

Orientação

“Em cada crisálida há uma lagartinha com vontade de voar”

Helena Pinto

AGRADECIMENTOS

A concretização deste projeto só foi possível devido ao apoio e colaboração de várias pessoas, às quais gostaria de agradecer de forma particular:

À minha orientadora, Doutora Daniela Mascarenhas, pela sua orientação, disponibilidade, apreciações, exigência e crítica com que acompanhou a realização deste projeto. Agradeço-lhe, ainda, o apoio e a suas palavras de incentivo e motivação, sem as quais a realização deste trabalho não tinha sido possível.

Ao meu co-orientador, Doutor Alexandre Pinto, pela boa disposição com que sempre me recebeu, pelas apreciações criteriosas e significativas com que acompanhou a realização deste trabalho, pelo seu apoio e capacidade em incitar-me a querer fazer sempre melhor.

Às colegas de Mestrado e Licenciatura pela participação na Entrevista.

Aos alunos pela participação na Pré-entrevista, Intervenção Didática e Pós-entrevista e respetivos Encarregados de Educação.

Aos meus primos Carla Sofia Pinho e Filipe Pinho pela paciência, apoio e carinho. Um obrigada em especial à minha mais que prima, um dos meus pilares desde sempre, pela ajuda e apoio incondicionais.

Às minhas amigas Joana Rocha e Ana Ferreira pela sua amizade e pelo apoio incondicional.

Ao meu amigo e “partner” Emídio Pereira, pela preocupação e pelos momentos de dança e diversão, que tanto me ajudaram a libertar a tensão.

Aos restantes amigos e amigas, os de e para sempre, que direta ou indiretamente facilitaram momentos de convívio e me arrancaram sorrisos e gargalhadas.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram a inscrever no mestrado. Em especial ao meu pai que, à sua maneira, me incitou a avançar sem querer ver desânimos.

Ao Rui, o meu marido, amigo e companheiro de vida, que sempre acreditou em mim e me aturou em todos os momentos, sobretudo nas ocasiões mais difíceis, limpando-me muitas vezes as lágrimas e envolvendo-me no seu abraço de amor. Agradeço-lhe todo o apoio, preocupação e ajuda na realização deste trabalho e a imensa paciência.

E, por fim, à minha grande amiga e Professora, Helena Pinto, a quem dedico este trabalho. Embora não esteja presente, sei que acredita em mim e nas minhas capacidades. Mesmo de forma indireta, continua a transmitir-me coragem e a fazer-me acreditar que sou capaz de fazer tudo aquilo que almejar. As minhas lágrimas não são só de saudade, são também de carinho e admiração.

RESUMO

A presente investigação segue uma metodologia qualitativa e centra-se num estudo de caso, com o intuito de averiguar as possíveis potencialidades do uso das imagens com elementos da Natureza no ensino das Isometrias no 6.º ano de escolaridade, privilegiando a interdisciplinaridade entre a Matemática e as Ciências da Natureza e, assim, progredindo para a articulação da Matemática com o meio que nos rodeia.

O presente estudo tem como objetivos: diagnosticar as dificuldades encontradas na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias; enumerar algumas atitudes metodológicas usadas pelos professores para o ensino das Isometrias; promover o uso das imagens com elementos da Natureza no ensino das Isometrias; verificar se o uso das imagens com elementos da Natureza é uma prática corrente para o ensino do subdomínio das Isometrias e evidenciar possibilidades de consciencialização da importância do rigor matemático por exploração de elementos reais da Natureza, tendo consciência da eventual imperfeição dos elementos reais.

Pretendemos dar respostas às questões de investigação: (1) Que dificuldades são frequentemente sentidas pelos professores na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias?; (2) Quais as estratégias utilizadas pelos docentes para colmatar as dificuldades encontradas na leção do subdomínio das Isometrias?; (3) Poderão as imagens com elementos da Natureza ser um recurso motivador e/ou facilitador no ensino do subdomínio das Isometrias?.

Para tal, como técnicas de recolha de dados, desenvolvemos uma entrevista a quatro docentes (duas docentes de quadro e duas docentes contratadas, que se encontram a orientar explicando o 6.º ano de escolaridade); uma pré-entrevista; uma Intervenção Didática com três momentos distintos e uma pós-entrevista, a alunos do 6.º ano de escolaridade. Com os alunos será, ainda, utilizada a observação não participante e participante.

O domínio de conteúdo dominante é a Geometria e o subdomínio em estudo são as Isometrias. Todos os participantes terão um papel ativo, sobretudo os alunos, durante a Intervenção Didática, construindo e/ou reforçando o seu conhecimento.

Os dados foram recolhidos através de gravações áudio, fotografias, registos da professora investigadora e fotografias e desenhos elaborados pelos alunos. Os resultados obtidos com o presente estudo revelam as dificuldades e estratégias encontradas pelos professores no ensino das Isometrias no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), no 6.º ano de escolaridade e os contributos que as imagens com elementos da Natureza para a prática docente no ensino das Isometrias, incluindo envolver e motivar os alunos para a aprendizagem Matemática.

Palavras-Chave: Matemática, Ciências, Didática, Interdisciplinaridade, Isometrias, Simetrias, Natureza, Ensino Básico.

ABSTRACT

This research project follows a qualitative methodology and focus on a case study, with the intention of finding out possible potentialities of using images with elements of Nature in teaching Isometries to sixth graders, privileging the interdisciplinarity between Mathematics and Natural Science, and thus progressing to relating Mathematics to our surroundings.

The objectives of this study are: to diagnose the difficulties found in preparing and teaching the sub-area of Isometries; to enumerate some methodological attitudes used by teachers in teaching Isometries; to promote the use of images with elements of Nature in teaching Isometries; to verify if the use of images with elements of Nature is a current practice in teaching the sub-area of Isometries, and to demonstrate possible ways to raise awareness of the importance of mathematical rigor through the exploration of real elements of Nature, while being aware of the eventual imperfection of those real elements.

We intend to give answers to the investigative questions: (1) What difficulties are frequently felt by teachers in preparing and teaching the sub-area of Isometries?; (2) What strategies are used by teachers to overcome the difficulties found in teaching the sub-area of Isometries?; (3) Could images with elements of Nature be a motivating and/or facilitating resource in teaching the sub-area of Isometries?.

Hence, as data collection techniques, we have developed an interview to four teachers (two permanent teachers and two temporary teachers, who are presently teaching sixth graders); a pre-interview; a Didactic Intervention with three different moments and a post-interview to sixth grade students. With students, we will also use the non-participant and participant observation.

The dominant area is Geometry and the sub-area in study are Isometries. All participants will have an active role, especially students, during the Didactic Intervention, thus developing and/or reinforcing their knowledge.

All data were gathered by audio recordings, photographs, written records by the researcher teacher, as well as photographs and drawings made by the students.

The results obtained by this research project reveal the difficulties and the strategies found by teachers in Isometries teaching in the scope of the current Basic Education Mathematics Program, in sixth grade, as well as the contribution of the images with elements of Nature to the teaching practice as far as Isometries are concerned, including to involve and to motivate students to learn Mathematics.

Keywords: Mathematics, Natural Science, Didactics, Interdisciplinarity, Isometries, Symmetries, Nature, Basic Education.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO.....	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE GERAL	ix
ÍNDICE DE TABELAS.....	xiii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xv
LISTA DE ABREVIATURAS	xix
1 INTRODUÇÃO.....	21
2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO.....	25
2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	25
2.1.1 O CONHECIMENTO DOS PROFESSORES NA FORMAÇÃO INICIAL E O ENSINO DA MATEMÁTICA.....	25
2.1.2 O ENSINO DA GEOMETRIA.....	30
2.1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA EM PORTUGAL.....	33
2.2 O CURRÍCULO DA MATEMÁTICA	35
2.2.1 O CONCEITO DE CURRÍCULO.....	35
2.2.2 REFORMAS CURRICULARES	37
2.2.3 PROGRAMAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA.....	42
2.3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIAS.....	52
2.3.1 ISOMETRIAS	53
2.3.2 SIMETRIAS.....	59
2.4 A UTILIZAÇÃO EDUCATIVA DAS IMAGENS.....	64
2.4.1 AS CARACTERÍSTICAS DA LINGUAGEM VISUAL.....	64
2.4.2 ENSINAR AS IMAGENS E COM AS IMAGENS	65

2.4.3	PROMOÇÃO DAS IMAGENS NO CONTEXTO EDUCATIVO	67
3	ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO	71
3.1	METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO	71
3.2	INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS UTILIZADOS NO ESTUDO	73
3.2.1	ENTREVISTA	73
3.2.2	OBSERVAÇÕES	74
3.3	SELEÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES	75
3.3.1	PREPARAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DAS ENTREVISTAS.....	78
3.3.2	PREPARAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA	80
3.4	INSTRUMENTOS DE APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS RECOLHIDOS	80
4	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	83
4.1	ACOMPANHAMENTO DAS DIFERENÇAS PROGRAMÁTICAS E CIENTÍFICAS NO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS	83
4.2	DIFICULDADES SENTIDAS PELOS PROFESSORES NA PREPARAÇÃO E LECIONAÇÃO DO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS.....	92
4.3	TIPO DE ESTRATÉGIAS, RECURSOS E INSTRUMENTOS UTILIZADOS NO ENSINO DO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS.....	106
4.4	PROMOÇÃO DO USO DAS IMAGENS COM ELEMENTOS DA NATUREZA	110
4.5	IMPORTÂNCIA DO RIGOR MATEMÁTICO VERSUS A IMPERFEIÇÃO DA NATUREZA	134
4.6	INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE A PRÉ-ENTREVISTA.....	138
4.6.1	PREFERÊNCIAS DOS ALUNOS PARTICIPANTES.....	138
4.6.2	DIFICULDADES SENTIDAS PELOS ALUNOS PARTICIPANTES NO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS	139

4.7	INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE O 1.º MOMENTO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA	154
4.7.1	IMAGENS SELECIONADAS PARA EXPLORAR A REFLEXÃO (AXIAL E/OU CENTRAL).....	154
4.7.2	IMAGENS SELECIONADAS PARA EXPLORAR A ROTAÇÃO	159
4.7.3	IMAGENS CONSIDERADAS SIMÉTRICAS E IDENTIFICAÇÃO DE CADA UMA DAS SIMETRIAS	164
4.7.4	IMAGENS SELECIONADAS PARA DISTINGUIR A REFLEXÃO (AXIAL E/OU CENTRAL) DA SIMETRIA DE REFLEXÃO	168
4.7.5	IMAGENS SELECIONADAS PARA DISTINGUIR A ROTAÇÃO DA SIMETRIA DE ROTAÇÃO	171
4.8	INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE O 2.º MOMENTO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA	178
4.8.1	IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE SIMETRIAS EXISTENTES NAS METADES DE CADA FRUTO	179
4.8.2	CRIAÇÃO, ATRAVÉS DA MANIPULAÇÃO DE FRUTOS, DE DIFERENTES ISOMETRIAS E SIMETRIAS	181
4.9	INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE O 3.º MOMENTO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA	185
4.9.1	FOTOGRAFIAS TIRADAS PELOS ALUNOS PARTICIPANTES DE SITUAÇÕES DO QUOTIDIANO ONDE SE IDENTIFIQUEM CASOS DE ISOMETRIAS E/OU DE SIMETRIAS.....	186
4.10	INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE A PÓS-ENTREVISTA.....	191
5	CONCLUSÕES	195
5.1	CONCLUSÕES POR QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO E OBJETIVOS ORIENTADORES DO ESTUDO	196

5.2	LIMITAÇÕES DO ESTUDO	205
5.3	SUGESTÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES	206
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		207
WEBGRAFIA		215
APÊNDICES.....		217
Apêndice 1		219
Apêndice 2		221
Apêndice 3		222
Apêndice 4		223
Apêndice 5		224
Apêndice 6		226
Apêndice 7		227

INDICE DE TABELAS

Tabela 1: Quadro Comparativo dos Programas de Matemática do 2.º CEB de 1991 e 2007	45
Tabela 2: Simetrias e Transformações Geométricas no NPMEB 2013.....	48
Tabela 3: Resumo Comparativo dos Programas de Matemática do 2.º CEB de 1991, 2007 e 2013	51
Tabela 4: Conhecimento das diferenças programáticas entre o PMEB 2007 e o PMEB 2013	84
Tabela 5: Conhecimento e acompanhamento das mudanças de natureza científica no PMEB 2013	85
Tabela 6: Confronto entre o PMEB 2013 com as MC.....	88
Tabela 7: Articulação das MC com a prática letiva dos professores	90
Tabela 8: Dificuldades sentidas pelos professores na <u>preparação</u> do subdomínio das Isometrias.....	93
Tabela 9: Dificuldades sentidas pelos professores na <u>lecionação</u> do subdomínio das Isometrias.....	95
Tabela 10: Estratégias utilizadas para colmatar as dificuldades encontradas na preparação e lecionação do subdomínio das Isometrias	96
Tabela 11: Dificuldades detetadas nos alunos na compreensão e apreensão do subdomínio das Isometrias.....	98
Tabela 12: <u>Estratégias</u> utilizadas para colmatar as dificuldades encontradas nos alunos	104
Tabela 13: Tipo de estratégias, recursos e instrumentos utilizados no ensino do subdomínio das Isometrias.....	107
Tabela 14: Utilização de imagens na prática letiva.....	111
Tabela 15: Uso de imagens com elementos da Natureza como prática corrente ..	115
Tabela 16: Exploração de imagens com elementos da Natureza	118
Tabela 17: Imagens com elementos da Natureza como uma mais-valia para a prática docente e ensino das Isometrias	123

Tabela 18: Imagens com elementos da Natureza como recurso facilitador e/ou motivador da aprendizagem do subdomínio das Isometrias.....	126
Tabela 19: Importância do rigor matemático versus a imperfeição da Natureza	134
Tabela 20: Preferências dos alunos participantes relativamente aos domínios e subdomínios da Matemática.....	138
Tabela 21: Dificuldades sentidas pelos alunos participantes no subdomínio das Isometrias	140
Tabela 22: O que são Isometrias	142
Tabela 23: Tipos de Isometrias e Simetrias	145
Tabela 24: Diferença entre Reflexão e Simetria de Reflexão.....	149
Tabela 25: Designação atribuída por cada participante a cada uma das imagens..	175
Tabela 26: Opinião dos alunos participantes sobre as atividades da Intervenção Didática	191

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Reflexão (axial) de eixo r.....	56
Figura 2. Rotação de centro C.....	57
Figura 3. Reflexão Central de centro C	58
Figura 4. Reflexão Central ou Rotação de meia volta.....	58
Figura 5. Reflexão Axial.....	59
Figura 6. Simetrias de Reflexão da estrela-do-mar	61
Figura 7. Simetrias de Rotação da estrela-do-mar, de centro O e sentido negativo ..	62
Figura 8. Reflexões construídas pela participante A.	143
Figura 9. Reflexão construída pelo participante D.	148
Figura 10. Rotação construída pelo participante D.	148
Figura 11. Reflexão e de Simetria de Reflexão, respetivamente, construídas pela participante A.	150
Figura 12. Simetria de Reflexão construída pela participante B.	151
Figura 13. Reflexão construída pela participante B.....	151
Figura 14. Reflexão construída pela participante C.....	152
Figura 16. Reflexão construída pelo participante D.	153
Figura 15. Simetria de Reflexão construída pelo participante D.	153
Figura 17. Imagens selecionadas pela participante A para explorar a Reflexão	155
Figura 18. Imagens selecionadas pela participante B para explorar a Reflexão	156
Figura 19. Imagens selecionadas pela participante C para explorar a Reflexão	157
Figura 20. Imagens selecionadas pelo participante D para explorar a Reflexão	158
Figura 21. Imagens escolhidas pela participante A para explorar a Rotação	159
Figura 22. Imagens escolhidas pela participante B para explorar a Rotação	159
Figura 23. Imagens escolhidas pela participante C para explorar a Rotação	160
Figura 24. Imagens escolhidas pelo participante D para explorar a Rotação.....	160
Figura 25. Determinação do centro de Rotação pela participante C	161
Figura 26. Determinação de Rotação (participante D)	162
Figura 27. Determinação do centro e ângulo de Rotação (participante D).....	162

Figura 28. Imagens escolhidas pela participante A, consideradas como imagens simétricas (1ª escolha)	164
Figura 29. Imagens escolhidas pela participante A, consideradas como imagens simétricas (2ª escolha)	164
Figura 30. Imagens escolhidas pela participante B, consideradas como imagens simétricas	166
Figura 31. Imagens escolhidas pela participante C, consideradas como imagens simétricas	166
Figura 32. Imagens escolhidas pelo participante D, consideradas como imagens simétricas	167
Figura 33. Imagens escolhidas pela participante A para explorar a Reflexão e a Simetria de Reflexão	169
Figura 34. Imagens escolhidas pelos participantes B e D para explorar a Reflexão e a Simetria de Reflexão	169
Figura 35. Imagens escolhidas pela participante C para explorar a Reflexão e a Simetria de Reflexão	170
Figura 36. Imagens escolhidas pelas participantes A e B para explorar a Rotação e a Simetria de Rotação	171
Figura 37. Imagens escolhidas pela participante C para explorar a Rotação e a Simetria de Rotação.....	172
Figura 38. Imagens escolhidas pelo participante D para explorar a Rotação e a Simetria de Rotação.....	173
Figura 39. Exemplos de Reflexão e Simetria de Reflexão do participante D, desenhados após o primeiro momento da Intervenção Didática	173
Figura 40. Determinação do ângulo de Rotação (participante A).....	178
Figura 41. Frutos cortados segundo as orientações dos vários participantes	179
Figura 43. Reflexão criada pela participante A.....	182
Figura 42. Rotação criada pela participante A	182
Figura 45. Rotação criada pela participante B.....	183
Figura 44. Reflexão criada pela participante B.....	183

Figura 46. Translação criada pela participante B.....	183
Figura 47. Reflexão criada pela participante C	184
Figura 48. Rotação criada pela participante C.....	184
Figura 50. Rotação criada pelo participante D	184
Figura 49. Simetria de Reflexão criada pelo participante D	184
Figura 51. Simetria de Rotação (participante A).....	186
Figura 52. Simetria de Rotação (participante A).....	186
Figura 53. Simetria de Rotação (participante B).....	187
Figura 54. Simetria de Rotação (participante C.....	187
Figura 56. Simetria de Reflexão (participante D).....	188
Figura 55. Reflexão (participante D)	188
Figura 57. Simetria de Reflexão (participante D).....	188

LISTA DE ABREVIATURAS

APM – Associação de Professores de Matemática

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

CEB – Ciclo do Ensino Básico

ME – Ministério da Educação

MC – Metas Curriculares

NPMEB – Novo Programa de Matemática do Ensino Básico

MEC – Ministério da Educação e Ciência

CNEB – Currículo Nacional do Ensino Básico

DGIDC – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

CA – Cadernos de Apoio

MMM – Movimento Matemática Moderna

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

1 INTRODUÇÃO

É do conhecimento geral, que muitos alunos apresentam falta de motivação e desinteresse pela disciplina de Matemática e, em muitos casos, conduz ao insucesso escolar da mesma. Segundo Ponte (2002), para além destas fragilidades, a grande preocupação do ensino da Matemática é a dificuldade que os alunos apresentam quer em compreender os conteúdos, quer em utilizá-los. A maioria dos alunos vê a Matemática como uma disciplina muito difícil, à qual só os “bons alunos” tiram bons resultados.

A presente investigação ambiciona mostrar que, contextualizando e concretizando os conteúdos a lecionar através da ligação ao mundo que nos rodeia e partindo dos conhecimentos prévios dos discentes, é possível motivar os alunos para a Matemática e combater as dificuldades apresentadas, nomeadamente, na compreensão do subdomínio das Isometrias. Além disso, este estudo não se centra apenas nos alunos, mas também nos professores, nomeadamente pretendemos identificar dificuldades e estratégias encontradas por estes no ensino das Isometrias no atual PMEB, no segundo Ciclo do Ensino Básico (2º CEB).

Durante a escolha do tema, existia uma motivação pessoal para o estudo da Geometria, mais propriamente no subdomínio das Isometrias. A homologação de um reajustamento ao PMEB introduziu alterações programáticas e científicas neste subdomínio, colocando os professores perante novos desafios (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2012). É importante referir que para além das dificuldades que os docentes possam sentir, também os alunos se encontram perante novas metas e exigências que, devido à sua maturidade e fase de desenvolvimento, poderão não ser tão simples de atingir. Assim, houve desde logo um interesse pessoal em articular o tema escolhido com um recurso que proporcionasse diferentes experiências de aprendizagem.

O desenvolvimento da pesquisa trouxe consigo a exigência de uma seleção mais criteriosa e inovadora, também com o objetivo de explorar situações que tornassem o estudo mais relevante para a prática docente. Desta forma, aspirámos

consegui-lo através de elementos da Natureza, aos quais temos acesso em locais tão simples como o recreio, o nosso jardim ou o parque onde gostamos de nos divertir, possibilitando a aplicação de conhecimentos em contextos diferentes do da sala de aula. Uma vez que não existe apenas uma maneira de ensinar nem de aprender, esta investigação pretende utilizar as imagens com elementos da Natureza como o meio interdisciplinar e promotor de uma visão diferente, mais alargada e motivadora da Matemática, a fim de proporcionar a aquisição de conhecimentos.

Considerando que o processo de ensino e aprendizagem só se desenvolve com a interação entre professores e alunos, enunciamos assim o nosso problema de investigação: *Em que medida as imagens com elementos da Natureza poderão contribuir para a prática docente no ensino das Isometrias no 6º ano de escolaridade?''*.

De forma a encontrar a solução para o problema mencionado, definimos os objetivos orientadores seguintes:

Objetivo 1: diagnosticar as dificuldades encontradas na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias.

Objetivo 2: enumerar algumas atitudes metodológicas usadas pelos professores para o ensino das Isometrias.

Objetivo 3: promover o uso das imagens com elementos da Natureza no ensino das Isometrias.

Objetivo 4: verificar se o uso das imagens com elementos da Natureza é uma prática corrente para o ensino do subdomínio das Isometrias.

Objetivo 5: evidenciar possibilidades de consciencialização da importância do rigor matemático através da exploração de elementos reais da natureza, tendo consciência da eventual imperfeição dos elementos reais.

Neste sentido, no âmbito da problemática estabelecida, pretendemos dar resposta às seguintes questões de investigação:

1 – Que dificuldades são frequentemente sentidas pelos professores na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias?

2 – Quais as estratégias utilizadas pelos docentes para colmatar as dificuldades encontradas na leção do subdomínio das Isometrias?

3 - Poderão as imagens com elementos da Natureza ser um recurso motivador e/ou facilitador no ensino do subdomínio das Isometrias?

O presente estudo está dividido em cinco capítulos.

O primeiro e presente capítulo destina-se à introdução do tema, das motivações para a escolha do mesmo, do problema e das questões de investigação. Neste capítulo também se encontram definidos os objetivos e questões de investigação orientadores do estudo.

No segundo capítulo, desenvolve-se o *Enquadramento Teórico* deste projeto, sobre o qual se realizou pesquisa bibliográfica acerca de grandes temáticas que sustentam a presente investigação, tal como: Educação Matemática; Currículo da Matemática; Transformações Geométricas e Simetrias e Utilização Educativa das Imagens.

Na secção dedicada à Educação Matemática, abordamos o conhecimento dos professores na formação inicial e no ensino da Matemática, o ensino da Geometria e o ensino da Geometria em Portugal. Na secção sobre o Currículo da Matemática apresentamos o conceito de currículo, as reformas curriculares e os Programas curriculares de Matemática. Nas Transformações Geométricas e Simetrias, descrevemos e caracterizamos as Isometrias e Simetrias estudadas no 2.ºCEB. Por fim, na secção sobre a Utilização Educativa das Imagens, debruçamo-nos sobre as características da linguagem visual, ensinar as imagens e com imagens, a promoção das imagens ao contexto educativo.

O terceiro capítulo deste estudo diz respeito ao *Enquadramento Metodológico*, onde se apresenta a metodologia de investigação, os instrumentos de recolha de dados utilizados no estudo, a seleção e caracterização dos participantes, que inclui a preparação e implementação das entrevistas e da Intervenção Didática, e os instrumentos de apresentação e análise dos dados recolhidos.

No quarto capítulo é feita a *Apresentação e Discussão dos Resultados*.

Por fim, no quinto capítulo são apresentadas as *Conclusões* deste estudo, onde se encontram as respostas às questões de investigação e aos objetivos da mesma, limitações e sugestões para o desenvolvimento de futuras investigações.

Posteriormente, encontram-se as referências bibliográficas e a apresentação dos apêndices.

2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1.1 O CONHECIMENTO DOS PROFESSORES NA FORMAÇÃO INICIAL E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Segundo a Associação de Professores de Matemática (APM) “A formação inicial dos educadores de infância e dos futuros professores de Matemática dos ensinos básico e secundário, em particular no que respeita à sua componente matemática, tem uma importância determinante na qualidade da formação matemática dos jovens” (2007, p. 91).

Deste modo, tentamos reunir um conjunto de opiniões e recomendações de vários autores alusivas a este tema e à adequação dos cursos dessa mesma formação, bem como linhas de pensamento relativas ao ensino da Matemática. No que respeita a este último tópico, haverá maior incidência sobre a Geometria uma vez que é o tema tratado na presente investigação.

Relativamente aos conceitos básicos e estruturantes da aprendizagem, verificou-se que vários alunos que ingressaram e continuam a ingressar no ensino superior, desde 2007/2008, nos cursos de Licenciatura em Educação Básica, demonstram uma deficiência neste campo (Couto & Vale, 2012). Assim, sentiu-se necessidade de investigar como é que o ensino da matemática pode facultar a sua aprendizagem em conjunto com uma aprendizagem sobre ela mesma e como desenvolver uma formação matemática mais sólida e didática (Couto & Vale, 2012). “Uma das finalidades da formação inicial de professores é desenvolver os conhecimentos e competências práticas nos professores, não só para que venham a reproduzi-las, mas, sobretudo, para que as suas práticas sejam mais dinâmicas, interativas e reflexivas” (Vale, 2002, citada por Couto e Vale, 2012, p.208).

Os “saberes sobre Matemática, a “natureza desses saberes” e a “atitude face à Matemática” são as três ordens que Leonor Santos (APM, 2007) apresenta sobre a componente matemática na formação inicial dos professores e que vão ao encontro

das autoras anteriores. No que diz respeito à primeira exigência, Leonor Santos chama à atenção para o facto dos alunos da formação inicial de professores nem sempre terem um conhecimento matemático base como seria de esperar: “um nível adequado de conhecimentos para o ensino envolve sermos capazes de falar sobre a Matemática, não apenas descrevendo os passos/etapas de um dado procedimento (...) envolve sabermos as razões e as relações, sermos capazes de explicar aos outros por que é assim, bem como relacionar as ideias particulares ou processos” (APM, 2007, p.91). Simplificando, a autora defende que os temas matemáticos a estudar não devem ser alargados nem mais exigentes, mas sim estudados e trabalhados de forma mais aprofundada e assume que “o conhecimento matemático do professor é diferente do de um utilizador da Matemática.” (APM, 2007, p.91). A opinião de Eduardo Veloso (APM, 2007) é similar. Este considera a convicção como a principal linha de força a estar presente na formação matemática dos futuros professores. Ou seja, convicção por parte dos formadores e de quem organiza essa formação, de que a formação matemática de professores tem características próprias, afirmando que “a formação de um professor de Matemática não pode ser ‘a mesma Matemática que a dos outros’ mais pedagógica, didáctica, etc” (APM, 2007, p.92), destacando o papel das definições “que pode não interessar na formação matemática dos engenheiros, mas é central para a profissão de professor de Matemática.” (APM, 2007, p.92).

Ainda de acordo com a opinião de Leonor Santos (APM, 2007), Eduardo Veloso (APM, 2007) considera que a preparação matemática dos professores é insuficiente para um desempenho admissível da profissão. Este afirma que “o desenvolvimento da Matemática como ciência tem consequências nos conteúdos das cadeiras que fazem parte do seu ensino universitário (...)” (APM, 2007, p.93). O que o autor pretende com esta afirmação é explicar que o ensino universitário de Matemática, ignorando a que alunos esta se destina, aborda os tópicos matemáticos tendo em conta a investigação matemática atual ou as aplicações modernas da mesma. Isto é, a abordagem desses mesmos tópicos direcionada e adequada aos alunos do ensino básico e secundário acaba por ser ignorada, deixando os novos professores de Matemática mal preparados para a sua função. Eduardo Veloso (APM, 2007) acrescenta que, os novos professores

de Matemática têm ainda “imensas dificuldades para corresponder às novas exigências que uma atitude inovadora perante a educação lhes coloca” (p. 93). Já a autora Suzana Nápoles (APM, 2007), salienta que é necessário ter em consideração aspetos que dizem respeito à compreensão profunda da Matemática que se vai ensinar, mencionando que para ensinar o que quer que seja, é preciso que o professor saiba muito para além daquilo que pretende ensinar. Refere ainda que outro aspeto essencial na formação inicial é a compreensão da natureza da própria Matemática e que esta se reflete na prática letiva.

Gomes (2012) destaca o trabalho desenvolvido por Shulman, considerado por muitos, um dos autores mais influentes sobre este assunto. Num dos seus trabalhos, referente ao conhecimento do conteúdo para os professores, enuncia três categorias: o “conhecimento da matéria”, o “conhecimento pedagógico do conteúdo” e o “conhecimento curricular (Gomes, 2012). “Quase todos os estudos concordam que o conhecimento dos professores é essencial para o ensino e que a sua falta parece comprometer o ensino e, portanto, a aprendizagem” (Gomes, 2012, p.234).

Relativamente à natureza matemática, segundo aspeto da ordem de exigência considerada por Leonor Santos (APM, 2007), a autora verificou que, apesar de os alunos possuírem os conhecimentos matemáticos necessários para responder a uma dada situação, não conseguem dar resposta no caso de lhes ser apresentada uma nova e diferente situação. Ou seja, quando não têm sucesso com a utilização de um processo formal como resolução da situação, não têm capacidade e encontrar uma estratégia alternativa. Segundo a autora “o aluno só poderá compreender a natureza da atividade matemática se lhe for dada a oportunidade para ele viver a experiência de fazer Matemática” (APM, 2007, p.91). A esta experiência de fazer Matemática está ligada a terceira ordem de exigência apresentada pela autora. Ou seja, a atitude face à Matemática pode desenvolver-se através da oportunidade de ter experiências matemáticas.

Sobre o défice no conhecimento dos professores de Matemática, Leonor Santos (APM, 2007) é da opinião de que este se encontra “na evolução do que é o entendimento do que é ensinar Matemática” (p.93) Isto é, as expetativas que se criam

hoje em dia num professor são diferentes das do passado, os novos desafios que lhes vão sendo colocados são cada vez maiores, bem como a necessidade de adequação da prática letiva, o que implica a necessidade de refletir sobre a formação inicial de professores de matemática e sobre as diversas estratégias, técnicas e/ou atividades que se poderão utilizar para aprender, ensinar e fazer Matemática.

Entrando no âmbito da Geometria, Cristina Loureiro (2007) reitera esta mesma opinião, de que é necessário encontrar novas formas de a apresentar aos professores para, posteriormente, ser aplicada na sala de aula. A Geometria tem características essenciais como a visualização, representação, raciocínio e comunicação. Todas elas são capacidades que estão envolvidas na sua aprendizagem, sendo necessário serem trabalhadas ao longo de toda a aprendizagem do aluno. Por sua vez, Suzana Nápoles (APM, 2007) expõe várias facetas da Matemática que os futuros professores devem entender:

a Matemática como arte, em que se conjugam preposições, se estabelecem conexões e se encadeiam raciocínios para a construção de resultados; a Matemática como instrumento, tanto para aplicações no dia-a-dia, como na resolução de problemas tecnológicos, ou na formulação de teorias científicas; a Matemática como linguagem precisa e geral; a Matemática como desafio, que tanto pode revestir aspectos essencialmente recreativos (...) como decorrerem da constante necessidade de ir mais além na procura de respostas para o mundo que nos rodeia (p. 92).

Quando comparamos a investigação sobre o ensino e aprendizagem da Geometria com as investigações feitas sobre Números e Operações ou Álgebra, verificamos que a Geometria é um assunto menos trabalhado (Gomes, 2012; Loureiro, 2007). No que diz respeito ao conhecimento geométrico dos futuros professores, a

literatura revela que “estes apresentam baixos níveis de conhecimento geométrico” (Gomes, 2004; Jones, Mooney & Harries, 2002, citado por Gomes, 2012). Gomes (2012) faz, também, referência ao estudo de Hershkowitz e Vinner (1984), onde se compara o conhecimento das crianças com o conhecimento de futuros professores. Descobre-se que “os professores não tinham conhecimento geométrico básico nem capacidade de raciocínio analítico e além disso, os professores tendem a apresentar padrões similares de erros e concepções erradas aos dos alunos” (Gomes, 2012, p.236). Segundo Costa (2005), os professores que aprenderam Geometria através dos currículos que a negligenciaram, ficaram com lacunas no conhecimento básico deste tema e, assim, tendem conseqüentemente a descuidar o ensino da geometria aos alunos. Em conformidade,

Blanco e Berrantes (2003) apelam à necessidade de se prestar mais atenção à formação inicial dos professores como elemento chave para se produzir mudanças no panorama educativo. Verifica-se frequentemente que os estudantes em formação inicial repetem as mesmas conceptualizações erradas adquiridas durante a sua escolaridade e estas ideias têm tendência a tornar-se implícitas, estáveis e resistentes à mudança (Tempera, 2010, p.13).

Em suma, foi-nos possível constatar que a formação inicial dos professores tem um grande impacto na formação matemática dos nossos alunos, sendo necessário refletir sobre a mesma. Esta reflexão além abranger todos os conteúdos matemáticos e a relação que os professores e futuros professores têm com a Matemática, deve também contemplar a prática letiva atual e os meios e/ou técnicas a utilizar para essa prática. Depois da sua formação inicial, os professores devem ter os seus conhecimentos e competências plenamente desenvolvidos para que, posteriormente, as suas aulas sejam mais didáticas, mais dinâmicas e ponderadas, promovendo a

aprendizagem matemática sólida e o sucesso da disciplina. Para tal, os professores têm que saber falar sobre Matemática, relacionando ideias e processos, e explicar o porquê das coisas. Assim, é necessário que a formação matemática dos professores tenha as características pedagógico-didáticas adequadas à sua futura função, ou seja, que esta esteja centrada no exercício da profissão e no público a que se destina. Como expusemos anteriormente, a formação matemática de um professor não pode ser igual à de pessoa ou profissão utilizadora da Matemática.

Ainda nesta linha de pensamento, atualmente, os professores estão perante desafios e exigências muito diferentes. Basta-nos debruçar sobre as controvérsias da implementação do PMEB 2013 e as respetivas Metas Curriculares (MC) num curto espaço de tempo, a curta duração do PMEB 2007 e olhar para a sociedade e os nossos jovens, para perceber a necessidade inadiável de adequar a prática letiva, refletindo não só sobre a formação inicial de professores, mas também na execução de ações de formação para atualização e esclarecimento dos atuais professores em atividade. É também urgente discutir estratégias e técnicas de ensino e refletir sobre as alterações nos conteúdos programáticos, articulando estas duas ideias, uma com a outra.

No seguimento desta ordem de ideias e visto que a Geometria é o tema central deste trabalho e, como referimos anteriormente, um dos temas menos estudado quando comparado com outros, consideramos importante para o presente estudo, apresentar uma análise sobre o ensino da Geometria de uma forma mais generalizada mas também sobre o ensino deste mesmo tema em Portugal.

2.1.2 O ENSINO DA GEOMETRIA

A aprendizagem matemática “é como um edifício de vários andares. Os alicerces podem ser invisíveis a partir dos pisos superiores, mas são eles que os sustentam e fazem com que o conjunto de pisos forme um todo coerente” (Ma, 2009, p.25). Assim, o ensino da Geometria deve começar desde cedo, uma vez que o que as crianças aprendem sobre as formas é insuficiente (Tempera, 2010). Esta educação

antecipada em Geometria pretende desenvolver capacidades “como a visualização, a verbalização, a construção e manipulação de objectos geométricos, a organização lógica do pensamento matemático e a aplicação dos conhecimentos geométricos a outras situações” (Matos & Serrazina, 1996, citado por Tempera, 2010, p.6). Segundo Matos (1999), o ensino da Geometria deve iniciar-se concedendo aos alunos liberdade para organizar fenómenos espaciais e para manipular essas formas de organização e não por familiariza-los com estruturas matemáticas amplas e estranhas à sua realidade.

Segundo Maia (2014), o Movimento da Matemática Moderna (MMM) e a publicação das Normas para o Ensino e Aprendizagem da Matemática pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), foram alguns dos grandes movimentos que resultaram em reformas curriculares. Para estudarmos a influência destes e outros movimentos no ensino da Geometria, debruçamo-nos em vários autores, como por exemplo, Eduardo Veloso (1998), que expõe que, antes do MMM, as construções geométricas e o estudo da Geometria de Euclides (no plano e no espaço) eram as componentes principais do currículo da Geometria. O estudo da Geometria Euclidiana pretendia levar os alunos, dos 12 aos 14 anos, a adquirir hábitos de raciocínio não só rigoroso mas também metódico e ordenado, demonstrando que a esta seria a melhor forma de os alunos “aprenderem a demonstrar e também a apreciar a matemática como uma construção lógica, perfeita” (Veloso, 1998, p.19). Durante dois anos estudava-se a Geometria no plano, passando-se depois à Geometria no espaço. Segundo o autor, este método não era bem aceite pela maioria dos alunos, “ficando a odiar geometria para o resto da vida” (Veloso, 1998, p.19). Veloso (1998) destaca também que, antes do MMM, apenas se dava importância à Geometria analítica, uma vez que o objetivo do ensino era a preparação para o cálculo infinitesimal.

Este movimento foi crucial, pois defendia a necessidade de alterações curriculares essenciais para uma renovação do ensino da Matemática. Foi por esta altura que a resolução de problemas começou a ser vista como forma dos alunos adquirirem o conhecimento (Mascarenhas, 2011).

Freudenthal é exposto como a maior influência no “regresso da geometria”, considerando que “geometria não é apenas dedução” (Freudenthal, 1973, citado por Veloso, 1998, p.25). Em alguns dos seus tópicos, Freudenthal responde a algumas questões como “Geometria é compreender o espaço. Compreender o espaço em que a criança vive, respira, se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor.”, acrescentando que “a geometria presta-se, mais do que outros temas, para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes.” (Freudenthal, 1973, citado por Veloso, 1998, pp. 25-26)

Veloso (1998) salienta dois, de vários pontos que Freudenthal dá importância:

- a necessidade de dar tempo e oportunidade ao aluno para organizar as suas experiências espaciais, isto significa que não deve ser apresentada ao aluno uma organização preconcebida pelo professor ou pelo autor do manual, já toda completa, com todos os conceitos, definições e deduções;
- a conveniência de proceder a pequenas organizações locais da geometria; isto significa que em vez de se pretender apresentar ao aluno uma (pseudo) organização global da geometria, um sistema axiomático completo, o que deve ser proporcionado aos alunos são experiências de organização local, em que um pequeno número de resultados conjecturados por eles sejam, por meio de curtas deduções, interligados logicamente (p.27).

Também as Normas para o Currículo do NCTM (1989) foram “um marco essencial no movimento de recuperação da geometria como tema relevante da matemática escolar” (Veloso, 1998, p.28), uma vez que concentra a rejeição da situação do ensino da matemática depois dos anos do MMM e a proposta de uma nova metodologia do ensino da Geometria e alteração dos seus Programas. O objetivo desta visão renovada é “dar maior relevo aos pontos seguintes:

Compreensão dos objetos geométricos e suas relações, e utilização da geometria na resolução de problemas;

- Integração da geometria em todos os temas e em todos os anos de escolaridade;
- Abordagem da geometria por intermédio das coordenadas e das transformações geométricas;
- Desenvolvimento de curtas sequências de teoremas (retomando portanto as ideias de Freudenthal sobre a organização matemática);
- Argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos;
- Explorações em computador de figuras bi e tridimensionais;
- Geometria no espaço;
- Aplicações ao mundo real e modelação.”

(Normas do NCTM, cit. Veloso, 1998, pp.28-29)

2.1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA EM PORTUGAL

Sobre este tema, irão ser explorados os reajustamentos dos PMEB de 1990 e 2007, bem como as alterações em vigor no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) 2013 e respetivas MC no próximo capítulo, precedido pela abordagem sobre o conceito de currículo. Assim, consideramos que, neste ponto, é importante debruçar-nos nos anos 70 e 80, uma vez que nos permite retratar não só as remodelações do ensino da Matemática, como também os momentos que impulsionaram a Geometria em Portugal.

Como tivemos oportunidade de verificar anteriormente nas palavras de Veloso (1998), o ensino da Geometria em Portugal, estava associado a uma memória negativa. Outros autores, como Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), salientam que, durante as décadas de 70 e 80, a Geometria era vista com muitíssimo pouco interesse no que concerne a prosseguir os estudos.

É dito por Veloso (1998) que os Programas de Matemática sofreram várias remodelações e ajustamentos durante os anos 70 e 80. O autor também explica que, quando se intensifica e organiza esta reforma do ensino da Matemática, verifica-se que é dada prioridade às questões transversais do currículo, como a resolução de problemas, utilização dos computadores e calculadoras, e não são abordadas questões metodológicas específicas da Geometria. Assim, a fundação da APM, em 1986, foi um acontecimento que impulsionou a Geometria, dedicando os seus dois primeiros anos à renovação curricular. Esta associação, para além de publicar vários artigos na revista “*Educação e Matemática*”, também se tornou importante pela realização de inúmeras sessões práticas sobre Geometria (Veloso, 1998).

No entanto, no final dos anos 80 / início da década de 90, foram homologados novos Programas para as diferentes disciplinas. Assim, o papel da Geometria foi repensado e produziu-se o documento *Renovação do Currículo de Matemática* pela APM, contendo princípios e orientações curriculares para a Matemática e sugerindo uma nova perspetiva relativamente aos objetivos para o seu ensino e atividades de aprendizagem (Mascarenhas, 2011; Tempera, 2010). Foram, também, discutidas ideias como a integração das novas tecnologias e o papel do professor. No encontro de Vila Nova de Mil Fontes, uma das orientações curriculares apresentadas foi a resolução de problemas, vista como uma atividade criativa (Mascarenhas, 2011).

A Geometria regressa, então, ao ensino da Matemática em Portugal, através da utilização dos computadores, nomeadamente com a utilização de alguns programas.

O aparecimento do programa LOGO, de Seymour Papert, com a possibilidade dada aos utilizadores de darem instruções à tartaruga para desenhar figuras geométricas, desencadeou um movimento crescente de interesse pelas questões e problemas da geometria plana. Esse movimento de interesse ampliou-se com o aparecimento

do Projecto Minerva e com a realização das Semanas do LOGO (Veloso, 1998, p.32).

Como já foi referido, atualmente vigora em Portugal o NPMEB 2013 e as respetivas MC. Este Programa apresenta três finalidades, cinco capacidades transversais, quatro domínios de conteúdos e, para o 2.º CEB, requer quatro desempenhos que estão especificados nas MC. No capítulo seguinte, por considerarmos essencial para a presente investigação, exploramos todos os itens referidos.

2.2 O CURRÍCULO DA MATEMÁTICA

2.2.1 O CONCEITO DE CURRÍCULO

O conceito de *Currículo* é usado com vários significados e, ao longo do tempo, têm sido apresentadas várias definições. Apesar do esforço para uma definição consensual de Currículo, ainda não se atingiu o desfecho pretendido, não existindo uma definição única para este termo. Ou seja, este é definido dependendo do sentido que o autor lhe pretende dar. “É um conceito que admite uma multiplicidade de interpretações e teorizações quanto ao seu projeto de construção e mudança” (Roldão, 1999, p. 43).

Alcino Vilar (2006) cita alguns autores como Stenhouse, que define currículo como “a tentativa para comunicar os princípios e traços essenciais de um propósito educativo, de forma a que este permaneça aberto à discussão crítica e possa ser efectivamente trasladado para a prática” (p. 1). e Pérez, para quem o currículo é “a especificação didáctica de uma proposta educativa susceptível de orientar a prática” (p. 1). Para Roldão (1999), currículo é como um “conjunto de aprendizagens consideradas necessárias num dado contexto e tempo e à organização e sequência

adoptadas para o concretizar ou desenvolver” (p. 43). Completando estas ideias, o autor Gimeno-Sacristán (2007) refere que:

o currículo é uma prática e não um objecto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e dos jovens, que tão pouco se esgota na parte explícita do processo de socialização cultural nas escolas. (...) É uma prática que se expressa em comportamentos práticos diversos (Gimeno-Sacristán, 2007, p. 16).

Por fim, a APM (APM, 2009) define currículo como um

conjunto organizado de objetivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação. (...) Um currículo, seja qual for, assenta e traduz um conjunto de premissas teóricas gerais que definem a sua filosofia. Estas premissas do currículo que aqui chamamos pressupostos, princípios e orientações, vão de certo modo, determinar, por um lado a sua organização, e por outro o significado, conteúdo, e alcance das suas componentes (objectivos, metodologias, conteúdos e avaliação). (APM, 2009, p. 15).

O processo de construção de currículo, obriga que o currículo prescrito esteja em concordância com o projeto curricular, implicando que os professores interpretem, alterem ou procedam à revisão e adaptação, consoante as suas próprias perspetivas, concepções curriculares e outras características individuais. Este processo deve resultar no currículo em ação, proporcionando a todos os alunos a aquisição das aprendizagens básicas e essenciais sob a forma de aprendizagens contextualizadas (Diogo & Vilar, 1999).

Em suma, e por outras palavras, o conceito de *currículo* está em constante construção e esta assenta num conjunto de práticas, de processos, de transformações e mudanças que visam dar a resposta mais adequada aos contextos educativos.

No presente trabalho, não serão abordadas mais questões relativas ao currículo e às suas várias concepções, mas partiremos para o estudo das reformas curriculares, nomeadamente dos reajustamentos ao PMEB.

2.2.2 REFORMAS CURRICULARES

As reformas curriculares resultam da necessidade de atualizar os elementos que constam no currículo, com a intenção de que os alunos consigam dar uma resposta mais eficaz às ambições da sociedade (Maia, 2014). O anterior Programa (1990, para o 1.º CEB, e 1991, para o 2.º e 3.º CEB) há muito tempo que necessitava de ser revisto (Tinoco, 2012). Em dezembro de 2007, há a homologação de um reajustamento ao PMEB (Ponte et. al, 2007). Em 2012, são publicadas as novas MC e, por fim, é homologado, em 17 de junho de 2013, um NPMEB, já em harmonia com as novas MC (MEC, 2012).

Quando o PMEB 1991 entra em vigor, foram publicados cinco documentos: um para o 1.º CEB, não só com o Programa de Matemática mas também de todas as outras áreas científicas, dois para a Matemática do 2.º CEB e outros dois para a Matemática do 3.º CEB.

Na década de 90, surgiram muitas críticas aos Programas de Matemática, resultantes da não referência às atividades de investigação. Outro motivo que influenciou as práticas educativas, foi o desenvolvimento das ciências e da tecnologia, que implicaram várias mudanças no mundo (Mascarenhas, 2011). No volume II do Programa do 2.º CEB é referido que “relativamente aos programas anteriores, a alteração fundamental consiste em serem considerados conteúdos de aprendizagem tanto os conhecimentos a adquirir como as atitudes e as aptidões a desenvolver, o que

implica necessariamente uma mudança de métodos” (Ministério da Educação [ME], 1991, p. 171).

Segundo Serrazina e Oliveira (2005), se tivermos em conta a importância dada a uma educação para todos e à aprendizagem ao longo da vida, a escola não pode apenas transmitir o saber. É necessário que seja capaz de ensinar os alunos a utilizá-lo, a transferi-lo e a mobilizá-lo de forma a suportar as suas decisões. Referem, ainda, que estas exigências marcaram uma nova mudança no que diz respeito à educação. Assim, a reorganização curricular do ensino básico continuou com a publicação do Decreto-Lei n.º 6/2001. Ainda nesse ano, foi publicado o documento Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB), um documento oficial que passou a existir em conjunto com os Programas das disciplinas, que permaneceram em vigor, tal como foram escritos, desde 1991 até 2010 (ME, 2001). O CNEB, comum a todas as disciplinas, refere que as experiências de aprendizagem devem ser diversas: atividades de investigação, resolução de problemas, realização de projetos e jogos. Salaria, ainda, que durante estas experiências de aprendizagem, os alunos devem utilizar tecnologias e materiais manipuláveis (ME, 2001).

Uma vez que o PMEB era datado do início dos anos 90, houve necessidade de ser revisto. Assim, e atendendo às dificuldades e necessidades diagnosticadas no ensino da Matemática, foi elaborado um reajustamento do mesmo, em 2007, por uma equipa de especialistas e investigadores das áreas da Matemática e da Educação Matemática, da Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do ME. Em dezembro de 2007 é, então, homologado um NPMEB. Neste novo documento, o PMEB 2007, exigiu-se que a escola ministrasse uma formação matematicamente mais rígida, que permitisse a todos os alunos compreender e utilizar a Matemática noutras disciplinas e no quotidiano. No entanto, o ME decidiu que este seria implementado, em todo o país, apenas a partir de setembro de 2010 (Mascarenhas, 2011). Assim sendo, foi apenas colocado em prática, de forma experimental, em algumas escolas do ensino básico que mostraram interesse em participar no estudo da implementação do mesmo. No ano letivo 2008/2009, participaram 40 turmas-piloto: 10 turmas do 1.º ano do 1.º CEB; 10 turmas do 3.º ano do 1.º CEB; 10 turmas do 5.º

ano do 2.º CEB; e, 10 turmas do 7.º ano do 3.º CEB. Entrou em vigor, faseadamente, em todas as escolas, no ano letivo 2010/2011 (Mascarenhas, 2011). Apesar da elaboração do CNEB ter já introduzido modificações importantes, este reajustamento tornou-se necessário para corrigir os principais problemas existentes, ou seja, a partir do Programa antigo, foi elaborado o PMEB 2007 (Ponte et. al, 2007), “introduzindo mudanças mais ou menos profundas nos aspectos que se consideram mais importantes” (Ponte & Sousa, 2010). No entanto, esta ideia é contrariada por outros autores. Por exemplo, Maia (2014) faz referência a alguns autores, destacando Kilpatrick que, por sua vez, afirmava que o novo Programa parecia não ser apenas uma atualização do anterior, visto que: as finalidades e os objetivos tinham formulações completamente novas; as capacidades transversais apareciam como complemento dos conteúdos matemáticos e os temas eram organizados em quatro eixos, que cruzavam os três ciclos de escolaridade.

Com a publicação do despacho n.º 5165-A de 16 de abril de 2013, é revogado o PMEB 2007 e adotam-se as MC como referência obrigatória a partir do ano letivo 2013/2014 (Trindade, 2014). Apesar do ME ter afirmado que o PMEB 2007 não iria ser alterado, viemos a constatar que as novas MC organizam um Programa muito distinto e que contraria o anterior, quer ao nível da estrutura e lógica, bem como no que respeita aos conteúdos matemáticos (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012). Estas nomeiam uma vasta lista de objetivos muito específicos e definidos para cada tópico matemático. Para além de fracionar os tópicos propostos no PMEB 2007, acrescenta novos tópicos, o que “não seria negativo, se representasse um aperfeiçoamento do Programa existente. Infelizmente, representa um tremendo retrocesso, que não deixará de causar sérios danos no ensino da disciplina” (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012, p. 3). Acresce ainda, o facto de os objetivos não mencionarem aspetos do conhecimento e da experiência matemáticos nem o desenvolvimento de capacidades matemáticas dos alunos (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012).

Segundo Rocha e Fonseca (2014), com a implementação do NPMEB 2013, juntamente com as MC e os Cadernos de Apoio (CA), os professores de Matemática encontraram-se perante um novo desafio e previram-se alguns constrangimentos

como, por exemplo, a inexistência de uma fase de adaptação adequada dos documentos, tendo todo o procedimento decorrido num curto espaço de tempo, sem esclarecimentos nem reflexões que envolvessem todas as partes interessadas e a formação que existiu, antes e durante a sua implementação, foi dirigida apenas a um professor por ciclo de cada escola ou agrupamento, revelando-se escassa e ineficiente. Segundo as mesmas autoras, surgiram outros constrangimentos no dia-a-dia da sala de aula, nomeadamente, a dificuldade em gerir os efeitos de ter dois manuais diferentes (uns alunos apresentavam o manual referente ao PMEB 2007 e outros ao PMEB 2013).

Tudella (2014) recolheu opiniões de vários colegas que passaram pela implementação do PMEB 2013, dando a conhecer frases como:

Os alunos não conseguem perceber, nem aprender o que se pretende'; 'Não é adequado'; 'Os conteúdos são imensos e difíceis'; 'Não há tempo para trabalhar tudo,... muito menos para trabalhar com qualidade'; 'Os alunos sentem-se perdidos e se já havia alunos a desistirem da Matemática então, com estes conteúdos tão cedo, é um descalabro!' (Tudella, 2014, p. 4).

Tudella (2014) explora um pouco mais, mas desta vez tendo em consideração a sua própria experiência com alunos do 5.º ano de escolaridade. Dentro das várias ideias que o autor apresenta, destacamos:

- a dificuldade de gestão do Programa;
- a dificuldade de gestão do tempo destinado a cada tema (muitos conteúdos a ser lecionados em muito pouco tempo);
- os conteúdos bastante complexos relativamente à faixa etária - "Na minha opinião, não é possível ensinar todos estes conteúdos, que são bastante complexos, sobretudo nesta faixa etária, e em tão pouco tempo" (Tudella, 2014, p. 5);

- as várias alterações introduzidas ao nível dos conteúdos (que iremos analisar mais adiante, comparando os vários Programas relativamente ao conteúdo das Transformações Geométricas e as Isometrias no Plano, uma vez que a presente investigação se centra no mesmo);
- a desvalorização da compreensão - “O PMEB2013 contém centenas de descritores mas raras vezes se refere a compreensão, a não ser para destacar o seu «progresso» (...) Será possível aprender agora e compreender mais tarde?!” (Tudella, 2014, p. 5);
- a desvalorização da resolução de problemas.

Relativamente à resolução de problemas e em concordância com Tudella, nas
MC

A resolução de problemas é limitada ao papel de aplicação de conhecimentos e o raciocínio e comunicação são indicados na introdução das metas como ‘indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados’ (p. 1) e nunca mais referidos (...) os responsáveis pelas metas curriculares apresentam a sua visão sobre a resolução de problemas que encaram como simples atividade de aplicação de conhecimentos, prévia e isoladamente aprendidos (...) que ignora não só que os alunos são capazes de construir estratégias próprias para resolver problemas, como através desse processo se apercebem do significado e alcance de certos conceitos e representações matemáticas (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012, pp. 9-10).

No que diz respeito do domínio da Geometria, o PMEB 2007 “tem como ideia fundamental o desenvolvimento do sentido espacial, com ênfase na visualização” (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012, p. 7), através da identificação e compreensão

das propriedades geométricas. Estes termos não se encontram presentes nas metas, mas “abundam as referências a terminologia e a conhecimentos matemáticos inexistentes no programa e desadequados neste nível de escolaridade” (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012, p. 7). Este último caso faz-nos concluir que existe uma ênfase na memorização despropositada de terminologia em detrimento da noção de compreensão de termos e conceitos e não oferece qualquer relevo à evolução do raciocínio geométrico.

Segundo Ponte, Guimarães e Serrazina (2012), constata-se uma “exigência de conhecimentos para além do programa” (p. 8). No que respeita à Geometria, “são numerosos os exemplos de conhecimentos matemáticos completamente à margem do programa a par de outros que são antecipados para o ciclo anterior” (Ponte, Guimarães & Serrazina, 2012, p. 8).

Como já referimos, o PMEB 2007 começou a ser implementado no ano letivo de 2008/2009 com turmas-piloto, mas só em 2012/2013 todos os anos de escolaridade se encontravam a trabalhá-lo. Desta forma, e tendo em conta que o PMEB 2007 esteve em vigor por tão pouco tempo e os constrangimentos anteriormente mencionados, quer sobre as MC, bem como sobre a implementação do PMEB 2013, verificamos que as preocupações prognosticadas com a implementação deste NPMEB (2013) em tão escasso tempo, foram reavivadas pela confusão, pelas dificuldades, pelas dúvidas e pelo descontentamento que também subsistiram desde cedo.

Nesta ótica, iremos destacar as principais e mais importantes alterações sofridas, considerando pertinente darmos especial enfoque às mudanças no domínio da Geometria, mais especificamente no subdomínio das Isometrias no Plano.

2.2.3 PROGRAMAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA

Programa de Matemática do Ensino Básico (2007)

O PMEB (2007) descreve duas finalidades essenciais:

- “Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.
- Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.”

(Ponte et. al, 2007, p. 3)

Este Programa apresenta nove objetivos gerais para o ensino da Matemática, que passamos a citar:

- Conhecer factos e procedimentos próprios da Matemática
- Compreender a Matemática
- Lidar com diversas representações matemáticas
- Comunicar matematicamente
- Resolver problemas
- Estabelecer conexões
- Fazer Matemática de modo autónomo
- Apreciar a Matemática

(Ponte et. al, 2007, p. 4-6)

Ponte e Serrazina (2009), dois dos autores do PMEB (2007), fazem referência aos nove objetivos gerais presentes no documento. Esclarecem que os dois primeiros objetivos referem-se aos conhecimentos básicos e à importância da compreensão na aprendizagem da Matemática; e os restantes sete, às capacidades transversais que têm grande destaque neste documento.

O PMEB (2007) está organizado por ciclos e em torno de quatro grandes temas matemáticos e três capacidades transversais fundamentais.

Os conteúdos matemáticos dividem-se pelos temas:

- Números e operações;

- Geometria e Medida;
- Álgebra;
- Organização e tratamento de dados.

As capacidades transversais são:

- Resolução de Problemas;
- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática.

(Ponte et. al, 2007, p. 7)

Atendendo, ao tema da nossa investigação, analisaremos, de seguida, as alterações sofridas relativamente ao tópico em estudo – Isometrias no Plano – no 2.º CEB. Primeiramente, apresentamos uma tabela que compara os Programas de 1991 e 2007, com informações retiradas dos próprios e, posteriormente, faremos uma breve análise explorativa do mesmo.

Através da análise da tabela 1, podemos verificar que ocorreu uma valorização no tópico das Transformações Geométricas. No Programa de 1991, a única transformação geométrica estudada era a Simetria e particulariza-se o estudo da bissetriz. No PMEB (2007), não se estuda apenas a Simetria e a bissetriz surge apenas mencionada como objetivo. O estudo das Transformações Geométricas é mais aprofundado, estudando-se não só a noção de Simetria bem como as Isometrias: Reflexão, Rotação e Translação. Os objetivos específicos fazem ainda referência à composição de Isometrias, onde está implícita a Reflexão Deslizante. No entanto, esta última Isometria não é mencionada no Programa do 2.º CEB, uma vez que esta exige que o eixo de Reflexão seja paralelo ao vetor de Translação e, neste ciclo, não se aborda o conceito de vetor (Ponte et. al, 2007).

Tabela 1: Quadro Comparativo dos Programas de Matemática do 2.º CEB de 1991 e 2007

Programa de matemática de 1991	PMEB de 2007
Temas: Simetria em relação a uma reta - Eixos de simetria - Bissetriz de um ângulo	Tópicos: Reflexão, rotação e translação - Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação - Simetria axial e rotacional
Objetivos: • Descobrir e traçar eixos de simetria de figuras geométricas simples. • Reconhecer que a bissetriz de um ângulo é um eixo de simetria. • Construir, em papel quadriculado a simétrica de uma figura simples.	Objetivos específicos: • Identificar, prever e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado. • Construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias. • Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias numa figura. • Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias. • Identificar frisos e rosáceas. • Construir frisos e rosáceas.

(ME, 1991; Ponte et. al, 2007, p. 38)

É ainda de salientar que o conceito de Simetria, neste ciclo, passa a ser abordado de forma mais aprofundada através do estudo de padrões geométricos, frisos e rosáceas, presentes nos objetivos específicos.

Nas notas referentes ao 2.º CEB, no PMEB (2007), propõem o uso de obras de arte e artesanato, o estudo da relação entre o número de eixos de Simetria e a classificação de triângulos, a construção de figuras com mais do que um eixo de Simetria e o uso de figuras obtidas através da composição de Isometrias (Ponte et. al, 2007).

Programa de Matemática do Ensino Básico (2013)

O NPMEB, homologado a 13 de junho de 2013 e que se encontra atualmente em vigor, descreve três finalidades essenciais:

- A estruturação do pensamento.
- A análise do mundo natural.
- A interpretação da sociedade.

(MEC, 2013, p. 2)

Este documento foi construído com base nos conteúdos temáticos expressos no PMEB de 2007, anteriormente enumerados no presente trabalho. Foi também adotada uma estrutura sequencial, uma vez que a aquisição de determinados conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende da aquisição e desenvolvimento de conhecimentos e capacidades prévios. A intenção é promover uma aprendizagem progressiva (MEC, 2013). É ainda de salientar o papel da abstração considerado no documento em análise, pois este pretende permitir “agregar e unificar objetos, conceitos e linhas de raciocínio, e adaptar métodos e resultados conhecidos a novos contextos”. (MEC, 2013, p. 1) No entanto, reconhece que a passagem do concreto para o abstrato tem de ser feita de forma gradual (MEC, 2013).

Assim, com o desígnio de alcançar as ideias descritas, foram elaboradas as MC de Matemática, homologadas a 3 de agosto de 2012 e que, harmonizadas com os conteúdos programáticos, constituem o NPMEB (2013), (MEC, 2013).

Para o 2.º CEB, o NPMEB (2013) requer os quatro desempenhos seguintes, elencados nas MC:

- **Identificar/designar** – onde o aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de maneira equivalente, ainda que informal.
- **Estender** – onde o aluno deve definir o conceito como se indica ou de forma equivalente, ainda que informal, reconhecendo que se trata de uma generalização.

- **Reconhecer** – onde o aluno deve conhecer o resultado e saber justificá-lo, eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares. No caso das propriedades mais complexas, deve apenas saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados pelo professor para as deduzir, bem como saber ilustrá-las utilizando exemplos concretos. No caso das propriedades mais simples, poderá ser chamado a apresentar de forma autónoma uma justificação geral um pouco mais precisa.
- **Saber** - onde o aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta. (MEC, 2013, p. 3)

Comparativamente ao PMEB (2007), há uma evolução quanto às capacidades transversais a desenvolver no NPMEB (2013):

- Conhecimento de factos e de procedimentos;
- Raciocínio matemático;
- Comunicação Matemática;
- Resolução de problemas;
- A Matemática como um todo coerente.

Tal como no PMEB (2007), no 2.º CEB do NPMEB (2013), os domínios de conteúdos são quatro:

- Números e Operações (NO);
- Geometria e Medida (GM);
- Álgebra (ALG);
- Organização e Tratamento de Dados (OTD).

No que concerne à Geometria, são introduzidos alguns conceitos e propriedades que envolvem paralelismo e ângulos, com aplicações simples aos

polígonos. Uma vez que esta etapa é indispensável ao estudo da Geometria nos ciclos de ensino posteriores, os alunos deverão saber relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem. É também pedida aos alunos a realização de diversas tarefas que envolvem a utilização de instrumentos de desenho e de medida (régua, esquadro, compasso e transferidor, programas de geometria dinâmica) (MEC, 2013).

Neste seguimento, apresentamos as alterações sofridas no subdomínio em estudo – Isometrias no Plano – no 2.º CEB, através da apresentação da tabela 2 que reúne os Conteúdos e as MC a ter em consideração na abordagem do mesmo.

No Programa de Matemática em estudo, verifica-se que, no 2.º CEB, reforça-se o estudo da Reflexão e inicia-se o estudo da Rotação e das Simetrias de Rotação e de Reflexão. Consultando NPMEB (2013) e as respetivas MC, constatamos que o estudo da Translação e da Simetria de Translação inicia-se apenas no 3.º CEB, no 8º ano de escolaridade. Quanto à Reflexão Deslizante e à Simetria de Reflexão Deslizante, também estes conceitos se encontram referenciados unicamente no 8º ano de escolaridade (MEC, 2013). Apesar dos frisos e das rosáceas serem aprendizagens subjacentes aos objetivos recomendados no NPMEB (2013), estes conceitos estão implícitos na abordagem das Simetrias de Translação e Simetrias de Rotação, respetivamente, e, por isso, são trabalhados no 8º ano de escolaridade.

Tabela 2: Simetrias e Transformações Geométricas no NPMEB 2013

Programa de Matemática do Ensino Básico 2013	
6.º ano de escolaridade	
Subdomínio:	
<u>Isometrias no plano</u>	
- Reflexão central como isometria; invariância da amplitude de ângulo; - Mediatriz de um segmento de reta; construção da mediatriz utilizando régua e compasso; - Reflexão axial como isometria; invariância da amplitude de ângulo; eixos de simetria; a bissetriz de um ângulo como eixo de simetria;	

- Rotação de sentido positivo ou negativo como isometria; invariância da amplitude de ângulo;
 - Imagem de um segmento de reta por uma isometria;
 - Construção de imagens de figuras planas por reflexões centrais e axiais e por rotações;
 - Simetrias de rotação e de reflexão;
 - Problemas envolvendo as propriedades das isometrias e utilizando raciocínio dedutivo;
 - Problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial.

(ME, 2013, p. 21)

Metas Curriculares:

Construir e reconhecer propriedades de isometrias do plano

- Designar, dados dois pontos O e M , o ponto M' por “imagem do ponto M pela reflexão central de centro O ” quando O for o ponto médio do segmento $[MM']$ e identificar a imagem de O pela reflexão central de centro O como o próprio ponto O .
- Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A' e B' de dois pontos A e B pela reflexão central de centro O , que são iguais os comprimentos dos segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ e designar, neste contexto, a reflexão central como uma “isometria”.
- Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A' , B' e C' de três pontos A , B e C pela reflexão central de centro O , que são iguais os ângulos ABC e $A'B'C'$.
- Designar por “mediatriz” de um dado segmento de reta num dado plano a reta perpendicular a esse segmento no ponto médio.
- Reconhecer que os pontos da mediatriz de um segmento de reta são equidistantes das respetivas extremidades.
- Saber que um ponto equidistante das extremidades de um segmento de reta pertence à respetiva mediatriz.
- Construir a mediatriz (e o ponto médio) de um segmento utilizando régua e compasso.
- Identificar, dada uma reta r e um ponto M não pertencente a r , a “imagem de M pela reflexão axial de eixo r ” como o ponto M' tal que r é mediatriz do segmento $[MM']$ e identificar a imagem de um ponto de r pela reflexão axial de eixo r como o próprio ponto.
- Designar, quando esta simplificação de linguagem não for ambígua, “reflexão axial” por “reflexão”.
- Saber, dada uma reta r , dois pontos A e B e as respetivas imagens A' e B' pela reflexão de eixo r , que são iguais os comprimentos dos segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ e designar, neste contexto, a reflexão como uma “isometria”.
- Reconhecer, dada uma reta r , três pontos A , O e B e as respetivas imagens A' , O' e B' pela reflexão de eixo r , que são iguais os ângulos AOB e $A'O'B'$.

- Identificar uma reta r como “eixo de simetria” de uma dada figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo r formam a mesma figura.
- Saber que a reta suporte da bissetriz de um dado ângulo convexo é eixo de simetria do ângulo (e do ângulo concavo associado), reconhecendo que os pontos a igual distância do vértice nos dois lados do ângulo são imagem um do outro pela reflexão de eixo que contém a bissetriz.
- Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo α , um ponto M' por “imagem do ponto M por uma rotação de centro O e ângulo α ” quando os segmentos $[OM]$ e $[OM']$ têm o mesmo comprimento e os ângulos α e $\angle MOM'$ a mesma amplitude.
- Reconhecer, dados dois pontos O e M e um ângulo α (não nulo, não raso e não giro), que existem exatamente duas imagens do ponto M por rotações de centro O e ângulo α e distingui-las experimentalmente por referência ao sentido do movimento dos ponteiros do relógio, designando uma das rotações por “rotação de sentido positivo” (ou “contrário ao dos ponteiros do relógio”) e a outra por “rotação de sentido negativo” (ou “no sentido dos ponteiros do relógio”).
- Reconhecer, dados dois pontos O e M , que existe uma única imagem do ponto M por rotação de centro O e ângulo raso, que coincide com a imagem de M pela reflexão central de centro O e designá-la por imagem de M por “meia volta em torno de O ”.
- Reconhecer que a (única) imagem de um ponto M por uma rotação de ângulo nulo ou giro é o próprio ponto M .
- Saber, dado um ponto O , um ângulo α e as imagens A' e B' de dois pontos A e B por uma rotação de centro O e ângulo α de determinado sentido, que são iguais os comprimentos dos segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ e designar, neste contexto, a rotação como uma “isometria”.
- Reconhecer, dado um ponto O , um ângulo α e as imagens A' , B' e C' de três pontos A , B e C por uma rotação de centro O e ângulo α de determinado sentido, que são iguais os ângulos $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$.
- Identificar uma figura como tendo “simetria de rotação” quando existe uma rotação de ângulo não nulo e não giro tal que as imagens dos pontos da figura por essa rotação formam a mesma figura.
- Saber que a imagem de um segmento de reta por uma isometria é o segmento de reta cujas extremidades são as imagens das extremidades do segmento de reta inicial.
- Construir imagens de figuras geométricas planas por reflexão central, reflexão axial e rotação utilizando régua e compasso.
- Construir imagens de figuras geométricas planas por rotação utilizando régua e transferidor.
- Identificar simetrias de rotação e de reflexão em figuras dadas.

Resolver problemas

- Resolver problemas envolvendo as propriedades das isometrias utilizando raciocínio dedutivo.
- Resolver problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial.

(Bivar et. al, 2013, p. 76)

Para compararmos mais facilmente as alterações sofridas nos diferentes Programas (1991; 2007 e 2013) construímos a tabela 3, onde apresentamos um resumo dos conteúdos abordados nos três Programas mencionados.

Tabela 3: Resumo Comparativo dos Programas de Matemática do 2.º CEB de 1991, 2007 e 2013

PMEB de 1991	- Simetria em relação a uma reta (eixos de simetria e bissetriz de um ângulo)
PMEB de 2007	- Reflexão, rotação e translação (noção e propriedades) - Simetria axial e rotacional
PMEB de 2013	- Reflexão central, reflexão axial e rotação (invariância da amplitude de ângulo; bissetriz de um ângulo como eixo de simetria; construção de imagens de figuras planas; resolução de problemas) - Mediatriz de um segmento de reta (construção) - Imagem de um segmento de reta por uma isometria - Simetrias de rotação e de reflexão (resolução de problemas)

Partindo da análise da tabela anterior, podemos constatar que no PMEB de 1991 estudava-se apenas a Simetria, particularizando-se a bissetriz. Já no PMEB de 2007, verifica-se uma valorização no estudo das Transformações Geométricas. Para além da noção de Simetria, estudava-se a Reflexão, Rotação e Translação e os padrões geométricos; a bissetriz passa apenas a ser referida como objetivo. No entanto, é no PMEB de 2013, que se verificam alterações mais significativas. Reforça-se o estudo da Reflexão, particularizando novamente a bissetriz e conceitos que envolvem paralelismo e ângulos. Neste Programa inicia-se o estudo da Rotação e das Simetrias

de Rotação, e valoriza-se o conceito de mediatriz. Como podemos verificar, a Translação deixa de ser abordada no 6.º ano de escolaridade, iniciando-se o seu estudo apenas no 8º ano.

2.3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIAS

Segundo Maia (2014), o estudo das Transformações Geométricas tem início na associação das Simetrias com a Natureza e na capacidade que temos em identificá-la e admirá-la. Segundo esta autora,

o ensino desta temática ganha relevo quer pela motivação que pode originar no ensino desta e de outras matérias, quer pela beleza nas relações existentes entre os vários conceitos e realidades do quotidiano e culturais

(Maia, 2014, p. 119)

Deste modo, o estudo das Isometrias e das Simetrias revela-se fundamental para promover a articulação e interação da Geometria, logo da Matemática, com o meio que nos rodeia, nomeadamente através da associação das Isometrias e Simetrias à Natureza. Neste sentido, pretendemos que a associação da Matemática às imagens com elementos da Natureza passe pela associação das várias Simetrias e Isometrias exploradas no NPMEB (2013). O presente capítulo terá um carácter mais científico, isto é, serão apresentadas as várias definições matemáticas que sustentaram o presente estudo, nomeadamente a definição de Transformação Geométrica, as definições das várias Isometrias e Simetrias trabalhadas no 6º ano de escolaridade. Recorde-se, tal como consta no subcapítulo 2.2., que atendendo às comparações entre o PMEB 2007 e o NPMEB 2013 ao nível do subdomínio das Isometrias, à análise dos respetivos objetivos específicos e MC e, também, ao facto do público-alvo da presente investigação ser formado por alunos do 6.º ano escolaridade e por docentes do 2.º

CEB, neste capítulo serão abordadas as Isometrias e Simetrias presentes no NPMEB 2013 para o ano escolar referido. Deste modo, apresentaremos as definições para a Reflexão, Rotação, Simetria de Reflexão e Simetria de Rotação.

Acreditamos que o estudo das Isometrias *Reflexão* e *Rotação* possa não suscitar dúvidas aos professores que lecionam o 6º ano, ou até mesmo o 8º ano de escolaridade, dado que estes conceitos não sofreram alteração ao longo das últimas atualizações curriculares. No entanto, julgamos que a nova conceptualização de Simetria possa causar algumas dificuldades. Assim, consideramos pertinente a realização deste estudo, não só para promover a articulação da Geometria à Natureza, mas também porque achamos que este trabalho poderá ajudar a esclarecer alguns aspetos dado que esta temática sofreu, recentemente, grandes alterações, nomeadamente na profundidade e rigor com que deverá ser lecionado a alunos do 6º e 8º anos de escolaridade.

Definição: Uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa a cada ponto P do plano ($\mathbb{R}^2$) um e um só ponto P' de $\mathbb{R}^2$, verificando as seguintes condições:

- a) Se P e Q são pontos distintos, então os pontos correspondentes P' e Q' são também distintos;
- b) Se U é um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$, então existe um ponto V de $\mathbb{R}^2$ tal que o seu correspondente pela transformação geométrica T é U .

(Veloso, 2012, p.5)

2.3.1 ISOMETRIAS

Não poderíamos deixar de iniciar este subcapítulo sem mencionar os trabalhos de Escher (1898-1972), frequentemente publicado nos manuais escolares em Portugal. Os seus trabalhos são atual e mundialmente conhecidos, pelos seus registos simétricos relacionados com pavimentações, usando animais e pessoas. De salientar que, não sendo matemático, focou-se no estudo das Isometrias, conseguindo cativar alguns

geómetras com o seu trabalho, considerado maravilhoso sob o ponto de vista matemático (Schattschneider, 1978).

Segundo Veloso (2012), “o estudo das transformações geométricas confere ao ensino da geometria elementar um dinamismo que não possuía na versão estática de Euclides” (p. 6). No contexto deste estudo, utilizamos o termo *transformação* para referir a correspondência entre dois conjuntos de objetos geométricos. Na Geometria euclidiana existem apenas quatro tipos de transformações isométricas ou, simplesmente, isometrias - a Reflexão, a Rotação, a Translação e a Reflexão Deslizante.

Definição de Isometria: Diz-se que a transformação geométrica T é uma isometria se, para quaisquer dois pontos P e Q , se tem $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, em que $T(P)=P'$ e $T(Q)=Q'$.

(Veloso, 2012, p. 21).

Por outras palavras, uma isometria é uma transformação geométrica biunívoca entre pontos do plano que conservam as distâncias e as medidas de amplitude dos ângulos (Mascarenhas, Maia & Sousa, 2013, p. 2). Assim, as Isometrias são movimentos que conservam a forma e as dimensões da figura original.

As diferentes Isometrias estudadas no 6º ano de escolaridade presentes no NPMEB (2013)

É primordial realçar que não podemos confundir Reflexão e Simetria. Para cada um dos quatro tipos de Isometria, indicados anteriormente, há uma Simetria: Simetria de Reflexão (ou Simetria de Reflexão Axial), Simetria de Rotação (ou Simetria Rotacional), Simetria de Translação e Simetria de Reflexão Deslizante. Segundo Serra (1993), “em geometria, simetria define-se em termos de isometrias, quando a imagem de uma figura, através de uma isometria diferente da identidade, coincide com a figura original, então a figura tem simetria” (Serra, 1993, citado por Boavida, 2011, p. 5).

Veloso (2012) chama à atenção da confusão que se tem verificado na introdução deste tema no ensino básico, devido aos nomes dados, em Matemática, a este conceito. “A reflexão tem sido tradicionalmente designada, em português, por *simetria axial*.” (Veloso, 2012, p. 9), explica o autor. Este ressalva que, como “a palavra *simetria* está reservada, em matemática, para um conceito diferente” (Veloso, 2012, p. 9), há que haver um esforço “para perder o hábito de chamar simetria axial ou bilateral à transformação reflexão.” (Veloso, 2012, p. 9).

No 6º ano de escolaridade estuda-se, tal como referido no capítulo anterior, a Reflexão Axial, a Rotação e a Reflexão Central. Note-se que a Reflexão Central é um caso particular de Rotação.

Relembramos que, neste estudo, trabalhamos com imagens com elementos da Natureza. Sendo estas imagens reais, existem imperfeições e diferenciações próprias entre seres vivos, que serão desprezadas.

➤ Reflexão Axial

Definição: Dada uma recta e , diz-se reflexão E de eixo e a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = E(P)$ que verifica as seguintes condições:

- Se P pertence a e , $P=P'$;
- Se P não pertence a e , a mediatriz do segmento PP' é a recta e .

Nestas condições, a recta r denomina-se por eixo de reflexão.

(Veloso, 2012, p. 8)

Por exemplo, na Natureza, e desprezando as próprias imperfeições da mesma, é possível verificar a existência de Reflexão Axial. Por observação da figura 1¹, considerando três pontos da borboleta A, B e C, escolhidos ao acaso, verifica-se, que r

¹ Imagem original disponível em:
<http://img.ibxk.com.br/2015/08/25/25155339986742.jpg?w=1040>

é a mediatriz do segmento de reta $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$, onde o ponto A' é o transformado do ponto A , o ponto B' do ponto B e o ponto C' do ponto C , por aplicação da Reflexão (axial) de eixo r . Nesta figura a reta r foi construída no programa GeoGebra² e é perpendicular aos segmentos de reta $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$, passando pelos seus pontos médios. Por esse motivo, a reta r é a mediatriz dos segmentos de reta mencionados anteriormente.

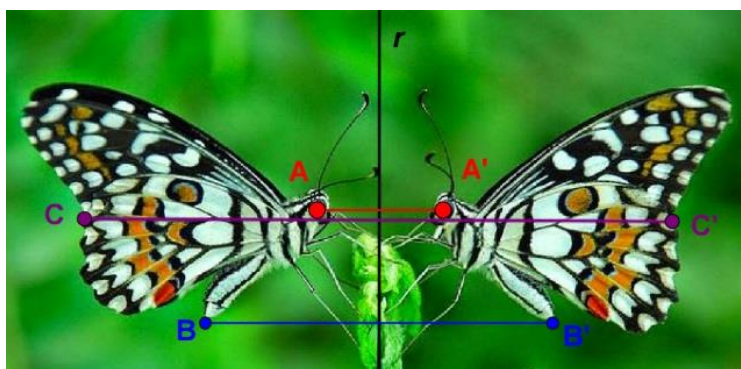


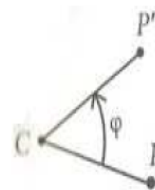
Figura 1. Reflexão (axial) de eixo r

➤ Rotação

Definição: Sejam dados um ponto C e um ângulo orientado φ . Chama-se rotação R de centro C e ângulo φ ($R_{C,\varphi}$) à transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P' , nas seguintes condições:

- a) $R_{C,\varphi}(C)=C$, isto é, o ponto C é fixo para a rotação.
- b) Se $P \neq C$, o ângulo PCP' igual a φ e os segmentos $[CP]$ e $[CP']$ são iguais.

(Veloso, 2012, p. 7)



² Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>

Na Natureza, desprezando as imperfeições que são próprias dos seres vivos, podemos verificar a existência da Isometria Rotação. Por exemplo, considerando a figura 2³, verifica-se que o ponto E da gaivota é transformado no ponto E', da segunda gaivota, por aplicação de uma Rotação no sentido positivo, de centro C e ângulo $\alpha = 47,49^\circ$. O ângulo de Rotação é positivo se o sentido é contrário ao dos ponteiros do relógio e negativo se tem o mesmo sentido (Mascarenhas, Maia & Sousa, 2013, p. 4).

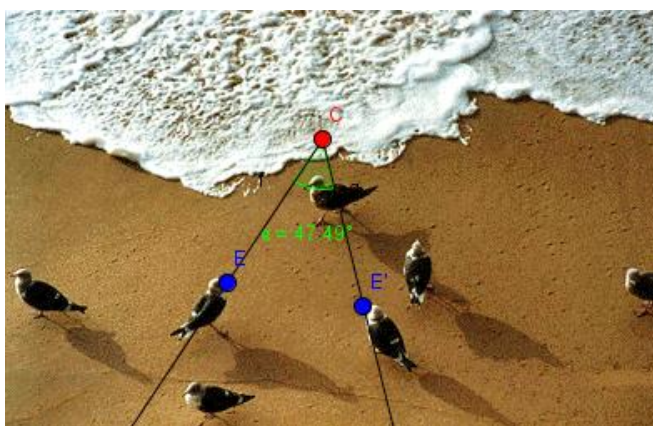


Figura 2. Rotação de centro C

➤ Reflexão Central (ou Rotação de meia volta)

Definição: A reflexão central de centro O transforma um ponto P (diferente de O) no ponto P' tal que:

- Os pontos P, O e P' são colineares, ou seja, pertencem à mesma reta;
- Os pontos P e P' estão à mesma distância do ponto O, ou seja, O é o ponto médio do segmento de reta [PP'].

A imagem do ponto O é o próprio ponto.

(Sequeira; Andrade; Almeida & Beja, 2014, p. 116)

³ Imagem original disponível em:

<http://sentimentosemimagens.blogs.sapo.pt/arquivo/gaivotas.gif>

Na Natureza, desprezando as imperfeições que são próprias dos seres vivos, podemos verificar a existência da Isometria Reflexão Central. Por exemplo, considerando a figura 3⁴, e desprezando o caule e a diferenciação entre pétalas, verifica-se que os pontos A, B e D do malmequer são transformados em A', B' e D', do segundo malmequer, por aplicação de uma Reflexão Central de centro C.



Figura 3. Reflexão Central de centro C

Em termos teóricos, a Simetria de Reflexão é também conhecida como Simetria de Reflexão Axial. No entanto, a Reflexão Central cai no caso de Rotação de meia volta, logo está incluída na Simetria Rotacional.

Consideramos relevante chamar à atenção para a imagem dos malmequeres, trabalhada nesta investigação, visto que, se desprezarmos o caule e a diferenciação entre pétalas, consiste num excelente exemplo de Reflexão Axial, Reflexão Central e, por isso, de Rotação (meia volta).



Figura 4. Reflexão Central ou Rotação de meia volta

⁴ Imagem original disponível em:
http://c1.quickcachr.fotos.sapo.pt/i/Nf106bb98/7957526_zzKRQ.jpeg



Figura 5. Reflexão Axial

2.3.2 SIMETRIAS

O conceito de Simetria acompanha-nos ao longo do tempo. Segundo Washburn e Crowe (1998), as civilizações do mundo antigo apresentaram o seu interesse e motivação pela conceção de motivos simétricos na pintura, na escultura, nos têxteis, pavimentos, cestaria madeira, pedra e cerâmica. Estudos paleoantropológicos deram a conhecer a descoberta de construções de instrumentos simétricos, que nos levam a refletir sobre a preferência dos hominídeos por estruturas com estas características (Giannouli, 2013). Também os Egípcios e os Gregos foram importantes para o despertar do estudo das Transformações Geométricas e Simetrias: os primeiros usavam motivos simétricos nos frisos e papéis de parede; os segundos, possuidores de conhecimentos geométricos profundos, realizaram conceções simétricas na construção de peristilos e colunadas, bem como nos frisos (Washburn & Crowe, 1998).

A Simetria é reconhecida popularmente quer nas produções humanas, bem como na Natureza (Washburn & Crowe, 1998). E, na opinião de Shirali (2001), é Natureza que se encontram as formas de Simetria mais graciosas como, por exemplo, as borboletas, as flores, o pólen.

Definição: Dada uma figura plana F , chama-se simetria de F toda a isometria S do plano que deixe F (globalmente) invariante, isto é, $S(F)=F$.

(Veloso, 2012, p. 56)

Veloso utiliza a palavra “globalmente”, uma vez que a definição acima “não implica que todos os pontos de F fiquem invariantes para a isometria S , mas sim que a imagem de F por meio de S coincide com F ” (Veloso, 2012, p. 56).

Assim, qualquer Isometria que transforme uma determinada figura nela própria, deixando-a invariante, diz-se Simetria dessa figura. Como referido anteriormente, existem quatro tipos de Simetria na Geometria euclidiana: Simetria de Reflexão, Simetria de Rotação, Simetria de Translação e Simetria de Reflexão Deslizante. Relembramos que, atendendo ao PMEB 2013 e respectivas MC para o 6.º ano de escolaridade, apenas abordaremos as duas primeiras.

As diferentes Simetrias estudadas no 6º ano de escolaridade presentes no NPMEB (2013)

Mais uma vez, é pertinente lembrar que são trabalhadas imagens reais. Por este motivo, existem imperfeições e diferenciações próprias entre seres vivos, que continuarão a ser desprezadas.

➤ **Simetria de Reflexão**

No que respeita às Simetrias, destacamos Leonardo da Vinci (1452-1519) que, através do *Teorema de Leonardo*, conclui que as Simetrias Rotacional e de Reflexão são as únicas possíveis de serem representadas na forma finita de apenas uma cor (Washburn & Crowe, 1998). Este artista, estudou e determinou “todas as simetrias

possíveis dos edifícios monumentais com vista a projectar de maneira harmoniosa eventuais extensões e acrescentos” (Oliveira, 1997). Analisando a sua decoração de nichos e altares em capelas circulares ou poligonais, observamos a sua preocupação em manter a Simetria na parte central e no seu todo (Veloso, 1998; Washburn & Crowe, 1998).

Definição: Uma figura F tem uma simetria de reflexão segundo uma reta r se o transformado da figura F por Ref_r deixa F invariante (a própria figura).

(Mascarenhas, Maia & Sousa, 2013, p. 8)

Por exemplo, na Natureza, e desprezando as imperfeições da mesma, é possível verificar a existência de Simetria de Reflexão. Por observação da figura 6⁵, considerando as retas r , s , t , u e v verifica-se que estas são os cinco eixos de Simetria existentes, cujo transformado deixa a figura invariante.



Figura 6. Simetrias de Reflexão da estrela-do-mar

⁵ Imagem original disponível em: <http://defensoresdanatureza.com.br/wp-content/uploads/2013/04/saco-do-mamangu%C3%A1-222.jpg>

➤ Simetria de Rotação

Pitágoras (570 a.C - 495 a.C) e Euclides (325 a.C - 265 a.C) destacam-se pelos grandes contributos na Matemática que ainda hoje são mencionados e utilizados. O círculo e a esfera foram considerados por Pitágoras como os objetos mais perfeitos, uma vez que exibiam uma completa Simetria rotacional (Weyl, 1989). Euclides foi reconhecido mundialmente pela “primeira compilação de um conjunto de definições, postulados, proposições e respetivas provas matemáticas sobre a geometria (...) e teoria dos números” (Maia, 2011, p.1). Além das infinitas Simetrias de Rotação, o círculo, tem também infinitas Simetrias de Reflexão.

Definição: Uma figura F tem uma simetria rotacional de centro O e amplitude α se o transformado da figura F por $R_{O, \alpha}$ deixa F invariante (a própria figura).

(Mascarenhas, Maia & Sousa, 2013, p. 8)

Na Natureza, desprezando as imperfeições que são próprias dos seres vivos, podemos verificar a existência de Simetria de Rotação. Por exemplo, considerando a figura 7, verifica-se que o seu transformado por Rotação de sentido negativo, de centro O e $\alpha = 144^\circ$ (por exemplo), deixa a figura invariante. Relembramos que ângulo de Rotação é positivo se o sentido é contrário ao dos ponteiros do relógio e negativo se tem o mesmo sentido, como referido anteriormente.

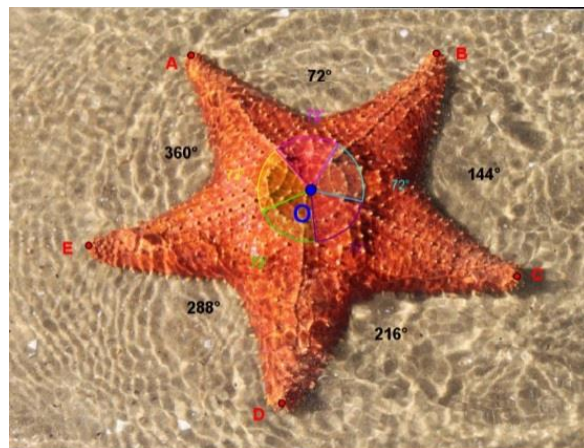


Figura 7. Simetrias de Rotação da estrela-do-mar, de centro O e sentido negativo

Tal como na Simetria de Reflexão, podemos observar que a estrela-do-mar apresenta cinco Simetrias de Rotação de centro O (72° , 144° , 216° , 288° e $360^\circ = 0^\circ$) onde, na figura 6, foi considerado apenas o sentido negativo. Recordando as MC mencionadas na tabela 2, devem considerar-se também os ângulos no sentido positivo, uma vez que “dados dois pontos O e M e um ângulo a (não nulo, não raso e não giro), que existem exatamente duas imagens do ponto M por rotações de centro O e ângulo a ” (Bivar et. al, 2013, p. 76), distinguindo-as referindo o sentido de Rotação (se positivo ou negativo).

Na consulta de um manual de Matemática do 6.º ano de escolaridade, podemos ler que se a Rotação de 360° for a única Rotação que não altera a figura, dizemos que **não tem Simetria de Rotação** (Neves & Faria, 2014). O mesmo é reiterado pelas MC, onde podemos ler: “Identificar uma figura como tendo “simetria de rotação” quando existe uma rotação de ângulo não nulo e não giro tal que as imagens dos pontos da figura por essa rotação formam a mesma figura” (Bivar et. al, 2013, p. 76).

Após uma breve contextualização histórico-cultural e científica no decorrer do presente capítulo, não podemos deixar de reconhecer a exigência de um conhecimento matemático sobre Simetria para a compreensão e funcionamento dos princípios geométricos observados nas formas de arte culturais, na antiguidade clássica e na arte contemporânea (Washburn & Crowe, 1998).

Tendo em mente a importância do estudo e da análise das imagens para que estas possam enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, parece-nos essencial abordar algumas características da imagem fixa no capítulo que se segue.

2.4 A UTILIZAÇÃO EDUCATIVA DAS IMAGENS

2.4.1 AS CARACTERÍSTICAS DA LINGUAGEM VISUAL

No que diz respeito à leitura das imagens, convém salientar que este processo depende tanto do professor como do aluno, isto é, não é unidirecional (Calado, 1994). O professor, emissor, não contém em si todo o significado de uma mensagem visual. O aluno, leitor, é “parte activa na produção do sentido” (Calado, 1994, p. 50). Desta forma, a apreensão de um conceito implica a interação entre o professor e o aluno, sendo que o primeiro terá de partilhar “as competências comuns do alfabetismo (conhecimento dos elementos visuais e das regras de combinação dos mesmos)” (Calado, 1994, p. 50).

Assim, aparece com pertinência a seguinte problemática: como pode o professor controlar a mensagem que passa para os alunos, utilizando a imagem como processo de ensino-aprendizagem? Segundo Isabel Calado (1994), com a utilização de imagens, os professores têm a possibilidade de trabalhar as sensações visuais do aluno, de forma a atingir os objetivos pretendidos. Dentro desta linha de pensamento podemos afirmar que, se o professor consegue atingir o objetivo pretendido de forma eficaz, o ensino através da imagem pode ser benéfico. Se, por outro lado, falhar a transmissão do pretendido através de uma imagem, está a por em causa todo este processo de ensino. Então, o que pode o professor fazer para combater as falhas que possa apresentar? A autora anteriormente referida diz-nos que processos como a omissão de detalhes desnecessários, escolha de elementos mais significativos e de imagens não ambíguas, são exemplos de ideias a utilizar. A autora dá ainda o exemplo da fotografia que, como imagem representativa que é, serve somente para replicar em vez de realçar características pertinentes. Isto faz com que esta imagem nem sempre seja a mais adequada para ser interpretada ou recodificada (Calado, 1994). Assim, reforçamos a ideia referida acima de que a imagem deve ser cuidadosamente pensada e analisada antes da sua utilização de forma a ser possível adequá-la àquilo que se pretende transmitir.

O docente deve ter em conta alguns aspetos quando utiliza a imagem na sala de aula. Estes passam pelo conhecimento, em antemão, dos alunos a quem se destinam as imagens, a adequação do espaço físico a estas e o controle do tempo a que o aluno é exposto à imagem, que deve ser proporcional ao tipo e à intensidade da mensagem que quer passar ao aluno (Isabel Calado, 1994). Também fatores como a cor, a textura, a dimensão e o suporte onde se encontra, por exemplo, permitem ao professor escolher imagens mais significativas que outras. Se nos focarmos no fator cor, podemos ampliar as diferenças utilizando o preto e branco ou, se o objetivo for o contrário, realçar uma determinada cor. As qualidades expressivas da cor (transmissão de sentimentos como a agressividade) também não devem escapar ao docente (Calado, 1994).

Em suma, as imagens são recursos ricos e passíveis de ser trabalhados em sala de aula com grandes vantagens para os processos de ensino e de aprendizagem. Contudo, a sua complexidade não deve ser menosprezada. As imagens podem e devem ser utilizadas, mas para isso é necessário que o professor faça um trabalho prévio, consciente e atento, de forma a conseguir adequar a imagem aos alunos a que ela se destina e ao trabalho que se pretende.

2.4.2 ENSINAR AS IMAGENS E COM AS IMAGENS

Pinto (1988) questiona “a escola, que no tempo das civilizações orais ensinou a falar e a escutar, e que nas civilizações escritas ensinou a ler e a escrever, não deveria hoje ensinar a ver e a mostrar?” (Pinto, 1988, p. 30). Tendo em conta a questão colocada e o título deste tópico, convém começar por dizer que, apesar de atualmente a imagem não ter tanto impacto como o que tinha há uns anos atrás, quando devidamente explorada pode tornar-se um recurso riquíssimo. Hoje em dia, a riqueza excessiva de imagens no nosso quotidiano tirou-nos o fascínio que antigamente estas causavam. Como tal, quando se pretende selecionar uma imagem, devemos ponderar bastante a escolha da mesma, tendo em conta a intenção com que a vamos utilizar.

Para o fazermos, precisamos de aprender a manipulá-las, impedindo que elas nos manipulem (Calado, 1994).

Na opinião de Isabel Calado (1994), a utilização da imagem é uma excelente ideia. No entanto, deve ser cuidadosamente analisada antes da sua utilização. Para poder adequar a imagem à mensagem que pretende transmitir, o docente necessita de entender em profundidade todos os aspetos da mesma e promover ao aluno a capacidade de entender o que está a ver - alfabetização visual (Calado, 1994).

No que diz respeito à educação com e através das imagens existem algumas questões relevantes. O educador reconhece a imagem como um potencial auxiliar pedagógico, quer seja para transmitir conteúdos temáticos, motivar o aluno, captar a sua atenção ou ajudar na memorização de conceitos. Giannoulli (2013) refere que, atuando como um agente da visão humana, a Simetria percebe os objetos não pela soma das suas partes, mas sim pela sua organização em grupo. O que constitui uma característica fundamental para a memorização, através do uso de mnemónicas e por facilitar a capacidade de os reconhecer e os relembrar. Por exemplo, o reconhecimento de padrões através da observação visual, onde estão presentes a Simetria e a orientação, permitem entender a relação entre as partes e o objeto, ou perceber o processo de criação do modelo (Washburn & Crowe, 1998). No entanto, é a palavra oral e escrita que continua a dominar a sala de aula. Grande parte deste problema prender-se-á com o facto de a imagem ser “multifacetada e polivalente” (Calado, 1994, p. 19) e com isto ser difícil de analisar, quantificar e até matematizar. A análise de imagens torna-se difícil devido ao facto dos instrumentos que as medem serem recentes e de estas possuírem uma natureza estética (Calado, 1994).

As imagens são instrumentos muito ricos, quer para o ensino bem como para a aprendizagem e é esta faceta que as tornam atrativas. Contudo, é necessário que se ultrapasse a ideia de “que a compreensão das imagens é algo espontâneo” (Calado, 1994, p. 21), ou seja, é necessário contrariar a ideia de que as linguagens como a visual e a gestual não são verdadeiras linguagens e desassociar a imagem à visão mítica do mundo, analisando-a racionalmente. Perante o mundo atual, a necessidade de

aprendizagem do alfabeto visual impõe-se, pois “a ideia de que a compreensão das imagens é imediata é uma ilusão” (Calado, 1994, p. 21).

2.4.3 PROMOÇÃO DAS IMAGENS NO CONTEXTO EDUCATIVO

O processo educativo inclui a utilização de imagens desde sempre, estando todos os intervenientes do mesmo mais ou menos cientes deste facto. Daí pretendermos saber qual a importância dada a este recurso, como tem vindo a ser trabalhado pelo docente e o que pode ser feito para promover uma melhoria na qualidade da aprendizagem.

Em primeiro lugar, como recurso para o ensino, as imagens requerem da parte do docente um domínio das competências associadas à utilização da linguagem visual (Calado, 1994). Este facto leva-nos a questionar se este tópico será abordado de forma suficiente e eficiente durante a formação de um professor. Na opinião de Isabel Calado (1994), é exigido um acréscimo tanto ao nível da quantidade como da qualidade, no que concerne à investigação das imagens.

É importante voltar a frisar que, apesar de todo o potencial inserido na utilização da imagem como recurso didático ser reconhecido pelos docentes, continuamos a ver este mesmo recurso a não ser utilizado em todo o seu esplendor. “A análise, quer das actividades originadas pela introdução dos diversos audiovisuais na situação educativa, quer das formas de controlo dos efeitos daquela introdução” têm provado que a construção de imagens como forma de promover a alfabetização visual não é um método corrente (Calado, 1994, p. 120).

Outro dos pontos que deve ser abordado é a massificação das imagens em contexto escolar. Se cada vez mais é referida a importância de adequar as formas de ensino às necessidades do aluno, o mesmo se passa quando o recurso utilizado são as imagens. O docente deve prestar atenção às diferenças individuais dos seus alunos e ter presente que, quando utiliza uma imagem como recurso didático, esta é analisada tanto pelo emissor (docente) como pelo recetor (aluno) e que a verdadeira

comunicação só existe quando há participação e comunicação dos dois (Calado, 1994). Segundo a autora, o que leva o aluno a participar é a mobilização da sua afetividade, conseguida se a imagem incitar, persuadir e motivar o aluno. No entanto, isto nem sempre acontece. Muitas vezes o docente utiliza-a como documento informativo. Tal acontece porque há uma “predominância do conteúdo sobre os outros componentes da mensagem e a sobrevalorização da necessidade de transmitir conhecimentos por parte da instituição escolar” (Calado, 1994, p. 121).

Expor o aluno a imagens e ensiná-lo a decifrá-las, favorece-o não só dentro do contexto escolar mas também fora dele. Atualmente vivemos num mundo onde somos constantemente bombardeados por imagens (televisão, internet, jornais e revistas, folhetos publicitários, etc.). Se educarmos os nossos alunos a retirar o que é relevante das imagens a que são sujeitos, estamos a criar cidadãos conscientes e capazes de selecionar qual a informação que vale a pena recolher de entre tudo aquilo que está ao seu alcance (Calado 1994). Assim, o ensino através de imagens não deve ser reduzido à transmissão de conteúdos. Quando expomos um aluno a uma imagem, estamos também a trabalhar a sua parte emocional (afetividade, sensibilidade e sociabilidade). Quando o docente valoriza os vários significados de certas mensagens, está a favorecer o desenvolvimento do sentido de grupo, da tolerância, da democracia e o espírito crítico do aluno. (Calado, 1994).

Em suma, frequentemente as imagens são desvalorizadas. A ideia de que a imagem não é um sistema de representação que possui complexidade é errada. A escolha da imagem utilizada deve ser pensada e ponderada, não só tendo em conta as perceções e desejos dos alunos. Se o público-alvo da imagem em estudo é um fator importante na escolha desta, não é o único. Ou seja, as características da mesma devem ser tomadas em consideração aquando a sua escolha. Surge, então, a questão: será o professor atual capaz de selecionar imagens adequadas à mensagem que pretende transmitir? Segundo Isabel Calado (1994), os docentes retraem-se ainda no que toca à inovação, possuem uma formação precária no que diz respeito às diferentes linguagens de comunicação (como a visual, tão falada neste ponto). Estes, carecem de um maior domínio da psicologia, tanto a propriamente dita como a do

desenvolvimento, para poderem adequar as suas estratégias de ensino às potencialidades dos alunos. Tudo isto se revela importantíssimo quando o objetivo é tornar a utilização de imagens em sala de aula mais que um “mero espectáculo pseudo-inovador” (Calado, 1994, p. 125).

3 ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

3.1 METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Num trabalho de investigação, a escolha da metodologia a utilizar depende não só do problema de investigação definido, das questões orientadoras formuladas, mas também do modo como o investigador se relaciona com o meio onde a mesma ocorre (Cronbach, 1980).

Segundo os autores Bodgan e Biklen (1994), na investigação qualitativa “*os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números*” (p. 48), ou seja, este tipo de metodologia caracteriza-se por recolher de dados de forma flexível, reunindo-os em forma de palavras, imagens ou ambas e as ferramentas usadas produzem informação que permite descrever os fenómenos em estudo de uma forma meticulosa e aprofundada, permitindo focar o essencial. Na opinião dos autores Lodico, Spaulding e Voegtler (2010), este tipo de investigação é bastante descritiva, no qual o investigador é visto como a principal ferramenta, pois toda a informação recolhida passa através dos seus olhos e ouvidos, o que, posteriormente, permite uma descrição detalhada dos acontecimentos. É de salientar que o investigador qualitativo não recolhe os dados com a intenção de confirmar as hipóteses, mas sim de construir as respostas ao longo da recolha e agrupamento de dados. Este, não controla as variáveis, pois pode não saber quais são ou porque estas aparecem no decorrer do estudo. Assim, a investigação qualitativa foca-se mais no processo do que nos resultados, pois as expectativas do investigador encontram-se nas atividades e interações com os participantes do estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

Considerando as características acima descritas, no presente estudo optamos por uma metodologia de natureza qualitativa, com o objetivo de obter não só uma recolha de informação mais ampla, como também uma descrição mais pormenorizada dos factos e acontecimentos.

O tipo de estudo adotado foi o estudo de caso, pois pretendemos investigar processos, ter perceção e compreender em profundidade uma situação específica.

Procura-se uma descrição detalhada da situação em estudo, a fim de deter quer a singularidade, quer a complexidade da informação (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010).

“Os estudos de caso são muitas vezes criticados por não permitirem a generalização dos seus resultados” (Ponte, 1994, p. 9). No entanto, segundo Lodico, Spaulding e Voegtler (2010), outro objetivo deste tipo de estudo é saber o que se pode aprender a partir de um caso específico, em detrimento das generalizações. Os estudos de caso variam em extensão, complexidade, interesse e objetivo. Assim, como já foi referido anteriormente, este tipo de investigação tem como objetivo descrever acontecimentos acerca de situações particulares, de forma pormenorizada, desde a singularidade até à complexidade da mesma.

De acordo com Lodico, Spaulding e Voegtler (2010), as características que definem um estudo qualitativo como um estudo de caso são: a) Ter por base a análise profunda de um ou vários casos interligados; b) procurar contextualizar um caso a nível histórico, social e cultural; c) apresentar informações sobre o local físico e os principais intervenientes e d) recolher diferentes tipos de dados que, por vezes, são quantitativos e qualitativos.

Na recolha de dados da presente investigação, foram realizadas entrevistas, a quatro docentes do Ensino Básico e a quatro alunos que frequentavam o 6.º ano de escolaridade, e uma intervenção didática aplicada aos referidos quatro alunos do 6.º ano. Durante a realização das entrevistas aos alunos e da implementação da intervenção didática, foi também feita observação direta e participante por parte da investigadora. Em todos estes instrumentos foram realizados registos áudio. Para além disso, na intervenção didática, foram utilizados materiais produzidos pela investigadora e foram recolhidos registos escritos e desenhos, fotografias e folhas de resposta e/ou registo de ideias apresentadas pelos alunos que fizeram parte desta investigação.

3.2 INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS UTILIZADOS NO ESTUDO

Os instrumentos de recolha de dados podem ser várias e são, normalmente, produzidas pelo próprio investigador de modo a que estejam de acordo com os objetivos do estudo e problema e questões de investigação. A recolha de dados também pode ter vários formatos, como gravações, documentos e/ou imagens, que também permitam registar as experiências subjetivas do investigador (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010).

Como referimos anteriormente, os instrumentos utilizados neste estudo foram a entrevista e a intervenção didática com observação direta e participante da professora investigadora, por se verificar serem as mais adequadas e relevantes para este estudo. Segundo Lodico, Spaulding e Voegtler (2010), se o objetivo for obter dados narrativos ricos para um estudo qualitativo, as entrevistas serão o método indicado.

Durante a recolha de dados utilizaram-se as gravações áudio, desenhos, fotografias, materiais produzidos pela investigadora, registos escritos e foram recolhidos desenhos, fotografias e folhas de resposta e/ou registo de ideias.

3.2.1 ENTREVISTA

O uso de entrevistas permite reforçar ou verificar observações, tendo em conta uma determinada intenção. Assim como nos questionários, nas entrevistas são apresentadas questões às quais os participantes deverão responder. No entanto, no caso das entrevistas e ao contrário dos questionários, as questões conseguem alcançar uma maior profundidade na exploração de conhecimentos ou experiências. Embora grande parte dos entrevistadores elaborem as questões previamente, há uma enorme possibilidade de colocar questões para clarificar a opinião apresentada ou colocar questões adicionais sobre matérias ou temas inesperados que possam surgir (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010).

As entrevistas podem ter três tipos de estrutura: entrevista estruturada, semiestruturada ou entrevista não estruturada. Na presente investigação será utilizada a entrevista semiestruturada, por ter uma organização cuidadosamente planeada antes da realização da entrevista, que pode incluir uma lista de questões ou tópicos a ser abordada com todos os participantes. Neste tipo de estrutura é possível omitir ou alterar a ordem das perguntas, de acordo com o que acontece durante a entrevista. É ainda possível acrescentar questões que se considerem pertinentes para esmiuçar ou entender melhor um determinado assunto ou dúvida que possa surgir (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010). Assim, consideramos ser a estrutura que melhor se adequa como método de recolha de dados para a questão em estudo. Desta forma, será atribuída maior relevância a este tipo de estrutura, explorando as características da mesma num subcapítulo dedicado à preparação e implementação das entrevistas.

Apesar das amostras serem apresentadas como uma desvantagem, o processo de seleção das mesmas tem como objetivo selecionar pessoas, locais ou coisas que forneçam informação mais detalhada e, como tal, mais útil para o propósito da entrevista. Neste tipo de estudo de caso, são de importância primordial as pessoas que têm conhecimento específico acerca do tema em estudo, bem como características semelhantes (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010). Considerando as referidas ponderações, no presente estudo, os participantes foram selecionados pelo conhecimento científico que possuem, pelo ano de escolaridade que lecionam e/ou dão explicações e por conveniência da professora investigadora, características que serão exploradas no capítulo sobre seleção e caracterização dos participantes.

3.2.2 OBSERVAÇÕES

No que diz respeito ao uso das observações, o investigador deve conduzir a pesquisa de forma a obter dados corretos, imparciais e aprofundados. Desde logo, o investigador deve decidir se a sua observação será participante ou não participante (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010). Apesar de incluírem um registo das experiências

subjetivas para o investigador analisar, este pode estabelecer conexões, identificar causas, tendências e padrões à medida que observa e interage com os participantes (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

Como referimos anteriormente, durante a realização da intervenção didática com os alunos, a observação será participante, interagindo com estes. Neste momento, o investigador é também um observador. Os participantes sabem que o investigador está a recolher informações enquanto participa, uma vez que, além de participar, também desempenha um papel de pesquisa enquanto observador. As interações com eles terão uma tendência mais formal e estruturada, no entanto, também poderão ocorrer interações informais muito breves. A maioria dos investigadores qualitativos anota as suas observações sob a forma de notas de campo, que são descrições escritas do que o investigador observa no campo, bem como das suas reações ou sentimentos (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010). Estes registos escritos serão de natureza descritiva, relatando tudo o que o investigador ouve e vê, isto é, o que acontece durante a observação com o maior detalhe possível: descrições detalhadas sobre o que os participantes fazem ou reagem; descrições do local e dos materiais usados pelos participantes; conversas literais e citações diretas (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010).

3.3 SELEÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES

O processo de recolha de dados iniciou-se com a entrevista a quatro docentes do Ensino Básico. Como referimos anteriormente, os participantes foram selecionados pelo conhecimento científico que possuem – todas são professoras de Matemática –, pelo ano de escolaridade que lecionam e/ou dão explicações – duas delas são professoras do quadro que lecionaram a disciplina de Matemática ao 6.º ano de escolaridade e as outras duas são professoras contratadas, sem colocação, mas que tiveram explicandos do 6.º ano - e por conveniência da professora investigadora – são docentes que estão próximas da professora investigadora, isto é, três delas são colegas

do Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e Matemática e uma delas foi colega de Licenciatura em Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências. Foram convidadas duas docentes que se encontram a lecionar e duas docentes que se encontram a dar explicações, por se considerar uma mais-valia na recolha de informação, ou seja, para que seja possível recolher dados de profissionais com experiências distintas e assim, confrontar ideias, opiniões e práticas.

As quatro docentes são do sexo feminino, com média de idade de 37 anos e tempo de serviço compreendido entre 1,5 a 26 anos. As entrevistas foram realizadas de forma individual, nos dias 10 de maio, 1, 6 e 26 de junho, do ano de 2015, As datas agendadas, bem como os locais de realização das entrevistas foram escolhidos de acordo com a conveniência das participantes.

Ao longo desta investigação, de forma a preservar a identidade das mesmas, serão apresentadas através do código: P1, P2, P3 e P4.

Para tornar a leitura mais perceptível e objetiva, apresentamos uma tabela síntese, tabela 4, da caracterização mencionada:

Tabela 4: Síntese das características das docentes participantes

Código	Idade	Tempo de serviço (em anos)	Situação Profissional
P1	26	1,5	Prof. Contratada
P2	46	20	Docente de quadro
P3	27	1,5	Prof. Contratada
P4	49	26	Docente de quadro

No seguimento da recolha de informação, também participaram quatro alunos do 6.º ano de escolaridade, três do sexo feminino e um do sexo masculino, todos com 11 anos de idade e sem retenções. Consideramos importante ressaltar que estes alunos não são, nem foram, alunos ou explicandos das docentes participantes do estudo.

Ao longo desta investigação, de forma a preservar a identidade dos estudantes, os mesmos serão apresentados através do código: A, B, C e D.

De forma a completar a informação sobre os participantes e para tornar a leitura mais perceptível e objetiva, apresentamos, na tabela 6, uma síntese da caracterização dos mesmos.

Estes alunos, participaram em duas entrevistas (uma antes da intervenção didática e outra depois) e numa Intervenção Didática, dividida em três momentos: 1) análise e exploração de imagens com elementos da Natureza, utilizando conhecimentos de Isometrias; 2) identificação de Simetrias e criação de Isometrias e Simetrias através de frutos e 3) identificação de elementos da Natureza com presença de Isometrias ou Simetrias.

Tabela 6: Caracterização dos alunos participantes

Código	A	B	C	D
Gosta de Matemática?	<i>“Nem por isso”</i>	<i>“Sim”</i>	<i>“Mais ou menos”</i>	<i>“Sim”</i>
Sente dificuldades?	<i>“Não”</i>	<i>“Algumas”</i>	<i>“Não”</i>	<i>“Não”</i>
Classificação Final 5.º ano	4	5	4	4
Classificação Final 6.º ano	4	4	4	4
Número de retenções	0	0	0	0
Profissão ambicionada	Veterinária	Pediatra	Cirurgiã Plástica	Programador

As entrevistas e a intervenção didática foram realizadas individualmente, nos dias 13; 14; 20 e 22 de junho de 2015. As datas agendadas, bem como o local de realização foram escolhidos de acordo com a conveniência dos Encarregados de

Educação e dos participantes. Todos os participantes estudam no distrito do Porto, três dos quais no concelho de Paredes e um no concelho do Marco de Canaveses.

3.3.1 PREPARAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DAS ENTREVISTAS

Segundo Lodico, Spaulding e Voegtler (2010), a entrevista semiestruturada tem as seguintes características: possibilita a diversidade relativamente às questões e respostas; possibilidade de reformulação; e como consequência maior eficácia na resposta; papel ativo do entrevistador; oportunidade para aprofundar e recolha oral e escrita de informação. O presente estudo identifica-se com este tipo de entrevista, pois a entrevista estruturada, apesar de facilitar a análise dos dados, reduz ou anula a flexibilidade das respostas e a possibilidade de aprofundar questões que não foram pensadas anteriormente. Desta forma, foram previamente elaborados guiões para cada uma das entrevistas anteriormente mencionadas (ver apêndices 1, 2 e 3), que serviu de eixo orientador no desenvolvimento das mesmas. Todos os participantes responderam ao mesmo conjunto de questões, ou seja, as docentes P1, P2, P3 e P4 responderam às mesmas questões orientadoras do respetivo guião, bem como os alunos A,B,C e D às questões presentes no respetivo guião.

Segundo a opinião dos autores anteriormente referidos, com base nas respostas dos participantes e sempre que se verificar essencial, poderão ser colocadas subquestões que estimulem e encorajem uma resposta mais detalhada ou no sentido de obter um melhor esclarecimento acerca de uma resposta. Assim, durante a realização das entrevistas, por se verificar necessário, foram colocadas algumas questões além das que foram previamente elaboradas. Deste modo, foi possível explorar e clarificar as respostas às questões orientadoras, obtendo informação mais detalhada e verificando-se a mais-valia do grau de flexibilidade que a entrevista semiestruturada proporciona.

A realização da entrevista deve seguir determinadas etapas sequenciais, nomeadamente: a) Dar início à entrevista, apresentando-se; b) Garantir ao

entrevistado a total confidencialidade das suas respostas; c) Solicitar informação descritiva generalizada; d) Começar pelas perguntas mais gerais e menos delicadas; e) Ser neutro e f) Registrar as informações obtidas ao longo da entrevista (Lodico, Spaulding & Voegtler, 2010).

Após o início da entrevista, com a apresentação da professora investigadora, foi entregue uma breve informação para que cada uma das docentes tomasse conhecimento e registasse os dados pedidos: (ver apêndice 4).

A entrevista efetuada a cada uma das docentes teve como objetivos obter dados que ajudem a responder aos *Objetivo 1*, *Objetivo 2*, *Objetivo 3*, *Objetivo 4* e *Objetivo 5*, mencionados na introdução do presente estudo.

No caso dos participantes A, B, C e D, foi previamente entregue um pedido de autorização ao Encarregado de Educação de cada um deles (ver apêndice 5).

Após o início da entrevista, com a apresentação da professora investigadora, foi entregue uma breve informação para que cada um dos alunos tomasse conhecimento e foram registados pela investigadora os dados necessários (ver apêndice 6).

Em suma, realizamos entrevistas semiestruturadas, onde possuíamos conhecimento de todos os temas sobre os quais eram pretendidas respostas e reações por parte dos entrevistados. Para tal, foram utilizados guiões com questões orientadoras e materiais necessários (por exemplo, material de desenho e folhas de rascunho para facilitar a comunicação matemática por parte dos alunos). Verificou-se ser pertinente e vantajosa a introdução de questões adicionais. Por fim, os entrevistados responderam às mesmas perguntas e pela mesma ordem, de forma a permitir também uma análise comparativa das respostas.

As pré e pós-entrevista realizadas aos alunos tiveram como objetivos obter dados que ajudem a responder aos *Objetivo 2*, *Objetivo 3*, *Objetivo 4* e *Objetivo 5*, mencionados na introdução do presente estudo.

3.3.2 PREPARAÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA

Como referimos anteriormente, após a realização de uma pré-entrevista, quatro alunos do 6.º ano de escolaridade participaram numa Intervenção Didática, dividida em três momentos: 1) análise e exploração de imagens com elementos da Natureza, utilizando conhecimentos de Isometrias; 2) identificação de Simetrias e criação de Isometrias e Simetrias através de frutos e 3) identificação de elementos da Natureza com presença de Isometrias ou Simetrias.

Assim como as entrevistas, a Intervenção Didática foi realizada individualmente, nas datas já mencionadas, sendo construído um guião para a realização da mesma (ver apêndice 7).

Para a Intervenção Didática, tal como nas entrevistas, foram distribuídas folhas de rascunho e material de desenho (régua, compasso, transferidor) para facilitar a comunicação e raciocínio matemática dos discentes. Foram também utilizadas as imagens apresentadas no guião da intervenção didática em formato A4, frutos, um gravador áudio e uma máquina fotográfica para registo dos vários momentos apresentados no guião. Os três momentos que contam neste guião foram realizados em sessões diferentes, intervaladas por dois ou três dias. Na primeira sessão foi realizado o primeiro momento da Intervenção Didática e na segunda sessão o segundo e terceiro momento. Relembramos que a intervenção de cada participante foi realizada individualmente.

A aplicação da intervenção didática aos discentes teve como objetivos obter dados que ajudem a responder aos *Objetivo 1*, *Objetivo 2*, *Objetivo 3*, *Objetivo 4* e *Objetivo 5*, mencionados na introdução do presente estudo.

3.4 INSTRUMENTOS DE APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS RECOLHIDOS

Na opinião de Bogdan e Biklen (1994), por vezes, os dados recolhidos só aparecem a meio da investigação. Por norma, são realizados através de palavras,

desenhos, imagens, sons, entre outros. No entanto, e ainda segundo estes autores, os resultados escritos podem conter citações feitas com base nos dados recolhidos para elucidar e fortalecer a apresentação dos mesmos.

Aproveitando esta linha de pensamento e tendo em consideração os instrumentos utilizados para a recolha de dados, a apresentação dos dados será repartida em categorias e estas serão apresentadas através da elaboração de tabelas onde serão criadas subcategorias, de forma a aclarar e consolidar a exposição dos dados recolhidos e a permitir a compreensão externa e independente dos mesmos. Nestas tabelas serão apresentadas citações fiéis da informação recolhida durante a entrevista. Para completar esta informação, serão também, quando necessário, apresentados os materiais e escolhas realizadas pelos alunos através de figuras, desenhos e fotografias. Pretendemos, deste modo, utilizar tudo aquilo que ajude a perceber e a compreender o que aconteceu durante o processo de recolha de dados.

Tal como já foi referido em capítulos anteriores, os alunos participantes estão codificados em A, B, C e D e as docentes em P1, P2, P3 e P4, de forma a garantir o anonimado de todos os intervenientes deste estudo e a facilitar a apresentação e análise dos resultados obtidos.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos na presente investigação serão apresentados através de textos narrativos, citações, fotografias, figuras e desenhos. A sua análise tem como objetivo compreender o que foi recolhido e validar, ou não, os objetivos estabelecidos para esta pesquisa. Os dados recolhidos serão analisados de forma exaustiva, objetiva, rigorosa e organizada, tendo como propósito fornecer indicadores úteis aos objetivos da pesquisa, o que permite destacar as suas regularidades. Assim sendo, as categorias definidas vão ao encontro dos objetivos e questões de investigação. Reforçamos, mais uma vez, que esta análise tem em consideração as várias formas de recolha de informação anteriormente referidas.

Este capítulo está dividido em 12 subcapítulos, cujo nome diz respeito às categorias previamente estabelecidas e, cada uma delas, contem a apresentação e discussão das respetivas subcategorias, de forma a facilitar a sua leitura e interpretação. Dada a apresentação exaustiva e rigorosa dos dados, ao longo do capítulo mencionamos através de que instrumento foram recolhidos os dados em análise, de forma termos sempre presente o momento do estudo em que estamos.

4.1 ACOMPANHAMENTO DAS DIFERENÇAS PROGRAMÁTICAS E CIENTÍFICAS NO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS

Nesta categoria é apresentado e discutido o conhecimento das diferenças programáticas entre o PMEB 2007 e o PMEB 2013 por parte dos docentes, o conhecimento e acompanhamento das mudanças de natureza científica no PMEB 2013, o confronto entre o PMEB 2013 com as MC e a articulação das MC com a prática letiva dos professores, dados recolhidos através da entrevista às docentes participantes no estudo.

Tabela 4: Conhecimento das diferenças programáticas entre o PMEB 2007 e o PMEB 2013	
Discurso	Participante
(hesitação e silêncio durante 7 segundos) ... <i>“Para ser sincera, assim de repente, não.”</i>	P1
<i>“Não porque não comparei os Programas e vou tendo mais noção com o avançar das explicações.”</i>	P1
<i>“Relativamente ao Programa de 2007, ele é explorado talvez mais com atividades práticas, o que possibilitava ao aluno ver Isometrias na Natureza, poder experimentar com materiais apropriados para o estudo das Isometrias (...) Neste Programa a ênfase é dada mais nas construções e não no procurar perceber e podendo experimentar.”</i>	P2
<i>“Os alunos têm que saber construir e, até então, não lhes era pedido que construíssem.”</i>	P2
<i>“... é uma mudança completa daquilo que se fazia para aquilo que agora tem que se fazer.”</i>	P2
<i>“No meu caso, não posso ajudar muito nisso porque eu nunca lecionei o Novo Programa, que agora é o antigo Programa.”</i>	P3
<i>“No Programa 2007 basicamente eram abordadas as Simetrias e não se notavam assim outros conteúdos que agora surgem no Novo Programa.”</i>	P4
<i>“O nome dado à Isometria é exatamente Simetria. Neste momento a designação adequada é Reflexão Axial e dentro das Reflexões há outro tipo de Reflexões que não eram estudadas em 2007.”</i>	P4

Tabela 5: Conhecimento e acompanhamento das mudanças de natureza científica no PMEB 2013	
Discurso	Participante
<i>“Como explicadora, apenas me limito a reforçar os conhecimentos dos alunos, pelo que neste subdomínio apenas me preocupei em retirar possíveis dúvidas aos alunos.”</i>	P1
<i>“Não. É difícil, é complicado”</i>	P1
<i>“Eu participei numa ação de formação sobre as Metas na Universidade do Porto e depois tive que replicar na escola (...) tive conhecimento das mudanças e daquilo que se pretendia com as construções.”</i>	P2
<i>“O facto de ter que replicar isto aos meus colegas fez com que também tivesse que estudar.”</i>	P2
<i>“Eu tive o cuidado de ler as Metas e procurar saber como se faziam as construções para poder fazê-las e para poder passá-las aos alunos da melhor maneira, da maneira que eles percebessem.”</i>	P2
<i>“... é uma mudança completa daquilo que se fazia para aquilo que agora tem que se fazer.”</i>	P2
<i>“Nos livros que tenho lá de Matemática não havia a diferença entre Simetria de Reflexão, se não me engano, e aquela que é separada, que agora não me lembro o nome.”</i>	P3
<i>“Há a Simetria de Reflexão (...) tens o eixo na imagem e depois há agora outra... a Reflexão... Axial (?) Que é quando tens, por exemplo, um triângulo de um lado e tens que fazer o simétrico do outro.”</i>	P3
<i>“... estava habituada ao Programa anterior, de 2007, e notei que havia muitas diferenças, mesmo em termos de designações, que antigamente era tudo Simetria.”</i>	P3

<i>“O nome dado à Isometria é exatamente Simetria. Neste momento a designação adequada é Reflexão Axial e dentro das Reflexões há outro tipo de Reflexões que não eram estudadas em 2007.”</i>	P4
<i>“Tem que haver uma atualização de professor, tem que estudar, não pode pegar no Programa ou no manual e seguir exatamente à risca o que lá está, sem primeiro experimentar, sem se colocar no lugar do aluno. Pelo menos eu falo por mim.”</i>	P4
<i>“Portanto, a terminologia não pode ser a mesma, temos que adequar o Programa e os conceitos novos aos novos alunos que temos e preparei-me para isso.”</i>	P4
<i>“... há muitos conteúdos, nomeadamente no 2.º ciclo e as Isometrias estão no 6.º ano, que outrora eram do 8.º, 9.º e, se na altura estariam nesses níveis de ensino, é porque estariam apropriadas a essas faixas etárias.”</i>	P4
<i>“Da experiência que eu tenho e daquilo que ouço de vários professores, é que há muitos conceitos que, de facto, é demasiado cedo serem abordados em faixas etárias como o 5.º e 6.º ano.”</i>	P4

Analisando as citações apresentadas nas tabelas acima, verificamos algum desconhecimento e/ou lapsos no que respeita ao acompanhamento das diferenças programáticas e científicas no subdomínio das Isometrias, por parte de algumas docentes entrevistadas. A docente P1 demonstrou várias hesitações, algumas delas acompanhadas de pausas ou silêncios. O desconhecimento da docente P1 poderá dever-se ao facto de esta não se encontrar a lecionar. Comparando com as restantes docentes, também a docente P3 não se encontra a lecionar, e apesar de ter explicandos, demonstrou o seu desconhecimento sobre as diferenças entre os dois Programas devido a esse facto –

“No meu caso, não posso ajudar muito nisso porque eu nunca lecionei o Novo Programa, que agora é o antigo Programa.” (docente P3). De qualquer modo é evidente o desconhecimento de pontos essenciais: – *“Não porque não comparei os Programas e vou tendo mais noção com o avançar das explicações.”* (docente P1); *“... eu tenho um aluno de 6.º ano que tinha muitas dificuldades em outras áreas que eu considerava mais importantes (...) Esta matéria foi dada um bocado a correr. Então, depois eu tive que acompanhar um bocadinho mais a correr que era para poder avançar para as outras.”* (docente P3). Em termos de conhecimento do PMEB 2013 e MC e das alterações científicas por estes introduzidas, as docentes P2 e P4 exploraram um pouco mais e demonstraram mais conhecimento sobre o assunto. Ressalvamos o facto da docente P2 ter tido oportunidades diferentes de conhecimento de todas estas alterações e exigências no PMEB 2013 e respetivas MC – *“Eu participei numa ação de formação sobre as Metas na Universidade do Porto e depois tive que replicar na escola (...) tive conhecimento das mudanças e daquilo que se pretendia com as construções.”* (docente P2). No entanto, a docente P4 cometeu um pequeno lapso: *“No Programa 2007 basicamente eram abordadas as Simetrias e não se notavam assim outros conteúdos que agora surgem no Novo Programa.”*. Como podemos verificar através das tabelas 1 e 3 desta investigação, no PMEB 2007 consta a Reflexão, Rotação e Translação (noção e propriedades), Simetria Axial e Simetria Rotacional.

Tabela 6: Confronto entre o PMEB 2013 com as MC	
Discurso	Participante
“Como explicadora, (...) passo um bocado essa bola aos professores dos alunos . Eles é que estão a dar a matéria (...) e os alunos vão ser avaliados perante o que eles fazem na aula.”	P1
“Eu penso que as Metas, neste ponto, estão bastante de acordo com o Programa. ”	P2
“Acho que, realmente, as Metas estão muito esmiuçadas , o que também ajuda a perceber o que é que se pretende com este Novo Programa e, nomeadamente, nas Isometrias.”	P2
“Há uma meta para cada um dos conteúdos que se quer abordar.”	P2
“Eu acho que são fundamentais porque o Programa sem Metas ficávamos um bocadinho aéreos , digamos.”	P2
“ Não estou informada . Já confrontei com outras áreas, com esta não”	P3
“ As MC estão intimamente relacionadas com o Programa e vice-versa . Não encontro nenhum desfasamento entre o Programa e as MC.”	P4
“Num Programa , à partida, é sempre muito mais específico , vai muito ao pormenor, à especificidade das tarefas em si, ao conceito; a meta não tem por objetivo, não tem por intenção esmiuçar os conceitos e os conteúdos ”	P4

<i>“As Metas acabam por ser mais abrangentes que o próprio Programa (...) As novas Metas da Matemática, no fundo elas acabam por ter os mesmos pressupostos do Programa anterior, só de uma forma, se calhar, mais “crua”, menos descritiva, valorizando menos determinado tipo de competências ao nível sócio afetivo...”</i>	P4
<i>“... acabam por ser um conjunto de indicações muito mais científicas, muito mais viradas para o conteúdo, para o saber, para a memorização, para a experimentalização da Matemática.”</i>	P4
<i>“... há muitos conteúdos, nomeadamente no 2.º ciclo e as Isometrias estão no 6.º ano, que outrora eram do 8.º, 9.º e, se na altura estariam nesses níveis de ensino, é porque estariam apropriadas a essas faixas etárias.”</i>	P4
<i>“Da experiência que eu tenho e daquilo que ouço de vários professores, é que há muitos conceitos que, de facto, é demasiado cedo serem abordados em faixas etárias como o 5.º e 6.º ano.”</i>	P4

Tabela 7: Articulação das MC com a prática letiva dos professores	
Discurso	Participante
<i>“Limito-me a guiar-me pelo que os professores dão nas aulas e tiro as dúvidas dos alunos mediante a forma como lhes foi dada a matéria.”</i>	P1
<i>“Articulo com a forma com que o professor trabalha e não com as Metas.”</i>	P1
<i>“Compete-me ir da forma como o professor escolheu dar a matéria e seguir... explicar à criança o que ela precisa de saber.”</i>	P1
<i>“Eu tive o cuidado de ler as Metas e procurar saber como se faziam as construções para poder fazê-las e para poder passa-las aos alunos da melhor maneira, da maneira que eles percebessem.”</i>	P2
<i>“Eu acho que, ao longo do ano, fui percebendo que as Metas não eram para saber de cor de salteado (...) Muitas vezes eu tenho que ir buscar o documento das Metas, voltar a lê-las...”</i>	P2
<i>“... tem-me ajudado imenso, por exemplo, ver meta a meta se eu já fiz aquilo na minha sala.”</i>	P2
<i>“Quando faço um teste, vou lá vejo «eu quero fazer este exercício porque o meu objetivo é chegar àquela meta».”</i>	P2
<i>“Quando se está a elaborar um teste, ajudam porque nos canalizam mesmo para aquilo que é pedido ao aluno.”</i>	P2
<i>“Eu acho que são fundamentais porque o Programa sem Metas ficávamos um bocadinho aéreos, digamos.”</i>	P2
<i>“Sim, penso que sim. Ele conseguiu atingir os objetivos, até foi uma matéria em que ele se desenrascou bem.”</i>	P3

<i>“Na escola onde eu trabalho, tudo o que é feito a nível pedagógico-didático, é feito em trabalho colaborativo. Portanto, logo à partida, quando nós programamos a gestão do Programa, fazemos a planificação e essa planificação é feita com base nos documentos oficiais, nomeadamente Metas e Programas.”</i>	P4
--	----

Face à alteração programática, à introdução das MC e à sua articulação, também observamos uma postura diferente entre as docentes contratadas e as docentes de quadro: *“Limito-me a guiar-me pelo que os professores dão nas aulas e tiro as dúvidas dos alunos mediante a forma como lhes foi dada a matéria.”*; *“Articulo com a forma com que o professor trabalha e não com as Metas.”* (docente P1) e *“Não estou informada. Já confrontei com outras áreas, com esta não.”* (sobre o confronto entre o atual Programa e as MC). Como podemos observar através da consulta das tabelas anteriores, as docentes P2 e P4 demonstram uma postura claramente diferente. É fácil, e talvez precipitado, afirmar que o conhecimento demonstrado pelas docentes P2 e P4 se deve, não só à postura demonstrada, mas também ao facto de estas se encontrarem a lecionar e terem uma grande diferença ao nível do tempo de serviço em relação às docentes P1 e P3, uma vez que uma delas (docente P4) cometeu outro lapso, entrando em algumas contradições. Vejamos: Ao confrontar o PMEB 2013 com as MC, a docente P4 começa por explicar que *“Num Programa, à partida, é sempre muito mais específico, vai muito ao pormenor, à especificidade das tarefas em si, ao conceito; a meta não tem por objetivo, **não tem por intenção esmiuçar os conceitos e os conteúdos**”*, contradizendo-se posteriormente com a conclusão de que as metas *“... acabam por ser um **conjunto de indicações muito mais científicas, muito mais viradas para o conteúdo, para o saber, para a memorização, para a experimentalização da Matemática.**”*. Além da contradição evidente, consideramos que a sua visão está

incorreta. No nosso ponto de vista, um Programa parte de algo mais abrangente, convergindo em conteúdos mais específicos, enquanto que as MC nos ajudam a entender as especificidades inerentes ao Programa através de indicações minuciosas e extremamente científicas daquilo que se pretende desenvolver e atingir.

4.2 DIFICULDADES SENTIDAS PELOS PROFESSORES NA PREPARAÇÃO E LECIONAÇÃO DO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS

Na presente categoria são apresentadas e discutidas as dificuldades sentidas por parte das docentes quer na preparação, bem como na leção do subdomínio das Isometrias e as estratégias adotadas para colmatar essas dificuldades. São ainda analisadas as dificuldades por elas detetadas nos alunos na compreensão e apreensão do subdomínio das Isometrias e as estratégias utilizadas para as colmatar. Estes dados também foram recolhidos através da entrevista às docentes participantes no estudo.

Tabela 8: Dificuldades sentidas pelos professores na <u>preparação</u> do subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“É complicado eu estar a dizer isto como explicadora, porque quando eles chegam até mim já abordaram esta questão, já lhes foi explicado.”</i>	P1
<i>“São coisas mínimas, não são dúvidas que eu tenho que explicar novamente o conceito ou que exijam uma estratégia diferente.”</i>	P1
<i>“Dificuldades na preparação não encontrei muitas sinceramente. As próprias Metas têm o documento de apoio às Metas, que tinha lá algumas abordagens do tema e bem elaboradas, por isso eu li isso.”</i>	P2
<i>“Agora vejo que alguns colegas têm alguma dificuldade porque é uma mudança completa daquilo que se fazia para aquilo que agora tem que se fazer.”</i>	P2
<i>“... eu acho que os professores muitas vezes não querem arriscar porque também eles nunca fizeram... «não vou fazer uma coisa que eu nunca fiz» por medo.”</i>	P2
<i>“Para mim foi difícil porque estava habituada ao Programa anterior, de 2007, e notei que havia muitas diferenças, mesmo em termos de designações, que antigamente era tudo Simetria.”</i>	P3
<i>“No início tive um bocadinho de dificuldade em entender o que era o quê por causa dessas diferenças, muitas a nível de designação.”</i>	P3
<i>“Até eu entender o que era antes e o que é agora... isso foi a parte que eu senti mais dificuldade.”</i>	P3

<i>“Não encontrei dificuldades de maior. A única diferença é que, durante vários anos, o professor acostuma-se, quase de olhos fechados, a programar essas aulas e, de repente, há um outro número de conteúdos e de conceitos que tem de acrescentar e para os quais tem de estar alerta.”</i>	P4
<i>“E mesmo em termos de terminologia, de linguagem científica, tem que ter algum cuidado porque já não se pode falar da Simetria como se falava...”</i>	P4

No que respeita às dificuldades sentidas pelas docentes na preparação do subdomínio das Isometrias verificamos, mais uma vez, um distanciamento entre a docente P1 e as restantes. A docente P1 não, que não se encontra a lecionar, prestando apoio extracurricular a alunos, volta a diferenciar este papel do papel do professor, parecendo atribuir ao segundo a responsabilidade desta função, *“É complicado eu estar a dizer isto como explicadora, porque quando eles chegam até mim já abordaram esta questão, já lhes foi explicado.”*; *“São coisas mínimas, não são dúvidas que eu tenho que explicar novamente o conceito ou que exijam uma estratégia diferente.”* (docente P1).

Embora as docentes que se encontram a lecionar (P2 e P4) se destaquem por não terem encontrado grandes dificuldades na preparação deste subdomínio, provavelmente devido à sua postura face ao conhecimento das alterações programáticas e consulta das MC, como verificamos anteriormente, todas elas (docentes P2, P3 e P4) vão ao encontro umas das outras, como podemos verificar através da consulta da tabela anterior.

Tabela 9: Dificuldades sentidas pelos professores na <u>lecionação</u> do subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“Ao nível das explicações o mais difícil é trabalhar as Rotações... Não vejo problemas na Reflexão, muito menos na Translação.”</i>	P1
<i>“Acho que é fácil porque é uma coisa prática... não é prática, mas que se consegue ensinar.”</i>	P1
<i>“O constrangimento que eu senti foi quando comecei a dar isso na aula: Parecia-me que todos estavam a perceber quando fiz no quadro, mas depois, indo lugar a lugar, eu percebi que muitos alunos tinham dificuldades.”</i>	P2
<i>“Eu acho que o facto de ter agora tantas designações complica um bocado mais.”</i>	P3
<i>“Da experiência que eu tenho e daquilo que ouço de vários professores, é que há muitos conceitos que, de facto, é demasiado cedo serem abordados em faixas etárias como o 5.º e 6.º ano.”</i>	P4

Ao nível da lecionação, as docentes dão informações distintas: *“Ao nível das explicações o mais difícil é trabalhar as Rotações...”* (docente P1), *“... Parecia-me que todos estavam a perceber quando fiz no quadro, mas depois, indo lugar a lugar, eu percebi que muitos alunos tinham dificuldades.”* (docente P2), *“Eu acho que o facto de ter agora tantas designações complica um bocado mais.”* (docente P3) e *“... há muitos conceitos que, de facto, é demasiado cedo serem abordados em faixas etárias como o 5.º e 6.º ano.”* (docente P4). Parece-nos que a grande dificuldade não é a lecionação do subdomínio em si ou de um determinado conceito, mas sim o facto dos conhecimentos serem apreendidos pelos alunos. À exceção da docente P1, que dá o exemplo específico das Rotações e da docente P3, cujo obstáculo é a quantidade

de designações, a docente P2 dá um exemplo que (isolado ou associado aos exemplos das docentes P1 e P3) vai ao encontro da problemática mencionada pela docente P4 – a maturidade dos alunos. Tendo em mente os exemplos referidos, acreditamos que a dificuldade na lecionação deste subdomínio está na capacidade real dos alunos compreenderem o que estão a ver, perceberem e distinguirem verdadeiramente as várias designações (conceitos abordados) e, posteriormente, conseguir aplicá-los a um nível mais prático.

Tabela 10: Estratégias utilizadas para colmatar as dificuldades encontradas na preparação e lecionação do subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“Com papel vegetal ou vendo uma animação onde eles veem a imagem a mexer. É uma coisa que é visível e isso facilita o explicar essa matéria aos meninos.”</i>	P1
<i>“As próprias Metas têm o documento de apoio às Metas, que tinha lá algumas abordagens do tema e bem elaboradas, por isso eu li isso.”</i>	P2
<i>“Vários livros que pude consultar, também facilmente se percebe.”</i>	P2
<i>“Tudo o que tínhamos que construir, fiz em papel vegetal e na aula, tudo o que eles faziam era decalcado em papel vegetal para ter a certeza que todos sabiam fazer.”</i>	P2
<i>“Normalmente, utilizo muito os materiais manipuláveis e tenho bastantes coisas feitas, principalmente em acetato.”</i>	P2

<i>“Também recorri muito à fotografia, nomeadamente fotografias dali da zona onde dou aulas. (...)“Eu tenho bastantes fotografias do Mosteiro de Leça do Balio e fiz toda esta abordagem com estas fotografias, onde eles podiam ver a Rotação, podiam ver a Reflexão.”</i>	P2
<i>“Outro meio que eu usei também (...) foi a Escola Virtual (...) tem construções feitas passo a passo e isso ajuda porque eu podia parar, ver se todos os alunos já tinham feito e continuar.”</i>	P2
<i>“Usei também o material de desenho. A régua, o compasso, o transferidor.”</i>	P2
<i>“Foi estudar através dos manuais.”</i>	P3
<i>“... os livros que eu tinha eram todos de 2007. Então precisei comparar com os livros do meu aluno das explicações, que era para ver quais eram as diferenças e quais os exercícios que eu podia usar ou não.”</i>	P3
<i>“A Escola Virtual⁶ (...) e os materiais do projeto da autora, que nos são fornecidos. Tem coisas muito bem feitas e, por isso, é sempre bom usar e mostrar aos alunos.”</i>	P4

Nas estratégias utilizadas, encontramos recursos que são várias vezes mencionados na tabela anterior e ao longo da presente investigação, nomeadamente o recurso ao papel vegetal e a animações, o recurso a manuais e comparações entre eles. A docente P2 refere

⁶ A **Escola Virtual** é um projeto de ensino já adotado por muitas escolas do país, que converte os conteúdos das disciplinas do 1.º ao 12.º ano de escolaridade em aulas interativas. In <http://www.escolavirtual.pt/> consultado em: 27 de agosto de 2016

ainda a Escola Virtual, que é um recurso também indicado pela docente P4 no decorrer deste trabalho. Demonstra que reutiliza materiais manipuláveis realizados pela própria – “Normalmente, utilizo muito os materiais manipuláveis e tenho bastantes coisas feitas, principalmente em acetato.” (docente P2) – mas também faz por contextualizar o conteúdo com o meio que a rodeia – “Também recorri muito à fotografia, nomeadamente fotografias dali da zona onde dou aulas.” (docente P2). Por fim é a única que menciona diretamente algo importante, tendo em conta a exigência do PMEB 2013 e MC ao nível das construções isométricas – “Usei também o material de desenho. A régua, o compasso, o transferidor.” (docente P2). No entanto, não podemos afirmar que as restantes docentes também não usem o material de desenho, apesar de não o terem mencionado diretamente.

Tabela 11: Dificuldades detetadas nos alunos na compreensão e apreensão do subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
(silêncio durante 6 segundos, seguindo-se um suspiro); Hesitando: “é uma matéria que eu acho que a maior parte dos alunos consegue chegar lá... não é um conceito abstrato , eles conseguem pegar na imagem e transformá-la.”	P1
“Os alunos até conseguem identificar as rotações mas depois têm dificuldades em encontrar o centro e o ângulo de Rotação . Essa parte das Isometrias é a mais problemática.”	P1
“A Simetria de Rotação é problemática... eles conseguem dizer «ok esta imagem tem Simetria de Rotação», mas não conseguem dizer o ângulo. ”	P1

<i>“Eles percebem o que é, mas depois na prática têm dificuldade em fazer o problema quando lho apresentam com uma Isometria.”</i>	P1
<i>“Eles têm a noção mas se mudamos um bocado a apresentação do problema, eles perdem-se.”</i>	P1
<i>“Os alunos não conseguem manipular os materiais e, portanto, para fazerem uma Rotação têm imensa dificuldade.”</i>	P2
<i>“Tudo o que faz com que eles tenham que mexer no material de desenho, dificulta-lhes imenso e eles têm muita dificuldade.”</i>	P2
<i>“Eles aparentemente compreendem, pronto. (...) A dificuldade vem quando eles começam a construir.”</i>	P2
<i>“A dificuldade maior é na construção, principalmente na Rotação porque eles precisam de transferidor e é um instrumento que eles têm imensa dificuldade em manipular.”</i>	P2
<i>“Eles veem uma Rotação como qualquer coisa que roda, mas depois têm muita dificuldade em saber que pode haver uma Rotação no sentido positivo ou no sentido negativo.”</i>	P2
<i>“Chega a uma altura que eles sabem identificar, olhando para o exercício até conseguem fazer, mas não sabem dizer o que é que aquilo é.”</i>	P3
<i>“Na experiência que eu tenho, a certa altura ele confundia tudo: ele conseguia fazer os exercícios mas a nível de nome, designação das coisas, acho que ele fazia confusão.”</i>	P3
<i>“Eu acho que na parte das rotações, eles não têm maturidade suficiente para fazer esse tipo de exercício.”</i>	P3

<i>“Eles não conseguem visualizar como é que a imagem vai ficar, por isso, depois não conseguem ser críticos em relação ao resultado que têm, eles não conseguem dizer «deu-me assim mas isto não pode ser assim».”</i>	P3
<i>“Pronto, isto eu já tinha dito: eu acho que cognitivamente eles ainda não têm para alguns dos exercícios que lhes são pedidos, sobretudo na parte da Rotação.”</i>	P3
<i>“... a motricidade deles muitas vezes não permite que os desenhos fiquem tão perfeitos...”</i>	P3
<i>“Usar o compasso em vez da régua para as medições, porque a medida é 5cm e eles põem 4,5 e com o compasso, fazendo a abertura, acho que é mais fácil para eles.”</i>	P3
<i>“Eles acham sempre que vão encontrar lá uma Reflexão ou Rotação, por isso, se calhar seria importante usar imagens que não tenham nada.”</i>	P3
<i>“Da experiência que eu tenho e daquilo que ouço de vários professores, é que há muitos conceitos que, de facto, é demasiado cedo serem abordados em faixas etárias como o 5.º e 6.º ano.”</i>	P4
<i>“A maior dificuldade é exatamente o manuseamento dos materiais de desenho (...) a falta de rigor.”</i>	P4
<i>“Os alunos, à medida que os anos vão passando e eu já dou aulas há alguns anos, cada vez têm menos domínio de questões de manualidade.”</i>	P4
<i>“Nota-se que eles não são assim muito rigorosos nas construções geométricas.”</i>	P4
<i>“E depois há aqueles que nem é só uma questão de falta de rigor, é não ter mesmo a menor noção daquilo que estão a fazer.”</i>	P4

<i>“Têm dificuldade em visualizar, a duas dimensões, aquilo que têm que construir.”</i>	P4
<i>“A dificuldade de compreensão é muito mais situada no ponto em que têm que ser eles próprios a fazer a construção.”</i>	P4
<i>“... esse sentido, do que é uma Isometria acho que eles não têm dificuldade em entender e com a projeção de imagens e animações eles veem muito bem.”</i>	P4
<i>“Depois, quando passam à prática, quando passam à construção efetuada por eles próprios dessas Isometrias, aí é que vêm as maiores dificuldades.”</i>	P4

No que concerne às dificuldades detetadas nos alunos, verificamos que há várias referências em comum. Destas, houve três que tiveram mais destaque: Rotação, manipulação de materiais de desenho e, como consequência, construção de Isometrias. Este facto leva-nos a constatar que os alunos acabam por ter uma ideia intuitiva dos conceitos, mas apresentam falhas ao nível prático.

Verificam-se, ainda, algumas divergências interessantes: “... **não é um conceito abstrato**, eles conseguem pegar na imagem e transformá-la”»; “Eles percebem o que é, mas depois na prática têm dificuldade em fazer o problema quando lho apresentam com uma Isometria”; “Eles têm a noção mas se mudamos um bocado a apresentação do problema, eles perdem-se.” (docente P1), “**Eles não conseguem visualizar como é que a imagem vai ficar**, por isso, depois não conseguem ser críticos em relação ao resultado que têm, eles não conseguem dizer «deu-me assim mas isto não pode ser assim».” (docente P3) e “E depois há aqueles que nem é só uma questão de falta de rigor, **é não ter mesmo a menor noção daquilo que estão a fazer.**” (docente P4).

São ainda referidos dois aspetos importantes, que consideramos estarem intimamente relacionados: a maturidade e motricidade dos alunos deste ciclo escolar e a importância/exigência dada às construções pelo atual Programa e MC: “Tudo o que faz com que eles tenham que mexer no material de desenho, dificulta-lhes imenso e eles têm muita dificuldade.” (docente P2), “Eu acho que na parte das rotações, eles não têm maturidade suficiente para fazer esse tipo de exercício.” (docente P3), “Da experiência que eu tenho e daquilo que ouço de vários professores, é que há muitos conceitos que, de facto, é demasiado cedo serem abordados em faixas etárias como o 5.º e 6.º ano.”; “Nota-se que eles não são assim muito rigorosos nas construções geométricas.” (docente P4). Na opinião da docente P2 “estas coisas só se aprendem fazendo e eles muitas não conseguem fazer. Agora, se me perguntarem se isto é difícil

para eles, acho que sim, é um bocadinho difícil. Acho que os alunos (...) muitas vezes não conseguem, na cabeça deles, pensarem o que é uma Isometria, não têm noção do que é uma Rotação (...) Eu acho que é um bocado cedo e eles apresentam muitas dificuldades.”

Como poderemos verificar mais adiante, todas estas dificuldades foram detetadas nos alunos que participaram no presente estudo. Ressalvamos, novamente, que os alunos participantes não foram alunos das docentes participantes.

Tabela 12: <u>Estratégias</u> utilizadas para colmatar as dificuldades encontradas nos alunos	
Discurso	Participante
<i>“Como não tenho de dar o conteúdo, mas sim tirar dúvidas dos alunos em exercícios mais específicos, acabo por utilizar exercícios mais simples.”</i>	P1
<i>“Faço uma espécie de desconstrução do problema do aluno em tarefas mais simples que, depois de realizadas ajudam os alunos a resolver ou a esclarecer o seu problema inicial.”</i>	P1
<i>“Utilizo imagens mais simples primeiro e depois voltamos à imagem do problema.”</i>	P1
<i>“Com papel vegetal ou vendo uma animação onde eles veem a imagem a mexer. É uma coisa que é visível e isso facilita o explicar essa matéria aos meninos.”</i>	P1
<i>“São coisas mínimas, não são dúvidas que eu tenho que explicar novamente o conceito ou que exijam uma estratégia diferente.”</i>	P1
<i>“Tento ir à parte que eles sabem. Aproveitar o que eles sabem e daí ir, devagarinho, chegando à solução do problema.”</i>	P1
<i>“Tudo o que tínhamos que construir, fiz em papel vegetal e na aula, tudo o que eles faziam era decalcado em papel vegetal para ter a certeza que todos sabiam fazer.”</i>	P2
<i>“Eu tenho bastantes fotografias do Mosteiro de Leça do Balio e fiz toda esta abordagem com estas fotografias, onde eles podiam ver a Rotação, podiam ver a Reflexão.”</i>	P2

<i>“Uma das estratégias que eu usei, principalmente na Rotação, eu procurei primeiro explicar muito bem através da Escola Virtual, mesmo o que era o sentido positivo e negativo e depois, eu acho que isto é fundamental exercitar com muitos exercícios”</i>	P2
<i>“Fiz a experiência, por exemplo, o ângulo de Rotação que eles faziam 360°, por exemplo no hexágono: $360^\circ : 6$ que dá 60° (...) e eles escreviam no caderno $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$; $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.”</i>	P2
<i>“Se era um heptágono regular, então eles faziam a dividir por 7 e faziam sempre este raciocínio (...) eles perceberam realmente que podiam haver várias rotações.</i>	P2
<i>“Através da resolução de exercícios.”</i>	P3
<i>“Nas explicações não é bem como quando estamos a dar aulas. Por isso, fazer exercícios, conversar com ele sobre... mostrar-lhe diferentes exemplos. Basicamente é isso.”</i>	P3
<i>“Usar o compasso em vez da régua para as medições, porque a medida é 5cm e eles põem 4,5 e com o compasso, fazendo a abertura, acho que é mais fácil para eles.”</i>	P3
<i>“Na fase inicial, quando são apresentados diferentes tipos de Isometrias, eu começo logo pelo étimo da palavra... Isometria, igual medida; são transformações em que a um objeto corresponde uma imagem, mas segmentos com o mesmo comprimento, transformados noutros segmentos com o mesmo comprimento...”</i>	P4
<i>“Não conheço outra que seja o acompanhamento individual, aluno por aluno.”</i>	P4
<i>“Se estivermos a fazer para aquele próprio aluno, no seu caderno, exemplificando e mostrando como é, a atenção é logo redobrada.”</i>	P4

Relativamente às estratégias utilizadas para colmatar as dificuldades encontradas nos alunos, verificamos que algumas ideias são comuns às docentes entrevistadas, nomeadamente, partir de tarefas ou imagens mais simples, evoluindo para algo mais complexo; aproveitar os conhecimentos dos alunos e o étimo da palavra Isometria como ponto de partida; privilegiar o compasso em detrimento da régua para facilitar o rigor; exercitação; variedade de exemplos; recurso ao papel vegetal e Escola Virtual para facilitar as construções, utilização de imagens do meio onde se encontra o estabelecimento de ensino, de forma a contextualizar os conceitos matemáticos com o mesmo e acompanhamento individual do aluno.

4.3 TIPO DE ESTRATÉGIAS, RECURSOS E INSTRUMENTOS UTILIZADOS NO ENSINO DO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS

Relativamente a esta categoria apresentamos as estratégias, os recursos e os instrumentos utilizados pelas docentes participantes no estudo. Além desta informação, recolhemos junto dos alunos participantes, dados sobre a categoria em discussão, relativamente a cada um dos seus/suas professores(as). Assim, a tabela seguinte reúne os dados recolhidos através da entrevista realizada às docentes participantes e da entrevista realizada aos alunos participantes antes da Intervenção Didática.

Tabela 13: Tipo de estratégias, recursos e instrumentos utilizados no ensino do subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“Quando lecionei usava muito o papel vegetal para decalcar ou então o GeoGebra.”</i>	P1
<i>“Tirei uma formação neste Programa quando lecionava e, portanto, de vez em quando uso os materiais que produzi.”</i>	P1
<i>“Como não tenho de dar o conteúdo, mas sim tirar dúvidas dos alunos em exercícios mais específicos, acabo por utilizar exercícios mais simples.”</i>	P1
<i>“Utilizo imagens mais simples primeiro e depois voltamos à imagem do problema.”</i>	P1
<i>“Com papel vegetal ou vendo uma animação onde eles veem a imagem a mexer. É uma coisa que é visível e isso facilita o explicar essa matéria aos meninos.”</i>	P1
<i>“Tudo o que tínhamos que construir, fiz em papel vegetal e na aula, tudo o que eles faziam era decalcado em papel vegetal para ter a certeza que todos sabiam fazer.”</i>	P2
<i>“Usei muitas vezes acetatos sobre as fotografias para eles poderem fazer os movimentos de Translação, de Rotação, de Reflexão.”</i>	P2
<i>“Outro meio que eu usei também (...) foi a Escola Virtual (...) tem construções feitas passo a passo e isso ajuda porque eu podia parar, ver se todos os alunos já tinham feito e continuar.”</i>	P2
<i>“Usei também o material de desenho. A régua, o compasso, o transferidor.”</i>	P2
<i>“Eu também tenho usado muito agora para trabalhar as Isometrias, o origami (...) Fizemos um manjerico (...) eu só precisava de uma parte dele e rodava e dava o manjerico todo...”</i>	P2

“... Principalmente na parte dos desenhos, visto que a motricidade deles muitas vezes não permite que os desenhos fiquem tão perfeitos, procuro estratégias para facilitar isso.”	P3
“ Usar o compasso em vez da régua para as medições, porque a medida é 5cm e eles põem 4,5 e com o compasso, fazendo a abertura, acho que é mais fácil para eles.”	P3
“Há até uma imagem na internet (isto eu não uso nas explicações mas costumava usar nas minhas aulas) que é manipulada , que é para ser estritamente simétrica: tem um sinal de cada lado e eu usava isso para chamar à atenção dos alunos, se eles achavam que a imagem era verdadeira, se não era.”	P3
“Numa fase de motivação, numa fase de iniciação de tarefas utilizo muitas vezes os recursos facultados pelo projeto da autora , nomeadamente animações em que eles visualizam construções e transformações isométricas com movimento, com cor, com som.”	P4
“Depois existe aquela fase do desenvolvimento em que eles têm mesmo que passar à construção das Isometrias com base nos instrumentos de desenho ... compasso, régua, transferidor, etc.”	P4
“E numa fase posterior, peço-lhes que façam construções com carácter mais decorativo para a sala de aula, nomeadamente a construção de frisos, rosáceas (...) onde se veem as transformações isométricas que eles aprenderam.”	P4
“É, é habitual o uso de imagens e é habitual o uso da manipulação de materiais .”	P4
“Nas Isometrias, muito na base de imagens , como há bocado se referiu, da Natureza, construções humanas, edifícios .”	P4
“Agora, os projetos das editoras estão muito competitivos, estão muito completos, trazem imenso material, coisas muito bem-feitas, que o próprio professor não é capaz de fazer sozinho.”	P4

<i>“... materiais usados na altura, construídos pelo próprio professor, eu usava e baseava-me muito, por exemplo, (...) fazia muitas vezes aquelas experiências de pegar numa folha de papel e fazer com os borrões, fazer dobragens e ver o que é que se obtinha depois de desdobrar; por exemplo, dobrando tiras de papel em harmónica, fazer alguns recortes e, depois de abrir, ver qual era o friso que nos surgia e já tínhamos o ponto de partida para falar sobre as translações, sobre as translações deslizantes.”</i>	P4
<i>“Muito nessa base mais rudimentar mas, se calhar, os alunos até gostavam. Também eram levados a ser eles próprios a construir esses materiais.”</i>	P4

Analisando a tabela anterior, podemos observar exemplos já mencionados neste estudo, como a utilização de tarefas/exemplos mais simples antes de regressar ao problema em questão e utilização do papel vegetal e das animações para facilitar o ensino das construções. Nesta fase averiguamos que as docentes não recorrem apenas à Escola Virtual para este fim, mas também ao programa matemático GeoGebra – *“Quando lecionei usava muito o papel vegetal para decalcar ou então o GeoGebra.”* (docente P1) e *“Outro meio que eu usei também (...) foi a Escola Virtual (...) tem construções feitas passo a passo e isso ajuda porque eu podia parar, ver se todos os alunos já tinham feito e continuar.”* (docente P2).

A utilização dos instrumentos de desenho (régua, compasso e transferidor), que tinha sido pouco mencionada, ganha maior evidência. Outros exemplos interessantes são o recurso a materiais manipuláveis como a utilização de acetatos sobre fotografias e o origami, a utilização de imagens da Natureza e construções humanas como concretização de conceitos, os recursos facultados pelo projeto da autora com a finalidade de facilitar a visualização de construções isométricas (mencionado pela docente P4) e ainda a referência a *“construções com carácter mais decorativo para a sala de aula”* (docente P4).

Mais uma vez, estamos perante a problemática anteriormente referida – “...
*Principalmente na parte dos desenhos, visto que a motricidade deles muitas vezes não
permite que os desenhos fiquem tão perfeitos, procuro estratégias para facilitar isso.*”
(docente P3).

4.4 PROMOÇÃO DO USO DAS IMAGENS COM ELEMENTOS DA NATUREZA

Para averiguarmos a promoção do uso das imagens com elementos da Natureza, analisámos recursos mais específicos – as imagens – dentro das quais, as imagens com elementos da Natureza, se são utilizadas e como são exploradas. Além destes temas, averiguamos a imagem com elementos da Natureza como uma mais-valia para a prática docente e ensino das Isometrias e como recurso facilitador e/ou motivador da aprendizagem do subdomínio das Isometrias. Estes dados, foram também recolhidos junto das docentes e dos alunos participantes no estudo.

Tabela 14: Utilização de imagens na prática letiva	
Discurso	Participante
<i>“Devo confessar que utilizo mais imagens geométricas, os sinais de trânsito.”</i>	P1
<i>“Sim, normalmente uso imagens.”</i>	P2
<i>“Eu penso que as imagens não se devem usar só no início. E não usei só no início e usei no teste.”</i>	P2
<i>“Eu tenho bastantes fotografias do Mosteiro de Leça do Balio e fiz toda esta abordagem com estas fotografias, onde eles podiam ver a Rotação, podiam ver a Reflexão.”</i>	P2
<i>“Coloquei uma roda gigante, que é uma coisa que eles estão habituados a ver, e as cadeirinhas faziam um determinado ângulo de Rotação.”</i>	P2
<i>“Não vejo problema nenhum que se usem as imagens.”</i>	P2
<i>“Eu acho que cada vez mais e, vendo agora este novo Programa, cada vez mais as imagens são polígonos.”</i>	P2
<i>“As imagens podem ser repetitivas e limitativas e acho que não devem ser.”</i>	P2
<i>“Uso imagens sim, da Natureza não.”</i>	P3
<i>“Uso as imagens dos manuais, até porque nas explicações eu tenho que seguir aquilo que o professor do aluno faz.”</i>	P3
<i>“Há até uma imagem na internet (isto eu não uso nas explicações mas costumava usar nas minhas aulas) que é manipulada, que é para ser estritamente simétrica: tem um sinal de cada lado e eu usava isso para chamar à atenção dos alunos, se eles achavam que a imagem era verdadeira, se não era.”</i>	P3

<i>“É, é habitual o uso de imagens e é habitual o uso da manipulação de materiais.”</i>	P4
<i>“... é mesmo assim que eu trabalho já há bastantes anos.”</i>	P4
<i>“Eu própria, quando estou a preparar temas novos como foi o caso de alguns aspetos das Isometrias, eu sinto-me mais confortável se estiver a concretizar aquilo que estou a fazer.”</i>	P4
<i>“Nas Isometrias, muito na base de imagens, como há bocado se referiu, da Natureza, construções humanas, edifícios.”</i>	P4
<i>“... anda muito na base de imagens naturais e também construções humanas.”</i>	P4
<i>“Por exemplo, as imagens refletidas na superfície da água. São imagens da Natureza muito sugestivas.”</i>	P4
<i>“As imagens do manual (...) Usou quadrados, hexágonos e depois começou com letras.”</i>	A
<i>“Sinais de trânsito (...) Ah, apareceu só uma borboleta... Acho eu.”</i>	A
<i>“Não foi bem imagens, foi mais figuras (...) figuras geométricas, só.”</i>	B
<i>“A minha professora não desenhou muita coisa. Por exemplo: ela traz coisas de casa, tipo papéis que temos que dobrar.”</i>	C
<i>“Ela dava papéis em branco que tínhamos que dobrar para dar as Simetrias porque nas Simetrias temos que unir ponto por ponto.”</i>	C
<i>“Eu lembro-me que ela desenhou um hexágono. Acho que foi para explicar a Rotação.”</i>	C
<i>“No livro tem uma parte de explicação e outra de exercícios e nessa parte de explicação tem lá desenhos e, então eu lembrei-me da borboleta.”</i>	C

<i>“Também tinha uma mão cortada ao meio que nós tínhamos que completar. Estava a tracejado e nessa parte nós tínhamos que desenhar e o resto estava a mão normal.”</i>	C
<i>“Aqueles que eu fiz (referindo-se a figuras geométricas) e depois figuras criadas mesmo por nós. Fazemos nós a figura e tentamos descobrir como é que é a Reflexão dessa figura.”</i>	D
<i>“Começou com mais simples e depois foi complicando (...) o quadrado, o triângulo.”</i>	D

Assim, apuramos que as docentes têm por hábito utilizar imagens diversas mas privilegiam o uso de polígonos, sobretudo porque os manuais se centram nos mesmos – *“Devo confessar que utilizo mais imagens geométricas, os sinais de trânsito.”*; *“Vêm mais imagens ligadas à Natureza na parte introdutória e depois começam a complicar, a explorar mais as figuras geométricas.”* (docente P1), *“Eu acho que cada vez mais e, vendo agora este novo Programa, cada vez mais as imagens são polígonos.”* (docente P2) e *“Uso as imagens dos manuais, até porque nas explicações eu tenho que seguir aquilo que o professor do aluno faz.”* (docente P3) – ideia corroborada pelos alunos participantes – *“As imagens do manual (...) Usou quadrados, hexágonos e depois começou com letras.”*; *“Sinais de trânsito (...) Ah, apareceu só uma borboleta... Acho eu.”* (participante A), *“Não foi bem imagens, foi mais figuras (...) figuras geométricas, só.”* (participante B), *“No livro tem uma parte de explicação e outra de exercícios e nessa parte de explicação tem lá desenhos e então eu lembrei-me da borboleta.”* (participante C) e *“Aqueles que eu fiz (referindo-se a figuras geométricas) e depois figuras criadas mesmo por nós. Fazemos nós a figura e tentamos descobrir como é que é a Reflexão dessa figura.”* (participante D).

No entanto, verifica-se que quase todas as docentes tentam concretizar os conceitos, contextualizando-os com exemplos do dia-a-dia (incluindo elementos da Natureza) e comparações com o corpo humano – *“Eu faço muitas vezes este exemplo: do nosso rosto. Basta que tenha um sinal de um lado que o outro lado não tem.”* (docente P2), *“Há até uma imagem na internet (isto eu não uso nas explicações mas costumava usar nas minhas aulas) que é manipulada, que é para ser estritamente simétrica: tem um sinal de cada lado e eu usava isso para chamar à atenção dos alunos, se eles achavam que a imagem era verdadeira, se não era.”*; *“Há sempre aquela dificuldade que às vezes os alunos têm do «estou a aprender isto para quê?». Então, se nós mostrarmos que existe na Natureza, até para eles compreenderem o mundo que está à volta deles, acho que se torna mais interessante.”* (docente P3) e *“É importante para que eles percebam o porquê daquilo que estão a fazer (...) e que estão a verificar conceitos que não estão desligados da realidade.”* (docente P4). Neste sentido, foram mencionadas imagens de construções humanas, dentro destas as fotografias do Mosteiro de Leça do Balio, um exemplo de uma roda gigante e imagens manipuladas da internet. A docente P2 chama a atenção para outra debilidade – *“Assim como as cores. Eu sei que há autores que não consideram isto, mas eu acho que é importante também passar esta mensagem, que se um lado é vermelho, do outro lado deve ser também vermelho.”*

No desenvolvimento deste assunto, a participante C relembrou um exemplo do livro *“Também tinha uma mão cortada ao meio que nós tínhamos que completar. Estava a tracejado e nessa parte nós tínhamos que desenhar e o resto estava a mão normal.”* Para podermos averiguar qual a transformação geométrica a que a participante se referia e se esta salvaguardava o facto dos cinco dedos de uma mão serem todos diferentes, foi-lhe questionado sobre o que falava esse exemplo e solicitado que analisasse uma das suas mãos. Desta forma, obtivemos a informação de que este exemplo *“tinha Simetria”, “se cortarmos este dedo assim a meio”* (referindo-se ao médio). Posto isto, foi-lhe questionado, mesmo com «o dedo cortado», se metade da mão era igual à outra metade, ao que a participante conclui que *“não”* e

que “*não pode ter Simetria*”, que talvez estivesse enganada e que “*eram duas*” mãos juntas e que, nesse caso, “*tinha Simetria.*”

Tabela 15: Uso de imagens com elementos da Natureza como prática corrente	
Discurso	Participante
“Não.”	P1
“ Só na parte da identificação porque depois parto logo para imagens que o aluno consegue desenhar com mais facilidade.”	P1
“ Algumas delas remetiam para elementos da Natureza mas não muitas.”	P2
“ Se eu for na rua e vir qualquer coisa na Natureza que possa utilizar, tiro uma fotografia de imediato para o poder fazer.”	P2
“Uso imagens sim, da Natureza não. ”	P3
“... sigo aquilo que o professor da turma, deste caso do alunos, faz e não é habitual usarem imagens da Natureza. ”	P3
“Não, a não ser na parte introdutória. ”	P3
“Neste caso, falei nas imagens da Natureza mas depois, na prática em si, na resolução de exercícios, não. ”	P3
“Eu não gosto de adiantar a matéria, mas depois de terem dado a matéria gosto de rever com eles (...) Então, na parte inicial do capítulo , neste caso das Isometrias, falo sempre nas imagens da Natureza. ”	P3
“ Sim, em termos de imagem sim. Não vou com eles para a Natureza procurar essas Isometrias. Não saio da sala com eles, mas podia fazê-lo. É uma boa ideia.”	P4
“Nas Isometrias, muito na base de imagens, como há bocado se referiu, da Natureza, construções humanas, edifícios.”	P4

"... anda muito na base de imagens naturais e também construções humanas. "	P4
"Por exemplo, as imagens refletidas na superfície da água. São imagens da Natureza muito sugestivas."	P4
"Principalmente na parte inicial e na parte final. "	P4
"Numa fase inicial como motivação , como clarificação do que se pretendia que daí para a frente..."	P4
"E depois numa fase final, como revisão para recapitular alguns conceitos, para concretizar algumas coisas e para esclarecer também algumas dúvidas que ainda restavam."	P4
"Ah, apareceu só uma borboleta... acho eu."	A
"Na aula de Matemática não, na aula de EV sim (...) Usamos a joaninha e uma borboleta, não usamos mais nenhuma. "	B
"Na joaninha estudamos a Simetria de Reflexão e na borboleta também."	B
" Usei a roda dos moinhos. "	B
" Não, só no livro a borboleta. "	C
" Não. "	D

Ao analisarmos a tabela acima, verificamos que, é mencionada alguma utilização de imagens com elementos da Natureza, mas privilegiam-se as figuras geométricas. Destacamos alguns exemplos mais notórios: "Não."; "Exercícios de identificação e de traçar eixos de Simetria acho que sim. Aí acho que não há problema que se utilizem imagens da Natureza." (docente P1), "Algumas delas remetiam para

elementos da Natureza mas não muitas.” (docente P2), “... sigo aquilo que o professor da turma, deste caso do aluno, faz e não é habitual usarem imagens da Natureza.”; “Não, a não ser na parte introdutória.” (docente P3) e “... anda muito na base de imagens naturais e também construções humanas.” (docente P4). Como podemos verificar na Tabela 15, todos os alunos participantes corroboram as ideias mencionadas.

No decorrer deste tema, quer a participante B, quer a participante C, mencionaram que estudaram apenas as imagens do manual. Explicaram que *“tinha uma página de explicação e outra com exercícios”* (participante B); *“víamos na página da explicação”* (participante C), *“na página da explicação víamos outras imagens e depois era sempre geométricas”* (participante B).

Tabela 16: Exploração de imagens com elementos da Natureza	
Discurso	Participante
Hesitando várias vezes: <i>“Acho que tudo bem, que se explorem essas imagens no início, mas depois acho que não faz muito sentido porque se eles entenderem que na Natureza isso ocorre, não há mais nenhuma vantagem em continuar a exploração da Natureza, visto que eles estão numa aula de Matemática e que depois o objetivo é passar para o que acontece nas figuras geométricas.”</i>	P1
<i>“No caso de teres meia borboleta e pedires ao aluno para fazer a Reflexão, nunca vai ficar um desenho preciso... ele sabe que fica a borboleta completa mas não consegue fazer exato... o que não é uma Reflexão.”</i>	P1
<i>“Exercícios de identificação e de traçar eixos de Simetria acho que sim. Aí acho que não há problema que se utilizem imagens da Natureza.”</i>	P1
<i>“Quando têm a imagem, talvez seja mais fácil de ver, mas depois passar para outro patamar. Sem a imagem também têm que saber.”</i>	P2
<i>“Nestes casos, eu acho que se deve usar mais na introdução.”</i>	P2
<i>“Eu acho que é um bom começo este tipo de imagens, principalmente da Natureza.”</i>	P2
<i>“Em algumas partes não acho que seja muito fácil. Por exemplo, na parte da Rotação usar imagens da Natureza... se for só observar é possível, agora desenhar não.”</i>	P3
<i>“Acho que é um bocadinho complicado mas é mais interessante para eles se for utilizado.”</i>	P3

<i>“Há sempre aquela dificuldade que às vezes os alunos têm do «estou a aprender isto para quê?». Então, se nós mostrarmos que existe na Natureza, até para eles compreenderem o mundo que está à volta deles, acho que se torna mais interessante.”</i>	P3
<i>“Eu não gosto de adiantar a matéria, mas depois de terem dado a matéria gosto de rever com eles (...) Então, na parte inicial do capítulo, neste caso das Isometrias, falo sempre nas imagens da Natureza.”</i>	P3
<i>“Há até uma imagem na internet (isto eu não uso nas explicações mas costumava usar nas minhas aulas) que é manipulada, que é para ser estritamente simétrica: tem um sinal de cada lado e eu usava isso para chamar à atenção dos alunos, se eles achavam que a imagem era verdadeira, se não era.”</i>	p3
<i>“Seria importante, e aí podem entrar as imagens da Natureza, usar imagens em que realmente não exista Isometria nenhuma, que é para eles estarem preparados para esse tipo de exercícios.”</i>	P3
<i>“Eles acham sempre que vão encontrar lá uma Reflexão ou Rotação, por isso, se calhar seria importante usar imagens que não tenham nada.”</i>	P3
<i>“É importante para que eles percebam o porquê daquilo que estão a fazer (...) e que estão a verificar conceitos que não estão desligados da realidade.”</i>	P4
<i>“É importante que essa presença da Natureza, das imagens da Natureza ou das imagens de construções humanas, surjam ao longo de toda a unidade.”</i>	P4

<i>“Eu própria, quando estou a preparar temas novos como foi o caso de alguns aspetos das Isometrias, eu sinto-me mais confortável se estiver a concretizar aquilo que estou a fazer.”</i>	P4
<i>“Nas Isometrias, muito na base de imagens, como há bocado se referiu, da Natureza, construções humanas, edifícios.”</i>	P4
<i>“... anda muito na base de imagens naturais e também construções humanas.”</i>	P4
<i>“Por exemplo, as imagens refletidas na superfície da água. São imagens da Natureza muito sugestivas.”</i>	P4
<i>“Principalmente na parte inicial e na parte final.”</i>	P4
<i>“Numa fase inicial como motivação, como clarificação do que se pretendia que daí para a frente...”</i>	P4
<i>“E depois numa fase final, como revisão para recapitular alguns conceitos, para concretizar algumas coisas e para esclarecer também algumas dúvidas que ainda restavam.”</i>	P4

Sobre o uso específico de imagens com elementos na Natureza e a sua exploração, verificamos ser consensual a opinião de que este tipo de imagens não deve ser usado para as construções. Sobressai ainda a opinião (não consensual) de que estas se devem utilizar apenas como introdução do subdomínio e destaca-se uma visão de certa forma limitada da potencialidade do recurso em estudo por parte de algumas docentes.

Contudo, as docentes P2 e P4 contrariam um pouco a ideia de que as imagens com elementos da Natureza sejam apenas utilizadas na parte introdutória: *“Eu penso que as imagens não se devem usar só no início. E não usei só no início e usei no teste”* (docente P2) e *“Principalmente na parte inicial e na parte final.”*; *“Numa fase inicial como motivação, como clarificação do que se pretendia daí para a frente...”* e *“É importante que essa presença da Natureza, das imagens da Natureza ou das imagens de construções humanas, surjam ao longo de toda a unidade.”* (docente P4).

As docentes mostraram-se um pouco resistentes à ideia da utilização de imagens com elementos da Natureza, não vendo vantagens ou focando-se quase sempre no constrangimento das construções: *“(...) acho que não faz muito sentido porque se eles entenderem que na Natureza isso ocorre, não há mais nenhuma vantagem em continuar a exploração da Natureza, visto que eles estão numa aula de Matemática e que depois o objetivo é passar para o que acontece nas figuras geométricas.”*; *“No caso de teres meia borboleta e pedires ao aluno para fazer a Reflexão, nunca vai ficar um desenho preciso... ele sabe que fica a borboleta completa mas não consegue fazer exato... o que não é uma Reflexão.”* (docente P1), *“Nestes casos, eu acho que se deve usar mais na introdução.”* (docente P2), *“Em algumas partes não acho que seja muito fácil. Por exemplo, na parte da Rotação usar imagens da Natureza... se for só observar é possível, agora desenhar não.”* (docente P3). A docente P1 acrescenta ainda que *“no caso de teres meia borboleta e pedires aos alunos para fazer a Reflexão, nunca vai ficar um desenho preciso. Ela sabe que fica a borboleta completa mas não consegue fazer exato, o que não é uma Reflexão.”*. Desta forma, percebemos a limitação em relação à correta exploração das imagens com elementos da Natureza, ou seja, demonstra a debilidade em tirar o melhor proveito das mesmas.

Além disso, é inevitável mencionar a confusão da docente relativamente aos conceitos de Reflexão e Simetria de Reflexão. Pensamos que a resistência e dificuldade das professoras em trabalhar com imagens com elementos da Natureza, poderá ser pelo facto das mesmas não estarem habituadas a tal, a não ser na referência das escassas imagens que aparecem nos manuais.

Tabela 17: Imagens com elementos da Natureza como uma mais-valia para a prática docente e ensino das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“Terá a ver com a variedade e com o chamar a atenção dos alunos de outra forma.”</i>	P1
<i>“Nisso há vantagens porque estamos a mudar um bocadinho o que o aluno está farto de ver (...) Sai um bocadinho da Matemática e das imagens que os alunos estão habituados a ver.”</i>	P1
<i>“A mais-valia é eles perceberem que a Matemática está em todo o lado e que também está na Natureza e que eles, sem Matemática, veem as coisas de outra maneira e que, com Matemática, podem ver da maneira como viam e ver mais, ir mais longe.”</i>	P2
<i>“Se eu for na rua e vir qualquer coisa na Natureza que possa utilizar, tiro uma fotografia de imediato para o poder fazer.”</i>	P2
<i>“... se calhar, muitos de nós professores estamos agora a descobrir também estas potencialidades que a Natureza tem (...) eu acho que é uma mais-valia para os alunos.”</i>	P2
<i>“E a nível pedagógico acho que é muito bom. E acho que também que o Programa de Matemática 2013 não nos impede de fazer isso e acho que temos que ter a coragem para o fazer.”</i>	P2
<i>“Há sempre aquela dificuldade que às vezes os alunos têm do «estou a aprender isto para quê?». Então, se nós mostrarmos que existe na Natureza, até para eles compreenderem o mundo que está à volta deles, acho que se torna mais interessante.”</i>	P3

<i>“Uma das dificuldades que os alunos têm é mesmo «eu estou a aprender isto para quê?» e aí eles podem ver que isto existe na Natureza e que os ajuda a compreender o mundo que está à volta deles.”</i>	P3
<i>“O estudo que está a ser feito é importante até para mostrar a professores que sejam mais contra ou mais resistentes, a usar este tipo de imagens na sua prática letiva.”</i>	P3
<i>“Seria importante, e aí podem entrar as imagens da Natureza, usar imagens em que realmente não exista Isometria nenhuma, que é para eles estarem preparados para esse tipo de exercícios.”</i>	P3
<i>“... os alunos desta faixa etária têm necessidade de perceber o que é que isso tem a ver com a vida lá fora, onde é que podem encontrar alguma utilidade naquilo que estão a aprender, ou alguma semelhança com o que estão a aprender.”</i>	P4
<i>“É importante que essa presença da Natureza, das imagens da Natureza ou das imagens de construções humanas, surjam ao longo de toda a unidade.”</i>	P4
<i>“Eu própria, quando estou a preparar temas novos como foi o caso de alguns aspetos das Isometrias, eu sinto-me mais confortável se estiver a concretizar aquilo que estou a fazer.”</i>	P4
<i>“... Não vou com eles para a Natureza procurar essas Isometrias. Não saio da sala com eles, mas podia fazê-lo. É uma boa ideia.”</i>	P4
<i>“Por exemplo, as imagens refletidas na superfície da água. São imagens da Natureza muito sugestivas.”</i>	P4
<i>“Numa fase inicial como motivação, como clarificação do que se pretendia que daí para a frente...”</i>	P4

<i>"E depois numa fase final, como revisão para recapitular alguns conceitos, para concretizar algumas coisas e para esclarecer também algumas dúvidas que ainda restavam."</i>	P4
--	----

Com decorrer da entrevista, constatamos que essa resistência foi diminuindo e que as próprias conseguiram ponderar e reconhecer que este recurso tem vantagens e que podem aproveitá-lo melhor, trazendo mais-valias: *"Se eu for na rua e vir qualquer coisa na Natureza que possa utilizar, tiro uma fotografia de imediato para o poder fazer."*; *"... se calhar, muitos de nós professores estamos agora a descobrir também estas potencialidades que a Natureza tem (...) eu acho que é uma mais-valia para os alunos."*; *"E a nível pedagógico acho que é muito bom. E acho que também que o Programa de Matemática 2013 não nos impede de fazer isso e acho que temos que ter a coragem para o fazer."* (docente P2), *"Seria importante, e aí podem entrar as imagens da Natureza, usar imagens em que realmente não exista Isometria nenhuma, que é para eles estarem preparados para esse tipo de exercícios."*; *"Eles acham sempre que vão encontrar lá uma Reflexão ou Rotação, por isso, se calhar seria importante usar imagens que não tenham nada."*; *"O estudo que está a ser feito é importante até para mostrar a professores que sejam mais contra ou mais resistentes, a usar este tipo de imagens na sua prática letiva."* (docente P3), *"Não vou com eles para a Natureza procurar essas Isometrias. Não saio da sala com eles, mas podia fazê-lo. É uma boa ideia."* (docente P4).

Ao longo da análise dos dados sobre a mais-valia das imagens com elementos da Natureza para a prática docente e ensino das Isometrias, verificamos que esta vai ao encontro da reflexão sobre este tipo de imagem como recurso facilitador e/ou motivados da aprendizagem do subdomínio das Isometrias. Assim, a fim de facilitar a compreensão, apresentamos o desenvolvimento conjunto destas duas temáticas após a apresentação da tabela 18.

Tabela 18: Imagens com elementos da Natureza como recurso facilitador e/ou motivador da aprendizagem do subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“Não estamos a maçar os alunos com quadrados e triângulos, é diferente. Aí sim, será mais apelativo para os alunos.”</i>	P1
<i>“Traz vantagens porque se temos um aluno que não se interessa, poderá ficar interessado por ter uma imagem diferente.”</i>	P1
<i>“Eu acho que é importante e a imagem ajuda o aluno.”</i>	P2
<i>“Motivar os alunos para aquilo que vão aprender.”</i>	P2
<i>“A mais-valia é eles perceberem que a Matemática está em todo o lado e que também está na Natureza e que eles, sem Matemática, veem as coisas de outra maneira e que, com Matemática, podem ver da maneira como viam e ver mais, ir mais longe.”</i>	P2
<i>Fizemos um manjerico (...) eu só precisava de uma parte dele e rodava e dava o manjerico todo (...) eles percebem que é importante e dizem mesmo «mas afinal a Matemática está em todo o lado.».</i>	P2
<i>“... se calhar, muitos de nós professores estamos agora a descobrir também estas potencialidades que a Natureza tem (...) eu acho que é uma mais-valia para os alunos.”</i>	P2
<i>“Acho que é um bocadinho complicado mas é mais interessante para eles se for utilizado.”</i>	P3

<i>“Há sempre aquela dificuldade que às vezes os alunos têm do «estou a aprender isto para quê?». Então, se nós mostrarmos que existe na Natureza, até para eles compreenderem o mundo que está à volta deles, acho que se torna mais interessante.”</i>	P3
<i>“O facto de ser mais interessante, torna os alunos mais motivados e, estando mais motivados, é mais fácil para eles aprenderem.”</i>	P3
<i>“Acho que torna o tema mais interessante e mostra aos alunos a utilidade de estarem a aprender este conteúdo.”</i>	P3
<i>“Uma das dificuldades que os alunos têm é mesmo «eu estou a aprender isto para quê?» e aí eles podem ver que isto existe na Natureza e que os ajuda a compreender o mundo que está à volta deles.”</i>	P3
<i>“Eu acho que as imagens da Natureza vai tornar mais fácil motivar os alunos para aprenderem este conteúdo.”</i>	P3
<i>“É importante para que eles percebam o porquê daquilo que estão a fazer (...) e que estão a verificar conceitos que não estão desligados da realidade.”</i>	P4
<i>“... os alunos desta faixa etária têm necessidade de perceber o que é que isso tem a ver com a vida lá fora, onde é que podem encontrar alguma utilidade naquilo que estão a aprender, ou alguma semelhança com o que estão a aprender.”</i>	P4
<i>“Por exemplo, as imagens refletidas na superfície da água. São imagens da Natureza muito sugestivas.”</i>	P4
<i>“Numa fase inicial como motivação, como clarificação do que se pretendia que daí para a frente...”</i>	P4
<i>“É uma mais-valia inestimável porque... haverá coisa mais sensível para os alunos do que a própria Natureza?”</i>	P4
<i>“A faixa etária em que eles estão, é uma faixa etária em que eles valorizam tudo o que vem da Natureza, penso eu. São sensíveis a um animal, são sensíveis a uma flor.”</i>	P4

<i>“Tudo o que parte da Natureza acho que todos nós, em qualquer idade, acho que toda a gente é sensível a tudo o que vem da Natureza porque nós fazemos parte dela. Mas nota-se isso bastante nas crianças.”</i>	P4
<i>“Acho que é um bom ponto de partida de motivação.”</i>	P4
<i>“Complicado” (relativamente à parte inicial do primeiro momento); “Foi mais fácil entender” (na análise imagem-a-imagem, parte final do primeiro momento).</i>	A
<i>“Porque é uma forma mais interessante.”</i>	A
<i>“É mais fácil aprender Isometrias dessa maneira porque eu realmente não sou grande coisa a Isometrias e consegui compreender mais ou menos as coisas.”</i>	A
<i>“Foi ajudando (...) não me lembrava do que aprendi.”</i>	A
<i>“Não, acho que tornam as tarefas mais fáceis.”</i>	A
<i>“Prefiro o quadrado e o triângulo para a construção, para a identificação prefiro imagens da Natureza.”</i>	A
<i>“Na minha opinião, acho que era bom porque acho que consegui compreender melhor as coisas a ver as imagens do que só simplesmente a estudar e a ler.”</i>	A
<i>“Preferia que ela (a professora) escolhesse as da Natureza porque é um tema interessante (...) acho mais interessante este tipo de aula do que estarmos sentados a ouvir a professora.”</i>	A
<i>“É mais fácil porque as imagens têm sempre algumas características e assim ajuda-nos a perceber se há Simetrias ou Isometrias.”</i>	A

“Não, pelo contrário. Acho que tornam mais fáceis porque... na Natureza nós temos várias imperfeições não é? Na Matemática temos um lado muito igual ao outro, depois temos que medir aquilo e depois o outro; na Natureza também temos que fazer medições mas não é tanta coisa, não é tão rigoroso. ”	B
“É ser rigoroso, mas quase sempre acho que não é muito rigoroso (...) Às vezes somos rigorosos para saber se há Isometrias e Simetrias e outras vezes não, porque olhamos mesmo para a figura, ou como fizemos lá fora, e conseguimos distinguir se é Isometrias ou Simetrias. ”	B
“Usar estas imagens é sempre mais (...) interagimos mais com o ambiente e às vezes até descobrimos coisas novas. ”	B
“Até acho que é mais... não é bem divertido... é... motiva-nos mais a gostar mais da Matemática porque interagimos com a Natureza, vemos várias coisas sobre a Natureza.”	B
“Eu acho que é mais motivador. ”	B
“Foi divertido e achei também engraçado a parte das imagens (...) Foi um bocado mais complicado, mas foi fixe também. ”	C
“Acho que é mais fácil porque estão no nosso dia-a-dia e nós nunca reparamos nelas. ”	C
“E assim, por exemplo, quando estivéssemos em casa a estudar para um teste ou a estudar assim só por estudar, em vez de pegarmos no livro podemos ir à Natureza que tem várias coisas. ”	C
“Eu estou habituada a ver muitas linhas retas na Matemática. Eu pensava que era tipo tudo muito com rigor mas passei a perceber que não é.”	C
“Acho mais giro.”	C

<i>“ la ser uma aula diferente e com menos berros (...) porque é mais divertido e até a própria professora fica mais descontraída, acho eu (...) porque vivem com ela, não é estar assim tipo a ver o livro para dar a aula. É só ir buscar tipo à nossa volta.”</i>	C
<i>“Foi também engraçado utilizar imagens para estudar Isometrias (...) É mais engraçado utilizar imagens com a Natureza em vez de ser só o normal.”</i>	D
<i>“Com as imagens tem mais variedade.”</i>	D
<i>“É mais fácil porque temos mais variedade na Natureza e não se confunde tanto.”</i>	D
<i>“Não, foi mais fácil porque as pessoas estão mais habituadas a utilizar figuras geométricas e assim foi uma coisa diferente e dá para pensar mais um bocado no assunto, de modo a que as pessoas não digam logo uma resposta e assim pensam mais e é melhor.”</i>	D
<i>“É bom e, assim como eu disse anteriormente, é melhor para que fique gravado na cabeça (...) porque são coisas diferentes.”</i>	D
<i>“Hoje em dia foi sempre utilizar figuras geométricas, nunca foi utilizar isto. E assim desfruta melhor porque é uma coisa nova, nós estamos atentos a isso.”</i>	D

Antes de avançarmos com a reflexão sobre as tabelas 17 e 18, salientamos que, relativamente às duas primeiras citações da participante B nesta última tabela, consideramos relevante para o estudo desenvolver melhor o raciocínio da mesma, pois parecia estar entrar em contradições. Ainda neste sentido, foi questionada se considerava podermos ser menos rigorosos quando trabalhamos com imagens da Natureza por estas terem, por vezes, imperfeições. A participante B esclareceu que “não” e que não considera tão rigoroso “no sentido de identificar”, mas sim “na parte dos eixos, dos centros e ângulos.” Também a participante C abordou o conceito de rigor: *“Eu estou habituada a ver muitas linhas retas na Matemática. Eu pensava que era tipo tudo muito com rigor mas passei a perceber que não é.”* Neste caso, a participante quis explicar que sempre tinha pensado na geometria como algo mais rígido no sentido geométrico propriamente dito, mas que afinal *“estão no nosso dia-a-dia”*, noutro tipo de estruturas menos «inflexíveis».

No seguimento da reflexão sobre a mais-valia das imagens com elementos da Natureza para a prática docente e ensino das Isometrias e sobre se este recurso é facilitador e/ou motivador da aprendizagem deste subdomínio, confirmamos o ênfase da concretização dos conceitos através de exemplos daquilo que nos rodeia – *“A mais-valia é eles perceberem que a Matemática está em todo o lado e que também está na Natureza e que eles, sem Matemática, veem as coisas de outra maneira e que, com Matemática, podem ver da maneira como viam e ver mais, ir mais longe.”*; *“(…) eles percebem que é importante e dizem mesmo «mas afinal a Matemática está em todo o lado».”* (docente P2), *“Há sempre aquela dificuldade que às vezes os alunos têm do «estou a aprender isto para quê?». Então, se nós mostrarmos que existe na Natureza, até para eles compreenderem o mundo que está à volta deles, acho que se torna mais interessante.”* (docente P3), *“... os alunos desta faixa etária têm necessidade de perceber o que é que isso tem a ver com a vida lá fora, onde é que podem encontrar alguma utilidade naquilo que estão a aprender, ou alguma semelhança com o que estão a aprender.”*; *“É importante para que eles percebam o porquê daquilo que estão a fazer (...) e que estão a verificar conceitos que não estão desligados da realidade.”* (docente P4) – e que este tipo de abordagem leva a uma maior motivação e ao

aumento do interesse por parte dos alunos, chamando também a atenção dos mais desinteressados – *“Terá a ver com a variedade e com o chamar a atenção dos alunos de outra forma.”*; *“Traz vantagens porque se temos um aluno que não se interessa, poderá ficar interessado por ter uma imagem diferente.”* (docente P1), *“Motivar os alunos para aquilo que vão aprender.”* (docente P2), *“Acho que torna o tema mais interessante e mostra aos alunos a utilidade de estrarem a aprender este conteúdo.”*; *“Eu acho que as imagens da Natureza vai tornar mais fácil motivar os alunos para aprenderem este conteúdo.”* (docente P3), *“É uma mais-valia inestimável porque... haverá coisa mais sensível para os alunos do que a própria Natureza?”*; *“Acho que é um bom ponto de partida de motivação.”* (docente P4). Pela opinião das docentes, o conjunto destes três fatores poderá conduzir à aprendizagem das Isometrias com mais facilidade – *“Eu acho que é importante e a imagem ajuda o aluno.”*; (docente P2), *“O facto de ser mais interessante, torna os alunos mais motivados e, estando mais motivados, é mais fácil para eles aprenderem.”* (docente P3), *“Eu própria, quando estou a preparar temas novos como foi o caso de alguns aspetos das Isometrias, eu sinto-me mais confortável se estiver a concretizar aquilo que estou a fazer.”* (docente P4).

Ao compararmos estes pareceres com a opinião dos alunos participantes, observamos as mesmas vantagens: *“Com as imagens tem mais variedade.”* (participante D), *“Porque é uma forma mais interessante.”*; *“Preferia que ela (a professora) escolhesse as da Natureza porque é um tema interessante (...) acho mais interessante este tipo de aula do que estarmos sentados a ouvir a professora.”*; (participante A), *“Hoje em dia foi sempre utilizar figuras geométricas, nunca foi utilizar isto. E assim desfruta melhor porque é uma coisa nova, nós estamos atentos a isso.”* (participante D), *“Usar estas imagens é sempre mais (...) interagimos mais com o ambiente e às vezes até descobrimos coisas novas.”*; *“Eu acho que é mais motivador.”* (participante B), *“Foi um bocado mais complicado, mas foi fixe também.”* (participante C), *“É mais fácil aprender Isometrias dessa maneira (...)”*; *“Não, acho que tornam as tarefas mais fáceis.”* (participante A), *“Acho que é mais fácil porque estão no nosso dia-a-dia e nós nunca reparamos nelas.”* (participante C); *“Não, foi mais fácil porque as*

peessoas estão mais habituadas a utilizar figuras geométricas e assim foi uma coisa diferente e dá para pensar mais um bocado no assunto, de modo a que as pessoas não digam logo uma resposta e assim pensam mais e é melhor.” (participante D) e *“Prefiro o quadrado e o triângulo para a construção, para a identificação prefiro imagens da Natureza.”* (participante A). Na última citação do participante D acima transcrita, consideramos interessante o facto do próprio aluno concluir que este tipo de abordagem origina uma ponderação de ideias e conceitos antes de dar a sua resposta.

4.5 IMPORTÂNCIA DO RIGOR MATEMÁTICO *VERSUS* A IMPERFEIÇÃO DA NATUREZA

Ao longo de todo o estudo, este tema foi bastante referido. Na tabela seguinte apresentamos as considerações de todos os participantes (docentes e alunos). Os dados foram recolhidos através da entrevista às docentes, durante a Intervenção Didática e entrevista após esta realizada com alunos, que apresentaremos adiante.

Tabela 19: Importância do rigor matemático versus a imperfeição da Natureza	
Discurso	Participante
<i>“Na Natureza não acontece porque as imagens não são tão precisas, são mais complicadas.”</i>	P1
<i>“Se calhar estamos a confundir o alunos porque estamos a dizer «isto é uma Reflexão», mas não está igual.”</i>	P1
<i>“... sempre pondo um ponto prévio: é que na Natureza nem tudo é assim tão simétrico.”</i>	P2
<i>“Deve-se ter sempre este cuidado de ter este ponto prévio, de dizer aos alunos que na Natureza não existe mesmo Simetria.”</i>	P2
<i>“Nada é perfeito e eu acho importante isso.”</i>	P2
<i>“Eu só usei numa ficha de trabalho que tinha uma flor e lá está, veio esse problema mas até foi bom porque uma das pétalas era ligeiramente diferente e aconteceu que houve um aluno que deu conta. E ainda bem que deu conta e nós na aula podemos explorar isso.”</i>	P2

<i>“Acho mesmo que, quando encontramos um elemento da Natureza que nos facilita essa abordagem, acho que devemos mesmo utilizá-lo.”</i>	P2
<i>“... na parte do corpo humano, que nós temos Simetria mas se formos rigorosos não temos, porque podemos ter um sinal de uma lado que não temos do outro (...) Converso sempre um bocadinho com os alunos sobre isso.”</i>	P3
<i>“Há até uma imagem na internet (isto eu não uso nas explicações mas costumava usar nas minhas aulas) que é manipulada, que é para ser estritamente simétrica: tem um sinal de cada lado e eu usava isso para chamar à atenção dos alunos, se eles achavam que a imagem era verdadeira, se não era.”</i>	P3
<i>“Mesmo para chegar à ideia de que no corpo humano não existe uma verdadeira Simetria porque nós não temos os mesmos sinais ou porque temos um olho maior do que outro, por exemplo.”</i>	P3
<i>“Na minha opinião continua a ser uma Reflexão.”</i>	A
<i>“Temos é que ter em conta que há imperfeição e deixar de fora.”</i>	A
<i>“Se for na Natureza, sim.”</i>	B
<i>“Temos que ter em consideração que, nem sempre, as coisas são iguais na Natureza.”</i>	B
<i>“Conseguimos.” (aplicar Matemática na Natureza, mesmo que imperfeita)</i>	B
<i>“Aqui na borboleta tinha que ter mais uma perninha.”</i>	C
<i>“Sim.” (estudar Isometrias na Natureza, chamando a atenção para os pormenores como as imperfeições)</i>	C

<i>“Aqui a cauda: aquela está mais pequenina e aqui está maior; a cor e o comprimento do bico (...) Não.”</i> (Não deixa de ser Rotação)	C
<i>“As pétalas não têm a mesma forma (...) Sim, podemos.”</i> (usar a imagem da flor para estudar Matemática)	D
<i>“Eu acho que sim.”</i>	D

Sobre a importância do rigor matemático *versus* a imperfeição da Natureza, observamos duas posições distintas: ou é considerado que a Matemática se sobrepõe e que as imperfeições encontradas nos elementos da Natureza podem complicar ou confundir os alunos, não podendo envolver as duas coisas (*“Na Natureza não acontece porque as imagens não são tão precisas, são mais complicadas.”* e *“Se calhar estamos a confundir o alunos porque estamos a dizer «isto é uma Reflexão», mas não está igual.”* – docente P1), ou então consideram uma discussão importante e que, desde que se salvguarde esta questão, facilita a abordagem e favorece o confronto de ideias, na qual as imperfeições não são vistas como obstáculo. A segunda posição é a mais manifestada e é

reiterada por todos os alunos participantes: *“... sempre pondo um ponto prévio: é que na Natureza nem tudo é assim tão simétrico.”*; *“Nada é perfeito e eu acho importante isso.”*; *“(...) uma das pétalas era ligeiramente diferente e aconteceu que houve um aluno que deu conta. E ainda bem que deu conta e nós na aula podemos explorar isso.”*; *“Acho mesmo que, quando encontramos um elemento da Natureza que nos facilita essa abordagem, acho que devemos mesmo utilizá-lo.”* (docente P2), *“Há até uma imagem na internet (isto eu não uso nas explicações mas costumava usar nas minhas aulas) que é manipulada, que é para ser estritamente simétrica: tem um sinal de cada lado e eu usava isso para chamar à atenção dos alunos, se eles achavam que a imagem era verdadeira, se não era.”* (docente P3), *“Temos é que ter em conta que há imperfeição e deixar de fora.”* (participante A), *“Temos que ter em consideração que, nem sempre, as coisas são iguais na Natureza.”* (participante B), *“Sim.”* (estudar Isometrias na Natureza, chamando a atenção para os pormenores como as imperfeições), (participante C) e *“Eu acho que sim.”* (participante D). É de salientar que o participante D reparou nesta questão sem qualquer informação por parte da professora investigadora – *“as pétalas não têm a mesma forma (...) está mais para a frente, esta mais curvada, esta mais redonda...”*. Depois de debatido o assunto, o participante considerou que *“sim, podemos”* utilizar a imagem da flor para estudar Matemática.

Ao analisarmos a obra de Veloso (2012), verificamos que este também menciona a questão da existência de imperfeições, afirmando que *“o matemático que se dispõe a estudar a estrutura ou a organização (...) segue um processo característico da sua ciência, abstraindo de tais imperfeições, ficando mais apto a compreender a sua estrutura”* (Veloso, 2012, p. 44).

4.6 INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE A PRÉ-ENTREVISTA

Terminadas as entrevistas às docentes, cujos dados recolhidos foram todos apresentados e discutidos anteriormente, seguiram-se as entrevistas realizadas aos alunos participantes e a implementação da Intervenção Didática. Assim, começamos por apresentar, de forma rigorosa e detalhada, a informação recolhida durante a entrevista realizada aos estudantes antes da Intervenção Didática.

4.6.1 PREFERÊNCIAS DOS ALUNOS PARTICIPANTES

Tabela 20: Preferências dos alunos participantes relativamente aos domínios e subdomínios da Matemática	
Discurso	Participante
<i>“O que eu gostei mais foi Organização e Tratamento de Dados e o que gostei menos foi ângulos e isso (...) porque não percebo nada daquilo.”</i>	A
<i>“O que eu gostei mais foi as Áreas e os Perímetros e os Volumes. E o que eu gostei menos foi os triângulos (...) a classificação, os ângulos e isso.”</i>	B
<i>“Áreas por decomposição porque... sei lá... gosto. Menos, os números negativos que dei agora há pouco, porque não sei, tem muitos menos.”</i>	C

(hesitou durante 16 segundos antes de responder) “Isometrias gostei (...) porque gosto de ver assim mais à base de desenho. ” (manteve-se em silêncio durante 15 segundos antes de identificar o que menos gostou de aprender em Matemática) “Não me lembro.”	D
--	---

Analisando a tabela acima, verificamos que os alunos têm preferências muito distintas e consideramos que a participante A é a que menos se relaciona com o tema Geometria. O participante D leva-nos a refletir sobre a sua resposta, uma vez que hesitou bastante, demonstrando não saber o que responder. Consideramos a Geometria como tema do seu interesse e consideramos essa a razão que o conduziu à sua resposta.

4.6.2 DIFICULDADES SENTIDAS PELOS ALUNOS PARTICIPANTES NO SUBDOMÍNIO DAS ISOMETRIAS

No conjunto das dificuldades sentidas pelos alunos participantes no subdomínio das Isometrias, serão também abordadas dificuldades mais específicas, nomeadamente sobre o que são Isometrias, tipos de Isometrias e Simetrias e a diferença entre Reflexão e Simetria de Reflexão.

Tabela 21: Dificuldades sentidas pelos alunos participantes no subdomínio das Isometrias	
Discurso	Participante
<i>“É muito difícil. Não percebo nada disto.”</i>	A
<i>“Tive, de vez em quando, na Reflexão porque era mais complicada e eu punha as coisas erradas, não dava direito.”</i>	A
<i>“Nunca percebi muito bem essa coisa dos sentidos.”</i>	A
<i>“Foi na Rotação. Porque tínhamos o ponto... se o ponto fizesse parte da figura, seria sempre mais fácil. Mas às vezes há figuras que não faz parte e assim é sempre mais difícil porque depois temos que medir dum ponto da figura ao centro, de outro ponto da figura ao centro e se a figura tiver muitos pontos, é mais difícil. ”</i>	B
<i>“Não faço a mínima ideia.”</i>	C
<i>“Não sei.”</i>	C
<i>“A Rotação porque, por exemplo, temos mais trabalho. Enquanto na outra só temos de passar igual para o outro lado, na outra temos que usar o transferidor e medir todos os graus e isso.”</i>	C
<i>“Na altura não, mas agora... A Reflexão. Não confundi, demoro mais tempo a recordar.”</i>	D

A participante A manifestou o seu pouco à vontade com o subdomínio, explicando que sentiu algumas dificuldades na construção de uma Reflexão e que tinha mais facilidade em desenhar a Rotação.

A participante B revelou ter gostado do subdomínio, descrevendo a Rotação como a Isometria mais difícil e a Translação como a mais fácil “porque temos a figura com alguns pontos e depois é só transpor.” A participante C, quando questionada sobre Isometrias, mencionou lembrar-se “mais ou menos” e explicou que *“são desenhos tipo... por exemplo, manda desenhar um triângulo mas temos que desenhar um triângulo com os materiais adequados.”* Como a resposta está muito aquém, foi-lhe solicitado que completasse o seu raciocínio e indicasse de que forma estava representada uma Isometria no seu exemplo, ao que respondeu: “Não faço a mínima ideia.”

Em relação às dificuldades propriamente ditas, a participante C mencionou a Rotação como sendo mais difícil devido a todo o rigor associado à sua construção.

O participante D relatou ter entendido os conceitos quando estes foram abordados na aula – *“soube logo bem o que é que é”* –, tendo um pouco mais de dificuldade na Reflexão *“até saber bem e estudar”* e mais facilidade em entender a Rotação *“mais pelo nome.”*

Antes de continuarmos a apresentação dos dados obtidos, é importante salientar que ao longo do presente estudo serão mencionados/citados outros exemplos das dificuldades sentidas pelos alunos-participantes, uma vez que na tabela anterior (tabela 13) encontram-se, sobretudo, as citações diretas quando estes foram questionados sobre as suas dificuldades. Ou seja, observamos que desta forma se possibilita uma leitura mais real e eloquente e um entendimento mais eficaz da informação apresentada se esta informação estiver no decorrer do assunto a que esta diz respeito. Acresce que consideramos que este tipo de abordagem não afetará nem o discurso nem o conteúdo. Todos os erros científicos, concepções contraditórias, confusões, hesitações e inseguranças estarão identificadas na exposição e análise de toda a informação.

Tabela 22: O que são Isometrias	
Discurso	Participante
(desenhou) “Humm... aquela cena que é tipo assim, com um risco e depois tem pontos. Um quadrado e depois outro quadrado igual... ”	A
“Eu sabia mas já me esqueci do nome.”	A
“Espera, isto é uma Simetria (...) Depois há mais coisas que eu não me lembro. (...) Já me lembro, é aquilo de Isometria de Rotação e Isometria de, de ... ”	A
“Uma Simetria é uma espécie de espelho da outra imagem (...) O eixo de Simetria que divide a imagem. ”	A
“ Colocação de uma imagem de uma forma diferente; transpor uma imagem de um lado para o outro; rodar a imagem; modificar.”	B
“São desenhos tipo... por exemplo, manda desenhar um triângulo mas temos que desenhar um triângulo com os materiais adequados. ”	C
“No exame saiu lá uma imagem que por acaso era um octógono e nós tínhamos que dizer o que é. E eu acho que isso também é uma Isometria.”	C
“Eu acho que é fazer várias coisas com ele (triângulo). Por exemplo, criar novas imagens. ”	C
“ Não sei. ”	C

<i>“É fazer figuras através de... utilizar materiais, o compasso, régua, transferidor para fazer as figuras e estudar a Matemática com desenhos.”</i>	D
(hesitou bastante) <i>“Humm... há um tipo de Isometrias que é: temos uma certa figura e podemos fazer uma igual através de certos dados.”</i>	D

Quando questionada sobre o que são Isometrias, a participante A utilizou a folha de rascunho para desenhar (figura 8), de forma a explicar o conceito. Desenhou, apagou e desenhou novamente. Como podemos verificar no na resposta apresentada à direita, a participante confundiu Isometrias com Simetrias, corrigindo-se posteriormente com um novo desenho, apresentado abaixo do primeiro realizado. De ambas a vezes não utilizou material de desenho, sendo pouco rigorosa na construção do mesmo.

Ao longo da resposta da participante A, foi necessário pegar no que esta ia dizendo e procurar desenvolver e explorar o que tentava explicar, para que a mesma se conseguisse lembrar aquilo que aprendeu. Quando questionada sobre os segmentos que a participante desenhou, que unem cada objeto à sua imagem correspondente (por exemplo, o ponto A com o A'), esta não soube explicar por que o fazia e para quê.

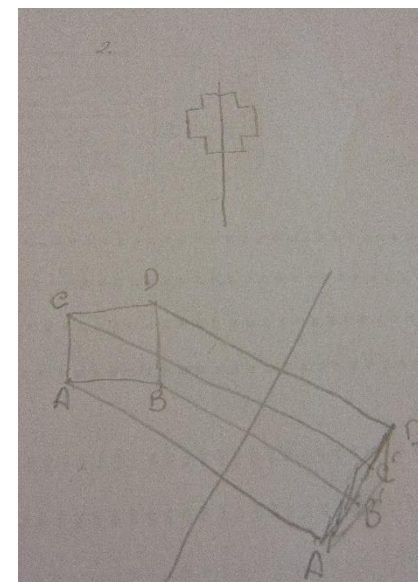


Figura 8. Reflexões construídas pela participante A.

Ao longo do raciocínio da participante C sobre o conceito de Isometrias, esta refere que *“Eu acho que é fazer várias coisas com ele (triângulo). Por exemplo, criar novas imagens.”* Desta forma, foi questionada sobre o que eram as “várias coisas” que podíamos fazer com o triângulo mas a participante manifestou, mais uma vez, dificuldade neste tema, não conseguindo explicar a que se referia – “Não sei.”

De todos os participantes, o participante D foi o que mais hesitou e mostrou-se extremamente nervoso durante a Entrevista, antes da Intervenção Didática. Como podemos verificar através das suas citações, o participante D consegue recordar-se que são necessários dados e quais materiais necessários para a construção de uma Isometria, mas não consegue explicar, ainda que de forma incompleta, o conceito.

Tabela 23: Tipos de Isometrias e Simetrias	
Discurso	Participante
<i>“Regular? Não. Não sei.”</i>	A
<i>“Isometria de Rotação, Isometria que eu não me lembro do nome.”</i>	A
<i>“A Reflexão é a que eu fiz na pergunta 2 e a Rotação é aquela que, por exemplo, está a imagem na parte de cima e ela tem de descer para baixo (...) Também pode ir para cima (...) Em qualquer sentido (...) Sentido negativo e sentido positivo.”</i>	A
<i>“A Translação, Rotação, Reflexão e falta uma... não!”</i>	B
<i>“A Translação é como se pudéssemos andar com a imagem sempre para a frente ou para trás, ou para cima ou para baixo.”</i>	B
<i>“Na Rotação nós podemos rodar a imagem num certo ponto. Pode ser da figura ou não, e rodamos a imagem.”</i>	B
<i>“E a Reflexão é refletir. Podemos ter um eixo, temos a imagem junto ao eixo ou fora do eixo e depois refletimos como se fosse um espelho.”</i>	B
<i>“Rotação, Simetria e não sei mais.”</i>	C
<i>“Das Simetrias não me lembro mesmo.”</i>	C

<i>“Por exemplo: temos um quadrado e depois dá-nos um sentido, sentido positivo ou negativo, e temos os graus, 180°, 90°, depende. E depois todos os pontos, nós temos que rodá-los. Se for 90° nós temos que rodá-los todos 90° e tem que ficar a mesma figura só que com 90° de diferença.”</i>	C
<i>“A Reflexão... ah, é quando uma figura tem iguais, ou seja, podemos dividi-la ao meio e ela fica igual para os dois lados.”</i>	C
<i>“Humm... Não me lembro.”</i>	D
<i>“Re... re... rebolar, acho eu (...) Re... regu... regular? Não sei.”</i>	D
<i>“Reflexão é aquela Isometria onde tínhamos um desenho e refletia para o outro lado (...) Um certo desenho e depois fazíamos, tinha uma parede por exemplo (...) e refletia.” (desenhou)</i>	D
<i>(desenhou) “Acho que é, tínhamos também uma figura... esta não me lembro muito bem, mas era... acho que era assim uma figura... e ficava assim.” (relativamente à Rotação)</i>	D

Dada a confusão da participante A, foi necessário relembrar que no 6.º ano de escolaridade se estudam duas Isometrias e duas Simetrias. Esta lembrou-se, sem dificuldades, da Rotação, mas só depois de falar no efeito do espelho é que se lembrou da Reflexão e que tinha sítio esta que desenhava para dar resposta à questão 2 do guião de entrevista.

A participante B referiu que, nas suas aulas, foi mais abordada a Rotação, posteriormente a Reflexão e menos a Translação, não tendo sido avaliada nesta última Isometria, uma vez que não faz parte do Programa. Após a sua definição de Reflexão, a participante B foi

questionada sobre o que queria dizer com ter *“a imagem junto ao eixo ou fora do eixo”*, de forma a entendermos se estaria a confundir a Isometria com a Simetria. Esta explicou que *“o eixo tem um ponto e o ponto pode fazer parte da figura da Reflexão ou não. Pode estar mais para esquerda ou mais para a direita.”* No entanto, demonstrou alguma desordem nos termos que queria usar, nomeadamente: se o ponto pertencia ao eixo, à imagem a refletir ou se o ponto da imagem coincidia com o eixo – *“o eixo tem um ponto (...) o ponto pode fazer parte da figura e pode não fazer”*. Relativamente à participante C, verificou-se ser necessário recordar que esta estudou diferentes tipos de transformações e algumas das propriedades de Isometrias. Esta apenas se recordou da Rotação e assumiu a Simetria como uma Isometria – *“Rotação, Simetria e não sei mais.”* – Foi também necessário esclarecer que esta abordou duas Isometrias e duas Simetrias. Após este esclarecimento, a participante recordou-se da Translação e acrescentou *“das Simetrias não me lembro mesmo.”* Ficou claro, neste momento de intervenção, que esta participante confundiu Reflexão com Simetria de Reflexão.

O participante D, não soube mencionar quais as Isometrias que estudou nem referiu Simetrias estudadas. Mostrou-se bastante esquecido e confuso ao longo de toda a abordagem, sendo necessário revelar o nome Reflexão e Rotação. Para podermos verificar se, desta forma, o participante conseguiria recordar-se do que estudou, foi-lhe solicitado que tentasse explicar cada um destes conceitos. Enquanto explicava a Reflexão mencionou *“uma parede”*, sendo-lhe questionado que nome era dado em Matemática para que este concluísse que se trata de um eixo de Reflexão. Como também não se lembrava, foi-lhe dada uma pequena ajuda, mencionando que seria um eixo. Mais uma vez errou, respondendo *“eixo de bissetriz.”* Após termos associado o nome da Isometria em questão ao seu respetivo eixo, ficou esclarecido que se tratava do eixo de Reflexão. Para possibilitar uma melhor análise dos conhecimentos do participante D sobre a Reflexão, foi-lhe pedido que desenhasse um exemplo (figura 9). É importante referirmos que o participante começou por desenhar metade de um octógono e traçar um eixo de Reflexão, desenhando, posteriormente,

a Reflexão do mesmo. No final do desenho o participante concluiu que “*não está bem desenhado*” porque os lados deveriam ser iguais.

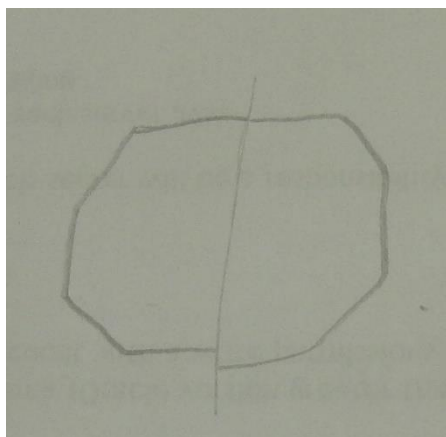


Figura 9. Reflexão construída pelo participante D.

No que respeita à Rotação, o participante D teve mais dificuldade na explicação verbal, não se recordava do conceito de ângulo de Rotação, mas conseguiu desenhar um exemplo de Rotação (figura 10) e indicou como amplitude do ângulo de Rotação “ 180° .” É importante referir que o participante desenhou sem qualquer rigor nem recorreu ao material de desenho à sua disposição.

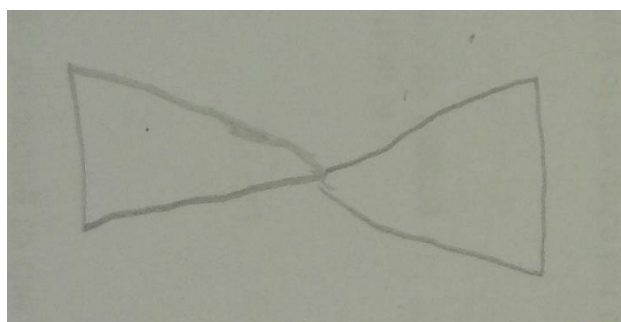


Figura 10. Rotação construída pelo participante D.

Tabela 24: Diferença entre Reflexão e Simetria de Reflexão	
Discurso	Participante
<i>“Este eixo é vertical e este é de lado.”</i>	A
<i>“A Simetria era... espera aí...” (desenhou)</i>	A
<i>“A Simetria de Reflexão é mais complicado porque eu não me lembro.”</i>	A
<i>“Não, não sei. Não me lembro.”</i>	A
<i>“Este eixo tem distância e este não (...) Este eixo faz parte da figura e este não.”</i>	A
<i>“Na Simetria tem que fazer parte da figura, o eixo, para nós refletirmos e a Isometria pode ou não fazer.” (desenhou)</i>	B
<i>“A Reflexão... ah, é quando uma figura tem iguais, ou seja, podemos dividi-la ao meio e ela fica igual para os dois lados (...) Vou desenhar uma borboleta porque é o único exemplo que eu me lembro.”</i>	C
<i>“Não, agora não me lembro, mas antes sabia.”</i>	C
<i>“Acho que a Simetria é o que é simétrico (...) porque é igual.”</i>	D

Mais uma vez, a participante A sentiu necessidade em desenhar (figura 12) para conseguir explicar o seu raciocínio. Nesta questão, mostrou-se bastante hesitante e confusa. Durante a explicação, construiu o desenho do lado esquerdo da figura 12 para identificar a Reflexão, acrescentando que “A Simetria de Reflexão é mais complicada porque não me lembro”. Como verificamos que a participante estava a desistir da sua explicação, com receio de estar a fazê-lo incorretamente, foi-lhe confirmado que o seu primeiro

desenho estava correto e que se tratava de uma Reflexão. Foi então pedido para pensar durante o tempo necessário e, depois, que tentasse desenhar um exemplo de Simetria de Reflexão. Identificou corretamente que o eixo no desenho da esquerda era um eixo de Reflexão e que o eixo do primeiro desenho da questão 2 (figura 8) era um eixo de Simetria. No entanto, como a participante ainda se mostrava confusa, dizendo “Mas a Simetria eu não sei”, regressamos ao desenho feito pela mesma na questão 2 (figura 8), uma vez que foi onde identificou a diferença entre os dois eixos. Desta forma, através da correta designação que a participante A deu dos eixos, foi pedido que identificasse a Reflexão e a Simetria de Reflexão. Após a resposta correta, acrescentou o desenho da direita como sendo uma Simetria de Reflexão, mostrando-se contente por alcançar a resposta correta, “Este eixo tem distância e este não (...) Este eixo faz parte da figura e este não”.

Depois do reforço positivo, a participante mostrou-se mais relaxada e entusiasmada.

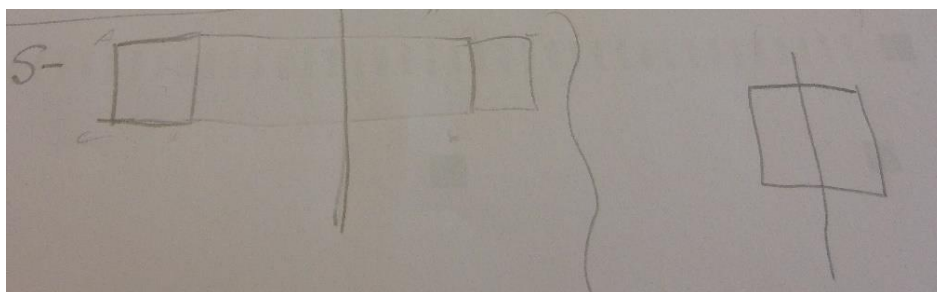


Figura 11. Reflexão e de Simetria de Reflexão, respetivamente, construídas pela participante A.

Ao analisarmos a seguinte citação da participante B – “*Na Simetria tem que fazer parte da figura, o eixo, para nós refletirmos e a Isometria pode ou não fazer*” – verificamos que a participante explica corretamente a especificidade da Simetria de Reflexão, mas completa a sua explicação sobre a Reflexão atribuindo-lhe a mesma particularidade, ou seja, que na Simetria de Reflexão o eixo de Simetria «corta» a imagem, dividindo-a sempre em duas partes iguais e na Reflexão, o eixo de Reflexão pode também «cortar» a imagem ou estar afastado da mesma. Para esclarecer o seu

raciocínio, desenhou um exemplo para a Simetria e outro para a Isometria. Assim, na figura 12 desenhou um exemplo da Simetria de Reflexão, com os respectivos eixos de Simetria – “Como eu estava a dizer, na Simetria de Reflexão os eixos fazem parte da figura”. Note-se que a aluna referiu, oralmente, que a figura geométrica desenhada era um quadrado. Também podemos verificar que a aluna apenas representou três eixos de simetria, não contemplando o eixo horizontal que passa pelo centro do polígono.

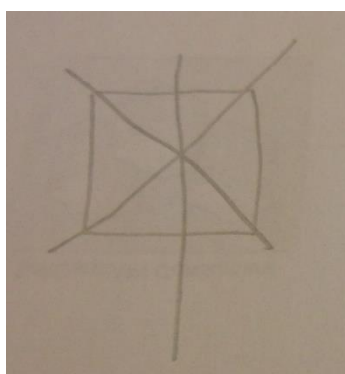


Figura 12. Simetria de Reflexão construída pela participante B.

Na figura 13 desenhou um exemplo de Reflexão em que o objeto (triângulo) está afastado do eixo de Reflexão – “aqui é o ponto, aqui é o eixo de Reflexão e refletimos” – e outro em que o objeto (quadrado [ABCD]) coincide com o eixo e reflete para o lado direito (quadrado A'B'C'D') – “O quadrado fica em cima da linha e o outro também tem que ficar em cima da linha (...) Temos que medir a distância daqui aqui e depois reflete para aqui o mesmo.” No caso do triângulo, salientamos que a participante, apesar de referir oralmente, não desenhou a Reflexão do mesmo.

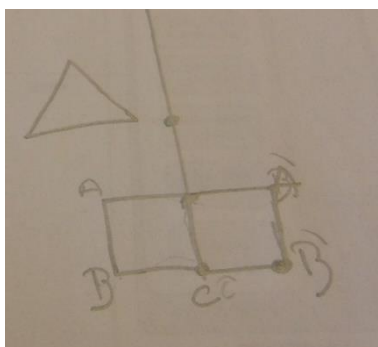


Figura 13. Reflexão construída pela participante B.

A participante C confunde os conceitos de Reflexão e de Simetria de Reflexão. Vejamos: a referida participante define Reflexão como “... é quando uma figura tem iguais, ou seja, podemos dividi-la ao meio e ela fica igual para os dois lados” e, para completar a sua definição, desenhou um exemplo (que podemos analisar através da figura 14). Podemos, então, afirmar que ambas representam a Simetria de Reflexão e não a Reflexão, sendo, por isso, um erro científico.

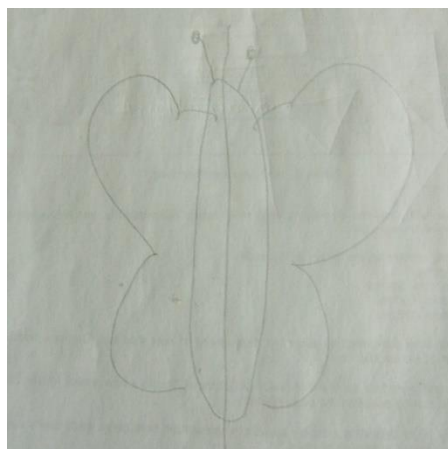


Figura 14. Reflexão construída pela participante C.

A participante C, atribui o seu esquecimento em distinguir Reflexão de Simetria de Reflexão ao facto de se encontrar de férias há duas semanas. No entanto, o que aqui nos parece interessante é o facto de esta atribuir importâncias diferentes aos diferentes conteúdos abordados – “*Tudo não. Quer dizer, lembro-me das coisas mais importantes: lembro-me de fazer contas, de pegar na calculadora...*”. Posto isto, não podemos deixar de referir a mais-valia do presente estudo para que os alunos consigam perceber e intuir que, na Matemática, não é só o «fazer contas» que se relaciona com o nosso dia-a-dia e, por esse motivo, ser mais importante. Também a Geometria está muito presente no que nos rodeia e essa perceção é uma prioridade neste trabalho que concilia a Matemática com a Natureza e restantes elementos do quotidiano.

Durante a exploração da questão seis do Guião de Entrevista antes da Intervenção Didática, em que a participante C recorda um exemplo do manual

abordado na aula, relatado anteriormente no presente estudo, no qual constava a imagem de duas mãos unidas, esta conclui que se trata de uma *“Simetria de Reflexão.”* Desta forma, conseguiu corrigir-se relativamente a este conceito. Para esclarecer melhor esta discussão, a participante em questão foi confrontada com os exemplos contraditórios dados por si até então, concluindo que tinha errado relativamente à Isometria atribuída à borboleta e que, em ambos os casos, *“é Simetria de Reflexão, enganei-me.”*

Como o participante D também não conseguiu explicar as diferenças entre os dois conceitos, foi desafiado a tentar explicar através de um desenho. Mostrou-se extremamente inseguro e continuou a confundir os dois conceitos: como exemplo de Simetria de Reflexão desenhou a figura 15 e como exemplo de Reflexão desenhou a figura 16, enquanto explicava que *“a Simetria de Reflexão é outra vez todo... humm... e faz outra vez aquele espelho e fica todo, só que aqui é igual.”*

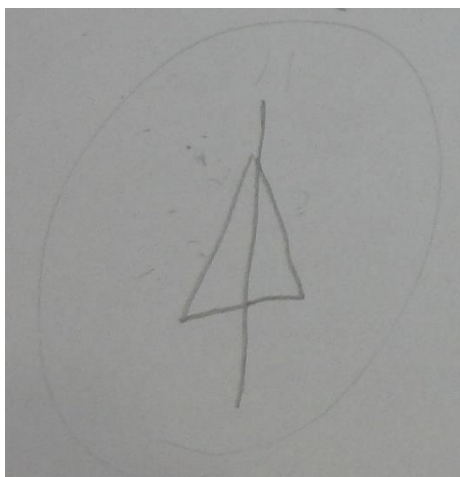


Figura 16. Simetria de Reflexão construída pelo participante D.

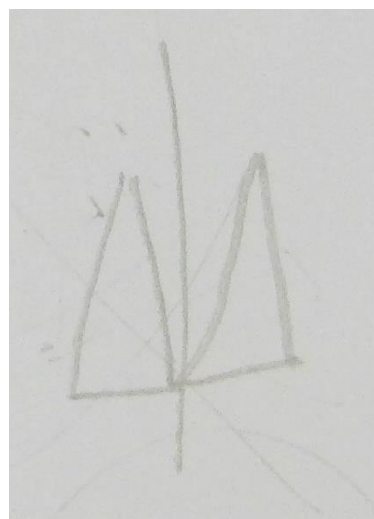


Figura 15. Reflexão construída pelo participante D.

4.7 INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE O 1.º MOMENTO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA

No seguimento, e para melhor compreensão dos dados recolhidos, apresentamos as escolhas de cada um dos participantes, relativas à Intervenção Didática (Apêndice 7). Para que a análise da informação recolhida seja mais completa e imediata, adicionamos as citações relevantes para o estudo. É conveniente lembrar, que no início do primeiro momento, foi devidamente explicado a todos os participantes o que deveriam considerar em algumas das imagens, nomeadamente: Na imagem dos malmequeres, devem ter em atenção apenas as flores, ignorando o caule e a diferenciação entre pétalas; na imagem das gaivotas, apenas se consideram as rodeadas a vermelho; na imagem das cegonhas, também só se consideram as aves; na imagem das duas borboletas, apenas se consideram os dois insetos (e não a planta) e na imagem das focas, teriam que especificar quais as focas consideradas (se as duas castanhas ou se uma das castanhas e a cinzenta); e, no final deste momento, todos os participantes foram confrontados com as suas escolhas, de forma a esclarecer as dúvidas ou erros científicos e a consolidar os conceitos abordados imagem-a-imagem, discutindo as ideias apresentadas por cada um deles. Foi dada maior relevância às escolhas contraditórias, para que cada participante tivesse a oportunidade de pensar e tomar uma opção de maior consciência, antes de ser confirmada a Isometria e/ou Simetria representada.

4.7.1 IMAGENS SELECIONADAS PARA EXPLORAR A REFLEXÃO (AXIAL E/OU CENTRAL)

Neste item os participantes no estudo tinham, de entre as dez imagens apresentadas, tal como consta no apêndice sete, selecionar as que possuíam Reflexão (Axial ou Central). Neste seguimento, as respostas apresentadas pelos quatro participantes em estudo foram:

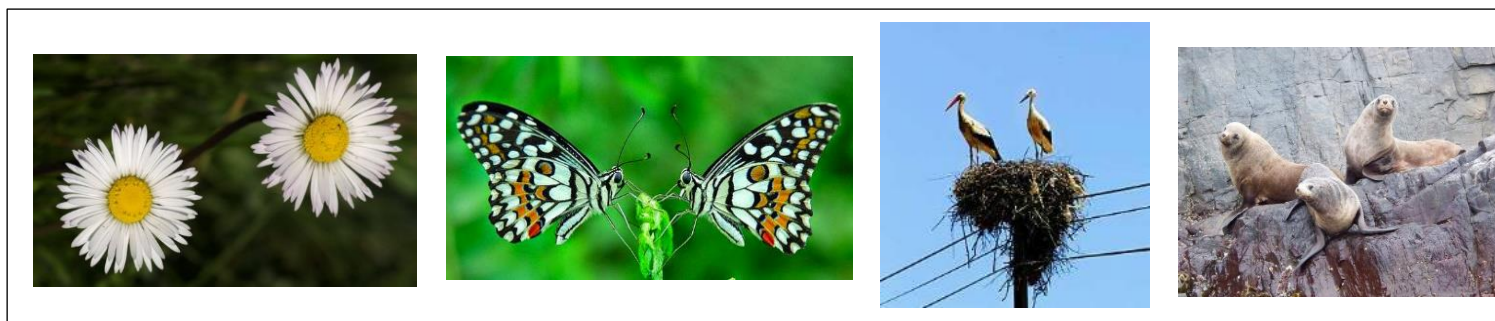


Figura 17. Imagens selecionadas pela participante A para explorar a Reflexão

A participante A identificou corretamente a existência de reflexão axial nas duas primeiras imagens selecionadas. No entanto, demonstrou dificuldade e indecisão na escolha da terceira imagem apresentada (cegonhas). Como podemos verificar, trata-se de uma Rotação a 3D, logo mais difícil para ser identificada por alunos do 6º ano de escolaridade, e não de uma Reflexão como a própria referiu. Outro erro está na seleção da quarta imagem apresentada (focas). A participante considerou apenas as focas de cor castanha e identificou uma Reflexão entre elas e não é verdade, nesta imagem não existe qualquer tipo de Isometria. É de referir que a participante A não conseguiu reconhecer que a imagem dos malmequeres também possuía Reflexão Central.

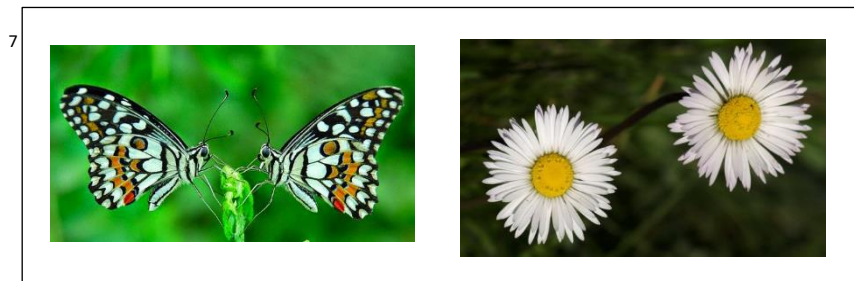


Figura 18. Imagens selecionadas pela participante B para explorar a Reflexão

A participante B, de entre o conjunto de imagens que lhe foi apresentado, escolheu de forma correta todas as imagens que representam a Reflexão Axial, no entanto não conseguiu identificar a Reflexão Central nas imagens dos malmequeres.

Ambas as participantes (A e B) utilizaram o lápis para identificar o eixo de Reflexão Axial. Apesar da falta de rigor, a participante B mostrou-se mais preocupada em colocar o lápis de forma correta.

⁷ Restantes imagens disponíveis em:

http://www.smh.com.au/ffximage/2005/06/27/SNPstorks_gallery_550x366.jpg ;

<http://mamiferos-marinhos.mundoentrepatas.com/imagenes/especies-de-focas.jpg?phpMyAdmin=PfqG0iessiXP%2c5Zcan9pxZp0nv2> ;

<http://1.bp.blogspot.com/-xBED2v-GjUI/TtvE-XkO0WI/AAAAAAAAADik/BW7UbPbH0RQ/s320/sim.gif>

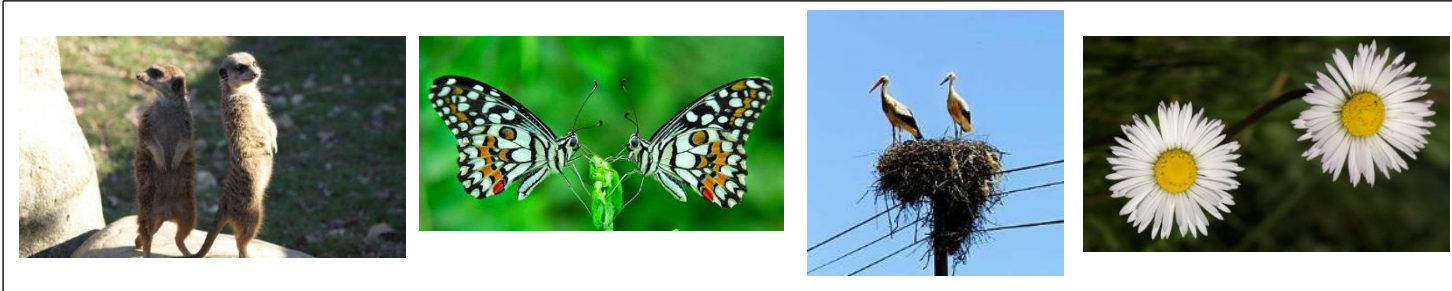


Figura 19. Imagens selecionadas pela participante C para explorar a Reflexão

Tal como a participante A, também a participante C escolheu incorretamente a imagem das cegonhas como Reflexão, quando esta representa uma Rotação 3D. Como podemos observar, o mesmo acontece com a imagem dos suricatas. Posteriormente, aquando a análise das suas escolhas, a participante conseguiu corrigir-se: *“Eu acho que as cegonhas já não é porque tinha que estar a cabeça desta virada para ali”*, quando reparou que confundiu a cauda de uma suricata com uma pata afirmou *“então já não é (...) tinha de ser aqui uma perna e aqui outra e tinha que estar a olhar para este lado”*. Verifica-se, então, que a participante confunde os conceitos durante a seleção mas, posteriormente, quando analisa a imagem e procura as características de uma determinada Isometria, consegue perceber que errou. Quando solicitado que identificasse o eixo de Reflexão e/ou centro de Reflexão, a participante utilizou material de desenho, mas com muito pouco rigor, não construindo a mediatriz de um ponto e o seu transformado.

Recordamos que a imagem dos malmequeres, selecionada pela participante C, apresenta não só Reflexão Axial, mas também Reflexão Central e, por isso, Rotação (de meia volta), Isometrias que não foram mencionadas por nenhum dos participantes.

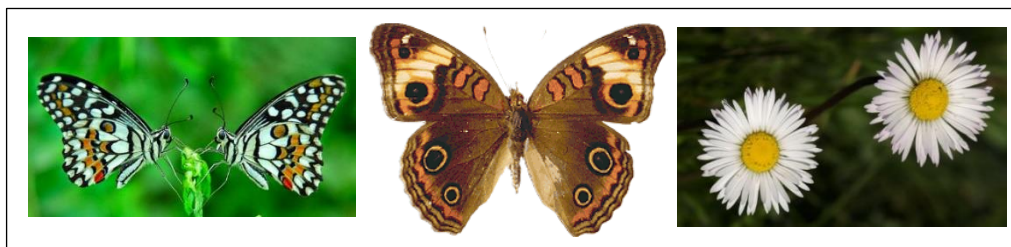


Figura 20. Imagens seleccionadas pelo participante D para explorar a Reflexão

Ao contrário dos restantes, com a escolha da imagem da borboleta, o participante D não confundiu as Isometrias entre si, mas sim Isometrias com Simetrias, nomeadamente o conceito de Reflexão com o de Simetria de Reflexão. Durante a exploração dos conceitos mostrou-se muito confuso – *“Eu acho que... hum... aqui não sei”* – e com receio de admitir que não sabia os conteúdos como pensava saber. Por fim, concluiu que *“está é Reflexão (imagem da borboleta) e esta é Simetria de Reflexão (imagem das duas borboletas), porque na Simetria de Reflexão é só uma imagem e passamos entre elas e na Reflexão temos uma imagem, dividimo-la e os dois lados mesmo que estejam divididos são iguais”*, continuando a confundir os dois conceitos. Na indicação do eixo de Reflexão, começou por apontar para o local, utilizando apenas o material de desenho por incentivo da professora investigadora. No entanto, foi utilizado sem rigor, uma vez que o participante apenas utilizou a régua para traçar um eixo *«a olho»*, isto é, sem realizar qualquer medição.

Por fim, apesar dos lapsos mencionados, podemos verificar que todos os participantes escolheram as duas imagens do conjunto apresentado que continham Reflexão Axial, ou seja, a dos malmequeres e das duas borboletas. Como referido anteriormente, a imagem dos malmequeres também possui Reflexão Central (e, consequentemente, Rotação) Isometria que não foi considerada por nenhum dos participantes.

4.7.2 IMAGENS SELECIONADAS PARA EXPLORAR A ROTAÇÃO

Neste item os participantes no estudo tinham, de entre as dez imagens apresentadas, tal como consta no apêndice sete, seleccionar as que possuíam Rotação. Neste seguimento, as respostas apresentadas pelos quatro participantes em estudo foram:

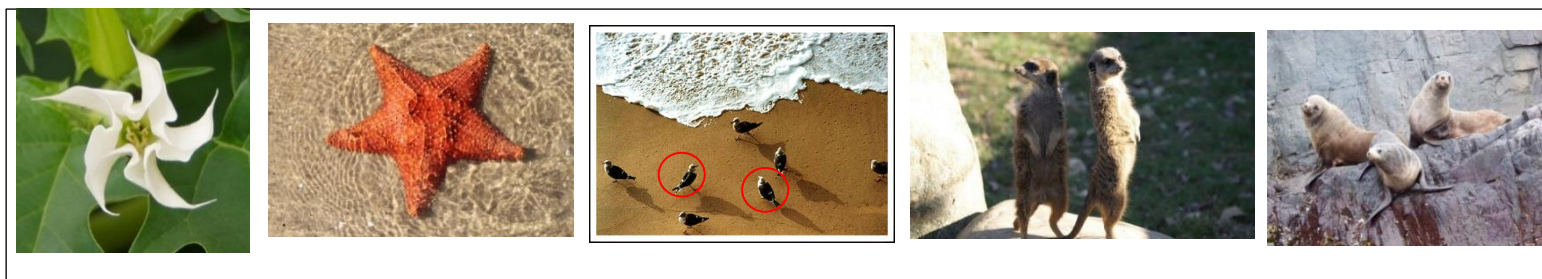


Figura 21. Imagens escolhidas pela participante A para explorar a Rotação

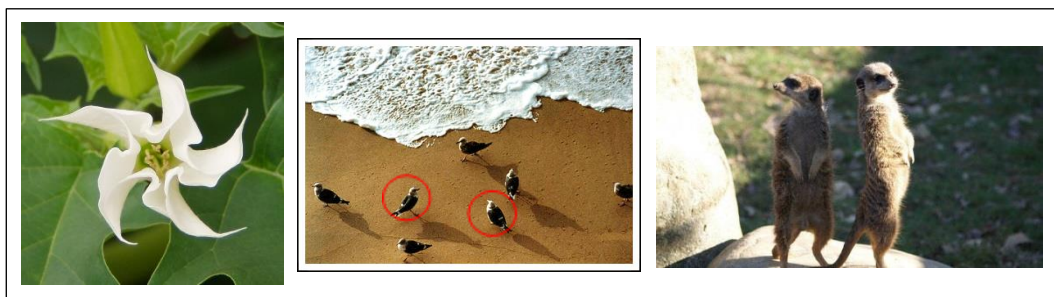


Figura 22. Imagens escolhidas pela participante B para explorar a Rotação



Figura 23. Imagens escolhidas pela participante C para explorar a Rotação



Figura 24. Imagens escolhidas pelo participante D para explorar a Rotação

⁸ Imagem restante disponível em:

http://www.florafinder.com/Species/Pics/Datura_stramonium_white_flower.jpg

Como podemos verificar pelas imagens acima, todos os participantes confundiram os conceitos de Rotação e Simetria de Rotação, escolhendo a imagem da flor. Além desta, os participantes A, C e D escolheram, também, a imagem da estrela-do-mar, evidenciando ainda mais esta confusão. Quando a participante A verificou as escolhas que fez, pediu para excluir apenas a primeira imagem.

Outro erro verificado prende-se com a escolha da imagem das focas pelas participantes A e C, embora tenham sido consideradas a foca castanha do lado esquerdo e a foca cinzenta (participante A) e as duas focas castanhas (participante C), esta não representa qualquer tipo de Isometria nem de Simetria.

Todos os outros participantes (A, B e D) cometeram lapsos mas identificaram corretamente pelo menos uma imagem, o que não se verificou com a participante C, pois todas as suas escolhas estão incorretas. Esta participante considerou as duas focas castanhas e identificou um centro de Rotação inexistente, uma vez que não está presente qualquer Rotação, bem como outra Isometria e Simetria. Esta não utilizou material de desenho, identificando cada um dos conceitos por estimativa e utilizando o lápis (figura 25): relativamente às focas, *“aqui acho que é 180°”*; à estrela-do-mar, *“aqui 90, não sei (...) é menos do que 90°”* e à flor *“35° ou 30°”*. Nesta última conclusão, foi questionada sobre a sua precisão, esclarecendo que *“pensei 360° a dividir por cinco”*, o que reforça o erro na sua estimativa.

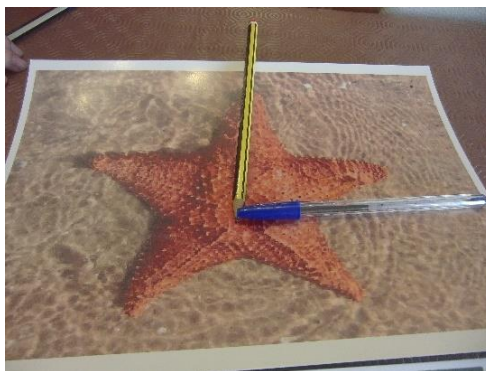


Figura 25. Determinação do centro de Rotação pela participante C

O participante D identificou a estrela-do-mar como uma Rotação. Uma vez que o participante estava um pouco bloqueado no seu raciocínio, a professora

investigadora questionou a escolha da imagem da flor como uma Rotação, na tentativa que este conseguisse explorar os seus conhecimentos. Assim, este identificou uma Rotação nesta imagem *“primeiro por causa das pétalas mas agora acho que não”, “as pétalas têm a forma assim de... hmm... a rodar”* e, voltando à estrela-do-mar, considerou outra Isometria *“acho que aqui é a Reflexão”, “se fizermos uma reta assim, reflete igual”*. Podemos concluir que o participante está muito inseguro quanto aos conceitos, não conseguindo explicá-los nem desenvolvê-los de forma suficiente e correta e que continua a confundir os conceitos de Reflexão e Simetria de Reflexão, considerando apenas a existência de Isometrias. Quando confrontado pela professora investigadora com os eixos considerados em cada uma das patas, este percebeu a existência de *“cinco”* eixos mas, quando questionado se eram eixos de Simetria ou eixos de Reflexão, respondeu *“de Reflexão”*, reforçando a incorreta designação acima mencionada. Quando questionado sobre o centro e o ângulo de Rotação, indicou *“fica mais ao menos aqui”*, apontando para o centro da flor (figura 26); *“mede mais ou menos 70°”*. Na imagem das gaivotas, tentou seguir a metodologia aprendida nas aulas mas esta verificou-se muito incompleta, não conseguindo determinar nem o centro nem o ângulo de Rotação (figura 27). Por fim, utilizou o transferidor uma única vez na tentativa de determinar o ângulo de Rotação e os restantes conceitos foram indicados por estimativa, como podemos constatar nas figuras seguintes.



Figura 26. Determinação de Rotação (participante D)



Figura 27. Determinação do centro e ângulo de Rotação (participante D)

Por fim, salientamos o facto de nenhum dos participantes ter incluído a imagem dos malmequeres na sua escolha. Facto já esperado, uma vez que,

anteriormente, também não identificaram a Reflexão Central presente na imagem dos malmequeres.

Finalmente, como comprovamos na análise apresentada, alguns dos participantes não sabiam como encontrar o centro de rotação, outros tentaram fazê-lo mas com muitas dificuldades e praticamente sem rigor. A medida da amplitude do ângulo de rotação foi quase sempre determinada sem recurso a instrumentos próprios e adequados. Como consequência, foi-lhes solicitado que explicassem os motivos para a classificação atribuída às imagens que escolheram, uma vez que se tratavam de imagens 3D e, por esse motivo, não eram esperadas construções no plano (2D). Assim, obtivemos as seguintes respostas:

- “Porque via-se... mesmo sem ponto.” (participante A)
- “E rodavam porque tinham uma rotação.” (participante A)
- “Porque a cabeça estava para aqui e depois rodou para ali (...) Rodou o corpo, o pé e o rabo”. (participante A, apontando para a imagens dos suricatas)
- “A cabeça rodou para aqui e o corpo seguiu a cabeça”. (participante A, apontando para a imagem das gaivotas)
- “ (...) *um está assim com as patas para a frente e com a cabeça para acolá e o outro está com a cabeça virada para aquele lado e com as patas para aqui*”. (participante B, analisando a imagem dos suricatas)
- “*Porque podemos movê-la, por exemplo aqui, podemos movê-la a rodar*”. (participante D, relativamente à imagem das gaivotas)

Assim, e por se tratarem de imagens 3D, que para alunos do 6ºano são difíceis de analisar pela elevada exigência de visualização espacial, todas as considerações apresentadas foram consideradas válidas.

4.7.3 IMAGENS CONSIDERADAS SIMÉTRICAS E IDENTIFICAÇÃO DE CADA UMA DAS SIMETRIAS

Neste item os participantes no estudo tinham, de entre as dez imagens apresentadas, tal como consta no apêndice sete, selecionar as que possuíam Simetrias (de Reflexão e de Rotação). Neste seguimento, as respostas apresentadas pelos quatro participantes em estudo foram:

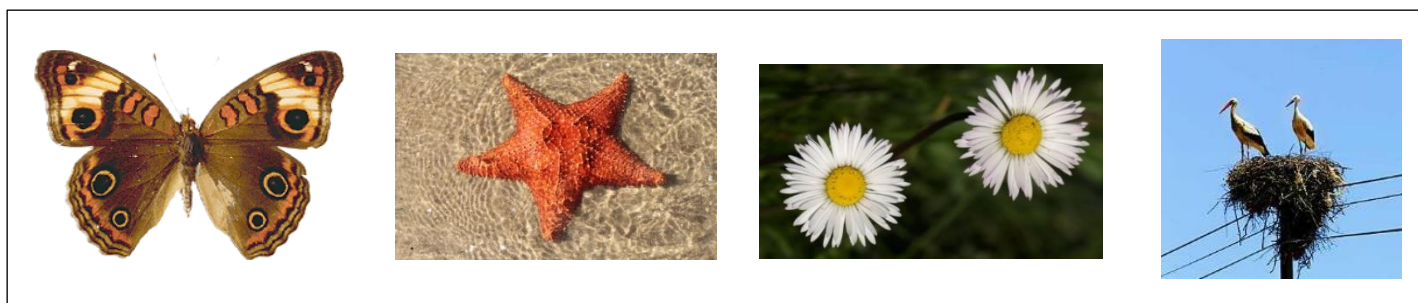


Figura 28. Imagens escolhidas pela participante A, consideradas como imagens simétricas (1ª escolha)

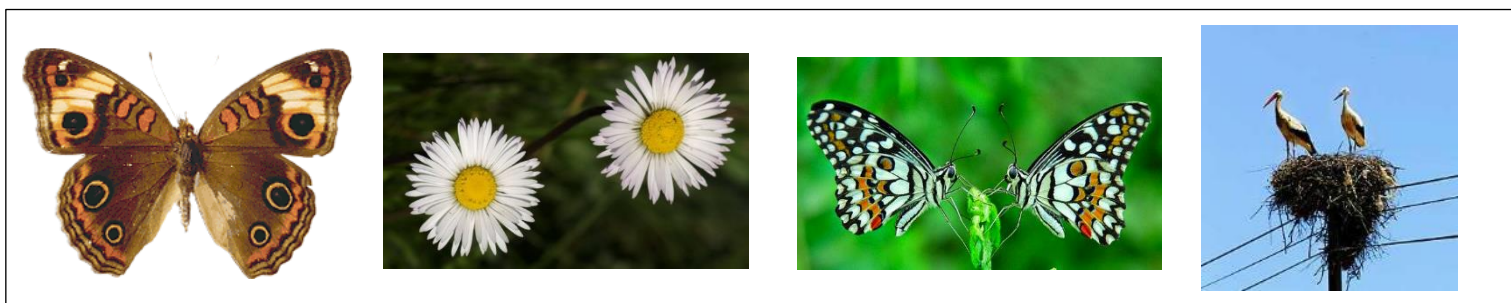


Figura 29. Imagens escolhidas pela participante A, consideradas como imagens simétricas (2ª escolha)

A participante A começou por escolher um primeiro conjunto de imagens como sendo simétricas, confundindo, em alguns casos (malmequeres e gaivotas), Simetria com Isometria. No entanto, assim que lhe foi pedido que identificasse as Simetrias representadas, a participante pediu para anular a sua escolha. Como podemos verificar na segunda escolha, a participante manteve três das imagens escolhidas na primeira vez, trocando apenas a imagem da estrela-do-mar (corretamente escolhida) pela imagem das duas borboletas, continuando a confundir os conceitos de Isometria e Simetria. Assim, a participante considerou existir Simetria de Reflexão nas imagens da borboleta e das duas borboletas e Simetria de Rotação nas imagens dos malmequeres e das cegonhas. A confusão entre os dois conceitos mencionados é evidente ao longo de todas as escolhas, uma vez que a participante havia escolhido as imagens dos malmequeres, das borboletas e das cegonhas como imagens representativas da Reflexão, agora representando as Simetrias de Reflexão e Rotação. Sendo que nas imagens dos malmequeres e das borboletas existe Reflexão, nos malmequeres também existe reflexão central, logo rotação, e na imagem das cegonhas existe Rotação 3D, é inequívoca a falha na compreensão dos vários conceitos. Quando confrontada com as escolhas contraditórias, a participante A diz “Eu acho que roda daqui para ali”, referindo-se aos malmequeres mas, logo depois, acrescenta “Aaaah, não! Espera... Isto é Reflexão, isto é Reflexão.” Na imagem das borboletas afirma “Eu troco-as” (a Reflexão e a Simetria de Reflexão) e corrige-se “Elas não estão juntas, não se tocam (...) é uma Reflexão.” Na figura das cegonhas afirmou “acho que esta rodou daqui para ali”, depois alterou para Reflexão porque “não pode ser Simetria porque não estão juntas.” Finalmente, na imagem da borboleta, que foi corretamente escolhida, a participante A justifica “é Simetria de Reflexão porque o eixo divide a figura em duas partes.”



Figura 30. Imagens escolhidas pela participante B, consideradas como imagens

A participante B escolheu quase todas as imagens que apresentam Simetria (faltou apenas a imagem da flor). Na imagem da borboleta considerou existir “*Simetria de Reflexão*” e a imagem da estrela-do-mar “*também tem Simetria de Reflexão.*” Na imagem da estrela-do-mar, a participante considerou existir apenas um eixo de Simetria de Reflexão, quando existem cinco e não considerou a Simetria de Rotação.

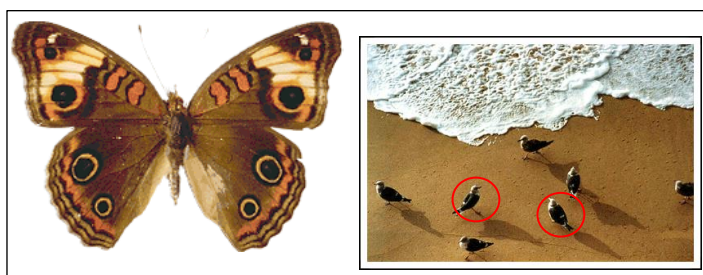


Figura 31. Imagens escolhidas pela participante C, consideradas como imagens

No que respeita à participante C, esta escolheu apenas uma imagem correta, a da borboleta, acrescentando que “*é uma Simetria de Reflexão*”.

Confundiu por instantes os conceitos de Simetria com Isometria, tendo ponderado escolher a imagem dos malmequeres, mas optando por não o fazer. Por fim, a imagem das gaivotas é uma Rotação 3D, não apresentando qualquer Simetria. Quando analisou a imagem, a participante ponderou a sua escolha: “*acho que já não é (...) não sei (...)*”. A participante percebeu que não podia ser Simetria de Reflexão mas ficou na dúvida se seria Simetria de Rotação. No entanto, continuou a considerar a imagem simétrica.

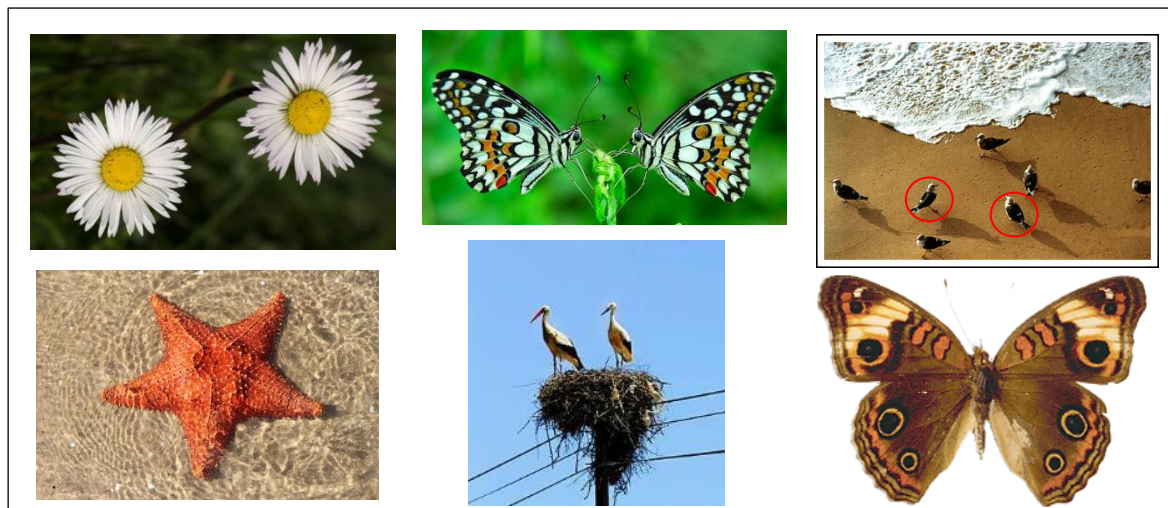


Figura 32. Imagens escolhidas pelo participante D, consideradas como imagens simétricas

O participante D escolheu duas de três imagens simétricas, enquanto as restantes imagens reforçam a sua dificuldade em distinguir os conceitos de Isometria com os de Simetria: considerou existir Simetria “*de Reflexão*” na imagem dos malmequeres (onde havia corretamente considerado Reflexão), “*de Rotação*” na das cegonhas (onde existe Rotação), “*de Reflexão*” na da estrela-do-mar (onde havia erradamente considerado Rotação e, posteriormente, Reflexão), “*de Reflexão*” na das borboletas (onde havia corretamente considerado Reflexão), “*de Rotação*” na das gaivotas (onde havia corretamente considerado Rotação) e “*de Reflexão*” na da borboleta (onde havia erradamente considerado Reflexão). Quando confrontado com as suas escolhas contraditórias, o participante reconheceu como Simétrica qualquer imagem onde identificasse Isometrias, demonstrando a não distinção entre os dois conceitos. Durante este

confronto, foi-lhe solicitada uma reconhecimento das imagens e foi questionado sobre a diferença entre Rotação e Simetria de Rotação e entre Reflexão e Simetria de Reflexão, tendo este respondido que “*não*” se recordava. Assim, na imagem dos malmequeres manteve “*Simetria de Reflexão*”, na das gaivotas a “*Rotação*”, na da estrela-do-mar “*acho que é só Reflexão*”, na das borboletas lembrou-se que “*tinha dito Reflexão antes*” mas considerou “*Simetria de Reflexão*” e na da borboleta “*Reflexão*”. Ao analisarmos estas considerações finais, verificamos que o participante troca algumas vezes os conceitos, considerando existir Simetria nas imagens que apresentam Isometrias e vice-versa.

Por fim, destacamos uma particularidade desta etapa do primeiro momento da Intervenção Didática: de três imagens simétricas, os participantes escolheram entre uma a duas figuras corretas, sendo que nenhum deles escolheu a imagem da flor que apresenta Simetria de Rotação; apenas dois escolheram a imagem da estrela-do-mar que apresenta Simetria de Reflexão e Simetria de Rotação (embora o participante D a tenha classificado de forma incorreta) e todos escolheram a imagem da borboleta (também classificada de forma incorreta pelo participante D).

4.7.4 IMAGENS SELECIONADAS PARA DISTINGUIR A REFLEXÃO (AXIAL E/OU CENTRAL) DA SIMETRIA DE REFLEXÃO

Neste item os participantes no estudo tinham, de entre as dez imagens apresentadas, tal como consta no apêndice sete, selecionar uma que possuísse Reflexão (Axial e/ou Central) e outra que possuísse Simetria de Reflexão. Neste seguimento, as respostas apresentadas pelos quatro participantes em estudo foram:

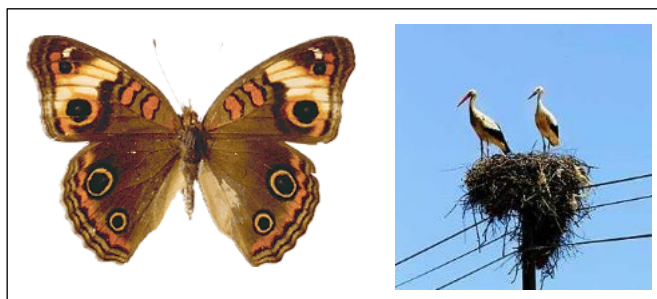


Figura 33. Imagens escolhidas pela participante A para explorar a Reflexão e a Simetria de Reflexão

Na escolha da imagem para explorar a Reflexão (Axial ou Central), a participante A voltou a demonstrar erros científicos, uma vez que a imagem das cegonhas se trata de uma Rotação 3D e não de uma Reflexão (seja ela Axial ou Central). Mesmo assim a participante justificou a sua escolha *“porque o eixo está no meio e com distância das cegonhas”*.

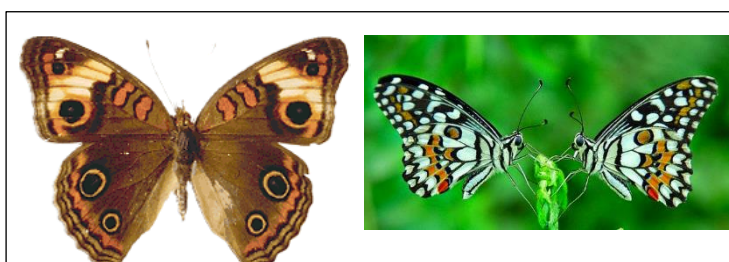


Figura 34. Imagens escolhidas pelos participantes B e D para explorar a Reflexão e a Simetria de Reflexão

Já a participante B, escolheu corretamente a imagem das duas borboletas para representar a Reflexão, justificando que *“o eixo de Reflexão não faz parte das borboletas porque estão separadas”*. A participante B, como observamos durante a Entrevista antes da Intervenção Didática, explicou as diferenças entre os dois conceitos com erros científicos: Primeiramente havia dito que *“na Simetria tem que fazer parte da figura, o eixo, para nós refletirmos e a Isometria pode ou não fazer”*. Quando confrontada com as suas palavras e a escolha da imagem da borboleta para representar a Simetria de Reflexão, a participante afirmou que esta imagem *“tem Simetria de Reflexão (...) mas também pode ser Reflexão. Só que, como é uma só figura*

acho que só dá para fazer eixo de Simetria em vez de eixo de Reflexão”. Neste ponto verificou-se que a participante entende as diferenças entre os dois conceitos, uma vez que esta pretendeu explicar que quando estamos perante uma só imagem/figura que é Simétrica e que, quando a imagem pode ser formada pela junção de duas figuras, que poderão estar separadas ou juntas, é uma Reflexão. Tendo em conta o que foi analisado até então, encaramos que a ligeira confusão que a participante B aparenta se deve à junção dos conceitos de Simetria e Isometria com o de Reflexão Axial e Central.

O participante D, embora tenha escolhido as mesmas imagens que a participante B, voltou a cometer o erro de trocar o conceito de Simetria com o de Isometria. No entanto, reparamos que o participante erra de forma «coerente», ou seja, identifica os tipos de Isometria em imagens simétricas e identifica os tipos de Simetria em imagens isométricas sempre que lhe é solicitada a análise das suas escolhas.



Figura 35. Imagens escolhidas pela participante C para explorar a Reflexão e a Simetria de Reflexão

A participante C, não confundiu qualquer conceito durante esta etapa, tendo escolhido as imagens de forma correta e com facilidade, retificando as considerações de etapas anteriores. Relativamente à imagem escolhida para representar a Reflexão, os malmequeres, a participante justificou *“este reflete naquele, faz tipo efeito de espelho (...) este são duas coisas assim distantes”*, referindo-se apenas à Reflexão Axial, desconsiderando novamente a Reflexão Central.

Por fim, à exceção do participante D, todos os participantes escolheram corretamente e sem dúvidas, a imagem da borboleta para representar a Simetria de

Reflexão, *“porque a imagem é toda uma e o eixo divide em duas partes iguais”* (participante A); *“a da borboleta, só tem uma borboleta e o eixo de Reflexão faz parte da borboleta”* (participante B); *“então aqui, se dobrarmos elas ficam iguais, unindo ponto por ponto”* (participante C).

4.7.5 IMAGENS SELECIONADAS PARA DISTINGUIR A ROTAÇÃO DA SIMETRIA DE ROTAÇÃO

Neste item os participantes no estudo tinham, de entre as dez imagens apresentadas, tal como consta no apêndice sete, selecionar uma que possuísse Rotação e outra que possuísse Simetria de Rotação. Neste seguimento, as respostas apresentadas pelos quatro participantes em estudo foram:



Figura 36. Imagens escolhidas pelas participantes A e B para explorar a Rotação e a Simetria de Rotação

Como podemos observar, as participantes A e B escolheram, corretamente, as mesmas imagens: a primeira imagem (estrela-do-mar) para representar a Simetria de Rotação porque *“são as patas da estrela-do-mar que vão rodando sempre”* (participante A), *“o eixo de Rotação da figura 3 faz parte do próprio ser”* (participante B) e a segunda imagem (suricatas) para representar a Rotação porque *“a imagem não está junta; tem uma distância e roda a cabeça e o corpo”* (participante A), *“o centro de Rotação da figura 7 não faz parte dos animais”* (participante B). A participante B também concluiu que *“há bocado eu disse que esta, a estrela-do-mar, tinha Simetria de Reflexão mas também pode ter Simetria de Rotação”*. No que respeita à imagem

dos suricatas, ainda que este conhecimento seja demonstrado inconscientemente, as citações da participante A mostram que esta tem presente noções de tridimensionalidade.

As participantes foram desafiadas a encontrar o(s) eixo(s) de Simetria na estrela-do-mar: “*são cinco*” (participante A), “*cinco*” (participante B). A participante B havia dito que a estrela-do-mar tinha apenas um eixo de Simetria de Reflexão, concluindo agora que tem cinco, tal como a Simetria de Rotação.



Figura 37. Imagens escolhidas pela participante C para explorar a Rotação e a Simetria de Rotação

A participante C apresentou algumas dificuldades, demorando um pouco mais a tomar alguma decisão, sobretudo relativamente à Rotação. No entanto, escolheu corretamente a imagem da flor para representar a Simetria de Rotação “*porque é uma imagem só (...) que roda sobre um centro*”, mas errou na escolha da imagem das focas (onde considerou apenas as castanhas) para representar a Rotação (erro que também se verificou aquando a seleção de imagens que apresentam Rotação) porque “*na Rotação são suas imagens diferentes*”. Contudo, conseguimos verificar algo positivo: se recordarmos as suas escolhas para representar a Rotação, a participante havia escolhido a imagem da flor como Rotação e, apesar de alguma confusão inicial – “*afinal não é Simetria de Rotação, esta é Rotação*” – ficou com dúvidas da sua decisão mas, depois de repensar, conseguiu distinguir os conceitos de Simetria com os de Isometria, tendo concluído que “*esta é Simetria, enganei-me*”. Ou seja, quando confronta Simetria de Rotação com Rotação, a participante percebe que errou e porquê.



Figura 38. Imagens escolhidas pelo participante D para explorar a Rotação e a Simetria de Rotação

O participante D escolheu mais uma vez a imagem das gaivotas para representar a Rotação. No entanto continua a demonstrar dificuldades nas imagens simétricas, uma vez que escolheu a imagem dos suricatas para representar “a Simetria de Rotação”, quando nesta existe também Rotação (3D). Tendo em conta as dificuldades deste último participante para com as imagens simétricas, a professora investigadora confrontou as suas escolhas corretas com as incorretas e contraditórias entre si, para que este conseguisse refletir com calma, entender as diferenças e, por fim, chegar a uma conclusão de forma autónoma. Ao se aperceber da sua confusão, o participante analisa os seus desenhos anteriores e conclui que *“tinha que fazer um desenho em que as figuras tivessem um eixo mas que as figuras ficassem separadas e que fossem iguais”* (no caso da Simetria de Reflexão). Na continuação do seu raciocínio, desenhou um exemplo de Isometria e a respetiva Simetria de forma a demonstrar que havia entendido e a corrigir os erros cometidos anteriormente (figura 39).

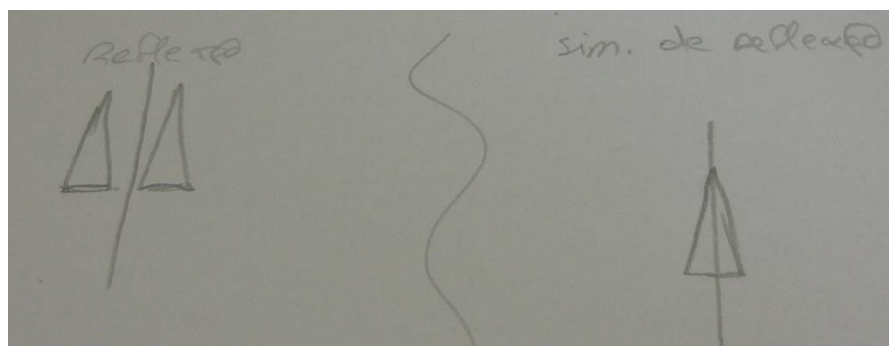


Figura 39. Exemplos de Reflexão e Simetria de Reflexão do participante D, desenhados após o primeiro momento da Intervenção Didática

Por fim, voltamos a constatar que a imagem dos malmequeres não foi selecionada por nenhum dos participantes como apresentando Rotação.

Como mencionamos anteriormente, depois de confrontados com algumas das suas escolhas contraditórias, no final do primeiro momento todos os participantes tiveram a oportunidade de esclarecerem as restantes dúvidas e de refletir imagem-a-imagem os conceitos abordados, de forma a consolida-los e a esclarecer as últimas dúvidas e erros científicos. Salientamos que, também nesta fase, voltamos a reforçar a ideia de que nada na Natureza nada é perfeito e que, por isso, é necessário termos em consideração todas as imperfeições, por mais pequenas que sejam, para que possamos refletir com rigor e consciência sobre qualquer imagem. Pois só assim podemos isolar todos esses pormenores para aprender e pensar Matemática com o mesmo rigor que esta exige e, também, utilizá-los para reforçar essa aprendizagem. Desta forma, para terminar o 1.º Momento da Intervenção Didática, apresentamos a tabela 25 com a designação final atribuída a cada uma das imagens, por cada um dos participantes. Em cada caso de designação incorreta, os participantes foram levados a analisar a imagem de outra forma para que, em conjunto com a explicação da professora investigadora, a designassem corretamente.

Tabela 25: Designação atribuída por cada participante a cada uma das imagens

Figura	Designações			
	Participante A	Participante B	Participante C	Participante D
	Simetria de Rotação	Rotação, alterando posteriormente para Simetria de Rotação	Simetria de Rotação	Simetria de Rotação
	Simetria de Reflexão	Simetria de Reflexão	Simetria de Reflexão	Simetria de Reflexão
	Simetria de Rotação	Simetria de Reflexão e Simetria de Rotação	Simetria de Rotação	Simetria de Reflexão
	Reflexão Axial	Reflexão Axial	Reflexão Axial	Reflexão Axial
	Rotação	Rotação	Rotação (com ajuda)	Rotação

	Reflexão	Translação, alterando posteriormente para Rotação	Rotação	Rotação
	Rotação	Rotação	Rotação	Rotação
	Reflexão	Reflexão	Reflexão	Simetria de Reflexão, alterando posteriormente para Reflexão
	Rotação (foca castanha do lado esquerdo e foca cinzenta) ou Reflexão (focas castanhas)	Rotação (foca castanha do lado esquerdo e foca cinzenta)	Rotação (focas castanhas)	Rotação (focas castanhas), alterando posteriormente para nada
	nenhuma	nada	nada	nada

Analisando a tabela anterior, podemos constatar alguns erros cometidos por cada um dos participantes, assim como respostas parcialmente corretas:

A participante A respondeu de forma parcialmente correta na estrela-do-mar, uma vez que considerou apenas a Simetria de Rotação, quando existe também Simetria de Reflexão e nos malmequeres, considerando apenas a Reflexão Axial, quando existe também Reflexão Central e, conseqüentemente, Rotação. Respondeu de forma incorreta nas cegonhas, considerando Reflexão quando se trata de uma Rotação e nas focas, considerando dois casos possíveis, quando não existe qualquer Isometria nem Simetria.

A participante B errou apenas nas focas, ao considerar Rotação onde não existe qualquer Isometria nem Simetria, como já foi referido. Tal como a participante A, respondeu parcialmente correto na imagem dos malmequeres pela razão referida anteriormente.

A participante C também respondeu de forma parcialmente correta na estrela-do-mar e nos malmequeres pelas razões já mencionadas. Pela mesma razão que a participante B, errou ao considerar Rotação nas focas.

Atendendo à razão já referida e assim como as participantes já mencionadas, o participante D respondeu de forma parcialmente correta na estrela-do-mar e nos malmequeres. Apesar da sua hesitação, não se verificaram mais erros da sua parte.

Assim, o participante D foi o único a analisar corretamente a imagem das focas e apenas a participante B respondeu de forma totalmente correta na estrela-do-mar, uma vez que esta foi maioritariamente caracterizada como uma Simetria de Rotação. No entanto, foi chamada a atenção dos participantes para o facto de a estrela-do-mar também possuir Simetria de Reflexão. Quando questionados sobre os eixos e a amplitude do ângulo de Rotação, obtivemos as seguintes reações: “tem *cinco* eixos de Rotação e *cinco* de Reflexão” (participante A); “tem mais de 90° (...) tem mais ou menos 45°” (participante A, depois de medir por estimativa, utilizando os lápis, como mostra na figura 40), “tem *cinco* de Rotação e *cinco* de Reflexão” (participante B); “tem *cinco* eixos de Reflexão e *cinco* de Rotação” (participante C); *tem cinco*” (participante D,

relativamente à Simetria de Reflexão) e “tem cinco” (participante D, relativamente à Simetria de Rotação).

Dadas as dificuldades do participante D, foi-lhe questionado o número de eixos na figura da flor, tendo respondido corretamente “são cinco”.



Figura 40. Determinação do ângulo de Rotação (participante A)

Um outro aspeto que consideramos importante reforçar é o facto de, ao longo de toda a Intervenção Didática, nenhum participante considerou a existência de Reflexão Central e de Rotação (de meia volta) na imagem dos malmequeres. Os quatro participantes consideraram apenas a existência de Reflexão Axial. Apesar de se mostrarem seguros na sua análise, explicando corretamente as razões da sua atribuição, optamos por considerar esta resposta como parcialmente correta.

4.8 INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE O 2.º MOMENTO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA

O segundo momento da Intervenção Didática diz respeito à identificação de Simetrias e criação de Isometrias através de frutos. Foi explicado a todos os participantes que o objetivo era cortar cada um dos frutos exatamente a meio, isto é, com o maior rigor possível, para procedermos à análise de cada um dos resultados. Como todos os participantes estudaram os três frutos (morango, kiwi e pera) e

obtiveram resultados muito semelhantes, iremos expor apenas os exemplos relevantes para o estudo, para que esta secção não fique demasiado extensa.

Relembramos que trabalhamos num contexto real, onde existem imperfeições e diferenciações próprias nos frutos (não há frutos exatamente iguais), que serão desprezadas.

4.8.1 IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE SIMETRIAS EXISTENTES NAS METADES DE CADA FRUTO

Neste item foi solicitado que os participantes identificassem o tipo de simetrias existentes nas metades de cada fruto que partiram.

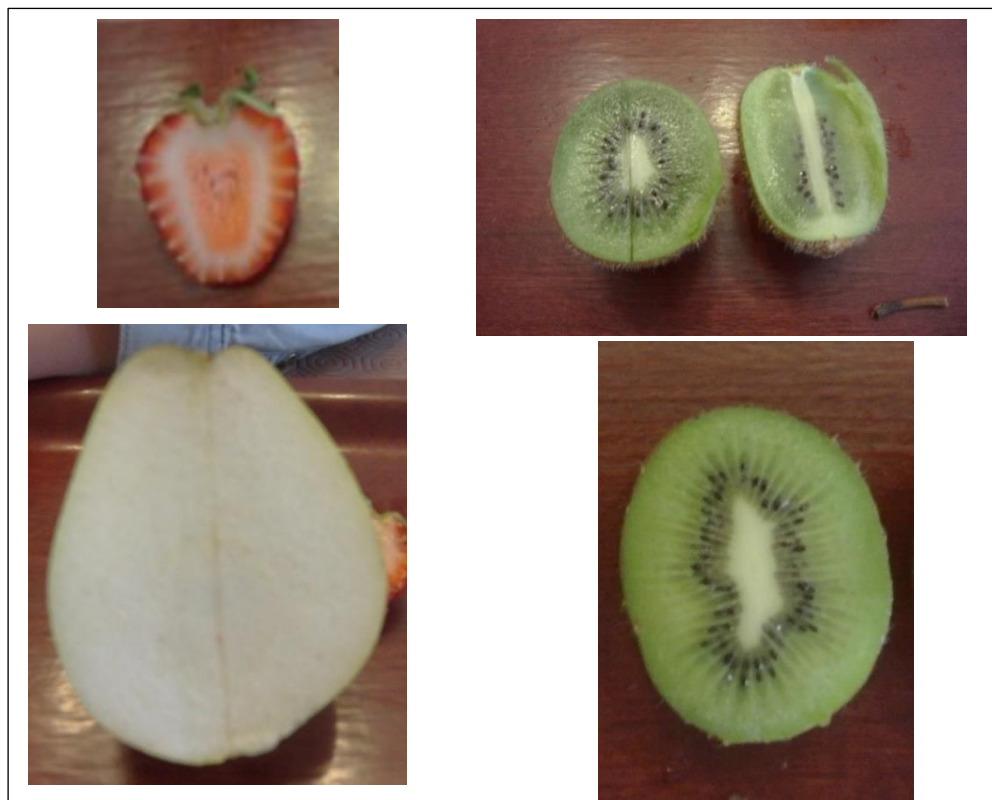


Figura 41. Frutos cortados segundo as orientações dos vários participantes

Nesta fase, alguns participantes demonstraram saber a diferença entre os conceitos de Isometria e Simetria. Quando questionados sobre a existência de Simetrias ou Isometrias numa das metades do morango, afirmaram: *“não, é uma Simetria de Reflexão”* (participante A); *“sim, Simetria de Reflexão”* (participante B); *“Simetria de Reflexão”* (participante C e D). Na pera identificaram: *“É uma Simetria de Reflexão, também”* (participante A); *“é uma Simetria de Reflexão”* (participante B) e *“Simetria de Reflexão”* (participante C e D). A participante A marcou o eixo de Simetria através de um ligeiro corte com a faca, como podemos observar na figura anterior, estratégia utilizada pela professora investigadora aquando a análise realizada pelo participante D.

Uma vez que os kiwis foram partidos de duas formas diferentes (transversal e longitudinal), foi-lhes solicitado que analisassem cada uma das partes e partilhassem as suas conclusões. *“Aqui é a Simetria de Reflexão”* (participante A, relativamente ao corte longitudinal); *“e aqui tem uma outra Simetria de Reflexão, mas é diferente”* (participante A); *“tem assim e assim”* (participante B, indicando que existem dois eixos de Simetria no corte transversal); *“não sei. Mas por exemplo, se eliminarmos as sementes tipo a mais, dá uma Simetria de Reflexão”* (participante C, corte transversal); *“aqui também acho que sim”* (participante C, corte longitudinal); *“hmm... hmm... Rotação, hmm... Reflexão primeiro”* (participante D, após dezanove segundos de silêncio/hesitação, relativamente ao corte longitudinal); *“é a Simetria de Reflexão”* (participante D, relativamente ao corte longitudinal) e *“é Simetria de Reflexão”* (participante D, relativamente ao corte transversal. Uma vez que a participante A mostrava alguma estranheza, esta marcou o eixo de Simetria (que podemos verificar através de um corte, na figura 41) e prosseguiu o seu raciocínio *“está mal marcado, era mais a meio (...) É uma Simetria de Reflexão.”* A participante B, ao analisar o segundo eixo de Simetria, chamou à atenção que poderíamos considerar mais eixos, concluindo *“tem Simetria de Rotação (...) tem as duas”*. Esta considerou que *“a Simetria de Reflexão”* era mais óbvia mas que se analisarmos com mais pormenor *“tem os dois”* tipos de Simetria. A professora orientadora explicou oralmente que a vista de cima do rebordo do kiwi se assemelha a um círculo e que só poderíamos considerar

Simetria de Rotação, desprezando as imperfeições próprias do fruto. No entanto, esta mesma participante generalizou esta conclusão, afirmando *“tem Simetria de Reflexão e de Rotação”* relativamente ao corte longitudinal. Apenas quando a professora investigadora fez os cortes referentes para ilustrar a Simetria de Rotação, esta conseguiu visualizar o erro cometido. Desta forma, considerou existir *“Simetria de Reflexão”*.

Apesar do participante D ter compreendido as diferenças entre Isometrias e Simetrias e as características de cada conceito, voltou a trocá-los mas sempre de forma «coerente», ou seja, atribuiu sempre a terminologia das Isometrias aos exemplos de Simetrias e vice-versa.

Como podemos verificar nos cortes dos kiwis, a disposição e o número de sementes de cada um dos lados do eixo de Simetria é diferente. As sementes do kiwi não se distribuem matematicamente, particularidade que tem que ser desprezada. Neste sentido, os participantes foram confrontados com este facto e questionados se poderiam estudar Matemática nos exemplos da fruta, obtendo as seguintes respostas: *“esquecendo o pormenor das pintinhas, fica uma Simetria de Reflexão”* (participante A); *“sim, porque a Natureza não é rigorosa (...) nada é perfeito”* (participante B); *“(…) se eliminarmos as sementes tipo a mais, dá uma Simetria de Reflexão”* (participante C) e *“as sementinhas pretas... sim”* (participante D).

4.8.2 CRIAÇÃO, ATRAVÉS DA MANIPULAÇÃO DE FRUTOS, DE DIFERENTES ISOMETRIAS E SIMETRIAS

Neste item foi solicitada, a cada participante, a construção, através da manipulação dos frutos, das diferentes Isometrias e Simetrias abordadas no 1.º momento da Intervenção Didática. Para cada construção, foi solicitada uma explicação oral da Isometria ou Simetria apresentada.



Figura 43. Rotação criada pela participante A



Figura 42. Reflexão criada pela participante A

Aquando a realização dos cortes nos frutos, a participante A identificou apenas Simetrias e preferiu criar Isometrias, uma Reflexão e uma Rotação, apresentadas nas figuras acima. *“Esta é uma Reflexão”* (participante A, relativamente aos kiwis), *“Isto é uma Rotação”* (participante A, relativamente aos morangos). Verificamos, mais uma vez, que não houve rigor na construção das Isometrias, pois a participante limitou-se a colocar os frutos numa determinada posição, sem determinar a mediatriz ou o centro de Rotação. Este facto também se verifica nos restantes participantes, como podemos observar no seguimento do presente estudo.

Neste segundo momento da Intervenção Didática, em que exploramos Isometrias e Simetrias através de frutos, a participante A não demonstrou dificuldades e já conseguiu distinguir com segurança os vários conceitos (Reflexão, Rotação, Simetria de Reflexão e Simetria de Rotação). No entanto, continuou a considerar apenas a Reflexão Axial.

Quando questionada sobre a existência ou não de diferenças entre as duas metades do morango, a participante conseguiu confrontar o seu resultado com o rigor matemático necessário, encontrando a seguinte solução: *“devia ter tirado a parte verde”*.



Figura 45. Reflexão criada pela participante B



Figura 44. Rotação criada pela participante B



Figura 46. Translação criada pela participante B

Como podemos verificar nas figuras acima, a participante B construiu uma Translação por iniciativa própria, mesmo sabendo que esta Isometria não é contemplada no Programa do 6.º ano de escolaridade. Esta optou por trabalhar apenas com os morangos, pedindo para disponibilizar mais alguns para as suas «construções», escolhendo a própria os frutos pretendidos. Quando questionada sobre se deveríamos considerar algum pormenor, a participante respondeu “*o tamanho*”, dado que que na Rotação e na Translação foram usados morangos de tamanhos diferentes: “*Considereei que os morangos eram todos iguais*”.



Figura 47. Reflexão criada pela participante C



Figura 48. Rotação criada pela participante C

No presente momento da Intervenção Didática, a participante C já se mostrou mais segura na verbalização dos seus conhecimentos e entusiasmada com a manipulação de frutos. Por iniciativa própria, optou por colocar o lápis como referência do eixo de Reflexão. Na Rotação, afirmou que “rodou 180° (...) 90°?”, demonstrando alguma insegurança aquando a sua análise.



Figura 50. Simetria de Reflexão criada pelo participante D



Figura 49. Rotação criada pelo participante D

O participante D optou por usar apenas morangos construindo uma Rotação de “90” graus. Apesar de se mostrar mais descontráído, decidiu-se pelo segundo exemplo devido ao incentivo da professora investigadora para o fazer, optando pela Simetria de Reflexão.

Por fim, consideramos conveniente chamar a atenção para o facto de nenhum participante ter indicado o centro de Rotação das respetivas Rotações. O que, à exceção da participante C, se repete com a não indicação do eixo de Reflexão.

4.9 INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE O 3.º MOMENTO DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA

Antes da análise do terceiro momento da Intervenção Didática (Identificação de elementos da Natureza com a presença de Isometrias ou Simetrias), queremos declarar que todas as fotografias apresentadas foram tiradas pelos respetivos participantes, sendo-lhes solicitado sempre o máximo rigor. A identificação por parte dos participantes de elementos da Natureza com a presença de Isometrias ou Simetrias decorreu através da exploração do jardim e/ou quintal, de forma livre e espontânea, mas sempre acompanhados pela professora investigadora. Este momento decorreu no seguimento do segundo momento, sendo oferecido um pequeno intervalo a cada um dos participantes entre os dois momentos. Relembramos que os estes momentos foram realizados numa sessão posterior à realização do primeiro momento.

4.9.1 FOTOGRAFIAS TIRADAS PELOS ALUNOS PARTICIPANTES DE SITUAÇÕES DO QUOTIDIANO ONDE SE IDENTIFIQUEM CASOS DE ISOMETRIAS E/OU DE SIMETRIAS

Neste item foi solicitada a identificação no espaço exterior, de situações do quotidiano onde se identifiquem casos de isometrias e de simetrias. Estes casos foram captados através de fotografias que se apresentam de seguida.

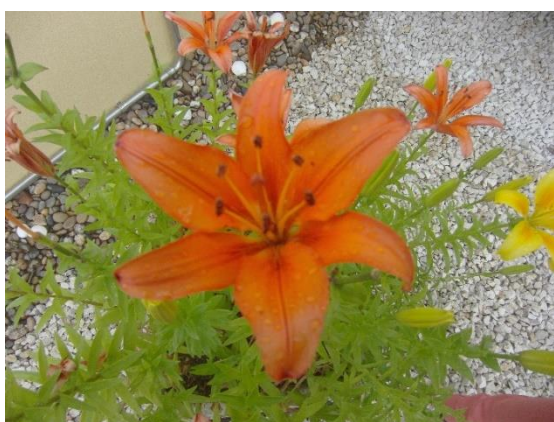


Figura 51. Simetria de Rotação (participante A)



Figura 52. Simetria de Rotação (participante A)

No jardim exterior, a participante A encontrou rapidamente os exemplos pedidos. Durante a análise ao primeiro exemplo (figura 51), explicou: *“É uma flor (...) Tem Simetria de Rotação e também é, também é Reflexão porque reflete aqui... (hesitação)... e em mais sítios (...) É uma Simetria de Reflexão.”* No que concerne à figura 52, a participante A expressou *“é uma Simetria de Reflexão aqui e em vários sítios... mas não é bem, por isso tem Simetria de Rotação.”*



Figura 53. Simetria de Rotação
(participante B)

A participante B, enquanto se dirigia ao jardim, cruzou-se com um cão, estabelecendo logo de imediato uma comparação entre este e o cão da imagem trabalhada no primeiro momento da Intervenção Didática: “a cara dos animais tem *Simetria de Reflexão* (...) Este não é como o da imagem, é todo igual”. Prosseguiu a sua exploração pelo jardim de forma bastante autónoma e muito motivada, explicando que a figura 53 é uma “*Simetria de Rotação porque estamos a dividir a mesma figura em vários eixos*”. A participante foi chamada à atenção para o facto de na Simetria de Rotação não existirem eixos, mas sim ângulo de Rotação.



Figura 54. Simetria de Rotação
(participante C)

A participante C concluiu que na figura 54 tem “*Simetria de Rotação e Simetria de Reflexão*”, isto é, considerou apenas as folhas em si – “*estas folhas têm Simetria de Reflexão (...) aqui pelo meio* (referindo-se ao eixo de Simetria)” – e considerou também toda a planta – “*(...) Simetria de Rotação*”.



Figura 56. Reflexão (participante D)



Figura 55. Simetria de Reflexão (participante D)



Figura 57. Simetria de Reflexão (participante D)

O participante D pediu para tirar uma fotografia a uma tangerina ainda na árvore para depois cortar e fotografar o seu interior (figura 57), mais tarde indicou existir “*uma Simetria de Reflexão*”. Optou por fotografar as folhas de uma planta de

duas formas diferentes: na figura 55 optou por escolher duas folhas para representar a Reflexão, salvaguardando que *“ficou mais ou menos”* devido ao ângulo da fotografia e na figura 56 indicou que *“se partirmos a folha a meio dá Simetria de Reflexão”*.

Neste último momento, o interesse e motivação dos participantes foi notório. Foi-lhes solicitado que tirassem uma fotografia e todos pediram para tirar mais do que uma. Por vezes, continuaram a desenvolver o seu raciocínio nos vários elementos da Natureza e do quotidiano que iam encontrando, mesmo depois de terminada a Intervenção Didática.

Como referido anteriormente, no final do primeiro momento da Intervenção Didática, cada participante foi confrontado com as suas escolhas ao longo deste momento, dando especial atenção às escolhas contraditórias. Foram esclarecidas todas as dúvidas e corrigidos todos os erros científicos, bem como foi realizada classificação final de cada uma das imagens. Nesta fase do trabalho de investigação, apresentamos a evolução de cada um dos participantes ao longo dos três momentos da Intervenção Didática.

Assim:

No primeiro momento (análise e exploração de imagens com elementos da Natureza, utilizando conhecimentos de Isometrias), a participante A esteve muito insegura. No final desta etapa, revelou ter adquirido alguns conhecimentos – identificou corretamente e/ou parcialmente e com facilidade a Isometria ou Simetria existente em cada imagem. No segundo momento (identificação de Simetrias e criação de Isometrias e Simetrias através de frutos), bem como no terceiro (identificação de elementos da Natureza com presença de Isometrias ou Simetrias), a participante mostrou mais iniciativa, maior facilidade e interesse – tomou a iniciativa em partir fruta, em fazer construções para além das pedidas e mostrou-se extremamente motivada na atividade final.

Apesar de algumas dificuldades, participante B mostrou-se confiante ao longo do primeiro momento da Intervenção Didática, tentando sempre fazer-se entender e prestando bastante atenção ao que se passava. No final, revelou entusiasmo por conseguir aplicar os seus conhecimentos no tipo de imagens abordadas. Quando

questionada imagem a imagem, cometeu alguns lapsos na identificação, mas autocorrigiu-se à medida que a própria analisava melhor a imagem, percebendo a sua própria precipitação. No segundo momento não demonstrou qualquer hesitação, manuseando os frutos com curiosidade. No terceiro momento, a sua motivação tornou-se ainda mais notória, explorando todo o jardim e comentando todas as coisas por que passava, tendo pedido para fotografar um exemplo que sabia não ser elemento da Natureza.

No início do primeiro momento, a participante C mostrou alguma confusão, cometendo erros científicos. Contudo, no decorrer da atividade conseguiu autocorrigir alguns desses casos. Na parte final (análise imagem a imagem), identificou corretamente e/ou parcialmente (à exceção da figura das focas) mas demonstrou sempre receio de errar. Nos momentos seguintes, foi participando cada vez com mais facilidade, sobretudo no terceiro momento, onde não demonstrou qualquer hesitação.

O participante D foi quem se mostrou mais inseguro e mais confuso ao longo da Intervenção Didática. No primeiro momento, foi necessário recordar-lhe que não havia problema em errar e que se o próprio verificasse algum erro nas suas escolhas, que poderia parar e voltar atrás, sem problema. No segundo momento, apesar de já ter percebido e explicado as diferenças entre os conceitos, continuou a confundir a terminologia durante a identificação de Simetrias nas metades dos frutos. No entanto, construiu sem dificuldade e com mais atenção à posição dos frutos. No terceiro e último momento, foi o mais indeciso de todos os participantes. Apesar de se mostrar motivado, demonstrava ainda alguma insegurança e receio em falhar nas suas escolhas. No entanto, tirou fotografias muito interessantes ao procurar encontrar Isometrias e/ou Simetrias nos pormenores dos elementos que o rodeavam.

Verificamos que as dificuldades dos participantes se centraram, sobretudo, no correto manuseamento dos materiais de desenho (nos escassos momentos em que foram utilizados, nenhum dos participantes sabia executar o processo corretamente e com rigor), optando pela estimativa, apontando ou utilizando o lápis como eixo de Reflexão ou de Simetria; na distinção entre Reflexão e Simetria de Reflexão e entre

Rotação e Simetria de Rotação e na identificação da Reflexão Central. Nenhum participante identificou ou mencionou esta Isometria nem conseguiram assemelhá-la à Rotação de meia volta.

4.10 INFORMAÇÕES RECOLHIDAS DURANTE A PÓS-ENTREVISTA

O presente subcapítulo diz respeito às informações recolhidas durante a entrevista realizada após a Intervenção Didática, reunindo a opinião dos alunos participantes sobre as atividades da Intervenção Didática e comentários finais.

Tabela 26: Opinião dos alunos participantes sobre as atividades da Intervenção Didática	
Discurso	Participante
<i>“Foram interessantes.”</i>	A
<i>“Complicado”</i> (relativamente à parte inicial do primeiro momento); <i>“Foi mais fácil entender”</i> (na análise imagem-a-imagem, parte final do primeiro momento).	A
<i>“Foi fácil e fixe (...) Foi interessante e fixe”</i> (relativamente ao segundo momento)	A
<i>“Porque é uma forma mais interessante.”</i>	A
<i>“Estas três atividades achei-as interessantes.”</i>	B
<i>“Ajudou-me a melhorar as minhas capacidades com as Isometrias e Simetrias e gostei.”</i>	B
<i>“Eu gostei mas foi a parte mais difícil.”</i> (relativamente ao primeiro momento)	B

<i>“O que eu gostei mais foi quando fomos lá fora ver se via Isometrias ou Simetrias no jardim, na Natureza mais especificamente.”</i>	B
<i>“A fruta foi uma parte interessante.”</i>	B
<i>“Gostei e foi divertido.”</i>	C
<i>“Foi divertido e achei também engraçado a parte das imagens (...) Foi um bocado mais complicado, mas foi fixe também.”</i>	C
<i>“Também gostei. Foi a minha parte preferida, a dos frutos.”</i>	C
<i>“Também gostei. Foi fácil.” (relativamente ao terceiro momento)</i>	C
<i>“Engraçadas e melhor do que nas aulas. Em vez de estar a aprender de uma certa maneira, assim não é tão é tão chato porque utilizamos fruta e outras coisas, não é só livros.”</i>	D
<i>“Foi também engraçado utilizar imagens para estudar Isometrias (...) É mais engraçado utilizar imagens com a Natureza em vez de ser só o normal.”</i>	D
<i>“Também achei melhor, mais engraçado e percebi melhor.” (relativamente ao segundo momento)</i>	D
<i>“Com as imagens tem mais variedade.”</i>	D
<i>“Engraçada também porque é uma coisa diferente.” (relativamente ao terceiro momento)</i>	D

Na análise da tabela acima, constatamos que muitas das opiniões dos participantes vão ao encontro das opiniões já apresentadas pelas docentes. Apesar das dificuldades sentidas ao longo do primeiro momento da intervenção didática, as ideias que mais se evidenciam são a concretização, motivação e interesse – *“Foram interessantes.”* (participante A), *“Estas três atividades achei-*

-as interessantes.” (participante B), *“Gostei e foi divertido.”* (participante C) e *“Engraçadas e melhor do que nas aulas. Em vez de estar a aprender de uma certa maneira, assim não é tão é tão chato porque utilizamos fruta e outras coisas, não é só livros.”* (participante D). Muitos consideraram o primeiro momento mais complicado e é interessante constatar que essa dificuldade não diminuiu o seu gosto pela atividade e o seu sentimento de aprendizagem – *“Ajudou-me a melhorar as minhas capacidades com as Isometrias e Simetrias e gostei.”* (participante B), *“Foi divertido e achei também engraçado a parte das imagens (...) Foi um bocado mais complicado, mas foi fixe também.”* (participante C). São também evidentes as preferências dos alunos participantes pelos segundo e terceiro momentos da Intervenção Didática – *“Foi fácil e fixe (...) Foi interessante e fixe”,* relativamente ao segundo momento; *“(...) mas também gostei da parte da fotografia (...) foi fácil e foi fixe”;* *“Pronto, acho que era uma aula interessante de dar. Pegar nisto e dar uma aula”* (participante A); *“A fruta foi uma parte interessante.”;* *“O que eu gostei mais foi quando fomos lá fora ver se via Isometrias ou Simetrias no jardim, na Natureza mais especificamente.”* (participante B); *“Também gostei. Foi a minha parte preferida, a dos frutos.”;* *“Também gostei. Foi fácil.”,* relativamente ao terceiro momento; *“acho que foi giro e divertido. Foi uma experiência nova”* (participante C) e *“Também achei melhor, mais engraçado e percebi melhor.”,* relativamente ao segundo momento; *“Engraçada também porque é uma coisa diferente.”,* relativamente ao terceiro momento (Participante D). Na leitura atenta das várias citações, percebemos que este recurso facilitou o envolvimento dos participantes e, desta forma, também a aprendizagem do subdomínio das Isometrias.

Para finalizar, relativamente aos desenhos elaborados pelos participantes, verificamos que nenhum deles foi rigoroso nos seus exemplos. Durante a primeira entrevista, não utilizaram qualquer material de desenho (mencionado aquando a análise da mesma) e foi utilizado muito raramente, de forma pouco rigorosa e incompleta na Intervenção Didática. Todos os participantes consideraram que a Matemática é muito rigorosa, sendo necessário realizar muitas medições, mas nenhum foi rigoroso neste aspeto e quase nenhum realizou as medições necessárias. Tendo estas observações em consideração, bem como a falta de rigor verificada na

indicação ou não indicação dos eixos de Simetrias, eixos de Reflexão, centro e ângulos de Rotação e sendo que as MC e o NPMEB 2013 estão centrados nas construções, interrogamo-nos se será necessária mais exigência acerca destes pormenores muito importantes ou se será essa exigência excessiva, colocando em causa a correta compreensão e apreensão dos conceitos e da metodologia utilizada nas construções? Questionamos ainda, se a exigência do subdomínio das Isometrias estará ou não adequada à tenra idade a que se destina?

5 CONCLUSÕES

Como referido na introdução da presente investigação, este estudo, partindo da perspetiva de alunos e professores, pretende mostrar que, contextualizando e concretizando os conteúdos a aprender através do mundo que nos rodeia, é possível motivar os alunos para a aprendizagem e gosto da Matemática e combater as dificuldades apresentadas na compreensão, em particular, do subdomínio das Isometrias, além de procurarmos identificar dificuldades e estratégias encontradas pelos professores no ensino das Isometrias no atual PMEB, no 2.º CEB. Desta forma, no início da realização deste projeto foi encontrado o seguinte problema de investigação:

Em que medida as imagens com elementos da Natureza poderão contribuir para a prática docente no ensino das Isometrias no 6º ano de escolaridade?”.

Partindo da análise dos dados recolhidos ao longo do estudo, elaboramos as conclusões e refletimos sobre as recomendações para futuras linhas de investigação. Estas conclusões têm origem através da análise dos cinco objetivos específicos e das três questões de investigação, inicialmente definidas e serão apresentadas a partir das respostas dadas às questões de investigação, interligando-as com o objetivo específico onde se enquadram. Relembremos que no capítulo 1 deste documento, foram apresentados os cinco objetivos específicos e orientadores da presente investigação:

Objetivo 1: diagnosticar as dificuldades encontradas na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias.

Objetivo 2: enumerar algumas atitudes metodológicas usadas pelos professores para o ensino das Isometrias.

Objetivo 3: promover o uso das imagens com elementos da Natureza no ensino das Isometrias.

Objetivo 4: verificar se o uso das imagens com elementos da Natureza é uma prática corrente para o ensino do subdomínio das Isometrias.

Objetivo 5: evidenciar possibilidades de consciencialização da importância do rigor matemático através da exploração de elementos reais da natureza, tendo consciência da eventual imperfeição dos elementos reais.

No presente capítulo ainda serão mencionadas as situações que possam ter limitado o estudo desenvolvido e, por fim, serão apresentadas sugestões para futuras investigações.

5.1 CONCLUSÕES POR QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO E OBJETIVOS ORIENTADORES DO ESTUDO

No capítulo 1 deste documento, além dos objetivos específicos e orientadores do estudo, foram apresentadas três questões de investigação. No seguimento, procuramos apresentar as conclusões do presente estudo para cada uma delas, enquadrando-as com o objetivo correspondente.

Questão 1: Que dificuldades são frequentemente sentidas pelos professores na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias?

De forma a responder a esta questão de investigação, que vai ao encontro do *Objetivo 1*, analisámos os resultados obtidos com a realização da entrevista às docentes. Assim, alcançando o objetivo a que nos propusemos, foi-nos possível diagnosticar algumas dificuldades manifestadas pelas docentes na preparação e na leção do subdomínio das Isometrias:

- Habituação ao PMEB 2007;
- Existência de uma mudança completa do que era pedido no PMEB 2007;
- Existência de algum receio, por parte da classe docente, em arriscar fazer algo que nunca fizeram;

- Entender as diferenças entre os dois Programas, sobretudo ao nível das designações;
- Maior número de designações;
- Diferenças nos conceitos de Simetria e Reflexão;
- Trabalhar o conceito de Rotação, sobretudo ao nível das construções;
- Abordagem de determinados conceitos nas faixas a que se destinam – Maturidade dos alunos;
- Perceção instantânea da real compreensão por parte dos alunos, aquando a lecionação no quadro.

Durante a realização da entrevista, foi notória a diferença entre docentes. Apenas uma se destacou pelo facto de ter demonstrado mais conhecimento ao nível programático e respetivas alterações, maior consciência da sua reflexão e mais preocupação na pesquisa e estudo prévio destas questões. Salvaguardando que as restantes docentes também tiveram considerações importantes e pertinentes para o estudo, consideramos oportuno referir que apenas esta teve oportunidade de realizar uma ação de formação sobre o PMEB 2013 e MC. Questão sobre a qual iremos refletir nas sugestões para futuras investigações, uma vez que foi notório que este detalhe fez toda a diferença: *“... é uma pena não ter havido mais formação e porque, também nas formações, aprendemos uns com os outros e eu acho que esta parte é importante.”* (docente P2).

Questão 2: Quais as estratégias utilizadas pelos docentes para colmatar as dificuldades encontradas na lecionação do subdomínio das Isometrias?

Para responder a esta questão de investigação, que vai ao encontro do *Objetivo 2*, analisámos os resultados obtidos com a realização da entrevista às docentes, da pré-entrevista e Intervenção Didática aos alunos. Durante a utilização dos instrumentos de recolha de dados mencionados, também nos foi possível detetar as

dificuldades sentidas pelos alunos (quer os das docentes entrevistadas quer os alunos participantes) na compreensão e apreensão do subdomínio das Isometrias. Consideramos importante referir estas dificuldades e as estratégias encontradas para as colmatar, pois também elas nos levam a refletir e enumerar as estratégias adotadas pelos docentes para colmatar as dificuldades encontradas na leção do subdomínio.

Assim, detetamos as seguintes dificuldades sentidas pelos alunos:

- Manipulação de material de desenho;
- Construções isométricas, sobretudo na Rotação;
- Construção da mediatriz;
- Distinguir Isometria de Simetria, sobretudo a Rotação da Simetria de Rotação;
- Rotação (identificação e construção);
- Distinguir sentido positivo de sentido negativo na Rotação;
- Ser crítico quanto à posição do transformado de um objeto;
- Distinguir eixo de Reflexão de eixo de Simetria;
- Determinar o eixo de Reflexão;
- Identificar a Reflexão Central;
- Resolução de problemas;
- Compreensão daquilo que executam.

Nesta fase, foi também levantada a questão da maturidade dos alunos, associada à compreensão de conceitos, destreza motora fina e exigência do Programa - *“Não estava à espera que fosse introduzido no 6.º ano de forma tão intensa, de forma tão complexa.”* e *“... atendendo que a maturidade das crianças, dos pré-adolescentes e dos adolescentes cada vez se atinge mais tardiamente, se calhar a ideia melhor seria deixar estar as Isometrias como estava antigamente no 3.º ciclo.”* (docente P4).

Relativamente à questão de investigação referida, enumeramos as seguintes atitudes metodológicas adotadas pelos docentes para colmatar as dificuldades sentidas na lecionação do subdomínio das Isometrias:

- Consulta dos documentos de apoio às MC;
- Consulta de livros e diferentes manuais;
- Comparação entre manuais escolares do PMEB 2007 com manuais escolares do PMEB 2013;
- Utilização de materiais manipuláveis;
- Utilização de acetatos;
- Utilização dos recursos dos projetos das Editoras;
- Utilização de papel vegetal;
- Projeção de animações;
- Utilização de fotografias;
- Alguma utilização de fotografias do meio em que a Escola está inserida;
- Uso da Escola Virtual.

Desta forma, alcançamos também o segundo objetivo a que nos propusemos.

É de salientar que as cinco últimas estratégias acima enumeradas, foram também mencionadas para colmatar as dificuldades sentidas nos alunos. Além destas, também se enumeram as seguintes:

- Realização de exercícios mais simples e mais específicos;
- Desconstrução do problema em tarefas mais simples;
- Utilização inicial de imagens mais simples;
- Partir do conhecimento já adquirido para avançar;
- Exercitação;
- Utilização de diferentes exemplos;
- Acompanhamento individual.

Questão 3: Poderão as imagens com elementos da Natureza ser um recurso motivador e/ou facilitador no ensino do subdomínio das Isometrias?

Para responder à terceira e última questão de investigação, que vai ao encontro do *Objetivo 3*, *Objetivo 4* e *Objetivo 5*, refletimos sobre os dados obtidos através da entrevista realizada às docentes, da Intervenção Didática e pós-entrevista realizada aos alunos participantes.

Como esta questão se relaciona com vários assuntos deste estudo e para podermos concluir sobre as potencialidades do uso de imagens com elementos da Natureza, foi essencial averiguarmos não só qual o tipo de estratégias, recursos e instrumentos utilizados pelas docentes, mas também o tipo de imagem utilizadas na prática letiva, antes de apurarmos a utilização e exploração deste tipo de imagem.

Assim foi-nos possível enumerar o seguinte:

- tipos de estratégias, recursos e instrumentos utilizados no ensino do subdomínio das Isometrias:

- Recurso a papel vegetal para decalcar;
- Utilização do GeoGebra (pouco mencionado, tendo em conta as suas potencialidades);
- Materiais produzidos pelas próprias docentes;
- Utilização de exercícios mais simples e mais específicos;
- Utilização inicial de imagens mais simples;
- Projeção de animações;
- Utilização de acetatos sobre fotografias;
- Uso da Escola Virtual;
- Utilização de material de desenho;
- Utilização de origami e dobragem de papel em harmónica;
- Utilização de uma imagem manipulada existente na internet;
- Recurso a construções de carácter decorativo;

- tipo de imagens mais utilizadas na prática letiva:

- Maior utilização de imagens geométricas;
- Valorização das imagens que constam no manual;
- Utilização de uma imagem manipulada existente na internet;
- Alguma utilização de imagens da Natureza e de construções humanas;
- Uso de imagens com sinais de trânsito e letras;
- Utilização de algumas fotografias do meio em que a Escola está inserida;
- Utilização de algumas imagens refletidas na superfície da água;
- Utilização de figuras criadas pelos próprios alunos.

Posto isto, consideramos importante entender a utilização e exploração de imagens com elementos da Natureza por parte das docentes e se esta é uma prática corrente. Assim, foram apurados os seguintes pareceres predominantes:

- Reduzida utilização de imagens com elementos da Natureza;
- Utilização deste tipo de imagens apenas na parte introdutória, como motivação e na parte final, como revisão e clarificação de conceitos;
- Utilização deste tipo de imagem apenas como exercício de identificação e de determinação de eixos de Simetria e total repressão do seu uso em exercícios de construção;
- Alguma utilização de fotografias que remetem para a Natureza, tiradas pela própria docente);
- Importância de utilizar uma imagem que não contenha qualquer Isometria nem Simetria.

Apesar das docentes apresentarem alguma resistência na utilização deste tipo de imagens, tentando encontrar constrangimentos para a sua utilização e apresentarem também uma visão um pouco limitada da sua exploração, podemos concluir que, mesmo que de forma reduzida e limitada, as imagens com elementos da

Natureza são uma prática corrente no ensino do subdomínio em estudo. Desta forma, consideramos ter alcançado o quarto objetivo definido.

Reforçamos a ideia de que esta resistência e dificuldade demonstrada em tirar o melhor proveito deste tipo de imagens, poderá ser devida ao facto de este tipo de estratégia não ser muito utilizada pelos professores, excetuando-se as escassas imagens relativas à Natureza que possam constar em alguns manuais. *“O estudo que está a ser feito é importante até para mostrar a professores que sejam mais contra ou mais resistentes, a usar este tipo de imagens na sua prática letiva. Porque o uso destas imagens não é tão simples como usar um triângulo, por exemplo. Então, isso pode fazer com que algumas pessoas não as usem, porque é muito fácil olhar para um triângulo e encontrar o eixo de Simetria do que, se calhar, numa imagem da Natureza. Eu não acho tão interessante nem tão motivante.”* (docente P3).

É fundamental realçarmos que durante a entrevista se verificou uma alteração desta postura, pois refletiram especificamente sobre as possíveis potencialidades deste tipo de imagens. *“... mesmo esta tese que está a fazer, acho que é um bom ponto de partida, que não deve ficar guardada numa gavetinha mas ser dada também para os outros, para poderem abrir este livro, para que toda a gente possa trabalhar melhor as Isometrias.”* (docente P2). Estes dados serão apresentados de seguida, dando resposta à questão de investigação propriamente dita e concluindo que, desta forma alcançamos o terceiro objetivo deste trabalho.

Assim, a análise das informações recolhidas sobre as potencialidades e mais-valias das imagens com elementos da Natureza, levaram-nos às seguintes conclusões:

- Proporcionam uma maior variedade de imagens;
- Permitem descobrir as potencialidades que a Natureza oferece;
- Possibilitam a interação com o ambiente e a descoberta de algo novo;
- Estimulam a utilização de algo diferente do habitual;
- Promovem e facilitam a perceção da Matemática através do quotidiano, concretizando-se naquilo que nos rodeia e vice-versa;

- Permitem verificar conceitos relacionados com a realidade, de forma a que os alunos percebam que a Matemática está em todo o lado e entendam a utilidade dos conteúdos que estão a aprender;
- São importantes a nível pedagógico;
- A sua presença é importante ao longo de toda a unidade;
- Chamam a atenção dos alunos;
- Tornam o tema mais interessante;
- São imagens mais sugestivas e apelativas para os alunos;
- Estimulam a motivação do aluno;
- Facilitam a aprendizagem;
- São mais complicadas, mas tornam as tarefas mais interessantes, promovendo a reflexão;
- Despertam para a reflexão sobre o tema em detrimento de respostas mecanizadas.

Por fim, ainda de acordo com a última questão de investigação e caminhando ao encontro do *Objetivo 5* de uma forma mais direta e específica, analisámos as possibilidades de consciencialização da importância do rigor matemático, tendo consciência da eventual imperfeição dos elementos reais da Natureza, reunindo as seguintes apreciações:

- São consideradas imagens menos precisas do que as geométricas;
- Deve existir sempre uma chamada de atenção prévia na abordagem deste subdomínio através deste tipo de imagem;
- Devem utilizar-se elementos que facilitem esta abordagem, incluindo a utilização de imagens se qualquer tipo de Isometria e Simetria;

“Acho que na prática letiva os professores caem muitas vezes no erro de usar sempre imagens que têm sempre Simetria/Isometria. (...) Nós acabamos por moldar a mente das crianças, ou seja, eles num exercício não vão estar preparados para uma imagem que não tenha Simetria

nenhuma ou que não tenha Isometria nenhuma. Eles vão sempre procurar um sítio onde colocar um eixo e isso também é culpa nossa porque não usamos imagens ou, por norma, não costumamos usar as imagens que não têm nenhum tipo de Isometria.” (docente P3)

- As imperfeições devem ser exploradas de forma a promover a reflexão e o diálogo, permitindo uma abstração consciente dessas imperfeições por parte dos alunos;
- Promovem o espírito crítico e capacitam a reflexão;
- Consciencializam de que nada é perfeito, promovendo o rigor;
- Permitem uma (re)educação Matemática ciente do mundo que nos rodeia, consciencializando para o facto de que na Natureza nada é exatamente igual.

Deste modo, conseguimos atingir o quinto e último objetivo que ambicionamos.

Em jeito de conclusão, podemos afirmar que as imagens com elementos da Natureza foram consideradas um recurso quer motivador, quer facilitador do ensino e da aprendizagem do subdomínio das Isometrias e que contribuem não só para a prática docente no ensino das Isometrias no 6.º ano de escolaridade, mas também para uma aprendizagem e educação científica mais consciente por parte dos alunos.

Posto isto, podemos concluir que os cinco os objetivos propostos foram alcançados e as questões de investigação formuladas foram respondidas.

Embora não se possam generalizar estas conclusões para todos os docentes do 2.º CEB, nem para todos os alunos portugueses do 6.º ano de escolaridade, acreditamos que estes dados serão certamente úteis como ponto de reflexão em contextos semelhantes. Assim, acreditamos também que se este estudo fosse realizado com outros participantes, as respostas às questões de investigação não seriam muito díspares das apresentadas.

5.2 LIMITAÇÕES DO ESTUDO

No momento em que este projeto foi delineado, não prevíamos que, tendo em conta o subdomínio a ser estudado, o tempo destinado para a sua execução fosse curto. Ou seja, por limitações de tempo, optamos por uma metodologia qualitativa em detrimento de uma metodologia mista para assim incluir uma análise inferencial.

No entanto, foi-nos necessário mais tempo para a realização do estudo, pois a realização das entrevistas e da Intervenção Didática aos alunos foi condicionante devido à falta de resposta por parte de instituições de ensino, atrasando a data prevista a realização das mesmas. Apesar do tempo para a execução de estudo ter sido alterado, não nos foi possível alterar a metodologia de investigação para mista devido a condicionantes profissionais e geográficas.

O facto de os alunos terem sido filmados pode ter influenciado o seu nível de participação nas atividades e, desta forma, ter existido alguns constrangimentos. Para além disso, verificamos que os alunos tiveram, muitas vezes, dificuldade em expressar as suas ideias, o que poderá ter dificultado a recolha de dados. No que concerne à entrevista realizada às docentes, verificamos algum constrangimento com o facto de esta ser filmada. Assim, após a entrevista com a docente P1, optamos apenas pela gravação áudio nas entrevistas restantes para, dessa forma, prevenirmos novos constrangimentos.

Apesar de alguns dos participantes terem sido seleccionados, por razões de funcionalidade da investigação e não terem sido escolhidos aleatoriamente, acreditamos não existir qualquer particularidade destes que os distinga de outros docentes e alunos do país, no mesmo nível de ensino.

5.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

Parece-nos possível apresentar algumas sugestões para futuras linhas de investigação.

Como referimos neste capítulo, constatamos uma diferença notória numa das docentes participantes, por ter tido a oportunidade de realizar uma ação de formação sobre o PMEB e MC e, posteriormente, reproduzi-la na sua escola. Constatamos ainda que, alguns docentes têm o PMEB 2007 muito presente. Se por um lado o professor deveria procurar atualizar os seus conhecimentos neste subdomínio, especialmente em momentos de alterações programáticas e conceptuais, por outro, o ME poderia ter organizado mais formação contínua de professores, dedicando especial atenção aos domínios ou subdomínios do conhecimento onde se verifiquem mudanças curriculares significativas, como o caso das Transformações Geométricas e Isometrias. *“... é uma pena não ter havido mais formação e porque, também nas formações, aprendemos uns com os outros e eu acho que esta parte é importante.”* (docente P2). Autores como Loureiro (2009), Tempera (2010), Veloso (2012) e Viana (2013), defendem esta mesma ideia, de que o ME deveria proporcionar formação contínua, de forma a garantir um corpo docente mais competente ao nível científico, sobretudo, aquando a implementação de renovações curriculares. Por estes motivos, consideramos que seria bastante positivo investigar o investimento na formação contínua de professores de Matemática e de que forma este poderia contribuir para um corpo docente com maiores competências científicas.

Parece-nos importante que os professores reflitam sobre a sua forma de ensinar e nos recursos que utilizam. Seria interessante investigar as estratégias de ensino do domínio da Geometria no 2.º CEB, de forma a que os professores “perdessem” o receio de experimentar e utilizar métodos e recursos fora dos habituais, estimulando a utilização do programa GeoGebra e perceber de que forma este recurso poderá facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Consideramos que esta sugestão poderia ser enquadrada como continuação deste trabalho, uma vez que as imagens com elementos da Natureza são passíveis de serem trabalhadas neste software.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.
- Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho do 2.º Ciclo. (2010). *E agora? Contributos para viabilizar na prática o novo programa de Matemática no 2.º ciclo*. *Educação e Matemática*, 108, 35-36
- Associação de Professores de Matemática. (2009). *Renovação do Currículo de Matemática: Seminário de Vila Nova de Mil Fontes 1988*. Lisboa: APM
- Associação de Professores de Matemática (2007). *A Matemática na formação inicial de professores*. *Educação e Matemática*, 51, 91-95
- Atractor (2007). *Tipos de Simetria no Plano*. Elaborado para a Universidade Junior da Universidade do Porto, Porto Disponível em: <http://www.atractor.pt> consultado em: 4 de Outubro de 2014
- Boavida, A. (2011). *O “mundo” da simetria reflectindo sobre desafios do PMEB*. Slides elaborados para a conferência realizada no âmbito do PFCM da Universidade de Évora
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C. (2013). *Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência – Direção Geral de Educação
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora

- Calado, I. (1994). *A Utilização Educativa das Imagens*. Porto: Porto Editora
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. (6.^a ed). London and New York: Routledge.
- Costa, M. C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal
- Couto, A. & Vale, I. (2012). O conhecimento geométrico de futuros professores do ensino básico: uma breve caracterização. *Atas do XXIII SIEM*. Lisboa: APM
- Cronbach, L. J. (1980). *Toward reform of program evaluation*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Diogo, F. & Vilar, A. M. (1999). *Gestão Flexível do Currículo*. Porto: ASA Editora
- Giannouli, V. (2013). *Visual Symmetry Perception*. *Encephalos*, 50, 31-42
- Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *Atas do XXIII SIEM*. Lisboa: APM
- Kilpatrick, J. (2009). *Programa de Matemática do Ensino Básico – O olhar de um especialista internacional em currículo de Matemática*. *Educação e Matemática*, 105, 50-52
- Lodico, M., Spaulding, D.T. & Voegtler, K.H. (2010). *Methods in Educational Research from Theory to Practice*. (2.^a ed). San Francisco: Jossey-Bass

- Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Viegas, C., Cunha, A. E., Saraiva, E., et al. (2010). *Investigação sobre a mediação de professores de Ciências Físicas em sala de aula*. Vila Real: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
- Loureiro, C. (2009). *Geometria no Novo programa de Matemática do Ensino Básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva*. *Educação Matemática*, 105, 61-66
- Loureiro, C. (2007). *A Geometria na proposta de ajustamento – algumas questões*. *Educação e Matemática*, 95, 25
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática*. Lisboa: Gradiva
- Maia, C. (2011). *O plano hiperbólico*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal
- Maia, C. (2014). *As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Universidade Portucalense, Porto
- Mascarenhas, D. (2011). *Dificuldades e Estratégias de Ensino e Aprendizagem da Geometria e Grandezas no 5.º Ano de Escolaridade do Ensino Básico nas Escolas E.B. 2/3 da Madalena e E.B. 2/3 de Pedrouços do Distrito do Porto*. Tese de Doutoramento, Universidade de Granada, Espanha
- Mascarenhas, D., Maia, C. & Soares, F. (2013). *Transformações Geométricas*. Textos de Apoio 4. Porto
- Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. Doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia, USA

Ministério da Educação (ed. lit.) (1991). *Programa de Matemática: Plano de Organização do ensino-aprendizagem Volume II*. Ensino Básico 2.º ciclo. Lisboa: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário – ME

Ministério da Educação (ed. lit.) (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME – Departamento de Educação Básica

Ministério da Educação e Ciência (ed. lit.) (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC

Neto, M., (2015). *Um Estudo sobre Geometria no 1.º Ciclo. Simetria em Figuras Planas*. Dissertação de Mestrado. Escola superior de Educação do Porto, Porto

Neves, M. A. & Faria, L. (2014). *Matemática – 6.º ano*. Parte 2. Porto: Porto Editora

Neves, M. A. & Faria, L. (2014). *Matemática – 8.º ano*. Parte 1. Porto: Porto Editora

Neves, M. A. & Faria, L. (2014). *Exercícios de Matemática 6*. Porto: Porto Editora

Neves, M. A., Guerreiro, L., Silva, A. & Faria, L. (2014). *Exercícios de Matemática 8*. Porto: Porto Editora

Newcombe, N. (2010). *Increasing Math and Science Learning by Improving Spatial Thinking*. *American Educator*, 29-35

Oliveira, A. F. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta

Pessoa, P. (2010). *Novo Programa de Matemática. Inovação de práticas e aprendizagens*. *Educação e Matemática*, 109, 25-31

- Pinto, M. (1988). *A Reforma do Sistema Educativo e o Papel da Comunicação Social. In Comissão da Reforma do Sistema Educativo – Os Mass Media e a Escola.* Lisboa: GPE. (pp. 23-30)
- Ponte, J. P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática. Quadrante, 3(1)*
- Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H.M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P.A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação
- Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 2-6
- Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (grupo de Trabalho de Investigação) (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico.* (pp. 11-41). Lisboa: APM
- Ponte, J. P., Guimarães, H. M. & Serrazina, L. (2012). As Metas Curriculares de Matemática: Um tremendo retrocesso no ensino da disciplina. *Educação e Matemática*. 119, 3-11
- Perin, D. (2011). *Facilitating Student Learning Through Contextualizations.* CCRC Working Paper, 29. Columbia University, New York
- Rocha, A. & Fonseca, C. N. (2014). O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013. E agora, o que fazer?. *Educação e Matemática*. 127, 18-19
- Roldão, M.C. (1999). *Gestão Curricular – Fundamentos e Práticas.* Lisboa: Ministério da Educação – Departamento de Educação Básica.

- Santos, V. M. (2008). *A Matemática escolar, o aluno e o professor: paradoxos aparentes e polarizações em discussão*. *Cadernos Cedes*, (Online). volume 28 (74). Retirado de <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a03.pdf> em 2 de fevereiro de 2015
- Schattschneider, D. (1978). *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*. *The American Mathematical Monthly*. 85(6), 439-450
- Sequeira, A. F., Andrade, A. P., Almeida, C. & Beja, E. (2014). *Olá Matemática!*. Parte I. 1ª ed. Porto: Porto Editora
- Serrazina, L. & Oliveira, I. (2005). O currículo de Matemática no ensino básico sob o olhar da competência matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. (pp. 35-62). Lisboa: APM
- Shirali, S. A. (2001). *Symmetry in the World of Man and Nature*. *Resonance*, 6(6). (pp. 53-59)
- Stake, R. E. (1998). *Investigación com estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Tempera, T. (2010). *A Geometria na formação inicial de professores: contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal
- Tinoco, M. J. (2012). *Isometrias*. Tese de Mestrado. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto
- Trindade, R. (2014). Metas Curriculares: Contributo para um Debate. *Educação e Matemática*. 127, 3-7

- Tudella, A. C. (2014). O prejuízo que se anuncia com o PMEB homologado em 2013. *Educação e Matemática*. 126, 4-6
- Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas. Textos de Geometria para Professores*. Lisboa: APM
- Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Actuais. Materiais para Professores*. Lisboa: Instituto e Inovação Educacional.
- Veloso, G., Brunheira, L. & Rodrigues, M. (2013). *A proposta de programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas*. *Educação e Matemática*, 123, 3-8
- Viana, J. P. (2013). *Os efeitos do Plano da Matemática*. *Educação e Matemática*, 121, 10-11
- Vilar, A. M. (2006). *Didática: questões gerais. A Teorização do Currículo*. Porto: Instituto Politécnico do Porto – Escola Superior de Educação
- Washburn, D. K. & Crowe, D. W. (1998). *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. (3.^a ed). Seattle and London: University of Washington Press
- Weyl, H. (1989). *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press

WEBGRAFIA

<http://1.bp.blogspot.com/-xBED2v-GjUI/TtvE-XkO0WI/AAAAAAAAADik/BW7UbPbH0RQ/s320/sim.gif> consultado em: 10 de maio de 2015

http://c1.quickcachr.fotos.sapo.pt/i/Nf106bb98/7957526_zzKRQ.jpeg consultado em: 09 de maio de 2015

<http://defensoresdanatureza.com.br/wp-content/uploads/2013/04/saco-do-mamangu%C3%A1-222.jpg> consultado em: 09 de maio de 2015

<http://mamiferos-marinhos.mundoentrepatas.com/imagenes/especies-de-focas.jpg?phpMyAdmin=PfqG0iessiXP%2c5Zcan9pxZp0nv2> consultado em: 10 de maio de 2015

http://www.florafinder.com/Species/Pics/Datura_stramonium_white_flower.jpg consultado em: 10 de maio de 2015

https://c2.staticflickr.com/4/3644/3292736929_a2f08dcdcc.jpg consultado em: 09 de maio de 2015

<http://img.ibxk.com.br/2015/08/25/25155339986742.jpg?w=1040> consultado em: 10 de maio de 2015

<http://sentimentosemimagens.blogs.sapo.pt/arquivo/gaivotas.gif> consultado em: 10 de maio de 2015

http://www.smh.com.au/ffximage/2005/06/27/SNPstorks_gallery_550x366.jpg consultado em: 09 de maio de 2015

<http://www.escolavirtual.pt/> consultado em 27 de agosto de 2016

APÊNDICES

Apêndice 1

Guião de Entrevista – Docentes

Questões orientadoras

1. Relativamente ao subdomínio das Isometrias, consegue enumerar algumas diferenças entre o modo como este era explorado no PMEB 2007 e no programa agora em vigor?
2. As alterações programáticas foram acompanhadas por algumas mudanças de natureza científica. De que forma ultrapassou e/ou acompanhou essas alterações?
3. Que dificuldades encontra na preparação deste subdomínio?
4. Que considerações lhe parecem pertinentes quando confronta o PMEB 2013 com as Metas Curriculares (MC) no que respeita às Isometrias?
5. Em que medida consegue articular as mesmas (MC) com a sua prática letiva?
6. Durante a sua prática letiva, que (outros) constrangimentos ou situações mais difíceis encontra na leção do subdomínio das Isometrias?
7. Nas suas aulas, que tipo de estratégias, recursos e ferramentas é habitual utilizar no ensino deste subdomínio?
8. Que dificuldades deteta nos seus alunos na compreensão e apreensão deste subdomínio?
9. Utiliza alguma estratégia para combater essas dificuldades? Quais?

10. Vários manuais utilizam imagens relacionadas com a Natureza apenas na introdução do subdomínio. O que pensa da utilização desse tipo de imagens também durante a exploração e aplicação do mesmo?
11. É habitual, na sua prática letiva, ao uso de imagens? Em caso afirmativo, de que tipo?
12. Durante a sua prática, a que tipo de imagens ou ferramentas costuma recorrer para introduzir o tema?
13. O uso de imagens com elementos da Natureza é uma prática corrente nas suas aulas? Explore, por favor.
14. Na sua opinião, em que medida esse recurso (imagens com elementos da Natureza) poderá ser uma mais-valia para a prática docente e para o ensino das Isometrias?
15. Tem outro comentário ou sugestão a acrescentar?

Apêndice 2

Guião de Entrevista antes da Intervenção Didática - Alunos

1. Durante este ano, que tema gostaste mais de aprender em Matemática? E qual gostaste menos?
2. Sabes o que são Isometrias? Tenta explicar por palavras tuas.
3. Que Isometrias conheces? Tenta explicar cada uma delas por palavras tuas. (Se for mais fácil, podes usar a folha de rascunho para desenhar).
4. Das Isometrias que aprendeste, tiveste mais dificuldades em alguma delas? Qual e porquê? E qual a que sentiste mais facilidade de aprendizagem? Porquê?
5. Nas aulas de Matemática do 6.º ano, estudaste a Reflexão e a Simetria de Reflexão. Sabes qual é a diferença entre estes dois termos? Tenta explicar por palavras tuas. (Se for mais fácil, podes usar a folha de rascunho para desenhar).
6. Durante as aulas, que tipo de imagens o teu(tua) professor(a) recorreu para abordar as Isometrias?
7. Alguma vez usaram imagens com elementos da Natureza para estudar as Isometrias? Em caso afirmativo, consegues relatar algum desses momentos da aula?

Apêndice 3

Guião de entrevista depois da Intervenção Didática - Alunos

1. O que achaste das atividades que realizaste hoje?
2. Pensas que é mais fácil ou mais difícil aprender Isometrias e Simetrias utilizando imagens da Natureza? Porquê?
3. As imagens da Natureza tornaram as tarefas mais difíceis de fazer? Porquê?
4. Qual é a tua opinião sobre utilizar imagens da Natureza para estudar Isometrias?
5. Tens outro comentário ou sugestão a acrescentar?

Apêndice 4

Informação e registo de dados – Docentes

A presente entrevista, conduzida pela própria investigadora, Professora Andreia Silveira, será realizada no âmbito de um trabalho de investigação que culminará com a realização do Projeto de Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto.

Com o intuito de dar resposta à questão: *Em que medida as imagens com elementos da Natureza poderão contribuir para a prática docente no ensino das Isometrias no 6.º ano de escolaridade?*, serão colocadas algumas questões. O sucesso deste estudo depende da exatidão e da veracidade com que responder essas questões.

Mais se informa, que a sua identidade será preservada e que os dados obtidos serão utilizados exclusivamente para fins científicos. Deste modo, a entrevistadora garante ser tão científica e imparcial quanto possível. É de imensa importância salientar que não se pretende avaliar os conhecimentos do entrevistado nem colocar em causa o seu método de trabalho, mas sim aferir os seus desafios e propostas metodológicas sobre o subdomínio em estudo.

Tomou conhecimento: _____

Dados do entrevistado: _____

Nome: _____

Idade: _____

Tempo de Serviço: _____ (anos)

Categoria: _____ Situação profissional: _____

Data da entrevista: _____ Local de realização: _____

Apêndice 5

Pedido de autorização entregue a cada um dos EE dos alunos participantes

Porto, junho de 2015

Exmo. Sr. (a) Encarregado(a) de Educação

Venho, por este meio, solicitar-lhe autorização para que o seu educando(a) possa colaborar no projeto de investigação que atualmente me encontro a realizar, intitulado *Em que medida as imagens da Natureza poderão contribuir para a prática docente no ensino das Isometrias no 6.º ano de escolaridade*, no âmbito da minha tese de Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática, na Escola Superior de Educação do Porto.

Assim, mais concretamente, venho pedir a sua permissão para desenvolver com o seu(sua) educando(a) um guião estruturado, contendo determinadas tarefas matemáticas acerca do tema Isometrias, e colocar algumas questões orientadoras, de forma a recolher informação científica relevante para a minha investigação. Informo, ainda, que a identidade do(a) participante será preservada e que os dados obtidos serão utilizados exclusivamente para a presente investigação.

Desde já agradeço a sua colaboração e a do(a) seu(sua) educando(a) neste projeto de investigação.

Com os melhores cumprimentos,
Professora Andreia Silveira

Aluno/a: _____

Turma: _____

(coloque uma X)

Autorizo _____

Não autorizo _____

Assinatura E.E. _____

Apêndice 6

Informação e registo de dados – Alunos

Esta entrevista, está relacionada com um projeto de investigação sobre o ensino e a aprendizagem das Isometrias no 6.º ano de escolaridade, realizado na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto.

Solicita-se a autorização para gravar. Fica garantido o anonimato e dos dados obtidos serão utilizados apenas para a minha investigação.

O sucesso deste estudo depende da exatidão e da veracidade com que responderes a todas as questões e situações que te serão apresentadas.

É importante saberes que não pretendo avaliar se és bom(boa) ou mau(má) aluno(a), mas sim saber a tua opinião sobre o tema da investigação, dar a conhecer o uso das imagens da Natureza no ensino das Isometrias; identificar as tuas dificuldades na exploração deste subdomínio e saber se o uso deste tipo de imagens te motiva ou se facilita a tua aprendizagem sobre Isometrias.

Tomei conhecimento: _____

Dados do entrevistado: _____

Nome: _____

Turma: _____ Idade: _____

Data da entrevista: _____ Local de realização: _____

Gosta de Matemática? _____ Sente dificuldades: _____

Classificação ano anterior: _____

Retenções: _____ Profissão ambicionada: _____

Apêndice 7

Intervenção *Didática*

1º Momento – análise e exploração de imagens com elementos da Natureza, utilizando conhecimentos de Isometrias.



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4



Figura 5



Figura 6



Figura 7



Figura 8



Figura 9



Figura 10

- Do conjunto das imagens apresentadas anteriormente, os alunos terão de selecionar as imagens que apresentem as seguintes isometrias:

- Reflexão (Axial e/ou Central);
- Rotação;

Para cada subconjunto apresentado pelos alunos, será pedido, aos mesmos, para identificarem respetivamente:

- o eixo de reflexão;
- o centro e a medida do ângulo de rotação;

Observação: Caso o aluno não consiga determinar o centro e a medida do ângulo de rotação, será solicitado que o mesmo explique os motivos para a classificação atribuída.

- Posteriormente, serão colocadas as seguintes questões:
- Neste conjunto de figuras, há figuras simétricas? Em caso afirmativo, será solicitado que o alunos as identifique.
 - Que tipo de Simetria considera estar presente nas imagens anteriores?

- No seguimento, será pedido que o aluno escolha duas imagens, uma onde seja visível uma Reflexão (Axial e/ou Central) e outra uma Simetria de Reflexão. Será solicitado a explicação da diferença entre estes dois termos.

O mesmo será solicitado para a Rotação e Simetria de Rotação.

- Por fim, em conjunto, serão esclarecidas as dúvidas ou erros científicos que os alunos possam ter apresentado ao longo deste primeiro momento. Serão, igualmente, discutidas as ideias que estes foram apresentando até então.

2º Momento – Identificação de simetrias e criação de isometrias e simetrias através de frutos

- Na presença de alguns frutos (morangos, peras e kiwis), será solicitado aos alunos que, com a ajuda da professora investigadora, partam os frutos a meio. Uma vez partidos será solicitado que:
 - Identifiquem o tipo de Simetrias existentes nas metades de cada fruto;
 - Construam, através da manipulação dos frutos, as diferentes Isometrias e Simetrias abordadas no 1.º momento. Para cada construção, será solicitada uma explicação da Isometria ou Simetria apresentada.

Estes casos serão captados através de fotografias e de gravação, para posterior apresentação e discussão.

3.º Momento – Identificação de elementos da Natureza com presença de isometrias e simetrias

- Será solicitado a identificação no espaço exterior, de situações do quotidiano onde se identifiquem casos de Isometrias e de Simetrias. Estes casos serão captados através de fotografias que, posteriormente, serão apresentados e discutidos.

- Após este segundo momento, serão debatidas as opiniões e/ou sugestões dos alunos.