



OTIMIZAÇÃO DA TOPOLOGIA ESTRUTURAL RECORRENDO A TÉCNICAS DISCRETAS COMPUTACIONAIS

EMANUEL VIDEIRA MONTEIRO

dezembro de 2020

OTIMIZAÇÃO DA TOPOLOGIA ESTRUTURAL RECORRENDO A TÉCNICAS DISCRETAS COMPUTACIONAIS

Emanuel Videira Monteiro
1141465

2020

Instituto Superior de Engenharia do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica



OTIMIZAÇÃO DA TOPOLOGIA ESTRUTURAL RECORRENDO A TÉCNICAS DISCRETAS COMPUTACIONAIS

Emanuel Videira Monteiro
1141465

Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto, realizada sob a orientação do Professor Doutor Jorge Américo Oliveira Pinto Belinha.

2020

Instituto Superior de Engenharia do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica



JÚRI

Presidente

Elza Maria Morais Fonseca, Ph.D.

Professor Adjunto, Departamento de Engenharia Mecânica

Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Instituto Politécnico do Porto (IPP)

Orientador

Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha, Ph.D.

Professor Adjunto, Departamento de Engenharia Mecânica

Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Instituto Politécnico do Porto (IPP)

Arguente

Sérgio Manuel Oliveira Tavares, Ph.D.

Professor Auxiliar, Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP)

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Belinha, por todo o apoio e disponibilidade prestada na realização desta dissertação. Por todo o conhecimento e motivação transmitido, fazendo com que o objetivo fosse alcançável.

Em especial a toda a minha família por todo o apoio e motivação que me foram dando ao longo de todo o curso, mesmo nos momentos mais difíceis.
A todos aqueles que contribuíram de certa forma para a realização desta dissertação.

AGRADECIMENTOS INSTITUCIONAIS

O autor reconhece e agradece as condições de trabalho oferecidas pelo departamento de engenharia mecânica (DEM) do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP-IPP) e pelo projeto MIT-Portugal “MITEXPL / ISF / 0084/2017”, financiado pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (EUA) e "Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior - Fundação para a Ciência e a Tecnologia" (Portugal).

Além disso, o autor agradece o financiamento do Projeto NORTE-01-0145-FEDER-000022 - SciTech - Ciência e Tecnologia para Indústrias Competitivas e Sustentáveis, co-financiado pelo Programa Operacional Regional do Norte (NORTE2020), através do Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER).

Por fim, o autor reconhece a colaboração sinérgica com os colaboradores do “Computational Mechanics Research Laboratory CMech-Lab” (ISEP / FEUP / INEGI) e seu diretor, Prof.Dr. Jorge Belinha e seus consultores seniores, Prof.Dr. Renato Natal Jorge e Prof.Dr. Lúcia Dinis.

PALAVRAS CHAVE

Métodos sem malha, Método de elementos finitos, Otimização topologia estrutural.

RESUMO

A otimização estrutural é a área da ciência que procura obter a melhor configuração para um conjunto de variáveis, maximizando a performance da estrutura e ao mesmo tempo minimizando os custos associados. Esta área é de grande importância não apenas pela sua contribuição a nível económico, mas também porque permite minimizar o consumo de recursos naturais e, conseqüentemente, a poluição ambiental. Nos últimos anos, devido ao forte crescimento das tecnologias computacionais, a otimização estrutural tem demonstrado ser um processo de grande relevância na indústria. Tendo surgido, neste contexto, novas técnicas e *softwares* de cálculo capazes de executarem este processo com maior eficiência.

Atualmente, a otimização estrutural topológica é tipicamente efetuada recorrendo ao método dos elementos finitos (MEF). No entanto, nos últimos anos, têm surgido novos métodos capazes de ultrapassar determinados problemas existentes no MEF relacionados com a geração da malha e precisão dos resultados. Os métodos sem malha são técnicas de discretização alternativas que possibilitam a obtenção de soluções aproximadas do problema, sem a necessidade, tal como o nome indica, de uma malha de discretização estruturada. Nos últimos anos, a área da mecânica computacional relacionada com a otimização estrutural tem crescido significativamente. Presentemente, existem vários algoritmos de otimização disponíveis na literatura, os quais têm sido preferencialmente combinados com o MEF.

O objetivo desta dissertação é analisar estruturas mecânicas através da combinação dos métodos sem malha com algoritmos de otimização, e obter uma forma estruturalmente otimizada, reduzindo a sua massa e aumentando a sua rigidez relativa. Assim, várias estruturas foram analisadas e diversas configurações geométricas alternativas são propostas.

KEYWORDS

Meshless methods, Finite element method, Structural shape optimization.

ABSTRACT

Structural optimization is the area of science that seeks to obtain the best configuration for a set of variables, maximizing structural performance while minimizing associated costs. This area is of high importance not only for its economic impact, but also because it minimizes the consumption of natural resources and, consequently, environmental pollution. In recent years, due to the strong growth of computational technologies, structural optimization has been shown to be a process of great relevance in the industry. Having emerged, in this context, new techniques and software capable of performing this process with higher efficiency.

Today, topological structural optimization is performed using the finite element method (FEM). However, in recent years, new methods have emerged capable of overcoming certain existing problems in the FEM, related to mesh generation and accuracy. Meshless methods are alternative discretization techniques that provide approximate solutions to the problem without requiring a structured mesh discretization. In recent years, the area of computational mechanics related to structural optimization has grown significantly. Currently, there are several optimization algorithms available in the literature, which have been preferentially combined with FEM. The objective of this dissertation is, through the combination of meshless methods with optimization algorithms, to analyze mechanical structures and obtain a structurally optimized shape, reducing its mass and increasing its relative stiffness. Thus, several structures were analyzed, and several alternative geometric configurations are proposed.

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Lista de Abreviaturas

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
DEM	<i>Diffuse Element Method</i>
EFGM	<i>Element Free Galerkin Method</i>
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
FDM	<i>Finite Difference Method</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FEMAS	<i>Finite Element and Meshless Methods Analysis Software</i>
FEMAP	<i>Finite Element Modeling And Postprocessing</i>
FVM	<i>Finite Volume Method</i>
HDM	<i>Homogenization Design Method</i>
MFEM	<i>Meshless Finite Element Method</i>
MFS	<i>Method of the Finite Spheres</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
MLS	<i>Moving Least Square</i>
MQ-RBF	<i>Multiquadratic Radial Basis Function</i>
MSA	<i>Matrix Structural Analysis</i>
NEM	<i>Natural Element Method</i>
NNFEM	<i>Natural Neighbour Finite Element Method</i>
NNRPIM	<i>Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method</i>
PDE	<i>Partial Differential Equation</i>
PIM	<i>Point Interpolation Method</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RBFM	<i>Radial Basis Function Method</i>
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Microstructure with Penalization</i>
SPH	<i>Smooth Particle Hydrodynamics</i>

Lista de unidades

<i>kg</i>	Quilograma
-----------	------------

m	Metro
N	Newton
Pa	Pascal

Lista de símbolos

$a(x_I)$	Coeficiente não constante da função de base radial
B	Matriz de deformabilidade
b	Vetor de forças do corpo por unidade de volume
$b(x_I)$	Coeficiente não constante da função de base polinomial
c	Matriz constitutiva do material
d	Dimensão do domínio
d_{Ii}	Distancia entre o campo nodal e o ponto de interesse
E	Módulo de Young
f_b	Vetor de forças de corpo
f_t	Vetor de forças externas
H	Matriz de interpolação
K	Rigidez
K	Matriz global de rigidez
L	Matriz de operador diferencial
\mathcal{L}	Forma fraca de Galerkin
m	Número de monómios na base polinomial
N	Vetor nodal
n	Número de nós dentro do domínio de influência
n	Vetor normal do limite do dominio
n_I	Nó de interesse
P	Matriz momento polinomial
$p(x_I)$	Vetor da função de base polinomial
R	Matriz momento da função de base radial
\mathbb{R}^2	Conjunto de números reais bidimensionais
\mathbb{R}^d	Conjunto de números reais d-dimensionais
$r(x_I)$	Vetor da função de base radial
\bar{t}	Tração na fronteira natural

s	Inversa da matriz constitutiva para materiais anisotrópicos
$u(x_1)$	Valores nodais
u_s	Vetor de valores nodais
\bar{u}	Deslocamento na fronteira essencial
V	Vetor da célula de Voronoï
V_i	Célula de Voronoï
X	Vetor de coordenadas nodais
x	Coordenadas cartesianas de um ponto
x_I	Ponto de interesse
δ_{ij}	Propriedade delta Kronecker
ε	Vetor deformação
σ	Tensor das tensões de Cauchy
ν	Coefficiente de Poisson
$\varphi(x_I)$	Vetor de interpolação
Ψ	Trabalho virtual
$\psi(x_I)$	Vetor de subproduto
Γ	Domínio fronteira
Γ_t	Fronteira natural
Γ_u	Fronteira essencial
Ω	Domínio do sólido
%	Porcentagem
$\ \cdot\ $	Norma Euclidian
:	Tal que
\forall	Para todo
∇	Operador divergente
\in	Pertencente
\wedge	E
=	Igual
\neq	Diferente
<	Menor que
\geq	Maior ou igual
\subset	Subconjunto
\cup	União
\cap	Interseção
\emptyset	Conjunto vazio

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - PROCESSO DE DESENVOLVIMENTO DE UM PRODUTO [1]	35
FIGURA 2.2 - MALHA DE INTEGRAÇÃO DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE: (1) QUADRILÁTERO INICIAL. (2) TRANSFORMAÇÃO DO QUADRILÁTERO ATRAVÉS DA REGRA DE QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE. (3) FORMA INICIAL DO QUADRILÁTERO.....	39
FIGURA 2.3 - DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO (1) MALHA DE INTEGRAÇÃO GAUSSIANA REGULAR. (2) MALHA DE INTEGRAÇÃO GAUSSIANA AJUSTADA.	40
FIGURA 2.4 - TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY CONSIDERANDO O DIAGRAMA DE VORONOÏ INICIALMENTE	41
FIGURA 2.5 - (1) CÉLULA DE VORONOÏ E PONTOS DE INTERSECÇÃO PI_i . (2) CRIAÇÃO DOS PONTOS MÉDIOS Mi_i E QUADRILÁTEROS.....	42
FIGURA 2.6 - (1) CÉLULA DE VORONOÏ E PONTOS DE INTERSECÇÃO PI_i . (2) CRIAÇÃO DOS PONTOS MÉDIOS Mi_i E TRIÂNGULOS.	42
FIGURA 2.7 - MALHA DE INTEGRAÇÃO BÁSICA: (1) SUB-CÉLULA DE FORMA TRIANGULAR COM O PONTO DE INTEGRAÇÃO xI . (2) SUB-CELULA DE FORMA QUADRILATERAL COM O PONTO DE INTEGRAÇÃO xI	43
FIGURA 2.8 - MALHA DE INTEGRAÇÃO OBTIDA PELA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE: (1) SUB-CÉLULA DE FORMA TRIANGULAR COM OS PONTOS DE INTEGRAÇÃO. (2) SUB-CÉLULA DE FORMA QUADRILATERAL COM OS PONTOS DE INTEGRAÇÃO.....	43
FIGURA 2.9 - (1) DOMÍNIO DO PROBLEMA. (2) DISCRETIZAÇÃO NODAL REGULAR. (3) DISCRETIZAÇÃO NODAL IRREGULAR.....	44
FIGURA 2.10 - (1) DOMÍNIOS DE INFLUÊNCIA DE FORMA VARIÁVEL. (2) DOMÍNIOS DE INFLUÊNCIA DE FORMA FIXA.....	45
FIGURA 2.11 - (1) CONJUNTO DE NÓS INICIAIS. (2) DEFINIÇÃO DO PRIMEIRO PLANO. (3) DEFINIÇÃO DO SEGUNDO PLANO. (4) CÉLULA CONTENDO APENAS OS VIZINHOS NATURAIS DO NÓ $n0$. (5) CÉLULA DE VORONOÏ. (6) DIAGRAMA DE VORONOÏ.....	46
FIGURA 2.12 – TIPOS DE CÉLULAS DE INFLUÊNCIA (1) CÉLULA DE INFLUÊNCIA DE PRIMEIRO GRAU. (2) CÉLULA DE INFLUÊNCIA DE SEGUNDO GRAU.....	47
FIGURA 2.13 - CATEGORIAS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL. (1) OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL. (2) OTIMIZAÇÃO DA FORMA. (3) OTIMIZAÇÃO DA TOPOLOGIA. FIGURAS DA ESQUERDA REPRESENTAM A ESTRUTURA ORIGINAL E FIGURAS DA DIREITA REPRESENTAM AS ESTRUTURAS DEPOIS DE APLICADA A RESPECTIVA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL. ADAPTADO DE [31].....	55
FIGURA 3.1 – EXEMPLO NUMÉRICO EM FORMA DE “L” 2D.....	61
FIGURA 3.2 - MODELOS COM MALHA: (1) MALHA QUADRANGULAR; (2) MALHA TRIANGULAR.....	62
FIGURA 3.3 - MODELO COM MALHA TRIANGULAR OTIMIZADA	63
FIGURA 3.4 - MALHA QUADRANGULAR EM GEOMETRIA NÃO UNIFORME	81
FIGURA 3.5 - MALHA TRIANGULAR EM GEOMETRIA NÃO UNIFORME.....	82
FIGURA 3.6 - GEOMETRIA "L" INICIAL COM UMA MASSA DE 156×10^3 KG.....	84
FIGURA 3.7 - GEOMETRIA "L" INICIAL COM UMA MASSA DE $34,6 \times 10^3$ KG.....	84
FIGURA 3.8 – TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA GEOMETRIA "L" INICIAL	85

FIGURA 3.9 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA GEOMETRIA "L" INICIAL	85
FIGURA 3.10 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA GEOMETRIA "L" INICIAL.....	86
FIGURA 3.11 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA GEOMETRIA "L" OTIMIZADA... 86	
FIGURA 3.12 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA GEOMETRIA "L" OTIMIZADA	87
FIGURA 3.13 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA GEOMETRIA "L" OTIMIZADA.....	87
FIGURA 3.14 - EXEMPLO NUMÉRICO GARRA INDUSTRIAL 2D.....	89
FIGURA 3.15 - (1) PROBLEMA 1; (2) PROBLEMA 2.....	89
FIGURA 3.16 - GEOMETRIA E MALHA DA GARRA INDUSTRIAL NO SOFTWARE FEMAP	90
FIGURA 3.17 - ESTRUTURAS OTIMIZADAS (1) E (2).....	93
FIGURA 3.18 - GEOMETRIA DA GARRA INICIAL COM UMA MASSA DE 36,5 KG	96
FIGURA 3.19 - GEOMETRIA DA GARRA OTIMIZADA 1 COM UMA MASSA DE 22,3 KG.....	96
FIGURA 3.20 - GEOMETRIA DA GARRA OTIMIZADA 2 COM UMA MASSA DE 14,3 KG	96
FIGURA 3.21 - GEOMETRIA DA GARRA OTIMIZADA 3 COM UMA MASSA DE 11,2 KG	97
FIGURA 3.22 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA GARRA INICIAL	98
FIGURA 3.23 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA GARRA INICIAL.....	98
FIGURA 3.24 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA GARRA INICIAL	99
FIGURA 3.25 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA GARRA OTIMIZADA 1.....	99
FIGURA 3.26 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA GARRA OTIMIZADA 1	100
FIGURA 3.27 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA GARRA OTIMIZADA 1	100
FIGURA 3.28 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA GARRA OTIMIZADA 2.....	101
FIGURA 3.29 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA GARRA OTIMIZADA 2	101
FIGURA 3.30 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA GARRA OTIMIZADA 2	102
FIGURA 3.31 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA GARRA OTIMIZADA 3.....	102
FIGURA 3.32 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA GARRA OTIMIZADA 3	103
FIGURA 3.33 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA GARRA OTIMIZADA 3	103
FIGURA 3.34 - EXEMPLO DE ELEVAÇÃO DE UMA SECÇÃO DE TORRE.....	106
FIGURA 3.35 - EXEMPLO DE FIXAÇÃO DA FERRAMENTA NA FLANGE DA SECÇÃO, COM DOIS PARAFUSOS M30.....	106
FIGURA 3.36 - DIMENSÕES DA FERRAMENTA.....	107
FIGURA 3.37 - DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DA ELEVAÇÃO DA SECÇÃO DE TORRE	108
FIGURA 3.38 - GEOMETRIA E MALHA NO SOFTWARE FEMAP	108
FIGURA 3.39 - FIGURA 3.58 - IDENTIFICAÇÃO DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA	109
FIGURA 3.40 - FERRAMENTA INICIAL COM UMA MASSA DE 41,8 KG.....	113
FIGURA 3.41 - FERRAMENTA ATUAL USADA NA INDÚSTRIA COM UMA MASSA DE 28,5 KG	113
FIGURA 3.42 - FERRAMENTA OTIMIZADA 1 COM UMA MASSA DE 13,2 KG	113
FIGURA 3.43 - FERRAMENTA OTIMIZADA 2 COM UMA MASSA DE 7,9 KG	114
FIGURA 3.44 - APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA NA FERRAMENTA ATUAL.....	114
FIGURA 3.45 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA FERRAMENTA ATUAL	115
FIGURA 3.46 - FATOR DE SEGURANÇA NA FERRAMENTA ATUAL.....	115
FIGURA 3.47 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA FERRAMENTA ATUAL	116
FIGURA 3.48 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA FERRAMENTA ATUAL	116
FIGURA 3.49 - APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA NA FERRAMENTA OTIMIZADA 1	117
FIGURA 3.50 - TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA FERRAMENTA OTIMIZADA 1 117	

FIGURA 3.51 - FATOR DE SEGURANÇA NA FERRAMENTA OTIMIZADA 1	118
FIGURA 3.52 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA FERRAMENTA OTIMIZADA 1.....	118
FIGURA 3.53 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA FERRAMENTA OTIMIZADA 1.....	119
FIGURA 3.54 - APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA NA FERRAMENTA OTIMIZADA 2	119
FIGURA 3.55 – TENSÕES EQUIVALENTES DE VON MISES INSTALADAS NA FERRAMENTA OTIMIZADA 2	120
FIGURA 3.56 - FATOR DE SEGURANÇA NA FERRAMENTA OTIMIZADA 2	120
FIGURA 3.57 - DESLOCAMENTO MÁXIMO NA FERRAMENTA OTIMIZADA 2.....	121
FIGURA 3.58 - DEFORMAÇÃO ELÁSTICA NA FERRAMENTA OTIMIZADA 2.....	121

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DA GEOMETRIA "L"	61
TABELA 2 - REFINAMENTO DA MALHA	63
TABELA 3 – RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL PARA A GEOMETRIA “L”, ELEMENTOS QUADRANGULARES (FEM).....	65
TABELA 4 - REDUÇÃO MÁXIMA DA DENSIDADE PARA OTIMIZAÇÃO COM ELEMENTOS QUADRANGULARES.....	69
TABELA 5 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL PARA A GEOMETRIA “L”, ELEMENTOS TRIANGULARES (FEM).....	69
TABELA 6 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL PARA A GEOMETRIA “L”, ELEMENTOS TRIANGULARES OTIMIZADOS (FEM).....	70
TABELA 7 - REDUÇÃO MÁXIMA DA DENSIDADE PARA OTIMIZAÇÃO COM ELEMENTOS TRIANGULARES OTIMIZADOS	74
TABELA 8 - PARÂMETROS RPIM	75
TABELA 9 - GEOMETRIAS OTIMIZADAS COM MAIOR REDUÇÃO DE DENSIDADE PARA O MÉTODO RPIM	77
TABELA 10 - PARÂMETROS NNRPIM	78
TABELA 11 - GEOMETRIAS OTIMIZADAS COM MAIOR REDUÇÃO DE DENSIDADE PARA O MÉTODO NNRPIM	80
TABELA 12 - GEOMETRIAS OTIMIZADAS COM MAIOR REDUÇÃO DE DENSIDADE PARA O MÉTODO FEM	82
TABELA 13 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL PARA A GEOMETRIA "L"	88
TABELA 14 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DA GARRA INDUSTRIAL	89
TABELA 15 - GEOMETRIA OTIMIZADA, PROBLEMA 1 (FEM)	91
TABELA 16 - GEOMETRIA OTIMIZADA, PROBLEMA 2 (FEM)	91
TABELA 17 - GEOMETRIA OTIMIZADA, PROBLEMA 1 (RPIM)	94
TABELA 18 - GEOMETRIA OTIMIZADA, PROBLEMA 1 (NNRPIM)	95
TABELA 19 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL PARA A GARRA INDUSTRIAL	104
TABELA 20 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DA FERRAMENTA	107
TABELA 21 - GEOMETRIA DA FERRAMENTA OTIMIZADA (FEM).....	110
TABELA 22 - GEOMETRIA DA FERRAMENTA OTIMIZADA (RPIM)	111
TABELA 23 - GEOMETRIA DA FERRAMENTA OTIMIZADA (NNRPIM)	111
TABELA 24 - RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL PARA A FERRAMENTA DE ELEVAÇÃO DA SECÇÃO DE TORRE.....	122

ÍNDICE DE GRÁFICOS

GRÁFICO 3.1 - ITERAÇÕES VS TEMPO, DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE MALHA	64
GRÁFICO 3.2 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 2% (ELEMENTOS QUADRANGULARES).....	67
GRÁFICO 3.3 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 3% (ELEMENTOS QUADRANGULARES).....	67
GRÁFICO 3.4 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 4% (ELEMENTOS QUADRANGULARES).....	68
GRÁFICO 3.5 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 5% (ELEMENTOS QUADRANGULARES).....	68
GRÁFICO 3.6 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 2% (ELEMENTOS TRIANGULARES OTIMIZADOS).....	72
GRÁFICO 3.7 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO PARA UM RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 3% (ELEMENTOS TRIANGULARES OTIMIZADOS)	72
GRÁFICO 3.8 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 4% (ELEMENTOS TRIANGULARES OTIMIZADOS).....	73
GRÁFICO 3.9 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 5% (ELEMENTOS TRIANGULARES OTIMIZADOS).....	73
GRÁFICO 3.10 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 2% (RPIM).....	75
GRÁFICO 3.11 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 3% (RPIM).....	76
GRÁFICO 3.12 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 4% (RPIM).....	76
GRÁFICO 3.13 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 2% (NNRPIM).....	78
GRÁFICO 3.14 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 3% (NNRPIM).....	79
GRÁFICO 3.15 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 4% (NNRPIM).....	79
GRÁFICO 3.16 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 2% (FEM)	92
GRÁFICO 3.17 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 3% (FEM)	92
GRÁFICO 3.18 - REDUÇÃO DA DENSIDADE VS TEMPO, RÁCIO DE DIMINUIÇÃO DE DENSIDADE DE 4% (FEM)	93

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Enquadramento	29
1.2	Motivação	29
1.3	Objetivos.....	30
1.4	Estrutura	30
2	METODOLOGIA.....	35
2.1	Métodos numéricos	35
2.1.1	Métodos dos elementos finitos	36
2.1.2	Métodos sem malha.....	37
2.1.2.1	Métodos sem malha: Estado da Arte	37
2.1.2.2	Integração numérica	38
2.1.2.3	RPIM.....	39
2.1.2.4	NNRPIM	40
2.1.2.5	Domínios de influência.....	44
2.1.2.6	RPIM.....	45
2.1.2.7	NNRPIM	46
2.1.2.8	Funções de forma.....	48
2.1.2.9	Sistema de equações discretas	50
2.2	Otimização estrutural	54
2.2.1	Otimização estrutural: Estado de Arte	55
3	APLICAÇÕES.....	61
3.1	Exemplo numérico 1.....	61
3.1.1	Malha	62
3.1.2	Otimização.....	65
3.1.2.1	FEM	65
3.1.2.2	RPIM.....	75

3.1.2.3	NNRPIM.....	78
3.1.3	Variação do exemplo numérico 1.....	81
3.1.4	Resultados.....	84
3.1.4.1	Simulações.....	85
3.1.4.1.1	“L” tipologia inicial.....	85
3.1.4.1.2	“L” otimizado.....	86
3.1.4.2	Conclusões.....	88
3.2	Exemplo numérico 2.....	89
3.2.1	Otimização.....	91
3.2.1.1	FEM.....	91
3.2.1.2	RPIM.....	94
3.2.1.3	NNRPIM.....	94
3.2.2	Resultados.....	96
3.2.2.1	Simulações.....	97
3.2.2.1.1	Garra topologia inicial.....	98
3.2.2.1.2	Garra otimizada 1.....	99
3.2.2.1.3	Garra otimizada 2.....	101
3.2.2.1.4	Garra otimizada 3.....	102
3.2.2.2	Conclusões.....	104
3.3	Exemplo numérico 3 (caso real).....	106
3.3.1	Otimização.....	110
3.3.1.1	FEM.....	110
3.3.1.2	RPIM.....	111
3.3.1.3	NNRPIM.....	111
3.3.2	Resultados.....	113
3.3.3	Simulações.....	114
3.3.3.1	Ferramenta topologia inicial.....	114
3.3.3.2	Ferramenta otimizada 1.....	117
3.3.3.3	Ferramenta otimizada 2.....	119
3.3.4	Conclusões.....	122
4	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	125
4.1	CONCLUSÕES.....	125
5	BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO.....	131

INTRODUÇÃO

- 1.1 Enquadramento
- 1.2 Motivação
- 1.3 Objetivos
- 1.4 Estrutura

1 INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento

A otimização estrutural é um processo indispensável quando se pretende obter o máximo desempenho de um dado produto, é sem dúvida um dos maiores requisitos no projeto estrutural para obtenção de uma estrutura com menor densidade, tempo de fabrico e custos reduzidos, e possível melhoria da sua rigidez. O processo de otimização é um desafio para a indústria que busca a relação ideal entre o custo e a rigidez de uma estrutura. Como tal, durante várias décadas, teorias bem como trabalhos experimentais dedicados à otimização foram aplicados em projetos estruturais.

Durante muitos anos o método dos elementos finitos foi o método numérico eleito pela comunidade científica e indústria para estudar o comportamento das estruturas. No entanto, o uso de geometrias cada vez mais complexas ou a geração de elementos altamente distorcidos resulta em funções de forma de baixa qualidade introduzindo problemas de desempenho. De modo a contornar este problema, nas últimas décadas, surgiram os métodos sem malha, que têm sofrido um desenvolvimento expressivo, uma vez que se trata de métodos alternativos ao método dos elementos finitos, mais flexíveis e igualmente precisos. Apesar de recentes, os métodos sem malha têm dado provas da sua eficiência, tendo sido aplicadas a várias áreas da ciência, desde a engenharia à medicina.

1.2 Motivação

A otimização estrutural representa um papel relevante na indústria, um dos grandes requisitos é a otimização da rigidez de uma estrutura e, em simultâneo, a redução dos custos de produção e das emissões de carbono para a atmosfera. O momento atual exige a aquisição e implementação de práticas de redução de custos associados à produção e de diminuição do volume de ações prejudiciais ao ambiente. Como tal, existem cada vez mais soluções de engenharia que procuram melhorar os processos e os materiais nesse sentido, consequentemente permitindo melhorar a qualidade de vida. Neste sentido, torna-se importante dar ênfase a trabalhos como este, que procuram aumentar o conhecimento e desenvolvimento de novos métodos.

É necessário cada vez mais investir na investigação, área esta que é das mais importantes na sociedade, uma vez que encontra as soluções para a maioria dos problemas que existem no nosso dia-a-dia. A maior parte do financiamento dedicado à investigação deve-se a empresas independentes que querem superar a concorrência no mercado. Esta dissertação tem como objetivo, não só demonstrar as potencialidades de

métodos numéricos inovadores, mas também de incentivar o desenvolvimento de novos métodos capazes de ultrapassar algumas das dificuldades sentidas no processo de otimização na indústria.

1.3 Objetivos

Desta forma, a finalidade da dissertação é efetuar a otimização da topologia estrutural de um componente mecânico usando três métodos numéricos: o método dos elementos finitos, e dois dos mais recentes métodos sem malha, RPIM (Radial Point Interpolation Method) e NNRPIM (Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method). Esta análise permitirá obter uma estrutura otimizada, com uma performance superior comparativamente à inicial, tendo em conta a espessura, componentes estruturais e constituição, recorrendo a diferentes métodos. Outro grande objetivo é estudar a utilização dos diferentes métodos para otimizar a estrutura, podendo concluir, efetuando a comparação dos resultados, qual o método mais eficiente para este tipo de processo. Para que estes objetivos sejam tangíveis é necessário definir primeiramente algumas metas:

- Definir o estado de arte dos métodos dos elementos finitos e dos métodos sem malha mais recentes que vão ser utilizados;
- Compreender as bases e formulação dos métodos sem malha utilizados;
- Definir o estado da arte e compreender a evolução da otimização estrutural;
- Simular exemplos existentes na bibliografia e efetuar a análise computacional usando os métodos sem malha mais recentes;
- Verificar a precisão dos métodos utilizados;
- Otimizar componentes mecânicos recorrendo aos três métodos numéricos;
- Demonstrar as potencialidades dos métodos sem malha na otimização estrutural.

1.4 Estrutura

A presente dissertação está dividida em três capítulos, sendo eles divididos em várias secções.

O primeiro capítulo é a introdução, na qual se apresenta uma breve explicação sobre a importância e relevância de trabalhos nesta área para o surgimento de novos desenvolvimentos futuros, tal como a motivação e objetivos que levam à sua realização. No segundo capítulo são apresentadas as metodologias utilizadas. Numa primeira secção, é apresentada uma pequena introdução ao método mais utilizado dentro dos métodos com malha e aprofundando por outro lado os métodos sem malha. Dentro da secção dos métodos sem malha são apresentados os principais métodos utilizados neste trabalho, bem como a formulação correspondente. Nesta primeira secção, é também neste capítulo uma breve descrição das funções de forma e sistema de equações discretas de modo a tornar o método mais fácil de compreender. Na segunda secção, é apresentada a otimização estrutural, o seu estado da arte e ainda a sua combinação com

técnicas de discretização, como são o Métodos dos Elementos Finitos e os Métodos sem Malha.

O terceiro capítulo é dedicado às aplicações numéricas e aos casos de estudo. São apresentados três exemplos numéricos, de complexidade crescente. É analisada uma viga em L, uma garra e uma ferramenta utilizada na indústria eólica. Em todos os exemplos, a estrutura é analisada estruturalmente recorrendo ao FEM e aos métodos sem malha combinados com os algoritmos de otimização. No final, a solução otimizada é redesenhada e estruturalmente analisada.

O quarto capítulo contém as conclusões principais, sendo efetuada uma análise de todo o trabalho efetuado e possíveis trabalhos futuros a realizar.

Metodologia

2.1 Métodos numéricos

2 Metodologia

2.1 Métodos numéricos

Existem inúmeros métodos capazes de resolver os diversos problemas de engenharia, estes métodos são utilizados pela indústria na fase de conceptualização, simulação, visualização, análise, desenho, prototipagem, teste e fabrico de um produto, sendo que este processo é iterativo, ou seja, é repetível até que se obtenha o máximo desempenho do produto [1]. Todo este processo é ilustrado na Figura 2.1.

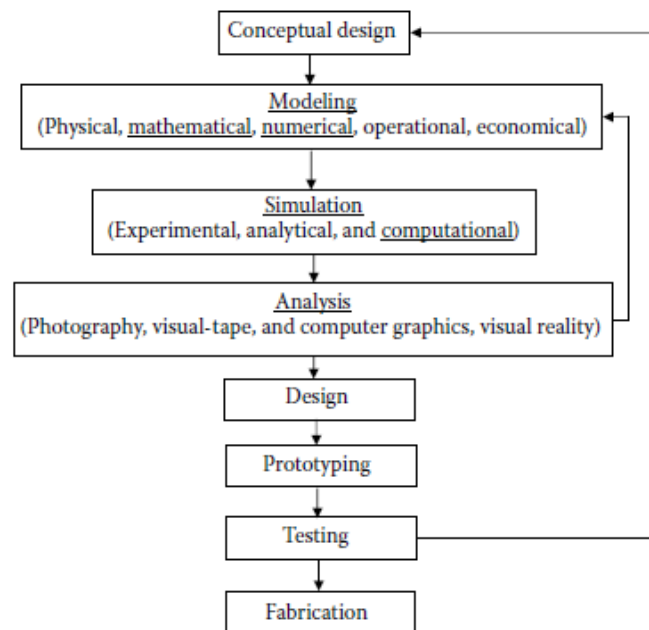


Figura 2.1 - Processo de desenvolvimento de um produto [1]

Os métodos numéricos são ferramentas de análise matemática utilizadas para resolver equações diferenciais parciais (PDE's).

Os métodos numéricos mais utilizados para resolver PDE's [2]:

- Método das diferenças finitas (FDM);
- Método de volumes finitos (FVM);
- Método dos elementos finitos (FEM).

Sendo que estes têm duas características básicas em comum:

- Necessitam de uma malha;
- Usam aproximação local através de funções polinomiais.

Existem duas grandes categorias de métodos numéricos para resolver PDE's, a aproximação direta e indireta [1]. A aproximação direta conhecida como métodos de

forma forte (como FDM e método da colocação) discretiza e resolve os PDE's diretamente, enquanto que a aproximação indireta conhecida como métodos de forma fraca (como FEM) estabelece primeiro uma equação alternativa do sistema da forma fraca que governa os mesmos fenômenos físicos. As equações da forma fraca são geralmente escritas na forma integral, implicando assim que as suas equações sejam integradas numericamente.

Alternativamente aos métodos já mencionados existem diversos outros, entre os quais se destacam os métodos sem malha – objeto do presente estudo. Nestes métodos, tanto a forma forte como a forma fraca podem ser utilizadas. Sendo que os métodos sem malha foram criados para ultrapassar as dificuldades apresentadas pelos métodos com malha na resolução de problemas de engenharia.

2.1.1 Métodos dos elementos finitos

O método dos elementos finitos (FEM) é um dos métodos mais utilizado para a resolução de problemas de engenharia uma vez que se apresenta como um método robusto e bem desenvolvido. Permite a obtenção de soluções para os diversos problemas de engenharia como análise de tensões, térmica, acústica, dinâmica, eletromagnética, escoamento de fluídos, entre outros.

Este método permite obter uma solução aproximada das equações que são estabelecidas para a estrutura, ou elementos da estrutura, através de equações que apresentam uma solução aproximada para as variáveis de campo para um número discreto de pontos do domínio (nós ou pontos nodais).

O FEM baseia-se no processo de discretização, tratando-se essencialmente da modelação de um domínio pela sua divisão num sistema equivalente de domínios de dimensão inferior (elementos finitos) interconectados pelos nós comuns a um ou mais elementos sujeitos às condições fronteira. Estas divisões podem apresentar diferentes formas, tais como triângulos, quadriláteros, entre vários polígonos, em função do tipo e dimensão do problema. A precisão deste método depende inteiramente do número de nós e elementos, do seu tamanho e da forma dos elementos da malha, sendo que, quanto menor for o tamanho do elemento e maior o número de elementos, maior será a precisão do método.

Com o intuito de resolver problemas estruturais na indústria aeroespacial, O FEM surgiu no início da década de 60. Apesar da sua formulação base ter sido estabelecida anos antes, apenas na década de 60 foi possível implementá-la, pois o FEM requer grande capacidade computacional para solucionar problemas, e essa capacidade apenas foi atingida/adquirida nessa década por algumas indústrias e grupos de investigação. No entanto, desde então, tem sido continuamente desenvolvido e utilizado para resolver problemas em diversas áreas [3].

Assim, como é usado atualmente, o FEM representa a confluência de três fatores: Análise estrutural matricial (MSA), Teoria da aproximação variacional e um computador digital. Estes três fatores aliaram-se no início dos anos 50, no entanto, o MSA surgiu em meados de 1930 quando as máquinas de calcular se tornaram populares e os esquemas

da teoria da aproximação variacional foram propostos antes do surgimento dos computadores digitais [4].

2.1.2 Métodos sem malha

Os métodos sem malha têm tido um desenvolvimento considerável nos últimos anos, com o objetivo de contornar parte das dificuldades associadas ao uso do método dos elementos finitos nas diferentes áreas da engenharia [5]. O FEM apresenta algumas limitações, a interpolação baseada na malha, a deformação excessiva ou a baixa qualidade da malha, conduzem à obtenção de erros, sendo assim necessário reformular novamente a malha. Tal remalhamento implica altos custos e consumo excessivo de tempo útil de trabalho humano, que pode não garantir a obtenção do resultado em tempo finito para geometrias tridimensionais mais complexas [6].

Ao contrário do FEM, os métodos sem malha recorrem a novas metodologias de aproximação, os nós são distribuídos arbitrariamente, uma vez que as funções de forma são obtidas por um domínio de influência ao invés de um elemento. Uma das características que diferencia estes dois métodos é a regra da não sobreposição entre elementos utilizada no FEM, que nos métodos sem malha é possível e desejável. Nos métodos sem malha os domínios de influência devem sobrepor-se [7].

2.1.2.1 Métodos sem malha: Estado da Arte

Os primeiros métodos sem malha surgiram usando funções de aproximação, pois possibilitam a criação de soluções mais suaves e simplificam o processo, uma vez que a implementação do conceito de domínio de influência e a malha de integração era independente dos nós.

O primeiro método a usar a aproximação *Moving Least Square* (MLS) na construção de funções de aproximação foi o *Diffuse Element Method* (DEM) [8]. O DEM foi evoluindo ao longo do tempo até que em 1994 surgiu um dos mais populares métodos sem malha, o *Element Free Galerkin Method* (EFGM) [9], que usa uma malha de integração que é independente da discretização nodal, sendo também um dos primeiros métodos baseados na formulação de forma fraca. Um dos primeiros e mais antigos métodos sem malha foi o método *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH) [10], desenvolvido com o intuito de resolver problemas na área da astrofísica, e mais tarde na dinâmica de fluidos [9], este método está na origem do *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) [11], que surgiu um ano depois do método EFGM.

O *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) [12], método sem malha de aproximação bastante popular, foi inicialmente desenvolvido para a resolução de problemas de caráter linear e não linear. No entanto, atualmente, o MLPG é utilizado em diversos campos de aplicação. Este método evoluiu mais tarde para o *Method of the Finite Spheres* (MFS) [13], sendo que este método usa apenas um domínio de integração em forma de esferas ou círculos em cada subdomínio.

O *Radial Basis Function Method* (RBFM) [15, 16] é também um método de aproximação que usa tal como o nome indica funções de base radial, que respeitam uma norma euclidiana para efetuar a interpolação das variáveis no domínio do problema ou em pequenos subdomínios. Este método não necessita de qualquer esquema de integração e ao contrário dos métodos anteriormente apresentados, utiliza formulação de forma forte, sendo que inicialmente foi desenvolvido com o objetivo de resolver problemas multidimensionais de interpolação de dados [17, 18], no entanto mais tarde o método foi aplicado na análise de funções diferenciais na mecânica dos sólidos [18], [19], [20]. Apesar dos métodos sem malha de aproximação serem bastante usados e implementados com sucesso na mecânica computacional, apresentam alguns problemas que não se encontram totalmente resolvidos, é o caso da propriedade de delta Kronecker, uma propriedade na aproximação de funções, cuja ausência dificulta a imposição das condições de fronteira essenciais e naturais. De modo a contornar este problema foram desenvolvidos vários métodos que possibilitam a imposição destas condições de fronteira. Um dos mais relevantes é o *Point Interpolation Method* (PIM) [21], o qual aplica técnicas específicas para construir as funções polinomiais de interpolação, pelo que se assemelha ao FEM. Como este existem outros, *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) [22], *Meshless Finite Element Method* (MFEM) [23], *Natural Neighbour Finite Element Method* (NNFEM) [24] ou o *Natural Element Method* (NEM) [25]. Estes são métodos que geralmente recorrem à forma fraca de Galerkin para estabelecer as equações expressas em derivadas parciais. Os métodos NEM e NNFEM usam as funções de interpolação de Sibson, ou seja, a função aproximada é obtida através das coordenadas dos vizinhos naturais, estas funções são obtidas pelo método geométrico do diagrama de Voronoï e a triangulação de Delaunay. Com o crescente interesse em desenvolver novos métodos sem malha, surgiu então o *Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method* (NNRPIM) [26], que é a combinação entre o NEM e o RPIM. Recentemente, o *Natural Radial Element Method* (NREM) [20][27] foi desenvolvido, apresentando-se como um método sem malha eficiente e de elevada precisão, apresentando simultaneamente uma baixa conectividade nodal. No presente trabalho vão ser usados os métodos sem malha RPIM e NNRPIM.

2.1.2.2 Integração numérica

Depois da discretização do problema, é necessário criar uma malha de integração em segundo plano para integrar as equações integro-diferenciais que regem os fenómenos físicos. Esta malha de integração pode ter o tamanho do problema ou até ser maior, sem que isso prejudique os resultados. Geralmente neste processo são usadas malhas de integração Gaussianas, tal como no FEM e RPIM. Outro processo para integrar as equações de forma fraca é o uso de integração nodal e conceitos como vizinhos naturais, usado no NNRPIM, que recorre aos diagramas de Voronoï de forma a obter o peso de integração de cada nó [7].

2.1.2.3 RPIM

O RPIM usa uma malha de integração baseada na quadratura de Gauss-Legendre. Na integração de Gauss-Legendre o domínio do problema é dividido numa grelha regular, em que cada célula formada pela grelha é preenchida por pontos de integração, seguindo a regra da quadratura de Gauss-Legendre, Figura 2.2.

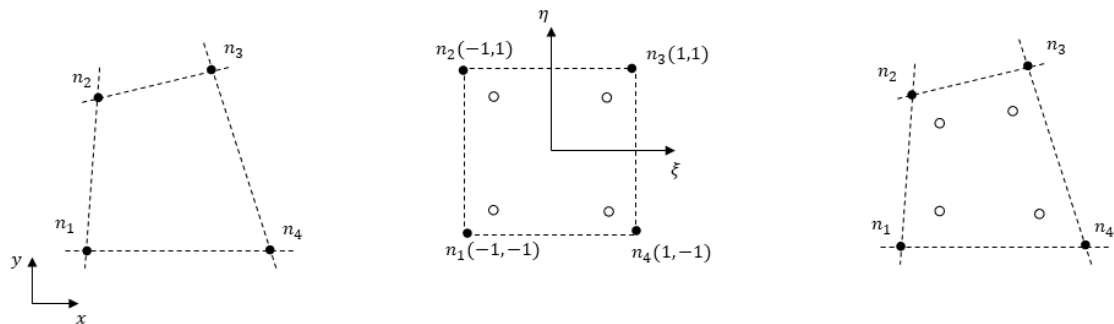


Figura 2.2 - Malha de integração da quadratura de Gauss-Legendre: (1) Quadrilátero inicial. (2) Transformação do quadrilátero através da regra de quadratura de Gauss-Legendre. (3) Forma inicial do quadrilátero.

De modo a simplificar a exposição deste procedimento é ilustrado um exemplo na Figura 2.2. É selecionada uma célula de integração da grelha de integração criada inicialmente, e de seguida a célula de integração (um quadrilátero) é transformada num quadrado isoparamétrico. No caso representado é usada uma quadratura de 2×2 , de modo a distribuir no seu interior os quatro pontos de quadratura de Gauss-Legendre (n_1 , n_2 , n_3 e n_4).

Para uma célula de integração quadrangular, o sistema de coordenadas globais é representado por (x, y) e o sistema de coordenadas naturais por (ξ, η) . Note-se que os nós nos vértices da célula isoparamétricas e as suas arestas são limitados pelos valores de +1 ou -1. Depois disso, são então definidas as funções isoparamétricas de interpolação, N_i :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Através das funções de interpolação isoparamétricas, N_i , e as coordenadas naturais (ξ_j, η_j) , é possível obter as coordenadas globais (x_j, y_j) de qualquer ponto no interior da célula.

$$x_j = \sum_{i=1}^m N_i(\xi_j, \eta_j) \cdot x_i \quad (2.2)$$

$$x_j = \varphi_1(\xi_j, \eta_j) \cdot x_1 + \varphi_2(\xi_j, \eta_j) \cdot x_2 + \varphi_3(\xi_j, \eta_j) \cdot x_3 + \varphi_4(\xi_j, \eta_j) \cdot x_4$$

$$y_j = \sum_{i=1}^m N_i(\xi_j, \eta_j) \cdot y_i \quad (2.3)$$

$$y_j = \varphi_1(\xi_j, \eta_j) \cdot y_1 + \varphi_2(\xi_j, \eta_j) \cdot y_2 + \varphi_3(\xi_j, \eta_j) \cdot y_3 + \varphi_4(\xi_j, \eta_j) \cdot y_4$$

Sendo m o número de nós dentro da célula, x_i e y_i as coordenadas Cartesianas dos vértices das células. Os pesos dos pontos de integração isoparamétrica representam o volume ocupado por esse ponto de integração e o seu valor pode ser obtido na literatura [28].

Se a grelha criada se encontra ajustada ao domínio do problema, esta não necessita de ser trabalhada, no entanto, se a grelha for maior que o domínio do problema, todos os pontos de integração que se encontram fora do domínio são excluídos, Figura 2.3. Geralmente, este processo é adotado pelos métodos sem malha uma vez que é de fácil aplicação e conduz a uma redução de custos computacionais [7].

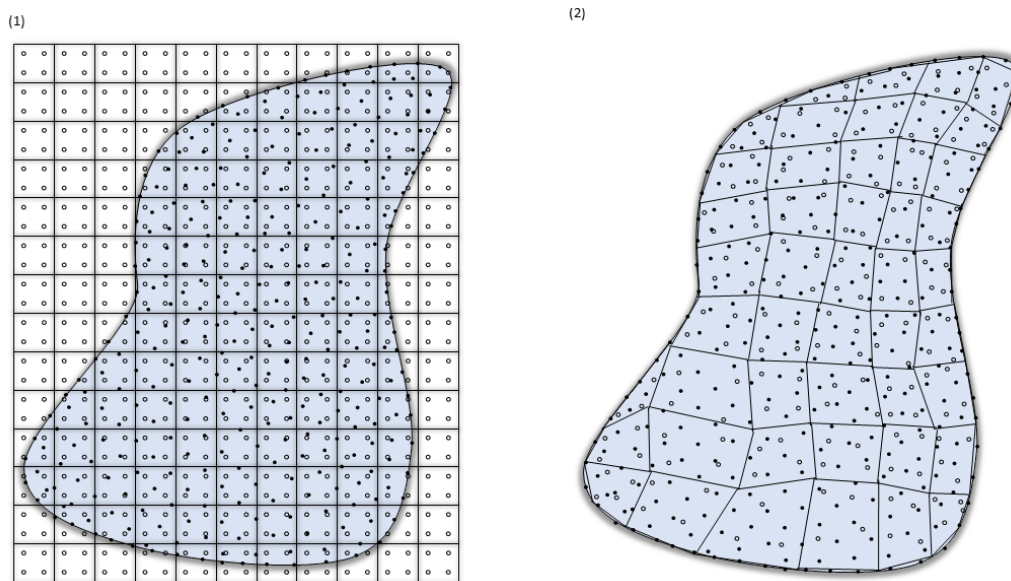


Figura 2.3 - Discretização do domínio (1) Malha de integração Gaussiana regular. (2) Malha de integração Gaussiana ajustada.

2.1.2.4 NNRPIM

O NNRPIM usa a integração de base nodal para integrar numericamente as equações integro-diferenciais que regem o fenómeno físico estudado. A grande vantagem deste método é o uso de uma malha de integração construída unicamente utilizando a informação espacial da distribuição nodal, sendo que os métodos sem malha que usam esta técnica são considerados métodos sem malha verdadeiros. Nesta técnica a malha

de integração é construída com base no diagrama de Voronoi e na triangulação de Delaunay [7].

Depois da discretização do domínio com uma distribuição nodal regular ou irregular, o diagrama de Voronoi é construído. Com o diagrama de Voronoi é possível obter as células de Voronoi de cada nó, nas quais pequenas áreas são estabelecidas através da triangulação de Delaunay. As células de Voronoi estabelecem a conexão entre nós através do princípio da partilha simultânea de fronteiras, Figura 2.4, podendo estas ser quadriláteros ou triângulos de acordo com a distribuição nodal.

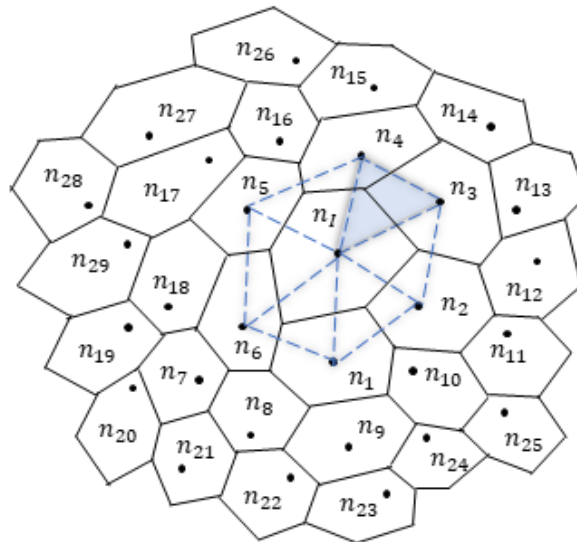


Figura 2.4 - Triangulação de Delaunay considerando o diagrama de Voronoi inicialmente

É sempre possível dividir as células de Voronoi V_I em sub-células S_{Ii} , sendo o número de sub-células n igual ao número de nós vizinhos do nó central n_I . O tamanho da célula A_{V_I} , é igual à soma das áreas da sub-células, $A_{S_{Ii}}$:

$$A_{V_I} = \sum_{i=1}^n A_{S_{Ii}}, \quad \forall A_{S_{Ii}} \geq 0 \quad (2.4)$$

Como referido anteriormente a distribuição nodal determina a forma das sub-células. Para um uma distribuição nodal irregular, as sub-células apresentam uma forma de quadriláteros (Figura 2.5).

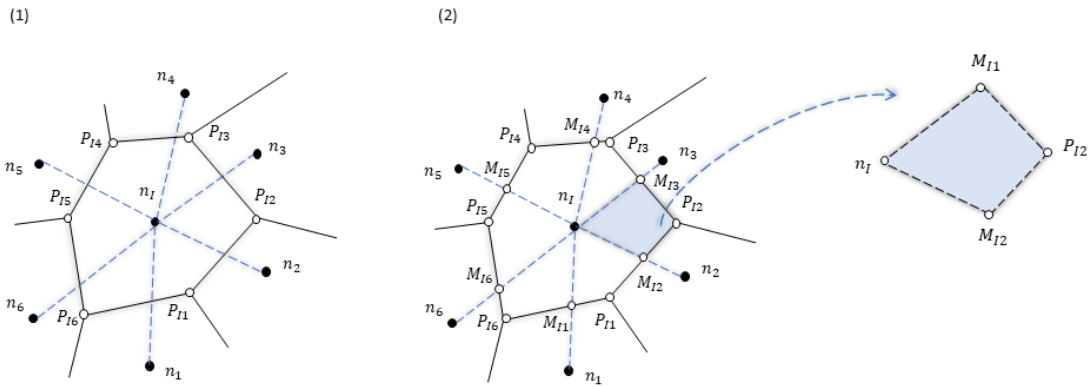


Figura 2.5 - (1) Célula de Voronoï e pontos de intersecção P_{ij} . (2) Criação dos pontos médios M_{ij} e quadriláteros.

Tal como a figura indica, após ser efetuada a triangulação de Delaunay, obtêm-se n sub-células com a forma de um quadrilátero.

Por outro lado, se a distribuição nodal for regular, as sub-células apresentam uma forma triangular (Figura 2.6).

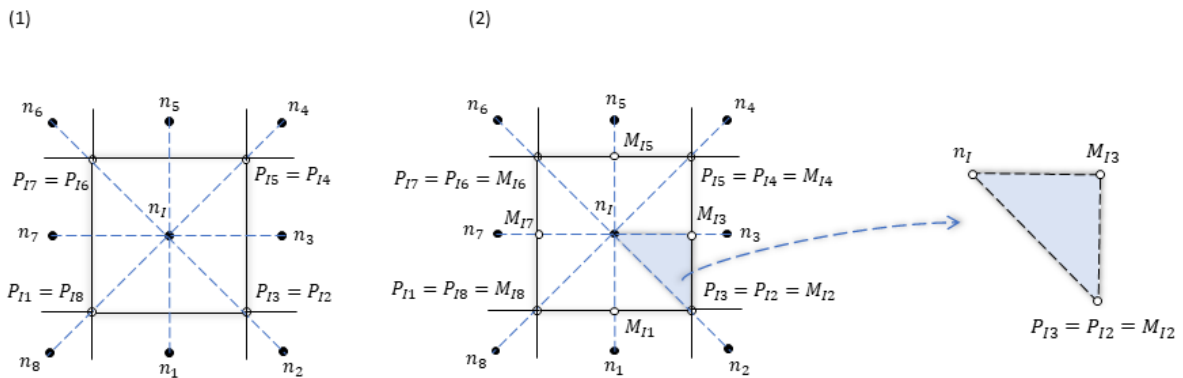


Figura 2.6 - (1) Célula de Voronoï e pontos de intersecção P_{ij} . (2) Criação dos pontos médios M_{ij} e triângulos.

A forma mais simples de integração coloca um ponto de integração no baricentro das sub-células, Figura 2.7. A sua localização espacial é determinada em cada sub-célula, sendo que o seu peso representa a área da respetiva sub-célula [7].

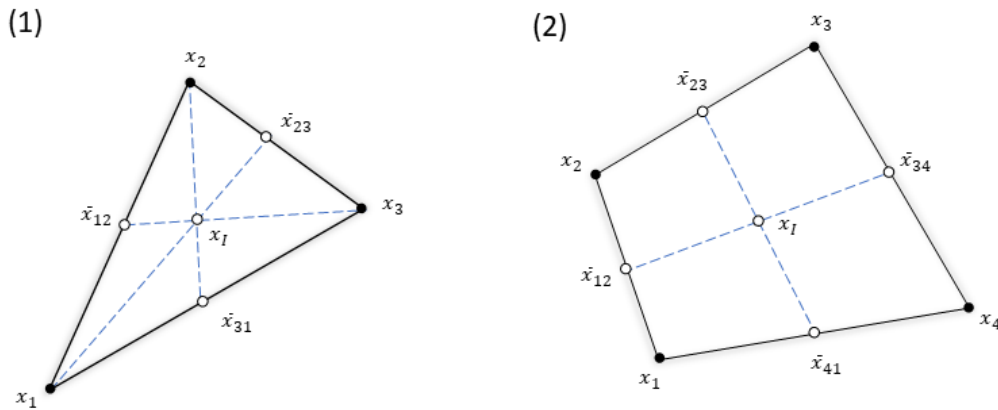


Figura 2.7 - Malha de integração básica: (1) Sub-célula de forma triangular com o ponto de integração x_I . (2) Sub-célula de forma quadrilateral com o ponto de integração x_I .

A partir da forma mais simples de integração é possível obter uma integração mais geral, que requer mais que um ponto de integração, formando assim apenas quadriláteros dentro das sub-células. Inicialmente é obtido o ponto central da sub-célula, seja esta um triângulo ou um quadrilátero e de seguida são obtidos os pontos médios das arestas da sub-célula. Com este procedimento é possível obter novos quadriláteros. Determinados os pontos é possível aplicar a quadratura de Gauss-Legendre de modo a obter os pontos de integração, formando assim a malha de integração [7], Figura 2.8.

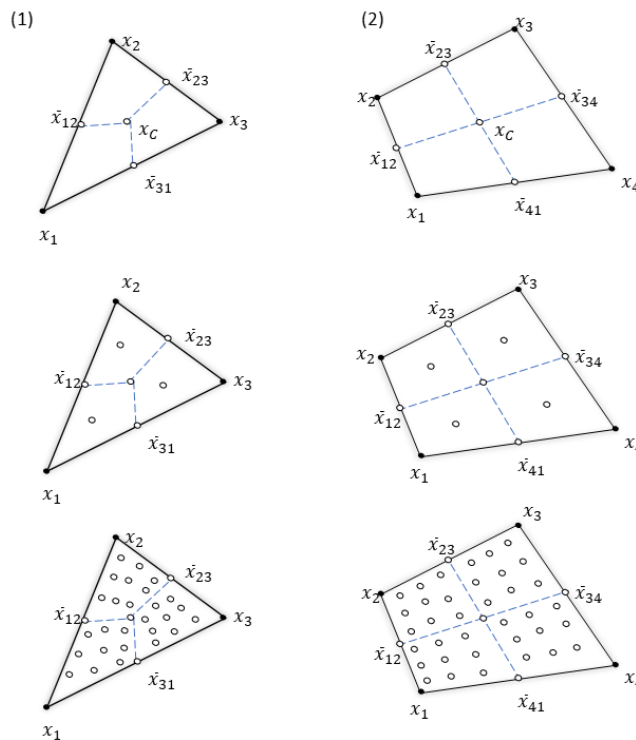


Figura 2.8 - Malha de integração obtida pela quadratura de Gauss-Legendre: (1) Sub-célula de forma triangular com os pontos de integração. (2) Sub-célula de forma quadrilateral com os pontos de integração.

2.1.2.5 Domínios de influência

As funções de aproximação ou interpolação necessitam de um domínio de aplicabilidade, fora deste domínio a função adota os valores como sendo nulos. No caso do FEM o seu domínio de aplicabilidade é o elemento, enquanto que nos métodos sem malha este domínio é denominado de domínio de influência.

Nos métodos sem malha é necessário determinar o domínio de influência para cada ponto de integração da malha de integração, como consequência a forma e tamanho do domínio de influência pode variar de acordo com o ponto de integração. O método de obtenção do domínio de influência depende do tipo de método sem malha.

Tal como o FEM e outros métodos numéricos, a maior parte dos métodos sem malha seguem um procedimento em que primeiro é necessário definir a geometria do problema, para estabelecer o domínio e os seus limites, e só depois é que são identificadas e definidas as condições fronteira essenciais e naturais [7]. O domínio é discretizado por um conjunto de nós, com distribuição regular ou irregular e com uma certa densidade nodal (Figura 2.9), que irá afetar a resolução do problema. Ou seja, uma malha nodal mais fina conduz geralmente a resultados mais precisos, no entanto implica um aumento do número total de nós que consequentemente leva ao aumento dos custos computacionais. Para contornar este problema as zonas onde existe previsivelmente uma maior concentração de tensões (devido à presença de furos, fissuras ou fronteiras limitadas) deverão apresentar uma maior densidade nodal, ao contrário das zonas onde a concentração de tensões é previsivelmente mais suave.

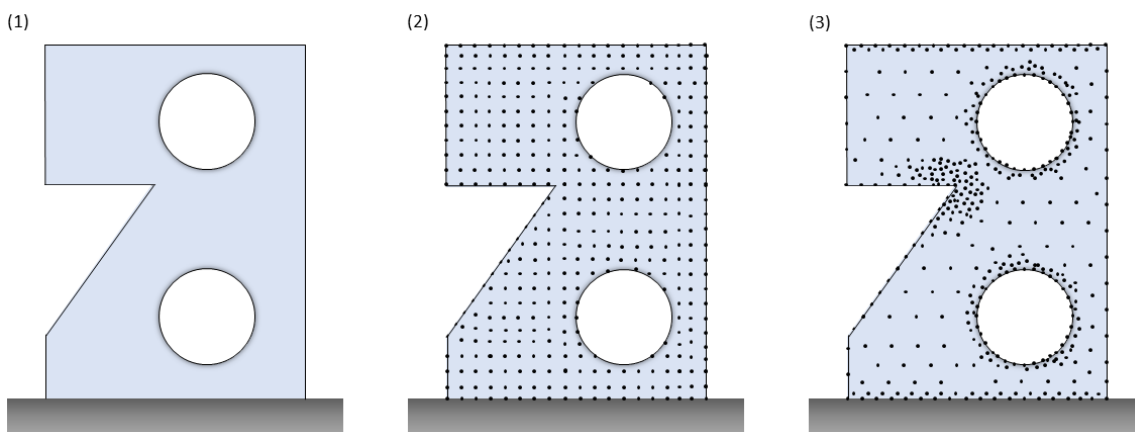


Figura 2.9 - (1) Domínio do Problema. (2) Discretização nodal regular. (3) Discretização nodal irregular.

Como os métodos sem malha não requerem uma malha nodal estruturada para obterem as funções de interpolação e aproximação, a informação da relação entre os nós não é inicialmente necessária, sendo apenas importante conhecer a localização espacial de cada nó do domínio do problema.

A conectividade nodal na maioria dos métodos sem malha é definida pela sobreposição dos domínios de influência, sendo imposta pela concentricidade das áreas e volumes

formados pelos nós. Estas áreas e volumes formam os domínios de influência, ou células de influência no NNRPIM, de um certo ponto de interesse [7].

De modo a estabelecer o sistema de equações são usadas funções de forma de aproximação ou interpolação, que no caso do RPIM e do NNRPIM são funções de interpolação construídas combinando RBF com as funções de base polinomial.

2.1.2.6 RPIM

No RPIM, a conectividade nodal é obtida pela sobreposição dos domínios de influência de cada nó. Os domínios de influência são definidos depois da discretização nodal e da construção da malha de integração, como mencionado anteriormente. A sua obtenção resulta na procura de nós suficientes dentro de uma determinada área (2D) ou volume (3D) do domínio associado com um ponto de integração, que se apresentam com tamanho e formas fixas ou variáveis, levando a diferentes conectividades nodais (Figura 2.10).

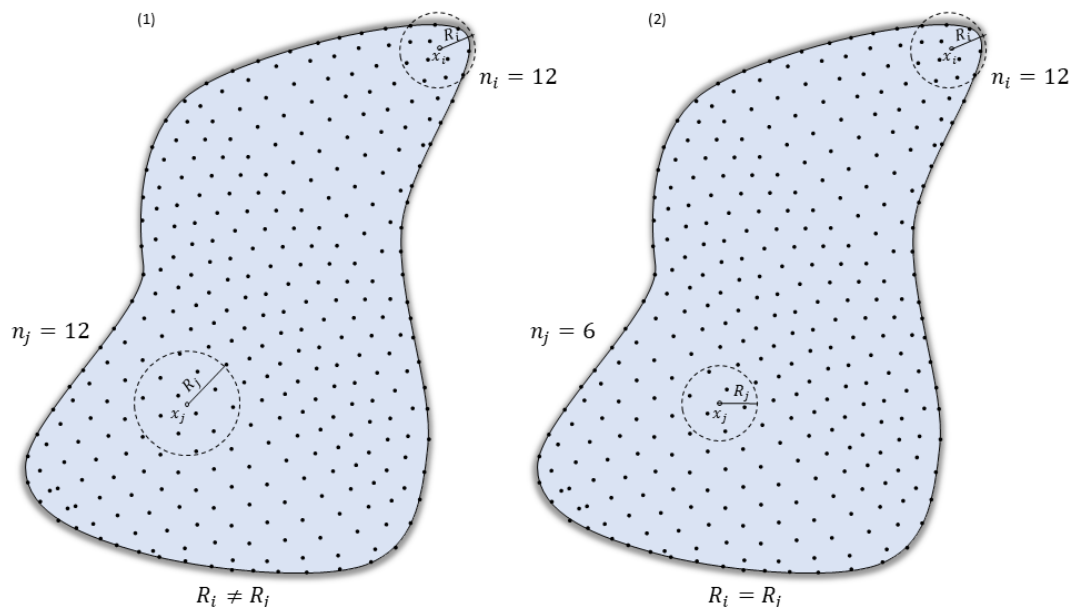


Figura 2.10 - (1) Domínios de influência de forma variável. (2) Domínios de influência de forma fixa.

No entanto, domínios de influência com formas e tamanhos constantes ao longo do domínio do problema afetam a performance e os resultados do método, pois é importante assegurar que todos os domínios de influência do problema contenham aproximadamente o mesmo número de nós [7].

Para que a conectividade nodal seja constante ao longo do domínio do problema, os domínios de influência de área/volume variáveis são a melhor solução. Este tipo de solução está ilustrado na Figura 2.10(1) onde se observa que com a variação do raio dos domínios de influência, para dois pontos de interesse, obtém-se o mesmo número de nós no seu interior. A técnica utilizada pelo RPIM usa domínios de influência variáveis, centrados num ponto de interesse, que procedem à busca de um número específico de

nós mais próximos levando assim à criação de funções de forma com o mesmo grau de complexidade na totalidade do domínio [7].

2.1.2.7 NNRPIM

Como visto anteriormente, o NNRPIM recorre aos digramas de Voronoi e à triangulação de Delaunay para determinar a conectividade nodal de cada nó pertencente ao conjunto de nós do problema. Como os domínios de influência são obtidos com base na relação geométrica e espacial entre as células de Voronoi, obtidas através do diagrama de Voronoi, os domínios de influência designam-se de células de influência [7].

O domínio do problema $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é discretizado pelo conjunto nodal $N = \{n_1, n_2, \dots, n_N\} \in \Omega$ com $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \Omega$. O diagrama de Voronoi de N representa o número de divisões do domínio em sub-regiões V_i , fechadas e convexas, associadas ao nó n_i de modo a que todos os pontos pertencentes à sub-região V_i estão mais próximos de n_i do que qualquer outro nó n_j , $n_i \in N \wedge j \neq i$. O conjunto de células Voronoi V define o diagrama, $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$. A célula de Voronoi é definida como:

$$V_i = \{x_l \in \Omega \subset \mathbb{R}^d: \|x_l - x_i\| < \|x_l - x_j\|, \forall i \neq j\} \tag{2.5}$$

Sendo x_l um ponto de interesse do domínio e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana que representa a distância Euclidiana entre dois pontos, neste caso entre o ponto de interesse x_l e os nós x_i e x_j .

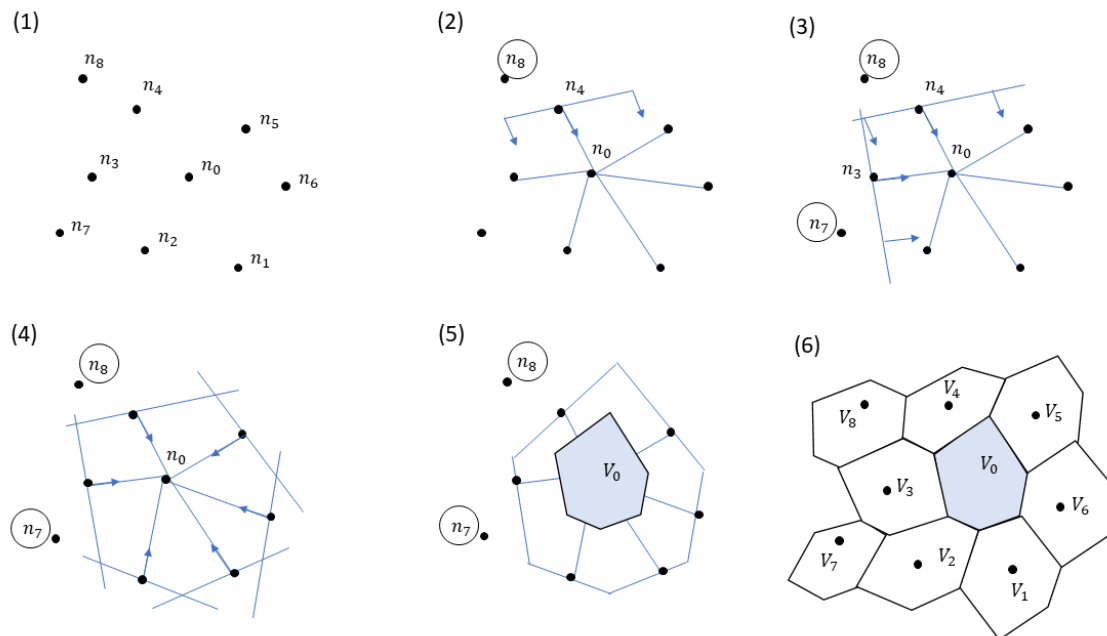


Figura 2.11 - (1) Conjunto de nós iniciais. (2) Definição do primeiro plano. (3) Definição do segundo plano. (4) Célula contendo apenas os vizinhos naturais do nó n_0 . (5) Célula de Voronoi. (6) Diagrama de Voronoi.

Considerando o conjunto nodal representado na Figura 2.11(1), pretende-se identificar os potenciais vizinhos do nó n_0 de modo a determinar a célula de Voronoï V_0 do nó n_0 . Como tal é selecionado um nó como potencial vizinho, por exemplo nó n_2 representado na Figura 2.11(2), sendo o seu vetor \mathbf{u}_{20} determinado como:

$$\mathbf{u}_{20} = \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2\|} \quad (2.6)$$

Em que $\mathbf{u}_{20} = \{u_{20}, v_{20}, w_{20}\}$. Com o vetor é possível definir um plano onde todos os nós devem respeitar a seguinte condição:

$$u_{20}x + v_{20}y + w_{20}z \geq (u_{20}x_2 + v_{20}y_2 + w_{20}z_2) \quad (2.7)$$

A equação anterior é aplicada a todos os nós do conjunto inicial, Figura 2.11(3-4). Os nós que não cumpram a condição implícita na equação são excluídos de vizinhos naturais do nó n_0 , como é o caso por exemplo dos nós n_7 e n_8 , Figura 2.11(4). No final do processo permanecem apenas os nós vizinhos do nó n_0 , Figura 2.11(5). Este processo é repetível para todos os nós no domínio do problema, resultando no diagrama final de Voronoï, Figura 2.11(6).

O diagrama de Voronoï é usado para criar as células de influência que estabelecem a conectividade entre os nós que discretizam o domínio do problema. É possível obter dois tipos de células de influência: célula de influência de primeiro grau e célula de influência de segundo grau.

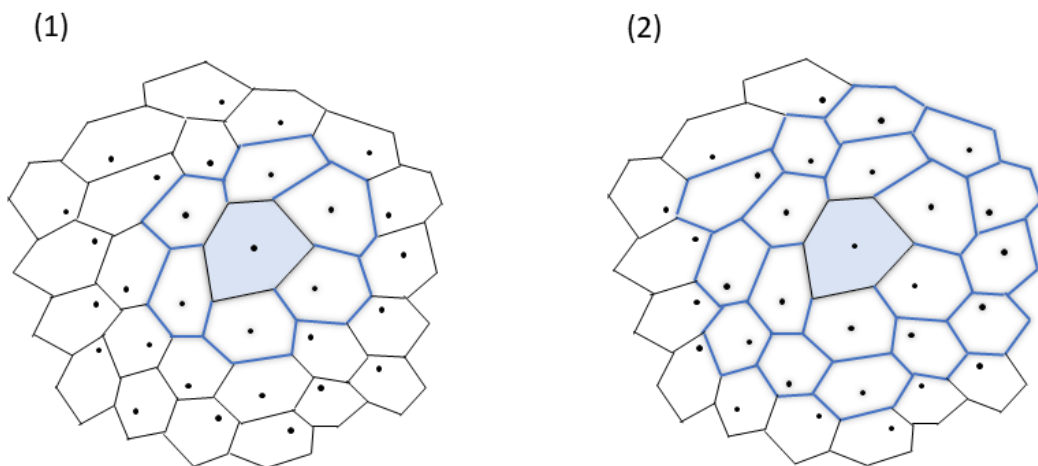


Figura 2.12 – Tipos de células de influência (1) Célula de influência de primeiro grau. (2) Célula de influência de segundo grau.

A célula de influência de primeiro grau é composta apenas pelos primeiros vizinhos naturais do ponto de interesse \mathbf{x}_i , Figura 2.12(1). A célula de influência de segundo grau segue o mesmo procedimento da célula de influência de primeiro grau, no entanto,

considera adicionalmente os vizinhos naturais dos primeiros vizinhos naturais do ponto de interesse \mathbf{x}_I , Figura 2.12(2).

Como expectável a célula de influência de segundo grau apresenta um domínio de influência maior comparativamente à célula de influência de primeiro grau, permitindo geralmente obter melhores resultados numéricos.

2.1.2.8 Funções de forma

O processo de construção das funções de forma é nos métodos sem malha variado [7]. Ambos os métodos numéricos abordados com maior detalhe neste trabalho, RPIM e NNRPIM, usam a mesma metodologia para obter as funções de forma, combinam funções de base polinomial com funções de base radial (RBF).

Considere-se a função $u(\mathbf{x})$, definida no domínio Ω , e discretizada por um conjunto de n nós dentro do domínio de influência (ou célula de influência) do ponto de interesse \mathbf{x}_I . A função $u(\mathbf{x}_I)$ no ponto de interesse \mathbf{x}_I é obtida por:

$$u(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_I) b_j(\mathbf{x}_I) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \quad (2.8)$$

Podendo ser reescrita:

$$u(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I), \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Sendo $R_i(\mathbf{x}_I)$ a função de base radial (RBF), $p_j(\mathbf{x}_I)$ a função de base polinomial, $a_i(\mathbf{x}_I)$ e $b_j(\mathbf{x}_I)$ os coeficientes não constantes de $R_i(\mathbf{x}_I)$ e $p_j(\mathbf{x}_I)$, respetivamente. O número de nós dentro da célula de influência do ponto de interesse \mathbf{x}_I é dado por n , e o número de monómios da base polinomial $p_j(\mathbf{x}_I)$ é dado por m . Os vetores são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I) &= \{R_1(\mathbf{x}_I), R_2(\mathbf{x}_I), \dots, R_n(\mathbf{x}_I)\} \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) &= \{p_1(\mathbf{x}_I), p_2(\mathbf{x}_I), \dots, p_m(\mathbf{x}_I)\} \\ \mathbf{a}^T(\mathbf{x}_I) &= \{a_1(\mathbf{x}_I), a_2(\mathbf{x}_I), \dots, a_n(\mathbf{x}_I)\} \\ \mathbf{b}^T(\mathbf{x}_I) &= \{b_1(\mathbf{x}_I), b_2(\mathbf{x}_I), \dots, b_m(\mathbf{x}_I)\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os métodos sem malha em estudo utilizam a função multiquadrática de base radial (MQ-RBF) [29], que pode ser definida por:

$$R(d_{Ii}) = (d_{Ii}^2 + c^2)^p \quad (2.11)$$

$$d_{Ii} = \sqrt{(x_i - x_I)^2 + (y_i - y_I)^2} \quad (2.12)$$

Em que d_{li} representa a distância euclidiana entre o ponto de interesse x_l e o nó vizinho x_i . O MQ-RBF necessita de definir os parâmetros de forma c e p , uma vez que afetam o desempenho da função. A literatura recomenda os seguintes valores: $c = 0.0001$ e $p = 0.9999$ [26], para a formulação NNRPIM. De modo a garantir que a matriz de interpolação é invertível, a base polinomial adicionada à formulação não deve ser arbitrária, sendo comum utilizar bases polinomiais de baixo grau para problemas 2D e 3D (base nula, base constante, base linear, base quadrática)[26]. A base polinomial tem como forma geral:

$$\mathbf{p}(x)^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots] \quad (2.13)$$

De modo a garantir uma solução única, é imposta a seguinte condição adicional:

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i(x_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.14)$$

Considerando todas as equações apresentadas anteriormente é possível obter o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{p}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Sendo as matrizes \mathbf{R} definida como:

$$\mathbf{u}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R(r_{11}) & R(r_{12}) & \dots & R(r_{1n}) \\ R(r_{21}) & R(r_{22}) & \dots & R(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(r_{n1}) & R(r_{n2}) & \dots & R(r_{nn}) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

E a matriz \mathbf{P} , assumindo uma base polinomial linear, definida como,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

De modo a determinar os coeficientes \mathbf{a} e \mathbf{b} recorre-se à resolução da equação(2.15):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Substituindo a equação (2.19) na equação (2.9), obtém-se:

$$u(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_I), \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\} \mathbf{M}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \{\Phi(\mathbf{x}_I), \Psi(\mathbf{x}_I)\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Em que o vetor função de interpolação $\Phi(\mathbf{x}_I)$ é definido por:

$$\Phi(\mathbf{x}_I) = \{\varphi_1(\mathbf{x}_I), \varphi_2(\mathbf{x}_I), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.21)$$

O vetor residual $\Psi(\mathbf{x}_I)$, sem significado físico, é definido por:

$$\Psi(\mathbf{x}_I) = \{\psi_1(\mathbf{x}_I), \psi_2(\mathbf{x}_I), \dots, \psi_m(\mathbf{x}_I)\} \quad (2.22)$$

Geralmente as funções de forma obtidas através desta técnica (RPI) apresentam a propriedade delta Kronecker, ao contrário das funções de forma de aproximação (MLS). A presença desta propriedade permite que as condições fronteira do problema sejam facilmente impostas. Assim, a função de interpolação $\Phi(\mathbf{x}_I)$ contém a propriedade delta Kronecker δ_{ij} :

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

Esta propriedade permite o uso da imposição direta para aplicar as condições fronteira na matriz de rigidez, tal como no método dos elementos finitos.

2.1.2.9 Sistema de equações discretas

O sistema de equações discretas pode ser obtido usando a forma fraca de Galerkin combinada com as funções de interpolação apresentadas anteriormente.

Considerando um sólido com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definido pela fronteira Γ , onde $\Gamma \in \Omega : \Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma \wedge \Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$, em que Γ_u representa a fronteira essencial e Γ_t a fronteira natural. As equações de equilíbrio lineares de um problema elasto-estático podem ser expressas por:

$$\nabla \mathbf{\Lambda} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.24)$$

Onde ∇ é o operador divergente, $\mathbf{\Lambda}$ o tensor das tensões de Cauchy, e \mathbf{b} é o vetor de forças do corpo por unidade de volume. As condições fronteira são dadas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \text{ na fronteira natural } \Gamma_t \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ na fronteira essencial } \Gamma_u \end{aligned} \quad (2.25)$$

Onde $\bar{\mathbf{u}}$ é o deslocamento na fronteira essencial, $\bar{\mathbf{t}}$ é a tração na fronteira natural, e \mathbf{n} é o vetor normal do limite do domínio. Considerando a equação acima descrita, a forma fraca de Galerkin é representada por:

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2.26)$$

Usando as funções de interpolação φ_i obtida da equação (2.20), é possível definir para um ponto de interesse $\mathbf{x}_I \in \Omega$ a seguinte aproximação:

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) u(\mathbf{x}_i) \quad (2.27)$$

Sendo que $u(\mathbf{x}_i)$ é o parâmetro nodal do nó i pertencente ao conjunto nodal do domínio de influência do nó de interesse \mathbf{x}_I . Analisando o problema em 2D, existem dois graus de liberdade por nó:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \{u(\mathbf{x}_i), v(\mathbf{x}_i)\}^T \quad (2.28)$$

A partir da equação 2.29 é possível obter a aproximação do deslocamento virtual:

$$\delta u^h(\mathbf{x}_I) = \begin{Bmatrix} \delta u^h(\mathbf{x}_I) \\ \delta v^h(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}_I) & 0 \\ 0 & \varphi_i(\mathbf{x}_I) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u(\mathbf{x}_i) \\ \delta v(\mathbf{x}_i) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_I) \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \quad (2.29)$$

Com a lei de Hooke pode ser estabelecida uma relação entre os vetores da tensão e da deformação na equação (2.26):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Onde \mathbf{s} é a inversa da matriz constitutiva para materiais anisotrópicos, que é definida nas equações (2.31) e (2.32), para o caso do estado plano de tensão e para o caso do estado plano de deformação, respetivamente.

$$\mathbf{s}_{tensão} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{s}_{deformação} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_{11}} & \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Onde E_{ij} é o módulo de elasticidade, ν_{ij} o coeficiente de Poisson, e G_{ij} o módulo de rigidez do material na direção i e j . O vetor de tensão pode ser obtido através da expressão: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon}$, sendo que $\mathbf{c} = \mathbf{s}^{-1}$, em que \mathbf{c} representa a matriz constitutiva. Considerando pequenas deformações, o vetor de deformação virtual pode ser obtido de acordo com a seguinte relação:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{xx} \\ \delta\varepsilon_{yy} \\ \delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Usando a equação (2.29), é possível desenvolver o vetor de deformação virtual:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{L}\delta\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I) = \mathbf{L} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_I) \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n [\mathbf{L}\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_I)] \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \quad (2.34)$$

Substituindo $\mathbf{L}\mathbf{H}_i(\mathbf{x}_I)$ por $\mathbf{B}_i(\mathbf{x}_I)$:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i(\mathbf{x}_I) \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}_I)}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}_I)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u(\mathbf{x}_i) \\ \delta v(\mathbf{x}_i) \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Substituindo na equação (2.26) o vetor de deslocamento virtual obtido na equação (2.35), e o vetor de tensão $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{c}\mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}_I)$, obtém-se a matriz de rigidez \mathbf{K}_I do ponto de integração \mathbf{x}_I .

$$\mathbf{K}_I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta\mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{c}\mathbf{B}_j d\Omega \mathbf{u}_j \quad (2.36)$$

Substituindo na equação (2.26) a dedução da equação (2.29), obtém-se \mathbf{f}_{b_I} de um ponto de integração \mathbf{x}_I .

$$\mathbf{f}_{b_I} = \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{H}_i^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} d\Omega \quad (2.37)$$

Substituindo na equação (2.26) a dedução da equação (2.29), obtém-se \mathbf{f}_t num dado nó da fronteira natural.

$$\mathbf{f}_t = \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \int_{\Gamma_t} \mathbf{H}_i^T \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} d\Gamma_t \quad (2.38)$$

Reescrevendo a equação (2.26):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{c} \mathbf{B}_j d\Omega \mathbf{u}_j - \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \int_{\Omega} \mathbf{H}_i^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} d\Omega - \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \int_{\Gamma_t} \mathbf{H}_i^T \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} d\Gamma_t = 0 \quad (2.39)$$

Após a construção da matriz de rigidez \mathbf{K}_I de cada ponto de integração, é possível assemblar todas as matrizes de rigidez e obter a matriz de rigidez global, \mathbf{K} . O mesmo tipo de assemblagem é efetuado para o caso das forças de corpo, \mathbf{f}_{b_I} , e das forças externas, \mathbf{f}_t . O sistema de equações final, vindo da equação (2.40), é representado sob a forma de sistema de equações lineares na forma matricial.

$$\delta \mathbf{u}^T [\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{F}_b - \mathbf{F}_t] = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_t \quad (2.40)$$

As condições fronteira essenciais podem ser impostas diretamente na matriz de rigidez \mathbf{K} , uma vez que as funções de forma RPI possuem a propriedade delta Kronecker.

2.2 Otimização estrutural

A otimização estrutural é um processo de elevada importância uma vez que tem grande impacto no valor final do produto. É um fator que quando aplicado na fase de projeto do produto permite a redução dos custos de produção, redução da quantidade de material de construção e redução do impacto ambiental, permitindo obter assim um produto inovador e diferenciado no mercado, com baixo custo e peso, e consequentemente de elevado desempenho. Este processo assume grande relevância na indústria aeroespacial, automóvel, construção, medicina, entre outras, uma vez que se trata de um processo indispensável na produção de qualquer componente que se pretenda obter o máximo desempenho. Nos dias de hoje é cada vez mais fácil ter acesso a ferramentas que possibilitam efetuar a otimização da forma geométrica de um produto de forma fiável e eficiente. Esta realidade deve-se essencialmente ao facto da evolução da tecnologia ter permitido que hoje estejam disponíveis computadores de alta velocidade ao alcance de qualquer usuário e também aos trabalhos que foram sendo desenvolvidos ao longo das décadas, melhorando os algoritmos utilizados na otimização estrutural.

A otimização estrutural é classificada em três categorias: otimização dimensional, otimização de forma e otimização da topologia. A otimização dimensional é uma das primeiras abordagens no que diz respeito ao melhoramento de um produto, tem como objetivo alterar as dimensões de uma estrutura, como por exemplo, as dimensões da secção transversal de uma treliça e a sua estrutura, ou mesmo a espessura de uma chapa, Figura 2.13(1). A otimização de forma é geralmente aplicada em estruturas contínuas onde se pretende modificar os limites pré-determinados de modo a obter formas e geometrias ideais Figura 2.13(2). A otimização da topologia para estruturas discretas, tais como treliças e estruturas, é encontrar a configuração ideal de barras e a sua posição. No que diz respeito a estruturas contínuas, tais como chapas, a otimização da topologia baseia-se na obtenção da melhor forma e geometria pela determinação da melhor localização e geometria das cavidades a remover na estrutura sem comprometer a sua função, de modo a obter uma estrutura com menor quantidade de material e consequentemente mais leve [30], Figura 2.13(3).

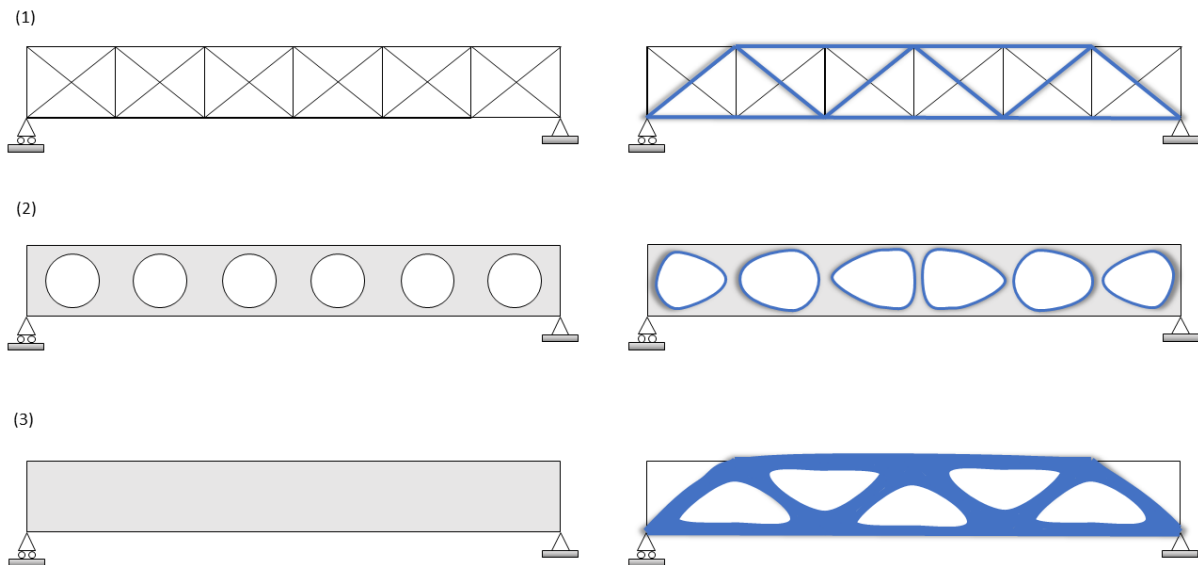


Figura 2.13 - Categorias de otimização estrutural. (1) Otimização dimensional. (2) Otimização da forma. (3) Otimização da topologia. Figuras da esquerda representam a estrutura original e figuras da direita representam as estruturas depois de aplicada a respetiva otimização estrutural. Adaptado de [31].

De entre as três categorias de otimização estrutural aquela que apresenta melhores resultados em termos económicos é a otimização da topologia, apesar de ser tecnicamente mais complexa no processo de obtenção de uma geometria/forma ideal em estruturas contínuas [30]. A otimização da topologia tem uma vasta área de aplicação, isto porque possibilita total liberdade ao projetista no que diz respeito à criação de projetos com uma geometria/forma conceptual altamente eficiente, permitindo conceber novas funcionalidades e ajustes em estruturas contínuas.

2.2.1 Otimização estrutural: Estado de Arte

A otimização da topologia estrutural tornou-se numa área de interesse desde o surgimento de trabalhos pioneiros no início do século XX, como é o caso de Michell [32], que efetuou um estudo de modo a determinar o número de treliças a aplicar para um determinado número de carregamentos e condições, técnica designada de *Michell trusses*. Ao longo dos anos foram surgindo mais desenvolvimentos na área da otimização da topologia. Tal facto deve-se essencialmente ao crescente interesse pela programação computacional estrutural. No entanto, os primeiros algoritmos desenvolvidos não eram eficientes na resolução de grandes problemas de otimização.

A área de otimização estrutural computacional é dominada por métodos que aplicam uma distribuição de material num determinado domínio conhecido como *ground structure*. Um dos mais usados surgiu na década de 80 por Bendsoe e Kikuchi [33], que propuseram uma técnica inovadora conhecida como *Homogenization Design Method* (HDM).

Este método é um dos mais estabelecidos no que diz respeito à otimização topológica, tem a capacidade de encontrar a distribuição de material ideal num domínio pré-

determinado usando a relação entre a densidade e a espessura obtida através da homogeneização das propriedades da microestrutura celular. O método assume que o material em cada elemento é composto por um número infinito de células microscópicas que contêm diferentes locais de sólido e de vazios. Os parâmetros geométricos do rácio entre os locais que contêm sólido e vazios são usados como variáveis de projeto, e a teoria de homogeneização é usada para obter as propriedades efetivas do material e geralmente utilizada para lidar com descontinuidades extremas de distribuição de material. No entanto a obtenção das microestruturas ideais e a sua orientação é geralmente trabalhoso e numericamente complexa de ser obtida [34].

As metodologias mais utilizadas para otimização estrutural da topologia podem ser classificadas como métodos baseados na densidade, que inclui um método inicialmente introduzido por Bendsoe [35], o *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (SIMP). Esta técnica ao invés de recorrer à homogeneização, discretiza o domínio do problema por elementos finitos e aqui a variável de análise é a densidade do elemento. Com isto o método procede à penalização do material isotrópico com base na densidade do elemento. Assim, a rigidez do elemento é penalizada quando o valor da densidade intermédia se encontra entre 0 e 1. O efeito da penalização permite obter uma solução de distribuição de densidade de material que varia para 0 e 1 durante o processo de otimização, onde 0 corresponde ao elemento vazio e 1 ao elemento sólido. No entanto a presença de valores como zero apresentam dificuldades no método, o que requer a utilização de algumas formulações que impedem a singularidade nas matrizes dos elementos finitos e problemas de incapacidade de o material reaparecer em zonas com densidade igual a zero em alguns casos. A ideia principal do SIMP é recorrer ao uso de materiais isotrópicos fictícios em que a sua matriz constitutiva material é assumida como uma função de penalização da densidade do material, expressa por um parâmetro penalizador. Mais tarde, de modo a dar significado físico aos valores da densidade intermédia que surgem no SIMP, Bendsoe e Sigmund [36], mostraram que a rigidez obtida no modelo SIMP pode ser denominada como a rigidez da microestrutura que contem uma quantidade de vazios e material solido. Devido à sua simplicidade conceptual e eficiência computacional esta técnica tornou-se a muito popular e bem-sucedida, uma vez que é utilizada em vários problemas de análise estrutural [37][38][39].

Existem outros métodos alternativos propostos, como é o caso do *Rational Approximation of Material Properties* (RAMP) [40], que ao contrário do SIMP, não apresenta as dificuldades associadas à presença de valores de densidade iguais a zero. O método RAMP veio colmatar algumas dificuldades numéricas relacionadas com problemas que apresentam valores de baixa densidade na presença de formas/geometrias dependentes de carregamentos. Outro método alternativo ao SIMP, é o SINH [41] que se apresenta como uma versão inversa ao método de penalização de custo proposta por Zhou e Rozvany [42], onde o custo em termos de otimização estrutural representa o peso do material. Esta abordagem alternativa difere das anteriores que penalizam os parâmetros do material. No SINH é o volume que é penalizado.

Em alternativa aos métodos baseados na densidade do material, e como a otimização da topologia tem sofrido inúmeras evoluções, mais recentemente sugeriram métodos que gradualmente efetuam a remoção ou adição de determinadas quantidades de material do domínio do problema, denominados de *hard-kill methods*. Um método mais recente e bastante utilizado na otimização topológica é designado de *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), e foi inicialmente proposto por Xie e Steven [43]. Este método baseia-se na obtenção da estrutural ideal, ou seja, com o mínimo de peso e máxima resistência possível, a partir do processo de remoção gradual de material desnecessário presente no domínio do problema. Este tipo de conceito já tinha sido estudado anteriormente, no entanto nenhum dos autores conseguiu construir um método generalista [44][45]. A grande vantagem do ESO é que utiliza o FEM para construir o domínio do problema. Também como vantagem, os *hard-kill methods* apresentam o design final com as fronteiras estruturais bem definidas sem a presença de zonas intermedias, uma vez que o método dos elementos finitos permite definir o material explicitamente como existente ou ausente. No entanto, apesar de os métodos ESO serem bastante populares também têm as suas desvantagens, tendo sofrido algumas críticas e sido bastante debatidos [46]. Os métodos ESO não possuem a capacidade de restituir os elementos removidos através da técnica de *hard-kill*, pelo que pode acarretar falhas em certas análises. Para que estes problemas fossem ultrapassados, mais tarde foi desenvolvido uma nova versão do ESO, designado de *Bi-direcional Evolutionary Structural Optimization* (BESO), inicialmente introduzido por Querin [47] e Yang [48]. Este método discretiza o domínio do problema usando o método dos elementos finitos e iterativamente o BESO. De modo a obter uma estrutura com topologia ideal, o método introduz novos elementos em partes eficientes do domínio do problema e remove os seus elementos ineficientes. A metodologia BESO pode ser dividida em duas classes: a aproximação *hard-kill* e a *soft-kill*. Em problemas de distribuição de materiais únicos a aproximação *hard-kill* é a mais utilizada, uma vez que os elementos vazios são simplesmente removidos da estrutura. Enquanto na aproximação *soft-kill* os elementos vazios são repostos por materiais com propriedades mais fracas. Posto isto, a aproximação *soft-kill* é geralmente mais utilizada para problemas que contenham diversos materiais na sua constituição. Desde a sua introdução, o método BESO tem evoluído e sido aplicado em diversos problemas estruturais [49][50].

A maioria dos métodos dedicados à otimização topológica deparam-se com três problemas na obtenção dos resultados: dependem de uma malha de integração, observa-se a formação de um padrão em xadrez (*checkerboard*) e verifica-se o problema dos mínimos locais que impossibilita a obtenção de uma solução de otimização topológica igual no caso de se optar por uma geometria inicial diferente para analisar o mesmo problema [51]. Entretanto, em 2007, Huang e Xie [52], propuseram uma malha de filtragem para o método *hard-kill* BESO, malha esta independente que usa as variáveis nodais de modo a determinar a adição de elementos e exclusão de detalhes estruturais desnecessários a baixo dos valores de comprimento da escala do dimensionamento. Esta nova abordagem elimina o surgimento dos padrões em xadrez

e a dependência da malha para a obtenção da solução. No entanto esta malha de filtragem não é diretamente aplicável ao método *soft-kill* BESO, uma vez que quando aplicada a malha de filtragem, a presença de materiais diferentes no domínio do problema, afeta os resultados obtidos. Ao invés de os elementos rodeados por material que apresentam maior rigidez ou menor rigidez alterarem a sua composição de acordo com a sua vizinhança, estes elementos irão modificar a sua composição contrariamente àquela que é apresentada pelos elementos que os rodeiam. Apesar de se considerar que o método *soft-kill* BESO apenas é aplicável a problemas com distribuição de material diferente, Ghabraie [53] propôs um melhoramento deste método, sendo agora possível aplica-lo a problemas com distribuição de material único ou multifásico. Ao invés do uso do fator de penalidade, propôs uma nova malha de filtragem de modo a eliminar anomalias numéricas provenientes de problemas de distribuição de material. O conceito proposto é denominado de *gradual* BESO, e tem a capacidade de determinar a rigidez dos materiais gradualmente ao longo a análise, aumentando assim a qualidade dos resultados obtidos através do método *soft-kill* BESO. Nesse artigo está demonstrado que este novo conceito é capaz de lidar com problemas que possuem mais que dois tipos de materiais diferentes e que os resultados obtidos não variam de acordo com a geometria/forma inicial. Ghabraie indica também que ao contrário do método *hard-kill* BESO, o método proposto é capaz de fazer uso dos suportes em excesso e recupera as ligações quebradas.

Aplicações

- 3.1 Exemplo numérico 1
- 3.2 Exemplo numérico 2
- 3.3 Exemplo numérico 3 (caso real)

3 Aplicações

Neste capítulo vão ser apresentados três exemplos numéricos com o objetivo de validar o processo de otimização estrutural implementado no software FEMAS. Os dois primeiros exemplos numéricos são de geometria mais simples permitindo observar a evolução da otimização da topologia, enquanto que o terceiro exemplo numérico representa uma ferramenta associada a um caso real. Este tipo de análise permitirá validar o processo de otimização estrutural através dos métodos sem malha.

3.1 Exemplo numérico 1

O seguinte exemplo numérico representa uma geometria definida em "L", com uma condição de fronteira de encastramento no bordo de cima, e uma carga vertical distribuída aplicada em 4 pontos nodais de 1000 N no bordo direito, Figura 3.1.

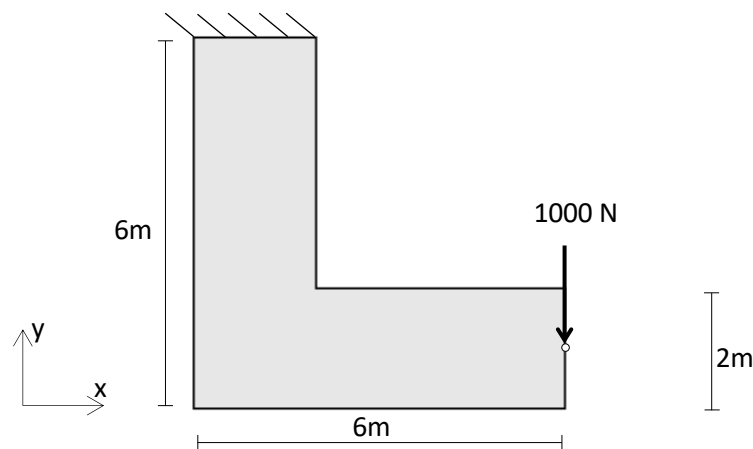


Figura 3.1 – Exemplo numérico em forma de "L" 2D

Tabela 1 - Propriedades mecânicas da geometria "L"

Propriedades mecânicas	
Material	Aço de construção (S235)
Tensão de cedência (σ)	235 MPa
Módulo de Young (E)	210 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3

3.1.1 Malha

Análise importante, antes de se prosseguir para a obtenção de resultados, é o estudo da influência da quantidade de elementos e nós presentes no modelo, na qualidade dos resultados bem como no tempo decorrido para a sua obtenção.

Para a construção do exemplo numérico foi utilizado o software - *Finite Element Modeling And Postprocessing (FEMAP)* – onde é definida a geometria e a malha, sendo posteriormente exportado para o software de simulação numérica – *Finite Element and Meshless Methods Analysis Software (FEMAS)*, disponível em “cmech.webs.com” – de modo a efetuar a otimização estrutural.

No FEMAP é possível selecionar dois tipos de malha; triangular ou quadrangular.

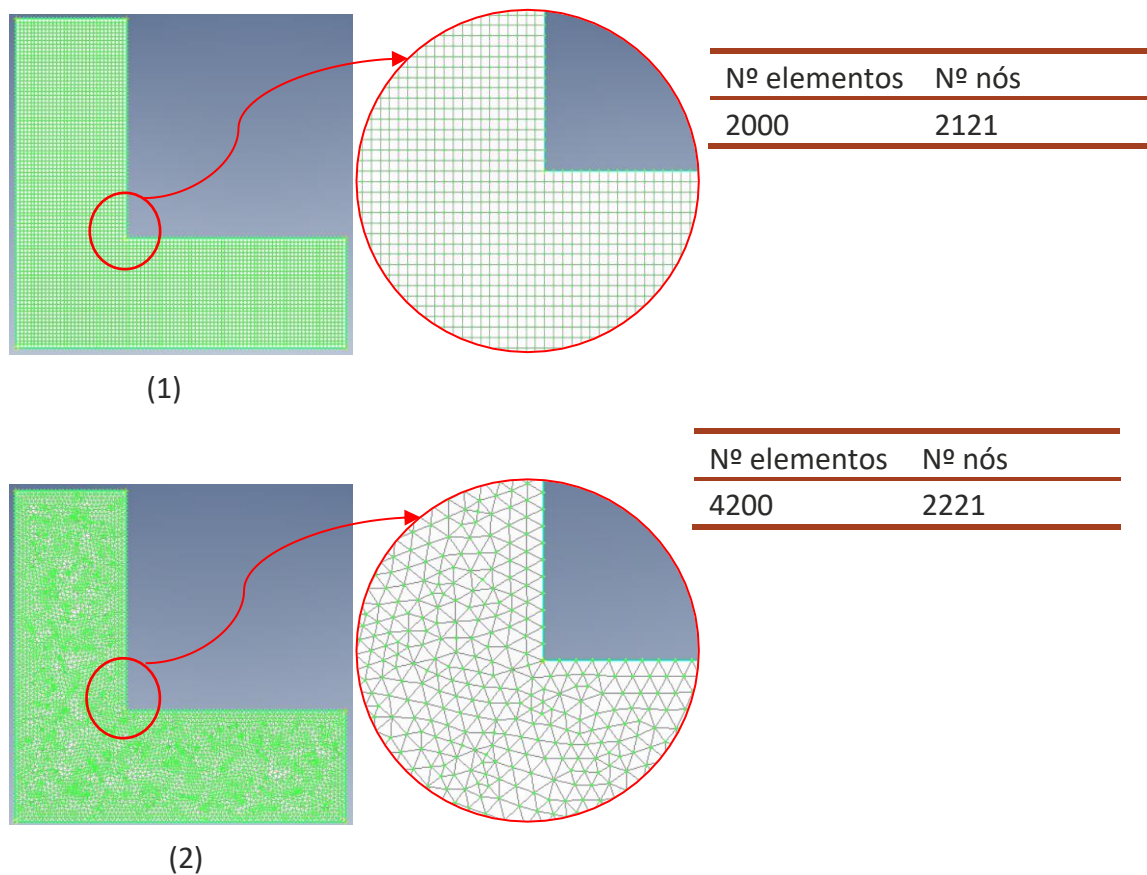


Figura 3.2 - Modelos com malha: (1) Malha quadrangular; (2) Malha triangular

É possível observar que de entre os dois tipos de malha, a quadrangular apresenta uma distribuição uniforme ao longo da geometria sem qualquer tipo de distorção dos elementos. É de notar também um aumento significativo do número de elementos quando é usada a malha triangular, levando assim a um maior tempo de processamento. Apesar da malha quadrangular apresentar melhores formas elementares, apenas poderá ser utilizada para geometrias bem definidas, sem a presença de qualquer imperfeição geométrica, como é o caso de furos, entalhes e curvaturas.

Assim, optou-se por regularizar a malha triangular, recorrendo-se ao FEMAP para efetuar três divisões devidamente selecionadas na geometria da peça. Estas divisões permitiram criar três blocos de malha independente, sendo possível selecionar o número de divisões em cada face.

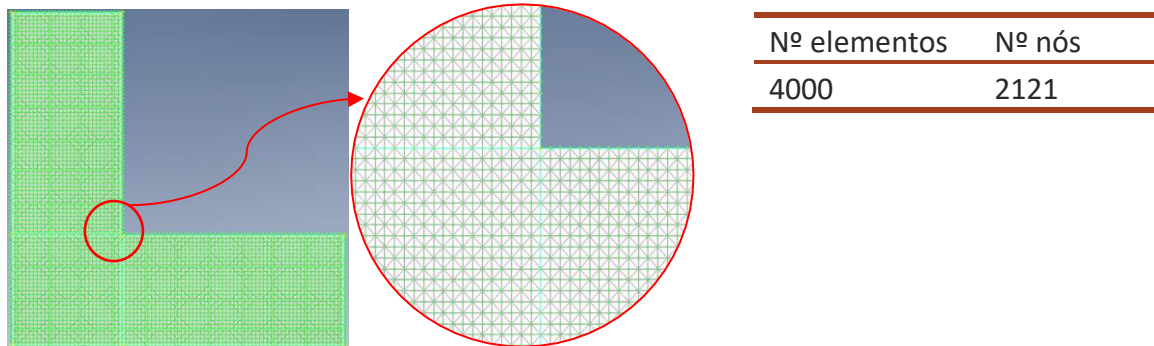


Figura 3.3 - Modelo com malha triangular otimizada

Observando a malha gerada, para a opção regular, esta apresenta elementos triangulares uniformemente distribuídos ao longo de toda a geometria. Em comparação com a malha triangular anteriormente gerada, é possível observar a diminuição de aproximadamente 5% do número de nós e elementos presentes na geometria.

É possível concluir que a malha quadrangular e triangular regular irão produzir resultados mais uniformes, visto que foi produzida uma malha sem qualquer distorção, enquanto que por outro lado, a utilização da malha triangular inicial, leva à obtenção de resultados menos precisos e de difícil compreensão a nível visual no que se refere à otimização da topologia.

Para determinar o grau de refinamento necessário da malha foi efetuado um estudo com elementos quadrangulares onde é possível comparar o tempo de processamento e a qualidade dos resultados obtidos. O estudo consiste em aumentar o número de divisões por aresta, que conseqüentemente irá aumentar o número de elementos que discretizam a geometria.

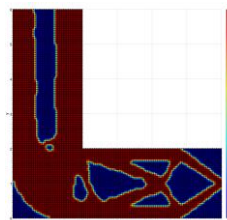
Tabela 2 - Refinamento da malha

Nº de divisões	Elementos	Nós	Resultado iteração 8
20x40x60	2000	2121	
30x60x90	4500	4681	

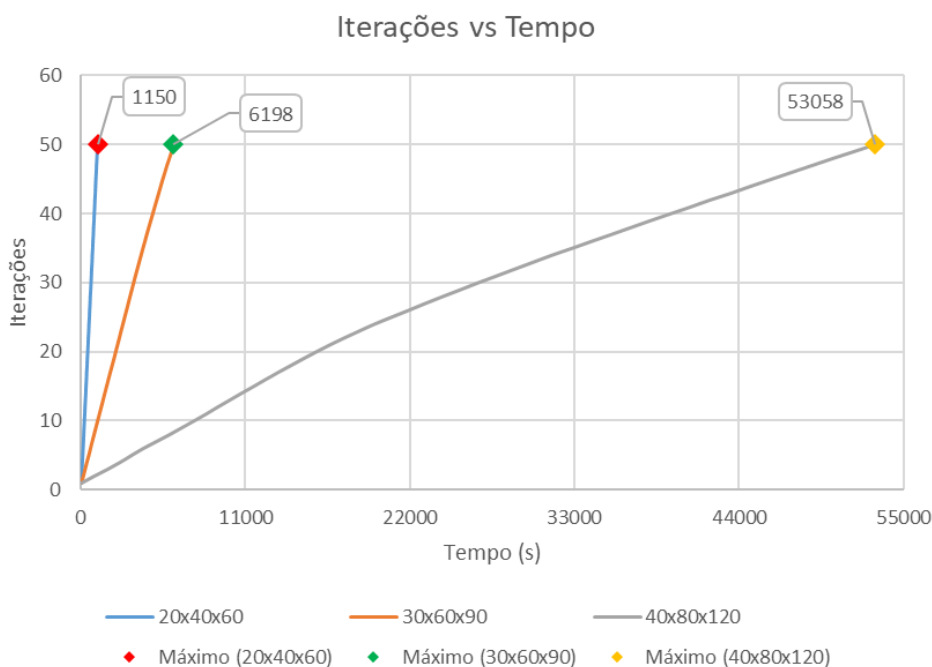
40x80x120

8000

8241



De acordo com os resultados obtidos, presentes na Tabela 2, para a iteração número 8 é de verificar que não existe uma variação acentuada no modo como a otimização da topologia se processa. Nas três simulações é observável a eliminação de massa em zonas específicas semelhantes, como é o caso da zona próxima do encastramento, na zona de aplicação da força e na aresta onde a otimização opta por efetuar uma curvatura, eliminando assim a aresta viva presente. Outra análise relevante está relacionada com o tempo de computação necessário para se obter um número específico de iterações.



De acordo com Gráfico 3.1, é possível concluir que para obter 50 iterações, quando utilizada uma malha com 4500 elementos, esta leva cerca de 5 vezes mais tempo do que quando utilizada uma malha com 2000 elementos. O mesmo se pode concluir que para uma malha de 8000 elementos, esta leva cerca de 46 vezes mais tempo do que quando utilizada uma malha com 2000 elementos.

O tempo requerido nas simulações irá sempre depender do poder computacional, no entanto, como este é uma constante ao longo de todo o processo, optou-se por utilizar o tipo de malha que permite obter resultados semelhantes no menor tempo possível.

3.1.2 Otimização

Definida a geometria e a malha procede-se à exportação do modelo para o FEMAS, onde é possível definir as propriedades do material e as condições fronteira naturais e essenciais.

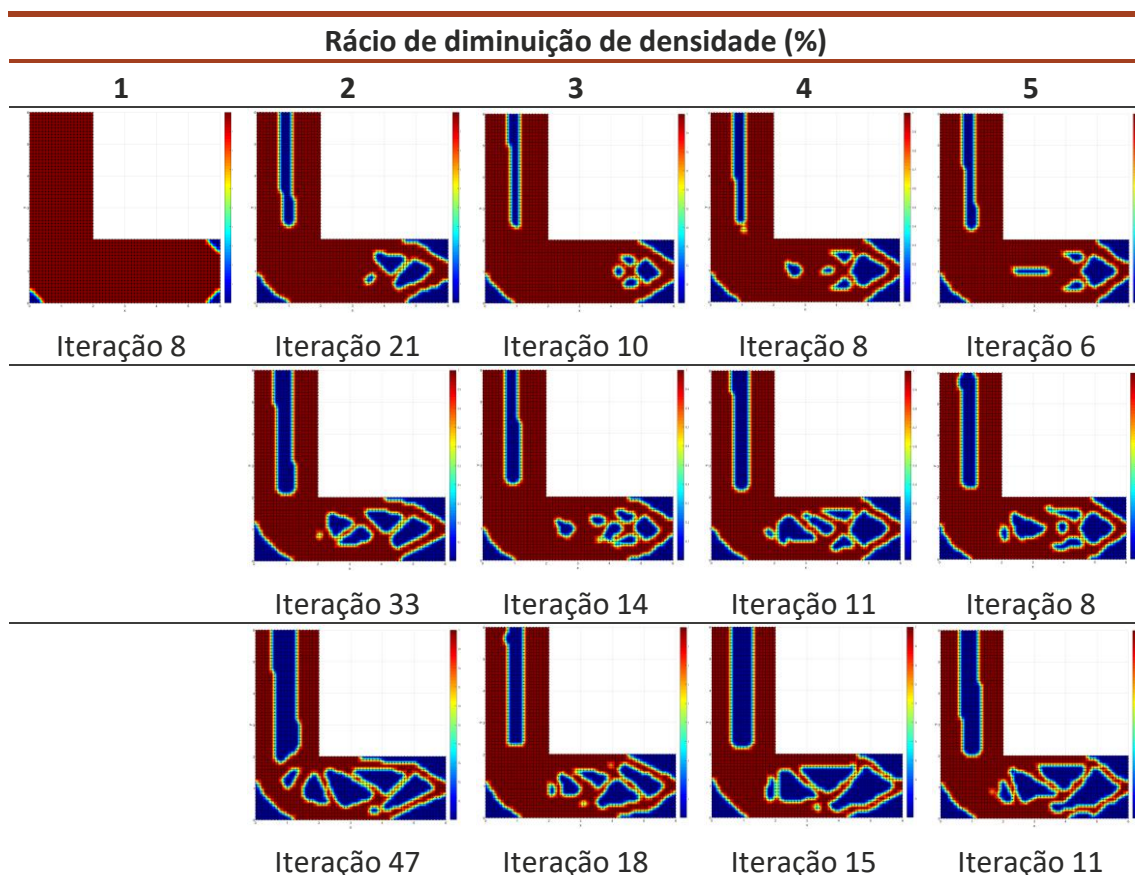
3.1.2.1 FEM

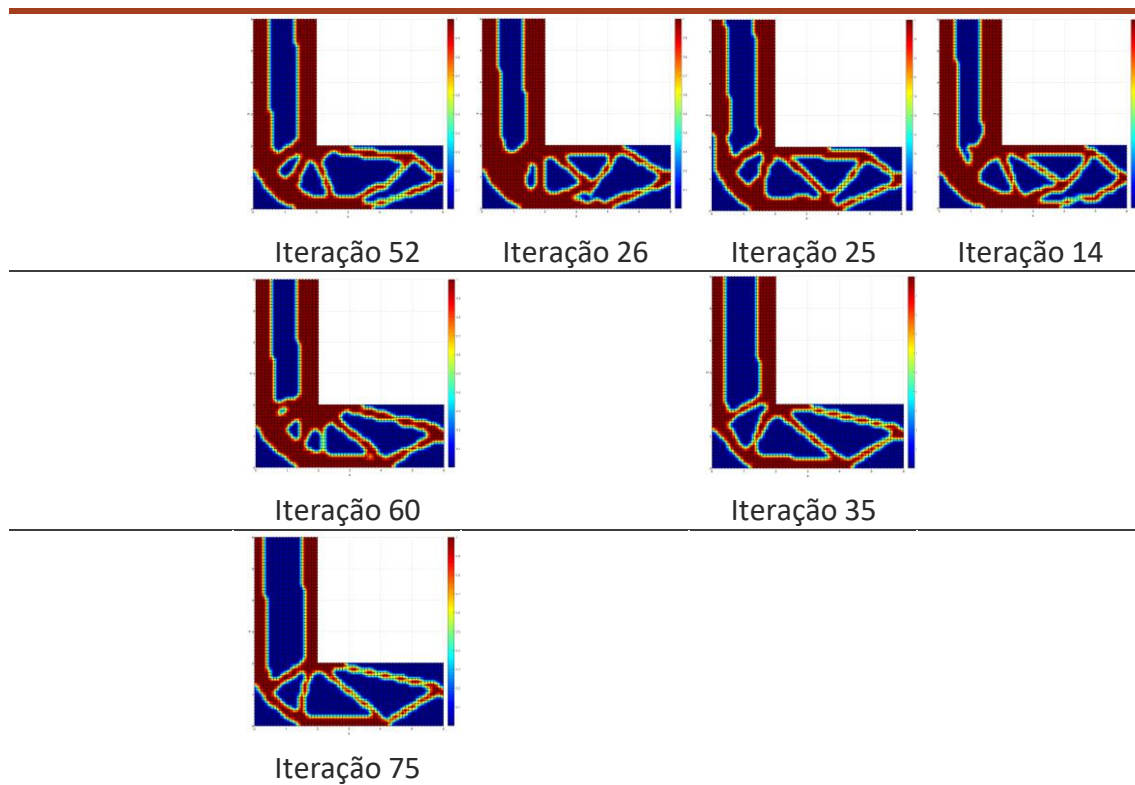
Para efetuar a otimização da topologia através do método dos elementos finitos procede-se ao pré-processamento e à análise linear elasto-estática. A otimização estrutural é realizada com base no método *Hard-kill* e utilizando como critério de otimização a *Effective Von Mises Stress*.

Definidos os principais parâmetros procede-se à otimização que depende de dois fatores importantes; o rácio de aumento de densidade e o rácio de diminuição de densidade. Como o objetivo é obter uma estrutura otimizada, onde a densidade é a principal propriedade física do material que se pretende diminuir sem comprometer a rigidez estrutural, o rácio de aumento de densidade é assumido como nulo, enquanto que o rácio de diminuição de densidade vai variar entre 1 e 5 %.

Para verificar que os resultados dependem da distribuição e do tipo de malha, foram efetuados três testes; com a malha quadrangular, triangular e triangular otimizada.

Tabela 3 – Resultados da otimização estrutural para a geometria “L”, elementos quadrangulares (FEM)





Observando os resultados obtidos, para a otimização estrutural com elementos quadrangulares, verifica-se que o processo de otimização opta por eliminar inicialmente material em zonas bem definidas, como é o caso do material presente na proximidade do encastramento e na proximidade da aplicação da força distribuída. Ao longo da simulação a otimização vai gerando treliças que permitem reduzir a densidade do material sem comprometer a rigidez estrutural. É de salientar que para um rácio de diminuição de 1% a otimização não avança mais do que o apresentado, principalmente por ser um rácio muito baixo em que requer um elevado número de iterações, tornando-se inviável para o programa continuar.

Através dos resultados obtidos para a otimização estrutural variando o rácio de diminuição de densidade, é possível traçar gráficos que possibilitam visualizar a evolução da otimização ao longo do tempo bem como a diminuição da densidade. Para a análise dos gráficos foi definida como 150 a última iteração, para que a evolução da otimização e o tempo decorrido seja perceptível e de fácil comparação.

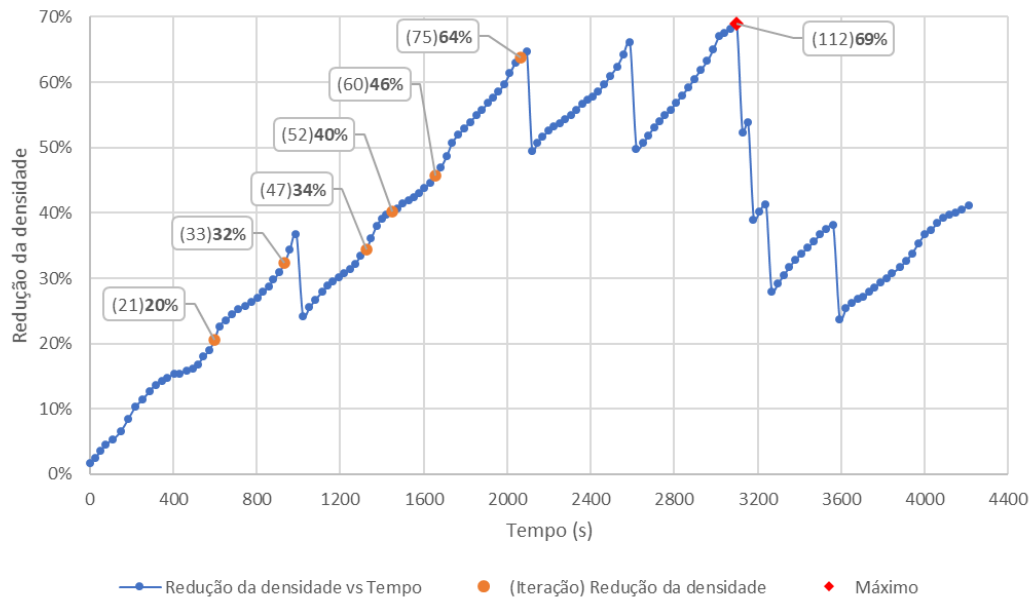


Gráfico 3.2 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 2% (elementos quadrangulares)

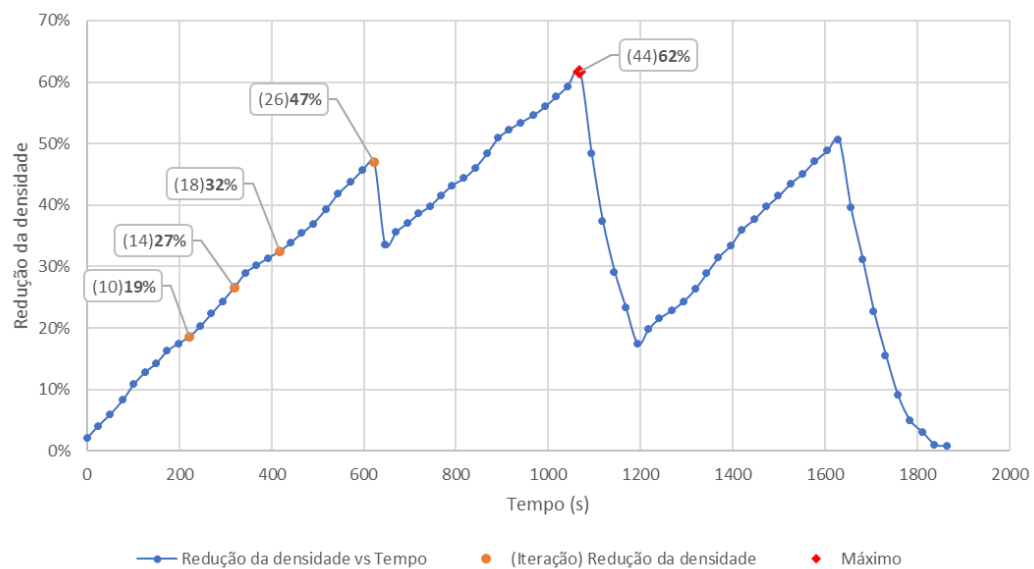


Gráfico 3.3 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 3% (elementos quadrangulares)

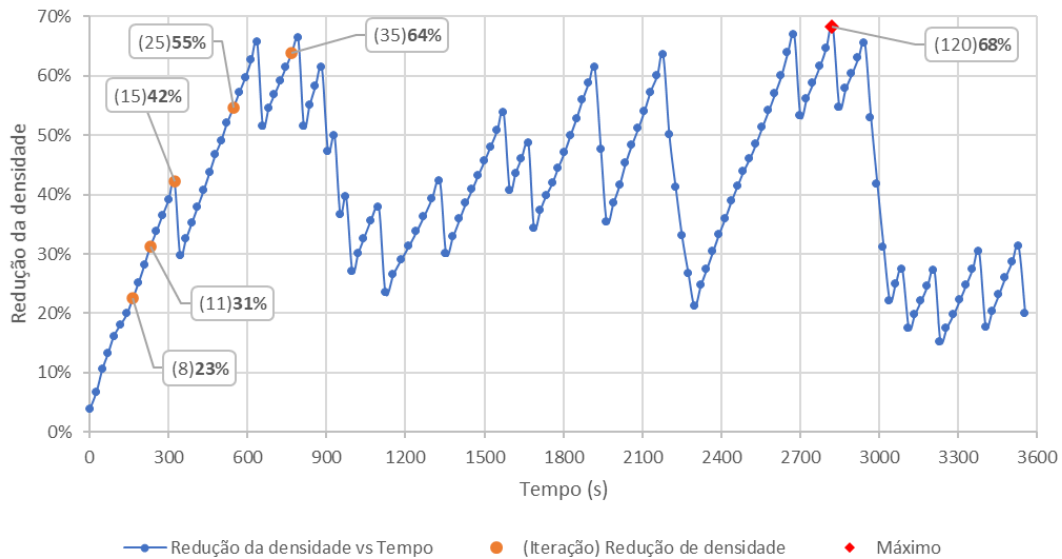


Gráfico 3.4 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 4% (elementos quadrangulares)

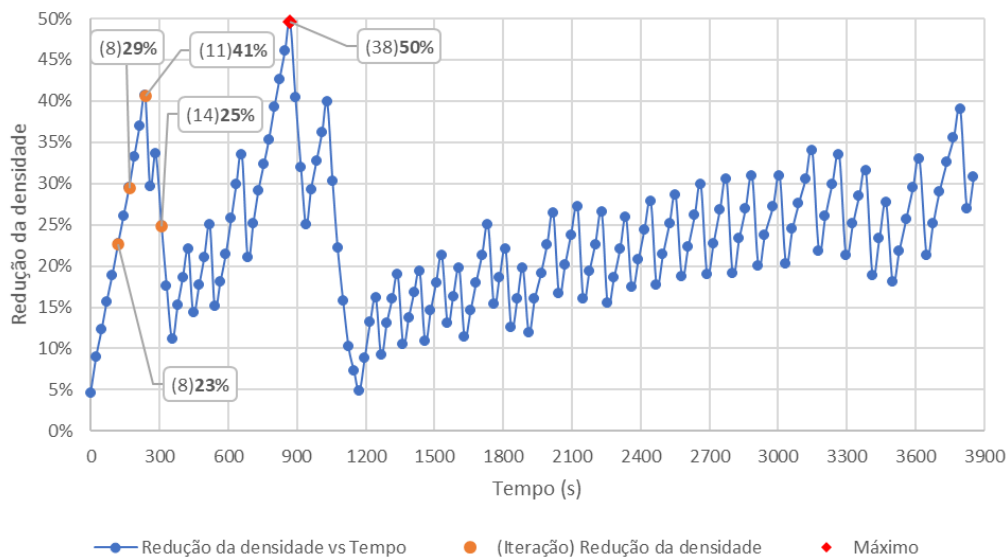


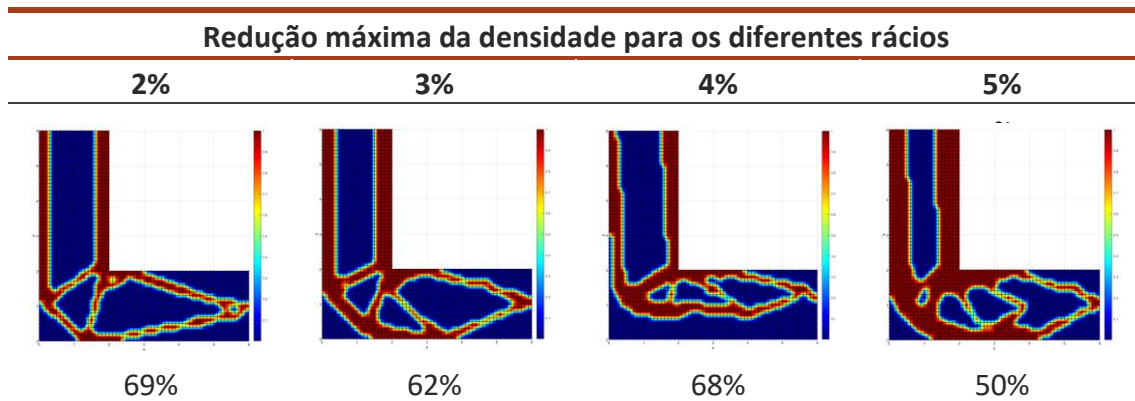
Gráfico 3.5 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 5% (elementos quadrangulares)

Dos gráficos obtidos foram destacadas as iterações e a diminuição da densidade com os melhores resultados em termos de otimização da topologia. É de notar que nos gráficos existem máximos associados à iteração com a maior diminuição de densidade, no entanto, não se trata de uma solução ótima, uma vez que existe uma diminuição elevada comprometendo a rigidez e os pontos de fixação da peça.

Através da análise dos gráficos de variação do rácio de diminuição de densidade verifica-se que para um rácio de 2% e 4% (Gráfico 3.2 e Gráfico 3.4), existe maior diminuição da densidade total de material. Para um rácio de 3% (Gráfico 3.3), o processo de otimização não progride mais do que o esperado principalmente por não encontrar nós à sua volta que possam ser otimizados, levando assim a que a solução termine. Para um rácio de

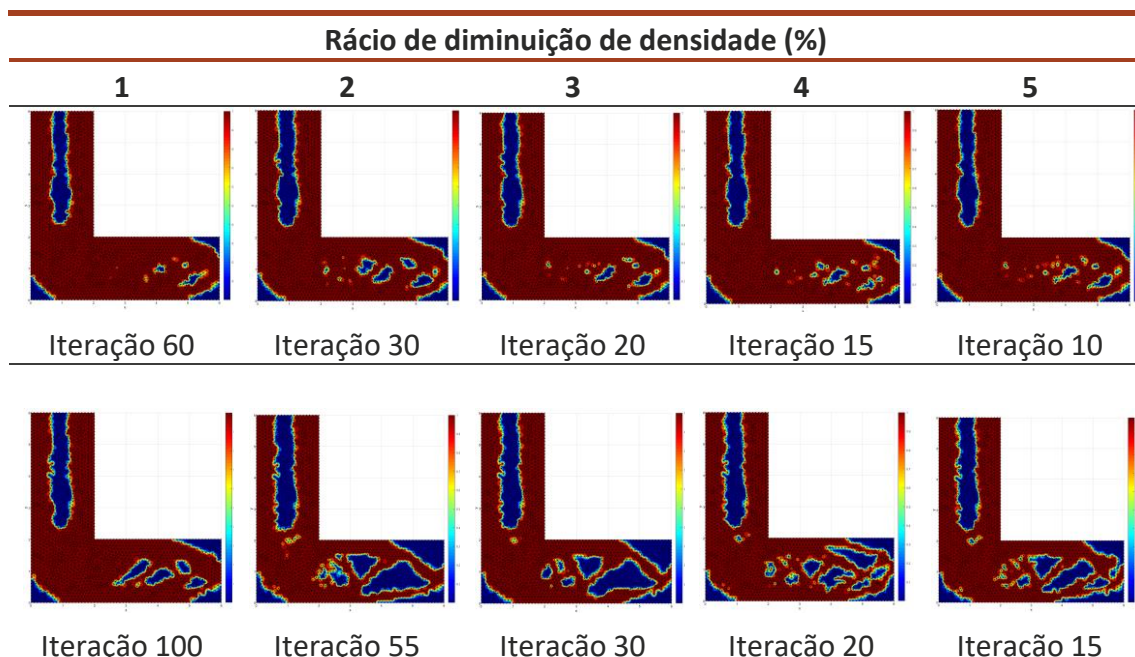
5% (Gráfico 3.5), é visível que a partir dos 1200 segundos, o processo mantém-se estável, não existindo uma diminuição significativa da densidade do material.

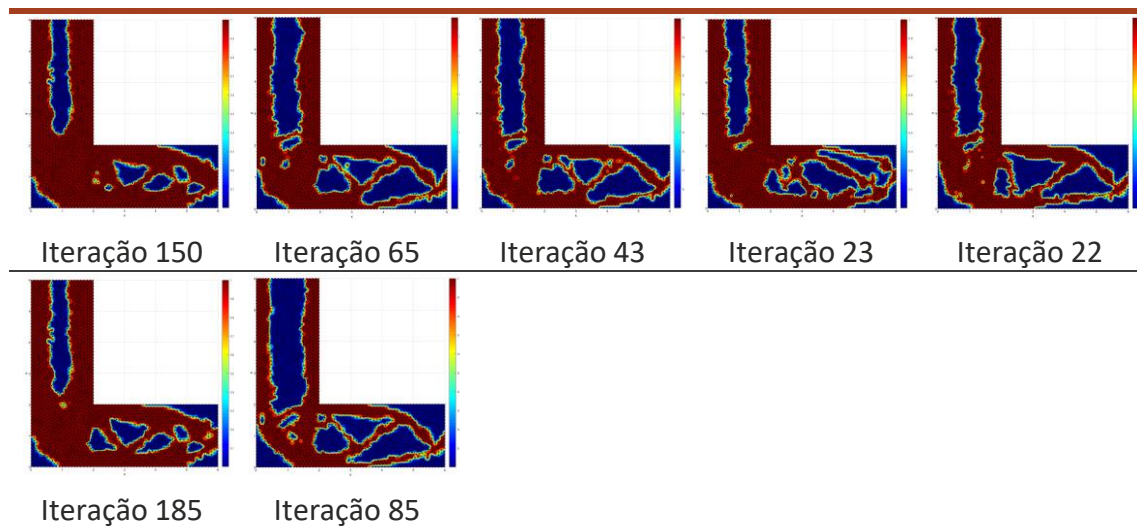
Tabela 4 - Redução máxima da densidade para otimização com elementos quadrangulares



Na Tabela 4 estão representadas as estruturas otimizadas com maior redução da densidade para um determinado rácio de diminuição. De entre as quatro figuras é possível verificar que as geometrias com um rácio de 2% e 3% obtiveram melhores resultados, enquanto que as geometrias com um rácio de 4% e 5% obtiveram resultados que comprometem a rigidez e integridade da estrutura, não sendo assim, consideradas estruturas otimizadas topologicamente. Assim, para identificar se uma geometria se encontra otimizada, não basta apenas que esta tenha um valor reduzido de densidade, é necessário recorrer à identificação visual de elementos que fornecem rigidez à estrutura, não comprometendo a sua integridade.

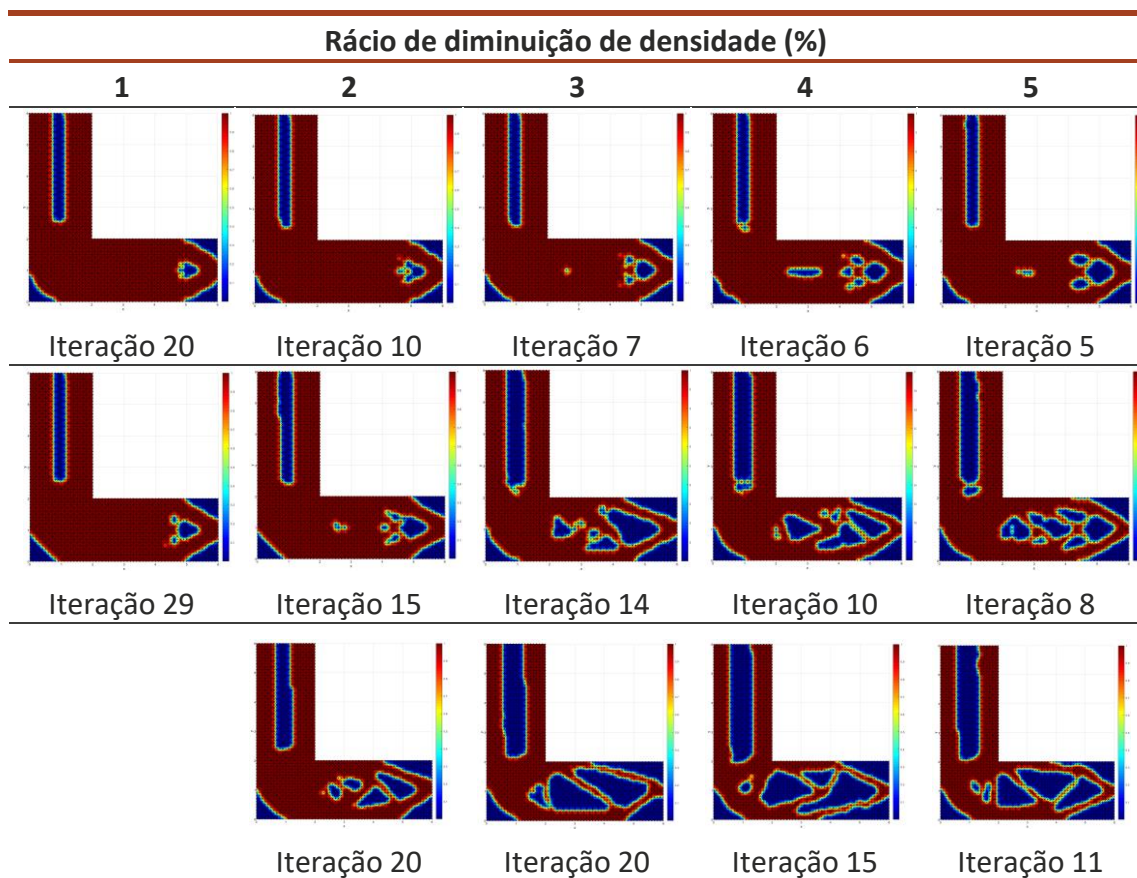
Tabela 5 - Resultados da otimização estrutural para a geometria "L", elementos triangulares (FEM)

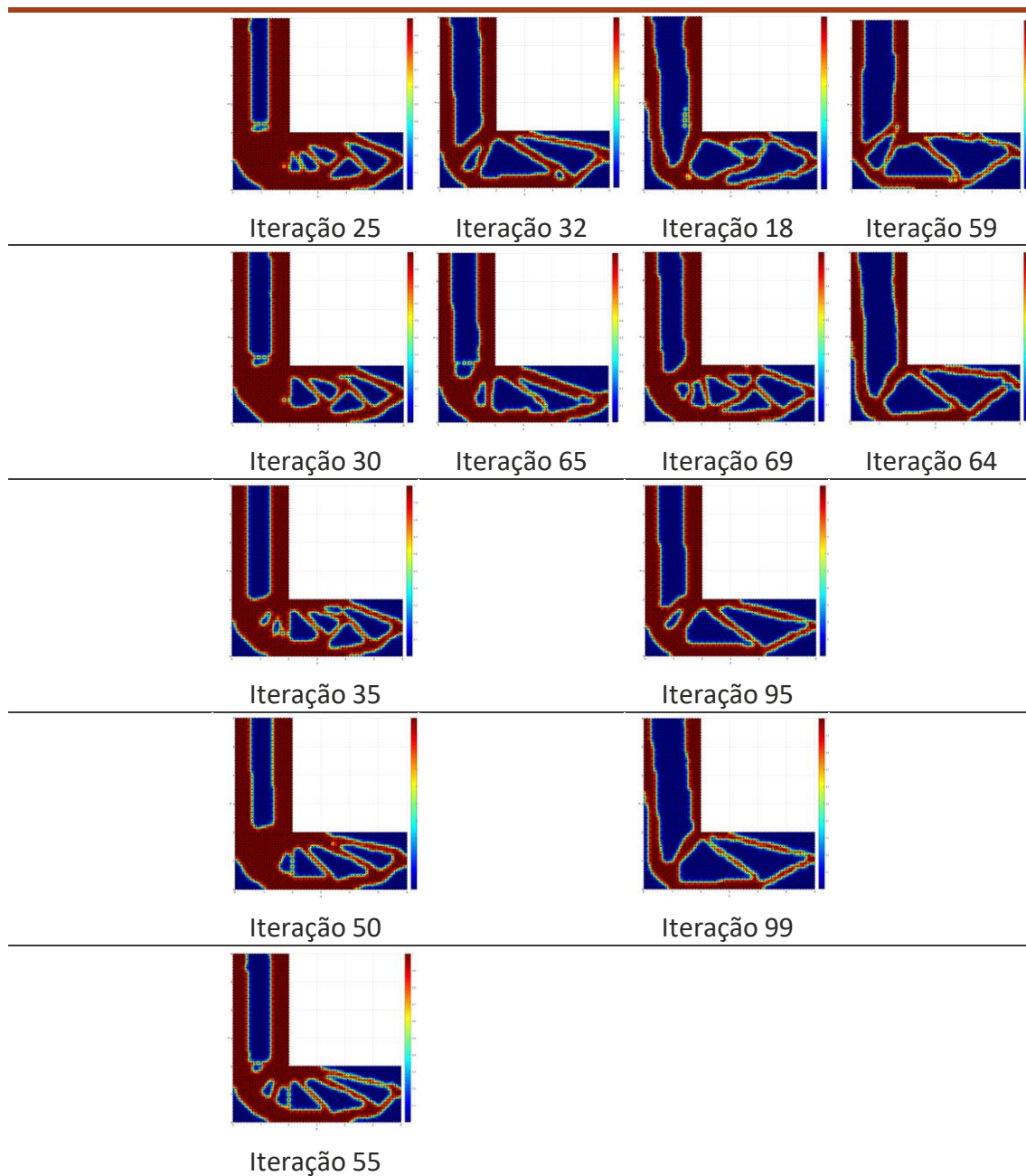




De acordo com os resultados obtidos para a otimização estrutural com elementos triangulares, é claramente visível que a malha triangular não permite obter uma estrutura devidamente otimizada. A distorção dos resultados é bastante acentuada, o que impossibilita qualquer tipo de conclusão. Deste modo, a otimização estrutural com recurso à malha triangular inicial, não se apresenta como uma solução para este tipo de problema.

Tabela 6 - Resultados da otimização estrutural para a geometria "L", elementos triangulares otimizados (FEM)





Observando os resultados obtidos para a otimização estrutural, com elementos triangulares otimizados, é possível observar, tal como nos elementos quadrangulares, zonas bem definidas onde a presença de material é desnecessária. É de salientar, novamente, que para um rácio de 1% a otimização não avança mais do que o apresentado, principalmente por ser um rácio muito baixo em que requer um elevado número de iterações, tornando-se inviável para o programa continuar.

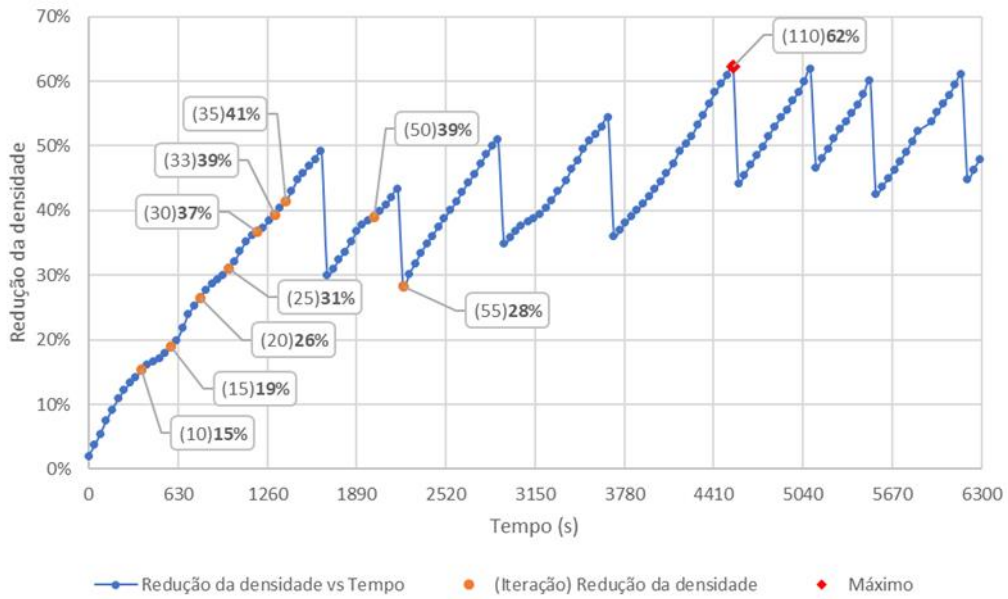


Gráfico 3.6 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 2% (elementos triangulares otimizados)

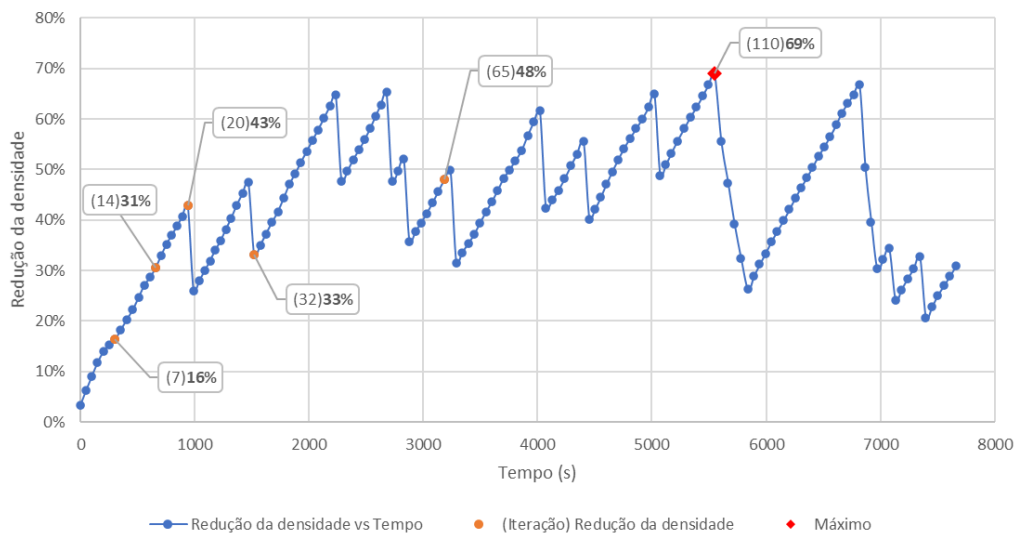


Gráfico 3.7 - Redução da densidade vs Tempo para um rácio de diminuição de densidade de 3% (elementos triangulares otimizados)

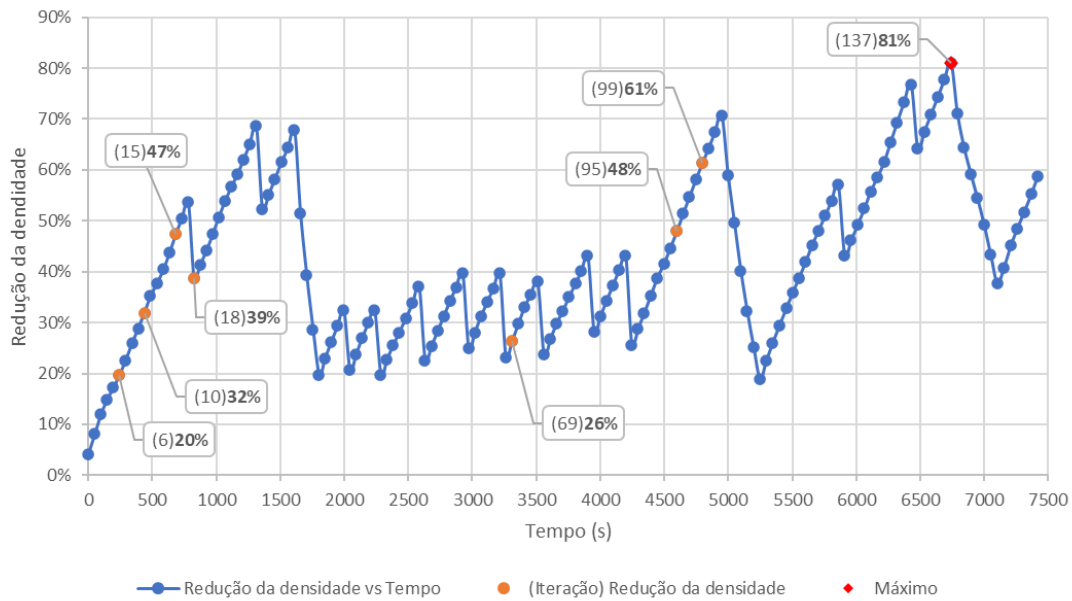


Gráfico 3.8 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 4% (elementos triangulares otimizados)

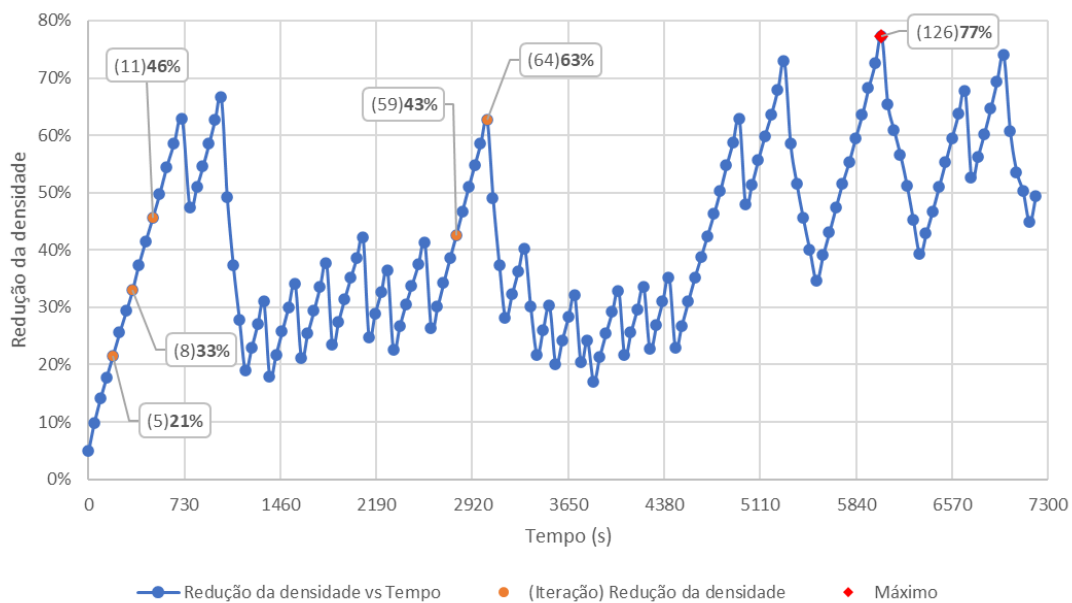


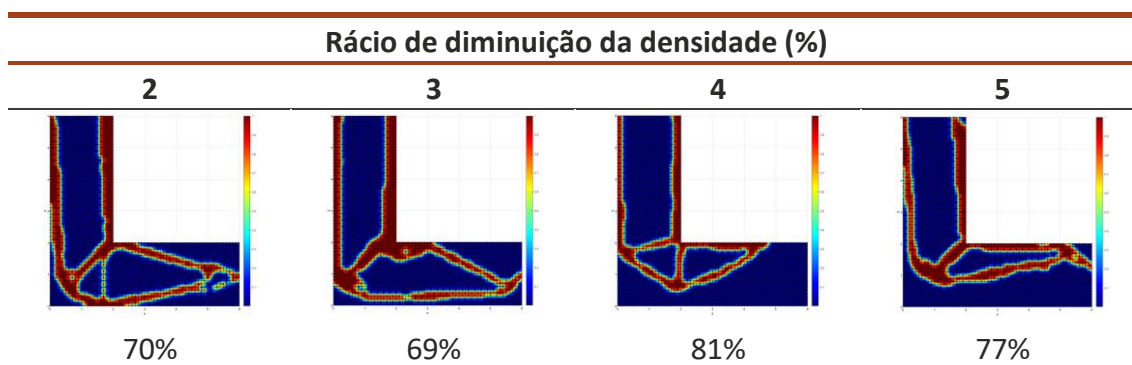
Gráfico 3.9 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 5% (elementos triangulares otimizados)

De acordo com os resultados obtidos, nas simulações realizadas, é possível observar que o aumento do rácio de diminuição de densidade diminui o tempo de processamento até à obtenção de uma estrutura otimizada. No entanto, com o aumento deste rácio, é possível observar que a otimização se torna cada vez mais grosseira, eliminando assim material em excesso. Sendo que este rácio deverá ser ajustado de acordo com a quantidade de elementos nodais presentes na geometria, pelo que dependerá sempre da quantidade nodal presente no modelo.

Observando os resultados obtidos é possível verificar que as melhores geometrias otimizadas surgem com a utilização de um rácio de diminuição de densidade de 2%, 3% e 4%.

Em todas as simulações verifica-se que existem zonas na geometria onde a presença de material não é necessária, sendo o caso, como anteriormente referido, a zona próxima do encastramento e a zona próxima da aplicação da força distribuída.

Tabela 7 - Redução máxima da densidade para otimização com elementos triangulares otimizados



Na Tabela 7 estão representadas as estruturas otimizadas com maior redução de densidade para um determinado rácio de diminuição. De entre as quatro figuras é possível verificar que as geometrias com um rácio de 2% e 3% obtiveram melhores resultados, enquanto que as geometrias com um rácio de 4% e 5% obtiveram resultados que comprometem a rigidez e integridade da estrutura, não sendo assim, consideradas estruturas otimizadas topologicamente. É visível, também, que a aplicação da força foi deslocada nos rácios de 3%, 4% e 5%. Posto isto, para identificar se uma geometria se encontra otimizada, tal como referido anteriormente, não basta apenas que esta apresente um valor reduzido de densidade, é necessário recorrer à identificação visual de elementos que fornecem rigidez à estrutura, não comprometendo a sua integridade nem as condições estipuladas inicialmente.

É possível concluir que a malha quadrangular e triangular regular apresentam melhores resultados. De entre estas duas, a malha com elementos quadrangulares apresenta menor número de elementos na sua geometria e menor tempo de simulação do que a malha triangular regular. No entanto é necessário estudar o comportamento da malha quadrangular numa geometria não linear, ou seja, com a presença de elementos circulares na sua geometria.

3.1.2.2 RPIM

Para obter uma geometria otimizada através do método RPIM, procede-se, de igual modo, à construção e geração da malha, tal como efetuado anteriormente para o método dos elementos finitos, recorrendo-se ao software FEMAP.

Depois de definida a geometria e a malha, procede-se à inserção dos parâmetros essenciais ao processamento, como é o caso dos nós de influência, as constantes c e p , e a base polinomial. Os parâmetros apresentados já se encontram definidos pelo software FEMAS como valores otimizados para a geometria.

Tabela 8 - Parâmetros RPIM

RPIM	
2D	3D
Nós de influência: 16	Nós de influência: 16
c : 1.42	c : 1.42
p : 1.03	p : 1.03
Base Polinomial: Linear	Base Polinomial: Linear
Pontos de integração: 1 por triângulo	Pontos de integração: 1 por tetraedro

Definidos os parâmetros iniciais do processamento do método RPIM (Tabela 8) é possível efetuar as simulações para obter a otimização da topologia. Fazendo-se variar o rácio de diminuição de densidade em 2%, 3% e 4%, uma vez que apresentaram melhores resultados na metodologia anterior.

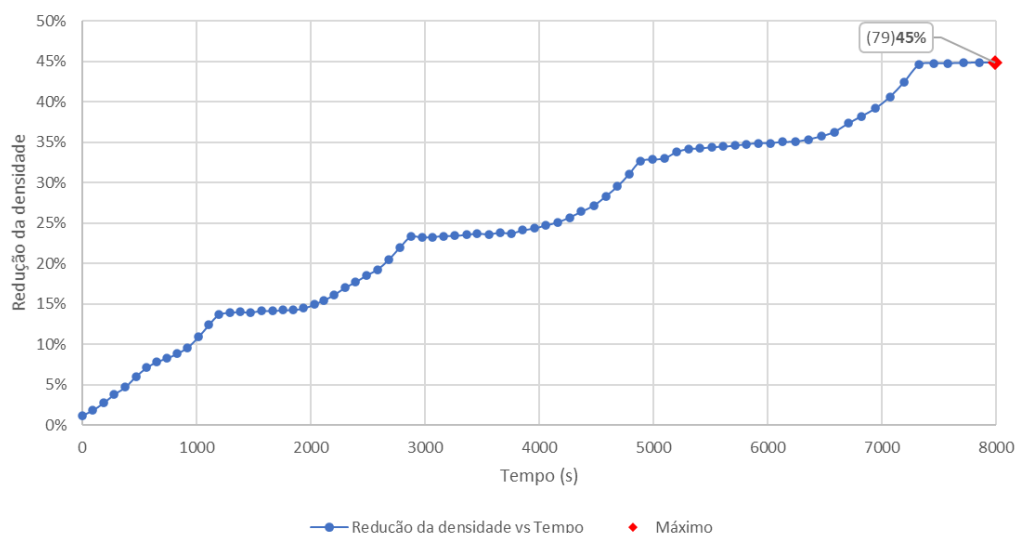


Gráfico 3.10 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 2% (RPIM)

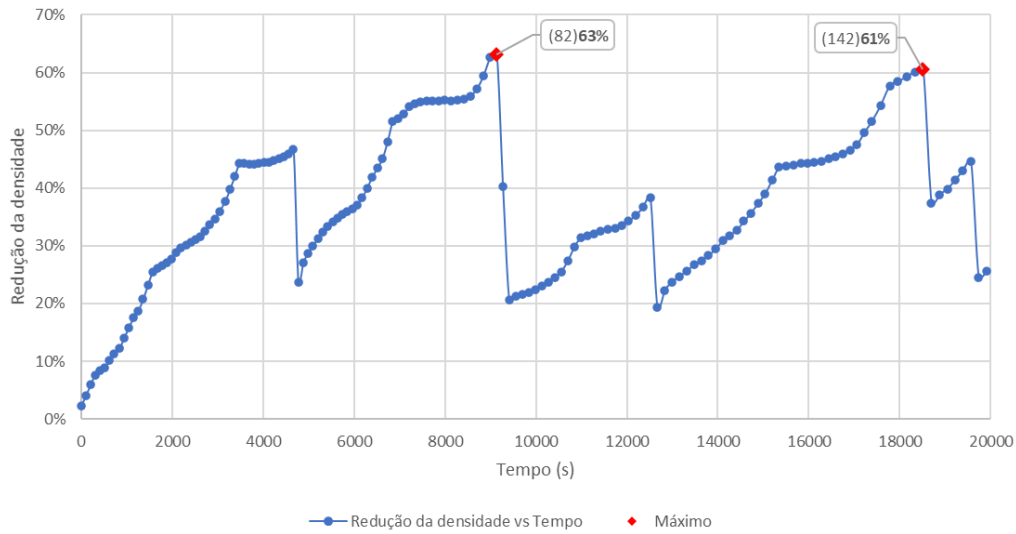


Gráfico 3.11 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 3% (RPIM)

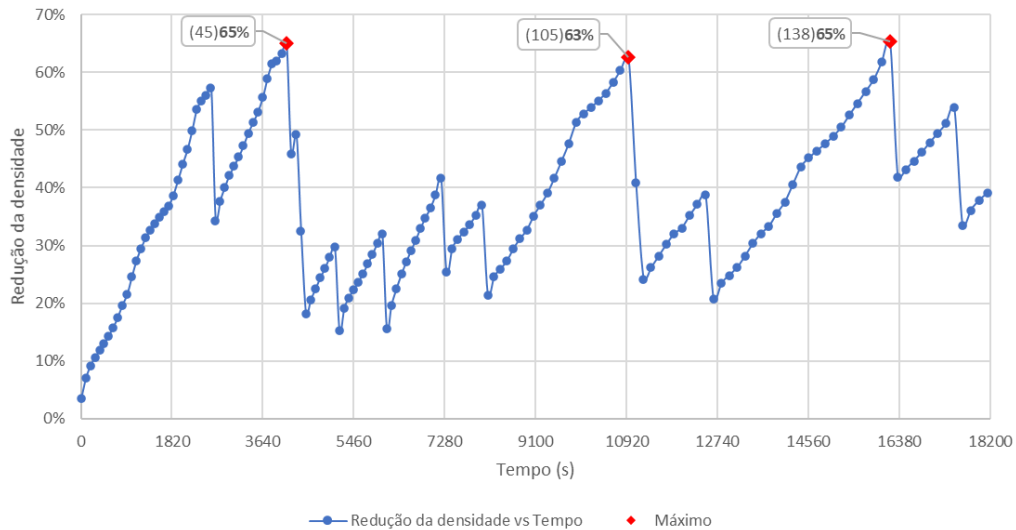
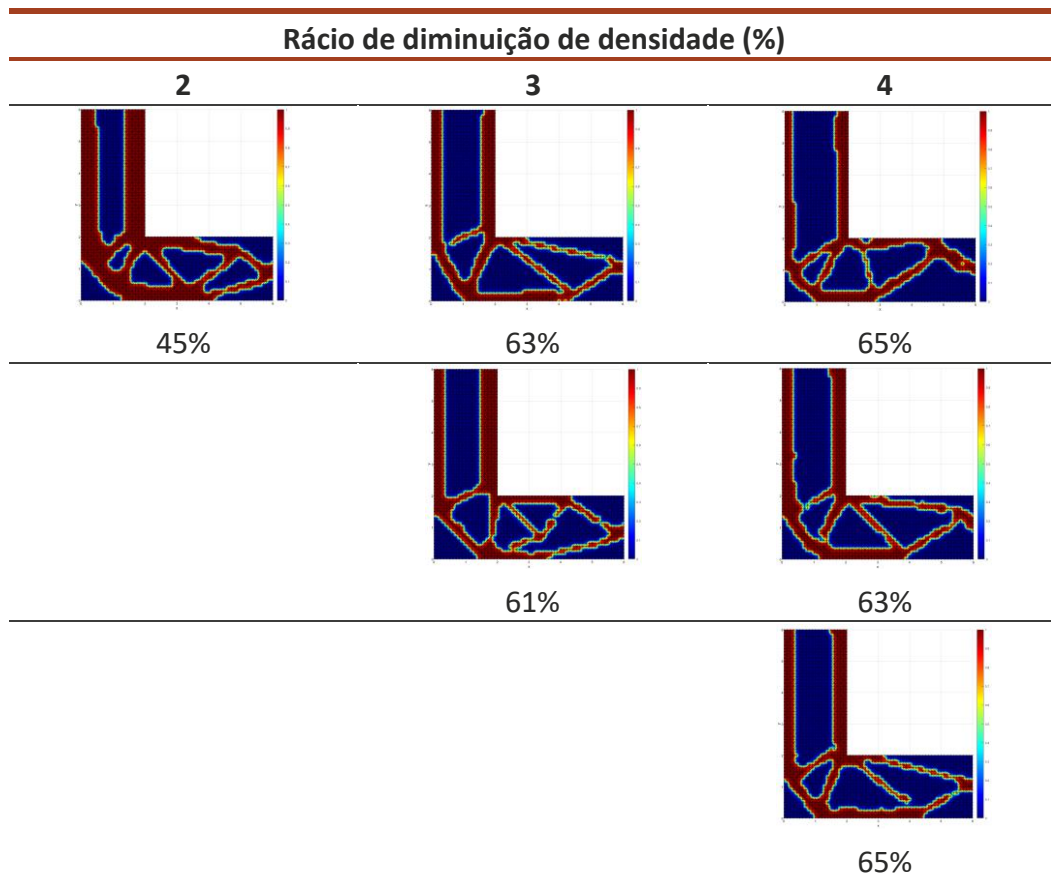


Gráfico 3.12 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 4% (RPIM)

De acordo com os resultados obtidos, para a otimização estrutural com a formulação RPIM, verifica-se que para um rácio de 2% (Gráfico 3.10) a solução não avança para além da iteração número 80, principalmente por se tratar de um rácio baixo para os parâmetros selecionados na metodologia RPIM. Através dos gráficos é possível obter os pontos máximos que representam as geometrias com maior redução de densidade.

Tabela 9 - Geometrias otimizadas com maior redução de densidade para o método RPIM



De entre os resultados obtidos, foram selecionados os que apresentam maior redução de densidade, apresentados na Tabela 9. Em todos os casos a existência de treliças é evidente, uma vez que confere rigidez à estrutura e possibilita a redução de material. Observando as geometrias otimizadas, verifica-se que o processo de otimização opta por reduzir a presença de material em zonas bem definidas, como é o caso da proximidade do encastramento e na proximidade da aplicação da força distribuída.

3.1.2.3 NNRPIM

Tal como nos métodos anteriores, para obter uma geometria otimizada através do método NNRPIM, procede-se, de igual modo, à construção e geração da malha através do software FEMAP. Definida a geometria e a malha, procede-se à inserção dos parâmetros essenciais ao processamento, como é o caso das células de influência, as constantes c e p , e a base polinomial. Os parâmetros apresentados já se encontram definidos pelo software FEMAS como os valores otimizados para a geometria.

Tabela 10 - Parâmetros NNRPIM

NNRPIM	
2D	3D
Células de influência: Segunda ordem	Células de influência: Segunda ordem
c : 0.0001	c : 0.0001
p : 0.9999	p : 0.9999
Base Polinomial: Constante	Base Polinomial: Constante
Pontos de integração: 1 por sub-célula	Pontos de integração: 1 por sub-célula

Definidos os parâmetros iniciais do processamento do método NNRPIM é possível efetuar as simulações para obter a otimização da topologia. Fazendo-se variar o rácio de diminuição de densidade em 2%, 3% e 4%. Através dos resultados obtidos é possível traçar gráficos que possibilitam visualizar a evolução da otimização ao longo do tempo, bem como as reduções máximas de densidade.

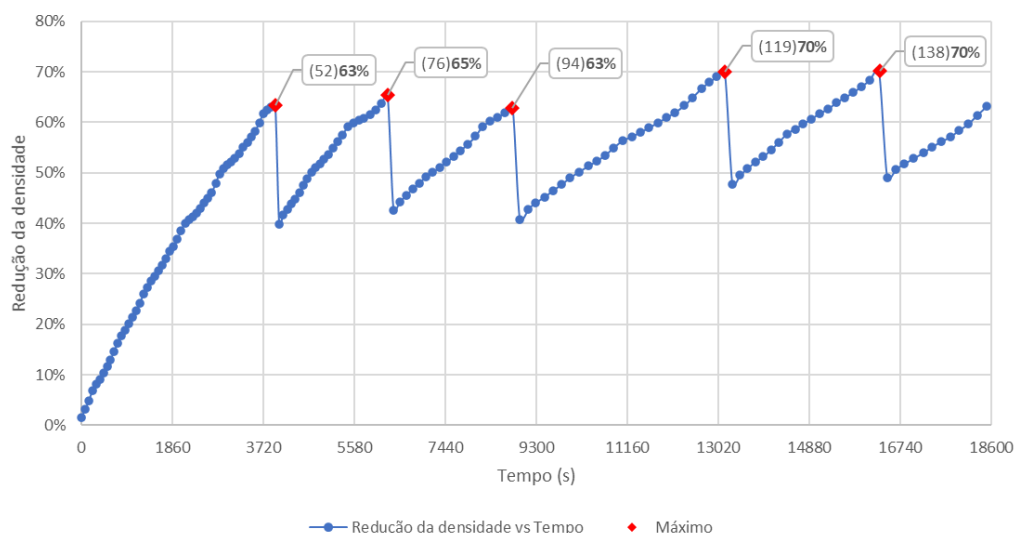


Gráfico 3.13 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 2% (NNRPIM)

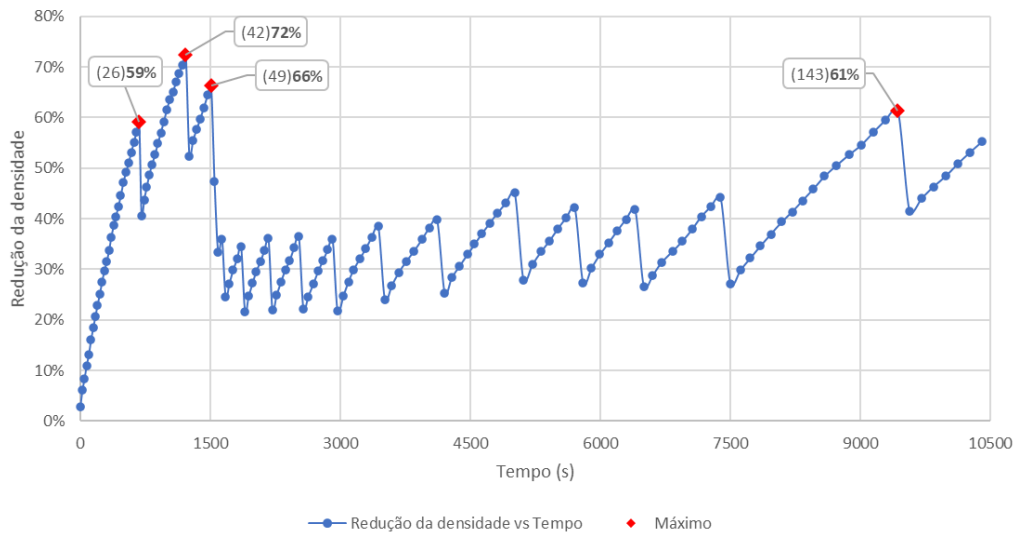


Gráfico 3.14 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 3% (NNRPIM)

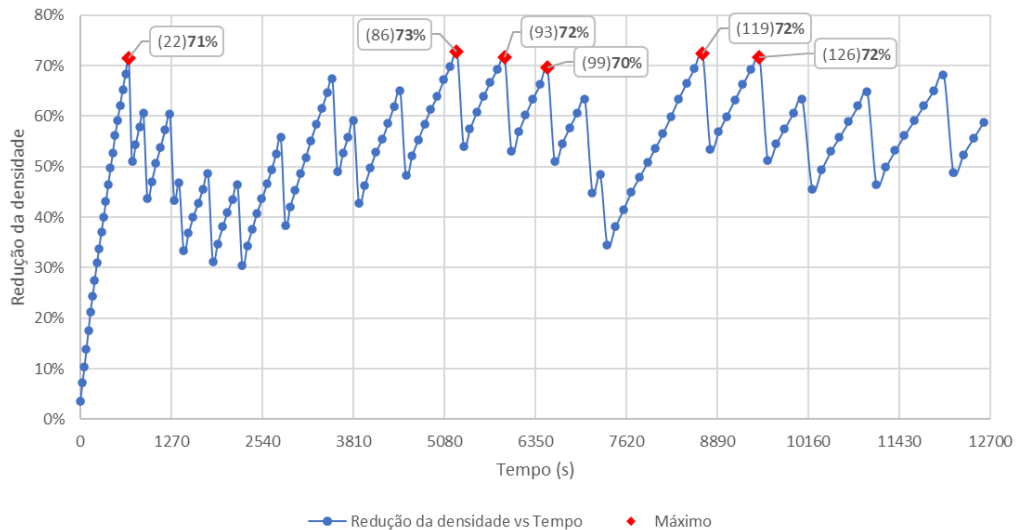
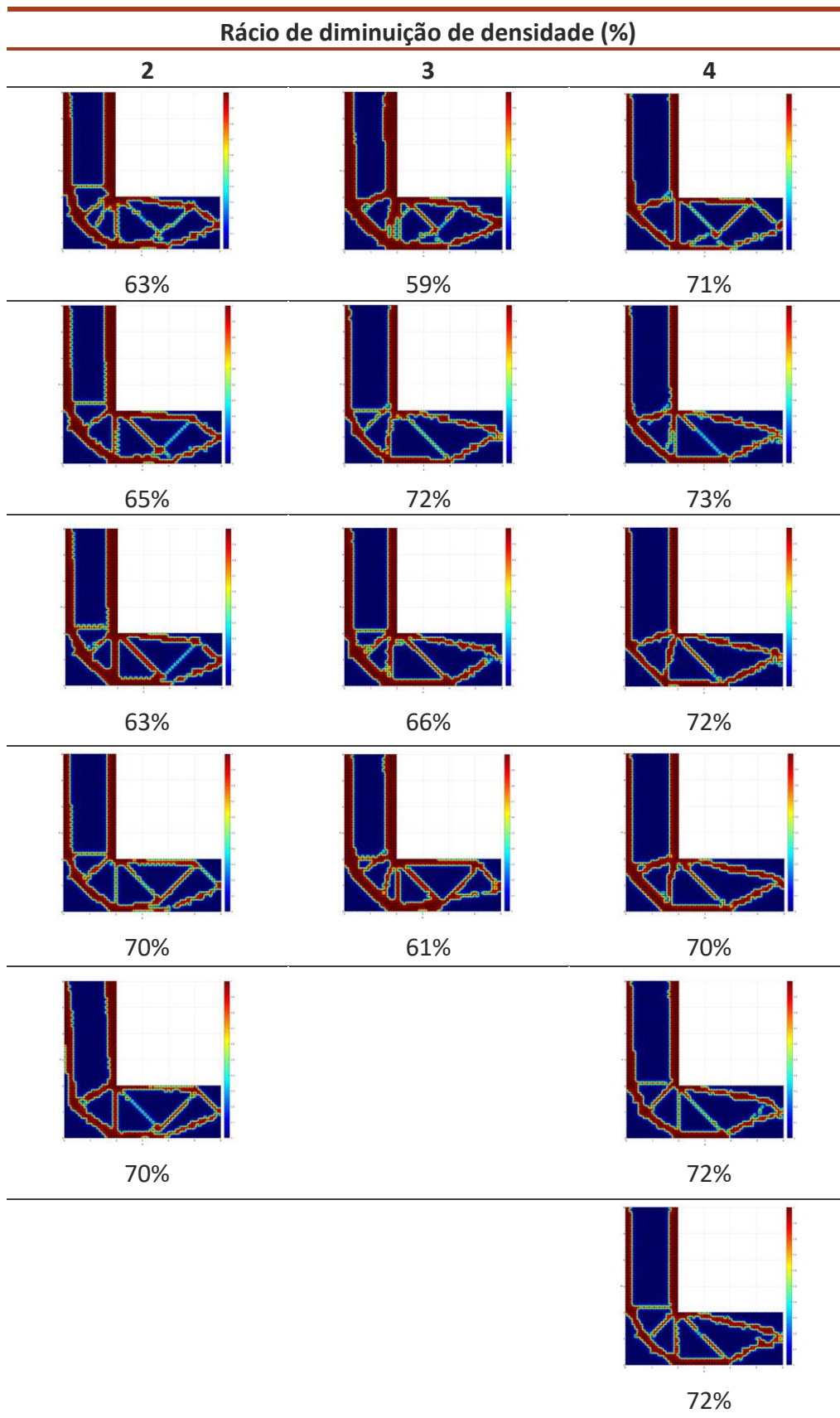


Gráfico 3.15 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 4% (NNRPIM)

De acordo com os gráficos obtidos, verifica-se uma redução de densidade constante ao longo do tempo. Através dos gráficos, para os diferentes rácios, é possível obter os pontos máximos que representam as geometrias com os melhores resultados ao nível da redução da densidade.

Tabela 11 - Geometrias otimizadas com maior redução de densidade para o método NRPIM



Através dos resultados obtidos, apresentados na Tabela 11, para as geometrias otimizadas com maior redução de densidade para o método NRPIM, verifica-se a existência de treliças conferindo a rigidez necessária à estrutura possibilitando a redução de material. Observando a evolução da otimização, verifica-se que as geometrias otimizadas, apresentam uma redução de material em zonas bem definidas, como é o caso da proximidade do encastramento e na proximidade da aplicação da força distribuída.

As geometrias otimizadas através do método NRPIM apresentam treliças bem definidas, bem como uma espessura menor das mesmas, obtendo assim uma estrutura com baixa densidade. Verifica-se também, que os resultados apresentam melhor resolução, comparativamente aos outros dois métodos, RPIM e FEM, isto possibilita construir as geometrias otimizadas o mais próximo possível dos resultados obtidos através do método utilizado.

No entanto o tempo de processamento registado nos métodos sem malha, RPIM e NRPIM, é praticamente o dobro daquele que o FEM necessita para alcançar a iteração 150. Posto isto, a utilização dos métodos sem malha, apesar de apresentarem resultados satisfatórios em relação ao método tradicional, FEM, têm um tempo de processamento elevado.

3.1.3 Variação do exemplo numérico 1

Como referido anteriormente, a malha quadrangular e triangular regular apresentam melhores resultados, no entanto a presença de geometrias não lineares influenciam o seu comportamento. Assim, e de modo a tornar o modelo mais complexo, é introduzido um furo não remodelável em que através do processo de otimização estrutural este se mantenha constante, sem sofrer qualquer alteração das suas dimensões. Para a realização deste estudo é utilizada a malha triangular otimizada e a malha quadrangular.

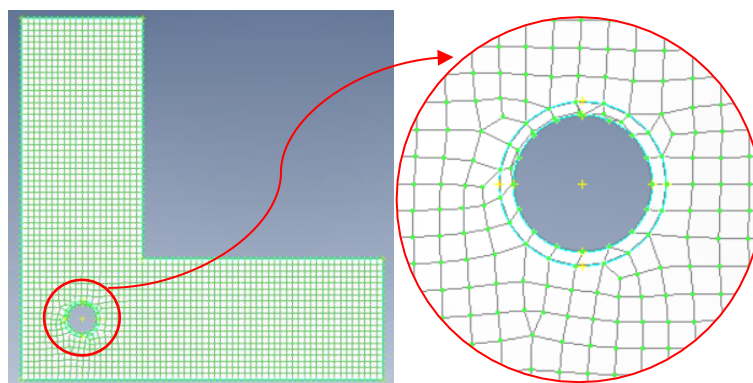


Figura 3.4 - Malha quadrangular em geometria não uniforme

Com a geração de malha quadrangular, Figura 3.4, é possível verificar que existe alguma distorção na proximidade do furo, levando à presença de elementos triangulares. Concluindo, este tipo de malha apenas pode ser utilizado para geometrias regulares, pois quando aplicada a geometrias mais complexas a malha fica distorcida criando

elementos com formas geométricas distintas, isto é, triângulos e quadrados, pelo que não é possível efetuar a simulação com dois tipos de malha em simultâneo, influenciando assim a precisão dos resultados.

Assim, recorreu-se ao uso da malha triangular otimizada. A peça foi dividida em três secções para que seja possível aplicar este tipo de processo.

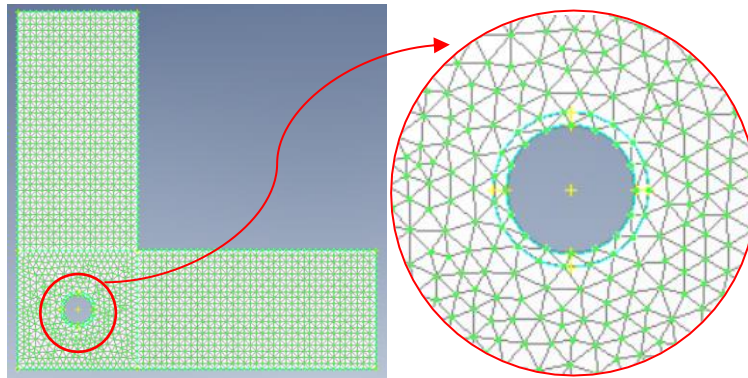
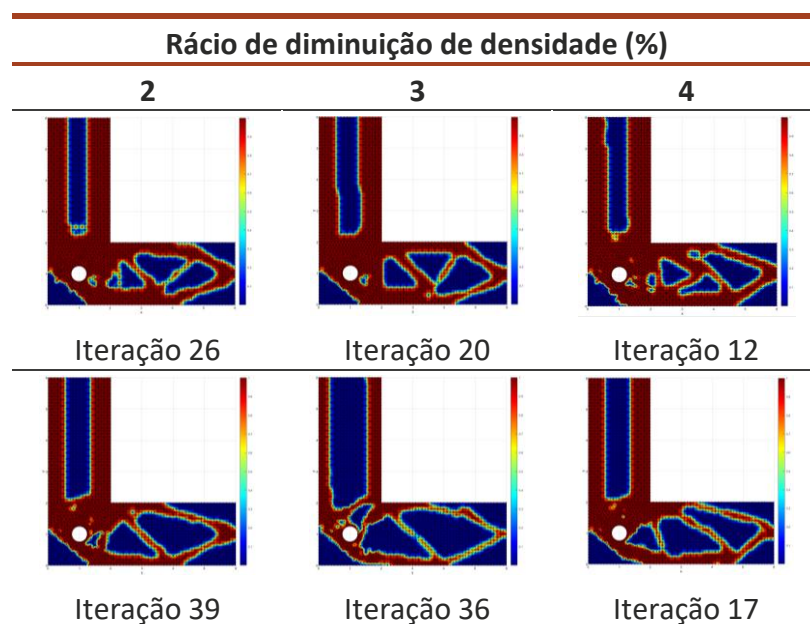


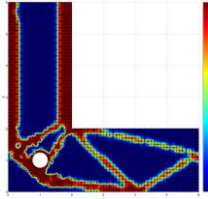
Figura 3.5 - Malha triangular em geometria não uniforme

É possível verificar que com a utilização da malha triangular, Figura 3.5, existe alguma distorção na proximidade do furo, no entanto as formas dos elementos mantêm-se constantes em toda a geometria. Observa-se também que nas duas divisões onde não está presente o furo é possível obter uma malha uniforme.

Para todas as simulações efetuadas vai ser utilizada a malha com elementos triangulares otimizados. De modo a manter o furo constante e não remodelável ao longo da simulação, é necessário que este apresente uma densidade superior à densidade do modelo. A simulação é efetuada fazendo variar novamente o rácio de diminuição de densidade entre 2%, 3% e 4%.

Tabela 12 - Geometrias otimizadas com maior redução de densidade para o método FEM





Iteração 60

De acordo com os resultados obtidos, representados na Tabela 12, é possível verificar que a introdução do furo não remodelável, numa zona onde a presença de uma treliça é necessária para manter a integridade da peça, fez com que todo o processo de otimização remodelasse toda a geometria na proximidade desse furo. Verifica-se assim que o processo adapta a otimização estrutural ao tipo de geometria não remodelável definida inicialmente. Este fator é essencial quando se pretende otimizar estrutura com um elevado grau de complexidade, relativamente a geometrias não remodeláveis.

3.1.4 Resultados

De acordo com os resultados obtidos anteriormente para as diferentes metodologias, FEM, RPIM e NRPIM, é possível reconstruir a geometria otimizada, sendo possível simular posteriormente e obter os valores da tensão instalada, bem como a rigidez obtida.

Inicialmente é necessário construir a geometria da peça com a topologia inicial e com a forma otimizada, de modo a obter os valores da tensão de von Mises, deslocamento, rigidez, deformação plástica e massa total. Todo o processo é efetuado com recurso ao *software* SolidWorks.

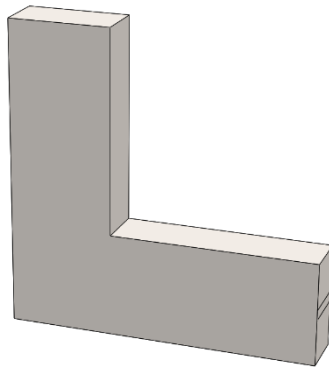


Figura 3.6 - Geometria "L" inicial com uma massa de 156×10^3 kg

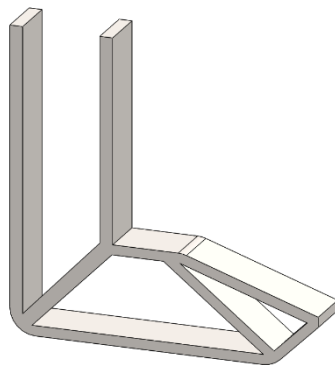


Figura 3.7 - Geometria "L" inicial com uma massa de $34,6 \times 10^3$ kg

Numa primeira análise, de acordo com a Figura 3.6 e Figura 3.7, é possível concluir que a geometria otimizada permite reduzir a massa em aproximadamente 77,8% comparativamente à massa da geometria inicial.

Efetuada as geometrias, com recurso ao *software* SolidWorks, foi possível efetuar as simulações que representam as condições inicialmente estabelecidas para o problema. Na Figura 3.8, Figura 3.9 e Figura 3.10 estão representados os valores obtidos para a tensão de Von Mises, deslocamento máximo e deformação elástica.

3.1.4.1 Simulações

Neste procedimento foi utilizado o *software* Solidworks para construir a geometria das ferramentas, gerar a malha e efetuar a simulação. Para efeitos de simulação foram aplicadas as condições inicialmente impostas no problema geral. A simulação permite obter os valores da tensão instalada, deslocamento e deformação elástica.

3.1.4.1.1 "L" tipologia inicial

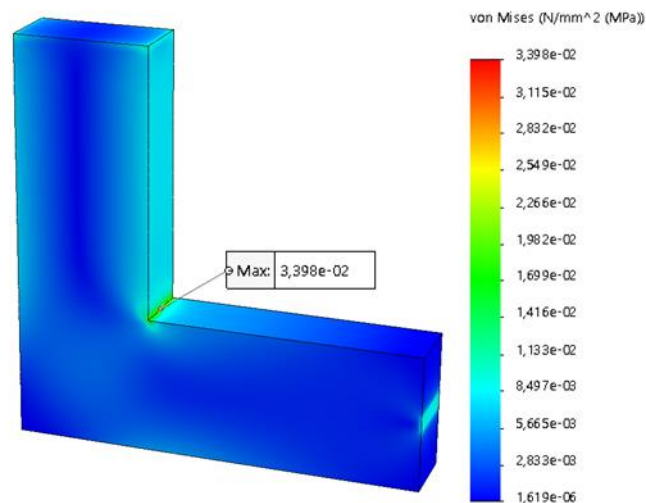


Figura 3.8 – Tensões equivalentes de von Mises instaladas na geometria "L" inicial

De acordo com a Figura 3.8, verifica-se que a concentração de tensões se localiza numa zona de entalhe. A tensão instalada é de $0,03398$ MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 235 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

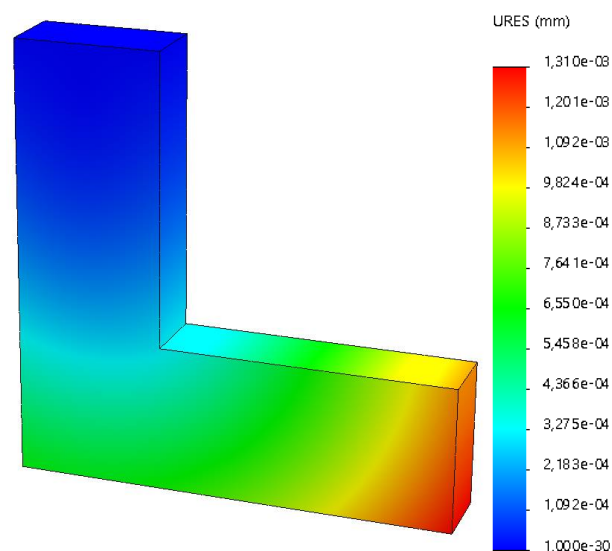


Figura 3.9 - Deslocamento máximo na geometria "L" inicial

De acordo com a Figura 3.9, o deslocamento máximo localiza-se na extremidade da peça, onde a força é aplicada. O deslocamento máximo é de $0,00131$ mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\text{Rigidez} = \frac{F}{\Delta} = \frac{1000}{\frac{1000 \times 200}{0,00131}} = 3,82 \text{ N/mm}^3$$

$$\text{Rigidez em função da massa} = \frac{3,82}{156 \times 10^3} = 2,45 \times 10^{-5} \text{ N/(mm}^3 * \text{kg)}$$

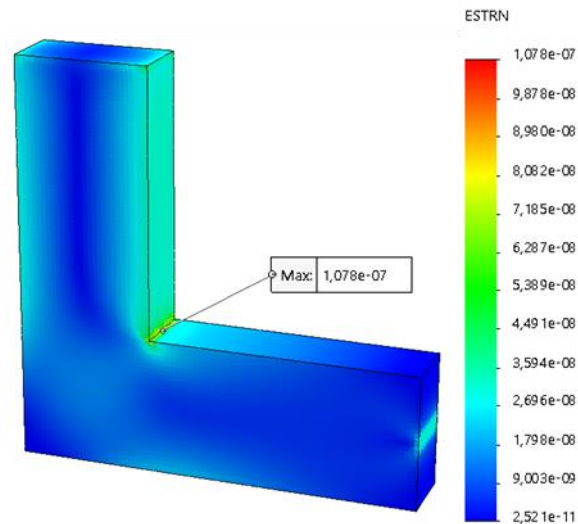


Figura 3.10 - Deformação elástica na geometria "L" inicial

De acordo com a Figura 3.10, o valor da deformação elástica é de $1,078 \times 10^{-7}$, este localiza-se na zona de entalhe, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em regime elástico.

3.1.4.1.2 "L" otimizado

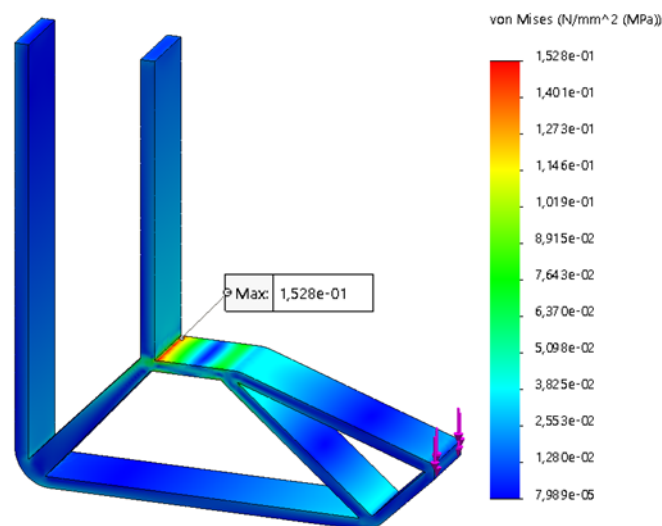


Figura 3.11 - Tensões equivalentes de von Mises instaladas na geometria "L" otimizada

De acordo com a Figura 3.11, verifica-se que a concentração de tensões se localiza nas zonas de entalhe. A tensão instalada é de 0,1528 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 235 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

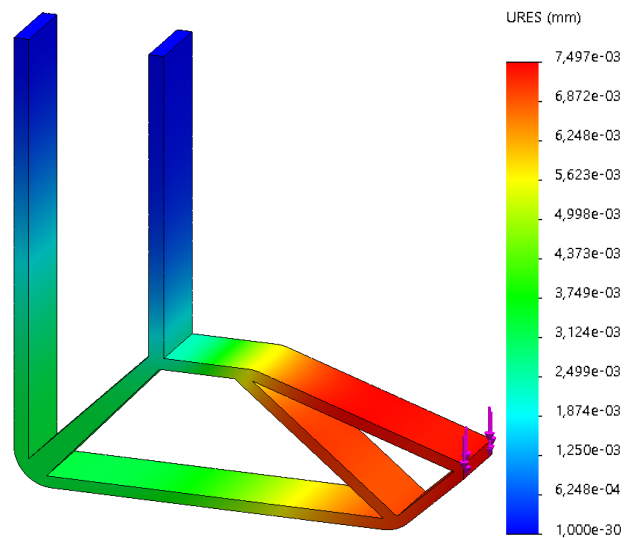


Figura 3.12 - Deslocamento máximo na geometria "L" otimizada

De acordo com a Figura 3.12, o deslocamento máximo localiza-se na extremidade da peça, onde a força é aplicada. O deslocamento máximo é de 0,007497 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\text{Rigidez} = \frac{F}{\Delta} = \frac{1000}{0,007497} = 0,669 \text{ N/mm}^3$$

$$\text{Rigidez em função da massa} = \frac{0,669}{34,6 \times 10^3} = 1,93 \times 10^{-5} \text{ N}/(\text{mm}^3 * \text{kg})$$

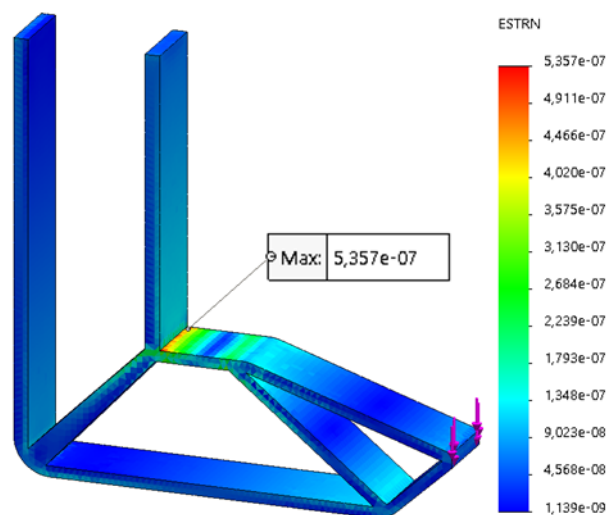
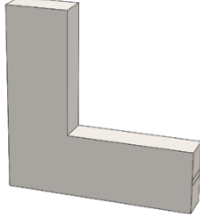
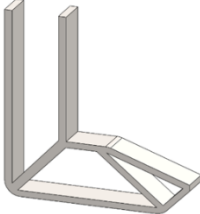


Figura 3.13 - Deformação elástica na geometria "L" otimizada

De acordo com a Figura 3.13, o valor da deformação elástica é de $5,357 \times 10^{-7}$, este localiza-se na zona de entalhe, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em regime elástico.

3.1.4.2 Conclusões

Tabela 13 - Resultados da otimização estrutural para a geometria "L"

Geometria	Massa (kg)	Redução de massa (%)	Rigidez em função da massa ($N/(mm^3 * kg)$)	Fator de segurança $(\frac{\sigma_{vonMises}}{\sigma_{limite}} < 1)$
	156×10^3	0%	$2,45 \times 10^{-5}$	6915
	$34,6 \times 10^3$	77,8%	$1,93 \times 10^{-5}$	1538

Analisando os resultados obtidos, apresentados na Tabela 13, através das simulações com o *software* SolidWorks, é possível observar que a estrutura otimizada apresenta uma redução de massa de aproximadamente 77,8%, e uma redução da rigidez estrutural em aproximadamente 21%. Apesar de a estrutura otimizada apresentar uma rigidez inferior, não irá comprometer a sua integridade estrutural, pelo que cumprirá, dentro das condições impostas, a sua função, tal como é demonstrado pelo fator de segurança. A otimização estrutural, reduz essencialmente a massa da peça e por conseguinte irá diminuir os custos globais associados, o que implica um aumento significativo no desempenho geral da peça.

3.2 Exemplo numérico 2

Considerando outro exemplo numérico de modo a aplicar o algoritmo de otimização estrutural do FEMAS, foi escolhida uma garra industrial simplificada, Figura 3.14. Esta apresenta o bordo esquerdo totalmente fixo (encastramento), e a aplicação de cargas distribuídas verticais na extremidade da garra, simulando assim a reação de um objeto quando pressionado pelas garras. Na Tabela 14 estão presentes as propriedades mecânicas essenciais para que o processo de otimização seja possível.

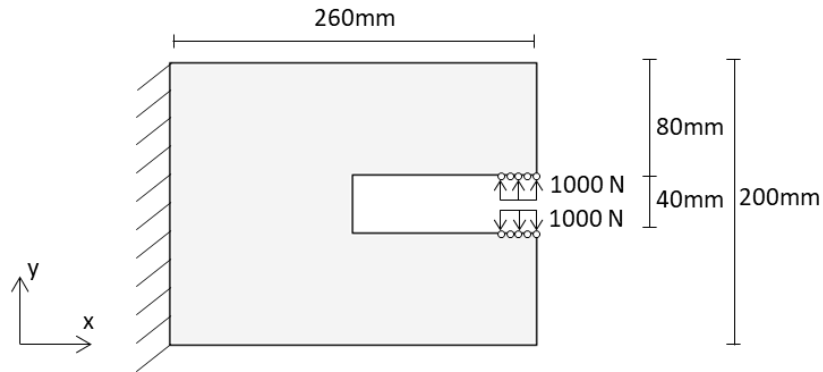


Figura 3.14 - Exemplo numérico garra industrial 2D

Tabela 14 - Propriedades mecânicas da garra industrial

Propriedades mecânicas	
Material	Aço de construção (S235)
Tensão de cedência (σ)	235 MPa
Módulo de Young (E)	210 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3

Para efetuar a simulação, o problema global foi dividido em dois problemas mais simples, ambos com a mesma condição fronteira (encastramento), no entanto, a aplicação das cargas distribuídas na extremidade da garra foi feita de modo faseada. O “Problema 1” com a aplicação da carga distribuída vertical na garra de baixo e o “Problema 2” com a aplicação da carga distribuída vertical na garra de cima.

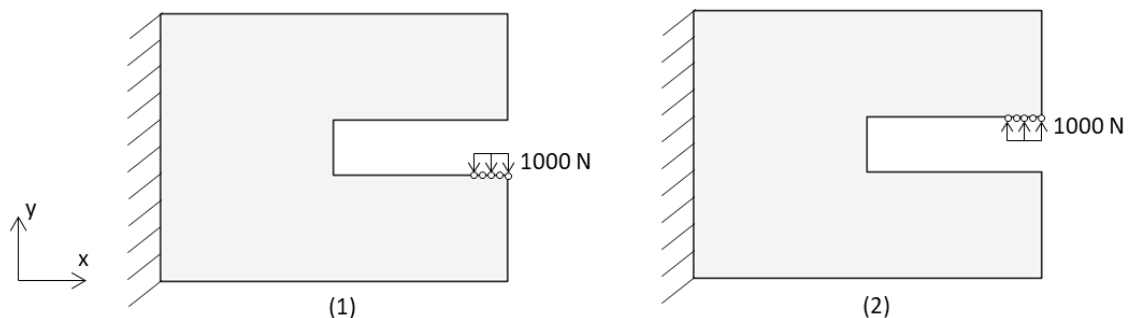
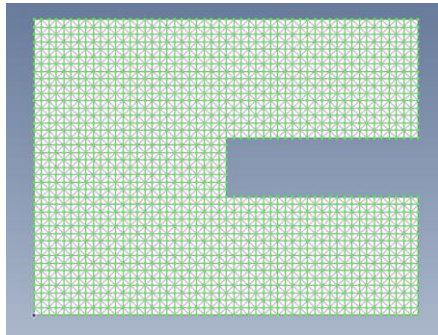


Figura 3.15 - (1) Problema 1; (2) Problema 2

Para definir a geometria e gerar a malha recorreu-se ao software FEMAP. Sendo a geometria exportada, posteriormente, para o software FEMAS, onde são definidas as propriedades do material e aplicadas todas as condições fronteira.



Número de elementos	Número de nós
3744	1991

Figura 3.16 - Geometria e malha da garra industrial no *software* FEMAP

As simulações de otimização estrutural foram novamente elaboradas nas mesmas condições que o exemplo numérico anterior, no entanto a variação do rácio de diminuição de densidade vai ser de 2%, 3% e 4%, uma vez que apresentaram melhores resultados nas simulações anteriormente efetuadas, representando assim uma redução do tempo despendido.

3.2.1 Otimização

Neste capítulo são efetuadas as otimizações estruturais e apresentados os resultados para as formulações FEM, RPIM e NRPIM.

3.2.1.1 FEM

A otimização estrutural recorrendo ao método dos elementos finitos é efetuada com os parâmetros definidos para o exemplo numérico anterior. Para a otimização fez-se variar novamente o rácio de diminuição de densidade entre 2%, 3% e 4% para cada problema.

Tabela 15 - Geometria otimizada, Problema 1 (FEM)

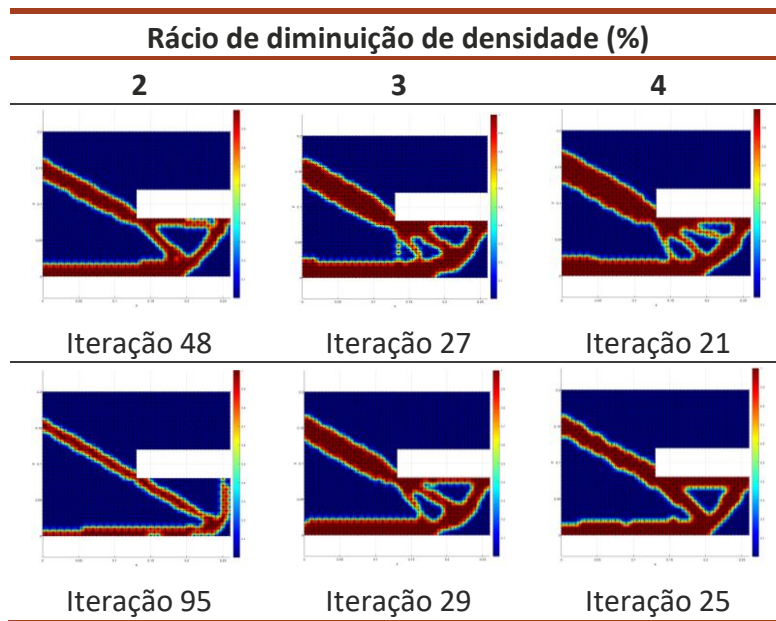
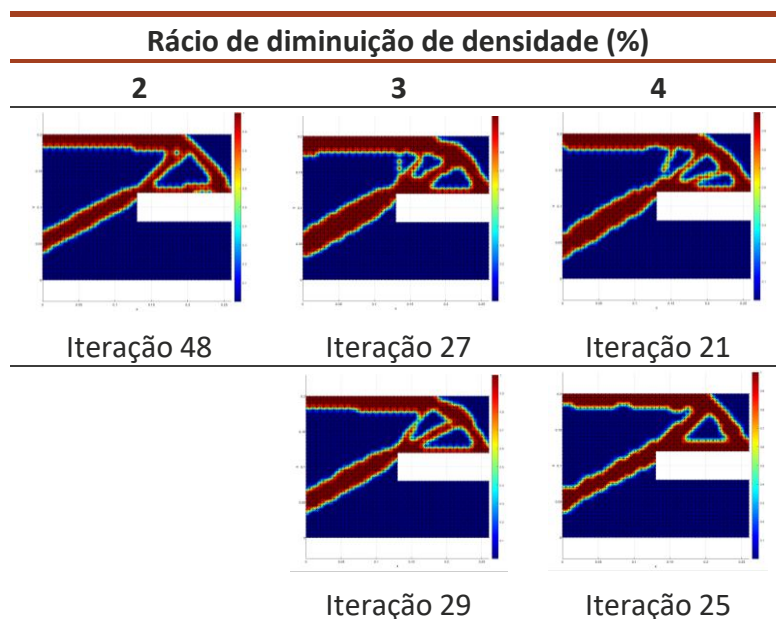


Tabela 16 - Geometria otimizada, Problema 2 (FEM)



De acordo com os resultados obtidos, verifica-se que para a mesma iteração, as geometrias otimizadas dos dois exemplos analisados são simétricas, tal como era esperado. Observando os resultados é possível verificar que na zona de encastramento existe uma redução significativa de material, reduzindo assim a sua densidade e consequentemente o seu peso. É possível também verificar que na proximidade das garras existe a formação de treliças, permitindo manter a rigidez estrutural. Através dos resultados é possível traçar gráficos que apresentam a evolução da otimização estrutural ao longo do tempo.

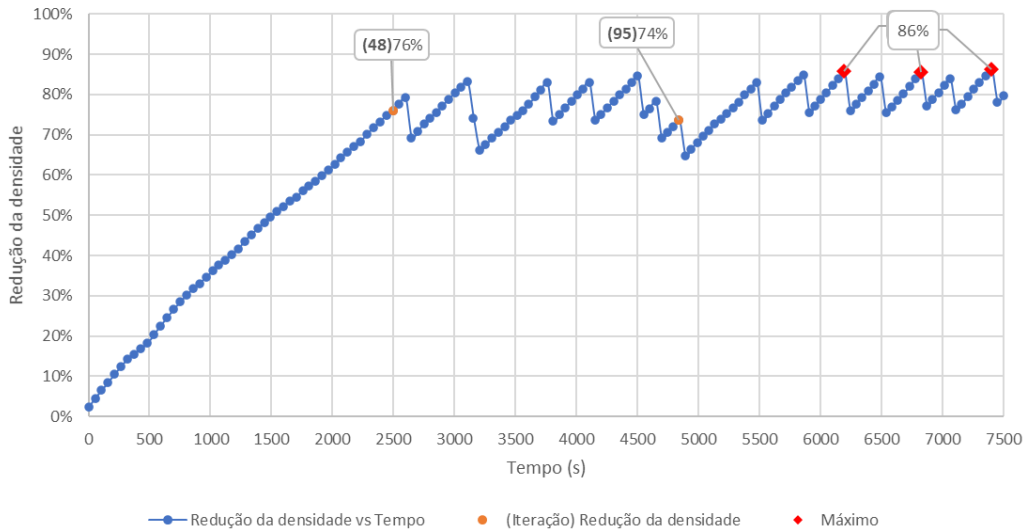


Gráfico 3.16 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 2% (FEM)

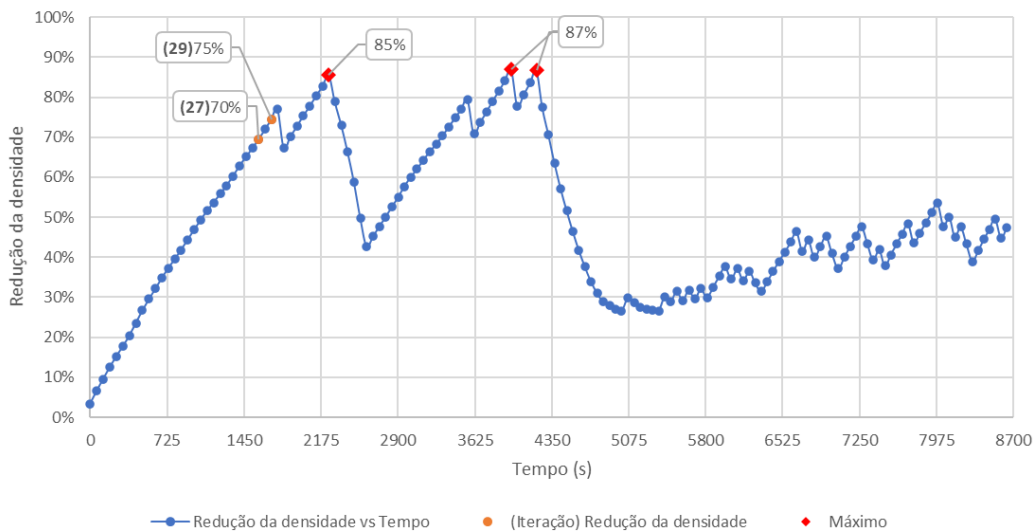


Gráfico 3.17 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 3% (FEM)

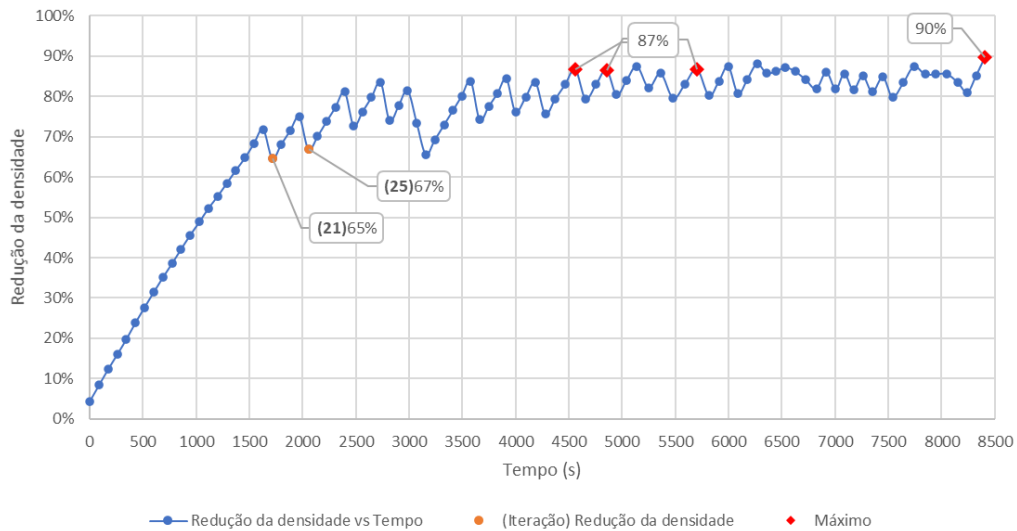


Gráfico 3.18 - Redução da densidade vs Tempo, rácio de diminuição de densidade de 4% (FEM)

Tal como nos exemplos numéricos anteriores, verifica-se que existem geometrias com maior redução de densidade do que aquelas que foram identificadas acima. Deve-se principalmente ao facto de estas geometrias apresentarem ligações que comprometem a integridade estrutural, não sendo assim possível ser aceites como resultado válido para uma estrutura topologicamente otimizada.

De acordo com os resultados obtidos através da otimização estrutural do “Problema 1” e do “Problema 2” é possível verificar, como referido anteriormente, que os resultados são simétricos. Abordando o problema global é possível unir as duas otimizações estruturais e ter assim uma visão da peça otimizada na sua totalidade (Figura 3.17).

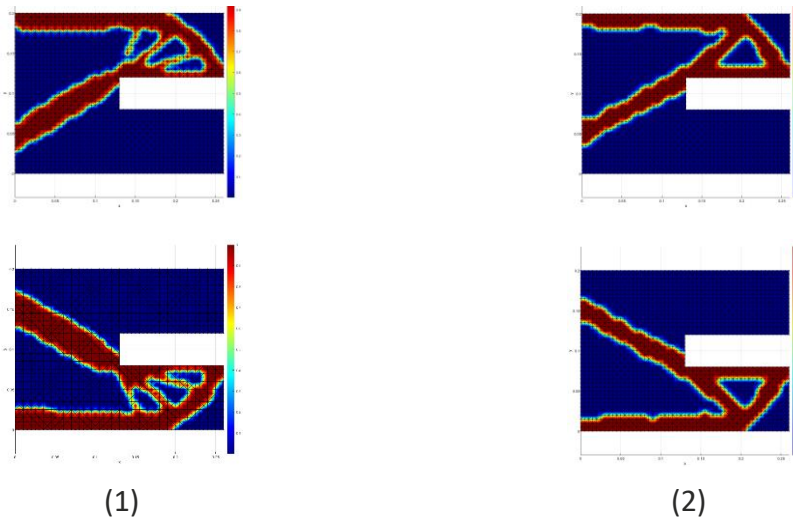
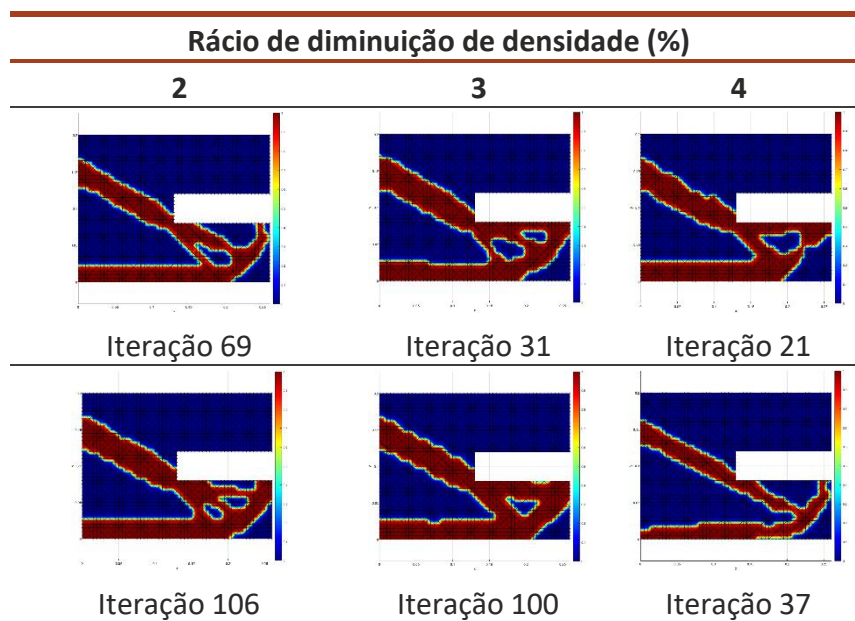


Figura 3.17 - Estruturas otimizadas (1) e (2)

3.2.1.2 RPIM

Para obter a estrutura otimizada através da formulação RPIM foram inseridos os parâmetros estabelecidos no exemplo numérico anterior. Foi aplicada uma variação de rácio de 2%, 3% e 4%, uma vez que este intervalo gera os melhores resultados. Como os resultados são simétricos, apenas serão apresentadas as geometrias otimizadas do “Problema 1”, ou seja, o problema em que a aplicação da força está colocada na garra de baixo.

Tabela 17 - Geometria otimizada, Problema 1 (RPIM)

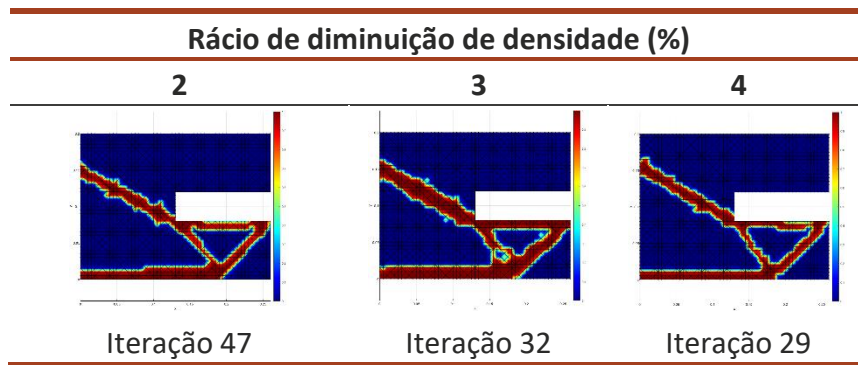


Através da análise das geometrias otimizadas verifica-se claramente a formação de treliças na zona de aplicação da carga distribuída e a redução de massa na zona de encastramento. Comparando os resultados entre o método de elementos finitos e o método RPIM é possível verificar que se apresentam semelhantes, é notória a presença de treliças em ambos os métodos e a redução de densidade em zonas específicas. No entanto, o tempo de processamento do método RPIM é superior ao tempo de processamento do método de elementos finitos.

3.2.1.3 NNRPIM

Para obter a estrutura otimizada através da formulação NNRPIM foram inseridos os parâmetros estabelecidos no exemplo numérico anterior. Foi aplicado uma variação de rácio de 2%, 3% e 4%, uma vez que este intervalo gera os melhores resultados. Abordando do mesmo modo o problema, como efetuado para o método RPIM, apenas serão apresentadas as geometrias otimizadas do “Problema 1”, ou seja, o problema em que a aplicação da força está colocada na garra de baixo.

Tabela 18 - Geometria otimizada, Problema 1 (NNRPIM)



Através da análise das geometrias otimizadas verifica-se claramente a formação de treliças na zona de aplicação da carga distribuída e a redução de massa na zona de encastramento. Através do método NNRPIM, em comparação com os métodos anteriores, é possível verificar que este opta por definir uma geometria triangular na zona de aplicação da carga distribuída, sendo por isso a estrutura que se apresenta mais bem otimizada em termos de redução de densidade. Neste aspeto este método, NNRPIM, apresenta uma vantagem superior aos restantes, pois é capaz de gerar uma estrutura otimizada, mais simples e eficiente do que as obtidas através dos outros métodos.

3.2.2 Resultados

De acordo com os resultados obtidos anteriormente para as diferentes formulações, é possível construir as geometrias otimizadas e simular o seu comportamento de acordo com as condições estabelecidas no problema inicial.

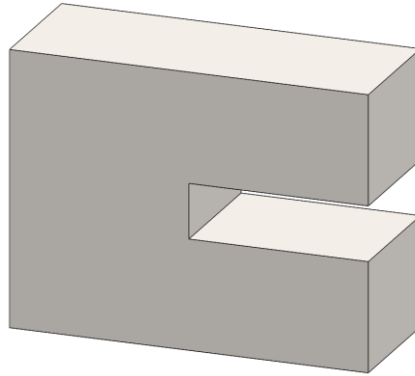


Figura 3.18 - Geometria da garra inicial com uma massa de 36,5 kg

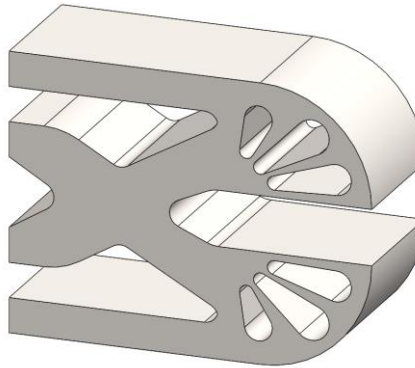


Figura 3.19 – Geometria da garra otimizada 1 com uma massa de 22,3 kg

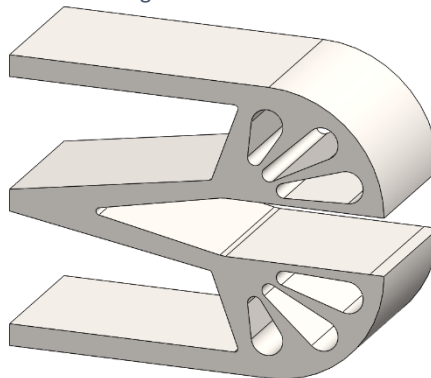


Figura 3.20 - Geometria da garra otimizada 2 com uma massa de 14,3 kg

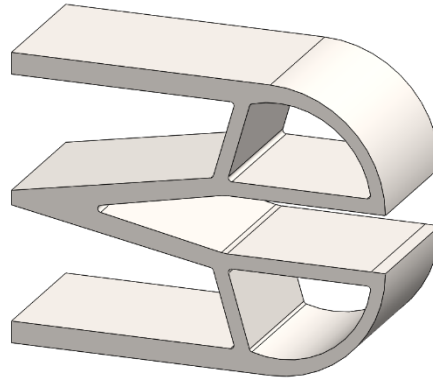


Figura 3.21 - Geometria da garra otimizada 3 com uma massa de 11,2 kg

As geometrias foram elaboradas com recurso ao *software* SolidWorks, representando o mais próximo possível as topologias otimizadas obtidas através do processo de otimização estrutural. Em primeira instância e com recurso ao *software* Solidworks, é notável a diminuição de massa desde a geometria da garra inicial até à garra otimizada 3. Posteriormente são efetuadas as simulações com as condições fronteira consideradas inicialmente. Este tipo de análise permite concluir quais as geometrias com melhor otimização topologica e verificar a sua rigidez e integridade estrutural.

3.2.2.1 Simulações

Neste procedimento foi utilizado o *software* Solidworks para construir a geometria das ferramentas, gerar a malha e efetuar a simulação. Para efeitos de simulação foram aplicadas as condições inicialmente impostas no problema geral. A simulação permite obter os valores da tensão instalada, deslocamento e deformação elástica.

3.2.2.1.1 Garra topologia inicial

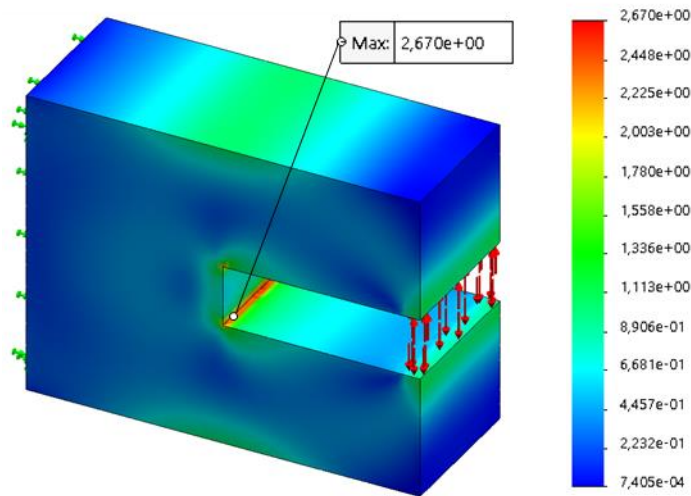


Figura 3.22 - Tensões equivalentes de von Mises instaladas na garra inicial

De acordo com Figura 3.22, verifica-se que a concentração de tensões se localiza nas zonas de entalhe. A tensão instalada é de 2,67 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 235 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

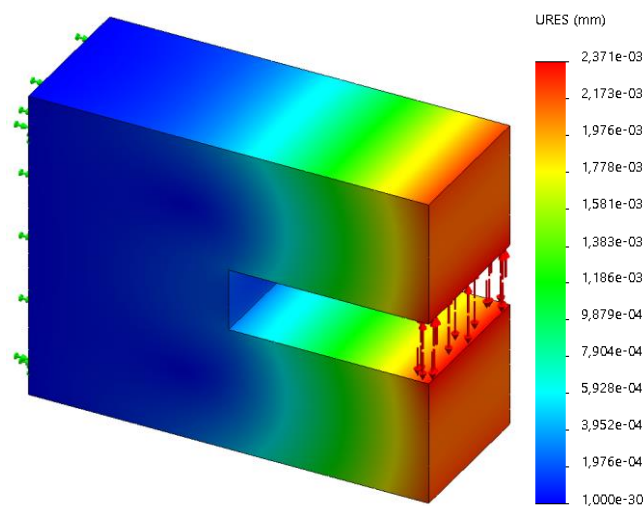


Figura 3.23 - Deslocamento máximo na garra inicial

De acordo com a Figura 3.23, o deslocamento máximo localiza-se na extremidade da peça, onde as forças são aplicadas. O deslocamento máximo é de 0,002371 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,002371 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{\Delta} = \frac{1000}{0,002371} = 421,76 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{421,76}{36,5} = 11,55 \text{ N/(mm}^3 * \text{kg)} \end{aligned}$$

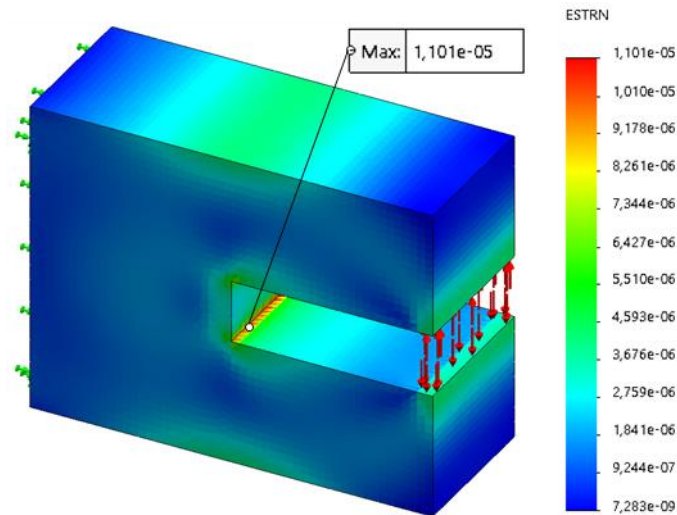


Figura 3.24 - Deformação elástica na garra inicial

De acordo com a Figura 3.24, o valor máximo da deformação elástica é de $1,101 \times 10^{-5}$, e localiza-se na zona de entalhe, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em regime elástico.

3.2.2.1.2 Garra otimizada 1

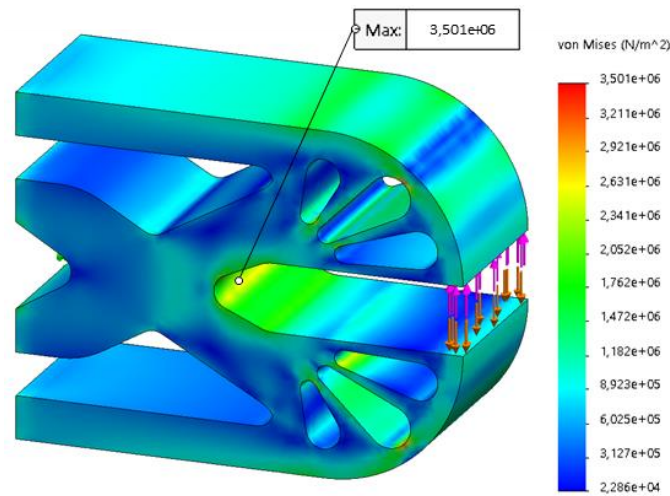


Figura 3.25 - Tensões equivalentes de von Mises instaladas na garra otimizada 1

De acordo com a Figura 3.25, verifica-se que a concentração de tensões se localiza nas zonas de entalhe. A tensão instalada é de 3,5 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 235 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

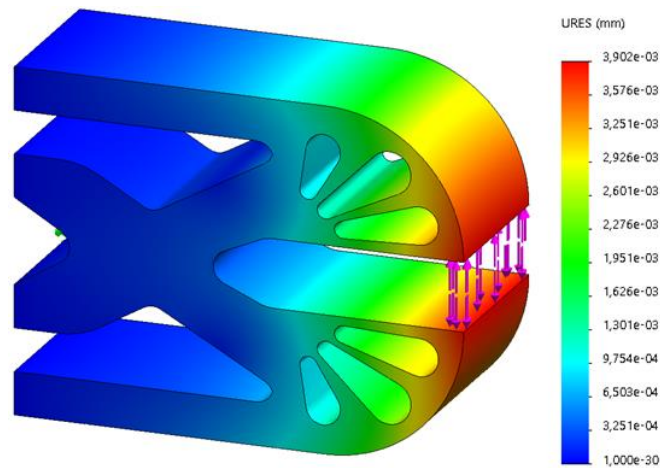


Figura 3.26 - Deslocamento máximo na garra otimizada 1

De acordo com a Figura 3.26, o deslocamento máximo localiza-se na extremidade da peça, onde as forças são aplicadas. O deslocamento máximo é de 0,003902 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,003902 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{\Delta} = \frac{1000}{0,003902} = 256,28 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{256,28}{22,3} = 11,5 \text{ N/(mm}^3 * \text{kg)} \end{aligned}$$

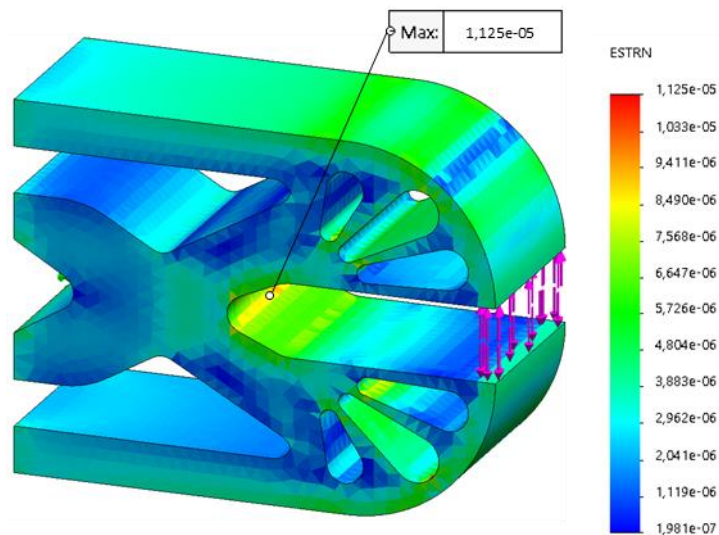


Figura 3.27 - Deformação elástica na garra otimizada 1

De acordo com a Figura 3.27, o valor da deformação elástica é de $1,125 \times 10^{-5}$, este localiza-se na zona de entalhe, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em regime elástico.

3.2.2.1.3 Garra otimizada 2

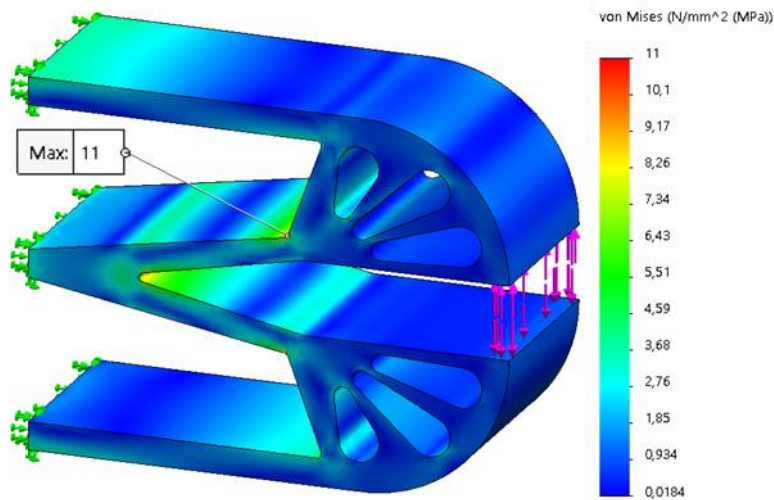


Figura 3.28 – Tensões equivalentes de von Mises instaladas na garra otimizada 2

De acordo com a Figura 3.28, verifica-se que a concentração de tensões se localiza nas zonas de entalhe. A tensão instalada é de 11 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 235 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

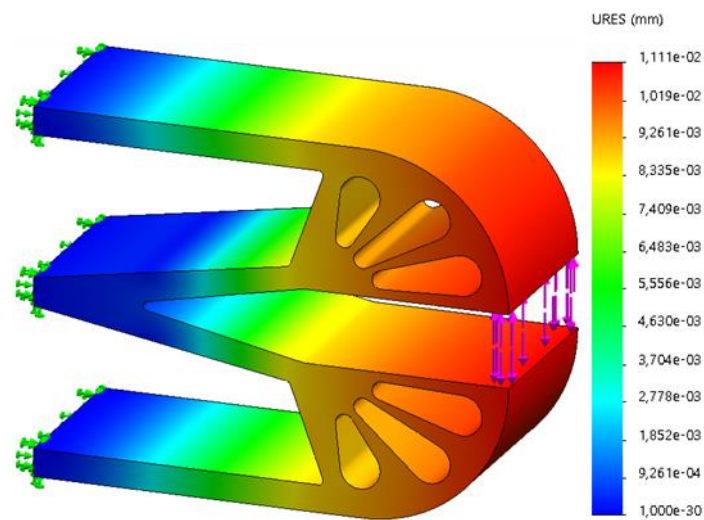


Figura 3.29 - Deslocamento máximo na garra otimizada 2

De acordo com a Figura 3.29, o deslocamento máximo localiza-se na extremidade da peça, onde as forças são aplicadas. O deslocamento máximo é de 0,01111 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,01111 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{D} = \frac{1000}{0,01111} = 90 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{90}{14,3} = 6,3 \text{ N/(mm}^3 * \text{kg)} \end{aligned}$$

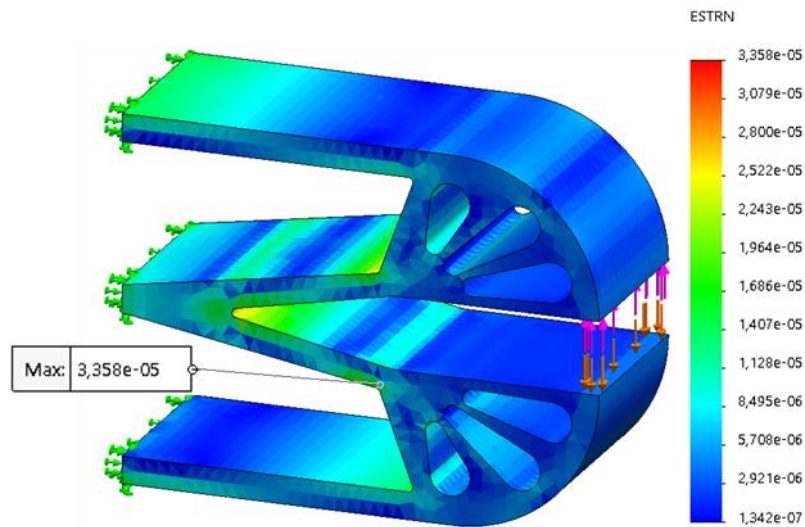


Figura 3.30 - Deformação elástica na garra otimizada 2

De acordo com a Figura 3.30, o valor da deformação elástica é de $3,358 \times 10^{-5}$, este localiza-se na zona de entalhe, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em regime elástico.

3.2.2.1.4 Garra otimizada 3

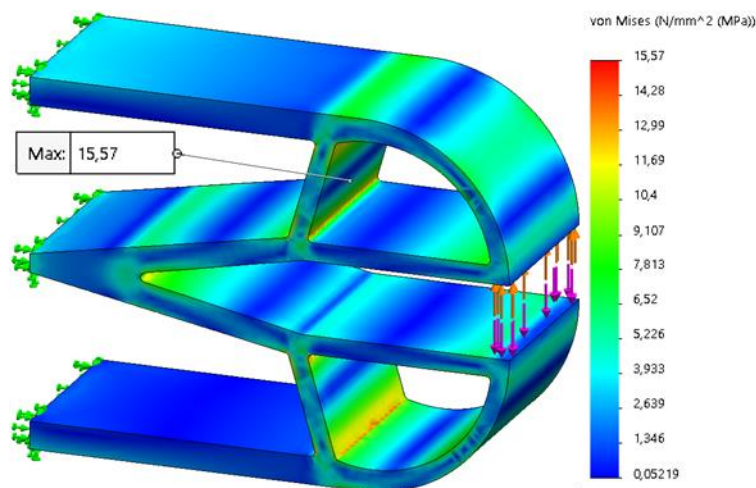


Figura 3.31 - Tensões equivalentes de von Mises instaladas na garra otimizada 3

De acordo com a Figura 3.31, verifica-se que a concentração de tensões se localiza nas zonas de entalhe. A tensão instalada é de 15,6 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 235 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

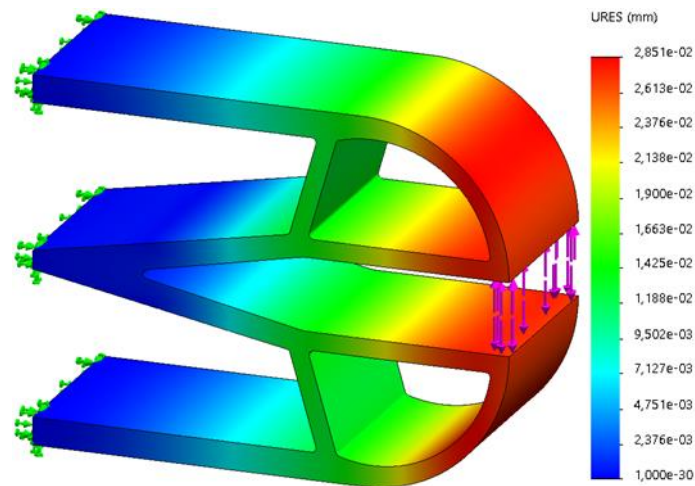


Figura 3.32 - Deslocamento máximo na garra otimizada 3

De acordo com a Figura 3.32, o deslocamento máximo localiza-se na extremidade da peça, onde as forças são aplicadas. O deslocamento máximo é de 0,02851 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,02851 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{\Delta} = \frac{1000}{0,02851} = 35,08 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{35,08}{11,2} = 3,13 \text{ N}/(\text{mm}^3 * \text{kg}) \end{aligned}$$

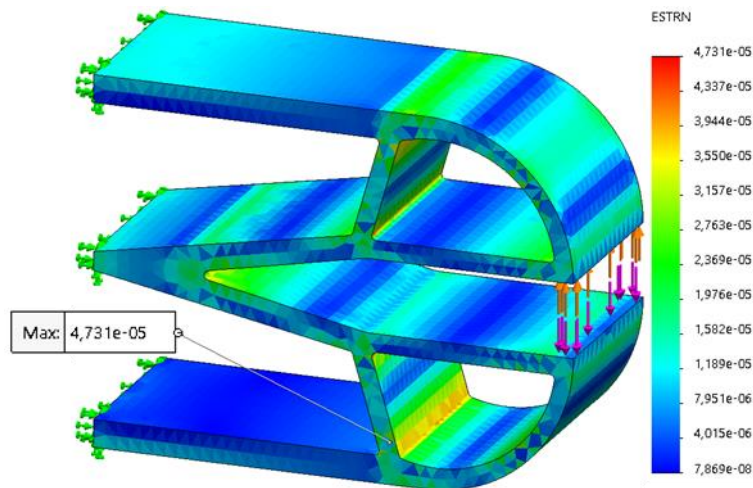
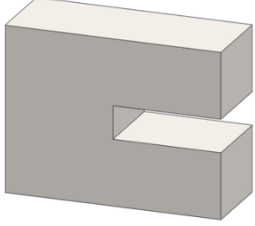
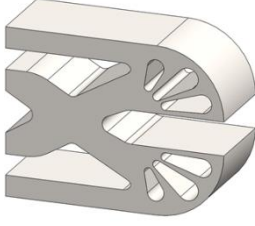
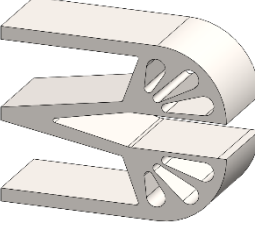
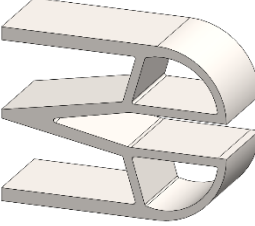


Figura 3.33 - Deformação elástica na garra otimizada 3

De acordo com a Figura 3.33, o valor da deformação elástica é de $4,731 \times 10^{-5}$, este localiza-se na zona de entalhe, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em regime elástico.

3.2.2.2 Conclusões

Tabela 19 - Resultados da otimização estrutural para a garra industrial

Geometria	Massa (kg)	Redução de massa (%)	Rigidez em função da massa $N/(mm^3 * kg)$	Fator de segurança $(\frac{\sigma_{vonMises}}{\sigma_{limite}} < 1)$
	36,5	0%	11,55	88
	22,3	38,7%	11,5	40
	14,3	63%	6,3	21
	11,2	69%	3,13	15

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 19, verifica-se que a redução de massa tem impacto na rigidez estrutural da peça. No entanto, a rigidez mantém-se dentro dos valores permitidos para que a garra suporte as condições impostas inicialmente, tal como indica o coeficiente de segurança. De entre todas as geometrias, a garra otimizada 3 é aquela que apresenta uma diminuição considerável de massa relativamente à garra inicial. Esta otimização não reduz apenas a massa da peça como consequentemente irá diminuir os custos associados ao fabrico da mesma e todos os processos associados, o que implica um melhoramento significativo na *performance* geral da peça.

É possível concluir que a otimização estrutural com recurso aos métodos sem malha é capaz de gerar geometrias otimizadas, melhores ou com o mesmo grau de resolução

que geometrias obtidas através da formulação FEM. Como é o caso do método NRPIM que permitiu obter a geometria mais otimizada, sem a necessidade de apresentar as outras geometrias com menor grau de otimização.

3.3 Exemplo numérico 3 (caso real)

Para o caso de estudo real foi selecionada uma peça presente na indústria eólica. Esta ferramenta tem como objetivo fazer a ligação entre as correntes de elevação à flange das secções das torres das turbinas eólicas, possibilitando assim a mobilização das secções sem causar qualquer dano estrutural.

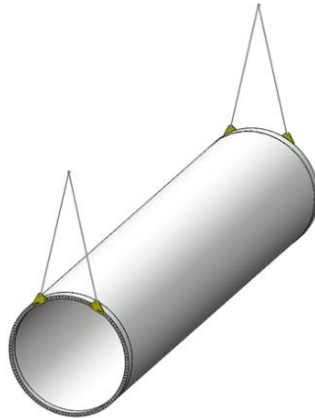


Figura 3.34 - Exemplo de elevação de uma secção de torre

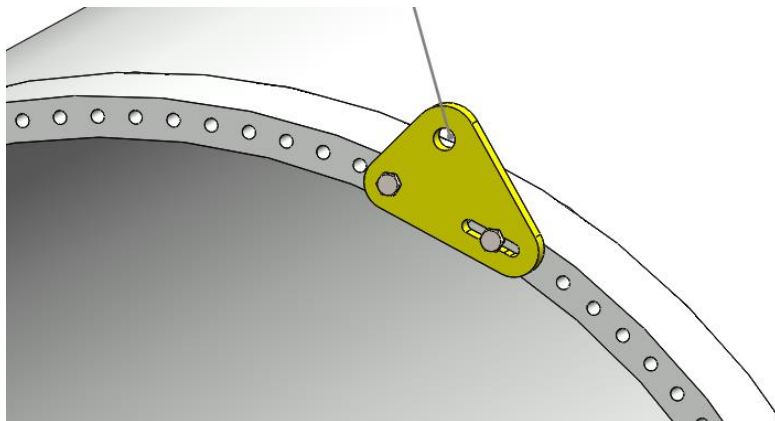


Figura 3.35 - Exemplo de fixação da ferramenta na flange da secção, com dois parafusos M30

O funcionamento da ferramenta consiste na fixação da mesma à flange da secção de torre através de dois parafusos roscados M30 e colocadas duas porcas na face oposta. A ferramenta é colocada inicialmente na face da flange, fazendo coincidir o furo da esquerda com um furo existente na flange, sendo posteriormente possível colocar o parafuso e a porca. Fixada a ferramenta, procede-se à inserção do segundo parafuso e porca no entalhe da ferramenta, que depende das dimensões da flange, no entanto a ferramenta já suporta esse tipo de adaptabilidade para todos os diâmetros de secção existentes no fabricante. Finalizado o processo de fixação da ferramenta, coloca-se uma extremidade da corrente no furo superior e a outra extremidade faz a ligação com o maquinismo de elevação. O processo de elevação requer a utilização de duas ferramentas por flange, perfazendo um total de quatro ferramentas.

As dimensões da ferramenta apresentam-se na Figura 3.36, tendo sido fornecidas pelo fabricante da mesma.

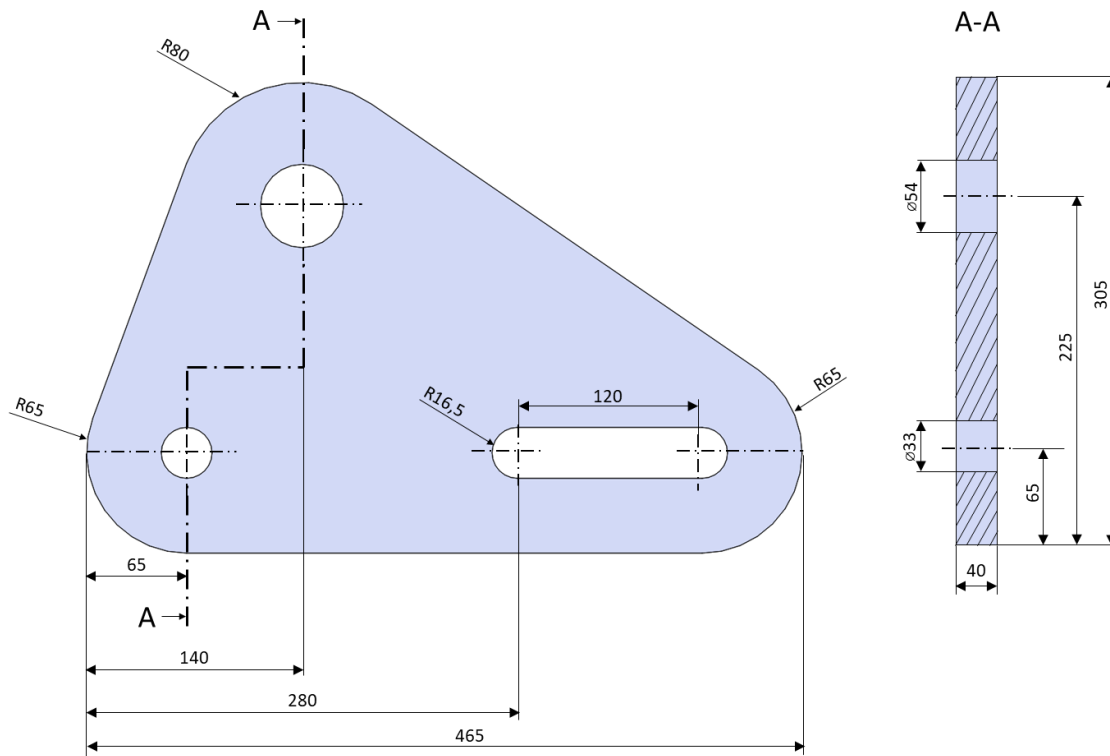


Figura 3.36 - Dimensões da ferramenta

Tabela 20 - Propriedades mecânicas da ferramenta

Propriedades mecânicas	
Material	EN10025-2:2004 – S355J2
Tensão de cedência (σ)	345 MPa
Módulo de Young (E)	210 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Peso	28,5 kg
Espessura	40 mm

Considerando o pior cenário de elevação, em que a ferramenta terá de resistir às piores condições; o ângulo entre o gancho de elevação e a corrente é de 20° e o comprimento da corrente de 4m. Admitindo uma secção de torre com um comprimento de 30m e um peso de 50 toneladas em que o seu centro de gravidade se encontra a meia distância. São utilizadas 4 ferramentas para efetuar o processo de elevação, duas em cada flange.

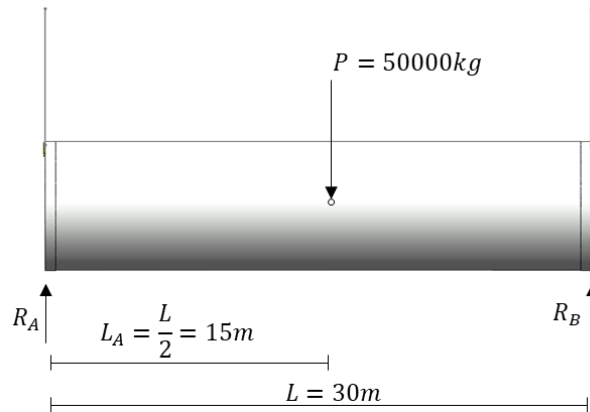


Figura 3.37 - Diagrama de corpo livre da elevação da seção de torre

$$R_A = R_B = \frac{P \times \frac{L}{2}}{L} = \frac{50\,000 \times 15}{30} = 25\,000\,kg$$

A carga aplicada em cada ferramenta é de:

$$\text{Carga na ferramenta} = \frac{R_A}{2} = 12\,500\,kg$$

Caracterizado o problema é possível construir o modelo no *software* FEMAP e efetuar a geração de malha. Foi determinado efetuar as furações numa chapa com dimensões definidas, simulando assim a processo de pré maquinagem da ferramenta, apenas com as furações especificadas pelo fabricante. Deste modo é possível obter uma estrutura otimizada diferente da existente.

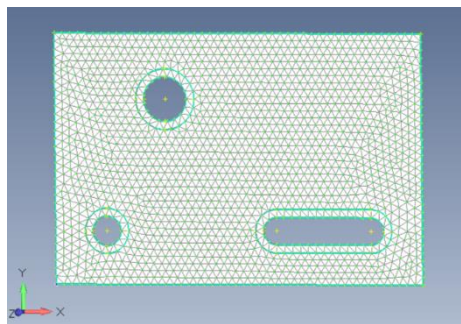


Figura 3.38 - Geometria e malha no *software* FEMAP

É possível observar na Figura 3.38 que foi gerada uma malha triangular. Como visto nos exemplos numéricos anteriores, é a malha que apresenta melhores resultados, elementos uniformes e é a mais adequada para modelos com geometrias irregulares. Quando gerada a malha quadrangular, surgem elementos distintos, quadrados e triângulos, não sendo possível posteriormente para o FEMAS efetuar a análise estrutural com dois tipos de elementos. Definida a geometria e a malha procede-se à exportação do modelo para o *software* FEMAS, onde são aplicadas todas as condições fronteira e os parâmetros anteriormente definidos para efetuar a otimização estrutural.

As condições fronteiras representam os pontos de fixação e a força aplicada na ferramenta, neste caso é fixa por dois parafusos M30 (contorno vermelho) e vai ser

aplicada uma força de 122583,125 N (contorno azul) que representa a carga anteriormente calculada.

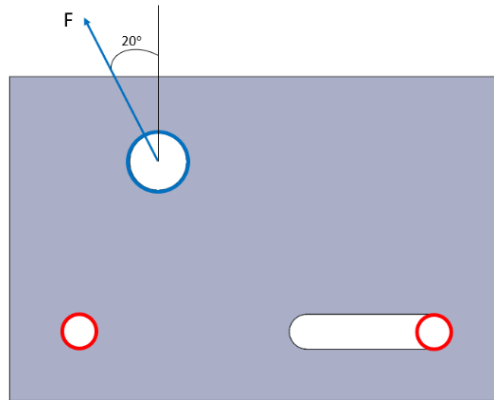


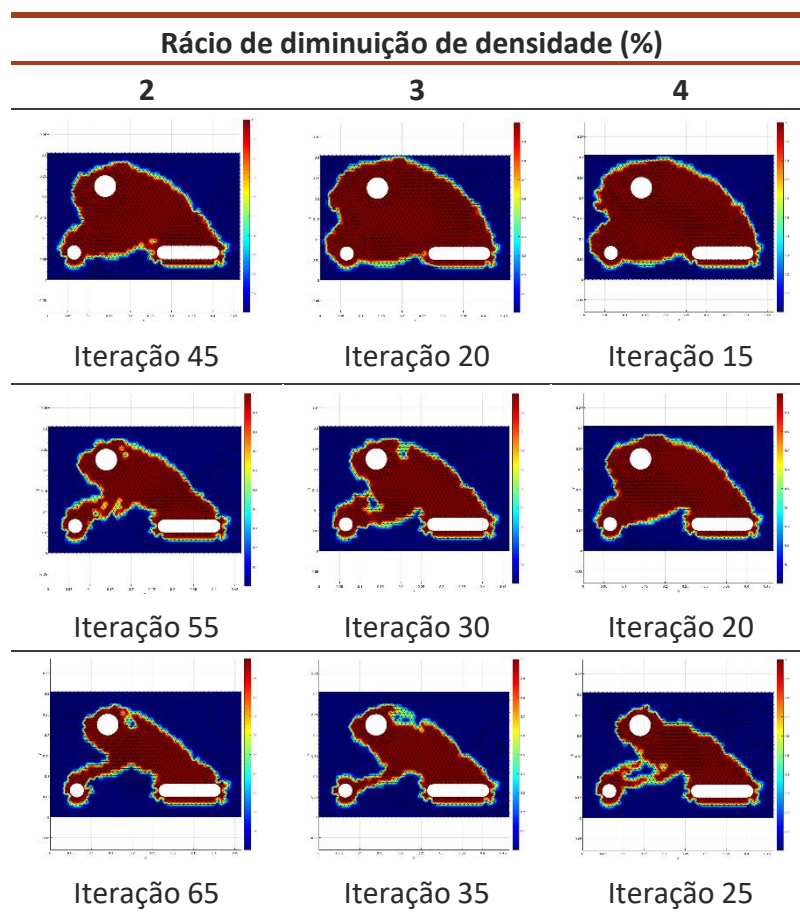
Figura 3.39 - Figura 3.58 - Identificação das condições fronteira

3.3.1 Otimização

Para obter a estrutura otimizada através da formulação FEM, RPIM e NRPIM foram utilizados os parâmetros estabelecidos nos exemplos numéricos anteriores. Foi aplicada uma variação de rácio de 2%, 3% e 4%, uma vez que este intervalo gera os melhores resultados. De salientar que na preparação da geometria foram definidas zonas em que o processo de otimização não poderia remodelar material, que é o caso das furações necessárias para a colocação dos parafusos e da corrente de elevação.

3.3.1.1 FEM

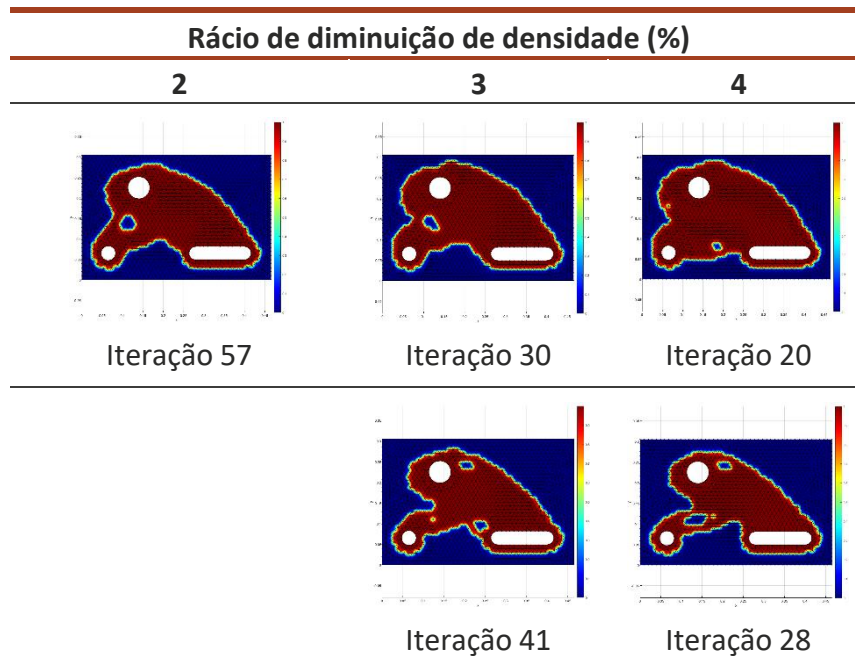
Tabela 21 - Geometria da ferramenta otimizada (FEM)



De acordo com os resultados obtidos, Tabela 21, para as geometrias otimizadas através do método de elementos finitos, quando aplicados diferentes rácios, verifica-se o surgimento de treliças que fazem a ligação entre o furo inferior com os restantes, conferindo a rigidez necessária à estrutura. Esta abordagem permite reduzir bastante a densidade da ferramenta em diferentes zonas, sem comprometer em demasia a sua integridade estrutural.

3.3.1.2 RPIM

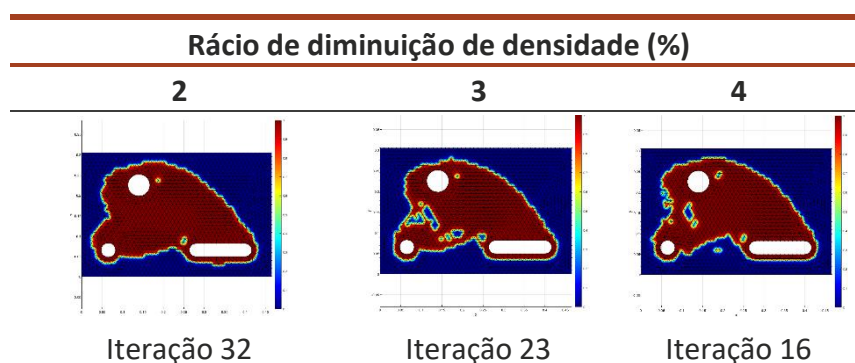
Tabela 22 - Geometria da ferramenta otimizada (RPIM)

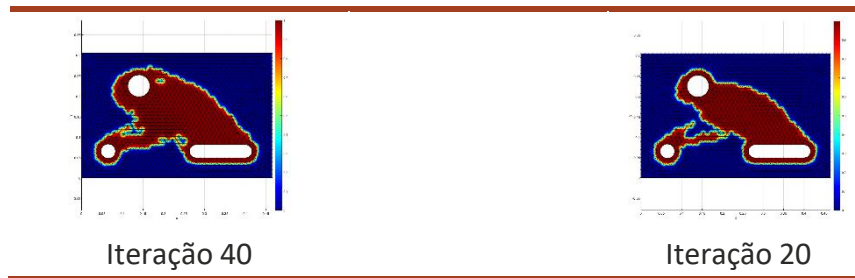


De acordo com os resultados obtidos para a otimização estrutural através do método RPIM, Tabela 22, verifica-se que existem zonas onde a presença de material é eliminada nos diferentes rácios. Isto indica a necessidade de eliminar, naquelas zonas, material em excesso, reduzindo assim a sua massa total. Tal como no método de elementos finitos é visível neste caso a formação de treliças na ligação entre o furo inferior com os restantes furos. Apesar de resultados semelhantes, o método RPIM apresenta geometrias com melhor resolução comparativamente ao método dos elementos finitos, isto possibilita redesenhar a peça o mais próximo possível da geometria obtida através do processo de otimização.

3.3.1.3 NNRPIM

Tabela 23 - Geometria da ferramenta otimizada (NNRPIM)





De acordo com os resultados obtidos para a otimização estrutural através do método NRPIM, Tabela 23, verifica-se, tal como nos métodos anteriores, que existem zonas onde a presença de material é eliminada em todas as simulações. Isto indica a necessidade de eliminar, naquelas zonas, material em excesso, reduzindo assim a sua massa total. O método NRPIM comparativamente ao método RPIM, obtém as estruturas otimizadas em menor número de iterações, possibilitando retirar conclusões através das iterações iniciais. Comparativamente com o método dos elementos finitos, o método NRPIM, obteve resultados semelhante. Os resultados obtidos através dos três métodos são bastante semelhantes, em todos eles, verifica-se a eliminação de material em zonas específicas e a formação de treliças, como anteriormente referido, na ligação do furo inferior com os restantes furos.

3.3.2 Resultados

Através dos resultados obtidos anteriormente para a otimização estrutural da ferramenta, é possível construir as geometrias no *software* SolidWorks e efetuar as simulações com a aplicação das condições de fronteira inicialmente estabelecidas. São efetuadas quatro geometrias; ferramenta antes do processo de maquinagem, ferramenta atual e ferramenta otimizada 1 e 2. É de salientar que é aplicado um fator de segurança de 1,1 ao valor da tensão de cedência do material, ou seja, $Tensão\ do\ material = \frac{345}{1,1} = 315\ MPa$.

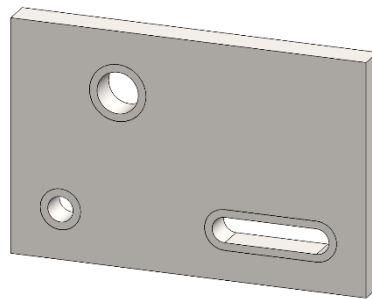


Figura 3.40 - Ferramenta inicial com uma massa de 41,8 kg

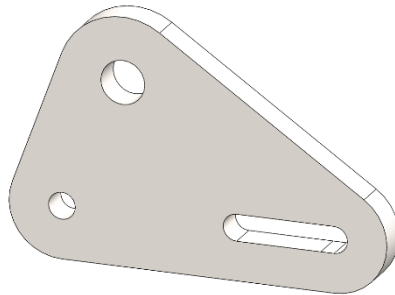


Figura 3.41 - Ferramenta atual usada na indústria com uma massa de 28,5 kg

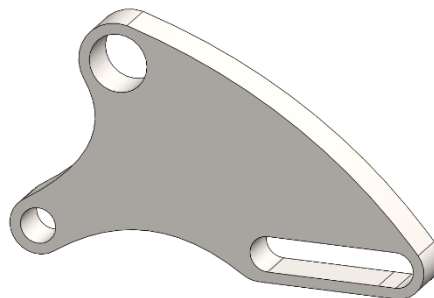


Figura 3.42 - Ferramenta otimizada 1 com uma massa de 13,2 kg

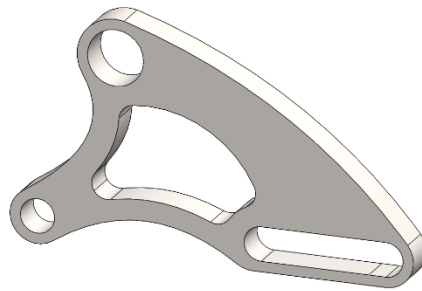


Figura 3.43 – Ferramenta otimizada 2 com uma massa de 7,9 kg

3.3.3 Simulações

Neste procedimento foi utilizado o *software* Solidworks para construir a geometria das ferramentas, gerar a malha e efetuar as simulações. Para efeitos de simulação foram aplicadas as condições inicialmente impostas no problema geral. As simulações permitem obter os valores da tensão instalada, deslocamento, fator de segurança e deformação elástica. Este tipo de análise permite concluir quais as geometrias com melhor otimização topologica e verificar a sua rigidez e integridade estrutural de acordo com as condições iniciais impostas no problema geral.

3.3.3.1 Ferramenta topologia inicial

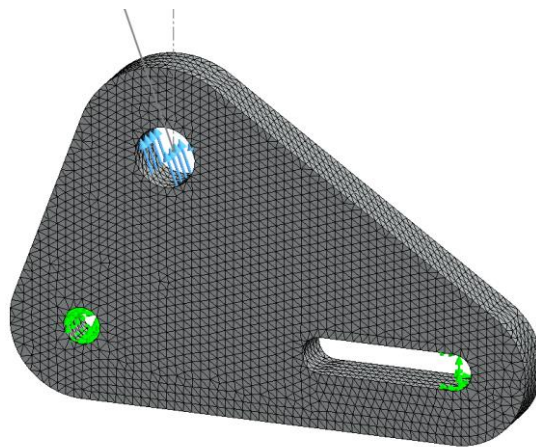


Figura 3.44 - Aplicação das condições fronteira na ferramenta atual

As condições de fronteira estão representadas na Figura 3.44. A fixação da peça é feita através de dois parafusos M30, representados a verde, e a aplicação de uma força vertical com inclinação 20° relativamente ao eixo y , representada a azul. Foi gerada uma malha tetraédrica ao longo da geometria, com 79949 nós e 53343 elementos.

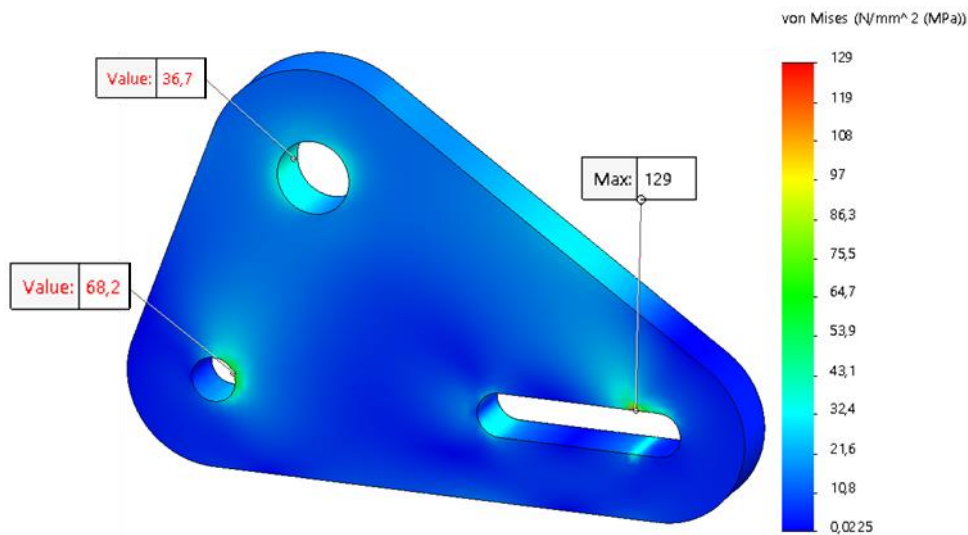


Figura 3.45 - Tensões equivalentes de von Mises instaladas na ferramenta atual

De acordo com a Figura 3.45, verifica-se maior concentração de tensões nas zonas de fixação e aplicação da força. A tensão máxima instalada é de 129 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 315 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

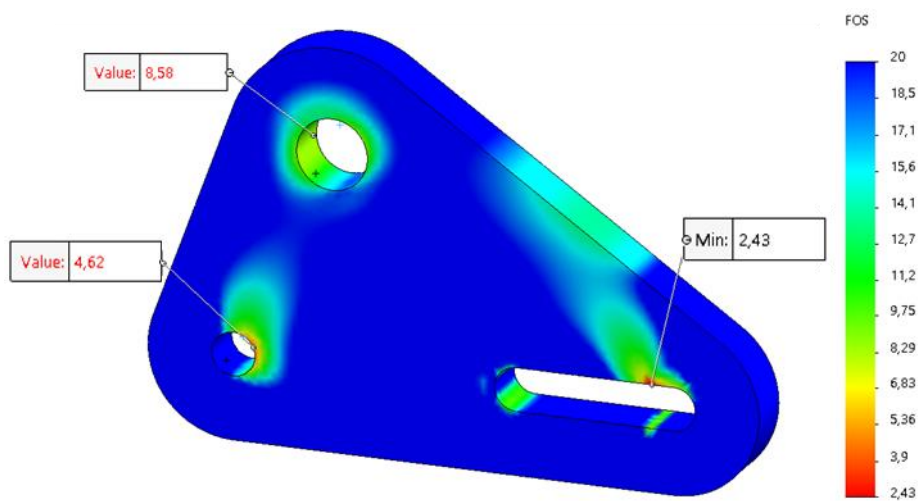


Figura 3.46 - Fator de segurança na ferramenta atual

A ferramenta atual apresenta um fator de segurança de aproximadamente 2,43, este valor é obtido na zona de aplicação do parafuso que faz a ligação com a flange da secção de torre, tal como representado na Figura 3.46. Verifica-se também que nos dois furos restantes o fator de segurança é superior ao valor anteriormente registado. Este valor é ótimo para o tipo de aplicação, estando assim do lado da segurança no que diz respeito à resistência do material quando sujeito às cargas aplicadas.

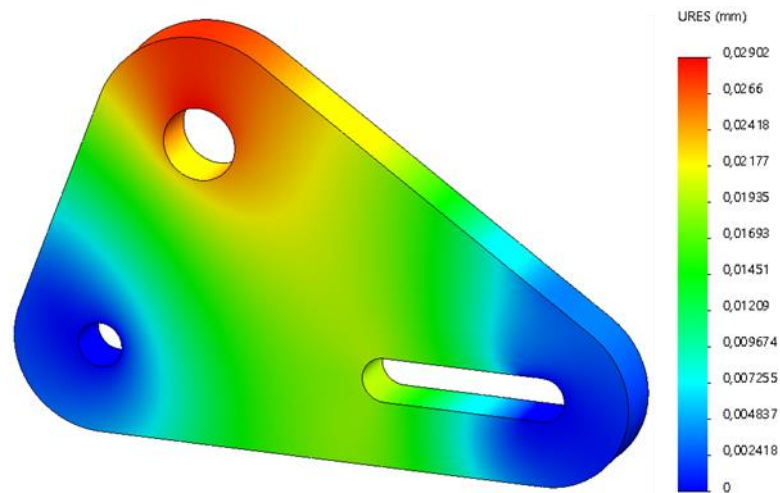


Figura 3.47 - Deslocamento máximo na ferramenta atual

De acordo com a Figura 3.47, o deslocamento máximo localiza-se no furo onde é aplicada a força. O deslocamento máximo é de 0,02902 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,02902 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{D} = \frac{122583,125}{0,02902} = 622,5 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{622,5}{28,5} = 21,84 \text{ N/(mm}^3 \cdot \text{kg)} \end{aligned}$$

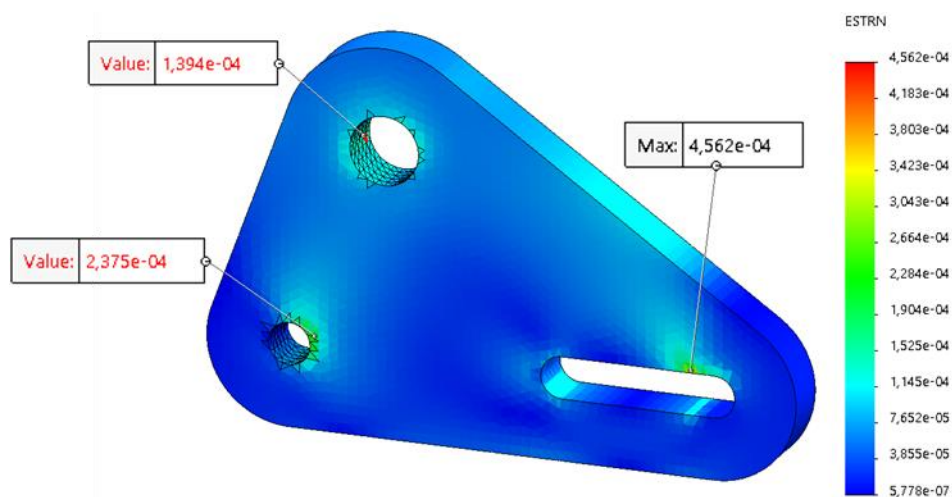


Figura 3.48 - Deformação elástica na ferramenta atual

De acordo com a Figura 3.48, o valor da deformação elástica é de $4,562 \times 10^{-4}$, este localiza-se nas imediações das furações, onde está aplicada a força e os parafusos, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em domínio elástico.

3.3.3.2 Ferramenta otimizada 1

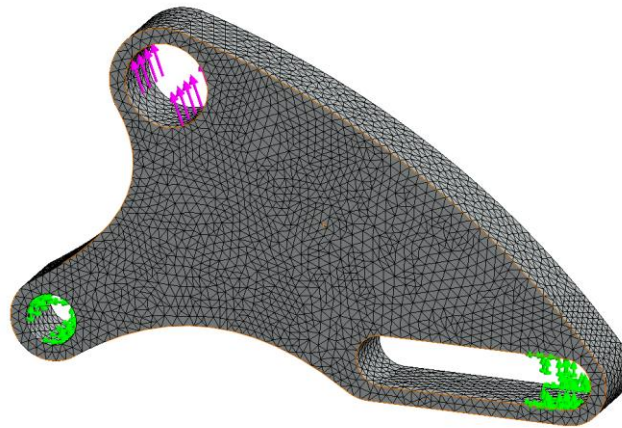


Figura 3.49 - Aplicação das condições de fronteira na ferramenta otimizada 1

As condições de fronteira estão representadas na Figura 3.49. A fixação da peça é feita através de dois parafusos M30, representados a verde, e aplicação de uma força vertical com inclinação 20° relativamente ao eixo y , representado a rosa. Foi gerada uma malha tetraédrica para discretizar a geometria, com 100496 nós e 67787 elementos.

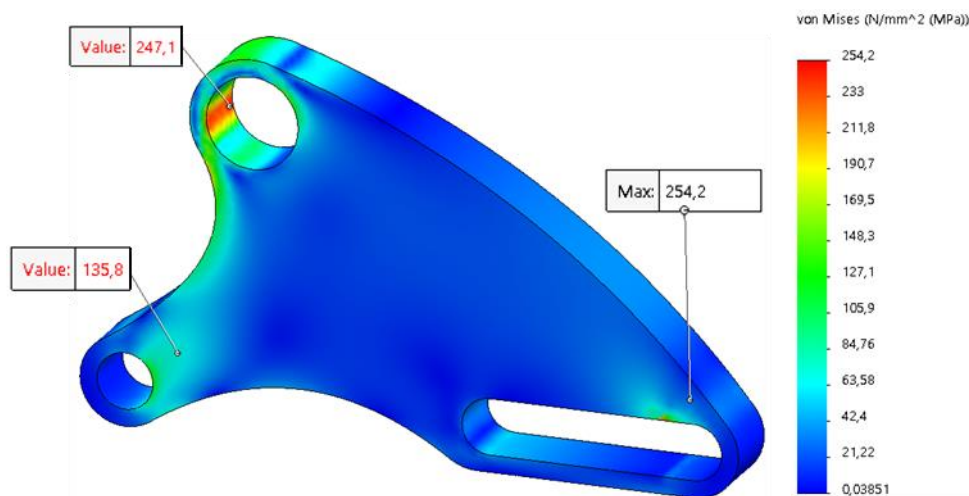


Figura 3.50 – Tensões equivalentes de von Mises instaladas na ferramenta otimizada 1

De acordo com a Figura 3.50, verifica-se a existência de maior concentração de tensões nas zonas de fixação e aplicação da força. A tensão máxima instalada é de 254 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 315 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

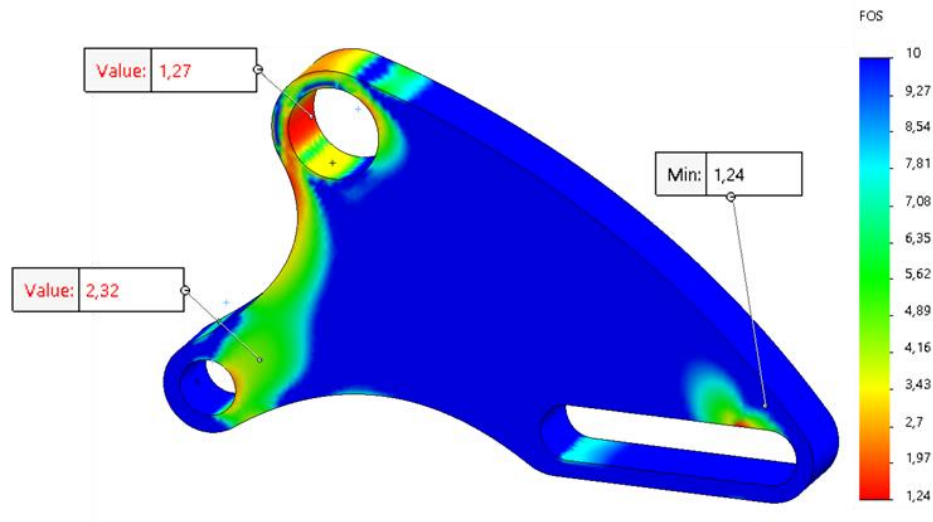


Figura 3.51 - Fator de segurança na ferramenta otimizada 1

A ferramenta apresenta um fator de segurança de aproximadamente 1,24, este valor é obtido na zona de aplicação do parafuso que faz a ligação com a flange da secção de torre, tal como representado na Figura 3.51. Verifica-se também que nos dois furos restantes o fator de segurança é superior ao valor anteriormente registado. Este valor é aceitável para o tipo de aplicação e uma vez que já foi aplicado um fator de segurança na tensão de cedência do material e na carga máxima admitida pela ferramenta.

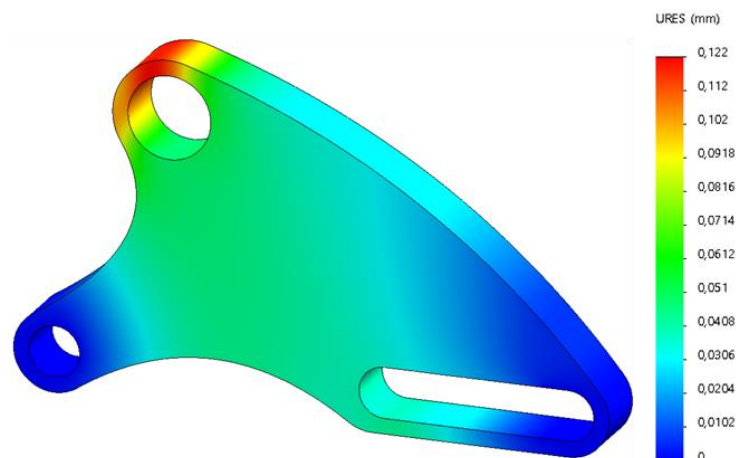


Figura 3.52 - Deslocamento máximo na ferramenta otimizada 1

De acordo com a Figura 3.52, o deslocamento máximo localiza-se no furo onde é aplicada a força. O deslocamento máximo é de 0,1244 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,1244 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{\Delta} = \frac{122583,125}{0,1244} = 145,21 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{145,21}{13,2} = 11 \text{ N/(mm}^3 * \text{kg)} \end{aligned}$$

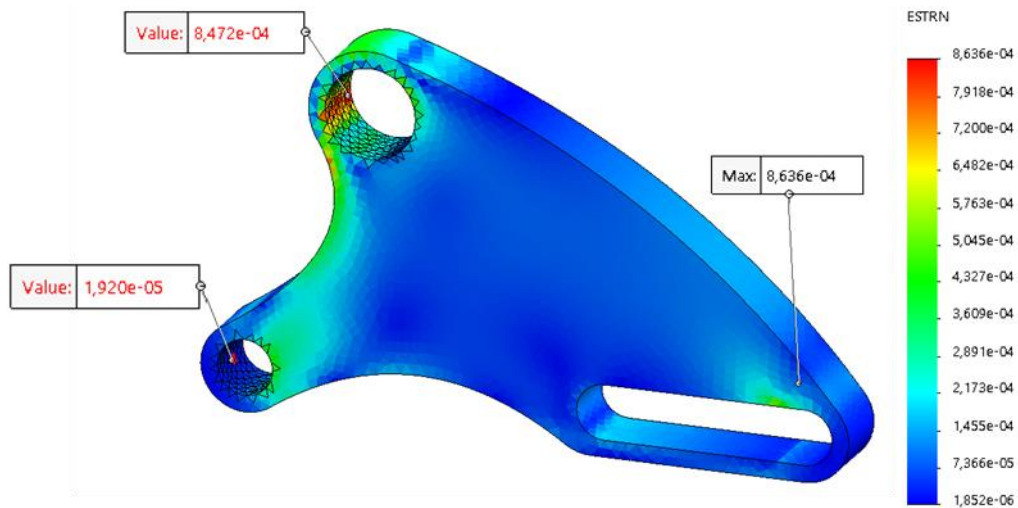


Figura 3.53 - Deformação elástica na ferramenta otimizada 1

De acordo com a Figura 3.53, o valor da deformação elástica é de $8,636 \times 10^{-4}$, este localiza-se nas imediações das furações, onde está aplicada a força e os parafusos, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em domínio elástico.

3.3.3.3 Ferramenta otimizada 2

Foram efetuadas as simulações estabelecidas anteriormente, recorrendo ao software Solidworks para a geometria da ferramenta otimizada 2.



Figura 3.54 - Aplicação das condições fronteira na ferramenta otimizada 2

As condições fronteira estão representadas na Figura 3.54. A fixação da peça é através de dois parafusos M30, representado a verde, e aplicação de uma força vertical com inclinação 20° relativamente ao eixo y , representado a rosa. Foi gerada uma malha tetraédrica para discretizar a geometria, com 123203 nós e 82053 elementos.

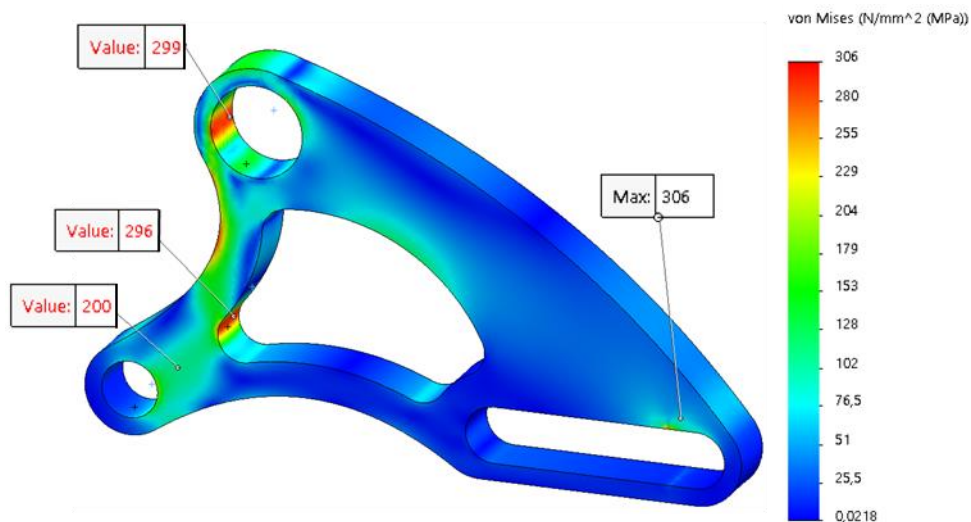


Figura 3.55 – Tensões equivalentes de von Mises instaladas na ferramenta otimizada 2

De acordo com a Figura 3.55, verifica-se a existência de maior concentração de tensões nas zonas de fixação, aplicação da força e no corte efetuado no seio da ferramenta obtido através da otimização estrutural. A tensão máxima instalada na ferramenta é de 306 MPa, sendo inferior à tensão de cedência do material, 315 MPa, não sofrendo assim deformação plástica.

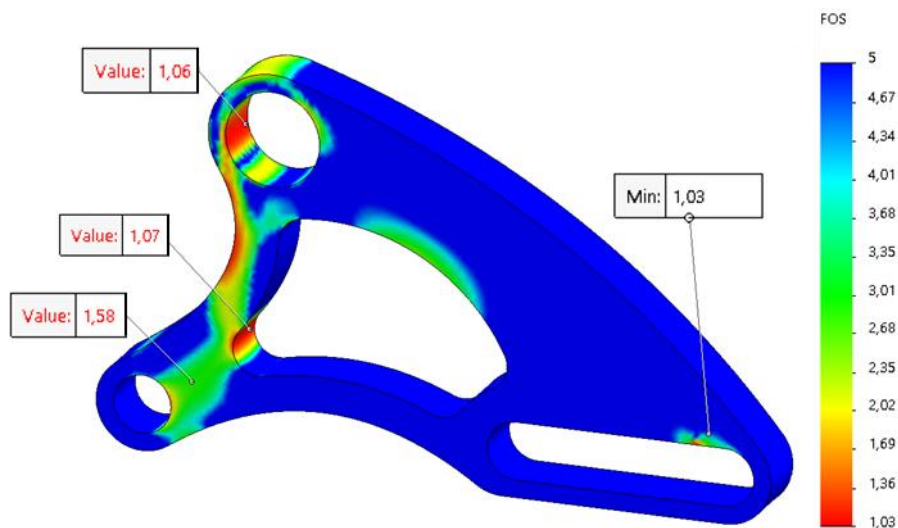


Figura 3.56 - Fator de segurança na ferramenta otimizada 2

A ferramenta otimizada apresenta um fator de segurança de aproximadamente 1,03, este valor é obtido na zona de aplicação do parafuso que faz a ligação com a flange da secção de torre, tal como representado na Figura 3.56. Verifica-se também que nos dois furos restantes e no corte efetuado no seio da ferramenta, o fator de segurança é superior ao valor anteriormente registado. Este valor é aceitável para o tipo de aplicação e uma vez que já foi aplicado um fator de segurança na tensão de cedência do material e na carga máxima admitida pela ferramenta.

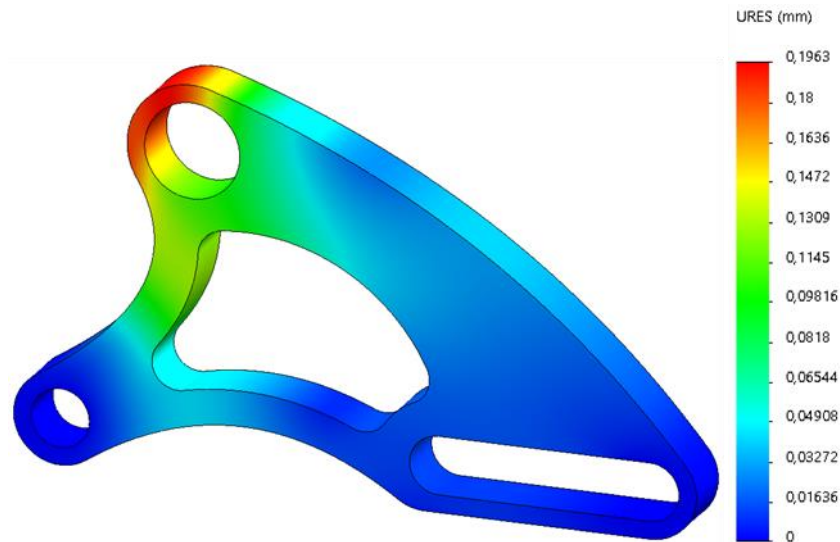


Figura 3.57 - Deslocamento máximo na ferramenta otimizada 2

De acordo com a Figura 3.57, o deslocamento máximo localiza-se no furo onde é aplicada a força. O deslocamento máximo é de 0,1963 mm. Através de cálculos é possível obter a rigidez da peça em função da massa:

$$\begin{aligned} \text{Deslocamento máximo} &= 0,1963 \text{ mm} \\ \text{Rigidez} &= \frac{F}{\Delta} = \frac{122583,125}{0,1963} = 92,03 \text{ N/mm}^3 \\ \text{Rigidez em função da massa} &= \frac{92,03}{7,9} = 11,6 \text{ N}/(\text{mm}^3 * \text{kg}) \end{aligned}$$

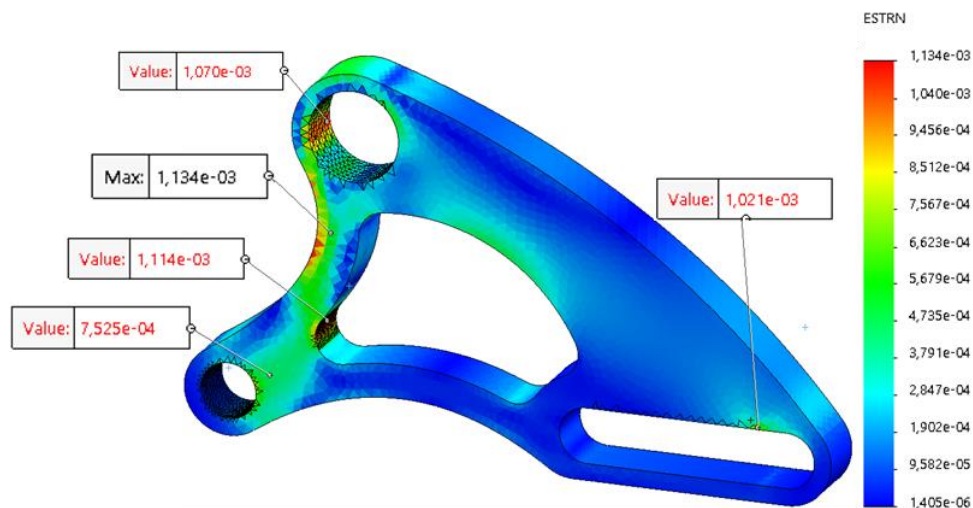
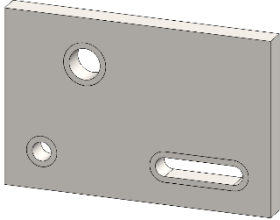
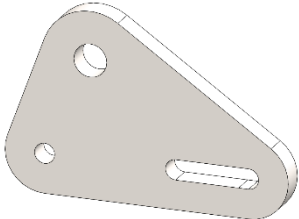
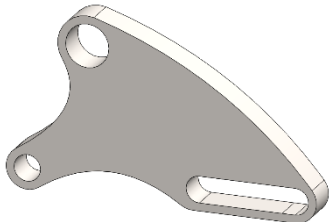
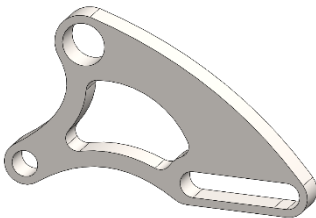


Figura 3.58 - Deformação elástica na ferramenta otimizada 2

De acordo com a Figura 3.58, o valor máximo da deformação elástica é de $1,134 \times 10^{-3}$, este localiza-se numa zona onde a redução de massa era necessária, como visto anteriormente, indicando assim que a peça se encontra ainda em domínio elástico.

3.3.4 Conclusões

Tabela 24 - Resultados da otimização estrutural para a ferramenta de elevação da secção de torre

Geometria	Massa (kg)	Redução de massa (%)	Rigidez em função da massa $N / (mm^3 * kg)$	Fator de segurança $(\frac{\sigma_{vonMises}}{\sigma_{limite}} < 1)$
	41,8	0%	-	-
	28,5	31,8%	21,84	2,43
	13,2	68,4%	11	1,24
	7,9	81,1%	11,6	1,03

De acordo com os resultados obtidos, Tabela 24, verifica-se que a redução de massa tem impacto na rigidez estrutural da peça, bem como no fator de segurança. Apesar disto acontecer, o fator de segurança e a rigidez mantêm-se dentro dos valores permitidos para que a ferramenta suporte as condições impostas inicialmente.

De entre todas as geometrias, a ferramenta otimizada 2 é aquela que apresenta uma diminuição considerável de massa relativamente à ferramenta em fase pré-fabrico. Comparativamente à ferramenta atual, a ferramenta otimizada 2, apresenta uma redução de aproximadamente 50% da sua massa total. Esta otimização não permite apenas reduzir a massa da peça, irá consequentemente diminuir o custo do material e transporte da ferramenta bem como todos os processos associados à instalação, o que implica um melhoramento significativo na *performance* geral da peça.

CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

4.1 CONCLUSÕES

4 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

4.1 CONCLUSÕES

Nesta dissertação foi estudada a otimização estrutural quando combinada com diferentes métodos discretos.

No desenvolver da dissertação, primeiro, foi feita a validação dos métodos numéricos utilizados, RPIM e NNRPIM, para se poder prosseguir com segurança para o estudo da otimização estrutural. A validação consistiu na análise de estruturas presentes na bibliografia, em que são comparados os resultados obtidos com aqueles já existentes. Foram efetuadas algumas validações, começando pela análise de estruturas mais simples até estruturas com o grau de complexidade maior. Validados os métodos, procedeu-se à resolução do problema de otimização de um componente mecânico existente na indústria eólica.

Todo o processo de validação dos métodos e obtenção dos resultados foi efetuado com recurso ao software *Finite Element and Meshless Methods Analysis Software (FEMAS)*, disponível em cmech.webs.com e que corre na plataforma MATLAB. Foram utilizados outros dois *softwares*, o SolidWorks para construir os modelos 3D e efetuar as análises pós-otimização estrutural e o FEMAP para construir as geometrias 2D e preparação do modelo para importação no FEMAS.

No final de cada capítulo foram comparados os resultados obtidos entre os três métodos (FEM, RPIM e NNRPIM) retirando assim possíveis conclusões.

No trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação, foi possível melhorar topologicamente diferentes componentes estruturais para aplicações industriais. Do qual se destaca o melhoramento significativo do caso real da ferramenta presente na indústria eólica. Esta ferramenta que é utilizada em grande número para exercer trabalhos de elevação, é bastante solicitada e usada no processo de instalação da torre de uma turbina eólica. Posto isto, tornava-se de enorme importância reduzir todos os custos associados aos materiais, fabrico, instalação, armazenamento e transporte. A otimização estrutural é o processo ideal para atingir estes objetivos, permitindo economizar procedimentos e aumentar a *performance* da ferramenta. Com este processo de otimização foi possível reduzir a massa total da peça em 50%, não comprometendo, de um modo geral, a função que esta ferramenta desempenha. Seria de grande interesse que esta ferramenta fosse impressa, em molde 3D, e fabricada industrialmente para que se pudesse, através de ensaios mecânicos, obter os valores reais dos esforços a que se encontra sujeita durante o seu tempo útil de vida. Surgindo assim um trabalho futuro a desenvolver mais aprofundado, e com grande relevância não

só para a indústria como também para o processo de validação da otimização estrutural através dos métodos sem malha.

No que diz respeito aos métodos utilizados ao longo da dissertação para efetuar a otimização estrutural, é possível concluir que o FEM é o método de eleição na indústria. No entanto, os métodos sem malha apresentam grande potencial de melhoria destes processos, uma vez que apresentam resultados muito semelhantes aos resultados obtidos com o FEM. Apesar disso, os métodos sem malha, como se pode observar ao longo da dissertação, apresentam maior custo computacional no processo de otimização estrutural. Pelo que o seu uso em grande escala, depende do poder computacional e consequentemente da tecnologia presente na indústria.

Ao longo da presente dissertação surgiram algumas limitações, tais como:

- A otimização estrutural de geometrias tridimensionais (3D), era inviável, grande parte devido às limitações do equipamento disponível, que tornavam o custo computacional e tempo laboral inportáveis. Como também, o *software* FEMAS, que não se encontra completamente otimizado para suportar modelos de grande escala.
- A utilização de diferentes softwares ao longo do processo, perfazendo um total de 3; FEMAS em plataforma MATLAB, FEMAP e SolidWorks fez com que todo o processo se tornasse mais demorado e mais complexo.
- Encontrar os parâmetros ótimos para que se pudesse obter uma otimização estrutural uniforme e sem grande distorção.

Relativamente a trabalhos futuros e/ou melhorias, existem alguns pontos essenciais:

- De modo a enriquecer esta dissertação e obter a validação experimental, seria necessário efetuar impressões 3D dos modelos otimizados de modo a efetuar testes mecânicos semelhantes ao tipo de carregamento a que o componente está sujeito durante a sua vida útil, dando assim uma perceção mais realista de todo este processo. Este ponto é essencial no caso da ferramenta existente na indústria eólica, pois poderia ser implementada uma melhoria no processo de fabrico da ferramenta e sendo assim uma forma de validar estes processos de otimização com caso existente na indústria.
- Melhoramento do algoritmo do software FEMAS, de modo a suportar modelos com maior número de elementos, e geometrias 3D mais complexas, reduzindo o custo computacional da análise.
- Estudo de casos reais mais complexos presentes na indústria, de modo a perceber mais aprofundadamente o comportamento dos métodos sem malha.
- Estudo de todos os parâmetros existentes usados nos métodos sem malha, como é o caso das células de influência, bases polinomiais, parâmetros c e p , nós de influência e pontos de integração.

O trabalho desenvolvido ao longo da dissertação mostra que os métodos sem malha usados, RPIM e NNRPIM, apresentam bons resultados comparativamente ao método FEM.

As grandes vantagens dos métodos numéricos, em simultâneo com o desenvolvimento dos processos de fabrico, tais como maquinagem, fundição, fabrico de materiais compósitos, etc., permitem criar estruturas mais eficientes com geometrias inovadoras.

Os métodos sem malha são ainda pouco estudados, e a combinação dos métodos sem malha com algoritmos de otimização é ainda mais rara. Como tal, o desenvolvimento deste tema representa uma oportunidade. A otimização estrutural combinada com os métodos sem malha revelou ser eficiente e produzir soluções interessantes, o que poderá introduzir novas escolhas da indústria. Este trabalho contribui para o alargamento do campo de aplicação dos métodos sem malha na mecânica computacional.

**BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES
DE INFORMAÇÃO**

5 BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

- [1] G. R. Liu, *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. Boca Raton, FL 33487-2742: CRC press, 2009.
- [2] I. Babuška, U. Banerjee, and J. E. Osborn, "Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach," *Acta Numer.*, vol. 12, pp. 1–125, May 2003, doi: 10.1017/S0962492902000090.
- [3] J.-P. Geng, K. B. C. Tan, and G.-R. Liu, "Application of finite element analysis in implant dentistry: A review of the literature," *J. Prosthet. Dent.*, vol. 85, no. 6, pp. 585–598, Jun. 2001, doi: 10.1067/mpr.2001.115251.
- [4] O. C. Zienkiewicz, "Origins, milestones and directions of the finite element method—A personal view," in *Handbook of numerical analysis*, vol. 4, P. G. C. and J. L. Lions, Ed. Wales UK: Elsevier, 1996, pp. 3–67.
- [5] Roque, Carla. 2007. "Métodos sem malha para a análise de placas e cascas compósitas" Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. <https://hdl.handle.net/10216/12978>.
- [6] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, and M. Duflot, "Meshless methods: A review and computer implementation aspects," *Math. Comput. Simul.*, vol. 79, no. 3, pp. 763–813, Dec. 2008, doi: 10.1016/j.matcom.2008.01.003.
- [7] J. Belinha, *Meshless Methods in Biomechanics*, vol. 16. Cham: Springer International Publishing, 2014.
- [8] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon, "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements," *Comput. Mech.*, vol. 10, no. 5, pp. 307–318, 1992, doi: 10.1007/BF00364252.
- [9] Y. Y. Lu, T. Belytschko, and L. Gu, "A new implementation of the element free Galerkin method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 113, no. 3–4, pp. 397–414, Mar. 1994, doi: 10.1016/0045-7825(94)90056-6.
- [10] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 181, no. 3, pp. 375–389, Dec. 1977, doi: 10.1093/mnras/181.3.375.
- [11] W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee, and T. Belytschko, "Reproducing kernel particle methods for structural dynamics," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, no. 10, pp. 1655–1679, May 1995, doi: 10.1002/nme.1620381005.
- [12] S. N. Atluri and T. Zhu, "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics," *Comput. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 117–127, Aug. 1998, doi: 10.1007/s004660050346.
- [13] S. De and K. J. Bathe, "The method of finite spheres," *Comput. Mech.*, vol. 25, no. 4, pp. 329–345, Apr. 2000, doi: 10.1007/s004660050481.
- [14] E. J. Kansa, "Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 19, no. 8–9, pp. 127–145, Jan. 1990, doi: 10.1016/0898-1221(90)90270-T.
- [15] E. J. Kansa, "Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 19, no. 8–9, pp. 147–161, Jan. 1990, doi: 10.1016/0898-1221(90)90271-K.
- [16] R. L. Hardy, "Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988," *Comput. Math. with Appl.*, vol. 19, no. 8–9, pp. 163–208, Jan. 1990, doi: 10.1016/0898-1221(90)90272-L.
- [17] X.-Z. Hon, Yiu-Chung and Mao, "A radial basis function method for solving

- options pricing model," *Financ. Eng.*, vol. 8, pp. 31–50, 1999.
- [18] K. M. Liew, X. L. Chen, and J. N. Reddy, "Mesh-free radial basis function method for buckling analysis of non-uniformly loaded arbitrarily shaped shear deformable plates," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, no. 3–5, pp. 205–224, Jan. 2004, doi: 10.1016/j.cma.2003.10.002.
- [19] G. Y. ZHANG *et al.*, "The upper bound property for solid mechanics of the linearly conforming radial point interpolation method (LC-RPIM)," *Int. J. Comput. Methods*, vol. 04, no. 03, pp. 521–541, Sep. 2007, doi: 10.1142/S0219876207001308.
- [20] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, and A. J. M. Ferreira, "Radial basis function method applied to doubly-curved laminated composite shells and panels with a General Higher-order Equivalent Single Layer formulation," *Compos. Part B Eng.*, vol. 55, pp. 642–659, Dec. 2013, doi: 10.1016/j.compositesb.2013.07.026.
- [21] L. Liu, L. P. Chua, and D. N. Ghista, "Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates," *Compos. Struct.*, vol. 78, no. 1, pp. 58–69, Mar. 2007, doi: 10.1016/j.compstruct.2005.08.010.
- [22] J. G. Wang and G. R. Liu, "On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 191, no. 23–24, pp. 2611–2630, Mar. 2002, doi: 10.1016/S0045-7825(01)00419-4.
- [23] S. R. Idelsohn, E. Oñate, N. Calvo, and F. Del Pin, "The meshless finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 58, no. 6, pp. 893–912, Oct. 2003, doi: 10.1002/nme.798.
- [24] N. Sukumar, B. Moran, A. Yu Semenov, and V. V. Belikov, "Natural neighbour Galerkin methods," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, no. 1, pp. 1–27, Jan. 2001, doi: 10.1002/1097-0207(20010110)50:1<1::AID-NME14>3.0.CO;2-P.
- [25] E. Cueto, M. Doblar, and L. Gracia, "Imposing essential boundary conditions in the natural element method by means of density-scaled α -shapes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 49, no. 4, pp. 519–546, Oct. 2000, doi: 10.1002/1097-0207(20001010)49:4<519::AID-NME958>3.0.CO;2-0.
- [26] L. M. J. S. Dinis, R. M. Natal Jorge, and J. Belinha, "Analysis of 3D solids using the natural neighbour radial point interpolation method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 196, no. 13–16, pp. 2009–2028, Mar. 2007, doi: 10.1016/j.cma.2006.11.002.
- [27] J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, and R. M. Natal Jorge, "Analysis of thick plates by the natural radial element method," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 76, pp. 33–48, Nov. 2013, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.08.011.
- [28] E. Oñate, *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.
- [29] S. F. Moreira, J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, and R. M. N. Jorge, "The anisotropic elasto-plastic analysis using a natural neighbour RPIM version," *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng.*, vol. 39, no. 5, pp. 1773–1795, May 2017, doi: 10.1007/s40430-016-0603-x.
- [30] X. Huang and Y. M. Xie, *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [31] J. S. Jensen, "Topology optimization," in *Wave Propagation in Linear and Nonlinear Periodic Media*, vol. 540, Vienna: Springer Vienna, 2012, pp. 109–159.
- [32] A. G. M. Michell, "LVIII. The limits of economy of material in frame-structures," *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 8, no. 47, pp. 589–597, Nov. 1904, doi: 10.1080/14786440409463229.
- [33] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, no. 2, pp. 197–224, Nov. 1988, doi: 10.1016/0045-7825(88)90086-2.
- [34] P. Tanskanen, "The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 191, no. 47–48, pp. 5485–5498, Nov. 2002, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00464-4.

- [35] M. P. Bendsøe, "Optimal shape design as a material distribution problem," *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202, Dec. 1989, doi: 10.1007/BF01650949.
- [36] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, "Material interpolation schemes in topology optimization," *Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch.)*, vol. 69, no. 9–10, pp. 635–654, Nov. 1999, doi: 10.1007/s004190050248.
- [37] H. P. Mlejnek, "Some aspects of the genesis of structures," *Struct. Optim.*, vol. 5, no. 1–2, pp. 64–69, Mar. 1992, doi: 10.1007/BF01744697.
- [38] A. Rietz, "Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 21, no. 2, pp. 159–163, Apr. 2001, doi: 10.1007/s001580050180.
- [39] J. D. Deaton and R. V. Grandhi, "A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 49, no. 1, pp. 1–38, Jan. 2014, doi: 10.1007/s00158-013-0956-z.
- [40] M. Stolpe and K. Svanberg, "An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 22, no. 2, pp. 116–124, Sep. 2001, doi: 10.1007/s001580100129.
- [41] T. E. Bruns, "A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid–void topology optimization," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 30, no. 6, pp. 428–436, Dec. 2005, doi: 10.1007/s00158-005-0537-x.
- [42] M. Zhou and G. I. N. Rozvany, "The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 89, no. 1–3, pp. 309–336, Aug. 1991, doi: 10.1016/0045-7825(91)90046-9.
- [43] Y. M. Xie and G. P. Steven, "A simple evolutionary procedure for structural optimization," *Comput. Struct.*, vol. 49, no. 5, pp. 885–896, Dec. 1993, doi: 10.1016/0045-7949(93)90035-C.
- [44] G. MAIER, "Limit Design in the Absence of a Given Layout: A Finite Element, Zero-One Programming Approach*," *J. Struct. Mech.*, vol. 1, no. 2, pp. 213–230, Jan. 1972, doi: 10.1080/03601217208905340.
- [45] E. Sugawara and H. Nikaido, *CAD/CAM Robotics and Factories of the Future*, vol. 58, no. 12. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989.
- [46] M. Zhou and G. I. N. Rozvany, "On the validity of ESO type methods in topology optimization," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 21, no. 1, pp. 80–83, Mar. 2001, doi: 10.1007/s001580050170.
- [47] O. M. Querin, G. P. Steven, and Y. M. Xie, "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm," *Eng. Comput.*, vol. 15, no. 8, pp. 1031–1048, Dec. 1998, doi: 10.1108/02644409810244129.
- [48] X. Y. Yang, Y. M. Xie, G. P. Steven, and O. M. Querin, "Bidirectional Evolutionary Method for Stiffness Optimization," *AIAA J.*, vol. 37, no. 11, pp. 1483–1488, Nov. 1999, doi: 10.2514/2.626.
- [49] R. Picelli, R. van Dijk, W. M. Vicente, R. Pavanello, M. Langelaar, and F. van Keulen, "Topology optimization for submerged buoyant structures," *Eng. Optim.*, vol. 49, no. 1, pp. 1–21, Jan. 2017, doi: 10.1080/0305215X.2016.1164147.
- [50] H. Qiao, S. Wang, T. Zhao, and H. Tang, "Topology optimization for lightweight cellular material and structure simultaneously by combining SIMP with BESO," *J. Mech. Sci. Technol.*, vol. 33, no. 2, pp. 729–739, Feb. 2019, doi: 10.1007/s12206-019-0127-2.
- [51] O. Sigmund and J. Petersson, "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima," *Struct. Optim.*, vol. 16, no. 1, pp. 68–75, Aug. 1998, doi: 10.1007/BF01214002.
- [52] X. Huang and Y. M. Xie, "Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 43, no. 14, pp. 1039–1049, Oct. 2007, doi: 10.1016/j.finel.2007.06.006.
- [53] K. Ghabraie, "An improved soft-kill BESO algorithm for optimal distribution of single or multiple material phases," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 52, no. 4, pp. 773–790, Oct. 2015, doi: 10.1007/s00158-015-1268-2.