].

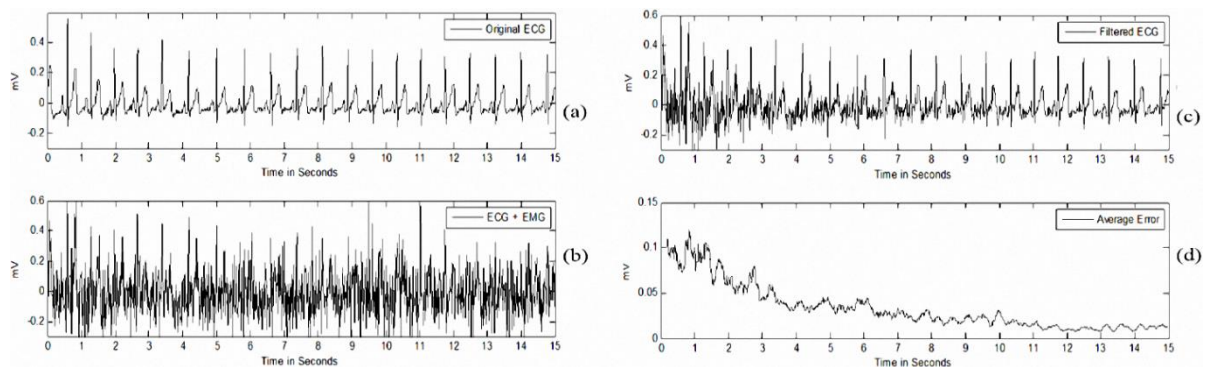


Figura 34 Filtragem adaptativa ao sinal ECG medido, com ruído EMG real [27]. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído; c) progresso do processo de filtragem; d) erro médio durante o processo de filtragem.

5.2.3. FILTRAGEM DE SINAL ATRAVÉS DE UM FILTRO FIR

Tendo em conta a fraca qualidade de filtragem obtida através da aplicação da SVD a sinais ECG com ruído EMG, foi executada uma comparação com uma outra técnica de filtragem, um filtro FIR de coeficientes fixos, no intuito de se conseguir uma melhor interpretação dos resultados e serem retiradas conclusões mais assertivas acerca dos mesmos. Assim, a aplicação, nas mesmas condições da SVD, do filtro FIR ao sinal ECG recolhido directamente com ruído EMG deu origem aos resultados apresentados na Figura 35. A Figura 35 a) representa o sinal original sem ruído; a Figura 35 b) apresentado o sinal ECG com a adição de ruído EMG verdadeiro; e a Figura 35 c) demonstra o progresso do processo de filtragem. Analisando o sinal final alcançado, verificou-se que o filtro FIR não foi capaz de remover o ruído EMG e recuperar o ECG original útil, perdendo-se toda a informação do mesmo.

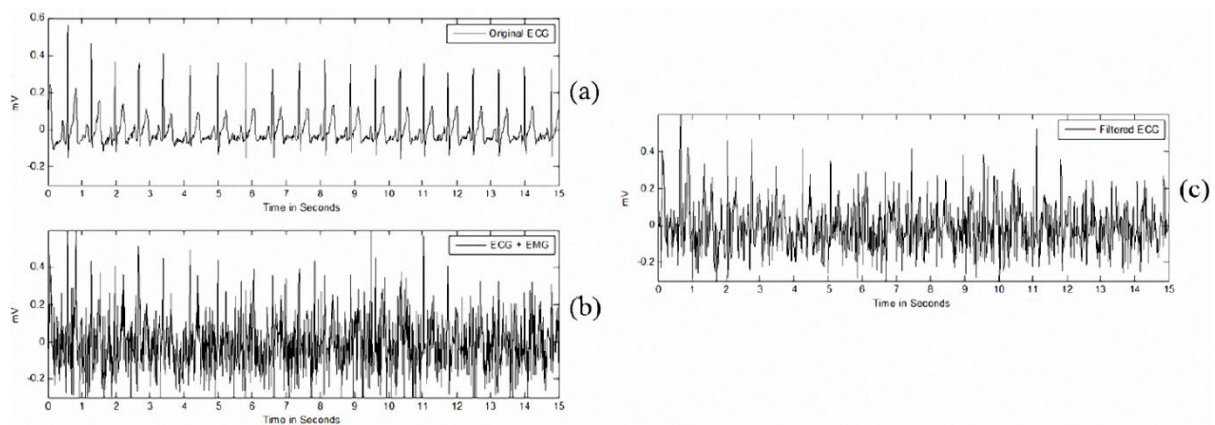


Figura 35 Aplicação de um filtro FIR de coeficientes fixos para filtragem ao sinal ECG recolhido, com ruído EMG real [27]. a) Sinal ECG original; b) sinal ECG com ruído; c) progresso do processo de filtragem.

Face aos resultados obtidos, foi possível traçar um paralelo entre o filtro FIR e a SVD, duas técnicas que se baseiam, embora de formas bastante diferentes, na utilização de coeficientes fixos (na SVD o coeficiente será o índice k seleccionado), verificando-se que ambas as técnicas apresentaram péssimos resultados na filtragem do sinal ECG com ruído EMG, devido à natureza deste último, semelhante a ruído branco. Apenas com recurso à técnica adaptativa, onde os coeficientes são dinamicamente calculados a cada iteração de forma a se optimizarem ao sinal de entrada, aprimorando assim o processo de filtragem, foi efectivamente possível remover as várias componentes de frequência do ruído EMG,

resultando num sinal ECG final no qual foi possível manter a informação clínica importante.

6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões e ilações que podem ser retiradas a partir do estudo elaborado acerca da aplicação da técnica SVD a sinais ECG, nas suas variadas vertentes, com ênfase nos resultados práticos obtidos na aplicação de filtragem de sinal. Adicionalmente são indicados possíveis passos e inovações que podem vir a ser implementados no futuro para o aperfeiçoamento e expansão deste projecto.

6.1. CONCLUSÕES

O principal objectivo deste trabalho incidiu no estudo aprofundado da técnica SVD, uma ferramenta matemática que permite a manipulação de sinais através da decomposição de matrizes, ao caso particular de um sinal ECG.

O estudo dos fundamentos teóricos desta técnica permitiu identificar o seu algoritmo e quais os procedimentos e passos necessários para se executar a decomposição do sinal original nas matrizes de vectores singulares, U e V , e na matriz de valores singulares, Σ . Este estudo permitiu, adicionalmente, a percepção de que todos os vectores próprios contidos nas matrizes U e V são ortonormais, possibilitando assim uma separação das componentes do sinal. Estas diversas componentes possuem depois um peso no ECG final

que é determinado pelos valores singulares (σ), contidos na diagonal principal da matriz Σ e colocados por ordem decrescente de magnitude.

Após o estudo e pesquisa do potencial desta técnica, concluiu-se que as 3 aplicações práticas mais comuns da SVD a sinais ECG são:

- compressão de sinal - de forma a reduzir o espaço necessário para o seu armazenamento e largura de banda para a sua transmissão, sem que isso implique a perda de informação clínica importante;
- separação de sinais - de forma a, por exemplo, ser possível identificar e isolar o ECG de um feto a partir de um exame executado na sua progenitora, evitando-se assim a utilização de técnicas invasivas e potencialmente prejudiciais à saúde dos pacientes;
- filtragem de sinal - com vista à remoção de ruído do mesmo.

Tendo em conta os vários problemas provocados pelo ruído e a constante presença do mesmo num ECG, foi abordada de uma forma mais exaustiva a vertente de filtragem por SVD, recorrendo-se à plataforma Matlab para o estudo e teste deste processo em sinais ECG concretos, contendo diferentes tipos de ruído. Para tal, foram considerados 2 sinais ECG, um da base de dados do MIT-BIH, o outro recolhido directamente num voluntário através de um equipamento da Biopac, tendo a estes sido posteriormente adicionado o ruído eléctrico provocado pela actividade muscular – electromiografia (EMG) e o ruído provocado pela rede de alimentação eléctrica. No caso do sinal MIT-BIH recorreu-se a ruídos simulados, criados em Matlab, já no sinal recolhido directamente foram utilizados ruídos verdadeiros, obtidos de forma semelhante ao ECG.

Para a execução da filtragem, cada sinal ECG contaminado com ruído foi inicialmente decomposto através da SVD, sendo posteriormente executada uma divisão das suas componentes, de acordo com os seus níveis de energia, em 2 grandes conjuntos: um constituído pelas componentes de sinal correspondentes aos primeiros k vectores e valores singulares, o outro pelas componentes correspondentes aos restantes vectores e valores. Este procedimento teve como objectivo o isolamento do sinal ECG limpo numa matriz, sendo o índice k escolhido caso a caso, após uma análise da distribuição dos valores singulares de cada ECG. Os resultados da filtragem por SVD foram depois comparados

com aqueles obtidos, em condições idênticas, através de um filtro FIR de coeficientes fixos e de um filtro adaptativo, ambos estudados em [27].

No caso do ECG com ruído da rede eléctrica verificou-se que praticamente toda energia do sinal se encontrava concentrada nos primeiros valores singulares, existindo uma queda extremamente abrupta da sua magnitude logo após o primeiro valor, no caso do sinal ECG da MIT-BIH, e depois do segundo valor singular, no caso do sinal recolhido directamente. Isto permitiu uma boa filtragem, conseguindo-se isolar claramente o sinal ECG. O resultado apresentado pelo filtro adaptativo para este tipo de ruído foi bastante similar ao da SVD, verificando-se também um desempenho muito bom. Uma desvantagem da técnica adaptativa é o facto de esta necessitar sempre de algumas amostras e, por conseguinte, de algum tempo, até se obterem bons resultados. A SVD, pelo contrário, apresentou resultados semelhantes mesmo com um tempo de amostragem curto, tendo sido, no entanto, necessário efectuar sempre uma análise prévia do sinal, através dos seus valores singulares, de forma a descobrir qual o índice k ideal para a posterior filtragem.

Já na situação dos sinais ECG com ruído EMG (tanto real como simulado), verificou-se uma distribuição de energia mais uniforme por todos valores singulares, não existindo quedas de magnitude entre valores singulares próximos à mesma escala do exemplo do ruído da rede eléctrica. Isto resultou numa filtragem por SVD extremamente pobre, não sendo possível isolar o sinal ECG sem ruído, perdendo-se assim toda a informação útil contida no mesmo. Os resultados obtidos através da utilização de um filtro FIR de coeficientes fixos, nas mesmas condições, foram bastante semelhantes aos da SVD, não tendo sido também possível remover o ruído existente e recuperar o sinal ECG. Apenas com recurso à técnica adaptativa, se verificou um bom desempenho, conseguindo-se obter uma boa filtragem, resultando num sinal ECG final claro.

Em geral, a SVD revelou-se uma técnica extremamente versátil, permitindo a execução de diferentes e variados tipos de aplicações aos sinais ECG. No caso particular da filtragem de sinal, concluiu-se que a eficácia da sua aplicação se encontra directamente relacionada com o tipo de ruído contido no mesmo. Para ruído proveniente da rede eléctrica, no qual a maior parte da energia se encontra nos 50 Hz, a SVD apresentou uma filtragem bastante robusta, de qualidade semelhante à técnica adaptativa, tendo-se obtido sinais ECG claros nos quais não se verificou perda de informação útil. No caso do ruído EMG, semelhante a ruído branco, com energia distribuída por uma larga banda de frequências, verificou-se que

não foi possível recuperar o sinal ECG através da filtragem por SVD. A aplicação de um filtro FIR de coeficientes fixos apresentou resultados semelhantes, com uma total perda do sinal. Apenas com recurso ao filtro adaptativo, com coeficientes dinamicamente calculados a cada iteração, foi possível a remoção do ruído EMG e a recuperação do sinal. A partir destas observações concluiu-se que, para este tipo de ruído, a utilização de técnicas com coeficientes fixos (no caso da SVD o coeficiente será o índice k), não é adequada.

6.2. TRABALHOS FUTUROS

Tendo em conta as conclusões obtidas, um passo importante seria a evolução do algoritmo de filtragem SVD, de modo a que este calculasse dinamicamente o índice k , através da análise automática dos valores singulares produzidos pela SVD. Esta análise deveria ser focada principalmente no cálculo das zonas onde existe uma variação brusca da amplitude entre 2 valores singulares seguidos, que normalmente indica uma transição de fonte de sinal (por exemplo, transição entre sinal útil e ruído).

Posteriormente seria importante o estudo mais aprofundado das outras aplicações da SVD apresentadas neste trabalho: a compressão e separação de sinais ECG. No caso da compressão, seria especialmente interessante verificar, após a aplicação da SVD, até que ponto o espaço em disco necessário para o armazenamento de um sinal ECG de alta resolução passaria a ser comparável ao espaço necessário para um sinal de baixa resolução, sem que isso implicasse perda de informação útil.

Referências Documentais

- [1] PORTAL DA SAÚDE - *Doenças cardiovasculares*. <http://www.portaldasaude.pt/>. Ministério da Saúde, 2009.
- [2] MYERS, Robert - *The Benefits and Limitations of Electrocardiography*. Medcan Clinic, 2014.
- [3] LOEB, Gerald *et al.* - *Lecture Notes, Dealing With Noise in ECG*. Applied Electrophysiology, University of Southern California, 2006.
- [4] GÜLER, Nihal *et al.* - *Wireless Transmission Of ECG Signal*. Springer Publications, 2006.
- [5] HOPCROFT, John *et al.* – *Course Notes, Mathematical Foundations for the Information Age*. Cornell University, Department of Computer Science, 2010.
- [6] TEIGA, Pedro - *Sistema Cardiovascular*. Faculdade de Medicina, Universidade do Porto, 2005.
- [7] Blausen.com staff. "Blausen gallery 2014". Wikiversity Journal of Medicine. doi:10.15347/wjm/2014.010. ISSN 20018762.
- [8] LIPPINCOT, WILLIAMS & WILKINS. *ECG interpretation*, Wolters Kluwer, 2011.
- [9] WIKIMEDIA; *Diagram_of_the_human_heart_(cropped)_pt.svg*, <http://commons.wikimedia.org/>, 2007.
- [10] URGO MEDICAL UK - *The venous system within the cardiovascular system*, Laboratoires URGO, 2014 .
- [11] BIANCO, Carl – <http://saude.hsw.uol.com.br/coracao3.htm>, 1999.
- [12] *Physiology Lessons for use with Biopac Science Lab MP40*. BIOPAC Systems, Inc, 2007.
- [13] CHAVES, Paulo; MOREIRA, Adelino - *Texto de Apoio, Aula Teórico-Prática, ELECTROCARDIOGRAFIA*. Faculdade de Medicina da Universidade do Porto - Serviço de Fisiologia, 2001
- [14] <http://www.bostonscientific.com/lifebeat-online/heart-smart/electrical-system.html>, Boston Scientific Corporation, 2014.
- [15] MACLEOD, Rob *et al.* - *Bioengineering/Physiology 6000: System Physiology I: Cardiovascular, Respiratory, and Renal Systems Spring of 2014 Edition – Course Notes*. University of Utah, Scientific Computing and Imaging Institute, 2014.
- [16] LIN, Chao - *P and T Wave Detection in Electrocardiogram (ECG) Signals*. Signal & Communications Group, University of Toulouse, 2011.
- [17] LERNER, David; *Lecture Notes for Linear Algebra, Chapter 11 - Linear dependence and independence*. University of Kansas Math Dept, 2008.

- [18] STRANG, Gilbert - *Linear Algebra and Its Applications. Fourth Edition*. MIT Math Dept.
- [19] CARREIRA, Adelaide; PINTO, Gonçalo – *Cálculo Matricial, Volume I – Teoria Elementar*. Piaget Editora.
- [20] MART 20 - *INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA AND MULTIVARIABLE CALCULUS*, http://www.math.harvard.edu/archive/20_spring_05/handouts/, 2005.
- [21] JIA, Yan-Bin – *Problem Solving Techniques for Applied Computer Science - Singular Value Decomposition*, <http://www.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/svd.pdf>, Iowa State University, 2013.
- [22] NAGY, Gabriel - *MTH 234 - Multivariable Calculus*, <http://math.msu.edu/~gnagy/teaching/10-fall/mth234/w2-234-h.pdf>. Michigan State University Mathematics Department.
- [23] BAKER, Kirk; *Singular Value Decomposition Tutorial*. Ohio State University, 2013.
- [24] G.D.Clifford. *Course materials for HST.582J / 6.555J / 16.456J, Biomedical Signal and Image Processing*, Spring2007. MIT OpenCourseWare (<http://ocw.mit.edu>), Massachusetts Institute of Technology. Downloaded on [11th July 2014].
- [25] WEI, Jyh-Jong; CHANG, Chuang-Jan; CHOU, Nai-Kuan; JAN, Gwo-Jen - *ECG Data Compression Using Truncated Singular Value Decomposition*, IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, Vol. 5, No. 4, December, 2001
- [26] CALLAERTS, Dirk; DE MOOR, Bart; VANDEWALLE, Joos, SANSEN, Willy – *Comparison of SVD Methods to extract the foetal electrocardiogram from cutaneous electrode signals*. Katholieke Universiteit Leuven, ESAT Laboratory ,1990
- [27] MEIRELES, António - *ECG Denoising Based on Adaptive Signal Processing Technique*. Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2011.