



# **CRIAÇÃO DE VALOR PARA AS ORGANIZAÇÕES: SIMULAÇÃO DE TEMPOS ATÉ À FALHA DE ATIVOS TANGÍVEIS**

**JOÃO FILIPE VIEIRA GOMES**

março de 2019

**CRIAÇÃO DE VALOR PARA AS ORGANIZAÇÕES:  
SIMULAÇÃO DE TEMPOS ATÉ À FALHA DE ATIVOS  
TANGÍVEIS**

João Filipe Vieira Gomes  
Nº 1130382

**2019**

Instituto Superior de Engenharia do Porto  
Departamento de Engenharia Mecânica



POLITÉCNICO  
DO PORTO

isep

# **CRIAÇÃO DE VALOR PARA AS ORGANIZAÇÕES: SIMULAÇÃO DE TEMPOS ATÉ À FALHA DE ATIVOS TANGÍVEIS**

João Filipe Vieira Gomes  
Nº 1130382

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação do Professor Doutor Jorge Mendonça (JPM) e da Professora Doutora Susana Nicola (SCA).

**2019**

Instituto Superior de Engenharia do Porto  
Departamento de Engenharia Mecânica



POLITÉCNICO  
DO PORTO

isep

# JÚRI

## **Presidente**

Professor Doutor Raul Duarte Salgueiral Gomes Campilho

Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Superior de Engenharia do Porto

## **Orientador**

Professor Doutor Jorge Manuel Pires Mendonça

Professor Adjunto do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto

## **Coorientador**

Professora Doutora Susana Cláudia Nicola de Araújo

Professora Adjunta do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto

## **Arguentes**

Professora Doutora Maria de Lurdes Vasconcelos Babo e Silva

Professora Adjunta da Área Científica de Matemática do Instituto Superior de Contabilidade e Administração do Porto



## AGRADECIMENTOS

Agradeço imenso ao Professor Dr. Jorge Mendonça e à Professora Dra. Susana Nicola por me terem ajudado a percorrer esta etapa importante da minha vida universitária, pois sem eles não teria conseguido.

Deixo também um forte abraço aos meus colegas e amigos do ISEP, que me ajudaram a esclarecer dúvidas importantes sobre a elaboração da tese.

Por fim, mas não menos importante, deixo um agradecimento especial aos meus pais e à minha irmã, pois deram-me um apoio incondicional nos momentos mais difíceis.



## PALAVRAS CHAVE

Gestão de ativos, modelos matemáticos, tempos até à falha, distribuição Weibull, simulação

## RESUMO

Devido ao constante desenvolvimento tecnológico e económico, a exigência no que se refere à gestão de ativos está cada vez mais elevada. Com a alta competitividade entre as empresas surgiu a necessidade de utilizar eficientemente os recursos disponíveis e melhorar a fiabilidade dos ativos físicos com vista a prolongar a disponibilidade dos equipamentos, estabelecendo vantagem competitiva perante os concorrentes diretos.

Com um olhar inicial atento à revisão bibliográfica sobre a relação entre a gestão e a fiabilidade de ativos, a presente dissertação tem o objetivo de estudar modelos matemáticos que se adequam aos tempos até à falha dos mesmos (gerados aleatoriamente), nomeadamente a distribuição Weibull, a distribuição exponencial, a distribuição normal e a distribuição lognormal. O foco central do estudo é a estimação do conjunto de parâmetros de cada uma das distribuições referidas, através da simulação, analisando-os estatisticamente quanto à sua média, ao seu enviesamento, à sua variância e ao seu erro quadrático médio.

A estimação dos parâmetros foi efetuada segundo dois métodos: o método dos mínimos quadrados e o método de máxima verossimilhança. O método dos mínimos quadrados permite estimar os parâmetros com base na reta de melhor ajuste para um determinado conjunto de dados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças (“resíduos”) entre os valores estimados e os valores observados. E o método de máxima verossimilhança que permite obter a estimação dos parâmetros a partir da maximização da função de verossimilhança das distribuições analisadas.



**KEYWORDS**

*Asset management, mathematical models, times to failure, Weibull distribution, simulation*

**ABSTRACT**

*Due to the constant technological and economic development, the requirement regarding the asset management is increasingly high. With the high competitiveness among companies, there was a need to efficiently use available resources and improve the reliability of physical assets in order to extend equipment availability, establishing a competitive advantage over direct competitors.*

*The aim of this dissertation is to study mathematical models that are adequate to the time to failure (randomly generated), namely the Weibull distribution, the exponential distribution, the normal distribution, and the lognormal distribution. The central focus of the study is the estimation of the set of parameters of each of the referred distributions through the simulation, analyzing them statistically as to its mean, its bias, its variance and its mean square error.*

*The estimation of the parameters will be done according to two methods: the least squares method and the maximum likelihood method. The least squares method allows estimating the parameters based on the best fit line for a given dataset, minimizing the sum of the squares of the differences ("residuals") between the estimated values and the observed values. The maximum likelihood allows to obtain the estimation of the parameters from the maximization of the likelihood function of the analyzed distributions.*



## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### Lista de Abreviaturas

AER	<i>Audio Electric Research</i>
AIC	<i>Akaike Information Criteria</i>
CBRM	<i>Condition Based Risk Management</i>
DHR	<i>Decreasing Hazard Rate</i>
e.q.m	Estimadores de máxima verossimilhança
EAM	<i>Enterprise Asset Management</i>
EQM	Erro Quadrático Médio
ERP	<i>Enterprise Resource Planning</i>
f.d.p	Função Densidade de Probabilidade
GARS	<i>Global Asset Recovery Solutions</i>
GQT	Gestão da Qualidade Total
HI 1	<i>Health Index 1</i>
HI 2	<i>Health Index 2</i>
HROF	<i>High Risk Of Failure</i>
IBM	<i>International Business Machines</i>
IHR	<i>Increasing Hazard Rate</i>
KPI	<i>Key Performance Indicator</i>
KTH	<i>Kungliga Tekniska Högskolan</i>
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MMV	Método de Máxima Verossimilhança
MTTF	<i>Mean Time to Failure</i>
OFGEM	<i>Office of Gas and Electricity Markets</i>
P&D	Pesquisa e desenvolvimento
RADPOW	<i>Reliability Assessment of electrical Distribution POWER systems</i>
RBAM	<i>Risk Based Asset Management</i>
RCAM	<i>Reliability Centered Asset Management</i>
RCM	<i>Reliability Centered Maintenance</i>
RFID	<i>Radio Frequency Identification</i>
ROA	<i>Return on Assets</i>
SOA	<i>Service Oriented Architecture</i>
TI	Tecnologia da Informação
TLAM	<i>Total Lifecycle Asset Management</i>
TQM	<i>Total Quality Management</i>
UAL	United Airlines

## Lista de Unidades

°F	Grau Fahrenheit
----	-----------------

## Lista de Símbolos

&	E
%	Porcentagem
=	Igual a
>	Maior que
$\geq$	Maior ou igual que
<	Menor que
$\leq$	Menor ou igual que
+	Soma
-	Subtração
·	Multiplicação
/	Divisão
$-\infty$	Infinito positivo
$+\infty$	Infinito negativo
$\int$	Integral
$dx$	Diferencial
$f(t)$	Função densidade de probabilidade
$h(t)$	Função de risco
$H(t)$	Função de risco acumulada
$\lambda(t)$	Taxa de falhas
$R(t)$	Função de fiabilidade
$F(t)$	Função de infiabilidade
lim	Limite
log	Logaritmo de base dez
ln	Logaritmo natural ou neperiano
exp	Exponencial
$\beta$	Parâmetro de forma
$\eta$	Parâmetro de escala
$\tau$	Parâmetro de posição
$E(T); \mu$	Valor esperado ou média
$\sigma$	Desvio padrão
!	Fatorial
$\varepsilon$	Erro padrão
$\frac{\partial y}{\partial x}$	Parcial y sobre parcial x
$\chi^2$	Qui-quadrado
$\alpha$	Nível de confiança

## GLOSSÁRIO DE TERMOS

Arquitetura orientada a serviços	Modelo de desenvolvimento de <i>software</i> para componentes de aplicativos distribuídos que se insere no processo de reorganização dos departamentos de tecnologia da informação das organizações, permitindo a reutilização dos ativos existentes
Ativo	Recurso com valor económico controlado por uma organização de forma a proporcionar criação de valor
Distribuição Weibull	Distribuição mais comum para modelar dados de fiabilidade
<i>Enterprise Asset Management</i> (EAM)	Processo de gerir o ciclo de vida dos ativos tangíveis para maximizar o seu uso
Fiabilidade	A probabilidade de um sistema ou componente exercer uma função exigida durante um determinado período, sob condições operacionais especificadas
Gestão de Ativos	Ação coordenada de uma organização para criar valor através dos seus ativos
Gestão de ativos baseada no risco	Metodologia que reúne o conhecimento de engenharia e a experiência prática de ativos para definir e quantificar as suas condições atuais e futuras, os seus desempenhos e os seus riscos
Gestão de ativos centrada na fiabilidade	Técnica eficaz para executar a gestão de ativos com métodos quantitativos de tal forma que promove a minimização do custo total e a maximização da fiabilidade do sistema
Gestão de qualidade total	Estratégia de administração orientada a criar consciência da qualidade e melhoria contínua em todos os processos organizacionais
Gestão de risco de falha	Identificação, avaliação e priorização do risco de falha, seguidas da aplicação coordenada e económica de recursos para minimizar e controlar a probabilidade de falha
Gestão do tempo de ciclo total de ativos	Abordagem integrada para otimizar o lucro gerado ao longo de todo o ciclo de vida dos ativos



## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 – ETAPAS DA GESTÃO TOTAL DO CICLO DE VIDA DE ATIVOS (IBM GLOBAL BUSSINESS SERVICES, 2007)	38
FIGURA 2 – FLUXOGRAMA DAS ETAPAS DO MÉTODO RCAM (BERTLING, ALLAN, & ERIKSSON, 2003)	42
FIGURA 3 – EXEMPLO DE UM MODELO DE ENVELHECIMENTO PARA A SIMULAÇÃO DE ATIVOS (SCHNEIDER ET AL., 2006)	43
FIGURA 4 – TIPOS DE PROBABILIDADES CONDICIONAIS DE FALHAS (MOUBRAY, 1997A)	48
FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA CURVA DA BANHEIRA (FOGLIATTO & RIBEIRO, 2011)	48
FIGURA 6 – EFEITO DE $\beta$ NA F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	51
FIGURA 7 – EFEITO DE $\eta$ NA F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	53
FIGURA 8 – F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL PARA VÁRIOS VALORES DE $\lambda$	56
FIGURA 9 – FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DA EXPONENCIAL PARA VÁRIOS VALORES DE $\lambda$	56
FIGURA 10 – F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA UMA AMPLITUDE DE VALORES DE $\mu$	58
FIGURA 11 – F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA UMA AMPLITUDE DE VALORES DE $\sigma$	58
FIGURA 12 – F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL COM $\sigma$ VARIÁVEL	60
FIGURA 13 – F.D.P DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL COM $M$ VARIÁVEL	60
FIGURA 14 – CENSURA DO TIPO II (RAMOS, 2017)	64
FIGURA 15 – MÉDIAS DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$	86
FIGURA 16 – MEDIANAS DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$	86
FIGURA 17 – DESVIOS PADRÃO DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$	87
FIGURA 18 – HISTOGRAMA PARA AS PRIMEIRAS 5 FALHAS ( $\beta = 1$ E $\eta = 20000$ )	87
FIGURA 19 – HISTOGRAMA PARA AS PRIMEIRAS 8 FALHAS ( $\beta = 1$ E $\eta = 20000$ )	88
FIGURA 20 – HISTOGRAMA PARA AS PRIMEIRAS 10 FALHAS ( $\beta = 1$ E $\eta = 20000$ )	88
FIGURA 21 – INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA AS PRIMEIRAS 5, 8 E 10 FALHAS ( $\beta = 1$ )	94
FIGURA 22 – ESTRUTURA DE AVARIAS DO MOTOR DA AERONAVE	101
FIGURA 23 – TEMPO DE ESPERA <i>VERSUS SOFT LIFE</i> E MISL	102
FIGURA 24 – NÚMERO DE RECUPERAÇÕES DOS MÓDULOS <i>VERSUS SOFT LIFE</i> E MISL	102
FIGURA 25 – NÚMERO DE TROCAS DOS MOTORES <i>VERSUS SOFT LIFE</i> E MISL	103
FIGURA 26 – NÚMERO DE TROCAS (PLANEADAS E NÃO PLANEADAS) DO MOTOR <i>VERSUS SOFT LIFE</i> E MISL	103
FIGURA 27 – TEMPOS MÉDIOS ENTRE REPARAÇÕES PARA DIFERENTES VALORES DA <i>SOFT LIFE</i> E DA MISL	104
FIGURA 28 – RELAÇÃO DO TEMPO DE INDISPONIBILIDADE ANUAL E OS INTERVALOS DE INSPEÇÃO PARA OS 4 CASOS	107
FIGURA 29 – GRÁFICO DE PROBABILIDADE DE FALHAS A 1760°F	110
FIGURA 30 – GRÁFICO DE PROBABILIDADE DE FALHAS A 1800°F	110
FIGURA 31 – FUNÇÕES DE FIABILIDADE EM DIFERENTES TEMPERATURAS OPERACIONAIS	111
FIGURA 32 – TEMPOS MÉDIOS DE VIDA RESIDUAL EM DIFERENTES TEMPERATURAS OPERACIONAIS	111
FIGURA 33 – GRÁFICOS DE FALHAS CUMULATIVAS E MODELOS AJUSTADOS. (A) GERADOR DO GUINDASTE, (B) GERADOR DE ARRASTO, (C) ARMAÇÃO E (D) ARMAÇÃO EM A ( <i>A-FRAME</i> ).	113

FIGURA 34 – HISTOGRAMA DOS TEMPOS DE GARANTIA	115
FIGURA 35 – GRÁFICO DE PROBABILIDADE DE FALHA PARA OS DOIS PERÍODOS DE PRODUÇÃO APÓS DOIS ANOS DESDE O INÍCIO DA PRODUÇÃO	119
FIGURA 36 – GRÁFICO DE PROBABILIDADE DE FALHA APÓS DOIS ANOS DE OPERAÇÃO PARA AMBOS OS PERÍODOS DE PRODUÇÃO	119
FIGURA 37 – NÚMERO DE CÓPIAS ENTRE FALHAS <i>VERSUS</i> TEMPO (DIAS) E HISTOGRAMA DO NÚMERO DE CÓPIAS ENTRE FALHAS	122
FIGURA 38 – HISTOGRAMA DO TEMPO (EM DIAS) ENTRE FALHAS DA IMPRESSORA	122
FIGURA 39 – HISTOGRAMA DA MÉDIA DE CÓPIAS POR PERÍODO ENTRE FALHAS DA IMPRESSORA	123
FIGURA 40 – HISTOGRAMAS DO NÚMERO DE CÓPIAS ENTRE FALHAS E DO TEMPO ENTRE FALHAS DA <i>CLEANING WEB</i>	123
FIGURA 41 – HISTOGRAMA DO NÍVEL DE UTILIZAÇÃO ANTERIOR ÀS FALHAS DA <i>CLEANING WEB</i>	124
FIGURA 42 – FUNÇÃO DE RENOVAÇÃO DAS SUBSTITUIÇÕES DA <i>CLEANING WEB</i> <i>VERSUS</i> O NÚMERO DE CÓPIAS (MODELO DE MISTURA À ESQUERDA) E AO TEMPO ENTRE FALHAS (MODELO MULTIPLICATIVO À DIREITA)	127
FIGURA 43 – PROCESSO PONTUAL PARA AS FALHAS DA IMPRESSORA (NÚMERO DE COPIAS, À ESQUERDA, E TEMPOS ENTRE FALHAS, À DIREITA) COM AJUSTES DA FUNÇÃO DE POTÊNCIA	128
FIGURA 44 – FUNÇÕES DE INTENSIDADE ESTIMADAS PARA O NÚMERO DE CÓPIAS (À ESQUERDA) E O TEMPO ENTRE FALHAS (À DIREITA)	129

## ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO DOS ATIVOS INTANGÍVEIS (KAYO, 2002)	35
TABELA 2 – EXPRESSÕES DA RELAÇÃO ENTRE $F(T)$ , $R(T)$ , $H(T)$ E $H(T)$	47
TABELA 3 – COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO DA TAXA DE AVARIAS MEDIANTE OS VALORES DE $\beta$	52
TABELA 4 – EXPRESSÕES PERTENCENTES AO MODELO WEIBULL TRIPARAMÉTRICO	53
TABELA 5 – EXPRESSÕES PERTENCENTES À DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	55
TABELA 6 – TABELA ADAPTADA DO EXEMPLO DE (BARTHOLOMEW, 1957)	62
TABELA 7 – EXPRESSÕES DOS ESTIMADORES DE MÍNIMOS QUADRADOS PARA AS RESTANTES DISTRIBUIÇÕES (KECECIOGLU, 2002)	71
TABELA 8 – NÍVEIS DE CONFIANÇA E RESPETIVOS VALORES CRÍTICOS	75
TABELA 9 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$ ESTIMADOS ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	81
TABELA 10 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	81
TABELA 11 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\eta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	81
TABELA 12 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\eta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	81
TABELA 13 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	82
TABELA 14 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\eta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	82
TABELA 15 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\beta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	83
TABELA 16 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\eta$ ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	83
TABELA 17 – VALORES MÉDIOS DAS ESTIMATIVAS DE B E H	84
TABELA 18 – VALORES MEDIANOS DAS ESTIMATIVAS DE B E H	85
TABELA 19 – DESVIOS PADRÃO DAS ESTIMATIVAS DE B E H	85
TABELA 20 – ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DAS ESTIMATIVAS DE $\lambda$	89
TABELA 21 – DISTRIBUIÇÃO WEIBULL MODIFICADA NUMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL	90
TABELA 22 – DISTRIBUIÇÃO WEIBULL MODIFICADA NUMA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL	91
TABELA 23 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\mu$ DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	91
TABELA 24 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\sigma$ ESTIMADOS DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	91
TABELA 25 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\mu$ DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	92
TABELA 26 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\sigma$ DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	92

TABELA 27 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\mu$ DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	92
TABELA 28 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\sigma$ DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DO <i>MEDIAN RANK</i>	92
TABELA 29 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\mu$ DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	92
TABELA 30 – ESTIMATIVAS DESCRITIVAS DE $\sigma$ DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL ATRAVÉS DO MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	93
TABELA 31 – VALORES PERCENTUAIS DE FIABILIDADE PARA $\eta = 5000h$	95
TABELA 32 – VALORES PERCENTUAIS DE FIABILIDADE PARA $\eta = 5500h$	96
TABELA 33 – VALORES PERCENTUAIS DE FIABILIDADE PARA $\eta = 6000h$	96
TABELA 34 – DEZ PRINCIPAIS COMPONENTES INSERIDOS NA MANUTENÇÃO NÃO PROGRAMADA	98
TABELA 35 – PERCENTAGEM DE NFE'S NOS DEZ PRINCIPAIS COMPONENTES	99
TABELA 36 – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DAS DISTRIBUIÇÕES CONSIDERADAS	106
TABELA 37 – TEMPOS ATÉ À RUTURA OBTIDOS A 1760°F E 1800°F	109
TABELA 38 – PERCENTIS 50 PARA 1760°F E 1800°F	110
TABELA 39 – RESULTADOS PARA A DISTRIBUIÇÃO WEIBULL	116
TABELA 40 – INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL	116
TABELA 41 – RESULTADOS PARA A DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL	117
TABELA 42 – INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL	117
TABELA 43 – DADOS SIMULADOS A PARTIR DOS DOIS PERÍODOS DE PRODUÇÃO	118
TABELA 44 – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA MODELAÇÃO DO NÚMERO DE CÓPIAS ENTRE FALHAS DA IMPRESSORA	125
TABELA 45 – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA MODELAÇÃO DOS TEMPOS (EM DIAS) ENTRE FALHAS DO SISTEMA	126
TABELA 46 – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA MODELAÇÃO DAS CÓPIAS ENTRE FALHAS DA <i>CLEANING WEB</i>	126
TABELA 47 – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS PARA MODELAÇÃO DOS TEMPOS (EM DIAS) ENTRE FALHAS DA <i>CLEANING WEB</i>	127
TABELA 48 – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DO MODELO MULTIPLICATIVO E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA OS TEMPOS ENTRE FALHAS DO SISTEMA	127
TABELA 49 – ESTIMATIVAS DE SUBSTITUIÇÕES DE <i>CLEANING WEBS</i> NOS PRÓXIMOS 10 ANOS	128
TABELA 50 – ESTIMATIVAS DE PEDIDOS DE INTERVENÇÃO NOS PRÓXIMOS 10 ANOS	129

# ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	27
1.1	Contextualização	27
1.2	Objetivos	28
1.2.1	Questões de investigação.....	28
1.3	Metodologia de trabalho	28
1.4	Estrutura da dissertação	29
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	33
2.1	Gestão de ativos ( <i>asset management</i> )	33
2.1.1	Ativos tangíveis vs ativos intangíveis.....	33
2.1.2	A importância da gestão de ativos.....	35
2.1.3	Ciclo de vida dos ativos.....	37
2.1.4	Risco de falha dos ativos.....	39
2.1.5	Reliability Centered Asset Management (RCAM).....	40
2.1.6	Relação entre a gestão de ativos e a simulação.....	42
2.2	Medidas de fiabilidade	44
2.2.1	Função de Fiabilidade.....	44
2.2.2	Função de Risco .....	45
2.2.3	Padrões de falha.....	47
2.3	Distribuições de fiabilidade	49
2.3.1	Distribuição Weibull .....	50
2.3.2	Distribuição Exponencial .....	55
2.3.3	Distribuição Normal .....	57
2.3.4	Distribuição Lognormal.....	59
2.4	Dados Censurados	61
2.4.1	Censura do Tipo I .....	61
2.4.2	Censura do Tipo II.....	63
2.4.3	Censura Aleatória.....	64
2.4.4	Estimador de Kaplan-Meier .....	65
2.5	Propriedades dos estimadores	67
2.5.1	Enviesamento: .....	67
2.5.2	Variância.....	68
2.5.3	Erro quadrático Médio: .....	68

2.5.4	Consistência:.....	69
2.6	ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS	69
2.6.1	Método dos mínimos quadrados .....	69
2.6.2	Método de máxima verossimilhança .....	72
2.7	Intervalos de confiança	73
2.7.1	De acordo com a distribuição qui-quadrado.....	74
2.7.2	De acordo com a distribuição normal .....	75
3	DESENVOLVIMENTO.....	79
3.1	Metodologia da simulação	79
3.2	Análise da distribuição weibull	80
3.2.1	Análise estatística da totalidade de falhas.....	80
3.2.2	Análise estatística das primeiras $n$ falhas.....	84
3.3	Análise estatística da distribuição exponencial	89
3.4	Análise estatística das distribuições normal e lognormal	90
3.5	Intervalos de confiança	93
3.6	Exemplos de fiabilidade	95
3.7	Exemplos de casos de estudo	96
3.7.1	Caso de estudo 1: Análise dos componentes do motor de uma aeronave de missão crítica .96	
3.7.2	Caso de estudo 2: Comparação da abordagem RCM com a manutenção de instalações industriais.....	105
3.7.3	Caso de estudo 3: Análise do tempo médio de vida residual e da otimização das condições operacionais em tubos de fornos industriais.....	108
3.7.4	Caso de estudo 4: Otimização de cargas de escavadoras de arrasto .....	112
3.7.5	Caso de estudo 5: Fiabilidade e análise do prazo de garantia de um motociclo baseada em dados de reclamações.....	114
3.7.6	Caso de estudo 6: Impacto da censura em amostras combinadas de tempos até à falha ...	117
3.7.7	Caso de estudo 7: Modelação da fiabilidade de impressoras utilizando algoritmos evolutivos	120
4	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	133
4.1	Conclusões	133
4.2	Contribuição do trabalho	134
4.3	Proposta de trabalhos futuros	134

5	BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO .....	137
6	ANEXOS .....	143
6.1	Restantes tabelas dos valores médios das estimativas de $\beta$ e $\eta$	143
6.2	Restantes gráficos das estimativas de $\beta$ para as primeiras $n$ falhas	144
6.2.1	Valores médios.....	144
6.2.2	Valores medianos.....	144
6.2.3	Desvios padrão.....	145
6.3	Restantes gráficos das estimativas de $\eta$ (constante) para as primeiras $n$ falhas	146
6.3.1	Valores médios.....	146
6.3.2	Valores medianos.....	146
6.3.3	Desvios padrão.....	147
6.4	Restantes intervalos de confiança para vários valores de $\beta$ (todas as falhas)	148
6.5	Restantes intervalos de confiança para $\eta = 10000$ u. t (todas as falhas)	150
6.6	Restantes códigos $r$ utilizados	152
6.6.1	Código dos tempos da distribuição Weibull (sem censura):.....	152
6.6.2	Código dos tempos exponenciais:.....	153
6.6.3	Código dos tempos normais: .....	154
6.6.4	Código dos tempos lognormais:.....	156
6.7	Tempos de falha e tempos de vida do caso de estudo 1	159
6.8	Estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull (caso de estudo 4)	160
6.9	Dados de falhas da impressora do caso de estudo 7	161



# INTRODUÇÃO

- 1.1 Contextualização
- 1.2 Objetivos
- 1.3 Metodologia de trabalho
- 1.4 Estrutura da dissertação



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

Devido à evolução da tecnologia dos equipamentos e da competitividade crescente entre empresas, existe a crescente necessidade de aumentar a produção com o menor gasto de recursos possíveis e, conseqüentemente, estabelecer vantagem competitiva perante os demais concorrentes. Produzir mais com menos significa não só reduzir os custos, como também encurtar os prazos de entrega e melhorar a qualidade dos equipamentos e serviços de forma sustentável e lucrativa. As organizações devem melhorar progressivamente o desempenho dos seus ativos, reduzindo os tempos de indisponibilidade e aumentando a sua eficiência. Assim, qualquer que seja o clima económico existente, o retorno sobre os ativos ou ROA (*Return on Assets*) será substancialmente mais acelerado (Ferreira, 2012).

A gestão de ativos tem vindo a sofrer mudanças visíveis ao longo dos anos devido a todas estas exigências. Por sua vez, as empresas têm reagido a todas estas problemáticas, tomando consciência para o impacto que as falhas de equipamentos detêm sobre a segurança, o meio ambiente, a imagem da empresa e, conseqüentemente, os resultados económicos. Devido às exigências dos tempos modernos, os equipamentos devem apresentar níveis de fiabilidade cada vez mais elevados, garantindo simultaneamente altas disponibilidades.

Apesar da gestão de ativos representar uma percentagem significativa do capital das empresas, por norma, os ativos são negligenciados até que ocorra uma falha crítica que origine danos severos nos equipamentos organizacionais. Como tal, a simples gestão de ativos não é suficiente, pelo que surge o conceito de gestão inteligente de ativos. Só a gestão efetiva de ativos proporciona uma descida acentuada de custos associados à sua degradação, além de que previne uma série de acidentes causados por falhas em função do desgaste excessivo em termos de utilização e manuseamento. Os ativos fazem parte das empresas e, como tal, muitas são as situações em que a continuidade da empresa depende deles. Por isso, como os ativos são considerados a “vida” das empresas na criação de valor, a sua gestão deverá acompanhar inteiramente o seu ciclo de vida, desde a sua aquisição até sua eliminação ou reutilização, se possível. O ciclo de vida engloba aspetos como a missão dos ativos na cadeia produtiva, as suas interações de dependência, manutenção preventiva e reativa, capacidade de serviço e resiliência.

O desenvolvimento gradual da gestão de ativos deu origem à necessidade do seu conceito ser melhor compreendido, quer estrategicamente, quer financeiramente. Desta forma, o valor que os ativos das empresas possuem é decisivo nesses pontos, pelo que a gestão de ativos se assume como uma atividade de gestão tão ou mais importante quanto as restantes.

## 1.2 Objetivos

O objetivo fundamental deste trabalho é estudar os modelos matemáticos que mais se adequam aos tempos de vida de componentes eletromecânicos, englobando a ligação entre o segmento estatístico e os benefícios que este estudo trará ao mundo empresarial. As etapas a considerar nesta dissertação em prol deste objetivo, foram as seguintes:

- Realizar a pesquisa bibliográfica referente ao tema aplicado;
- Estudo dos modelos padrão;
- Analisar e interpretar os resultados obtidos;
- Propor soluções de otimização dos métodos estudados.

### 1.2.1 Questões de investigação

A partir da construção do *corpus* de dados advindo de fundamentação teórica, foram formuladas duas questões científicas que servirão como ponto de partida para o presente trabalho e às quais se pretende dar resposta na parte do desenvolvimento e posteriores conclusões. As questões de investigação são as seguintes:

- Qual o modelo que melhor se ajusta ao tempo de vida dos ativos das empresas?
- De que forma a análise de dados estatísticos gera a criação de valor nas organizações?

## 1.3 Metodologia de trabalho

A metodologia utilizada para a elaboração do desenvolvimento deste trabalho foi quantitativa, segundo uma perspetiva dedutiva. Após a retenção de conhecimento detalhado sobre os assuntos tratados de modo a construir a revisão bibliográfica, efetuaram-se simulações de tempos até à falha representados pelos modelos de fiabilidade abordados, de modo a analisarem-se as estimativas dos parâmetros dos modelos com recurso a estatísticas descritivas (viés, média, mediana, variância e erro quadrático médio) e à estatística inferencial para determinar os intervalos de confiança dos parâmetros. De forma a complementar o estudo teórico realizado, são apresentados exemplos de valores de fiabilidade mediante diferentes tempos de funcionamento, assim como sete casos de estudo (reais e fictícios) inseridos na área da fiabilidade e manutenção que ajudam a compreender a utilidade prática de toda a matéria abordada.

## 1.4 Estrutura da dissertação

A estrutura da presente dissertação está dividida em seis capítulos distintos. No capítulo 1 é feita uma introdução subdividida em quatro pontos: a contextualização do estudo, os objetivos propostos (incluindo as questões de investigação), a metodologia utilizada e a organização da tese.

No capítulo 2 realizou-se uma revisão bibliográfica aprofundada, na qual foi recolhida informação teórica sobre a gestão de ativos e os modelos matemáticos dos tempos até à falha que serviu de base para concretizar a análise estatística desses modelos a partir de dois métodos considerados e permitir responder às questões de investigação propostas.

No capítulo 3 desenvolveram-se análises estatísticas dos modelos de fiabilidade abordados na revisão bibliográfica, abrangendo a construção de pressupostos para a realização das simulações, a estimação dos parâmetros de cada um dos modelos, a caracterização desses parâmetros através de estatísticas descritivas e a determinação de histogramas e intervalos de confiança relativos às estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull.

Quanto ao capítulo 4, este apresentou as conclusões finais obtidas ao longo da dissertação, de forma a responder às questões de investigação. Também abrangeu a contribuição científica que o trabalho proporcionou quanto à retenção de conhecimento sobre a gestão de ativos e dos modelos de fiabilidade, bem como a sua importância em aplicações práticas.

No que diz respeito ao capítulo 5, foram apresentadas por ordem alfabética todas as referências bibliográficas e outras fontes de informação utilizadas ao longo da elaboração da presente dissertação.

Por fim, como forma de complemento, foram colocados no capítulo 6 os anexos respeitantes à análise estatística e aos exemplos de casos de estudo explorados no capítulo do desenvolvimento.



# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

- 2.1 Gestão de ativos (*asset management*)
- 2.2 Medidas de fiabilidade



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Gestão de ativos (*asset management*)

#### 2.1.1 Ativos tangíveis vs ativos intangíveis

Existem vários conceitos que definem um ativo de uma empresa. De uma maneira muito simples e condensada, a norma ISO 55001 define um ativo como sendo algo, tangível ou não tangível, que possui valor real ou potencial para uma organização. Este valor, positivo ou negativo, financeiro ou não financeiro, inclui a consideração de riscos e de passivos dependendo da fase de vida no qual o ativo se encontra.

Os ativos físicos ou tangíveis referem-se a geralmente a algo material (palpável). Podem ser vistos como recursos que são detidos por uma organização com utilidade na produção ou no fornecimento de bens e serviços, e é expectável que sejam utilizados durante um período económico pré estipulado. Exemplo de ativos tangíveis são equipamentos, *stocks* e propriedades em posse da organização. Existem vários termos que estão interrelacionados com os ativos fixos tangíveis como a depreciação, a perda por imparidade, a quantia depreciável, a quantia escriturada, a quantia recuperável, o valor específico para a organização, o valor residual e a vida útil de um ativo. Estes, representam a maior fração de ativos existentes nas empresas pois são os mais preponderantes para a obtenção de lucros em empresas que possuam índices elevados de imobilização (Sveiby, Linard, & Dvorsky, 2002). No entanto, ao contrário dos ativos físicos, é nos ativos de natureza intelectual (intangíveis) que está o verdadeiro epicentro da diferenciação competitiva. Estes ativos não monetários e identificáveis podem ser distinguidos tendo em conta a sua duração, que pode ser limitada ou indefinida, como é o caso dos contratos, marcas, ativos digitais, direitos de uso, licenças, patentes, *know how*, reputação, acordos e algumas franquias. Por exemplo, as patentes possuem uma vida económica superior à vida legal, sendo a última é limitada. Já as marcas não têm uma duração definida, pelo que a vida útil e a amortização são medidas arbitrárias.

Existe uma quantidade considerável de autores como (Stewart, 1997) e (Lev, 2001) afirmando que os ativos financeiros estão a tornar-se autênticos *commodities* (mercadorias) devido à garantia de retornos regulares sobre os investimentos. Para investidores que se interessam com retornos extraordinários para estabelecerem uma vantagem competitiva sobre os demais, os ativos intangíveis são a opção mais acertada.

Até aos anos 80, o grande foco das empresas estava concentrado no modo de avaliação dos ativos tangíveis, entretanto, entre o fim do último século e o início do presente século o interesse por estes últimos foi subindo, instaurando-se uma mudança no que toca ao ultrapassado ênfase nos ativos tangíveis, que tem sido transportado para os ativos intangíveis. A combinação entre intensa competitividade e o desenvolvimento da tecnologia da informação (TI) foram os percussores pela crescente atenção dada a este tipo de ativos (Lev, 2001). É certo que os ativos intangíveis assumem uma importância inestimável, no entanto, o valor dos ativos tangíveis permanece intacto devido à dificuldade que os dois apresentam em dissociarem-se um do outro.

Os dois tipos de ativos referidos estão intrinsecamente relacionados. É possível transformar os ativos intangíveis em resultados tangíveis (Kaplan & Norton, 2004), considerando que a criação de valor destes ativos é feita de forma indireta. Não está em causa o seu impacto direto sobre os resultados financeiros, como o aumento do lucro, mas sim o impacto indireto que os ativos intangíveis trazem às instituições. A título de exemplo, a formação de colaboradores no âmbito da Gestão da Qualidade Total (GQT), também designada por *Total Quality Management* (TQM), e da metodologia Seis Sigma poderá eventualmente contribuir para o incremento da qualidade dos processos produtivos e, conseqüentemente, resulta numa maior satisfação por parte dos clientes. Essa lealdade dos clientes é traduzida por um aumento de vendas e de margens de lucro.

Segundo os últimos autores referenciados, o valor dos ativos intangíveis é também contextual e potencial. Contextual no sentido em que é necessário este tipo de ativos estarem alinhados com a estratégia da organização. A formação dos funcionários respeitante ao parágrafo anterior é realmente eficaz quando existe a adoção prévia de uma estratégia baseada no baixo custo, em contraste com a estratégia sustentada na liderança do produto e na inovação. Por fim, o seu valor é potencial porque os investimentos envolvidos não costumam representar da melhor forma o impacto positivo que os ativos de natureza não tangível provocam nas organizações. Apesar de possuírem valor potencial, pode não representar qualquer valor de mercado, daí que seja importante concretizá-lo em valor real (tangível).

Outros autores constataram, através de casos de estudo reais, que os ativos tangíveis e intangíveis influenciam o valor para o cliente, uma vez que esta parte interessada é o fator exclusivo que cria verdadeira concorrência entre as empresas (Nicola, Susana; Ferreira, Eduarda Pinto & Ferreira, J. J. Pinto, 2015). Destacar-se da concorrência obtendo vantagem competitiva é, cada vez mais, uma questão de responder acertadamente às necessidades e desejos do cliente (Mojtahedzadeh & Arumugam, 2011). O valor para o cliente é a chave para alcançar o sucesso de qualquer organização, pois permite analisar atentamente a forma como o cliente percebe a oferta real do produto, designada por proposta de valor. Esta proposta visa especificar a estratégia de competir por novos clientes, dado que qualquer atividade de negócio é intrinsecamente sobre trocas de valor (Nicola, Susana; Ferreira, Eduarda Pinto & Ferreira, J. J. Pinto, 2012). Utilizando uma estrutura para modelar o valor para o cliente, como o modelo conceitual para decomposição de valor para o cliente (CMDVC), é possível converter ativos intangíveis, tais como o conhecimento humano, métodos de trabalho, relações comerciais e reputação em formas de valor negociáveis.

Este modelo serve de ponte entre o valor para o cliente, a percepção de valor por parte do cliente, uso empresarial e construção de ativos tangíveis e/ou intangíveis que podem ser tanto internos (endógenos) ou externos (exógenos) à unidade de negócios em análise.

Outro aspeto importante a ter em conta a é combinação adequada dos ativos intangíveis com os tangíveis, posicionando-os de forma alinhada com a estratégia planeada, com vista a alcançar o maior valor possível. A grande diferença entre os ativos tangíveis e os intangíveis reside no potencial que os ativos de natureza intangível têm em gerar valor e no impulso que dão no retorno dos investimentos efetuados (Lev, 2001). Outra característica diferenciadora está relacionada com o número de pessoas que tem acesso aos ativos e que se revela uma desvantagem dos ativos tangíveis, pois a sua utilização é exclusiva a um grupo restrito de pessoas, ao passo que os ativos intangíveis podem pertencer a um grande grupo de pessoas,

sem que isso implique a diminuição do valor desses ativos. O consumo dos ativos tangíveis também se distingue dos intangíveis pois, enquanto os primeiros decrescem de valor ao longo do tempo, os ativos intangíveis possuem exatamente o comportamento contrário.

Tabela 1 – Classificação dos ativos intangíveis (Kayo, 2002)

<b>Tipos de ativos intangíveis</b>	<b>Exemplos de ativos intangíveis</b>
Ativos humanos	Conhecimento, talento, capacidade e experiência dos colaboradores
Ativos de inovação	Pesquisa e desenvolvimento (P&D), patentes, <i>know how</i> tecnológico.
Ativos estruturais internos	Processos, <i>softwares</i> , bancos de dados, sistemas de informação e administrativos, canais de mercado.
Ativos de relacionamento externo	Marcas, logos, <i>trademarks</i> , direitos de autor, contratos de licenciamento e de franquias.

### 2.1.2 A importância da gestão de ativos

A gestão de ativos pode ser encarada como um modelo estratégico com o objetivo de explorar um grupo de recursos de forma a alocá-los de forma otimizada durante os seus ciclos de vida técnicos para os campos de gestão, operação, manutenção e conservação de ativos, envolvendo uma harmonia entre custos, riscos e desempenho e garantindo um serviço predefinido que respeite as normas de segurança convencionadas (Coelho, 2015). Por outras palavras, a gestão de ativos é a arte e ciência da correta tomada de decisões na área de otimização de processos e assume real importância no cenário competitivo pois é uma mais-valia para as organizações que pretendam reduzir variados custos, melhorar o desempenho operacional dos ativos, reduzir acidentes decursivos da operação de ativos que ameacem a segurança humana, minimizar o impacto ambiental, melhorar o desempenho regulamentar e reduzir riscos legais (R. Davis, 2015).

Com vista ao que foi mencionado anteriormente, as empresas devem reunir e direcionar os seus esforços para esta matéria, uma vez que um empreendimento dificilmente sobreviverá com a ausência de uma gestão apropriada dos seus ativos. Apesar de aparentar ser uma tarefa simples, manter o controlo dos ativos é decisivo para as empresas pois viabiliza-lhes a economia simultânea de tempo e dinheiro.

Embora de forma não tão frequente, além de envolver a maximização dos ativos da empresa com a finalidade de fornecer os melhores retornos aos acionistas, também envolve a recuperação de ativos. Assim, torna-se essencial para uma organização que consiga governar os ativos fixos e líquidos, utilizando-os sabiamente de maneira a obter o máximo retorno sobre estes.

A AER Worldwide (2016) listou as dez principais razões pelas quais a utilização de um sistema de gestão de ativos é preponderante no sucesso das empresas:

- Acompanhamento assíduo da panóplia de ativos: A gestão de ativos permite aceder à localização, entender o modo de funcionamento e tomar conhecimento das datas das alterações efetuadas nos ativos. Os dados disponibilizados podem garantir que a recuperação de ativos leve a melhores retornos financeiros;
- Gestão de ativos precisa e eficaz em diferentes locais: As empresas conseguem criar facilmente relatórios sobre os *stocks* de ativos, exigidos por algumas seguradoras ou financiadores;
- Avaliações regulares dos ativos: A gestão de ativos assegura demonstrações financeiras precisas, como a taxa de amortização;
- Recuperação automática de ativos: Ativos improdutivos que se pretendam dismantelar ou vender são removidos dos registos informáticos e livros da empresa, libertando espaço útil de armazenamento. Também é possível alocar um ativo noutra área para que passe a ser usado de uma forma produtiva, evitando a falta de investimento nesse ativo;
- Poupança nos custos de manutenção: Durante a fase operacional do ciclo de vida de um ativo existem problemas por causa de falta de manutenção ou de excesso de manutenção. Sendo a manutenção uma atividade que reduz os lucros da empresa, o seu exagero pode elevar significativamente o seu custo, por outro lado, a manutenção insuficiente pode reduzir a produtividade da empresa. Um sistema de gestão de ativos permite determinar um equilíbrio neste aspeto, economizando os investimentos feitos na manutenção;
- A gestão de ativos permite que a organização entenda a aptidão dos seus ativos, tornando a sua operação mais eficaz e eficiente;
- Implementação de um plano de gestão de riscos relacionados ao uso e propriedade dos ativos: A avaliação adequada dos ativos auxilia na identificação de riscos envolvidos e possibilita a proposta de soluções para os evitar;
- A gestão adequada de ativos permite alcançar a otimização das suas atividades, que incluem o planeamento, a utilidade de recursos e a implementação do programa de gestão;
- Eliminação da possibilidade de existirem “ativos fantasma”: A designação “ativos fantasma” (*ghost assets*) deriva de casos em que os ativos são contabilizados de forma imprecisa nos registos de *stocks*, quando na verdade não se encontram disponíveis em *stock*;
- Redução dos incidentes de roubo: A contabilidade adequada do processo de recuperação de ativos garante a maximização dos retornos de investimento sem ativos perdidos durante o processo.

### 2.1.3 Ciclo de vida dos ativos

A visão alargada das classes de ativos de uma organização reforça a integridade e rigor da gestão de ativos. Pela mesma ótica, a visão expandida do ciclo de vida dos ativos, como a prática TLAM (*Total Lifecycle Asset Management*) exibida na Figura 1, fornece um novo nível de rigor e compreensão da forma como os ativos são planeados, manipulados, mantidos e, por fim, eliminados. Assim, o ciclo de vida completo dos ativos deve ser considerado ao fim de definir qual a estratégia que melhor se enquadra para apoiar na tomada de decisões ligadas à gestão de ativos.

A IBM Global Business Services (2007) formulou a estrutura da gestão total do ciclo de vida dos ativos, decompondo esse ciclo em oito etapas sequenciais. A primeira consiste na implementação de uma estratégia que esteja alinhada com as classes de ativos existentes na organização e com os seus requisitos empresariais, incluindo atividades como a avaliação de práticas de gestão de ativos, o desenvolvimento de uma estratégia geral de gestão de ativos e de um programa de avaliação da eficiência do sistema de gestão de ativos através do uso de indicadores de desempenho (KPI's).

A fase seguinte integra a coordenação e o planeamento do portfólio de ativos possuído pela organização, na qual se definem todas as metas, padrões, políticas e procedimentos dos ativos que estejam em sintonia com a estratégia delineada respeitante à gestão de ativos, incluindo o estabelecimento de valores alvo (metas) para os KPI's (El-Akruti, 2012)

Seguidamente é feita a avaliação dos ativos que se pretendem adquirir e projetam-se os ativos que se pretendem conceber. Quando os ativos são subcontratados é feito o desenvolvimento de um modelo de avaliação do programa de capital financeiro com o intuito de auxiliar nas decisões de compra.

No quarto degrau do ciclo de vida são construídos ou adquiridos os ativos planeados. Este é o momento em que existem maiores gastos monetários, proporcionando impactos financeiros mais visíveis. Com os ativos totalmente disponíveis chega a fase de operação na qual o desempenho dos ativos é mais afetado e baseia-se segundo os padrões, políticas e procedimentos definidos pela estratégia e pelo *feedback* recebido. O ativo opera segundo a função que lhe foi imposta e compreende uma grande fração do seu ciclo de vida, pelo que este deve estar submetido a um rigoroso controlo, a tarefas de manutenção e a atualizações tecnológicas que atendam a alterações na sua condição ou nos requisitos operacionais.

A antepenúltima fase consiste na manutenção dos ativos, que é feita uma vez mais com base na estratégia e no *feedback* recebido por parte das metodologias em vigor. Os custos de manutenção podem alterar por completo o custo total de posse dos ativos, visto que quase um terço do custo global de manutenção é desperdiçado em atuações de manutenção escusadas ou imprevisíveis que envolvem cegamente e indiscriminadamente quase todos os tipos de componentes com reduzida ou inexistente consideração à vida útil dos ativos, dados estatísticos sobre a indisponibilidade dos equipamentos e ao seu valor financeiro. Desta forma, surgem novas práticas nesta área e que incluem a realização de *workshops* com a melhoria de processos com equipas multidisciplinares como tema central e a utilização de programas informáticos que facilitem a gestão empresarial dos ativos. Os sistemas de *software* EAM (*Enterprise Asset Management*) permitem que os gestores acompanhem os ativos em qualquer local da empresa, devido ao monitoramento centralizado por dispositivos móveis. Outras tecnologias inteligentes

como o sistema RFID pode ser colocado nos próprios ativos para que sejam relatadas avarias e aconselhados programas de manutenção.

A penúltima fase assegura, caso sejam requisitadas, as alterações dos ativos tendo em conta como sempre a estratégia, as políticas e os procedimentos dos ativos. No entanto, como a mudança de requisitos evolui de forma sistemática em ativos relacionados com as tecnologias de informação, existe a dificuldade em ponderar decisões envolvendo transformações nos ativos. Para contornar este problema é possível implementar estratégias que facilitam a mudança constante dos sistemas, como as arquiteturas orientadas a serviços (*Service Oriented Architecture – SOA*), ou então práticas que se foquem no custo total do ciclo de vida e a análise de melhoria de desempenho. Esta fase assume real importância no que toca à extensão de vida dos ativos, à medida que são reformulados e reaproveitados e onde a tecnologia é adaptada essencialmente para facilitar os processos mais recentes.

Por fim, procede-se à cessão ou liquidação de ativos, que é habitualmente a fase mais negligenciada de todas. Para além da simples substituição de ativos, o seu descarte pode significar sérias implicações ao nível financeiro, devido às regulamentações ambientais que acrescentam custos elevados. A sustentabilidade ambiental, a supressão adequada de ativos e a redução das emissões de carbono são práticas ecológicas que se estão a tornar, cada vez mais, em requisitos indispensáveis e que devem ser ponderados pela equipa de gestão de ativos. A forma atual como os ativos são descartados é apenas o começo desta tendência, pelo que num futuro próximo as práticas ecológicas terão necessariamente que surgir nas sete etapas anteriores. Outras estratégias de eliminação abrangem programas de reutilização como a iniciativa GARS (*Global Asset Recovery Solutions*) da IBM, que incentiva o aproveitamento de partes utilizáveis de equipamentos descartados para minimizar os custos de sucata.



Figura 1 – Etapas da Gestão Total do Ciclo de Vida de Ativos (IBM Global Business Services, 2007)

#### 2.1.4 Risco de falha dos ativos

A relação entre a idade operacional de um ativo e a probabilidade de falha deve ser bem conhecida. A maioria dos ativos apresenta um longo período de vida útil sem a presença de falhas preocupantes, seguido de um período mais curto de deterioração (fase de desgaste) que leva ao aumento natural do número de falhas. Isso pode ser refletido pela função de densidade de probabilidade da distribuição Weibull, que tem a utilidade de reproduzir a disposição das taxas de falha de uma determinada classe de ativos (Energy, 2015).

A metodologia criada pela Energy (2015), designada por métrica de alto risco de falha ou apenas HROF (do inglês *High Risk Of Failure*), mede o risco de falha de ativos em função da idade do ativo. Os objetivos desta métrica passam por permitir uma comparação direta do número de ativos em alto risco de falha entre cada ano e período regulamentar para avaliar a mudança de risco da rede de gestão e testar quais as estratégias de substituição prudentes e eficientes em vigor, estabelecendo um equilíbrio entre as substituições reais e as estratégias de apoio para manter simultaneamente a fiabilidade e a segurança. Tais testes incluem a capacidade de demonstrar se os gastos de reposição são suficientes ou não para sustentar os ativos em alto risco de falha, estimando o nível da despesa que seria necessário para manter o nível de ativos em alto risco de falha. Avaliam também os campos de aplicação nos quais as despesas de reposição estão a ser incapazes de reduzir os ativos em alto risco de falha, analisando se as estratégias de apoio são realmente prudentes e eficientes.

De realçar que a métrica em foco não se destina somente a fazer previsões das substituições dos ativos, pelo que fornece uma medida significativa dos ativos com alto risco de falha, é apta de ser calculada anualmente ou a cada período regulamentar e faz uso dos dados que estão prontamente disponíveis para todos os ativos e é independente da análise utilizada em estratégias de ativos que passam por prever substituições de ativos.

A ausência de uma estratégia de gestão de ativos baseada em riscos (RBAM – *Risk Based Asset Management*) pode provocar gastos escusados em sintomas de problemas sem se estar a atuar na sua causa raiz. Já a presença desta estratégia une a gestão de riscos, o trabalho padrão e a manutenção baseada na condição do ativo para aplicar corretamente os recursos com base na criticidade do processo. Isso garante que controlos adequados sejam colocados em prática e que a análise de fiabilidade seja usada para garantir a melhoria contínua.

Um sistema eficaz de gestão baseado no risco inclui uma gestão de ativos ou uma solução de recursos que classifica os dados de atributos dos ativos; hierarquias funcionais; análises de criticidade, de falhas e de riscos; planos de controlo; análises de fiabilidade e melhoria contínua. Face a isto, obtêm-se resultados do seguinte calibre: reconhecimento do valor da melhoria contínua por parte dos colaboradores, identificação e redução da magnitude de fatores limitantes e evitação de investimentos substanciais de capital da melhoria da disponibilidade de ativos e redução significativa do custo de produtos vendidos (Life Cycle Engineering, 2010).

Fundamentalmente, num sistema de gestão de ativos baseados no risco são armazenadas informações relevantes em função da importância do fluxo de valor, que apoiam em decisões do ponto de vista fiscal, provocando um crescimento de valor para a organização. As quatro fases deste modelo (classificar, analisar, controlar e medir) são fundamentais para o sucesso do seu plano estratégico.

Christodoulou et al. (2009) afirma que uma das formas de medir o risco de falhas dos ativos é adotar a metodologia CBRM (*Condition Based Risk Management*) ou gestão de ativos baseada no risco, que estima o risco com base na minimização dos custos do ciclo de vida dos ativos enquanto esses ativos possuem níveis de risco económicos, ambientais e operacionais aceitáveis, ou seja, níveis mínimos dentro daquilo que se considera razoável. Esta metodologia constitui um processo estruturado que conjuga as informações dos ativos, o conhecimento de engenharia, assim como a experiência prática que serve para definir futuras condições, desempenho e risco para a rede de ativos. O CBRM foi amplamente desenvolvido nos últimos anos e tem vindo a ser aplicado com sucesso, auxiliando as empresas na gestão de risco relacionada com os ativos. Devido ao seu sucesso, foi plenamente aceite por entidades como a AER (*Audio Electric Research*) e a OFGEM (*Office of Gas and Electricity Markets*), que a consideraram como um modelo sólido no sentido de demonstrar uma abordagem de risco às decisões de gestão de ativos.

A sua aplicação assenta principalmente em fatores como a idade operacional, condições operacionais e ambientais. Primeiramente, gera-se um índice baseado apenas na idade operacional, designado por HI 1 (*Health Index 1*). A partir deste índice, agregam-se os fatores remanescentes para se determinar um segundo índice, específico do ativo em análise, intitulado HI 2 (*Health Index 2*). Com base neste último índice quantifica-se o risco, mas como normalmente o desvio entre HI 1 e HI 2 é mínimo, torna-se razoável definir a idade operacional na medida mais importante de todas. Esta abordagem correlaciona-se com o modelo Weibull, que também define um nível de risco alicerçado na idade operacional de um ativo. É bastante precisa quando o tema é a previsão de avarias em ativos com alto risco de falha. Para organizações que apenas implementem esta abordagem numa extensão restrita de ativos é inexequível utilizar o CBRM de forma consistente para prever o HROF em todos os ativos. Desta forma, a adoção deste modelo deve ser feita idealmente em todas as classes de ativos, todavia, é uma atividade exigente ao nível económico que requer um planeamento de longo prazo e a captação de uma quantidade absurda de dados.

### 2.1.5 Reliability Centered Asset Management (RCAM)

A pesquisa enquadrada no grupo RCAM (*Reliability Centered Asset Management*) pretende desenvolver modelos e métodos quantitativos para sistemas de gestão de ativos, que ligam o esforço da manutenção à disponibilidade e ao custo total do sistema, com o intuito de alcançar uma gestão ideal de manutenção.

Existe uma próxima inter-relação entre as metodologias RCM e RCAM. A gestão de ativos focalizada na fiabilidade surge a partir dos princípios da manutenção centrada na fiabilidade (ou *Reliability Centered Maintenance* – RCM), que apesar de definir programas de manutenção eficientes em termos de custos não exhibe concretamente os benefícios da manutenção relativamente aos custos e à fiabilidade do sistema.

Assim, houve a necessidade de aprimorar o método RCM através da introdução da abordagem RCAM ao fornecer resultados quantitativos que relacionam o impacto da manutenção nas taxas de falhas dos componentes com a fiabilidade do sistema, além de comparar os custos das várias estratégias de manutenção (Bertling, 2002). Contudo, o início do estabelecimento da gestão de ativos centrada na fiabilidade foi marcado pela tentativa falhada de relacionar qualitativamente a fiabilidade dos componentes e a manutenção do sistema com base em experiências práticas através da condição dos componentes e em medidas de manutenção, não se atingindo o

verdadeiro objetivo do RCAM. Um dos motivos foi a inexistência de um modelo de fiabilidade disponível para todos os ativos e um modelo teórico de manutenção para processos sistemáticos de séries temporais, de modo que a teoria da fiabilidade não seja intrinsecamente colocada em prática. De facto, apenas uma descrição quantitativa contínua (modelos matemáticos) pode levar a uma solução ótima das estratégias de manutenção do sistema (Zhang & Gockenbach, 2008).

O estabelecimento do método RCAM, desenvolvido como resultado de estudos de aplicação para sistemas reais de distribuição de energia, abrange três estágios distintos:

- Análise da fiabilidade do sistema: Na fase preliminar é definido o sistema e são avaliados os componentes considerados críticos por afetarem a fiabilidade do sistema;
- Modelação da fiabilidade dos componentes: Numa fase posterior são analisados os componentes detalhadamente e é definida a relação quantitativa entre a fiabilidade e a adoção de medidas preventivas, com o apoio de dados de entrada apropriados;
- Fiabilidade do sistema e análise da relação custo/benefício: Na etapa final é feito o levantamento dos resultados advindos da modelação da fiabilidade dos componentes, avaliando-se o efeito da manutenção dos componentes na fiabilidade do sistema e o impacto no custo para as diferentes estratégias de manutenção preventiva.

Estes três períodos enfatizam uma característica central do método, em que a análise se move desde o nível do sistema para o nível dos constituintes e que regressa de novo ao nível inicial. Na Figura 2, os passos que contêm um asterisco utilizam um código computacional baseado na abordagem analítica denominada RADPOW, que consiste num programa de avaliação da fiabilidade de sistemas de distribuição de energia elétrica (*Reliability Assessment of electrical Distribution POWER systems*), desenvolvido no centro de competência de engenharia elétrica da Escola de Engenharia Elétrica e Ciências da Computação pertencente ao Instituto Real de Tecnologia KTH (*Kungliga Tekniska Högskolan*).

A Figura 2 inclui também os passos secundários dos diferentes estágios referidos anteriormente, constituindo o processo sistemático que analisa os componentes do sistema, bem como as suas causas de falhas. Apesar dos estudos de aplicação mostrarem que o método RCAM pode ser usado para comparar diferentes métodos e estratégias de manutenção com o custo total de manutenção, assim como também pode ser realizado e suportado por dados de entrada reais, relacionar o esforço da manutenção com a melhoria da fiabilidade é bastante complexo pois requer um número substancial de dados de entrada para suportar o método, exigindo uma quantidade significativa de atualizações de dados relevantes.

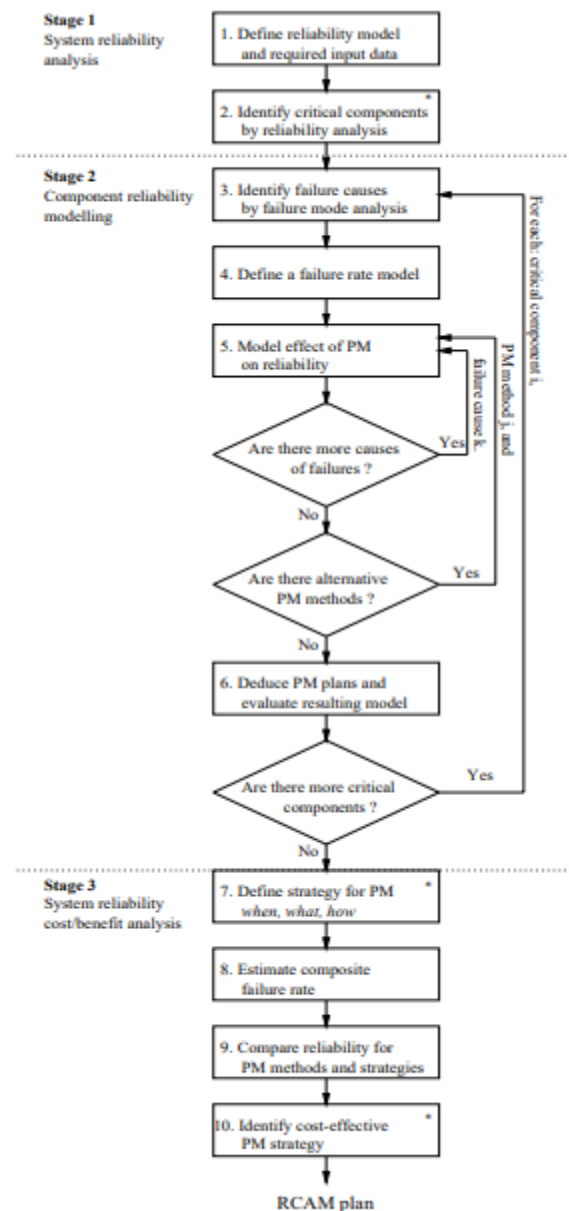


Figura 2 – Fluxograma das etapas do método RCAM (Bertling, Allan, & Eriksson, 2003)

### 2.1.6 Relação entre a gestão de ativos e a simulação

A gestão de ativos é baseada em cálculos de simulação acerca do desempenho técnico e financeiro de bens industriais em diferentes cenários operacionais. Através desses cálculos, a gestão de ativos permite a tomada de decisões técnicas compatíveis com os objetivos e as decisões económicas que mantêm o desempenho técnico dos ativos, garantindo uma melhor eficiência e disponibilidade ao longo do seu ciclo de vida. O capítulo 3 desta dissertação não incidirá sobre a análise dos custos e recursos necessários para a concretização das estratégias da gestão de ativos, mas sobre a análise das distribuições teóricas que se relacionam intrinsecamente com a distribuição da idade operacional e a distribuição de falhas dos ativos.

Como a rede de ativos é constituída por uma série de ativos antigos que são preservados, retificados, substituídos e sofrem inspeções ao longo do tempo, o modelo deve descrever o processo de envelhecimento dos ativos o mais aproximado com a realidade. As estratégias da gestão de ativos devem ser descritas como um conjunto de regras do género “se o ativo tiver uma idade superior a X anos e não estiver renovado, então o acontecimento Y irá ocorrer (Schneider et al., 2006).

Um ativo ser fiável significa que é capaz de funcionar nas condições exigidas por um largo período temporal, cumprindo as especificações do fabricante. Ao estudo sobre os tempos de falha de ativos dá-se o nome de análise de fiabilidade ou de sobrevivência. Para medir e melhorar a fiabilidade de um ativo é necessário recorrer a uma definição formal composta por modelos teóricos enquadrados na área da fiabilidade. Estes modelos permitem estimar as probabilidades de falhas dos componentes com base em dados de entrada sobre a idade operacional dos ativos e o histórico de ações de manutenção. A análise destes modelos possibilita responder a questões tais como: qual a probabilidade de falha de um certo ativo num dado instante, qual o tempo de sobrevivência esperado do ativo e qual a percentagem de ativos que permanecerão intactos até um certo instante. Do ponto de vista metódico, esta análise passa por gerar aleatoriamente um conjunto de tempos até à falha, extrapolá-los para um gráfico e estimar os seus parâmetros. Procedendo desta forma, facilita a descoberta do modelo de fiabilidade mais ajustado a cada um desses ativos e que sirva de suporte para prever falhas futuras, avaliar vários planos para ações corretivas e fundamentar mudanças de engenharia que corrijam os modos de falha, tornando credíveis os resultados provindos da simulação de tempos até à falha dos ativos.

O objetivo principal da análise de fiabilidade é encontrar o modelo que melhor se ajusta aos dados gerados. Este modelo não deverá descrever apenas o envelhecimento dos ativos, mas também as medidas proactivas que poderão evitar a deterioração da fiabilidade dos ativos, desde que devidamente cumpridas. Logo, é importante conhecer os princípios de deterioramento dos ativos, pois apenas se conseguirá aplicar uma gestão de ativos eficaz e eficiente se a fiabilidade e disponibilidade dos ativos forem bem conhecidas (Marco, 2013). A Figura 3 mostra um modelo de envelhecimento representativo utilizado para se chegar aos pressupostos iniciais da simulação.

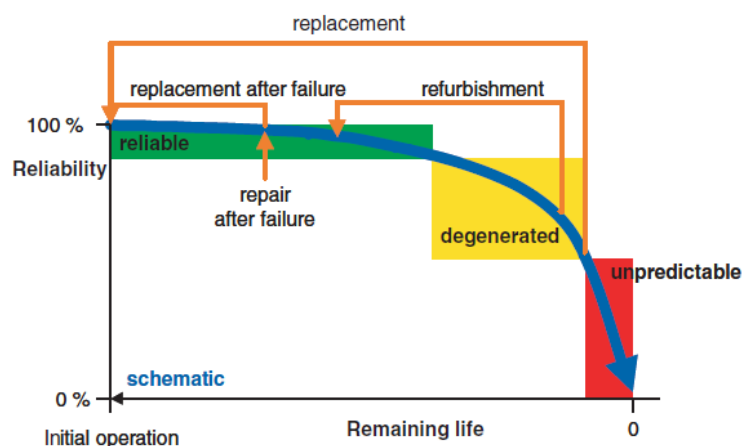


Figura 3 – Exemplo de um modelo de envelhecimento para a simulação de ativos (Schneider et al., 2006)

Este modelo descreve um ativo nos seus três estados fundamentais, que se relacionam com a fiabilidade apresentada ao longo do ciclo de vida e que vão apresentando níveis distintos de desempenho: fiável, degenerado e imprevisível. Para cada nível é feita uma série de cálculos e ponderações, relativamente a estratégias de manutenção, decisões de renovação e taxas de falhas estimadas. O princípio do modelo reside no facto de que, durante a sua vida útil, um ativo irá permanecer no estado inicial durante um determinado espaço de tempo, transitar para o seguinte e assim sucessivamente. Há que ter em conta que as atividades de manutenção e de renovação dos ativos irão retardar a taxa de transição entre estados consecutivos. Sempre que um ativo seja substituído, caso a sua renovação não seja suficiente, sairá do sistema e ostentará diferentes níveis de desempenho em cada estado fundamental.

O desafio está em encontrar um equilíbrio entre a precisão do modelo teórico e a disponibilidade de dados para parametrizar o modelo. As taxas de falha devem ser fornecidas para todos os estados dentro do modelo de ativos, sendo também necessário verificar se existe um estado adicional que possa ser parametrizado com os dados disponíveis.

## 2.2 Medidas de fiabilidade

### 2.2.1 Função de Fiabilidade

A fiabilidade pode ser interpretada de variadas maneiras. A definição mais habitual é a que percebe a fiabilidade como a probabilidade de um sistema funcionar satisfatoriamente, isto é, de cumprir a função requerida durante um intervalo de tempo estipulado, sob condições especificadas.

Outra definição de fiabilidade refere-se ao grau de confiança atribuído ao funcionamento de um sistema ausente de falhas, com uma duração de pelo menos  $t_0$  unidades temporais (Morais, 2007). Existem dois conceitos advindos da fiabilidade e que se referem à sua origem, são eles a noção de fiabilidade intrínseca e extrínseca. O primeiro, também designado por fiabilidade inerente, diz respeito às características com o mesmo nome, que resultam da conceção do projeto e da qualidade de produção do item. Segundo a mesma perspetiva, as características extrínsecas estão associadas à fiabilidade extrínseca e mostram de que modo decorre a operação de um certo componente, relativamente às condições de serviço empregues.

A função de fiabilidade, também denominada por função de sobrevivência, transmite a probabilidade de sucesso do funcionamento de um componente durante um intervalo de tempo  $[0, t]$ . Seja  $T (\geq 0)$  uma variável aleatória que representa o tempo até à falha ou o período de vida de um sistema com função densidade de probabilidade (f.d.p)  $f$ , a fiabilidade do sistema num instante  $t$  é:

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{+\infty} f(u) du \quad (1)$$

A função  $R(t)$  apresenta as três propriedades que se seguem (Lampreia, 2005):

- $R(-\infty) = 1$ ;
- $R(+\infty) = 0$ ;
- $R(t)$  é uma função contínua decrescente.

Um conceito pertinente de abordar é a infiabilidade. Caracterizada pela função de distribuição, corresponde à probabilidade de insucesso, ou seja, à probabilidade do sistema falhar antes do intervalo  $(0, t)$  terminar (Bentley, 1993):

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - R(t) = 1 - \int_0^t f(u) du \quad (2)$$

Outro termo para designar a função de infiabilidade é o complementar da probabilidade de sucesso porque tanto a fiabilidade como a infiabilidade complementam-se uma à outra como a seguir se constata (Bentley, 1993):

$$R(t) + F(t) = 1 \quad (3)$$

$R(t)$  pode ainda ser denominada por função de repartição, na medida em que reparte os tempos de falha, referentes a amostras de componentes submetidos a testes de fiabilidade segundo contextos idênticos e predefinidos e sob condições de serviço ambientais e de carga semelhantes. A explicação para tais condições reside no facto do mesmo equipamento ao ser colocado em contextos distintos não apresentará, como é óbvio, a mesma fiabilidade.

### 2.2.2 Função de Risco

A função de risco  $h(t)$ , também designada por taxa de risco (do inglês *hazard rate*), baseia-se na intensidade de falhas de um componente, que é dada pela fração entre a concentração de falhas e a probabilidade de sobrevivência desse componente num certo instante  $t$ :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (4)$$

Pode também ser entendida como a quantidade de risco ou a concentração de falhas associadas a um equipamento em qualquer momento  $t$ , pelo que um valor alto de  $h(t)$  significa que o componente está exposto a uma grande quantidade de risco. Em termos estatísticos, define-se a função de risco como a probabilidade de um componente falhar num determinado instante, sabendo que esse componente funcionou corretamente até esse instante (Collet, 1994).

A função de risco é talvez a medida fiabilidade mais utilizada devido à sua utilidade em análises de risco, servindo como ponto de comparação entre elementos com características não semelhantes. Qualquer que seja a função de risco, ela deverá satisfazer o próximo par de condições:

$$(a) \int_0^{+\infty} h(t) dt = +\infty, t \geq 0 \quad (5)$$

$$(b) h(t) \geq 0 \quad (6)$$

A função em questão é derivável com recurso à probabilidade condicional. A probabilidade de existir uma falha durante o intervalo de tempo  $(t, t + \Delta t)$  é dada por:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} f(u) du = R(t) - R(t + \Delta t) \quad (7)$$

Assumindo a condição da unidade estar em pleno funcionamento no instante  $t$ , a expressão torna-se na seguinte:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t) = \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T \geq t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{\Delta t \cdot f(\xi)}{R(t)}, t \leq \xi \leq t + \Delta t \quad (8)$$

Quando o valor de  $\Delta t$  é pequeno então, poderá ser feita a seguinte aproximação:

$$\frac{\Delta t \cdot f(\xi)}{R(t)} \approx \Delta t \cdot h(t) \quad (9)$$

O produto  $\Delta t \cdot h(t)$  resultante da aproximação representa a proporção de peças que falham entre  $t$  e  $t + \Delta t$ , dentre aquelas que estavam em funcionamento no instante  $t$ .

O resultado da equação exposta acima representa a proporção de componentes que falham durante o intervalo  $(t, t + \Delta t)$ , entre os que se encontram operáveis no momento inicial  $t$ . A função de risco está relacionada com a função densidade de probabilidade (f.d.p) de falhas, com a função de fiabilidade e por sua vez com a função de infiabilidade, como se observa na seguinte expressão:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t) \Delta t} = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, t \geq 0 \quad (10)$$

Esta expressão determina a taxa de falhas instantânea e resulta do quociente entre a equação de probabilidade condicional e  $\Delta t$ , supondo que delta t tende para zero. Desta expressão resulta uma outra:

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(u) du} \quad (11)$$

Como rapidamente se percebe a fiabilidade é máxima para o instante inicial do tempo de vida do ativo, isto é,  $R(0) = 1$ . A expressão acima exposta, correspondente à chamada função geral de fiabilidade, é independente da função densidade de probabilidade de falhas, podendo ser aplicada a qualquer distribuição de probabilidade. Ambas as funções  $R(t)$  e  $f(t)$ , estas são deriváveis através de  $h(t)$ , usando-se como ponto de partida a equação da taxa de falhas instantânea, conforme demonstrado a seguir:

$$h(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \ln R(t) \quad (12)$$

Ainda tendo como base a mesma equação e o resultado da última equação,  $f(t)$  e  $h(t)$  relacionam-se da seguinte maneira:

$$f(t) = h(t) \cdot e^{-\int_0^t h(u) du}, t \geq 0 \quad (13)$$

Recorrendo-se ao uso da integração para a função de risco num período de tempo  $t$ , chega-se à função de risco acumulada ou integral representada por  $H(t)$  (Collet, 1994):

$$H(t) = \int_0^t h(u) du = -\ln S(t), t \geq 0 \quad (14)$$

Sendo  $S(t)$  a função de sobrevivência mais otimista. A função  $H(t)$  é não decrescente ao longo do tempo e serve como representação alternativa à função de  $h(t)$ . De maneira análoga à função de distribuição  $F(t)$ , a maioria das funções acumuladas de risco têm uma forma semelhante, independentemente da distribuição que modela os tempos até à falha do componente.

A seguir é mostrado um quadro resumo que ilustra as dependências existentes entre as várias expressões matemáticas de fiabilidade analisadas, não esquecendo que  $R'(t)$  denota a primeira derivada de  $R(t)$  em relação a  $t$ .

Tabela 2 – Expressões da relação entre  $f(t)$ ,  $R(t)$ ,  $h(t)$  e  $H(t)$ 

Funções	$f(t)$	$R(t)$	$h(t)$	$H(t)$
$f(t)$	-	$\int_0^{\infty} f(u) du$	$\frac{f(t)}{\int_t^{\infty} f(u) du}$	$-\ln \left[ \int_t^{\infty} f(u) du \right]$
$R(t)$	$-R'(t)$	-	$\frac{-R'(t)}{R(t)}$	$-\ln R(t)$
$h(t)$	$h(t) \cdot e^{-\int_0^t h(u) du}$	$e^{-\int_0^t h(u) du}$	-	$\int_0^t h(u) du$
$H(t)$	$H'(t) \cdot e^{-H(t)}$	$e^{-H(t)}$	$H'(t)$	-

### 2.2.3 Padrões de falha

A forma da função de risco indica a maneira como o componente envelhece. Basicamente esta função pode ser de três tipos: constante, decrescente ou crescente. Na primeira, a incidência de risco é estacionária, o que significa que o equipamento está sempre exposto à mesma quantidade de risco. A probabilidade de falha permanece inalterada, por isso não existe envelhecimento nem rejuvenescimento do equipamento.

Seja  $T$  uma variável aleatória não negativa que represente um tempo de falha, então diz-se que  $T \in \text{IHR}$  (*Increasing Hazard Rate*) se e só se a taxa de falhas associada for uma função monótona crescente, em sentido lato (Morais, 2007). Um equipamento com função de risco crescente, a incidência de avarias aumenta ao longo do tempo e o equipamento torna-se cada vez mais envelhecido.

De forma análoga, diz-se que  $T \in \text{DHR}$  (*Decreasing Hazard Rate*) se e só se a taxa de falhas associada for uma função monótona decrescente, em sentido lato. Num item com função de risco decrescente, a incidência de risco diminui com o passar do tempo e, como tal, vai ficando cada vez mais rejuvenescido.

Existem seis padrões que caracterizam a incidência de falhas ao longo do tempo de vida dos ativos. Desses seis, três padrões são relacionados com a idade do ativo e outros três são independentes dessa idade. Através de um estudo pioneiro (Nowlan & Heap, 1978) sobre a relação entre a taxa de falhas e os tempos de operação de aeronaves da United Airlines (UAL), os autores observaram que quase nunca existe dependência entre a fiabilidade e a idade operacional do ativo, quebrando a ideia de que quanto mais vezes a condição do ativo é verificada, menos hipóteses existem deste avariar. A Figura 4 mostra esses mesmos padrões representados graficamente pelas probabilidades condicionais de falha.

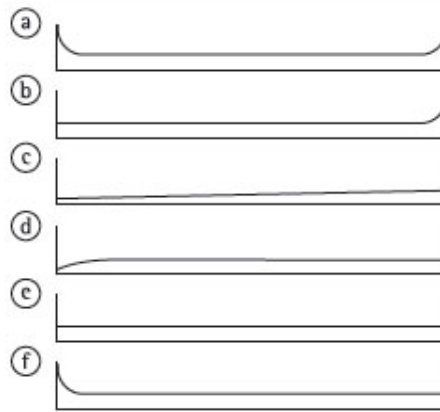


Figura 4 – Tipos de probabilidades condicionais de falhas (Moubray, 1997a)

O padrão A mostrado na Figura 5 é designado por curva da banheira (*bathtub curve*) devido à sua representação gráfica ser semelhante ao perfil de uma banheira. Formada pelos três tipos de funções de risco existentes, é considerada uma função não monótona. O início de vida de um ativo representado por este padrão é caracterizado por uma grande quantidade de falhas (taxa de falhas elevada), apesar desta decrescer rapidamente com o decorrer do ciclo de vida do componente. A esta zona da curva dá-se o nome de fase de mortalidade infantil, devido à existência de falhas precoces no componente. De seguida, segue-se a etapa intermédia caracterizada por uma probabilidade constante de falhas que modela a fase de vida útil dos ativos, no qual a taxa de falhas registada é a mais baixa durante o ciclo de vida.

Ao contrário do que sucede no período de infância do componente, no fim de vida do ativo a função de risco é crescente, pelo que existe elevada incidência de falhas nesse período que se traduz no desgaste acumulado no ativo até aí, principalmente durante a época de maturidade (vida útil) do componente, levando à deterioração do equipamento. Esta curva é especialmente adequada para descrever as várias fases de vida de equipamentos eletrónicos e órgãos elétricos, representando aproximadamente 4% do comportamento de todos os ativos (Nowlan & Heap, 1978).

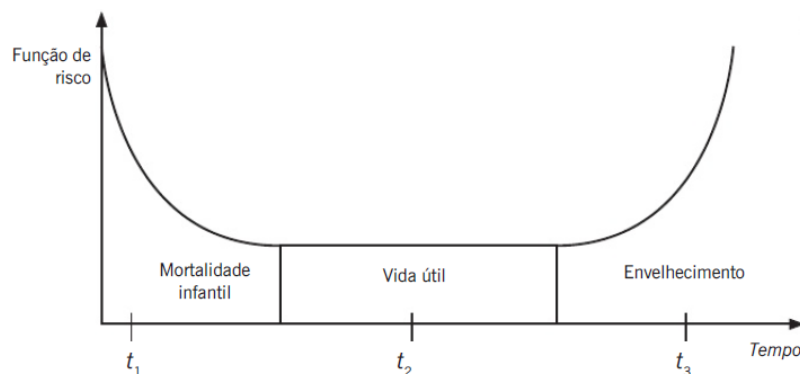


Figura 5 – Representação gráfica da curva da banheira (Fogliatto & Ribeiro, 2011)

O padrão B exhibe o desgaste típico (*wear out*) ocorrido no fim de vida de certos componentes, começando por um período de probabilidade constante ou lentamente crescente que depois se vai desenvolvendo até atingir o valor máximo de falhas registadas. Apenas cerca de 2% dos itens (Nowlan & Heap, 1978) estão em conformidade com este padrão, como é o caso de rotores e mancais de deslizamento (casquilhos).

O terceiro padrão caracteriza o desgaste gradual provocado durante toda a vida do ativo, que se traduz num período de probabilidade de falha crescente e que se desenvolve de forma mais ou menos constante ao longo do tempo, não sendo possível identificar a idade do desgaste apresentado. Somente 5% dos itens (Nowlan & Heap, 1978) se assemelham a este padrão, associado à corrosão e à fadiga de tubulações industriais, materiais refratários e peças estruturais.

O padrão D (*initial break in period*) mostra que quando o equipamento é relativamente novo tem uma probabilidade muito reduzida de algo falhar, no entanto com o decorrer do tempo essa probabilidade aumenta rapidamente até estagnar num nível constante (aleatório) de falha até ao fim da representação gráfica. Este padrão acontece em cerca de 7% dos itens (Nowlan & Heap, 1978) testados, sobretudo em sistemas hidráulicos e pneumáticos.

O padrão E é parecido com o padrão anterior, mas não apresenta o rápido crescimento inicial quanto à incidência de falhas, pelo que a frequência de falhas ao longo da vida do ativo é sempre constante, ou seja, acontece de forma aleatória. Este modelo é o segundo mais característico no que diz respeito ao comportamento das falhas dos ativos, visto que 14% dos itens eletrónicos (Nowlan & Heap, 1978), elétricos e mecânicos seguem este padrão em sistemas considerados complexos.

Por último, o padrão mais usual de acontecer é aquele designado por mortalidade infantil, significando 68% (Nowlan & Heap, 1978) do comportamento de todos os ativos existentes, principalmente componentes eletrónicos. Este padrão é o inverso do padrão B (desgaste típico), pois em vez de apresentar probabilidade crescente ao fim de vida do ativo, apresenta taxas de falha altas e decrescentes ao início de vida do ativo.

Constata-se que na maioria dos padrões (cerca de 89%), constituída pelos padrões D, E e F, não foi encontrada qualquer evidência que apontasse falhas ocorridas pelo processo de desgaste. Em contraste, apenas cerca de 11% dos padrões implicam relação entre a ocorrência de falhas e a idade de funcionamento do ativo.

### 2.3 Distribuições de fiabilidade

Inúmeros modelos paramétricos são utilizados na análise do ciclo de vida, de processos de falha e de modelações da idade operacional dos ativos. Entre os mais variados modelos, existem algumas distribuições que ocupam um papel central devido à sua extrema utilidade demonstrada numa ampla gama de situações. As distribuições que denotam maior importância nesta categoria são as distribuições Weibull, exponencial, normal e lognormal. A razão para se recorrer a uma destas distribuições é sobretudo empírica, tendo-se verificado a forma satisfatória com que estes modelos descrevem o tempo de vida dos ativos. Tal verificação baseia-se exclusivamente em observações, através da análise do impacto da idade operacional

sobre os ativos e da tipificação dos processos de falha, pondo de parte o raciocínio puramente teórico.

O pensamento lógico sobre estas distribuições é dado por Johnson e Kotz (1970), que catalogam extensivamente as propriedades estatísticas de várias distribuições matemáticas, incluindo as referidas anteriormente, de modo a proporcionar referências adicionais acerca das suas áreas de aplicação.

Tanto o ponto de vista empírico como o racional apresentam obstáculos. Por um lado, a forma empírica não garante a exatidão do modelo, por outro lado, a razão teórica é raramente específica o suficiente para restringir as considerações a apenas uma família de modelos. As barreiras apresentadas vão sendo ultrapassadas à medida que o conhecimento sobre a degradação e os processos de falha dos ativos é aprofundado. Um autor que examina estes assuntos é Shooman (1968).

### 2.3.1 Distribuição Weibull

O engenheiro e matemático sueco Waloddi Weibull (1887 – 1979) ficou célebre devido à sua distribuição contínua de probabilidade, utilizada extensivamente nas áreas da engenharia devido à sua polivalência em modelar qualquer tipo de amostras, independentemente do seu tamanho, compostas por tempos até à falha de componentes caráter industrial sujeitos a fenómenos de degradação, como é o caso dos rolamentos de esferas (Lieblein e Zelen, 1956).

Este modelo é característico pela variação inicial crescente revelada através do seu ponto de inflexão, seguido de um crescimento assintótico. O facto de ser uma lei a um, dois ou três parâmetros faz com que a distribuição Weibull seja bastante flexível devido ao facto de permitir ajustar adequadamente os resultados experimentais alcançados. Dependendo dos valores dos parâmetros que possui, a distribuição pode assumir uma vasta variedade de configurações, compartilhando características compatíveis com as distribuições exponencial, normal e lognormal.

A distribuição Weibull apresenta três possíveis parâmetros: o parâmetro de forma ( $\beta$ ), o parâmetro de escala ( $\eta$ ) e o parâmetro de posição ( $\tau$ ). Tal como o seu nome indica, o parâmetro de forma simbolizado pela letra  $\beta$  (Beta) modela a forma da distribuição de probabilidade. Este indicador adimensional é importante para diagnosticar possíveis falhas pois, dependendo do valor que toma, indica qual o tipo de avaria presente num equipamento.

Na Figura 6 observa-se que, o aumento de  $\beta$ , além de provocar uma diminuição da ordenada na origem, a curvatura do gráfico fica mais definida, pelo que o seu pico aumenta e sofre uma deslocação para a direita. Estas alterações tornam-se mais evidentes com o sucessivo aumento de  $\beta$ .

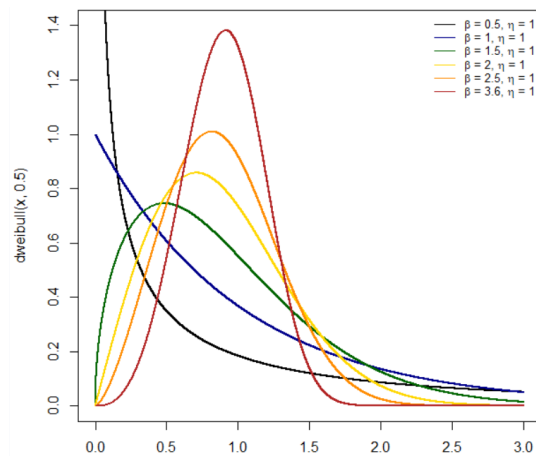


Figura 6 – Efeito de  $\beta$  na f.d.p da distribuição de Weibull

Existem alguns valores padrão que caracterizam certos tipos de avarias e taxas de falhas. Quando  $\beta < 1,0$ , está-se perante um caso de mortalidade infantil (Abernethy, 2006), caracterizado por um período inicial de vida do ativo com elevada incidência de falhas cuja probabilidade de falha se encurta aceleradamente até se manter constante. Betas menores que denotar inspeções inadequadas, problemas de produção, de controlo de qualidade e de revisão e ainda falhas de equipamentos eletrónicos de estado sólido, como é o caso dos discos de estado sólido (*Solid State Disk – SSD*) utilizados na maioria dos computadores atuais. Se o modo de falha dominante de um ativo possuir  $\beta < 1,0$  e conseguir sobreviver à mortalidade infantil, a taxa de risco diminuirá com a idade operacional e, por sua vez, o estado ativo melhorará. Ativos que apresentem indícios de mortalidade infantil estão em melhor estado do que estavam quando eram novos (*better than new*).

Segundo o mesmo autor, caso  $1,0 < \beta < 4,0$  existem indícios de desgaste antecipado do componente, tornando-se num grave problema se as falhas acontecerem durante o ciclo de vida projetado para o componente ou sistema. Estudos realizados no âmbito da fiabilidade de componentes mecânicos mostram vários valores de  $\beta$  que prenunciam modos de falha mecânicos, dentro do quais se podem destacar os seguintes:

- Processos de fadiga de baixo ciclo ( $2,5 < \beta < 4,0$ );
- Falhas de rolamentos de esferas ( $\beta = 2,0$ ) e rolamentos simples  $\beta = 1,5$ ;
- Processos de corrosão/erosão ( $2 < \beta < 3,5$ ) e processos de corrosão por stress ( $\beta > 5$ );
- Falhas em correias trapezoidais ( $\beta = 2,5$ ).

Valores elevados de  $\beta$  (betas íngremes:  $\beta > 4$ ) dentro da vida projetada do ativo são uma fonte de preocupação pois é sinal que existe um rápido desgaste que provoca o fim de vida do ativo. Os modos de falha típicos que mostram desgaste rápido incluem stress por corrosão, propriedades dos materiais utilizados, materiais frágeis (ex: cerâmica) e alguma formas de erosão. Por outro lado, se a vida característica for bem acima da vida útil, existe uma probabilidade insignificante de falha antes da revisão do ativo. Neste caso, betas íngremes são desejados. Distribuições Weibull mais íngremes têm um período seguro antes da falha ocorrer, no qual a probabilidade de falha é mínima. Quanto mais inclinada for, menor a variação nos tempos de falha e mais previsíveis os resultados. Uma Weibull vertical, com um beta infinito,

implica um projeto, um controlo de qualidade e uma produção perfeitas. Por exemplo, a mais recente metalurgia do pó pode fornecer metal mais limpo com menos inclusões. Lâminas de turbina feitas de metal puro devem ter betas mais íngremes do que as lâminas feitas com metais mais sujos. Alguns fabricantes agora usam bipes para especificar e controlar a qualidade das peças do fornecedor.

É devido à ampla extensão numérica do parâmetro de forma que permite à distribuição Weibull converter-se nas distribuições referidas anteriormente. Quando  $\beta = 2$ , a distribuição Weibull transforma-se numa distribuição de Rayleigh, caracterizada por uma taxa de falhas crescente e linear. Já para  $\beta = 2,5$  e  $\beta = 3,6$  a forma da distribuição Weibull aproxima-se a uma distribuição lognormal e a uma distribuição normal, respetivamente (Vardhan & Balaswamy, 2016). De forma a sintetizar a informação referida anteriormente, é apresentada a Tabela 3, que resume a correspondência entre os valores típicos do parâmetro de forma e os comportamentos gráficos da função densidade de probabilidade e da função de risco (taxa de falhas) a eles associados.

Tabela 3 – Comportamento da função da taxa de avarias mediante os valores de  $\beta$

Intervalo	Comportamento da f.d.p	Comportamento de $\lambda(t)$
$0 < \beta < 1$	Decrescente	Decrescente
$\beta = 1$	Distribuição exponencial	Constante
$\beta \approx 1,5$	Sobe até ao pico e decresce	Crescente (maior aumento na fase inicial)
$\beta \approx 2$	Distribuição de Rayleigh	Linearmente crescente
$\beta \approx 2,5$	Distribuição lognormal	Crescente
$\beta \approx 3,6$	Forma de sino (distribuição normal)	Crescente (aumenta rapidamente)
$\beta > 10$	Distribuição de valor extremo	Crescente (aumenta muito rapidamente)

O parâmetro de escala ou vida característica, simbolizado pela letra  $\eta$  (Eta) é entendido como o tempo para o qual a probabilidade de avaria é de aproximadamente 63,2% ou o número de unidades temporais de funcionamento que não é ultrapassado por 63,2% dos elementos, independentemente do valor de  $\beta$ . A vida característica, indicada na maioria dos papéis de probabilidade para a distribuição Weibull, é medida em unidades temporais e, como tal, toma sempre um valor positivo ( $\eta > 0$ ). Por exemplo, se o percentil 63,2 cruzar a linha de ajuste dos tempos até à falha às 90 horas, esse será o valor de  $\eta$ .

Tal como o seu próprio nome indica, o parâmetro de escala permite alterar a escala do eixo das abcissas na função densidade de probabilidade, consoante seja o seu valor. A Figura 7 mostra que, para o mesmo valor de  $\beta$ , à medida que o valor de  $\eta$  sobe ou desce, o eixo das abcissas de  $f(t)$  sofre uma dilatação ou compressão, mas a forma da função mantém-se inalterada. Uma vez que a área da função se mantém sempre a mesma, o seu valor máximo (pico da curva) diminui ou aumenta. Sempre que o parâmetro de escala aumenta, o tempo de vida útil de um componente ou sistema também se amplifica, adquirindo melhores registos de fiabilidade. Por isso, é desejável que o valor do parâmetro de escala seja o mais elevado possível.

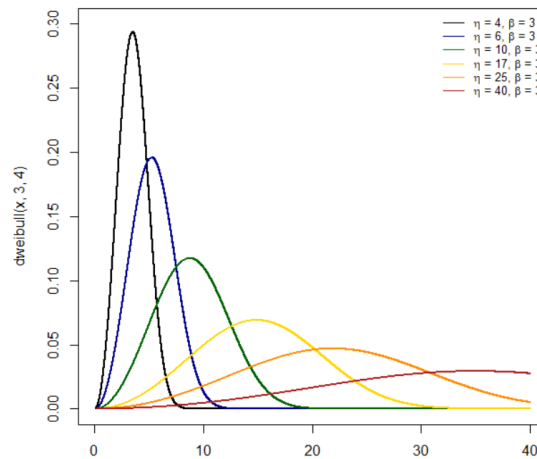


Figura 7 – Efeito de  $\eta$  na f.d.p da distribuição de Weibull

O parâmetro de posição ou localização, simbolizado pela letra  $\tau$  (Tau) é expresso nas mesmas unidades de tempo que o parâmetro de escala. Em fiabilidade, este parâmetro simboliza o tempo de garantia do componente, daí que se o seu valor for elevado, a fiabilidade do componente será constante e máxima para um certo tempo de operação. Este parâmetro indica onde está situada a função densidade de probabilidade ao longo do eixo das abcissas. Por exemplo, quando  $\tau = 10$  u.t significa dizer que a distribuição começa em  $t = 10$  u.t, estando deslocada 10 unidades temporais para a direita em relação à origem. Por sua vez, se o valor deste parâmetro for negativo a deslocação é feita no sentido oposto (para a esquerda). Tal como acontece com o parâmetro de forma, caso o valor de  $\tau$  se mantenha inalterado, o formato da distribuição permanecerá o mesmo. Não existem razões matemáticas que impeçam que este parâmetro seja negativo, contudo na maior parte das aplicações  $\tau \geq 0$ . Se  $\tau > 0$ , então considera-se que existe sobrevivência total do componente ou sistema entre  $t = 0$  e  $t = \tau$ . No presente trabalho considerar-se-á  $\tau = 0$ , que significa que as avarias começam exatamente na origem dos tempos de falha considerada.

### 2.3.1.1 Weibull de 3 parâmetros

Uma vez que as expressões do modelo tripamétrico são semelhantes ao modelo bipamétrico, sendo a única diferença a inclusão do parâmetro de posição  $\tau$ , a Tabela 4 sintetiza essas mesmas funções.

Tabela 4 – Expressões pertencentes ao modelo Weibull tripamétrico

Nome da Função	Representação da Expressão
Função densidade de probabilidade	$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \tau}{\eta} \right)^{\beta-1} \cdot \exp \left( - \left( \frac{t - \tau}{\eta} \right)^\beta \right)$
Função de fiabilidade	$R(t) = e^{-\left( \frac{t - \tau}{\eta} \right)^\beta}$
Função de in fiabilidade	$F(t) = 1 - e^{-\left( \frac{t - \tau}{\eta} \right)^\beta}$
Taxa de falhas	$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \tau}{\eta} \right)^{\beta-1}$

Sem alterar o valor do eta e aumentando o valor de  $\beta$ , a representação gráfica da densidade de probabilidade do modelo modifica-se. Além do declive da reta aumentar e do valor da ordenada na origem diminuir, o gráfico vai assumindo uma curvatura cada vez mais definida, pelo que o seu pico vai aumentando de valor e sofre uma deslocação para a direita que se torna mais evidente com o aumento do beta. Já o aumento do eta, provoca uma descida do pico da curvatura e a respetiva deslocação para a direita, mantendo a sua ordenada na origem.

### 2.3.1.2 Weibull de 2 parâmetros

Quando  $\tau = 0$ , a distribuição Weibull torna-se num modelo de 2 parâmetros,  $\beta$  e  $\eta$ . A distribuição Weibull biparamétrica é comum na análise dos tempos de vida de componentes por ser definida apenas para variáveis positivas, aplicando-se normalmente a equipamentos totalmente novos, sem períodos de desgaste operacional. A função densidade de probabilidade de falhas surge da derivação da probabilidade de falha acumulada  $F(t)$  em ordem ao tempo:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right); \beta > 0, \eta > 0, t \geq 0 \quad (14)$$

A probabilidade de um componente falhar é determinada pela função de distribuição acumulada:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^\beta}, t > 0 \quad (15)$$

Por sua vez, a função de fiabilidade complementa a função referida atrás:

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t) = e^{-(t/\eta)^\beta}, t > 0 \quad (16)$$

Quanto à taxa de avarias de um componente representado pela distribuição Weibull, esta determina-se através do quociente entre a função densidade de probabilidade de falha e a função de fiabilidade:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-(t/\eta)^\beta}}{e^{-(t/\eta)^\beta}} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}, t > 0 \quad (17)$$

### 2.3.1.3 Weibull de 1 parâmetro

Quando  $\beta = 1$  a distribuição Weibull reduz-se a uma exponencial de parâmetro  $\lambda$ , em que:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^0 = \frac{1}{\eta} = \lambda \quad (18)$$

Este caso particular também se designa por distribuição Weibull monoparamétrica. É útil quando existem dados escassos sobre os tempos de avaria, no entanto a distribuição acaba por continuar a apresentar dois parâmetros, tanto o parâmetro de forma como o parâmetro de escala, mas como o valor de  $\beta$  é conhecido de antemão, apenas se estima o valor do parâmetro de escala. Neste caso particular como a distribuição é exponencial, a taxa de falhas do componente analisado é constante ao longo do tempo e normalmente toma um valor baixo.

A função densidade de probabilidade (f.d.p) e a taxa de falhas para um parâmetro de forma unitário são as indicadas imediatamente abaixo, respetivamente:

$$f(t) = (1/\eta) \cdot \exp(-t/\eta) \quad (19)$$

$$\lambda(t) = 1/\eta \quad (20)$$

### 2.3.2 Distribuição Exponencial

Como mostram Davis (1952) e Epstein (1951), a distribuição exponencial foi a primeira cuja aplicação foi extensamente difundida em estudos referentes à duração do ciclo de vida de equipamentos industriais. O parâmetro da distribuição,  $\lambda$  (Lambda), representa a taxa de falhas do componente ou sistema. Itens com tempos até à falha distribuídos exponencialmente, possuem taxas de falhas constantes em relação ao tempo, ou seja, com função de risco constante. Segundo este princípio, exclui-se a possibilidade de haver degradação do componente. Este tipo de função admite que as falhas são consideradas aleatórias (inesperadas), por isso a probabilidade de algo falhar permanece intacta. A seguir, é mostrado um quadro (Tabela 5) com as funções mais importantes desta distribuição:

Tabela 5 – Expressões pertencentes à distribuição exponencial

<b>Função densidade de probabilidade</b>	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
<b>Função de fiabilidade</b>	$R(t) = e^{-\lambda t}$
<b>Função de risco</b>	$h(t) = \lambda$
<b>Função de distribuição acumulada</b>	$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
<b>Variância</b>	$\sigma^2 = 1/\lambda^2$
<b>Tempo médio até à falha</b>	$MTTF = \sigma = 1/\lambda$

A expressão de  $F(t)$  é obtida a partir da integração de  $f(t)$  e, através dela, chega-se ao de  $t$  que corresponde ao instante em que se atinge uma determinada probabilidade acumulada de falha:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left[ \frac{1}{1-F(t)} \right] \quad (15)$$

Outra propriedade reside no facto da distribuição exponencial não estar relacionada com o tempo, isto é, não tem memória temporal. Portanto, suposição de que dois itens iguais apresentam a mesma fiabilidade  $R(t)$  num certo instante  $t$ , seja qual for a idade ou o tempo operacional acumulado desses itens não se verifica nesta distribuição.

O parâmetro  $\lambda$  influencia de maneira diferente cada tipo de função da distribuição exponencial. Relativamente à representação de  $f(t)$ , à medida que o valor de  $\lambda$  varia de forma crescente, a linha do gráfico (Figura 8) comporta-se cada vez mais de forma exponencial e a ordenada na origem aumenta de valor, já que esta representa o valor da taxa de avarias ( $\lambda$ ).

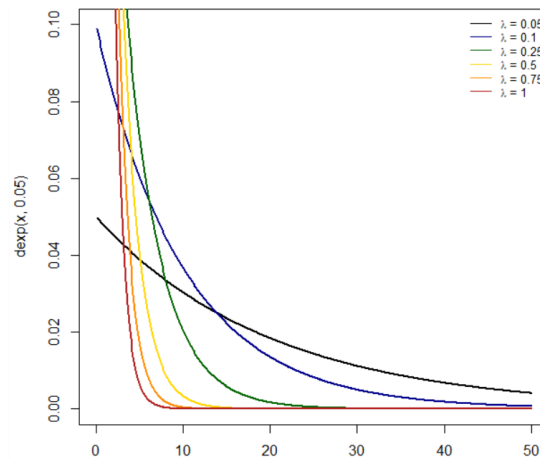


Figura 8 – F.d.p da distribuição exponencial para vários valores de  $\lambda$

Quanto à função de fiabilidade, o aumento do valor de  $\lambda$  provoca uma aproximação da curva do gráfico com a origem e a sua forma convexa torna-se mais óbvia. Inversamente ao que foi dito, a distribuição é puxada (afastada) para a direita quando o valor de  $\lambda$  decresce. Facilmente se percebe que é preferível um valor mínimo de  $\lambda$ , que resulta numa maior fiabilidade e que decresce de forma mais vagarosa com o decorrer do tempo. No que diz respeito a  $F(t)$ , o aumento da taxa de avarias provoca máximo da função mais elevado e forma côncava da distribuição fica mais definida (Figura 9).

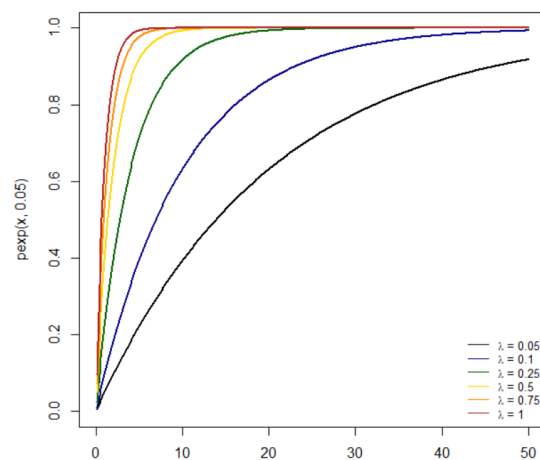


Figura 9 – Função de distribuição da exponencial para vários valores de  $\lambda$

Para além de  $\lambda$ , a distribuição exponencial tem a particularidade de apresentar dois parâmetros, tornando-se numa distribuição exponencial biparamétrica. A este segundo parâmetro dá-se o nome de parâmetro de localização, simbolizado por  $\tau$  (Tau). Tal como na distribuição Weibull, representa o tempo de garantia que limita o período no qual existe ausência de falhas até ao instante  $\tau$ .

A função densidade de probabilidade correspondente à distribuição exponencial de dois parâmetros equivale a:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad t \geq 0, t \geq \tau \quad (16)$$

Este modelo é empregue em situações onde se considera que a falha precede um tempo particular  $\tau$ . Caso o valor de  $\tau$  seja conhecido, as análises estatísticas são suscetíveis de serem realizadas como se tratasse da distribuição exponencial de um único parâmetro. A melhor maneira de lidar com o facto do parâmetro de localização ser desconhecido é assumir que este valor é conhecido, repetindo a análise para vários valores de  $\tau$  com o cuidado de avaliar quais os valores mais plausíveis, caso contrário poderão desencadear problemas numéricos nas análises estatísticas.

### 2.3.3 Distribuição Normal

A distribuição normal é a distribuição mais divulgada na área de estatística. Visualmente é uma distribuição conhecida pela sua curva em forma de sino, designada por curva de Gauss ou curva Gaussiana. É uma distribuição simétrica, por ter uma média, uma moda e uma mediana aproximadamente iguais. Além do mais, visto que a curtose é uma medida estatística que quantifica a aproximação de uma certa distribuição com a distribuição normal, o seu valor é nulo.

Seria expectável que a distribuição normal fosse inadequada para modelar dados vitalícios devido ao limite esquerdo da distribuição estender-se em direção ao infinito negativo, originando tempos de falhas negativos. Contudo, apesar do seu domínio teórico ser infinito, é conhecida na área da fiabilidade pela boa capacidade em representar a vida útil de ativos. Como o tempo até à falha (tal como a probabilidade de falha) é uma dimensão positiva, recorre-se a uma distribuição normal truncada com  $t > 0$ , desprezando-se todos os valores negativos da distribuição. Tal só poderá ser possível desde que a distribuição tenha uma média relativamente elevada e um desvio padrão muito reduzido. A sua função densidade de probabilidade de falha é descrita na seguinte expressão:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t-\mu}{2\sigma}\right)^2 dt, f(t) \geq 0 \quad (17)$$

A partir expressão constata-se que a distribuição é biparamétrica, por apresentar o parâmetro  $\mu$  (Mu) e o parâmetro  $\sigma$  (Sigma) que são a média e o desvio padrão dos tempos normais de falha, respetivamente. Cada um destes parâmetros tem a seu próprio modo de influenciar a função densidade de probabilidade.

O parâmetro  $\mu$ , entendido como MTTF (*Mean Time to Failure*), atua como um eixo de simetria ao determinar a posição da função relativamente ao eixo das abcissas. Quanto mais elevado for o valor da média, maior será a deslocação para a direita, em relação ao eixo indicado. Em fiabilidade, um aumento do MTTF significa que os tempos de avarias ocorrem mais tarde em relação ao valor da média anterior. Como a distribuição normal não possui parâmetro de forma, a sua curva característica permanece inalterada (Figura 10), quaisquer que sejam as alterações aos valores da média e do desvio padrão.

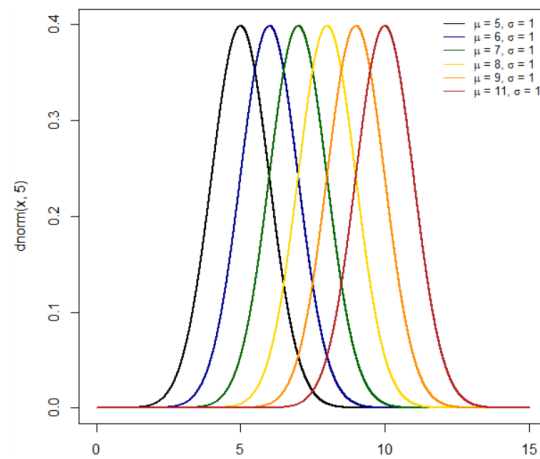


Figura 10 – F.d.p da distribuição normal para uma amplitude de valores de  $\mu$

No entanto, o desvio padrão aproxima-se a um parâmetro de forma pois, consoante o incremento ou a redução do seu valor, a função torna-se mais ou menos achatada (Figura 11). O crescente progresso da aplanção provoca um menor valor máximo (pico da curva) e a função densidade de probabilidade sofre um alargamento lateral.

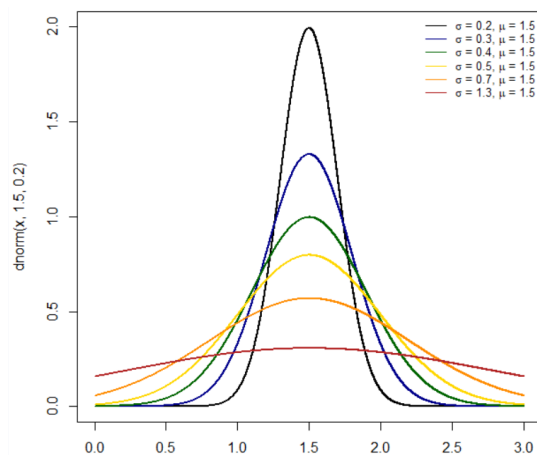


Figura 11 – F.d.p da distribuição normal para uma amplitude de valores de  $\sigma$

Quanto às expressões da função de fiabilidade e de in fiabilidade da distribuição normal, estas correspondem às seguintes, respetivamente:

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 \quad (18)$$

$$F(t) = 1 - R(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 \quad (19)$$

A representação gráfica de  $R(t)$  é inicialmente constante e vai decrescendo naturalmente com o avançar do tempo. Os efeitos provocados pela média e pelo desvio padrão em  $R(t)$  são similares. Assumindo duas funções de fiabilidade com o mesmo valor médio, a que tiver menor desvio padrão vai começar a ter problemas de fiabilidade mais cedo para um mesmo instante  $t$ . Isto significa que ambas as curvas apresentam a mesma forma, no entanto a que tem maior desvio padrão começa a decrescer mais tarde do que a outra. Como a subida ou descida do

desvio padrão faz com que a fiabilidade se mantenha durante mais ou menos tempo, as duas funções vão deixar de ter a mesma forma. A média das duas funções continua a igual, assim, logo que a função com o maior desvio padrão se cruza com a outra, começa a decrescer de forma mais acentuada, como forma de compensação por ter decrescido mais lentamente no início do desenvolvimento da curva. Por fim, a função de risco  $h(t)$  é dada pela próxima expressão:

$$h(t) = \frac{\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma \cdot R(t)} \quad (20)$$

### 2.3.4 Distribuição Lognormal

A distribuição lognormal é apropriada para o estudo de tempos de falha recentes, dando mais atenção para o período inicial do tempo de funcionamento, onde existe maior probabilidade de falha. Esta distribuição é um caso particular da distribuição normal, no qual a forma gráfica encontra-se mais distorcida para a direita. A sua assimetria torna-a mais adequada para representar componentes que apresentam tempos de falhas díspares. Um pormenor relevante é que a distribuição lognormal assume apenas valores positivos, tornando-a ainda mais útil para descrever casos práticos pois não necessita de ser truncada, como acontece com a distribuição normal. Logo, torna-se mais apropriada para análises de fiabilidade, em comparação com a distribuição normal. Os parâmetros desta distribuição são os mesmos da distribuição normal, com a distinção de serem em função dos logaritmos dos tempos de falha, alterando por completo as escalas das funções. Dado que a forma da função densidade de probabilidade da distribuição lognormal é equiparável à f.d.p da distribuição Weibull, os tempos de falha ajustáveis pela distribuição lognormal costumam ser bem ajustados pela distribuição Weibull. A expressão da f.d.p é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad t > 0 \quad (21)$$

O tempo de vida  $T$  é caracterizado pela distribuição lognormal se o logaritmo  $Y = \ln T$  for normalmente distribuído, com média e variância iguais a:

$$E(T) = \mu = MTTF = e^{\mu + (\sigma^2/2)} \quad (22)$$

$$Var(T) = \sigma^2 = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1) \quad (23)$$

Sendo que  $\mu$  é o parâmetro de localização e  $e^{\mu}$  é o parâmetro de escala da distribuição lognormal. Estes parâmetros influenciam, cada um à sua maneira, as várias funções da distribuição normal. Como se pode ver na Figura 12, à medida que se aumenta o valor do desvio padrão, mantendo o valor da média, a função densidade de probabilidade afasta-se da origem, resultando numa translação para a esquerda.

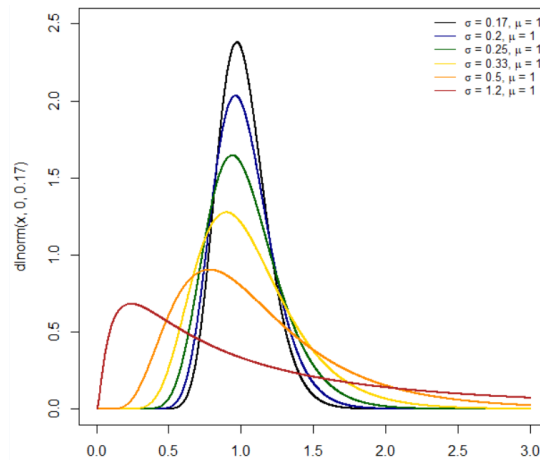


Figura 12 – F.d.p da distribuição lognormal com  $\sigma$  variável

A função de risco da distribuição lognormal corresponde a  $f(t)/R(t)$ , pelo que o denominador da fração corresponde à função de fiabilidade:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right) \quad (24)$$

Em  $R(t)$ , a média atua como um fator de escala pois, quanto maior for o logaritmo da média do tempo até à falha, mais a curva característica se torna aplanada. A taxa de crescimento ou decréscimo de  $h(t)$  depende da média e do desvio padrão. O aumento do desvio padrão eleva também o declive da função de  $R(t)$ . A função de risco corresponde à seguinte expressão:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu}{\sigma}\right)} \quad (25)$$

A taxa de falhas  $h(t)$  expande-se rapidamente desde o início da função e, perto do seu fim, vai diminuindo gradualmente devido ao impacto da acumulação do tempo de funcionamento do ativo. Apesar do comportamento de  $h(t)$  demonstrado na distribuição lognormal não ser habitual em componentes ou sistemas reais, tal não impede que esta distribuição seja utilizada na prática.

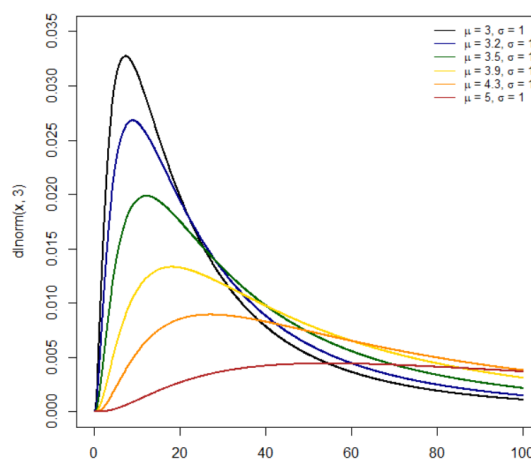


Figura 13 – F.d.p da distribuição lognormal com  $\mu$  variável

## 2.4 Dados Censurados

A censura é o ponto de diferenciação entre a análise de sobrevivência e os restantes campos de aplicação da estatística. Os tempos de falha poderão significar a vida do ativo, dependendo se este é reparável ou não reparável, daí que a duração decorrida entre o início do teste e o evento de interesse pode ser denominado por tempo de falha, tempo até à falha, tempo de vida ou ainda tempo de sobrevivência (termo oriundo da medicina). A informação completa de dados disponibiliza todos os tempos até à falha dos itens de uma amostra em observação, porém a análise dos tempos de vida dos equipamentos enfrenta a dificuldade que habita na eventual possibilidade de existirem dados censurados. Existem várias razões para haver censura de tempos até à falha. Algumas delas podem ser a perda por falta de acompanhamento do ativo durante o teste, o ativo não estar presente no estudo até ao fim deste ou o ativo ser retirado da análise de sobrevivência por causas acidentais (Kleinbaum, 1996).

Fundamentalmente a censura pode ser à direita, à esquerda, aleatória ou intervalar (por intervalo). Por sua vez, a censura à direita poderá encaixar-se em dois subgrupos: censura do tipo I e censura do tipo II. A censura à direita, como o próprio nome indica, acontece quando o tempo de falha está colocado à direita do tempo de interesse. As falhas serão apenas detetadas após a cessação do teste, ou seja, o tempo observado é menor do que o tempo decorrido entre o início e o evento de falha. Este é o tipo de censura mais comum em testes de sobrevivência. A título de exemplo, num teste de dez correias de um ventilador, quatro delas falharam às 33, 56, 87 e 109 horas, respetivamente. As seis correias restantes permaneceram operacionais quando o teste parou às 120 horas. Diz-se que os tempos de falhas das correias estão censurados à direita em 120 horas.

A censura à esquerda, é aquela na qual não se conhece o momento das suas ocorrências, visto que as falhas são anteriores ao início da realização do teste. Por outras palavras, a censura à esquerda surge quando o instante de falha é menor que o tempo observado. Suponha-se, noutro exemplo, que são expostos condensadores a altos níveis de tensão de forma a acelerar os seus tempos de falhas. Se esses condensadores forem inspecionados de 24 em 24 horas e registar-se uma falha num condensador, então diz-se que o seu tempo de falha está censurado à esquerda.

Quando não existe certeza sobre o exato instante de uma falha está-se perante uma censura intervalar, pelo que apenas se sabe que a falha está situada dentro de um intervalo de tempo. Esta censura acontece quando, numa inspeção a um conjunto de transístores acontece de 48 horas em 48 horas, o responsável toma conhecimento dos seus estados de funcionamento no momento em que os examina, registando os tempos até à falha de forma intervalar, em vez de fazer estimativas. Assim, o tempo de falha do transístor encontra-se censurado entre as 240 e as 288 horas.

### 2.4.1 Censura do Tipo I

Tanto a censura de tipo I e II surgem de aplicações na área de fiabilidade. Tais situações podem abordar um grupo de transístores ou outros componentes similares (Miller, 1998). Colocando-os num teste de resistência de forma a registar os tempos até à falha, alguns transístores deverão demorar bastante tempo até queimarem. Como o desejável é não esperar até que isso aconteça, em alguns casos para-se o teste num instante especificado. Desta forma, está-se

perante uma censura do tipo I quando o teste de fiabilidade tem duração fixa, apenas se conhece um tempo de falha se este for registado abaixo do valor pré-determinado. Assim, só serão conhecidos os tempos de falha dos itens que falharem esse momento.

Para ilustrar melhor este tipo de censura, Bartholomew (1957) recorre a um ensaio figurativo (Tabela 6). Suponha-se correto funcionamento de um equipamento é assegurado por dez peças que vão sendo instaladas ao longo do tempo. A instalação das peças é feita por ordem crescente, começando na peça um e terminando na peça dez. O início do teste começa logo após a instalação da peça um e o seu fim é agendado para o fim do mês de agosto (até dia 31), quando já todas as peças tiverem sido instaladas.

O teste tem como principal objetivo analisar a distribuição dos tempos de falha de cada peça, estimando a proporção do equipamento que falha dentro de um tempo específico. A seguinte tabela mostra todas as datas de instalação e as datas de quando as peças sofrem falhas, enquanto que outras se mantêm em uso, como é o caso da peça dois, quatro e dez, cujos tempos de falha estão censurados pois excedem o dia 31 de agosto. Apenas se sabe que a peça dois vai com, pelo menos 72 dias de funcionamento interrupto, a peça quatro com 60 dias e por fim a peça dez somente com 21 dias, visto que a sua instalação foi a última a ser cumprida, em pleno mês de conclusão do teste. Um pormenor importante a reter é que cada peça tem o seu tempo de falha censurado, visto que o teste não começa na mesma data para todas as peças, com a exceção da peça seis e sete.

Tabela 6 – Tabela adaptada do exemplo de (Bartholomew, 1957)

<b>Número da peça</b>	1	2	3	4	5
<b>Data de instalação</b>	11 de junho	21 de junho	22 de junho	2 de julho	21 de julho
<b>Data da falha</b>	13 de junho	–	12 de agosto	–	23 de agosto
<b>Tempo de vida</b>	2 dias	≥ 72 dias	51 dias	≥ 60 dias	33 dias
<b>Número da peça</b>	6	7	8	9	10
<b>Data de instalação</b>	31 de julho	31 de julho	1 de agosto	2 de agosto	10 de agosto
<b>Data da falha</b>	27 de agosto	14 de agosto	25 de agosto	3 de agosto	–
<b>Tempo de vida</b>	27 dias	14 dias	24 dias	4 dias	≥ 21 dias

De forma mais esclarecedora, a censura de tipo I surge numa amostra quando em  $n$  elementos submetidos a períodos de observação limitados  $\{L_1, \dots, L_n\}$ , um tempo de falha  $T_i$  é observado apenas se  $T_i \leq L_i$ . Neste tipo de censura, quando todos os tempos  $L_i$ 's são iguais diz-se que o conjunto de dados é censurado individualmente, de forma a distinguir esta situação particular do caso geral.

Suponha-se que existem  $n$  itens sob estudo e que ao  $i$ -ésimo constituinte estão associados dois tempos, um tempo de falha  $T_i$  e um tempo de censura  $L_i$ . Assim como na censura do tipo II, assume-se que vários  $T_i$ 's são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) com uma f.d.p  $f(t)$  e uma função de fiabilidade  $R(t)$ . Os dados observados que sigam tal configuração podem ser representados convenientemente por  $n$  pares de variáveis aleatórias  $(t_i, \delta_i)$ , onde:

$$t_i = \min(T_i, L_i) \quad (26)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } T_i \leq L_i \\ 0 & \text{se } T_i > L_i \end{cases} \quad (27)$$

A variável binária  $\delta_i$  indica o estado de falha. Se  $\delta_i$  for igual a 1, o tempo  $T_i$  é censurado e não censurado se  $T_i$  for igual a 0, pelo que  $t_i$  corresponde a  $L_i$  e a  $T_i$ , para cada caso respetivo. De ressaltar também que  $t_i$  é uma variável aleatória com uma componente contínua e outra discreta. Quanto ao segmento discreto, tem-se que:

$$P_r(t_i = L_i) = P_r(\delta_i = 0) = P_r(T > L_i) = S(L_i) \quad (28)$$

Para valores  $t_i \leq L_i$ , a função densidade de probabilidade para valores contínuos é:

$$P_r(t_i | \delta_i = 1) = P_r(t_i | t_i < L_i) = f(t_i) / (1 - S(L_i)) \quad (29)$$

onde  $P_r(t_i | \delta_i = 1)$  representa a função densidade de probabilidade de  $t_i$ , sabendo-se que  $t_i < L_i$ . Por conseguinte, a distribuição do par  $(t_i, \delta_i)$  com as duas componentes fica:

$$P_r(t_i = L_i, \delta_i = 0) = P_r(\delta_i = 0) = S(L_i) \quad (30)$$

$$P_r(t_i, \delta_i = 1) = P_r(t_i | \delta_i = 1) \cdot P_r(\delta_i = 1) = f(t_i) \quad t_i < L_i \quad (31)$$

Para uma leitura mais simplificada, estas duas expressões acima descritas podem ser combinadas numa única expressão. A f.d.p associada a este par de variáveis é a seguinte:

$$P_r = (t_i, \delta_i) = f(t_i)^{\delta_i} * S(L_i)^{1-\delta_i} \quad (32)$$

Se os múltiplos pares referidos forem independentes, a função de máxima verossimilhança será igual ao produto das sucessivas funções densidade de probabilidade:

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} * S(L_i)^{1-\delta_i} \quad (33)$$

#### 2.4.2 Censura do Tipo II

Caso não haja certeza sobre o melhor momento para parar o experimento, é possível terminar o teste até que uma fração pré-especificada de transístores queimados seja atingida. Quando se opta por esta via está-se perante censura do tipo II.

Neste tipo de censura, somente os  $r$  menores dados pertencentes a uma amostra aleatória são observados, num total de  $n$  itens ( $1 \leq r \leq n$ ), pelo que  $r$  é decidido antes das observações da amostra ser recolhidas. Esta espécie de censura é utilizada em grande escala para testes de sobrevivência, nos quais são testados os tais  $n$  itens, mas em vez de se esperar todos os itens sejam expostos à exaustão (i.e, até que ocorra a falha), o teste termina assim que o  $r$ -ésimo item falhe. As limitações destes testes poupam simultaneamente tempo e dinheiro, visto que a duração normal destes testes pode ser muito elevada, devido à notória longevidade dos componentes eletrónicos, por exemplo.

Enquanto que na censura do tipo I, o número exato de tempos de falha observados é completamente aleatório, na censura de tipo II este número é fixado previamente. Ao lidar-se com censura de tipo II, é apropriado recorrer-se a uma notação diferente da usada para o tipo I.

Do ponto de vista formal, as observações com censura do tipo II consistem nos  $r$  menores tempos de falha  $\{T_{(1)} \leq \dots \leq T_{(r)}\}$  ordenados num total de  $n$  tempos inseridos numa amostra

aleatória conforme uma dada distribuição, daí a inclusão dos parênteses no número de ordenação de cada tempo.

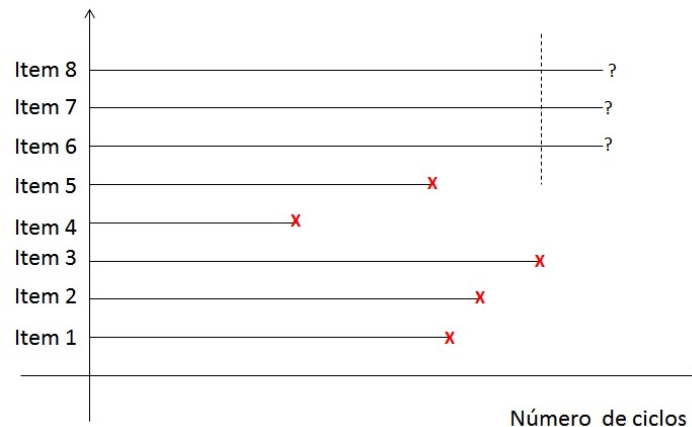


Figura 14 – Censura do tipo II (Ramos, 2017)

Caso cada tempo  $\{T_{(1)}, \dots, T_n\}$  seja uma variável independente e identicamente distribuída e tiver uma distribuição contínua com função densidade de probabilidade  $f(t)$  e função de infiabilidade  $F(t)$ , a função densidade de probabilidade conjunta desses tempos será ( $r \leq n$ ):

$$\frac{n!}{(n-r)!} (\prod_{i=1}^r f(t_{(i)})) [1 - F(t_{(r)})]^{n-r} \quad (34)$$

A função acima exposta pode ser utilizada para qualquer inferência estatística num dado modelo paramétrico. A partir dela é possível determinar a função de máxima verossimilhança, de onde se pode extrair metodologias relativas a propriedades de amostragem.

A censura do tipo II possui uma generalização, a que se dá o nome de censura progressiva do tipo II. É progressiva porque depois das primeiras  $r_1$  falhas observadas numa amostra  $n$ , são removidos do ensaio  $n_1$  dos restantes  $n - r_1$  itens, permanecendo ainda  $n - r_1 - n_1$  itens presentes no teste. Mais adiante, quando ocorrer a falha de  $r_2$  elementos, são removidos  $n_2$  itens dentro daqueles que prosseguem sem falhar, e assim por diante, terminando o teste ao fim de uma série de repetições.

### 2.4.3 Censura Aleatória

Por vezes, a censura apresenta-se em formato aleatório. Surge quando os tempos censurados, que vão desde o instante inicial em que item foi colocado em teste até ao momento pré-estabelecido para a cessação do mesmo, são aleatórios. Para propósitos inferenciais, recorre-se condicionalmente a este mecanismo de censura, utilizando-se os mesmos procedimentos da censura do tipo I. Claro está que o processo pelo qual os dados são gerados necessita ser considerado em ordem a justificar essa decisão. Esta abordagem (suposição de censura aleatória) é um meio bastante útil para averiguar as propriedades de certos métodos.

Um processo de censura aleatória relativamente simples e suficientemente realista é aquele em que se assume que cada item é individual apresenta duas variáveis contínuas independentes, o tempo de vida  $T$  e o tempo censurado  $L$ , com funções de fiabilidade  $R(t)$  e  $G(t)$ , respetivamente. Seja  $(T_i, L_i)$  um par de variáveis independentes com  $i = 1, \dots, n$  e, tal como na censura de tipo I, define-se  $t_i = \min(T_i, L_i)$ . Como se viu anteriormente,  $\delta_i = 1$  quando  $T_i \leq L_i$  e  $\delta_i = 0$  na situação de  $T_i > L_i$ . Os tempos de falha observados em  $n$  observações consistem

em nos pares  $(t_i, \delta_i)$ , em que a f.d.p desses pares pode ser obtida facilmente se for usada a mesma notação da expressão corresponde à função de máxima verossimilhança:

$$P_r(t_i = t, \delta_i = 0) = P_r(L_i = t, T_i > L_i) = g(t) \cdot S(t) \quad (35)$$

$$P_r(t_i = t, \delta_i = 1) = P_r(T_i = t, T_i \leq L_i) = f(t) \cdot G(t) \quad (36)$$

Em que  $g(t)$  e  $f(t)$  são as funções densidade de probabilidade de  $L_i$  e  $T_i$ , respetivamente. Tal como para a censura de tipo I, estas expressões podem ser combinadas numa só resultando o seguinte:

$$P_r(t_i = t, \delta_i) = [f(t) \cdot G(t)]^{\delta_i} \cdot [g(t) \cdot S(t)]^{\delta_i - 1} \quad (37)$$

Por sua vez, a distribuição amostra de  $(t_i, \delta_i)$  será semelhante a:

$$\prod_{i=1}^n [f(t_i)G(t_i)]^{\delta_i} \cdot [g(t_i)S(t_i)]^{\delta_i - 1} = \left( \prod_{i=1}^n G(t_i)^{\delta_i} g(t_i)^{1 - \delta_i} \right) \cdot \left( \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1 - \delta_i} \right) \quad (38)$$

Pode acontecer das funções  $G(t)$  e  $g(t)$  não envolverem qualquer tipo de parâmetros de interesse, fazendo com que o primeiro termo da expressão anterior seja negligenciado para assim constituir a função de máxima verossimilhança:

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1 - \delta_i} \quad (39)$$

Como se pode ver, esta expressão tem a mesma forma da forma da função de máxima verossimilhança respeitante à censura de tipo I, pelo que esta última pode ser considerado um caso especial da primeira se a possibilidade dos tempos de censura  $L_i$  tiverem diferentes distribuições degeneradas, cada um com um certo instante fixo.

Outra abordagem que leva diretamente para a função de máxima verossimilhança é através da demonstração que mostra que  $G(t)$  e  $g(t)$  não envolvem nenhum parâmetro de interesse. Assim, as inferências estatísticas acerca da distribuição de  $T$  devem considerar essa condição nos tempos de censura praticados. Um ponto a destacar é o facto de às vezes ser desejável fazer inferências condicionais acerca dos tempos de censura numa dada situação, porém as propriedades calculadas sobre a distribuição desses tempos podem interessar no que se refere ao planeamento de testes e à avaliação de métodos de estimação.

Apesar do modelo de censura aleatória independente ser geralmente razoável, em alguns casos o processo geração de censura está intimamente relacionado com o processo de geração dos tempos falha. Suponha-se, por exemplo, que a data do fim de um teste não está estabelecida antes do estudo começar e é apenas decidida posteriormente, com a escolha a influenciar os resultados do estudo até o momento da tomada de decisão. Em tais circunstâncias, haverá eventualmente a dificuldade acrescida de construir um modelo que represente totalmente o processo em estudo.

#### 2.4.4 Estimador de Kaplan-Meier

Entre a década de 1950 e a década de 1960, começaram a nascer conceitos iniciais sobre os estimadores das probabilidades de sobrevivência para a construção de modelos que integrassem dados censurados, censura esta de várias categorias que existe devido à perda de seguimento (*follow-up*) ou simplesmente devido ao abandono do estudo, dando origem ao método do produto limite de Kaplan-Meier (Kaplan & Meier, 1958). Este método, considerado como um padrão para a obtenção de sínteses estatísticas sobre observações incompletas, é não

paramétrico, o que equivale a dizer que é independente da distribuição de probabilidade (Colton, 1979). Quanto aos tempos de falhas censurados, estes entram no cálculo da função de distribuição acumulada de sobrevivência, proporcionando o aumento de eficiência por parte do uso das informações disponíveis (Szklo & Nieto, 2000).

Uma forma útil de retratar um conjunto de tempos até à falha não agrupado e univariado abrange o cálculo e a representação gráfica da função de fiabilidade ou a função de distribuição empírica equivalente. Esta forma proporciona uma estimação não paramétrica destas funções para a distribuição que representativa dos tempos de falha sob estudo.

Numa amostra  $n$  sem observações censuradas, a função de fiabilidade empírica (FSE) é definida como:

$$\hat{R}(t) = \frac{\text{Número de observações} \geq t}{n} \quad t \geq 0 \quad (40)$$

Esta é uma função “degrau” pois decresce  $1/n$  logo após cada tempo de falha observado se todas as observações forem distintas. Pela mesma lógica, se houverem  $d$  tempos de avaria iguais a  $t$ , a FSE baixa  $d/n$  depois do instante  $t$ . Ao lidar-se com censura de dados, é necessário adaptar a FSE, uma vez que o número de tempos de falha maiores ou iguais a  $t$  não serão conhecidos. A modificação feita na função é conhecida como estimador produto-limite ou estimador de Kaplan-Meier, dos autores pioneiros com o mesmo nome que examinaram as suas propriedades (Kaplan & Meier, 1958).

O estimador produto-limite de  $R(t)$  consiste no limite do produto dos termos até ao tempo de falha  $t$  e pode ser visto como o produto cumulativo das probabilidades condicionais, ou seja, a probabilidade incondicional de sobrevivência:

$$\hat{R}(t) = \prod_{t_j < t} \left( \frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{t_j < t} \left( 1 - \frac{d_j}{n_j} \right) \quad (41)$$

onde  $n_j$  representa o número de componentes em risco no momento  $t_j$ , isto é, o número de componentes não omitidos em funcionamento imediatamente antes de  $t_j$ . Como  $d_i$  indica o número de falhas em cada instante, o numerador da equação anterior  $(n_i - d_i)$  corresponde a cada tempo censurado. Os dados referentes aos tempos de falha devem ser ordenados por ordem crescente  $(t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_j)$ .

Quando o tempo de censura e o tempo até à falha são exatamente iguais, adota-se a convenção de ajustar os tempos de censura numa quantidade infinitesimal para a direita, tornando  $L_i$  infinitesimal maior que  $t_j$ . Por outras palavras, qualquer componente com tempos de censura registados iguais a  $t_j$  são incluídos no conjunto de componentes em risco no instante  $t_j$  e que falham nesse exato instante. Facilmente se percebe que esta convenção é sensível, uma vez que um item censurado no instante  $L$  certamente permanece operacional depois desse mesmo instante. Outra preocupação no que diz respeito ao estimador de Kaplan-Meier é o facto do maior tempo observado na amostra ser um tempo de censura, em vez de um tempo de falha. Nesta situação, o estimador produto-limite é determinado apenas até esta última observação.

O estimador  $\hat{R}(t)$  é construído como um produto e cada termo no produto pode ser visto como uma estimativa da probabilidade condicional do componente permanecer intacto passado o instante  $t_j$ , considerando a sobrevivência até pouco antes de  $t_j$ . Na verdade, este estimador é um caso restritivo do método da tabela de vida padrão, obtida quando o número de intervalos

dessa tabela se torna infinito e a extensão de todos intervalos exceto o último se aproximam de zero. Como é lógico, quando não existem dados censurados,  $n_1 = n$  e  $n_j = n_{j-1} - d_{j-1}$ , a expressão de  $\hat{R}(t)$  reduz-se à função de sobrevivência empírica (FSE).

Em ambos os casos, censura ou não censura, tal como a FSE,  $\hat{S}(t)$  é uma função “escada” que é unitária em  $t = 0$  e decresce segundo o fator  $(n_j - d_j)/n_j$  imediatamente a seguir a cada tempo de falha  $t_j$ . Como tal, o valor do estimador não sofre quaisquer alterações ao incluir-se tempos de censura. No entanto, o efeito do mecanismo de censura é sentido nos valores de  $n_j$  e consequentemente nos tamanhos dos vários “degraus” de  $\hat{R}(t)$ .

Com o intuito de avaliar efetivamente os resultados advindos da estimativa produto-limite, é desejável que se estime a variância de  $\hat{R}(t)$ , procedendo-se da seguinte forma:

$$\widehat{Var}[\hat{S}(t)] = \hat{S}(t)^2 \sum_{j: t_j < t} \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)} \quad (42)$$

Quando existe ausência de censura, a expressão da estimativa da variância reduz-se na sua forma mais usual:

$$\widehat{Var}[\hat{S}(t)] = \frac{\hat{S}(t)(1 - \hat{S}(t))}{n} \quad (43)$$

O método de Kaplan-Meier, em comparação com outros métodos, assume que os dados incompletos irão seguir a mesma tendência daqueles que são observados (Kahn & Sempos, 1989), em vez de assumir que as observações censuradas ocorrem segundo uma distribuição uniforme. Outra vantagem deste método reside no facto de poder ser aplicado seja qual for a dimensão da amostra analisada, sendo extremamente útil em estudos com um número reduzido de observações. O estimador de Kaplan-Meier pode ainda ser interpretado de forma diferente, como a soma de “pesos” de Kaplan Meier. Para tal, adota-se uma nova notação que permite obter uma expressão empírica desses “pesos”, que correspondem aos “saltos” da distribuição do estimador, dados por:

$$W_i = \hat{S}(t_{i-1:k}) - \hat{S}(t_{i:k}), i \geq 1 \quad (44)$$

## 2.5 Propriedades dos estimadores

Os estimadores de uma dada distribuição dispõem de várias propriedades, das quais se destacam quatro delas: o enviesamento, a variância, o erro quadrático médio e a consistência.

### 2.5.1 Enviesamento:

Um estimador adequado é aquele que simultaneamente está centrado e tem uma precisão satisfatória (Martins, 2006). A precisão e o enviesamento da amostra são termos facilmente confundíveis, já que a falta de precisão e o problema de enviesamento de uma amostra são erros habitualmente defrontados num processo de amostragem, no entanto manifestam-se de maneiras distintas. O enviesamento manifesta-se por um desvio no valor da estatística em relação ao valor do parâmetro estimado, enquanto que a carência de precisão resulta de uma variabilidade excessiva no valor da estatística.

Um estimador centrado significa que é não enviesado, devido ao seu enviesamento nulo. Por outras palavras quer dizer que a média da estimativa alcançada para a amostras extraída através da população coincide com o parâmetro que se pretende estimar, isto é:

$$viés(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = \theta - \theta = 0 \quad (45)$$

Claro está que se o estimador for não centrado (enviesado), o seu enviesamento não é nulo. Por exemplo, supondo que  $X$  é uma variável aleatória de distribuição arbitrária com valor esperado igual a  $\mu$ , demonstra-se a seguir que a média de  $X$  ( $\bar{X}$ ) é um estimador centrado, dado que o seu valor médio é igual ao parâmetro que se pretende estimar:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu \quad (46)$$

Existe geralmente mais do que um estimador para um parâmetro desconhecido, pelo que quanto menor for o enviesamento de um certo estimador, maior será o rigor das suas estimativas. A qualidade da amostra, que garante se a amostra é ou não representativa da população, dependerá sempre do seu enviesamento, visto que se a amostra for enviesada, qualquer ilação retirada a partir dela será pouco credível, pelo que não será tida em consideração.

Uma amostra enviesada é o efeito de um processo de amostragem fragilizado no que refere à sua aleatoriedade, assim, o enviesamento de uma amostra reduz-se com a utilização de amostras aleatórias. No entanto, o simples facto de se recorrer a um estimador centrado não subentende que se irá obter uma boa estimativa, caso o plano de amostragem esteja sistematicamente a favorecer uma região da população, devido ao fornecimento de amostras enviesadas.

### 2.5.2 Variância

As técnicas de replicação surgem na necessidade de simplificar o processo de estimação da variância. Numa amostra aleatória simples, para além dos itens serem independentes, apresentam a mesma probabilidade de serem selecionados. Seja  $E(\hat{\theta})$  o valor esperado do estimador de interesse ( $\hat{\theta}$ ), se o sorteio for feito recorrendo à reposição, a variância deste estimador corresponde a:

$$\sigma(\hat{\theta})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^k [\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 \quad (47)$$

Em que  $n$  é o número total de itens da amostra, que poderá assumir o valor de uma constante, dependendo da metodologia adotada, e  $k$  é o número de réplicas formadas, isto é, subconjuntos da amostra.

Quanto à sua definição, a variância amostral é uma medida de dispersão ou, como o seu nome indica, de variabilidade de dados em relação à medida de localização média. Por isso, embora os estimadores estejam longínquos do valor correto, quanto maior for o valor da variância, maior será a dispersão do conjunto de estimadores em relação ao valor real do parâmetro.

### 2.5.3 Erro quadrático Médio:

A definição mais comum para o erro quadrático médio consiste resume-se na média ou do valor esperado da diferença ao quadrado composta entre os valores do estimador e do parâmetro:

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \sigma(\hat{\theta})^2 + [\text{viés}(\hat{\theta})]^2 \quad (48)$$

Como se constata a partir da segunda expressão do erro quadrático médio, esta relaciona-se com a propriedade de enviesamento e com a propriedade da variância. Dada esta interdependência, o erro quadrático médio corresponde à variância do estimador, caso este seja centrado.

Tratando-se de um erro, obviamente que é desejável que o seu valor seja o menor possível, denotando uma distância média baixa do estimador em comparação com o valor verdadeiro do parâmetro.

#### 2.5.4 Consistência:

A consistência é uma propriedade que reflete uma convergência da estimativa de  $\theta$  afetada por um aumento do tamanho da amostra. Um estimador centrado é considerado consistente se, com o aumento do tamanho da amostra, a sua variância tender para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1 \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta - \varepsilon \leq \hat{\theta} \leq \theta + \varepsilon) = 1 \quad (49)$$

No qual  $\varepsilon$  é um número positivo que deverá ser o menor possível. A consistência é a única das propriedades apresentadas que se apoia na distribuição degenerada, ocorrendo sempre que a distribuição de  $\hat{\theta}$  colapsar sobre o valor real do parâmetro ( $\theta$ ). A par desta lógica, a consistência de um estimador pode ser entendida em função do erro quadrático médio (EQM), quando  $n$  tende para infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{\theta}) = 0 \quad (50)$$

## 2.6 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Os métodos de estimação dos parâmetros da distribuição Weibull foram dois, o método do *median rank Regression* (MRR) sem *ranks* ajustados pelo método dos mínimos quadrados e o método de máxima verossimilhança ou apenas MLE (*Maximum Likelihood Estimation*). O primeiro método é a abordagem padrão para se construir o gráfico de Weibull, um gráfico de tempo para os dados de falha traçado no papel de probabilidade Weibull, utilizando classificações medianas para estabelecer posições dos pontos do gráfico. A regressão de classificação mediana utiliza a distribuição acumulada  $F(t)$  dos dados devido à da sua exequibilidade de linearização. É então determinada uma linha reta de melhor ajuste, através dos tempos extrapolados, de forma a obterem-se estimativas de  $\beta$  e  $\eta$  pelo método dos mínimos quadrados. Esta abordagem apresenta algumas lacunas, contudo, se for aplicada a amostras de tamanho reduzido torna-se bastante simples e gráfica.

### 2.6.1 Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados é usado para obter uma estimativa da infabilidade de cada falha. A classificação mediana (ou *median rank*) é o valor que a probabilidade real de falha deve ter numa das falhas de uma amostra a um nível de confiança de 50%. A classificação pode ser encontrada para qualquer ponto percentual,  $P$ , maior que zero e menor que um, resolvendo a

equação binomial cumulativa para  $Z$ , que representa a classificação ou estimativa de infabilidade, para a  $j$ -ésima falha na equação seguinte para o binómio cumulativo:

$$P = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} Z^k (1-Z)^{n-k} \quad (51)$$

onde  $n$  representa o tamanho da amostra e  $j$  é a ordem de cada falha. O *median rank* é obtido resolvendo a equação anterior para  $P = 0,50$ , isto é:

$$0,50 = \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} Z^k (1-Z)^{n-k} \quad (52)$$

Uma boa aproximação para determinar a classificação mediana é dada pela fórmula de Benard (Lamberson & Kapur, 1977):

$$\hat{F}[\ln(t_i)] = \frac{(i-0,3)}{(n+0,4)} \quad (53)$$

onde  $n$  é o tamanho da amostra e  $i$  é o valor de classificação (ajustado ou não). As classificações medianas são sempre expressas em formato decimal. O método dos mínimos quadrados (denominado a partir de agora apenas por método do *median rank*) que utiliza as classificações medianas começa por “transformar” os tempos de falha e as classificações medianas da seguinte maneira:

$$x_i = \ln(t_i) \quad (54)$$

$$y_i = \ln[-\ln(1 - \hat{F}(\ln(t_i)))] = \ln \left[ \ln \left( \frac{1}{1 - \hat{F}(\ln(t_i))} \right) \right] = \hat{\beta} \cdot \ln(t_i) - \hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}) \quad (55)$$

O método dos mínimos quadrados é então usado para estimar os coeficientes  $a$  e  $b$  da equação  $y_i = ax_i + b$ . Uma vez que estes coeficientes são estimados, serão referidos como  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , respetivamente. As estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull fornecida pela regressão de classificação mediana relacionam-se com  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , pelo que são obtidas da seguinte forma:

$$\hat{a} = \hat{\beta} \quad (56)$$

$$\hat{b} = -\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}) \quad (57)$$

Como se pode constatar pelas expressões acima expostas, retira-se diretamente a estimativa do parâmetro de forma a partir da função linear, enquanto que a estimativa do parâmetro de escala extrai-se resolvendo a equação  $\hat{b} = -\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta})$  em ordem a  $\hat{\eta}$ , ou seja:

$$\hat{\eta} = \exp \left( -\frac{\hat{b}}{\hat{\beta}} \right) \quad (58)$$

Para a distribuição exponencial uniparamétrica, normal e lognormal, as expressões de  $x_i$ ,  $y_i$  e dos parâmetros característicos de cada distribuição estão contidas na tabela da seguinte página.

Tabela 7 – Expressões dos estimadores de mínimos quadrados para as restantes distribuições (Kececioglu, 2002)

Distribuição	$x_i$	$y_i$	Parâmetros
Exponencial	$x_i = t_i$	$y_i = \ln[1 - \hat{F}(t_i)]$	$\hat{\lambda} = -\hat{a}$
Normal	$x_i = t_i$	$y_i = \varphi^{-1}[\hat{F}(t_i)]$	$\hat{\mu} = -\hat{b} \cdot \hat{\sigma}$ $\hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{a}}$
Lognormal	$x_i = \ln(t_i)$	$y_i = \varphi^{-1}[\hat{F}(\ln(t_i))]$	$\hat{\mu}' = -\hat{b}' \cdot \hat{\sigma}'$ $\hat{\sigma}' = \frac{1}{\hat{a}'}$

Com:

$$\varphi^{-1}[\hat{F}(t_i)] = \frac{\hat{F}(t_i) - \overline{\hat{F}(t_i)}}{\sigma_{\hat{F}(t_i)}} \quad (59)$$

Assumindo  $x_{(i)} = \ln t_{(i)}$ , minimiza-se a soma dos quadrados dos desvios dados por  $Q$ , a fim de se obter os valores de  $\hat{\alpha}_1$  e  $\hat{\alpha}_2$ , estimativas de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ :

$$Q = \sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{10} [Y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_{(i)}]^2 \quad (60)$$

Por fim, é mostrada a demonstração das expressões dos estimadores de mínimos quadrados (e.q.m), na qual o terceiro passo exhibe as equações normais de mínimos quadrados (Lawless, 1982):

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}_1} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}_2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n -2(Y_i - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 x_{(i)}) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 x_{(i)}) \cdot (x_{(i)})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i = \hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\hat{\alpha}_2}{n} \sum_{i=1}^n x_{(i)} \\ \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i - (\bar{y} - \hat{\alpha}_2 \bar{x}) \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_1 = \bar{y} - \hat{\alpha}_2 \bar{x} \\ \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i - (\bar{y} - \hat{\alpha}_2 \bar{x}) \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\alpha}_2 \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \hat{\alpha}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i - n\bar{x}\bar{y} + n\hat{\alpha}_2 \bar{x}^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i - n\bar{x}\bar{y} \\ \hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{(i)} Y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})(Y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2} \end{cases} \end{aligned}$$

### 2.6.2 Método de máxima verossimilhança

O segundo método que se recorreu para estimar os parâmetros da distribuição Weibull foi o método de máxima verossimilhança. A palavra verossimilhança (do inglês *likelihood*) pode ser entendida qualitativamente como uma possibilidade e quantitativamente como uma probabilidade, termo este que será usado de acordo com a segunda lógica (quantitativa). A função de verossimilhança é a expressão matemática que representa a probabilidade de obterem-se os dados observados.

O método de máxima verossimilhança funciona através da função de verossimilhança com base nos dados disponíveis e encontra os valores das estimativas dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança. No caso de estudo, através de métodos iterativos, este método vai localizar quais os valores de  $\beta$  e  $\eta$  da distribuição Weibull que maximizam essa função, ou seja, que maximizam a probabilidade dos dados observados serem obtidos. Ainda dentro da máxima verossimilhança, existe um outro modo de encontrar as estimativas dos parâmetros que recorrer às derivadas parciais da função de verossimilhança, igualando as equações resultantes a zero e resolvendo simultaneamente os valores das estimativas dos parâmetros. As equações para as derivadas parciais da função logarítmica de verossimilhança são dadas a seguir por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{T_i}{\eta}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_i}{\eta}\right)^\beta \ln\left(\frac{T_i}{\eta}\right) = 0 \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} = \frac{-\beta}{\eta} \cdot n + \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_i}{\eta}\right)^\beta = 0 \end{cases} \quad (61)$$

De notar que quando se procede à estimação de parâmetros pelo MLE, as suas propriedades assintóticas não se mantêm (Meeker & Escobar, 1998).

A obtenção de estimativas pelo MLE para diferentes tipos de dados envolve a inclusão de termos distintos na função de verossimilhança de modo a serem considerados dados completos, dados censurados à direita e dados censurados à esquerda. Quando a amostra se encontra completa, isto é, quando todas os componentes falham antes da análise de fiabilidade termina, a função de verossimilhança:

$$L = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta_1, \dots, \theta_k) \prod_{j=1}^m [1 - F(S_j; \theta_1, \dots, \theta_k)] \prod_{l=1}^p [F(I_{l_U}; \theta_1, \dots, \theta_k) - F(I_{l_L}; \theta_1, \dots, \theta_k)] \quad (62)$$

onde:  $L \rightarrow (\theta_1, \dots, \theta_k | t_1, \dots, t_r, S_1, \dots, S_m, I_1, \dots, I_p)$

e:

- $m$  é o número de itens censurados (*suspended units*);
- $p$  é o número de itens censurados à esquerda ou de intervalos de tempos até à falha;
- $\theta_k$  representa os parâmetros da distribuição;
- $t_i$  é a  $i$ -ésimo tempo até à falha;
- $S_j$  é o  $j$ -ésimo tempo censurado;
- $I_{l_U}$  é o fim do intervalo de tempo contido no  $l$ -ésimo grupo;
- $I_{l_L}$  é o início do intervalo de tempo contido no  $l$ -ésimo grupo.

O número total de unidades é dado pela equação  $n = r + m + p$ . De realçar que nesta formulação, se qualquer uma das variáveis que compõem o  $n$  forem nulas, então assume-se que o termo do produto a elas associado é igual a um em vez de zero.

Em itens censurados, a função de verossimilhança necessita ser expandida de forma a considerar esse tipo de itens. A lógica de resolução das estimativas permanece a mesma, apenas é acrescentado um novo termo à função que engloba os itens censurados. Considerando uma distribuição onde  $x$  é uma variável aleatória contínua com f.d.p  $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$  e f.d.c  $F(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$ , onde  $\theta_1, \dots, \theta_k$  são os parâmetros desconhecidos que se pretendem estimar a partir das  $r$  falhas observadas nos instantes  $t_1, \dots, t_r$  e  $m$  são os tempos censurados nos instantes  $S_1, \dots, S_m$ , então quando os dados são censurados à direita, a expressão da função é formulada da forma como se segue:

$$L(\theta_1, \dots, \theta_k | t_1, \dots, t_r, S_1, \dots, S_m) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta_1, \dots, \theta_k) \cdot \prod_{j=1}^m [1 - F(S_j; \theta_1, \dots, \theta_k)] \quad (63)$$

Da mesma forma que para a censura à direita, a inclusão de dados censurados à esquerda envolve a adição de um termo à função de verossimilhança para considerar, uma vez mais, os tipos de dados em questão. Quando os dados são censurados por intervalo (com censura intervalar), a função de verossimilhança altera-se multiplicando-a por um termo adicional como se segue:

$$L(\theta_1, \dots, \theta_k | t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p [F(x_i; \theta_1, \dots, \theta_k) - F(x_{i-1}; \theta_1, \dots, \theta_k)] \quad (64)$$

De salientar que, se a amostra for composta apenas por dados com censura intervalar, o termo suplementar representará a função de verossimilhança completa para a solução dada pelo método.

É sabido que as estimativas do parâmetro de forma da distribuição Weibull pelo MLE são muito tendenciosas para amostras pequenas, e o efeito pode ser ampliado dependendo da quantidade de censura. Esta tendência/propensão pode causar discrepâncias elevadas na análise em consideração.

Como regra geral, é aconselhável utilizar a de regressão de classificação mediana quando os tamanhos de amostra são pequenos e sem altos níveis de censura. Quando estiver presente uma censura “pesada” ou irregular, uma alta proporção de dados de intervalos e/ou o tamanho da amostra for minimamente suficiente, o método de máxima verossimilhança torna-se preferível.

## 2.7 Intervalos de confiança

É de interesse fundamental determinar as diferenças entre as estimações dos parâmetros e os seus valores teóricos. É necessário que não haja grandes variações nas estimações entre amostras distintas, para que seja possível produzir estimações próximas dos valores reais. Para as amostras que contêm poucas falhas, não faz sentido abordar a questão dos dados censurados para este caso. No entanto, para as amostras completas, ou seja, sem ser para as primeiras  $n$  falhas, torna-se pertinente determinar os intervalos de confiança de  $\beta$  e  $\eta$ .

### 2.7.1 De acordo com a distribuição qui-quadrado

A estimativa por máxima verossimilhança de  $\beta$  é muitas das vezes utilizada para testar hipóteses e construir intervalos de confiança condicionais relativos ao valor verdadeiro de  $\beta$ , com recurso à seguinte expressão (Crow, 1974):

$$\chi^2 = \frac{2M\beta}{\tilde{\beta}} \quad (65)$$

Com  $M$  a representar o tamanho da amostra. Esta expressão corresponde à estatística teste empregue nos testes de hipóteses de  $\beta$ , distribuída por uma variável aleatória da distribuição qui-quadrado com  $2M$  graus de liberdade. A distribuição de  $\chi^2$  (qui-quadrado) é utilizada para estabelecerem-se intervalos de confiança exatos de  $\beta$ , com limites inferiores e superiores correspondentes a:

$$\beta_{inf.} = \tilde{\beta} \frac{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, 2M\right)}{2M} \quad (66)$$

$$\beta_{sup.} = \tilde{\beta} \frac{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, 2M\right)}{2M} \quad (67)$$

O nível de confiança correspondente ao intervalo definido por estes dois limites é igual a  $(1 - \alpha) \cdot 100$  (em percentagem), onde  $\alpha$  é o nível de significância do teste de hipóteses. O  $\frac{\alpha}{2}$ -ésimo percentil da distribuição qui-quadrado corresponde a  $\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, 2M\right)$ , da mesma forma que  $\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 2M\right)$  assume-se como o  $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ -ésimo percentil da distribuição referida.

Quando o valor de  $M$  é moderado, a estatística teste deixa de ser representada pela distribuição qui-quadrado e passa a ser aproximadamente normal de média 0 e variância 1:

$$\omega = \sqrt{M} \left( \frac{\beta}{\tilde{\beta}} - 1 \right) \quad (68)$$

Esta aproximação gera os limites de confiança que se seguem:

$$\beta_{inf.} = \tilde{\beta} \left( 1 - \frac{P_\pi}{\sqrt{M}} \right) \quad (69)$$

$$\beta_{sup.} = \tilde{\beta} \left( 1 + \frac{P_\pi}{\sqrt{M}} \right) \quad (70)$$

De forma análoga à distribuição qui-quadrado,  $P_\pi$  é o  $\pi$ -ésimo percentil da distribuição normal, com  $\pi = 1 - \alpha/2$ .

Num teste de fiabilidade limitado pelo tempo, o cálculo do intervalo de confiança para o  $\eta$  (com  $\beta$  conhecido) envolve a determinação do limite inferior e superior dados por:

$$\eta_{inf.}(\beta) = \frac{\chi^2\left(\frac{Y}{2}, 2N\right)}{2 \sum_{q=1}^K T_q^\beta} \quad (71)$$

$$\eta_{sup.}(\beta) = \frac{\chi^2\left(1-\frac{Y}{2}, 2N+2\right)}{2 \sum_{q=1}^K T_q^\beta} \quad (72)$$

Quando o teste de fiabilidade é limitado pelo número de falhas, os limites do intervalo de confiança para o  $\eta$  são os seguintes:

$$\eta_{inf.}(\beta) = \frac{\chi^2\left(\frac{\gamma}{2}, 2N\right)}{2 \sum_{q=1}^K \chi_{q,\beta}^2} \quad (73)$$

$$\eta_{sup.}(\beta) = \frac{\chi^2\left(1 - \frac{\gamma}{2}, 2N\right)}{2 \sum_{q=1}^K \chi_{q,\beta}^2} \quad (74)$$

Em ambos os testes de fiabilidade, o nível de confiança apresentado é igual a  $(1 - \gamma) \cdot 100$  (em percentagem). Tendo em conta os limites de confiança de  $\beta$  dados pela distribuição de  $\chi^2$ , consegue-se determinar os limites de confiança para ambos os parâmetros,  $\beta$  e  $\eta$ , são:

$$\eta_{inf.}(\beta_{sup.}) = \frac{\chi^2\left(\frac{\gamma}{2}, 2N\right)}{2 \sum_{q=1}^K T_q^{\beta_{sup.}}} \quad (75)$$

$$\eta_{sup.}(\beta_{inf.}) = \frac{\chi^2\left(1 - \frac{\gamma}{2}, 2N + 2\right)}{2 \sum_{q=1}^K T_q^{\beta_{inf.}}} \quad (76)$$

A um nível de confiança equivalente a  $(1 - \alpha) \cdot (1 - \gamma) \cdot 100$ , em percentagem. Este nível de confiança é conservador, no sentido de garantir que os parâmetros estimados estejam encontrados dentro dos limites estipulados, em vez de serem exatamente iguais a valores especificados.

### 2.7.2 De acordo com a distribuição normal

Os intervalos de confiança dos parâmetros da distribuição Weibull podem ainda ser aproximados pelas seguintes equações (Abernethy, Breneman, Medlin, & Reinman, 1983):

$$\hat{\beta} * \exp\left(\frac{-0.78 * Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \leq \beta \leq \hat{\beta} * \exp\left(\frac{0.78 * Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \quad (77)$$

$$\hat{\eta} * \exp\left(\frac{-1.05 * Z_{\alpha/2}}{\hat{\beta} \sqrt{n}}\right) \leq \eta \leq \hat{\eta} * \exp\left(\frac{1.05 * Z_{\alpha/2}}{\hat{\beta} \sqrt{n}}\right) \quad (78)$$

Onde o valor crítico  $Z_{\alpha/2}$  pertencente à distribuição normal padrão depende da escolha do nível de confiança. Este valor tem a propriedade de separar uma área correspondente a  $\alpha/2$  na cauda direita da distribuição.

Na Tabela 8 estão listados alguns valores de  $Z_{\alpha/2}$  correspondentes aos níveis de confiança mais utilizados.

Tabela 8 – Níveis de confiança e respetivos valores críticos

Nível de confiança	$Z_{\alpha/2}$
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576

A aproximação destes intervalos de confiança é válida desde que as estimativas dos parâmetros sejam estimativas de regressão linear (do ponto de vista teórico, seriam necessárias estimativas de máxima verossimilhança) e estejam normalmente distribuídas.



# DESENVOLVIMENTO

- 3.1 Metodologia da simulação
- 3.2 Análise da distribuição Weibull
- 3.3 Análise estatística da distribuição Exponencial
- 3.4 Análise estatística das distribuições Normal e Lognormal
- 3.5 Intervalos de confiança
- 3.6 Exemplos de fiabilidade
- 3.7 Exemplos de casos de estudo



## 3 DESENVOLVIMENTO

### 3.1 Metodologia da simulação

Sinteticamente, a simulação é um método que engloba segmentos de entrada, de processamento/computação e de saída. Neste trabalho, o segmento de entrada será a geração de tempos de falha aleatórios, o segmento de computação será a aplicação do método dos mínimos quadrados através da classificação mediana (*median rank*) e do método de máxima verossimilhança e, por fim, os *outputs* das simulações serão as estimações dos parâmetros da distribuição Weibull. Para efetuar as simulações optou-se pelo programa R (R Development Core Team, 2008) que consiste num sistema integrado de recursos de *software* para análises estatísticas.

As simulações efetuadas tiveram a distribuição Weibull como modelo base pois, a partir dela, criaram-se os pressupostos necessários para a análise estatística do subcapítulo 3.3 e 3.4. No subcapítulo 3.2 (análise da distribuição Weibull), o valor teórico que se utilizou para o parâmetro de forma foi  $\beta \approx 1$ , que se caracteriza pela probabilidade de falha constante ou falha aleatória. Além disso, consideraram-se dois modos de gerar os tempos aleatórios de falha, sem censura, para um total de 1000 estimações ou réplicas. O primeiro apoiou-se na função *rweibull* e o segundo na função *runif*. Em cada um destes modos foram calculadas as estimações dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) e pelo método de máxima verossimilhança (MMV). Devido à complexidade destes métodos recorreu-se às funções *MRRw2p*, *MLEw2p* e *fitdist* para resolvê-los, de forma a minorizar o esforço computacional. Na função *MLEw2p*, quando o argumento *bounds* é definido como falso (*FALSE*), a função retorna um vetor com elementos nomeados para o Eta, Beta e LL (*log-likelihood*). Quando o argumento *bounds* é definido como verdadeiro (*TRUE*), é retornada uma lista contendo o vetor, conforme descrito, e um *dataframe* de valores associados ao intervalo de confiança num conjunto fixo de quantis descritivos, adequado para comparação com outro *software*. Esta função de ajuste rápido está inserida no pacote Weibull R, é útil para a determinação dos parâmetros de ajuste de Weibull, medidas de ajuste e limites de intervalos de confiança com exibição gráfica opcional. Destina-se a fornecer um método casual e simples da análise da distribuição biparamétrica de Weibull padrão com base em métodos padrão, sem opções. Apenas tempos de falha exatos e/ou suspensões são processados. A função retorna um simples vetor com os parâmetros ajustados de acordo com as medidas de ajuste. A preparação opcional de limites dos intervalos de confiança apropriados (com 90% de confiança) ou a exibição do ajuste e dos limites são controlados por dois argumentos finais segundo uma entrada lógica, de tal forma que a função *MLEw2p* (*input\_data*, T) gerará um gráfico com os tempos de falha ajustados e respetivos limites do intervalo de confiança. Quando o primeiro argumento lógico referente aos limites é definido como *TRUE*, o objeto retornado será uma lista com o primeiro vetor de parâmetros ajustado e o *dataframe* dos valores dos limites em segundo.

Tanto para o MMQ como para o MMV foram determinadas estatísticas descritivas (mínimo, 1º quartil, mediana, média, 3º quartil e máximo) com recurso à função *summary* para os parâmetros estimados das réplicas simuladas. Foram ainda calculadas outras estatísticas, como o viés, o desvio padrão, a variância e o erro quadrático médio dos parâmetros estimados das distribuições.

As análises da distribuição Weibull são, regra geral, baseadas num único modo de falha de um particular componente. Uma aplicação ideal desta análise consistiria numa amostra de 20 a 30 falhas, mas visto que tal não é possível (exceção feita aos ensaios laboratoriais de caracterização material), simulações deste tipo inicializam-se com falhas não censuradas incorporadas num grande número de unidades. Assim, considerou-se um componente fictício com um número reduzido de falhas de serviço, que sofre um processo de degradação até que ocorram precisamente 2, 5, 8 e 10 falhas. Desta forma, foram efetuadas simulações para esses mesmos instantes, ou seja, para as primeiras 2, 5, 8 e 10 falhas aleatoriamente geradas. O procedimento consistiu no conjunto de estimações dos parâmetros (de forma e de escala) da distribuição Weibull biparamétrica até ser atingindo um total de 1000 estimações (réplicas), para cada número de falhas específico, resolvidos pelo método do *median rank* (particularização do método dos mínimos quadrados) e pelo método de máxima verossimilhança. O processo continua até que cada número de falhas seja atingido, reconstruindo o início de cada simulação após a última terminar.

A reiteração constante de simulações teve como foco o estudo da exatidão (*accuracy*) e da precisão (*precision*) das estimações dos parâmetros. Convém fazer-se a correta distinção entre estes dois termos. A exatidão (*accuracy*) da estimacão dos parâmetros da distribuição Weibull refere-se à diferença entre o valor do Beta ( $\beta$ ) estimado e o seu valor real, enquanto que a precisão (*precision*) da estimacão dos parâmetros da distribuição Weibull equivale à variabilidade da estimativa do Beta  $\beta$ .

Tal variabilidade é dada pelo desvio padrão das  $n$  estimativas de:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_{avg})^2}{n-1}}, \quad \text{com } \beta_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} \quad (79)$$

em que  $\beta_{avg}$  simboliza a média composta pelos vários valores estimados do parâmetro de forma.

## 3.2 Análise da distribuição Weibull

### 3.2.1 Análise estatística da totalidade de falhas

Inicialmente, utilizou-se a função *rweibull* ( $n$ , *shape*, *scale*) para gerar a totalidade dos tempos representados pela distribuição Weibull, onde  $n$  ( $> 1$ ) é o número de observações, *shape* corresponde ao valor do parâmetro de forma e *scale* diz respeito ao montante do parâmetro de escala. Se este último não for indicado, por padrão, o *software* R assume o valor 1. Variou-se a amostra de 30 a 1000 tempos de falha para  $\beta = 1$ . O método do *median rank* apresentou uma menor amplitude das estimativas de  $\beta$ , dada pelo intervalo [0,9884; 1,0110], em relação à máxima verossimilhança com amplitude [1,0002 e 1,0490], mostrando-se mais preciso comparativamente com o segundo método. Consequentemente, as estimativas da máxima verossimilhança apresentam maior convergência que as estimativas do método do *median rank*. Outro aspeto interessante de referir resume-se no facto do método do *median rank* estimar maioritariamente por defeito, enquanto que a máxima verossimilhança estimou sempre por excesso, como se constata pela Tabela 9 e a Tabela 10.

Tabela 9 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\beta$  estimados através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\beta$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	1,0	1,0110	0,0110	0,1901	0,0362
200	1,0	0,9884	-0,0116	0,0720	0,0053
1000	1,0	0,9973	-0,0027	0,0316	0,0010

Tabela 10 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\beta$  através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\beta$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	1,0	1,0490	0,0490	0,1584	0,0275
200	1,0	1,0018	0,0018	0,0564	0,0032
1000	1,0	1,0002	0,0002	0,0244	0,0006

Como se constata pelas equações expostas mais adiante, o erro percentual de  $\beta$  estimado pelo método do *median rank* foi cerca de metade do erro registado pelo método de máxima verossimilhança:

$$e_{MRR\%}(\beta) = \frac{|\beta_{maior} - \beta_{menor}|}{\beta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|1,0110 - 0,9884|}{1,0110} \cdot 100 = 2,24\% \quad (80)$$

$$e_{MLE\%}(\beta) = \frac{|\beta_{maior} - \beta_{menor}|}{\beta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|1,0490 - 1,0002|}{1,0490} \cdot 100 = 4,65\% \quad (81)$$

Além disso, a média esteve sempre muito próxima do valor teórico em ambos os métodos, tendo-se registado um valor médio das estimativas de  $\beta$  (igual a 1,0002) muito próximo do valor teórico no método de máxima verossimilhança, com um desvio de apenas 0,2 milésimas.

Quanto à estimação de  $\eta$ , observou-se um maior equilíbrio nos dois métodos (Tabela 11 e Tabela 12). Mais uma vez, o método de máxima verossimilhança mostrou-se mais preciso por apresentar menores desvios padrão e mais exato por apresentar um menor enviesamento das estimativas.

Tabela 11 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\eta$  através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\eta$ teórico (horas)	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	5000	5053,0010	53,0012	976,3554	955125,7000
200	5000	5026,3120	26,3120	379,8842	144860,0500
1000	5000	4990,9560	-9,0443	167,8012	28210,8800

Tabela 12 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\eta$  através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\eta$ teórico (horas)	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	5000	5034,4240	34,4241	957,8458	917736,1800
200	5000	5011,0650	11,0648	369,9673	136861,3600
1000	5000	4988,1230	-11,8768	163,4502	26830,3200

Ao contrário do que se observou para  $\beta$ , o erro percentual de  $\eta$  estimado pelo método do método do *median rank* foi maior do que o erro obtido pela máxima verossimilhança:

$$e_{MRR\%}(\eta) = \frac{|\eta_{maior} - \eta_{menor}|}{\eta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|5053,0010 - 4990,9560|}{5053,0010} \cdot 100 = 1,23\% \quad (82)$$

$$e_{MLE\%}(\eta) = \frac{|\eta_{maior} - \eta_{menor}|}{\eta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|5034,4240 - 4988,1230|}{5034,4240} \cdot 100 = 0,92\% \quad (83)$$

O segundo modo de gerar os tempos de falha depende de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1, com recurso à função *runif* (*n*, *min*, *max*), em que *n* é igualmente o número de observações, *min* (= 0) é o limite mínimo da distribuição e *max* (= 1) corresponde ao limite máximo. Com base nesta função, geraram-se os tempos de falha pela equação que se segue (Abernethy et al., 1983):

$$\text{Tempo até à falha} = \eta \left[ \ln \left( \frac{1}{1 - \text{runif}(\text{sample}[i])} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \quad (84)$$

em que *sample*[*i*] = *c* (30,200,1000) faz parte da linha de código R utilizado e indica as três dimensões das amostras dos tempos de falha gerados a partir da distribuição uniforme.

O estudo que se fez para esta distribuição consistiu em fazer simulações de 1000 réplicas com o intuito de se estimar os parâmetros da distribuição Weibull e posteriormente registar as médias, os viés, as variâncias e os erros quadráticos médios dessas estimações. Obtiveram-se essas estatísticas para uma distribuição Weibull com forma exponencial ( $\beta = 1$ ) com  $\eta = 5000$  horas. O método do *median rank* mostrou-se mais competente devido à maior exatidão obtida no cálculo das estimativas de  $\beta$ , indicada pelas diferenças entre os valores estimados e os valores teóricos. Quanto à questão do sinal, estas diferenças representadas pelo viés mostraram uma certa aleatoriedade, tendo sido maioritariamente positivas. A superioridade de exatidão perante o outro método foi notória principalmente na amostra composta por 30 tempos até à falha, como se pode notar na Tabela 13 e Tabela 14.

Tabela 13 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\beta$  através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\beta$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	1,0	1,0022	0,0022	0,1861	0,0346
200	1,0	0,9966	-0,0034	0,0710	0,0050
1000	1,0	0,9973	-0,0027	0,0336	0,0011

Tabela 14 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\eta$  através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\eta$ teórico (horas)	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	5000	4983,8480	-16,1524	941,3548	885523,6400
200	5000	5018,1070	18,1067	371,0488	137867,4200
1000	5000	5007,9800	7,9796	174,3375	30426,8400

O erro percentual de  $\beta$  e de  $\eta$ , determinado a partir dos módulos das diferenças entre o maior pelo menor valor de  $\beta$  e  $\eta$ , foi menor no método do *median rank*:

$$e_{MRR\%}(\beta) = \frac{|\beta_{maior} - \beta_{menor}|}{\beta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|1,0022 - 0,9966|}{1,0022} \cdot 100 = 0,56\% \quad (85)$$

$$e_{MRR\%}(\eta) = \frac{|\eta_{maior} - \eta_{menor}|}{\eta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|5018,1070 - 4983,8480|}{5018,1070} \cdot 100 = 0,68\% \quad (86)$$

Quanto ao método de máxima verossimilhança, este apresentou maiores erros percentuais dos parâmetros, principalmente para  $\beta$ :

$$e_{MLE\%}(\beta) = \frac{|\beta_{maior} - \beta_{menor}|}{\beta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|1,0438 - 1,0017|}{1,0438} \cdot 100 = 4,03\% \quad (87)$$

$$e_{MLE\%}(\eta) = \frac{|\eta_{maior} - \eta_{menor}|}{\eta_{maior}} \cdot 100 = \frac{|5009,5620 - 4962,2150|}{5009,5620} \cdot 100 = 0,95\% \quad (88)$$

De notar ainda que o erro percentual de  $\beta$  foi sempre superior do que o erro percentual de  $\eta$ , em ambos os métodos. O MLE apresentou também uma maior precisão dos valores estimados. Esta precisão, dada pelo desvio padrão, pode ser verificada nas Tabela 15 e Tabela 16.

Tabela 15 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\beta$  através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\beta$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	1,0	1,0438	0,0438	0,1605	0,0276
200	1,0	1,0068	0,0068	0,0553	0,0031
1000	1,0	1,0017	0,0017	0,0257	0,0007

Tabela 16 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\eta$  através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\eta$ teórico (horas)	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
30	5000	4962,2150	-37,7849	934,6709	874163,7500
200	5000	5009,5620	9,5621	370,6336	137323,3500
1000	5000	5002,2100	2,2097	170,1064	28912,1300

Em suma, as duas formas de estimar os parâmetros da distribuição Weibull geraram estimativas dentro da mesma dimensão de grandeza, por isso conclui-se que o modo de gerar tempos de falha pela função Rweibull obteve resultados semelhantes ao modo de gerar tempos de falha com recurso à função Runif, existindo um equilíbrio estatístico entre os dois modos. A melhor adequação de um modelo em relação a outro para representar os tempos de falha de um determinado ativo dependerá sobretudo da sua aplicação prática. Por exemplo, é necessário ter em conta o contexto em se enquadra esse ativo, o processo de degradação do ativo, o teste de fiabilidade considerado, o plano de manutenção adotado e o método de previsão de falhas utilizado.

### 3.2.2 Análise estatística das primeiras $n$ falhas

Utilizou-se a distribuição Weibull para se estimar os valores dos parâmetros respeitantes às primeiras  $n$  falhas simuladas, com  $\beta$  variável e  $\eta$  constante. Recorreu-se à função *rweibull* para gerar os tempos aleatórios, enquanto que as funções *MRRw2p* e *fitdist* permitiram estimar o parâmetro de forma e o parâmetro de escala, pelo método dos mínimos quadrados e pelo método de máxima verossimilhança, respetivamente. A função *MLEln2p* poderia ser uma escolha alternativa à função *fitdist*, apesar de ambas funções serem equivalentes, visto que o método de estimação é o mesmo. Quer se opte por uma ou por outra função, irá obter-se estimativas sempre muito próximas umas das outras.

As linhas de código integradas na simulação foram as seguintes:

```
MReta[j,1]=MRRw2p(c(w[1],w[2],...,w[n]))[1]
```

```
MRbeta[j,1]=MRRw2p(c(w[1],w[2],...,w[n]))[2]
```

```
MLbeta[j,1]=unname(fitdist(c(w[1],w[2],...,w[n]),"weibull")$estimate[1])
```

```
MLeta[j,1]=unname(fitdist(c(w[1],w[2],...,w[n]),"weibull")$estimate[2])
```

Tal como se constata, fez-se uma distinção entre as estimativas de  $\beta$  e de  $\eta$  identificada pelos parenteses retos [1] e [2], pelo que a ordem dos parâmetros estimados da função *MRRw2p* é inversa à da função *fitdist*.

A análise estatística das estimações dos parâmetros consistiu em determinar algumas estatísticas teste das estimativas, como a média, a mediana e o desvio padrão. Ambos os métodos utilizados mostraram uma certa tendência para fazer uma avaliação excessiva do valor do parâmetro de forma. Além disso, a exatidão e a precisão (dada pelo desvio padrão das  $n$  estimativas) de  $\beta$  mostraram sempre uma ligeira melhoria à medida que o número de falhas aumentava. Ambos os métodos produziram estimativas de exatidão comparável, sendo que as estimativas de mínimos quadrados foram visivelmente mais exatas para o menor valor de  $\beta$  e para o maior número de falhas possíveis, isto é, para as primeiras 10 falhas quando  $\beta = 1$ . Tal pressuposto é observável a partir da Tabela 17.

Tabela 17 – Valores médios das estimativas de  $\beta$  e  $\eta$

Nº de falhas	$\beta$ teórico	$E(\hat{\beta})$ (MLE)	$E(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$E(\hat{\eta})$ (MLE)	$E(\hat{\eta})$ (MRR)
2	1,0	23,834	12,566	20000	20957	23549
5	1,0	1,474	1,200	20000	20653	21262
8	1,0	1,222	1,070	20000	20285	20581
10	1,0	1,155	1,042	20000	20482	20767

Para as duas primeiras falhas registadas, os valores de  $\beta$  divergem de forma expressiva em relação ao valor teórico, sendo o valor de  $\beta$  extremamente mais elevado do que o suposto. Apesar dessa divergência acentuar-se mais no método de máxima verossimilhança, ainda é visivelmente contundente no método dos mínimos quadrados, sendo cerca de metade da obtida pelo M.L.E. Em ambos os métodos as estimativas obtidas de  $\beta$  ultrapassaram sempre o valor teórico (erro por excesso), pelo que o método que registou valores médios mais próximos dos reais foi o MRR.

No diz respeito à precisão e exatidão de  $\eta$ , nem sempre se registou um incremento destes indicadores. Esta conclusão é facilmente observável pela mesma tabela. Ao contrário do que aconteceu com as estimações de  $\beta$ , o método de máxima verossimilhança foi mais exato a determinar as estimativas de  $\eta$ . A média das estimativas de  $\eta$  diminuiu até às primeiras 8 falhas, no entanto, este valor distanciou-se do valor teórico nas primeiras 10 falhas, tanto para um como para o outro método. Ainda assim, as médias das estimações de  $\eta$  deram mais convergentes do que as médias das estimações de  $\beta$ , por causa da divergência descomunal da média das estimações de  $\beta$  exibida nas 2 primeiras falhas.

Quanto às medianas das estimativas de  $\beta$  e  $\eta$ , as conclusões retiradas foram bem mais distintas. Como mostra a Tabela 18, o método de máxima verossimilhança aparentou ser menos exato do que o método dos mínimos quadrados. As medianas das estimativas de  $\beta$  mostraram uma divergência bem mais reduzida do que as respetivas médias. No que se refere às medianas das estimativas de  $\eta$ , observou-se a situação idêntica que se verificou para médias. Nos dois métodos, a mediana das estimativas de  $\eta$  aumentou sempre do início até ao fim, isto é, das 2 primeiras falhas até às primeiras 10 falhas.

Tabela 18 – Valores medianos das estimativas de  $\beta$  e  $\eta$ 

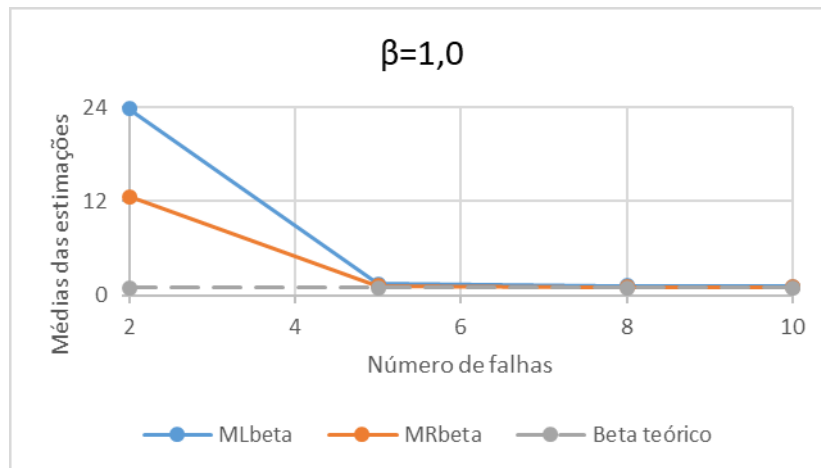
Nº de falhas	$\beta$ teórico	$P_{50}(\hat{\beta})$ (MLE)	$P_{50}(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$P_{50}(\hat{\eta})$ (MLE)	$P_{50}(\hat{\eta})$ (MRR)
2	1,0	2,2310	1,1760	20000	17184	19327
5	1,0	1,2596	1,0331	20000	19395	20004
8	1,0	1,1318	0,9832	20000	19503	20066
10	1,0	1,0936	0,9778	20000	19915	20196

Finalmente, os desvios padrão das várias estimativas de  $\beta$  e  $\eta$  foram excecionalmente elevados para as primeiras 2 falhas (Tabela 19), sendo que esse valor estabilizou para os restantes números de falhas. Desta vez, os desvios padrão das estimações de  $\beta$  deram mais convergentes do que as médias das estimações de  $\eta$ .

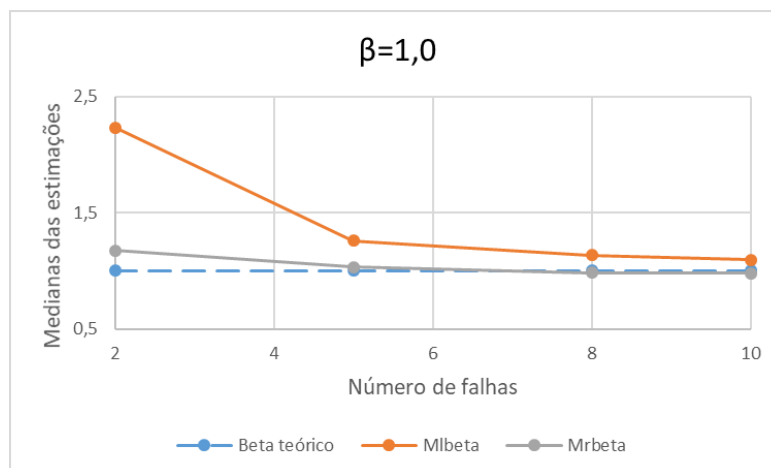
Tabela 19 – Desvios padrão das estimativas de  $\beta$  e  $\eta$ 

Nº de falhas	$\beta$ teórico	$\sigma(\hat{\beta})$ (MLE)	$\sigma(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$\sigma(\hat{\eta})$ (MLE)	$\sigma(\hat{\eta})$ (MRR)
2	1,0	339,7123	179,0947	20000	15694,74	17487,00
5	1,0	0,8243858	0,7242132	20000	9599,299	9871,749
8	1,0	0,4351935	0,4053554	20000	7316,965	7424,337
10	1,0	0,333324	0,357351	20000	6696,26	6820,903

Foi possível detetar um padrão nas várias representações gráficas das médias, das medianas e dos desvios padrões das estimativas de  $\beta$ . As representações gráficas para qualquer uma das 3 estatísticas começa com um *outlier* pertencente às 2 primeiras falhas. A seguir, a função desce rapidamente e estabiliza a partir das 5 primeiras falhas. Quanto às estatísticas das estimações de  $\eta$  também foi perceptível um padrão comum às representações gráficas.

Figura 15 – Médias das estimativas de  $\beta$ 

Nos gráficos das medianas das estimativas de  $\beta$ , denota-se uma menor variância nos valores estimados, em relação às médias, por causa das estimações para as 2 primeiras falhas serem mais concordantes com os valores esperados. Ou seja, continua a existir um *outlier* para as primeiras 2 falhas, no que se refere às medianas das estimativas, embora não de forma tão acentuada.

Figura 16 – Medianas das estimativas de  $\beta$ 

Como os desvios padrão é uma medida de dispersão em vez de ser uma medida de localização, como a a média e a mediana, não se compararam os desvios padrão das estimativas com os vários valores teóricos considerados. Tal como se observou nas médias das estimativas, os *outliers* dos desvios padrões referentes às 2 primeiras falhas destacam-se em relação ao resto dos valores registados.

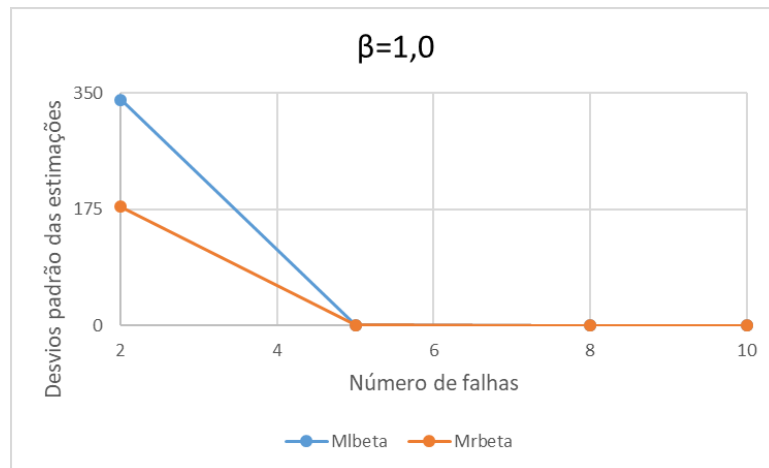


Figura 17 – Desvios padrão das estimativas de  $\beta$

Antes de se determinarem os intervalos de confiança das estimativas das primeiras  $n$  falhas, elaboraram-se as funções densidade de probabilidade (linha azul) acompanhadas de histogramas (Figura 18, Figura 19 e Figura 20) respeitantes às primeiras 5, 8 e 10 falhas representadas pela distribuição Weibull, para uma amostra constituída inicialmente por 2000 tempos e um total de 2000 réplicas. Como se pode ver, à medida que o número de falhas aumenta, a normalidade dos dados vai sendo cada vez maior. O valor de  $\beta$  tem influência tanto no aumento de normalidade das estimativas de  $\beta$  como nas estimativas de  $\eta$ .

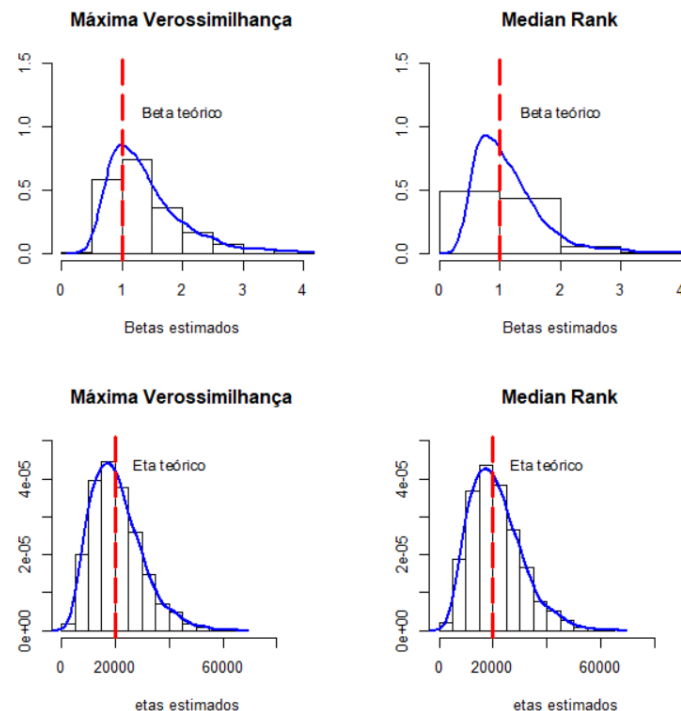


Figura 18 – Histograma para as primeiras 5 falhas ( $\beta = 1$  e  $\eta = 20000$ )

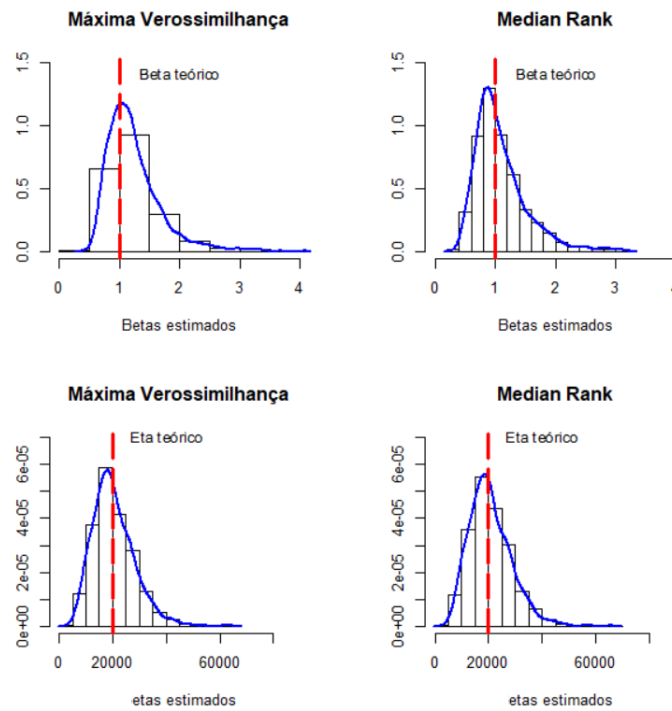


Figura 19 – Histograma para as primeiras 8 falhas ( $\beta = 1$  e  $\eta = 20000$ )

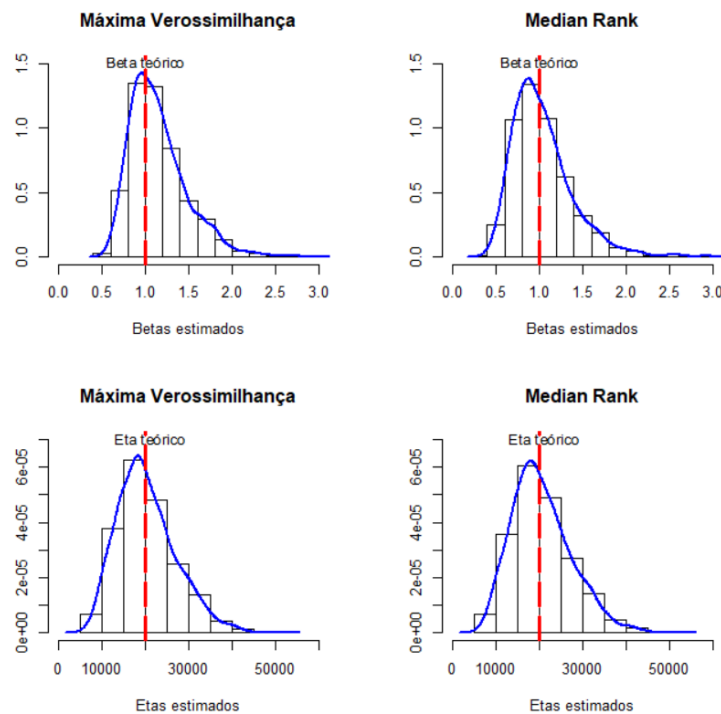


Figura 20 – Histograma para as primeiras 10 falhas ( $\beta = 1$  e  $\eta = 20000$ )

### 3.3 Análise estatística da distribuição Exponencial

Os tempos de falha aleatórios representados pela distribuição exponencial foram gerados a partir da função  $\text{rexp}(n, \text{rate} = 1)$ , onde  $n$  é o número de tempos observados e  $\text{rate}$  refere-se ao vetor composto pelo valor da taxa de falhas (toma o valor 1 por defeito). De forma a relacionar a distribuição exponencial com a distribuição Weibull, consideraram-se 3 funções distintas:  $t = \text{rexp}(n, \text{rate} = 1/\log(\eta))$ , com  $n = 100, 1000, 5000$  e  $\eta = 5000, 10000, 20000$ . Apesar de existir diferença nos valores de  $\eta$ , os valores de  $\lambda$  ficam bastante próximos entre si, a registar:  $\lambda_1 = 0,1174$ ,  $\lambda_2 = 0,1186$ ,  $\lambda_3 = 0,1010$ . Ou seja, quanto maior for o valor de  $\eta$ , menor o valor de  $\lambda$ .

Como esta é uma distribuição uniparamétrica, estimou-se a média, o viés, a variância e o erro quadrático médio das estimativas de  $\lambda$ . Estas estimativas foram resolvidas com recurso ao método do método do *median rank* criado de raiz no R e pelo método de máxima verossimilhança a partir da função automática *fitdist* usada no ajuste de distribuições univariadas para dados não censurados, na qual foi selecionado o método “mle” de *maximum likelihood estimation*. A média dos Lambdas estimados andou sempre muito próxima dos valores teóricos considerados na análise. O enviesamento ou exatidão das estimativas foi sobretudo negativo e esteve situado entre  $-0,0004$  ( $4,17E-04$ ) e  $0,014$  ( $1,40E-03$ ). A variância e o erro quadrático médio dos dados foram bastante concordantes entre si, pelo a amplitude de valores destas duas propriedades foi igual a  $[2,05E-06; 2,55E-04]$ . De acordo com os valores das quatro estatísticas referidas registou-se, de uma forma geral, uma firme convergência das estimativas.

Comparando cada um dos métodos, com o método do *median rank* obteve-se mais exatidão e menos variabilidade nas estimativas de  $\lambda$  para a menor amostra, em que houve um maior afastamento dos valores estimados por parte da máxima verossimilhança. Para a amostra intermédia e a maior amostra, a estimação de máxima verossimilhança mostrou-se ser mais exata e menos variável do que o método do *median rank*, tal como mostra a Tabela 20.

Tabela 20 – Estatísticas descritivas das estimativas de  $\lambda$

$\lambda_1$	Median Rank				Máxima Verossimilhança			
Amostra	Média	Viés	Variância	EQM	Média	Viés	Variância	EQM
n=100	0,1172	-2,38E-04	2,56E-04	2,55E-04	0,1188	1,40E-03	1,32E-04	1,33E-04
n=1000	0,1171	-3,52E-04	2,53E-05	2,54E-05	0,1174	-3,15E-05	1,30E-05	1,29E-05
n=5000	0,1173	-1,55E-04	5,50E-06	5,52E-06	0,1175	4,64E-05	2,70E-06	2,70E-06
$\lambda_2$	Median Rank				Máxima Verossimilhança			
Amostra	Média	Viés	Variância	EQM	Média	Viés	Variância	EQM
n=100	0,1082	-4,17E-04	2,26E-04	2,26E-04	0,1090	4,42E-04	1,24E-04	1,25E-04
n=1000	0,1084	-2,16E-04	2,38E-05	2,38E-05	0,1087	1,65E-04	1,21E-05	1,22E-05
n=5000	0,1084	-1,40E-04	4,75E-06	4,76E-06	0,1086	3,07E-06	2,47E-06	2,47E-06
$\lambda_3$	Median Rank				Máxima Verossimilhança			
Amostra	Média	Viés	Variância	EQM	Média	Viés	Variância	EQM
n=100	0,1010	1,15E-05	1,76E-04	1,75E-04	0,1020	1,04E-03	9,50E-05	9,60E-05
n=1000	0,1011	8,38E-05	2,05E-05	2,05E-05	0,1013	3,71E-04	1,05E-05	1,06E-05
n=5000	0,1009	-7,29E-05	4,34E-06	4,34E-06	0,1010	-5,17E-06	2,05E-06	2,05E-06

A estimação pelo método do *median rank* registou o maior erro percentual em  $\lambda_3$ , contudo os erros foram bastante concordantes entre si (na casa das milésimas). As diferenças, na casa das décimas milésimas, foram também bastante reduzidas:

$$e_{MRR\%}(\lambda_1) = \frac{|\lambda_{1\text{maior}} - \lambda_{1\text{menor}}|}{\lambda_{1\text{maior}}} \cdot 100 = \frac{|0,1173 - 0,1171|}{0,1173} \cdot 100 = 0,0017\% \quad (89)$$

$$e_{MRR\%}(\lambda_2) = \frac{|\lambda_{2\text{maior}} - \lambda_{2\text{menor}}|}{\lambda_{2\text{maior}}} \cdot 100 = \frac{|0,1084 - 0,1082|}{0,1084} \cdot 100 = 0,0018\% \quad (90)$$

$$e_{MRR\%}(\lambda_3) = \frac{|\lambda_{3\text{maior}} - \lambda_{3\text{menor}}|}{\lambda_{3\text{maior}}} \cdot 100 = \frac{|0,1011 - 0,1009|}{0,1011} \cdot 100 = 0,0020\% \quad (91)$$

O erro percentual de  $\lambda_1$  estimado pela máxima verossimilhança foi bastante superior em relação a  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , devido à maior disparidade existente entre o maior valor e o menor valor estimados de  $\lambda_1$ :

$$e_{MLE\%}(\lambda_1) = \frac{|\lambda_{1\text{maior}} - \lambda_{1\text{menor}}|}{\lambda_{1\text{maior}}} \cdot 100 = \frac{|0,1188 - 0,1174|}{0,1188} \cdot 100 = 0,0118\% \quad (92)$$

$$e_{MLE\%}(\lambda_2) = \frac{|\lambda_{2\text{maior}} - \lambda_{2\text{menor}}|}{\lambda_{2\text{maior}}} \cdot 100 = \frac{|0,1090 - 0,1086|}{0,1090} \cdot 100 = 0,0037\% \quad (93)$$

$$e_{MLE\%}(\lambda_3) = \frac{|\lambda_{3\text{maior}} - \lambda_{3\text{menor}}|}{\lambda_{3\text{maior}}} \cdot 100 = \frac{|0,1020 - 0,1010|}{0,1020} \cdot 100 = 0,0098\% \quad (94)$$

Como se pode constatar, o erro percentual do  $\lambda$  estimado pelo método do *median rank* foi perfeitamente menor do que pela máxima verossimilhança, para quaisquer valores de  $\lambda$  estimados, aproximando-se ou mesmo atingindo a casa das centésimas, como aconteceu para  $\lambda_1$ . Ainda assim, são erros que se podem menosprezar.

### 3.4 Análise estatística das distribuições Normal e Lognormal

Como foi visto na revisão bibliográfica, a distribuição Weibull pode ser transformada numa distribuição normal e lognormal, se  $\beta = 3,6$  e  $\beta = 2,5$ , respetivamente. Para estes valores de  $\beta$ , fizeram-se simulações com  $\eta$  variável e constatou-se que, por mais que se aumentasse o valor de  $\eta$ , o desvio padrão destas duas distribuições permanecia sempre o mesmo, correspondendo a uma distribuição normal de desvio padrão igual a 0,4 e a uma distribuição lognormal de desvio padrão correspondente a 0,5. Já no que se refere à média das distribuições, o seu comportamento foi pouco variante e bastante semelhante em ambas as funções, com crescimento reduzido perante um aumento exaustivo de  $\eta$ . Enquanto que para a distribuição Weibull transformada numa distribuição normal registaram-se médias correspondentes a 5, 6, 7, 8, 9 e 11, na conversão da distribuição Weibull numa distribuição lognormal as médias similares obtidas forma iguais a 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 11, como mostram as

Tabela 21 e Tabela 22.

Tabela 21 – Distribuição Weibull modificada numa distribuição normal

$\beta$	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6
$\eta$	100	200	500	1000	2000	5000	10000	100000
$\mu$	≈5,0	≈5,0	≈6,0	≈7,0	≈7,0	≈8,0	≈9,0	≈11,0
$\sigma$	≈0,4	≈0,4	≈0,4	≈0,4	≈0,4	≈0,4	≈0,4	≈0,4

Tabela 22 – Distribuição Weibull modificada numa distribuição lognormal

$\beta$	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
$\eta$	100	200	500	1000	2000	5000	10000	100000
$\mu$	$\approx 4,0$	$\approx 5,0$	$\approx 6,0$	$\approx 7,0$	$\approx 7,0$	$\approx 8,0$	$\approx 9,0$	$\approx 11,0$
$\sigma$	$\approx 0,5$	$\approx 0,5$	$\approx 0,5$	0,5	$\approx 0,5$	$\approx 0,5$	$\approx 0,5$	$\approx 0,5$

Fez-se uma análise detalhada para a distribuição normal com  $\mu = 6$  e  $\sigma = 0,4$  e para a distribuição lognormal com  $\mu = 6$  e  $\sigma = 0,5$ , utilizando as funções  $\text{rnorm}(n, \text{mean}=0, \text{sd}=1)$  e  $\text{rlnorm}(n, \text{meanlog}=0, \text{sdlog}=1)$ , respetivamente. A variável  $n$  representa o número de falhas e as variáveis  $\text{mean}$ ,  $\text{meanlog}$ ,  $\text{sd}$  e  $\text{sdlog}$  representam os vetores da média e do desvio padrão das distribuições normal e lognormal com valores padrão iguais a 0 e 1, respetivamente. A única diferença é que na distribuição lognormal os valores dos parâmetros apresentam-se na escala logarítmica.

Em ambas as distribuições, o método do *median rank* proporcionou um enviesamento totalmente positivo para as estimativas de  $\sigma$  (Tabela 24 e Tabela 28). Para as estimativas de  $\mu$ , o método de máxima verossimilhança apresentou um enviesamento mais negativo do que o método do *median rank*. No entanto, o método de máxima verossimilhança apresentou valores de enviesamento menores em módulo do que o método do *median rank*, tanto para  $\mu$  como para  $\sigma$ . De resto não existiu uma diferença significativa entre as duas distribuições nem entre os dois métodos de estimação, pelo que o desvio padrão e o erro quadrático médio das estimativas foi muito similar em cada uma das situações.

Tabela 23 – Estimativas descritivas de  $\mu$  da distribuição normal através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\mu$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	6,0	6,0014	0,0014	0,0017	0,0017
1000	6,0	6,0003	0,0003	0,0002	0,0002
5000	6,0	5,9998	-0,0002	0,0000	0,0000

Tabela 24 – Estimativas descritivas de  $\sigma$  estimados da distribuição normal através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\sigma$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	0,4	0,4086	0,0086	0,0009	0,0009
1000	0,4	0,4012	0,0012	0,0001	0,0001
5000	0,4	0,4004	0,0004	0,0000	0,0000

O método de máxima verossimilhança proporcionou uma estimação perfeita de  $\mu$  para a distribuição normal respeitante à amostra constituída por 5000 tems de falha, como se pode observar na Tabela 25.

Tabela 25 – Estimativas descritivas de  $\mu$  da distribuição normal através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\mu$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	6,0	5,9996	-0,0004	0,0016	0,0016
1000	6,0	5,9996	-0,0004	0,0001	0,0001
5000	6,0	6,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Enquanto o método do *median rank* estimou o desvio padrão por excesso, a máxima verossimilhança estimou por defeito.

Tabela 26 – Estimativas descritivas de  $\sigma$  da distribuição normal através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\sigma$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	0,4	0,3969	-0,0031	0,0008	0,0008
1000	0,4	0,3996	-0,0004	0,0001	0,0001
5000	0,4	0,3998	-0,0002	0,0000	0,0000

O método do *median rank* também possibilitou uma estimação exata de  $\mu$ , desta vez para a distribuição lognormal.

Tabela 27 – Estimativas descritivas de  $\mu$  da distribuição lognormal através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\mu$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	6,0	5,9998	-0,0002	0,0025	0,0025
1000	6,0	6,0000	0,0000	0,0003	0,0003
5000	6,0	6,0004	0,0004	0,0001	0,0001

Tal como sucedeu na distribuição normal, a estimação de  $\sigma$  na distribuição lognormal foi feita por excesso pelo método do *median rank* e por defeito pela máxima verossimilhança.

Tabela 28 – Estimativas descritivas de  $\sigma$  da distribuição lognormal através do método do *median rank*

Tamanho da Amostra	$\sigma$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	0,5	0,5112	0,0112	0,0013	0,0014
1000	0,5	0,5008	0,0008	0,0001	0,0001
5000	0,5	0,5004	0,0004	0,0000	0,0000

Tabela 29 – Estimativas descritivas de  $\mu$  da distribuição lognormal através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\mu$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	6,0	6,0004	0,0004	0,0024	0,0024
1000	6,0	5,9997	-0,0003	0,0003	0,0003
5000	6,0	5,9997	-0,0003	0,0000	0,0000

Tabela 30 – Estimativas descritivas de  $\sigma$  da distribuição lognormal através do método de máxima verossimilhança

Tamanho da Amostra	$\sigma$ teórico	Média	Viés	Desvio Padrão	EQM
100	0,5	0,4970	-0,0030	0,0013	0,0013
1000	0,5	0,4995	-0,0005	0,0001	0,0001
5000	0,5	0,4998	-0,0002	0,0000	0,0000

### 3.5 Intervalos de confiança

A construção dos intervalos de confiança foi feita a partir da função *conf.int* que fornece uma demonstração do conceito desses intervalos na estatística matemática. Esta função utiliza três argumentos: *level*, *size* e *cl*. O primeiro argumento toma um valor percentual em forma decimal, definindo o nível de confiança equivalente a  $(1 - \alpha)$  que é predefinido para 0.95, correspondendo a um nível de confiança de 95%, caso não seja explicitado o seu valor. O segundo argumento toma um valor inteiro positivo e serve para definir o tamanho da amostra pertencente a uma distribuição normal com média nula e desvio padrão unitário, ou seja,  $N(0,1)$ . Finalmente o terceiro e último argumento é uma abreviatura de *colour* (cor), pelo que ativa duas cores distintas de forma a destacar as situações em que os intervalos de confiança cobrem ou não a verdadeira média (*cl[1]:não*, *cl[2]:sim*). Por exemplo, se o argumento *cl* for definido como *cl(red, gray)*, então o intervalo será assinalado a vermelho (cor *cl[1]*) se não cobrir a média real ou teórica e aparecerá a cinzento caso contrário, denotado pela cor *cl[2]*. Assim, percebe-se que este argumento não é puramente estético, pois ajuda a ter uma melhor percepção sobre a qualidade de construção dos intervalos de confiança. A função referida é muitas das vezes confundida pela função *confint* pela forma de escrita bastante similar, apenas distinguindo-se uma da outra pelo ponto final entre *conf* e *int*. Na verdade, estão as duas intimamente relacionadas, já que esta última função calcula os intervalos de confiança para um ou mais parâmetros de um modelo ajustado, no entanto são utilizadas para casos diferentes casos práticos/aplicações.

Quanto ao código utilizado, adicionaram-se 6 novas matrizes (*Beta1*, *Beta2*, *Beta3*, *Eta1*, *Eta2*, *Eta3*) de tamanho [*nrow*=1000, *ncol*=100] cada uma. A introdução destas matrizes tem o objetivo de impor mais um ciclo ao código, de forma a serem criados 100 intervalos de confiança para 1000 estimações dos parâmetros, perfazendo um total de 100000 iterações. A matrizes *Beta1* e *Eta1* dizem respeito às estimações resolvidas pelo método do *median rank* criado no R, enquanto que as matrizes *Beta 2*, *Eta2*, *Beta3* e *Eta3* permitem criar intervalos de acordo com as estimações das funções automáticas *MRRw2p*, *MLE2wp* e *fitdist*, sendo que esta última foi usada em casos específicos (por exemplo: quando foram consideradas apenas as 2 primeiras falhas, num total de 2000).

Outra função utilizada foi a *t.test*. Esta função produz uma variedade de testes t. Ao contrário de outros pacotes da mesma área, o padrão assume uma variação desigual. Caso se pretenda especificar variâncias iguais então ativa-se o argumento lógico *var.equal* de modo que *var.equal=TRUE*. Para testes unilaterais utiliza-se a opção *alternative=less* ou *alternative=greater*, conforme seja um teste unilateral à esquerda ou à direita, respetivamente. Como o pretendido é estabelecer intervalos de confiança a 95% para o *Beta* e o *Eta* estimados, listaram-se apenas o nome das variáveis no comando *t.test*. Para as primeiras 5 falhas, os intervalos de confiança distanciaram-se bastante do valor teórico. Para as primeiras 8 falhas, os

intervalos de confiança foram-se aproximando do valor teórico. Finalmente para as primeiras 10 falhas, os intervalos de confiança respeitantes ao método do *median rank* criado num código feito de raiz começam a enquadrar-se com o valor teórico, embora de uma forma pouco centrada. Quanto aos intervalos de confiança dos restantes dois métodos, estes parecem ainda oferecer alguma resistência perante o número reduzido de falhas, pelo que só aumentando consideravelmente o número de falhas é que se produzirão intervalos de confiança de maior precisão.

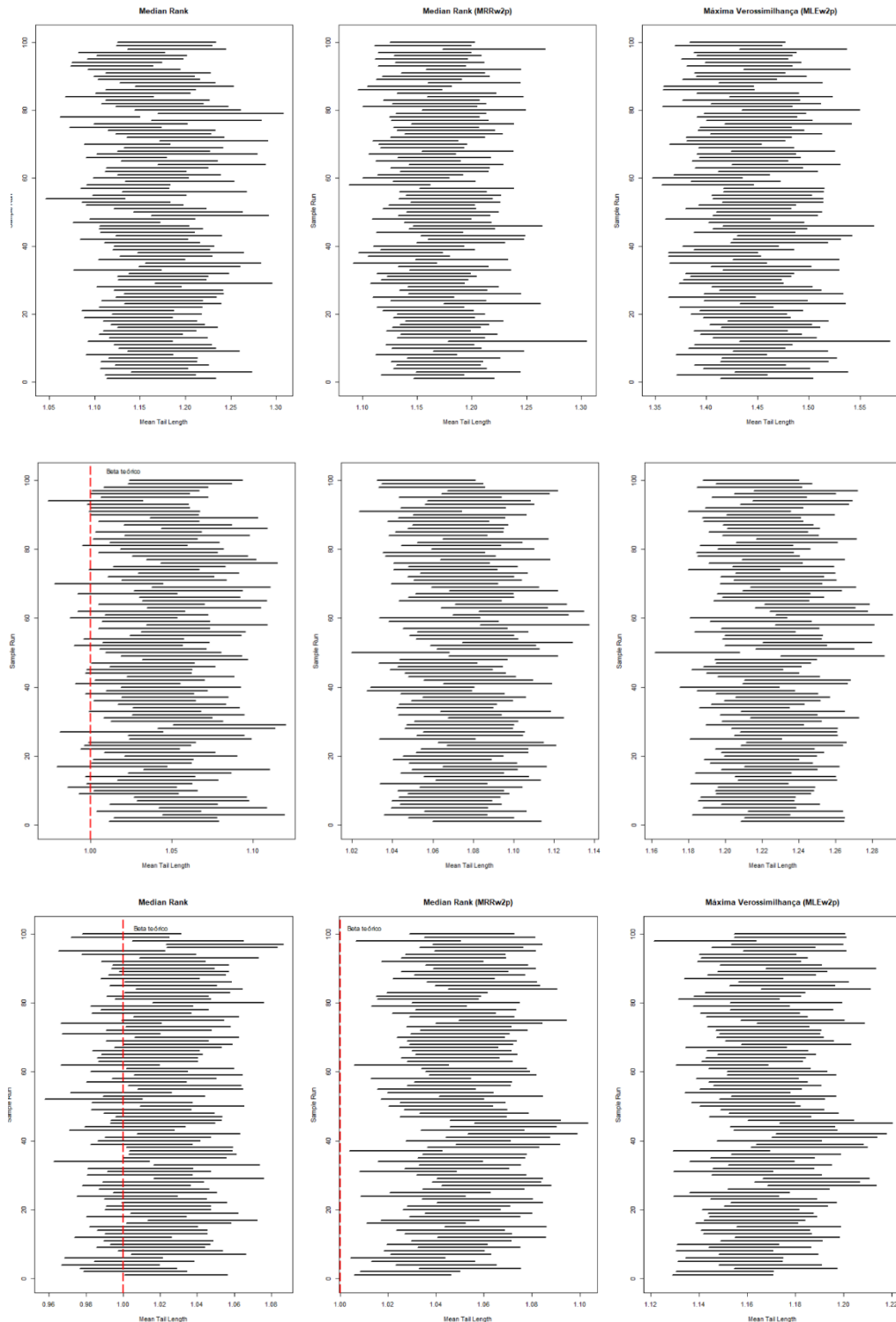


Figura 21 – Intervalos de confiança para as primeiras 5, 8 e 10 falhas ( $\beta = 1$ )

### 3.6 Exemplos de fiabilidade

As seguintes tabelas apresentam um exemplo dos valores de fiabilidade de um determinado equipamento, cujas falhas podem ser representadas por várias distribuições Weibull com  $\beta = 1$  (aproximadamente exponencial), com  $\beta = 3$  (representa a distribuição Weibull biparamétrica), com  $\beta = 3,6$  (aproximadamente normal) com  $\beta = 2,5$  (assemelha-se a uma distribuição lognormal). Em cada tabela fez-se variar o parâmetro de escala  $\eta = 5000, 5500$  e  $6000$ , de forma a compreender a variação de fiabilidade ao longo do tempo de funcionamento do equipamento. Utilizou-se a função de fiabilidade da distribuição Weibull biparamétrica para calcular a percentagem de fiabilidade do equipamento num determinado instante. Por exemplo, para um tempo de funcionamento (ininterrupto) de, pelo menos 1500 horas, a fiabilidade de um equipamento com  $\beta = 3$  e  $\eta = 5000$  corresponderá a

$$R(t) = P(T \geq t) = e^{-(t/\eta)^\beta} \times 100 = e^{-(1500/5000)^3} \times 100 \approx 0,973 = 97,3\%$$

Segundo a Tabela 31, em termos de sobrevivência do componente, a distribuição exponencial transformada foi a que apresentou melhores resultados de fiabilidade para  $\eta = 5000h$ , ao longo do tempo analisado, visto ter sido o único modelo que permite ao componente apresentar uma fiabilidade acima de 15% ao fim de 9000 horas de funcionamento contínuo, enquanto que a distribuição lognormal nem sequer garante a sobrevivência do componente para esse instante e nas restantes a ocorrência de falha é quase certa ( $F(t) \approx 100\%$ ). No entanto, todos os modelos, exceto o exponencial, apresentaram valores iniciais de fiabilidade mais elevados, conservando uma média de fiabilidade mais elevada para o intervalo de tempo de funcionamento especificado (entre as 700h e as 900h). De realçar que a fiabilidade do componente às 5000 horas foi o mesmo para qualquer uma das distribuições consideradas, por isso, o modelo exponencial é o menos indicado se a prioridade for manter o componente operacional até um instante anterior a este (por exemplo até às 2500 horas, cujos valores de fiabilidade são relativamente elevados).

Tabela 31 – Valores percentuais de fiabilidade para  $\eta = 5000h$

Distribuição	Tempos de funcionamento (em horas)					
	700	1000	1500	2500	5000	9000
Weibull	99,7%	99,2%	97,3%	88,2%	36,8%	0,3%
Exponencial	86,9%	81,9%	74,1%	60,7%	36,8%	16,5%
Normal	99,9%	98,2%	95,2%	83,8%	36,8%	1,3%
Lognormal	99,3%	99,7%	98,7%	92,1%	36,8%	0,0%

Para  $\eta = 5500h$  e  $\eta = 6000h$ , a interpretação é a mesma do caso anterior. Como é óbvio, o aumento do parâmetro de escala influenciou a fiabilidade, melhorando-a ao longo do tempo. A distribuição exponencial continua a garantir mais tempo operacional do componente, em comparação com os outros modelos, com valores de fiabilidade a rondar os 20% em  $t = 9000h$ . No instante  $t = 700h$ , a distribuição normal transformada com  $\eta = 6000h$  apresenta uma fiabilidade perfeita (Tabela 33), o que na prática é algo impossível de acontecer.

Tabela 32 – Valores percentuais de fiabilidade para  $\eta = 5500h$ 

Distribuição	Tempos de funcionamento (em horas)					
	700	1000	1500	2500	5000	9000
Weibull	99,8%	99,4%	98,0%	91,0%	47,2%	1,3%
Exponencial	88,0%	83,4%	76,1%	63,5%	40,3%	19,5%
Normal	99,9%	98,6%	96,2%	87,0%	45,5%	3,3%
Lognormal	99,4%	99,8%	99,1%	94,3%	49,2%	0,3%

Tabela 33 – Valores percentuais de fiabilidade para  $\eta = 6000h$ 

Distribuição	Tempos de funcionamento (em horas)					
	700	1000	1500	2500	5000	9000
Weibull	99,8%	99,5%	98,4%	93,0%	56,1%	3,4%
Exponencial	89,0%	84,6%	77,9%	65,9%	43,5%	22,3%
Normal	100,0%	98,9%	96,9%	89,4%	53,0%	6,4%
Lognormal	99,5%	99,8%	99,3%	95,8%	59,5%	1,4%

### 3.7 Exemplos de casos de estudo

A parte do desenvolvimento foi meramente estatística e científica, não ilustrando os problemas do dia-a-dia das empresas no setor da indústria. De forma a explorar com mais detalhe a fiabilidade dos ativos, no presente capítulo será exposto e analisado uma série de casos de estudo, reais e fictícios, adaptados dos livros *Case Studies in Reliability and Maintenance* (Blischke & Murthy, 2003) e *Statistical Methods for Reliability Data* (Meeker & Escobar, 1998). Estes estudos descrevem a aplicação das distribuições de fiabilidade abordadas teoricamente no capítulo 2 (revisão bibliográfica) e aplicadas com recurso à simulação no capítulo 3 (desenvolvimento).

#### 3.7.1 Caso de estudo 1: Análise dos componentes do motor de uma aeronave de missão crítica

A forma de atuação por parte das companhias aéreas, no que diz respeito à manutenção das suas frotas, é sempre um tema delicado. De maneira a manter o sigilo profissional, neste caso de estudo não será divulgado o nome da aeronave nem do seu fabricante. A análise aqui referida é suficientemente idêntica para as companhias aéreas e os fabricantes comuns, independentemente da sua dimensão empresarial.

Atualmente, devido à grande concorrência existente entre as companhias aéreas, principalmente de *low-cost*, surge a necessidade transportar mais carga com menor consumo de combustível e a velocidades mais elevadas, mantendo o custo mínimo. Os transportes aéreos são considerados os mais seguros, porém, são os que apresentam a menor probabilidade de sobrevivência quando ocorrem acidentes. Assim, é dada grande ênfase à segurança e à fiabilidade das aeronaves, sejam civis ou militares, sendo a manutenção responsável por 10 a 15% da totalidade do custo operacional.

A companhia aérea em questão é de porte médio e faz mais de 1000 voos por semana para 25 destinos na Europa, com uma duração média de uma hora e um tempo máximo de voo de duas horas. Em média, transporta mais de 3,2 milhões de passageiros por ano. A presente análise será restrita à aeronave “Alfa”, com as seguintes características:

- Aeronave: “Alfa”;
- Tamanho da frota: 16;
- Capacidade: 70 a 110 assentos;
- Velocidade: 400 nós;
- Altitude: 30000 pés;
- Tipo de motor: turbina a gás;
- Número de motores: 4 motores;
- Tempo de voo: 45 minutos a 2 horas.

No presente caso de estudo, abordaram-se dois modelos de fiabilidade distintos: a distribuição Weibull e a distribuição exponencial. Recorreu-se à simulação para estimar os tempos até à troca dos componentes, as taxas de reparação e ainda os parâmetros dessas distribuições. O primeiro objetivo do caso de estudo foi identificar os componentes que causam o maior número esperado de ações de manutenção não programada, tendo em conta dados históricos recolhidos ao longo de três anos, que correspondem ao tempo até à troca não planeada de um certo componente, medido em horas de voo ou em número de ciclos (aterragens), devido a uma falha registrada. Os dados estão agrupados pelos seguintes números de entrada:

1. Número da peça;
2. Descrição;
3. Aeronave;
4. Posição do motor;
5. Data de ativação/desativação;
6. Número de horas de voo antes da troca do componente;
7. Número de voos antes da troca do componente;
8. Fabricante original do equipamento;
9. Motivo da troca (falha inicial);
10. Localização do relatório do departamento de reparação;
11. Falhas confirmadas, falhas não confirmadas (mas encontrada uma outra falha) ou nenhuma falha encontrada (NFE).

As entradas críticas são representadas pelos números 6, 7, 9, 10 e 11. A partir da análise das entradas críticas foi possível identificar os dez componentes que causaram mais ações de manutenção não programada, listados na Tabela 34. Nesta tabela encontram-se os parâmetros estimados das distribuições abordadas, incluindo o parâmetro de escala, que corresponde aos tempos até à troca (em horas de voo) determinados pelo *software* PROBCHAR (Knezevic, 1995). A distribuição Weibull representa os tempos até à troca do atuador TMS, do indicador de direção de atitude, do indicador de fluxo de combustível, do giroscópio vertical, do seletor de altitude e do transmissor de pressão, enquanto que os tempos de troca da unidade de áudio central, do controlo de navegação, do gravador de dados de voo e do computador de piloto automático são representadas pela distribuição exponencial.

Para os tempos até à troca representados pela a distribuição exponencial, o número esperado de trocas não planeadas do motor,  $UR_e(t)$ , durante um período de operação  $t$  é dado por um processo de Poisson com média igual a  $\lambda t$ , ou seja:

$$UR_e(t) = \lambda t \quad (95)$$

A notação  $\lambda$  representa a taxa de falhas por hora de voo, enquanto que  $1/\lambda$  corresponde ao tempo médio entre trocas dos componentes, como mostra a Tabela 34:

Tabela 34 – Dez principais componentes inseridos na manutenção não programada

Nome do componente	Distribuição	Estimação dos parâmetros
1. Atuador TMS	Weibull	$\hat{\beta} = 0,7; \hat{\eta} = 778$
2. Indicador de direção de atitude	Weibull	$\hat{\beta} = 0,65; \hat{\eta} = 365$
3. Indicador de fluxo de combustível	Weibull	$\hat{\beta} = 0,85; \hat{\eta} = 1700$
4. Giroscópio vertical	Weibull	$\hat{\beta} = 1,12; \hat{\eta} = 890$
5. Seletor de altitude	Weibull	$\hat{\beta} = 0,78; \hat{\eta} = 375$
6. Unidade central de áudio	Exponencial	$1/\hat{\lambda} = 1020$
7. Controlo de navegação	Exponencial	$1/\hat{\lambda} = 1420$
8. Transmissor de pressão	Weibull	$\hat{\beta} = 0,98; \hat{\eta} = 219$
9. Gravador de dados de voo	Exponencial	$1/\hat{\lambda} = 1280$
10. Computador de piloto automático	Exponencial	$1/\hat{\lambda} = 1050$

O valor do parâmetro de forma dos componentes da aeronave foi menor que um, exceto para o giroscópio vertical, onde  $\hat{\beta} = 1,12$ . Estes valores indicam uma taxa de falhas decrescente, que apontam para um problema de qualidade, devido ao teste de aprovação ser insuficiente ou inadequado.

### 3.7.1.1 Nenhuma falha encontrada (NFE):

Uma ZFE (zero falhas encontradas) ou NFF (*No Fault Found*) consiste num tipo de falha para a qual, à partida, não existe qualquer causa para a sua ocorrência. Isolar a verdadeira causa de falha de um sistema complexo exige um elevado nível de exigência analítico, principalmente quando existe alguma ambiguidade de falha. A insuficiência de capacidades técnicas para resolver uma falha num componente leva ao aumento da probabilidade de cometer erros de avaliação, pelo que esse aumento dependerá do nível de ambiguidade (Chorley, 1998). Este problema é comum, visto que dados apresentados por Knotts (1996) referem um valor na ordem dos 40% para trocas incorretas de constituintes das fuselagens de aeronaves pertencentes à *Boeing* e que as zero falhas encontradas provocam custos anuais na ordem dos vinte milhões de libras na *British Airways*. Além disso, estima-se que cerca de 28% dos atrasos são causados por problemas técnicos que levam a uma manutenção não programada (Knotts, 1996).

A percentagem de NFE's nos dez principais componentes da companhia aérea sob análise está listada na Tabela 35, assim como as 723 ações estimadas de manutenção não programadas por

ano (cerca de 3000 horas de voo por aeronave) para esses componentes. Este número também representa 723 possíveis atrasos ou cancelamentos, o que é bastante elevado, considerando o facto de que um avião a jato moderno tem até 4 milhões de componentes (cerca de metade são fixadores).

Tabela 35 – Percentagem de NFE'S nos dez principais componentes

Nome do componente	% de NFE's eliminadas	Nº estimado de ações de manutenção não programadas p/ ano
1. Atuador TMS	26%	50
2. Indicador de direção de atitude	21%	97
3. Indicador de fluxo de combustível	31%	26
4. Giroscópio vertical	26%	56
5. Seletor de altitude	21%	110
6. Unidade central de áudio	28%	47
7. Controlo de navegação	35%	34
8. Transmissor de pressão	20%	219
9. Gravador de dados de voo	18%	38
10. Computador de piloto automático	6%	46

Notou-se uma grande percentagem de zero falhas encontradas, principalmente para os componentes 1, 3, 4, 6 e 7. A análise determinou as seguintes conclusões:

- Cerca de 19% das trocas não programadas eram ZFE's;
- Quatro aeronaves representaram 49% das ZFE's;
- Cerca de 65% das ZFE's encontradas nos computadores de piloto automático ocorreram numa aeronave particular;
- Cerca de 45% das eliminações de ZFE's vieram de duas bases específicas.

Em alguns casos notou-se que muitas das zero falhas encontradas ocorreram num curto espaço de tempo. Por exemplo, houve quatro trocas consecutivas do atuador TMS num espaço de duas semanas. Da mesma forma, quatro computadores de piloto automático foram retirados de uma das aeronaves dentro de 45 dias.

Por vezes, entender as razões de não existirem falhas encontradas pode-se tornar complicado, devido à exigência de um estudo completo do processo de manutenção da aeronave. Com o propósito de facilitar a análise deste processo, a *Airbus* desenvolveu um método que deteta componentes sem falhas encontradas e vigia-os de perto para encontrar a causa de não possuírem falhas.

De acordo com Chorley (1998), a seguinte lista contém os fatores externos que podem causar uma ZFE:

- Qualidade e profundidade do treinamento;
- Qualidade dos dados técnicos;
- Adequação, exatidão e calibração do equipamento de teste;

- Conceção do BIT, a sua resolução de ambiguidades e clareza;
- Falhas Intermitentes;
- Stress humano e erro induzido pela fadiga;
- Intenção intencional;
- O impacto crescente do *software*.

### 3.7.1.2 Políticas de fiabilidade e manutenção do motor

No estudo da fiabilidade, disponibilidade e manutibilidade de aeronaves, o número de zero falhas encontradas é quase insignificante. Ao contrário da maioria dos subsistemas que compõem uma aeronave, os motores contidos no sistema de propulsão sofrem falhas que podem ser representadas por distribuições Weibull com funções de risco crescentes. Isto faz com que o número de trocas de motores, sobretudo os mais modernos, que resultam em zero falhas encontradas se torne desprezível.

Apesar de uma quantidade significativa das falhas se relacionar com a idade operacional dos motores, o dano provocado por objetos estranhos, as falhas induzidas por manutenção e as falhas no controlo de qualidade são causas extrínsecas ao fenómeno de degradação. A maioria dos danos por objetos estranhos é causada por ataques de pássaros e é raramente grave o suficiente para causar uma falha ou uma paragem súbita no motor em pleno voo.

A *issue life* (Blischke & Murthy, 2003, pág. 387) consiste no número restante de horas ou de ciclos de um componente (com vida útil limitada) antes de ser substituído por outro idêntico de forma a ser repostado no motor. Outro termo introduzido neste caso de estudo é a *minimum issue life* ou MISL (Blischke & Murthy, 2003, pág. 387) e é vista como um limite de idade. É dada pela subtração entre a *hard life* (Blischke & Murthy, 2003, pág. 387), alcançada para um valor elevado da MISL, e a idade operacional. As *hard lives* dizem respeito aos componentes críticos de segurança e, como tal, não estão sujeitas a modificações. No entanto, as *minimum issue lives* deste tipo de componentes são semelhantes às *soft lives* e estão intimamente relacionadas com a segurança, podendo ser alteradas. Um baixo valor da MISL resulta em menos componentes substituídos antes que estes atinjam a *hard life*. Já a *soft life* (Blischke & Murthy, 2003), pág. 387) não está relacionada com a *hard life*. Um componente que excede a sua *soft life* é substituído assim que o motor, no qual ele estiver instalado, voltar a ser retirado para ações de manutenção. Um valor baixo da *soft life* resulta num maior número de substituições do que um valor elevado.

Para os propósitos deste estudo de caso, o motor em questão é constituído por dez módulos com vinte e duas partes distribuídas por esses módulos, como mostra o fluxograma da Figura 22. Para fins meramente ilustrativos, no anexo 6.7 é apresentada uma tabela com as estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull, com os diferentes tipos de tempos de vida (*soft*, *hard* e *minimum issue lives*) e ainda com as taxas de falhas para cada uma das vinte e duas partes do motor. Todos estes tempos de vida são dados em horas, enquanto que os parâmetros de escala das distribuições Weibull são dados em ciclos, com uma taxa média de troca cíclica de 0,192 ciclos por hora. A título de exemplo, um valor de 15000 ciclos é equivalente a 78125 horas, em média.

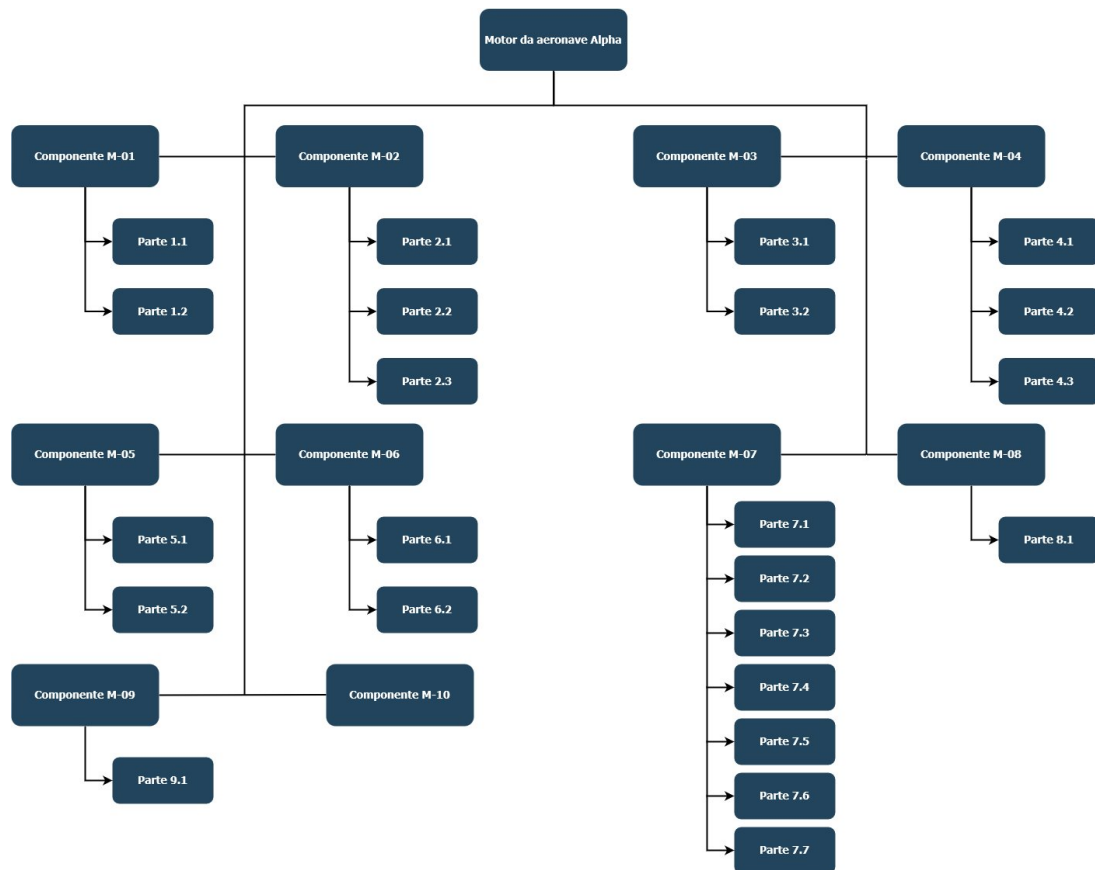


Figura 22 – Estrutura de avarias do motor da aeronave

Os seguintes gráficos foram gerados usando um modelo de simulação de eventos discretos denominado MEAROS (*Modular Engine Arisings, Repair and Overhaul Simulation*), que permite definir a configuração das aeronaves, assim como todos os parâmetros e suposições que caracterizam o cenário modelado. Normalizaram-se os resultados obtidos tendo em conta dois cenários. Um cenário base com a *soft life* definida em 10000 horas e a MISL definida em 3000 horas e um cenário alternativo em que a *soft life* e a MISL foram definidas em 25000 horas e 7000 horas, respetivamente. A partir da Figura 23, verificou-se que o tempo de espera pela recolocação de motores substitutos no cenário base correspondeu a 1192 dias, muito acima dos 44 dias obtidos pelo cenário alternativo. Esta figura evidencia que o tempo de espera depende tanto da *soft life* como da MISL, sendo que o comportamento das duas linhas do gráfico mostra que o aumento do valor da *soft life* e da MISL encurtará a sua duração. Como o número de substituições aumenta ao longo do ciclo de vida do motor, é preferível que o tempo de espera seja o menor possível.

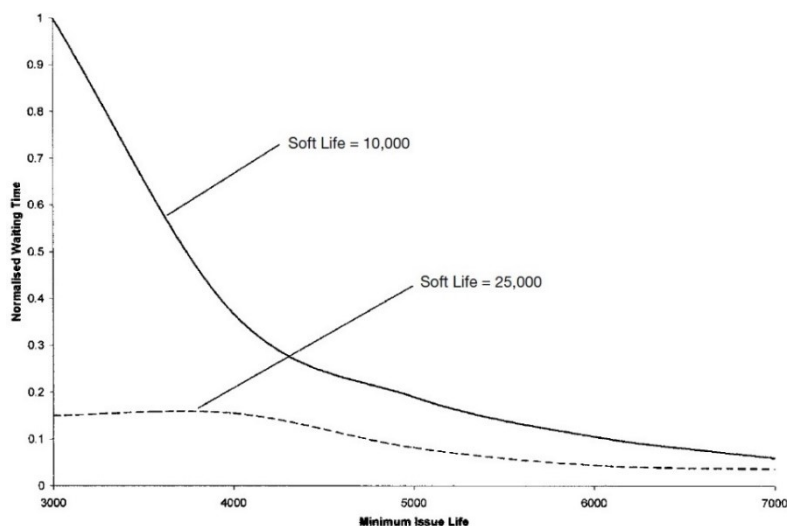


Figura 23 – Tempo de espera *versus* *Soft Life* e MISL

Na Figura 24 surge um padrão similar, apontando que o tempo de espera da aeronave está mais relacionado com o número de módulos recuperados do que com o número de motores, como mostra a Figura 25.

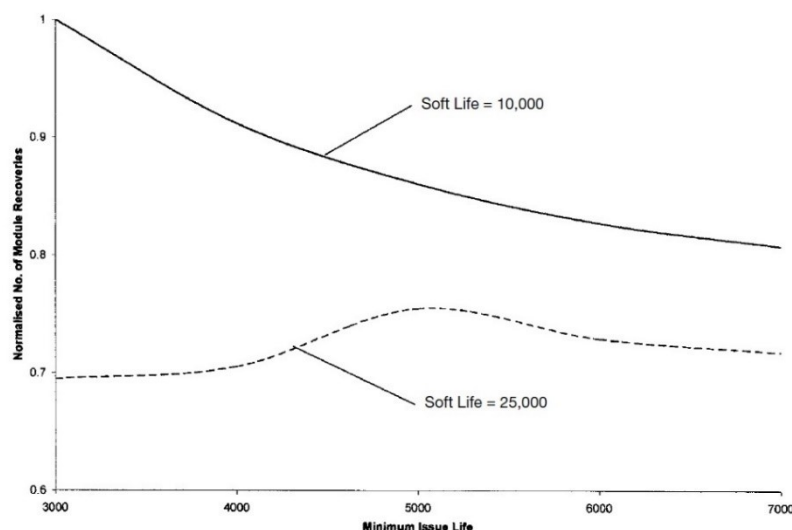


Figura 24 – Número de recuperações dos módulos *versus* *Soft Life* e MISL

O número de motores retirados resulta da soma das trocas planeadas e não planeadas. Ao comparar o padrão da Figura 25 com o da Figura 26, percebe-se que o primeiro padrão está um pouco mais relacionado com as trocas planeadas do que com as trocas não planeadas. Isso deve-se ao facto de que as alterações no valor da MISL têm um impacto significativamente maior no número de trocas planeadas do que as alterações no valor da *soft life* têm nas trocas não planeadas. As trocas planeadas são duas vezes maiores do que as trocas não planeadas para o cenário base, mas metade das não planeadas para o cenário alternativo.

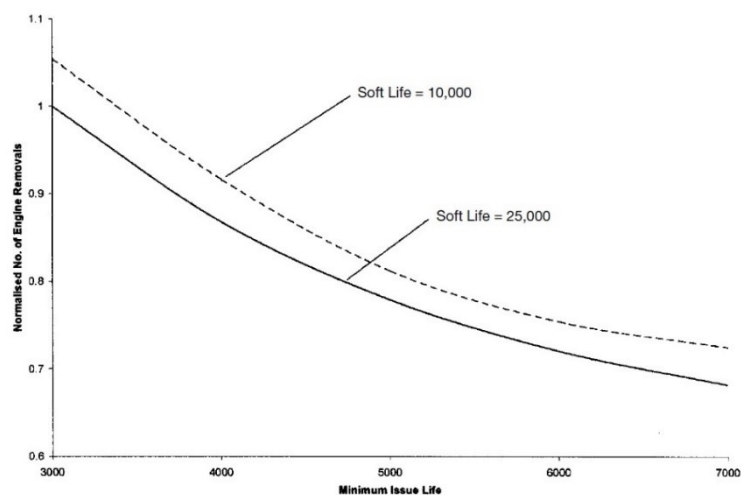


Figura 25 – Número de trocas dos motores *versus* *Soft Life* e MISL

Uma abordagem para medir a fiabilidade do motor centra-se na taxa de reparação (*shop visit rate*) ou na taxa de troca do motor (*engine removal rate*). Esta taxa expressa o número de reparações em cada 1000 horas de operação do motor, no entanto também pode ser referida como o tempo médio até à primeira reparação.

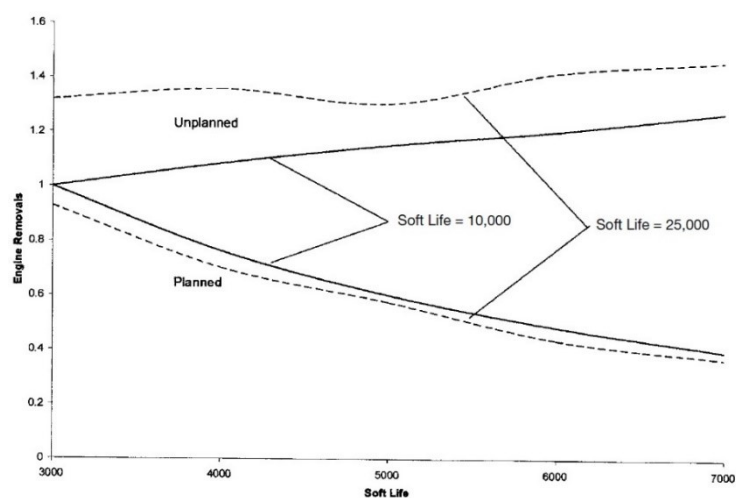


Figura 26 – Número de trocas (planeadas e não planeadas) do motor *versus* *Soft Life* e MISL

Na maioria dos casos, o tempo entre reparações consecutivas tende a diminuir com o tempo, como mostra a Figura 27. Quando o motor é recuperado, apenas um subconjunto dos componentes é normalmente substituído e os que foram reparados ou permaneceram intactos terão um menor tempo médio de vida residual do que o tempo de um componente novo, caso apresentem um modo de falha com uma função de risco crescente.

Se o valor da *soft life* for muito baixa, é provável que os componentes tenham de ser substituídos antes que ocorra uma falha, portanto, o tempo da seguinte reparação não planeada tenderá a suceder num novo motor. No entanto, a redução do valor da *soft life* não afetará os tempos até à rejeição devido ao aumento do valor da MISL de forma a reduzir o número de rejeições planeadas do motor e, conseqüentemente, aumentar o tempo médio entre reparações consecutivas do motor. O efeito é, no entanto, dependente dos valores reais das *hard lives* e da possibilidade dos módulos serem trocados durante uma intervenção do motor. Por vezes, os

módulos são mantidos juntos para que o motor reconstruído tenha exatamente as mesmas partes que tinha anteriormente, exceto, quando estas são substituídas por novas.

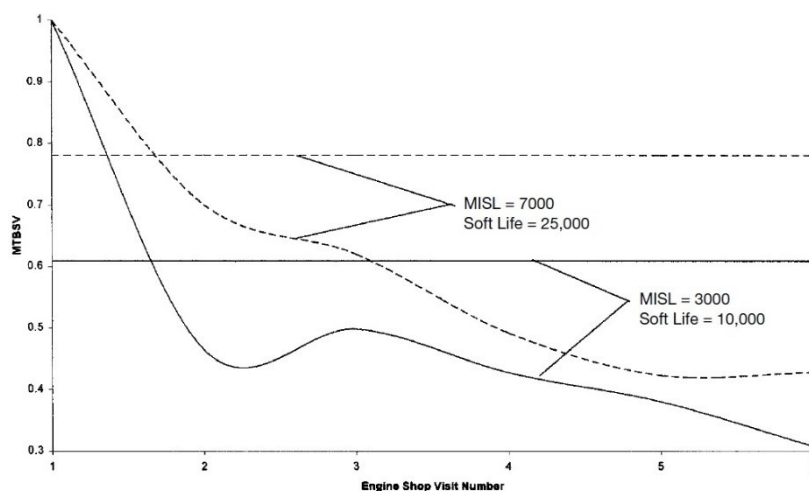


Figura 27 – Tempos médios entre reparações para diferentes valores da *soft life* e da MISL

As curvas da Figura 27 mostram como o tempo médio entre reparações varia de reparação em reparação em ambos os cenários. De notar que o tempo médio até à primeira reparação é o mesmo para ambos os cenários (i.e, igual a 1). As duas linhas horizontais representam o tempo médio ponderado entre as reparações. Nos dois cenários, todos os motores falharam pelo menos uma vez durante o período simulado de 20 anos, mas nem todos falharam duas vezes e dos que falharam duas vezes, nem todos falharam pela terceira vez e assim por diante. Obviamente, o valor da média geral irá variar com o número de motores de substituição e a duração da operação. A média aproximar-se-á do tempo médio até à primeira reparação, assim que o número de motores de substituição tender para o infinito, visto que nenhum deles precisará de sofrer intervenções e ser usado novamente. Em contrapartida, para um número restringido de motores de substituição, a média geral tenderá a descer à medida que a duração da operação aumentar, assim que mais motores forem recuperados.

Em tom de conclusão, os aviões são compostos por sistemas bastante complexos e caros a projetar, fabricar, operar e preservar. Apesar da sua complexidade, um número reduzido de fatalidades resulta de voos e, destes, apenas uma reduzida percentagem é diretamente atribuída a falhas de componentes. No entanto, estão a ser direcionados esforços que elevem a segurança e as penalizações sobre quem não cumpra os padrões estabelecidos. Ao mesmo tempo, há uma forte tendência para se viajar ao mínimo custo e inconveniente.

Neste estudo de caso, analisaram-se dois conjuntos diferentes de componentes. A maior parte da manutenção não programada ocorreu devido ao problema das zero falhas encontradas. No fim deste estudo, a percentagem registada de ZFE's eliminadas rondou os 40%, o que significa que, sob essas condições, qualquer manutenção planeada falha em atingir os objetivos pretendidos pela companhia aérea em análise. De forma a combater isso, recorreu-se a equipamentos de teste universal com o intuito de diminuir o impacto económico de ZFE's. No entanto, os equipamentos de teste universal têm as suas limitações. A principal desvantagem apresentada é que apenas podem reduzir o número de motores substituídos em *stock* em vez da eliminação de ZFE's. A menos que as capacidades de diagnóstico sejam melhoradas, este problema permanecerá e custará milhões de euros às companhias aéreas.

Ao contrário da maioria dos componentes das aeronaves, as trocas de componentes de motores raramente são classificadas como ZFE's. Nesta categoria, o número de ações de manutenção não planeadas tanto depende da *soft life* como depende da MISL. A configuração da *soft life* e da MISL desempenha um papel crucial na quantidade de ações de manutenção que o motor e os seus componentes irão exigir.

### 3.7.2 Caso de estudo 2: Comparação da abordagem RCM com a manutenção de instalações industriais

Este caso de estudo trata-se de um ensaio realizado em 1999 na *Daqing Chemical Fertilizer Company*, a maior empresa de fertilizantes químicos do norte da China. Esta instalação de produção contínua e de alto volume opera vinte e quatro horas por dia e sete dias por semana, produzindo uma média de 1600 toneladas de fertilizante de carbamida por dia. O objetivo do caso de estudo original consistiu em introduzir e implementar a prática de manutenção centrada na fiabilidade ou abordagem RCM (*Reability Centered Maintenance*) (Moubray, 1997b), mas visto que o tema desta dissertação incide na estimação dos parâmetros dos modelos de fiabilidade, o caso de estudo focar-se-á na análise estatística de uma caldeira de passagem.

#### 3.7.2.1 Modelo de Decisão

Os pressupostos para a análise da caldeira de passagem são os seguintes:

- A taxa instantânea de falhas da caldeira é denotada por  $\lambda$ ;
- O tempo de atraso  $h$  relativo a um defeito aleatório é independente do seu tempo de origem com função densidade de probabilidade e função de distribuição iguais a  $f(\cdot)$  e  $F(\cdot)$ , respetivamente;
- A variável  $r$  indica a probabilidade de deteção de falhas identificadas na inspeção (assumida como imperfeita);
- O número esperado de falhas causadas por erros humanos que se adotou para este caso de estudo corresponde a  $EN_H = 0,32$ ;
- O objetivo é identificar o período de inspeção  $T$  (em meses) mais adequado para minimizar o tempo de inatividade anual total ou maximizar a disponibilidade.

De forma a reduzir o tempo de indisponibilidade total causado por falhas nos equipamentos, a medida do tempo de indisponibilidade convencional torna-se num critério apropriado para modelar. O tempo esperado de indisponibilidade por unidade de tempo medido durante um longo período corresponde a:

$$ED(T) = \frac{d_f(EN_f(T) + EN_H) + d_p EN_p(T) + d_i}{T} \quad (96)$$

onde:

- $d_f$  indica o tempo médio de reparação (assumiu-se  $d_f = 75h$ );
- $EN_f(T)$  indica o número esperado de falhas ao longo de  $T$  meses;
- $EN_H$  indica o número esperado de falhas provocadas por erro humano;
- $d_p$  indica o tempo médio para corrigir as falhas identificadas (assumiu-se  $d_p = 10h$ );
- $EN_p(T)$  indica o número esperado de falhas identificadas;
- $d_i$  indica o tempo médio de inspeção (assumiu-se  $d_i = 50h$ ).

Como as inspeções são consideradas imperfeitas, então  $r \neq 1$  e  $EN_p(T)$  corresponde a (Christer, Wang, Choi, & Sharp, 1998):

$$EN_p(T) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i (1-r)^{i-1} r \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda [1 - F(t_i - u)] du \quad (97)$$

Quanto a  $EN_f(T)$ , a equação correspondente é a seguinte:

$$EN_f(T) = \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{i-1} (1-r)^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda [F(t_i - u) - F(t_{i-1} - u)] du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda F(t_i - u) du \right\} \quad (98)$$

onde  $t_i$  representa os tempos de inspeção das inspeções observadas,  $i = 1, 2, 3, \dots$

### 3.7.2.2 Estimação dos parâmetros

A taxa estimada de falhas foi igual a  $\lambda = 0,278$  por mês, o número de falhas cometidas por erro humano correspondeu a  $EN_H = 0,32$  por inspeção e a probabilidade de detecção de falhas foi de  $r = 0,85$ . Embora o valor de  $r$  seja considerado elevado, é aceitável como valor inicial. A estimação da função  $F(\cdot)$  e os parâmetros associados foram estimados através do método de máxima verossimilhança com base nos tempos de atraso representados por uma distribuição exponencial e uma distribuição Weibull.

Os resultados da análise estatística são apresentados na Tabela 36, onde o método AIC (*Akaike Information Criteria*) (Baker & Wang, 1991, 1993) indicou um melhor ajuste da distribuição exponencial aos dados, em comparação com a distribuição Weibull. A amostra foi constituída por 19 inspeções, 63 falhas e 7 falhas, em que  $AIC = -2 \log L + 2v$  é o número de parâmetros estimados a partir dos dados.

Como a distribuição exponencial satisfaz o teste do qui-quadrado para um nível de confiança de 5% (Jia, 2000), assumiu-se que a função de distribuição do tempo de atraso é exponencial e que a taxa de falhas é igual a  $\lambda = 88,45$  meses. Caso os valores de  $\lambda$  e  $r$  fossem desconhecidos, estes também poderiam ter sido estimados pelo método de máxima verossimilhança se o número de dados fosse suficiente. Devido à qualidade dos dados analisados, foi possível isolar a questão do erro humano, que causou algumas falhas de curto prazo após as inspeções. Caso não fosse possível, perante um erro humano de magnitude suficiente, a taxa de falhas após uma inspeção teria de ser modelada como uma taxa de falha não homogênea (Christer, Wang, Sharp, & Baker, 1997).

Tabela 36 – Estimativas dos parâmetros das distribuições consideradas

Distribuição do tempo de atraso	Parâmetros		Qualidade de ajuste		
	De forma	De escala (em meses)	$\chi^2$	$\chi_n^2(0,05)$	AIC
Weibull	0,59	371,34	2,732	7,81	47,31
Exponencial	-	88,45	3,054	9,49	45,63

Mediante os resultados apresentados, construiu-se o modelo de manutenção para a caldeira, de acordo com os quatro casos distintos de modelação que se seguem:

- Caso 1 – Assumem-se os seguintes valores:  $r = 0,85$  e  $EN_H = 0,32$ . Este caso modela o desempenho anterior da caldeira até à melhoria de qualidade da inspeção e da mão de obra, aplicando-se mesmo que as melhorias não sejam efetivas;
- Caso 2 – Assume-se que a qualidade da inspeção seja maximamente melhorada desde  $r = 0,85$  até  $r = 1$ , com  $EN_H = 0,32$ ;
- Caso 3 – Assume-se que a qualidade da mão de obra seja maximamente melhorada desde  $EN_H = 0,32$  até  $EN_H = 0$  por inspeção, com  $r = 0,85$ ;
- Caso 4 – Assume-me que a qualidade da inspeção e a qualidade da mão de obra são melhoradas até ao nível máximo, com  $r = 1$  e  $EN_H = 0$ .

Dada a estimação da função  $F(\cdot)$  e dos parâmetros associados, é exequível a modelação dos quatro casos a partir das equações 96, 97 e 98 do modelo de decisão.

A partir da Figura 28 e de acordo com as condições *status quo* do caso 1, verificou-se que a mudança da inspeção anual para uma inspeção bienal é justificada e que, caso o nível de inspeção e de mão-de-obra não melhorem significativamente, torna-se necessária uma inspeção a cada três anos.

A Figura 28 mostra também que, num período de inspeção máximo de 3 anos, é mais vantajoso reduzir o nível de falhas provocadas por erro humano ( $EN_H$ ), do que aumentar a probabilidade de deteção de falhas. Como é óbvio, se ambas as variáveis atingirem o nível máximo, então o caso 4 é o melhor patamar que se pode alcançar. Independentemente dos valores de  $r$  e  $EN_H$ , a curva de desempenho oscilará sempre entre o caso 1 e o caso 4.

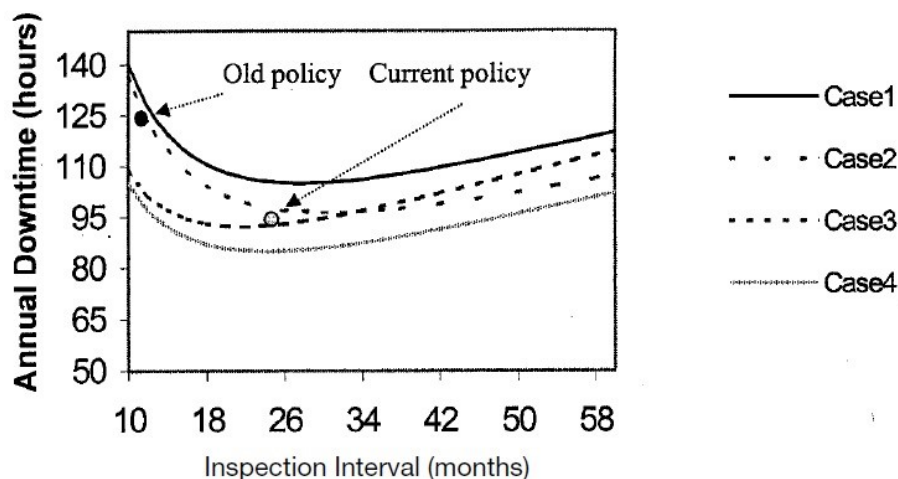


Figura 28 – Relação do tempo de indisponibilidade anual e os intervalos de inspeção para os 4 casos

Adicionalmente, foi feita uma análise de sensibilidade aos parâmetros estimados assumindo-se distribuições exponenciais e distribuições Weibull do tempo de atraso segundo distintos panoramas de inspeção, nomeadamente inspeção perfeita, inspeção imperfeita com uma estimação objetiva do desempenho de deteção e inspeção imperfeita com uma estimação subjetiva do desempenho de deteção (Jia, 2000). Além disso, o período bienal de inspeção foi

pouco sensível à escolha da distribuição do tempo de atraso e não foi sensível às premissas relativas aos parâmetros  $r$  e  $EN_H$ , dentro dos intervalos considerados.

### 3.7.2.3 Conclusões

De acordo com a Figura 28, verificou-se que o intervalo ideal de inspeção situa-se entre os 28 meses e os 40 meses, caso os valores dos parâmetros  $r$  e  $EN_H$  dos casos apresentados permaneçam os mesmos. Independentemente dos pressupostos definidos, o tempo de indisponibilidade do sistema para um intervalo de inspeção igual a 24 meses será sempre menor do que para um intervalo de inspeção correspondente a 12 meses, indicando que a tomada de decisão sobre prolongar o intervalo de inspeção de 12 meses para 24 meses foi a mais acertada. A continuidade desta política de inspeção poderá reduzir até 25% do tempo total de indisponibilidade.

O recurso à modelação mostrou-se essencial para compreender a superioridade do período bienal em relação ao período anual, fornecendo uma imagem clara dos resultados esperados quando o intervalo de inspeção sofre alterações. Sem o seu auxílio não seria possível saber de antemão o período de inspeção mais adequado para o presente caso de estudo. Por fim, verificou-se que o tempo de indisponibilidade não sofreu tantas discrepâncias entre os 24 meses e os 36 meses de inspeção. Considerando que num intervalo de inspeção de 36 meses, os lucros gerados pela redução do tempo esperado de indisponibilidade são insignificantes, concluiu-se que o período bienal é o intervalo ótimo de inspeção para o caso de estudo em questão.

### 3.7.3 Caso de estudo 3: Análise do tempo médio de vida residual e da otimização das condições operacionais em tubos de fornos industriais

Todos os dias, os fornos utilizados na indústria petroquímica estão sujeitos a condições extremas devido à restrição dos processos envolvidos. Dentro destes fornos, os tubos do reformador estão dispostos verticalmente numa câmara de redução, de forma a receberem uma mistura de vapor e hidrocarbonetos aquecida na presença de um catalisador, produzindo um gás rico em hidrogénio a uma temperatura variável entre 1340°F e 1460°F. Ao fim de oito anos de operação, equivalentes a cerca de 70175 horas, é necessário reavaliar o estado dos tubos. O pior cenário abrange a presença de ruturas alojadas no tubo, uma vez que resultam em reparações dispendiosas e no aumento da indisponibilidade operacional (Ibarra & Konet, 1994). A deformação é a principal causa de ruturas nos tubos do reformador. Outros danos no tubo ocorrem devido à carbonização, choque térmico e recristalização resultante de sobreaquecimentos acidentais (May, da Silveira, & Vianna, 1996). Assim, é importante determinar com precisão o tempo médio de vida residual dos tubos, de modo que sejam tomadas as ações de manutenção mais apropriadas.

Este caso de estudo descreve um teste real de fluência acelerado em tubos do reformador de um determinado forno industrial, formado por dois ensaios distintos. O ensaio de fluência para determinar a quantidade de deformação dos tubos em função do tempo e o ensaio de tração para medir o tempo de fratura dos tubos sob cargas de tensão constante a uma temperatura constante. O teste de fluência requer um tamanho de amostra razoável, submetida a diferentes níveis de tensão durante longos períodos (geralmente em anos). Foram submetidas cinquenta amostras em simultâneo a uma temperatura de 1760°F e outras cinquenta a uma temperatura de 1800°F, de forma a registar a taxa de deformação dos tubos. Para cada temperatura, ajustaram-se os tempos até à rutura a uma distribuição Weibull conhecida. Estes tempos

consistem na duração necessária para induzir 0,5% de deformação à temperatura mais baixa e 0,3% de deformação à temperatura mais alta.

O parâmetro de forma e de escala estimados dos tempos até à rutura obtidos a 1800°F foram  $\hat{\beta}_1 = 1,579$  e  $\hat{\eta}_1 = 9391$ , enquanto que os parâmetros de forma e escala estimados dos tempos até à rutura obtidos a 1760°F foram  $\hat{\beta}_2 = 1,745$  e  $\hat{\eta}_2 = 19007$ , respetivamente. De seguida, são apresentados os intervalos de confiança de 90% dos parâmetros da distribuição Weibull, baseados na normalidade assintótica dos estimadores (Elsayed, 1996):

$$1,223 \leq \hat{\beta}_1 \leq 1,784$$

$$1,356 \leq \hat{\beta}_2 \leq 1,784$$

$$7912 \leq \hat{\eta}_1 \leq 11003$$

$$16267 \leq \hat{\eta}_2 \leq 11003$$

De seguida, na Tabela 37 são expostos os tempos até à rutura dos tubos a 1760°F e a de 1800°F, respetivamente:

Tabela 37 – Tempos até à rutura obtidos a 1760°F e 1800°F

1760°F					1800°F				
3515	6989	14298	18846	25016	628	3331	5526	10455	12508
3578	7771	14401	19152	26256	1385	3371	5913	10641	13872
3968	8969	15652	19503	28523	1479	3399	6420	11575	14700
5225	9057	16196	20108	28659	1928	3910	6813	11896	15742
5392	9172	16265	20193	30901	2136	4048	7037	11911	15791
5694	9408	16484	20306	31393	2319	4227	8123	12067	17391
5768	9747	16553	20370	31992	2444	4350	8441	12099	18330
6197	10231	16793	20610	36498	2484	4905	8774	12112	18845
6339	11351	16932	22668	38821	2488	5129	8835	12145	19046
6871	11374	17209	24971	50753	3263	5141	10096	12275	19561

Os gráficos de probabilidade de falha referentes aos tempos ajustados são mostrados na Figura 29 e na Figura 30. Em ambos os gráficos, a proximidade entre os tempos até à rutura e a linha traçada indica um bom ajuste das distribuições Weibull aos tempos referidos.

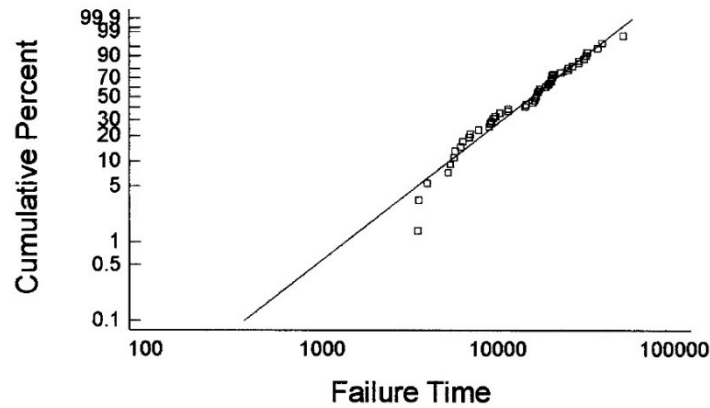


Figura 29 – Gráfico de probabilidade de falhas a 1760°F

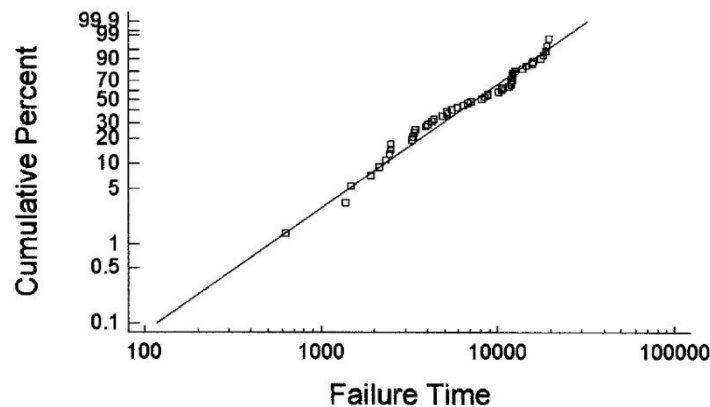


Figura 30 – Gráfico de probabilidade de falhas a 1800°F

Quando se utilizam modelos de tempos de falha acelerados para estimar a fiabilidade em condições normais de operação, as distribuições dos tempos de falha em diferentes níveis de tensão devem ter aproximadamente o mesmo parâmetro de forma. Dada a explicação anterior, assumiu-se  $\hat{\beta} = 1,66$ , que constitui a média das duas estimativas dos parâmetros de forma ( $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\beta}_2$ ). Como a temperatura é o único fator que afeta a rutura dos tubos, recorreu-se ao modelo Arrhenius (Elsayed, 1996; Nelson, 1990) para estimar o fator de aceleração:

$$t = ke^{c/T} \quad (99)$$

onde  $t$  representa o tempo no qual falha uma determinada parcela da amostra,  $k$  e  $c$  são constantes e  $T$  é a temperatura absoluta (medida em graus Kelvin). Determinou-se o tempo para o qual 50% da amostra falha (equivalente à mediana da amostra), conforme a seguinte expressão:

$$t = \theta(-\ln 0,5)^{1/\gamma} \quad (100)$$

Substituindo os percentis 50 dados pela equação anterior, obtiveram-se as seguintes equações:

$$15241 = ke^{c/1233,16} \text{ e } 7350 = ke^{c/1255,38}$$

Tabela 38 – Percentis 50 para 1760°F e 1800°F

<b>Temperatura:</b>	1760	1800
<b>Percentil 50:</b>	15241	7350

A resolução destas equações resultou nos seguintes valores:  $c = 50803$  e  $k = 1,95524 \times 10^{-14}$ . O percentil 50 estimado à temperatura  $T$  corresponde a  $t_{T^{\circ}\text{C}} = 1,95524 \times 10^{-14} e^{50803/(T+273)}$  horas. Assim que o parâmetro de escala seja obtido a partir da equação 100, obtém-se a função de fiabilidade (Figura 31) e a função de densidade de probabilidade que se seguem:

$$R(t) = e^{-t^{\beta}/\eta} \quad (101)$$

$$f(t) = (\beta/\eta) * t^{\beta-1} * e^{-t^{\beta}/\eta} \quad (102)$$

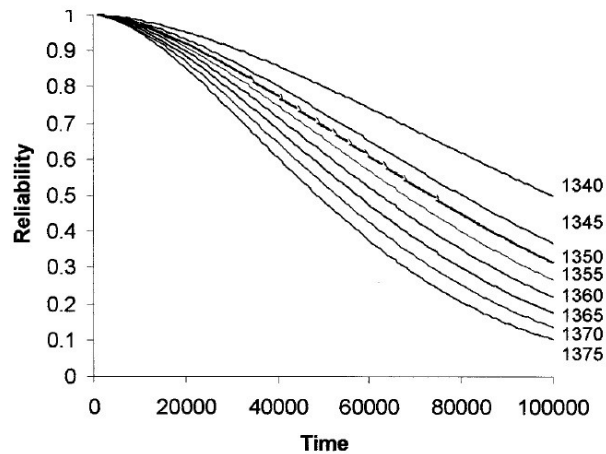


Figura 31 – Funções de fiabilidade em diferentes temperaturas operacionais

O tempo médio de vida residual no instante  $t$  é obtido pela equação que se segue:

$$L(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} \tau f(\tau) d\tau - t \quad (103)$$

Por fim, a Figura 32 expõe os tempos médios de vida residual (em horas) dos tubos em operação num intervalo de temperaturas situado entre 1340°F e 1375°F.

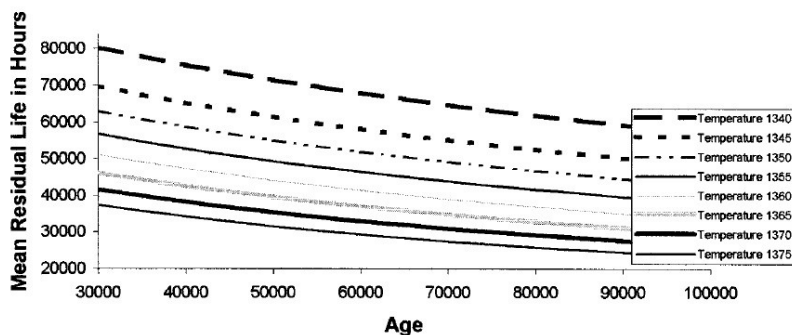


Figura 32 – Tempos médios de vida residual em diferentes temperaturas operacionais

Em tom conclusivo, o presente caso de estudo apresentou uma abordagem mais realista baseada em engenharia de fiabilidade para determinar os tempos médios de vida residual de tubos de fornos industriais, comparativamente com as abordagens determinísticas. Verificou-se que estes tempos são mais facilmente estimados para quaisquer condições operacionais quando comparados com os métodos tradicionais, que não consideram a natureza estocástica dos tempos até à falha. Os métodos tradicionais são limitados, pois não fornecem valores de fiabilidade em condições operacionais especificadas, nem outras medidas como o tempo médio de falha. Além disso, a função de fiabilidade estimada pela abordagem estudada pode ser

utilizada para determinar as condições operacionais ideais e os cronogramas de manutenção preventiva, quando aplicável.

### 3.7.4 Caso de estudo 4: Otimização de cargas de escavadoras de arrasto

Uma escavadora de arrasto (*dragline*), (Blischke & Murthy, 2003, pág. 517) é uma escavadora de grandes proporções com elevado raio de escavação, constituída por um balde carregado por um guindaste de cabos de arame. A sua principal aplicação é a exploração de solos, como a extração de carvão e a abertura de canais durante 24 horas por dia e 365 dias por ano. A disponibilidade, medida como a fração esperada de tempo no qual a *dragline* está em estado operacional, é um indicador de desempenho crítico de grande importância para garantir a operação contínua da *dragline*. Depende do desgaste progressivo dos componentes e das ações de manutenção utilizadas, aumentando à medida que o “esforço” de manutenção aumenta e diminuindo à medida que a carga da *dragline* aumenta. Um indicador de importância ainda maior de desempenho é a produção anual e varia consoante a carga, a velocidade de operação e a disponibilidade da *dragline*.

Pode-se considerar uma *dragline* como um sistema hierárquico de vários níveis, com o sistema principal representado no topo e as partes constituintes nos níveis mais baixos. Para os fins do caso de estudo, restringiu-se a atenção ao nível do subsistema para ser possível visualizar a *dragline* como uma estrutura em série composta por vinte e cinco componentes. A estrutura em série é apropriada, uma vez que todos os componentes têm de estar operacionais para que a *dragline* funcione. Um fator importante a ter em conta nos processos de degradação relacionados com a idade operacional é a acumulação de tensões exercidas nos componentes, que podem ser elétricas, mecânicas ou térmicas, em função do tipo de componente em questão.

O objetivo do caso de estudo é otimizar o valor da carga ideal de arrasto, de modo a maximizar a produção anual. Como experimentar diferentes tamanhos do balde é um procedimento inexecutável, visto que demoraria bastante tempo a obter uma análise relevante e fiável, utilizou-se uma abordagem que desenvolve um modelo matemático para determinar a carga ótima de arrasto, modelando o seu efeito na degradação dos componentes e o seu impacto no desempenho do sistema. Envolve a construção e validação de uma função de distribuição adequada para modelar as falhas, de forma a determinar o tamanho ótimo do balde, e realiza análises de sensibilidade em relação aos parâmetros estimados do modelo.

O uso total da *dragline* ao longo do período da análise foi de 14176 horas, a indisponibilidade resultante de ações de manutenção corretiva e preventiva durou 2461 horas e o tempo médio de inatividade, que representa a proporção entre o tempo de inatividade total e o número de reparações realizadas, correspondeu a 1,9 horas. Quando o componente com falha não é reparável, procede-se à substituição por um novo. Caso o componente seja reparável, pode sofrer vários tipos de retificação, sendo uma delas a reparação “mínima” (Barlow & Hunter, 1961). Os dados do caso de estudo constaram no número de falhas e de reparações para cada um dos vinte e cinco componentes, em cada intervalo de tempo uso. Estes dados permitiram a estimação dos parâmetros das distribuições de falha dos componentes e do tempo médio para reparações mínimas.

Para o componente  $i$ ,  $1 \leq i \leq 25$ , as falhas entre as ações de manutenção que requerem a interrupção de operações (*shutdowns*) são modeladas por uma função de distribuição Weibull  $F_i(x)$  com parâmetros  $\beta_i$  e  $\eta_i$ , suposição esta que é razoável devido à natureza das falhas dos

componentes envolvidos. As estimativas finais dos parâmetros inseridas no anexo 6.8 foram obtidas utilizando o método de máxima verossimilhança ou o método dos mínimos quadrados. Em alguns casos, o método de máxima verossimilhança produziu uma estimativa do parâmetro de forma menor que 1. Tal valor é irrealista, pois implica que a fiabilidade do componente melhora com a idade. Assim, utilizou-se o método dos mínimos quadrados quando  $\beta_i < 1$ . As rotinas para estimar  $\beta_i$  e  $\eta_i$  ( $1 \leq i \leq K$ ), exigiram uma suposição inicial dos parâmetros a serem estimados. Em ambos os métodos, considerou-se  $\beta_i = 2,0$  e o parâmetro  $\eta_i$  correspondeu ao tempo médio até à falha do componente  $i$ , dado pela divisão entre o tempo total de reparação e a quantidade total de falhas por componente no período estabelecido.

A validação adequada do modelo requer diferentes dados dos utilizados na estimação dos parâmetros, de forma a poder comparar os resultados do modelo com os dados. Tal não foi possível, uma vez que o tamanho da amostra para cada componente foi reduzido e todos os dados foram necessários para a estimativa dos parâmetros. Em vez disso, foi organizado um gráfico do número esperado de falhas (com base no modelo) e comparado visualmente com os dados de falha. Para alguns componentes, os quatro gráficos representados na Figura 33 apresentaram uma boa concordância entre si, podendo-se aceitar que o modelo Weibull foi uma aproximação razoável, para um nível de confiança moderado. Para os restantes componentes, a correspondência entre os quatro gráficos foi inadequada devido à possível falta de dados ou à não apropriação do modelo Weibull para representar os tempos até à falha.

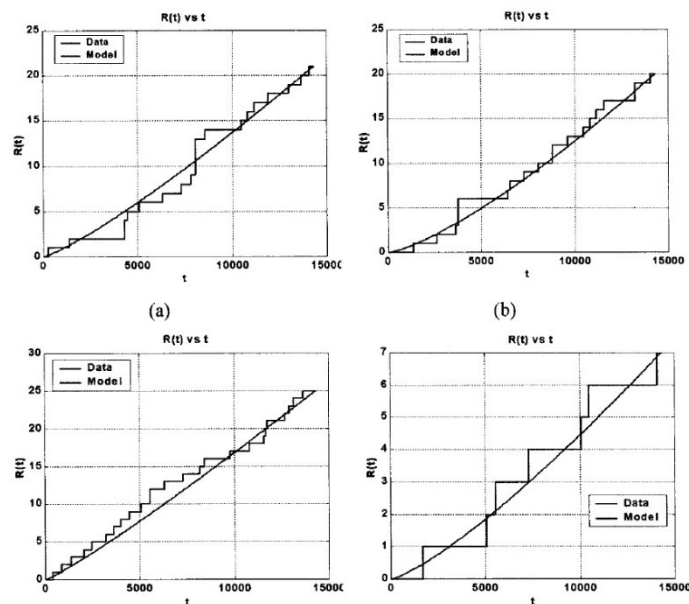


Figura 33 – Gráficos de falhas cumulativas e modelos ajustados. (a) Gerador do guindaste, (b) gerador de arrasto, (c) armação e (d) armação em A (*A-frame*).

### 3.7.4.1 Comentários finais

Após a estimação dos parâmetros da distribuição Weibull, detetaram-se as seguintes limitações do estudo que convém referir:

- A análise focou-se nas falhas relacionadas com a idade operacional dos componentes. Os tempos até à falha foram agrupados mediante o tempo de uso da *dragline*, em vez do tempo real da falha, implicando algumas perdas de informação. No entanto, tal

abordagem poderia não ser prática. A ocorrência de falhas devido a causas externas, como acidentes provocados por erro humano poderiam ter sido modelados segundo um modelo de risco competitivo (Jiang & Murthy, 1995), mas exigiriam formulações seriam demasiado complexas;

- A validação do modelo Weibull para alguns dos componentes não foi feita adequadamente devido à insuficiência de dados. Conclui-se que poderiam ter sido utilizadas distribuições mais apropriadas para modelar as falhas dos componentes referidos, de modo a obter melhores estimativas dos parâmetros para poder validar os modelos;
- Na maioria dos casos, os tempos até à falha observados foram limitados. Tal restrição não possibilitou a realização de testes estatísticos suficientemente rigorosos, de modo a verificar a adequação das distribuições Weibull assumidas;
- A partir das estimativas pelo método de máxima verossimilhança, obtiveram-se limites de confiança baseados em resultados assintóticos. Como é difícil de obter expressões analíticas para os limites, foi possível calculá-los numericamente usando os valores estimados. Visto que a quantidade de tempos até à falha foi reduzida, os limites determinados no estudo não possuem qualquer credibilidade;
- A modelação das reparações mínimas não foi suficientemente complexa. Um modelo mais abrangente incluiria o tempo médio de reparação para cada componente analisado.

O estudo também demonstrou que o modelo Weibull é razoavelmente robusto para variações nos valores dos parâmetros, implicando a aceitação dos resultados do estudo para um grau de confiança moderado.

Por fim, a análise indicou que o aumento da produção é alcançado em função de uma maior incidência na manutenção, submetendo a *dragline* a inspeções mais frequentes. A análise indica que para se obter a mesma fiabilidade do sistema, independentemente da dimensão do balde, a utilização da máquina entre as sucessivas paragens deve ser reduzida para 2,85 anos de utilização (25000 horas de funcionamento), equivalendo a 4,1 anos civis (36000 horas de funcionamento).

### 3.7.5 Caso de estudo 5: Fiabilidade e análise do prazo de garantia de um motociclo baseada em dados de reclamações

A maioria dos ativos são vendidos com prazo de garantia incluído. O prazo de garantia é um direito que o cliente tem, como forma de compensação no caso de ocorrer uma falha prematura no ativo adquirido. O propósito fundamental da gestão de garantia é a estimativa e o controlo dos elementos de custo associados à garantia (Blischke & Murthy, 2000). Como resultado, o fabricante incorre em custos associados ao serviço da garantia, que dependem principalmente da natureza e dos termos de garantia, e ainda da fiabilidade do ativo em questão (Blischke & Murthy, 1994).

Como consequência da falta de informação sobre os tempos de falha ou de uso obtidos a partir de ativos que falham após o término do período de garantia, os dados relativos às reclamações foram bastante censurados (mais de 95% de observações ausentes). Nesta situação, é difícil obter estimativas precisas e exatas dos parâmetros do modelo. Devido a estas limitações inerentes ao processo, a análise dos dados foi feita com recurso a estatísticas descritivas simples.

O ativo em questão é um motociclo produzido e vendido na Indonésia por um produtor multinacional fictício. A venda do motociclo inclui uma garantia de 6 meses ou de 6000 km (o que ocorra primeiro), cobrindo apenas a primeira de falha de qualquer componente. A presente análise teve em conta quatro conjuntos de dados recolhidos pela empresa sobre pedidos de garantia, para controlo de reclamações, que cobriram as 151918 unidades vendidas na Indonésia durante o ano de 1998.

Limitou-se o estudo no que diz respeito à caracterização da distribuição do tempo de vida dos motociclos, abordando dois modelos e três metodologias analíticas no tratamento de dados normalmente intratáveis. Embora seja usual registar as reclamações ao nível dos componentes, tal não é adequado para uma análise detalhada da fiabilidade, por isso considerou-se a análise ao nível do sistema.

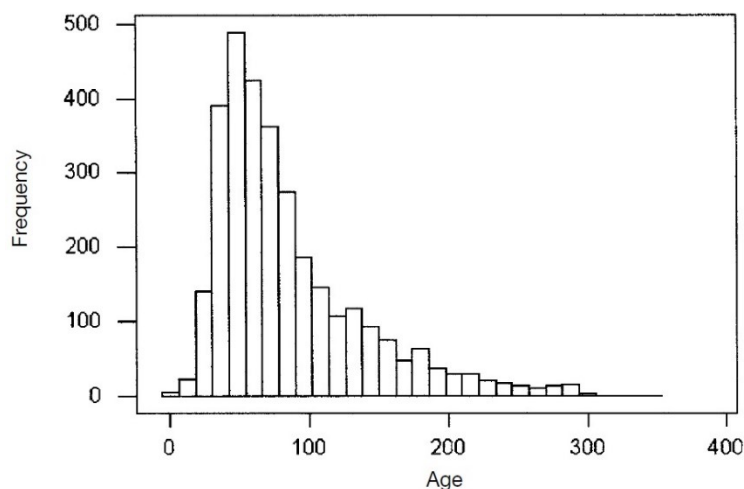


Figura 34 – Histograma dos tempos de garantia

O conjunto de dados analisado contabilizou um total de 5119 reclamações com mais de oitenta modos de falha relatados, mas apenas 3795 reclamações aceites. Os tempos de sobrevivência dos motociclos no momento das reclamações, correspondentes ao período entre as datas de aquisição e as datas de reclamação, foram registados no histograma da Figura 34. Foram registados 3128 tempos de sobrevivência com uma média de 84,1 dias, uma mediana de 69 dias e um desvio padrão de 52,8 dias, criando uma distribuição enviesada. De realçar que muitos desses tempos excederam o limite de idade nominal da garantia, estabelecido em cento e oitenta dias (seis meses). Uma vez que a garantia pode ser entendida como um tempo (180 dias) ou em termos de uso (6000 km), os tempos de falhas dos motociclos vendidos antes de 1 de julho de 1998 foram censurados em  $W = 180$  dias e os tempos de falha referentes às vendas posteriores a essa data foram censurados em  $W < 180$  dias. Utilizaram-se três abordagens distintas de censura. A abordagem I baseia-se nos resultados baseados no nível médio de uso igual a 0,540 km/dia, a abordagem II baseia-se no nível mediano de uso de 0,333 km/dia e, por fim, a abordagem III considera o limite de uso correspondente a 6000 km.

Assumiu-se que  $V_1, V_2, \dots, V_n$  são variáveis aleatórias independentes que representam os tempos até à falha:

$$\tilde{V}_j = (1 - \varepsilon)U_j + \varepsilon W_j \quad (104)$$

em que:

$U_j$ : nível de utilização dos motociclos vendidos no mês  $j$  (no instante da censura);

$W_j$ : idade operacional dos motocicletos vendidos no mês  $j$  (no instante da censura).

O primeiro passo na estimação dos parâmetros foi a seleção de uma distribuição apropriada para a variável  $V_n$ . Ajustaram-se os dados a várias distribuições devido à falta de informação prévia ou qualquer base teórica para a seleção. Os procedimentos estatísticos relativos à qualidade de ajuste utilizados para esse fim enfrentaram dois obstáculos significativos quando aplicados a dados deste caso de estudo. O primeiro problema reside no facto de terem sido utilizados valores de parâmetros estimados, enquanto que testes estatísticos como o teste de Kolmogorov–Smirnov e o teste de Anderson–Darling exigem distribuições hipotéticas especificadas. Logo, os valores das tabelas padrão respeitantes a esses testes não são válidos para distribuições selecionadas por estudos numéricos, a partir das quais se obtêm valores críticos quando os parâmetros são estimados (Blichke & Murthy, 2000). O segundo problema é o impacto da censura. O conhecimento, seja teórico ou por meio da simulação, sobre os valores críticos das estatísticas da qualidade de ajuste quando os dados são censurados, é muito limitado. Além disso, as estatísticas de teste parecem ter um desempenho medíocre quando os dados são altamente censurados, como dados do motociclo presentes neste caso.

O conjunto de dados completos, ignorando todos os valores censurados, foi ajustado às distribuições Weibull e lognormal. O caso de estudo irá focar-se nos modelos de falha para formar a base da análise de sensibilidade das distribuições assumidas. Os resultados referentes à distribuição Weibull foram os seguintes:

Tabela 39 – Resultados para a distribuição Weibull

Abordagem	Forma	Escala	$M \log L$	$S\beta$	$S\eta$	MTTF
I	1,2047	9,9128	-5,365E+03	0,0260	0,6812	9,3152
II	1,40965	5,2958	-5,040E+03	0,0339	0,3493	4,8217
III	1,1511	13,3036	-5,613E+03	0,0236	0,9165	12,6575

Tabela 40 – Intervalos de confiança para os parâmetros da distribuição Weibull

Abordagem	Intervalo de confiança para $\beta$ (95%)		Intervalo de confiança para $\eta$ (95%)	
	Limite Inferior	Limite Superior	Limite Inferior	Limite Superior
I	1,1537	1,2557	8,5776	11,2480
II	1,3431	1,4759	4,6112	5,9804
III	1,1048	1,1974	11,5073	15,0999

Esta distribuição proporcionou intervalos de confiança para a função de distribuição acumulada com base nos dados censurados (Jeng & Meeker, 2001) relativamente amplos, devido ao forte nível de censura apresentado, denotando uma dependência crítica dos resultados em relação à abordagem de censura utilizada. Todos os intervalos de confiança relativos ao parâmetro de forma compreenderam valores maiores que um, indicando que o sistema composto pelo motociclo apresenta uma taxa de falhas crescente, como seria expectável.

Quanto à distribuição lognormal, esta proporcionou os seguintes resultados:

Tabela 41 – Resultados para a distribuição lognormal

Abordagem	Média	Desvio Padrão	$M \log L$	$S\mu$	$S\sigma$	MTTF
I	3,6735	2,2543	-5,300E+03	0,1140	0,0536	4999,9131
II	2,7047	1,8616	-4,996E+03	0,0921	0,0436	84,5613
III	4,3597	2,5083	-5,542E+03	0,1342	0,0622	1817,986

Tabela 42 – Intervalos de confiança para os parâmetros da distribuição lognormal

Abordagem	Intervalo de confiança para $\mu$ (95%)		Intervalo de confiança para $\sigma$ (95%)	
	Limite Inferior	Limite Superior	Limite Inferior	Limite Superior
I	3,4501	3,8969	2,1492	2,3594
II	2,5242	2,8852	1,7761	1,9471
III	4,0967	4,6227	2,3864	2,6302

Em contraste com a distribuição Weibull, os intervalos de confiança da distribuição lognormal são menos amplos, denotando uma maior exatidão. No entanto, que o tempo médio até à falha (MTTF) estimado foi significativamente mais elevado, uma vez que a distribuição lognormal ajustada possui uma cauda mais longa do que a distribuição Weibull.

### 3.7.5.1 Comentários finais

Observou-se uma pequena variação dos valores máximos da função logarítmica de verossimilhança (Tabela 39 e Tabela 41) dentro de cada abordagem, mas comparando uma distribuição com a outra essas variações não se fizeram sentir. Conclui-se que nenhuma das distribuições é adequada para ajustar o conjunto de dados analisados. Visto dar-se prioridade à opção mais conservadora na maioria das aplicações na área da fiabilidade, a distribuição Weibull mostrou-se mais adequada nesse sentido.

As três abordagens deram resultados bastante diferentes para as duas distribuições. A abordagem II revelou-se mais conservadora, uma vez que utiliza a mediana como valor adotado para o nível de uso do motociclo. Do ponto de vista estatístico, esta abordagem é preferível porque não é influenciada por um alto grau de assimetria ou por observações mais afastadas.

### 3.7.6 Caso de estudo 6: Impacto da censura em amostras combinadas de tempos até à falha

Este caso de estudo ilustra a conveniência de análises individuais para ativos produzidos em intervalos distintos. De um período de produção para outro, a distribuição do tempo de vida de um ativo está em constante mudança, envolvendo a combinação de distribuições dos tempos de falha. A fiabilidade tanto pode melhorar, caso sejam feitas alterações ao nível do projeto ou do processo de fabrico, como pode deteriorar-se devido aos efeitos negativos da redução de custos, trocas de matérias-primas ou padrões de controlo de processos menos rigorosos. De seguida, serão mostrados dois exemplos que mostram de que forma a censura pode ter impacto em amostras combinadas de tempos até à falha.

### 3.7.6.1 Exemplo Conceptual

Suponha-se que as unidades de um ativo são produzidas nas mesmas quantidades em dois períodos de produção, com tempos de vida exponenciais (taxa de risco constante). Os tempos médios até à falha dos períodos de produção 1 e 2 são  $\lambda_1^{-1} = 1$  ano ( $\lambda_1 = 1$  falha/ano) e  $\lambda_2^{-1} = 5$  anos ( $\lambda_2 = 0,2$  falhas/ano), respetivamente. Devido à menor disponibilidade das unidades produzidas no período 1, estas foram colocadas em operação um ano antes do período 2 começar.

A análise dos tempos de falha das unidades de ambos os períodos de produção, realizada dois anos após o primeiro grupo de unidades ter sido colocado em operação, indicou que a taxa média de falhas no primeiro ano de operação foi igual a 0,6, isto é,  $(\lambda_1 + \lambda_2)/2 = (1 + 0,2)/2 = 0,6$ . O segundo ano de operação, baseado nas unidades do período 1, registou uma taxa de falha igual a um. Nestas condições, as unidades do período 2 com a menor taxa de falha foram emparelhadas com as unidades do período 1 com a maior taxa de falha referentes ao primeiro ano de produção, indicando incorretamente uma taxa de falha crescente, apesar do conjunto dos tempos de falha composto pela combinação das duas distribuições exponenciais possuir uma taxa de falha decrescente.

### 3.7.6.2 Exemplo numérico

Simularam-se tempos até à falha provenientes de duas distribuições com parâmetros conhecidos, de forma a ilustrar os riscos da presença de censura em amostras combinadas. Usaram-se amostras de 1000 unidades para cada período de produção (Hahn & Meeker, 1982), cujos tempos até à falha são representados pelas distribuições exponenciais do exemplo anterior, com tempos médios até à falha correspondentes a  $\lambda_1^{-1} = 1$  ano (período 1) e  $\lambda_2^{-1} = 5$  anos (período 2) Tabela 43. A Tabela 43 organiza o número conhecido e censurado de unidades que falharam em intervalos de 0,2 anos, com atenção para os dois primeiros anos de produção.

Tabela 43 – Dados simulados a partir dos dois períodos de produção

Tempos até à falha (em anos)	Período de Produção		Período de Produção 2	
	Após 2 anos de operação	Após 1 ano de operação	Após 1 ano de operação	Após 2 anos de operação
0,0–0,2	185	33		33
0,2–0,4	163	33		33
0,4–0,6	134	35		35
0,6–0,8	90	39		39
0,8–1,0	83	45		45
1,0–1,2	58	-		34
1,2–1,4	42	-		33
1,4–1,6	44	-		31
1,6–1,8	36	-		24
1,8–2,0	35	-		31
<b>Unidades censuradas</b> >1,0	-	815		-
>2,0	130	-		662
<b>Tamanho da amostra</b>	1000	1000		1000

Os tempos até à falha representados pela distribuição Weibull após dois anos de produção, que equivale a um ano de serviço no período 2, foram extrapolados separadamente e combinados para os dois conjuntos de amostras, originando a probabilidade de falha ao longo dos anos (Figura 35).

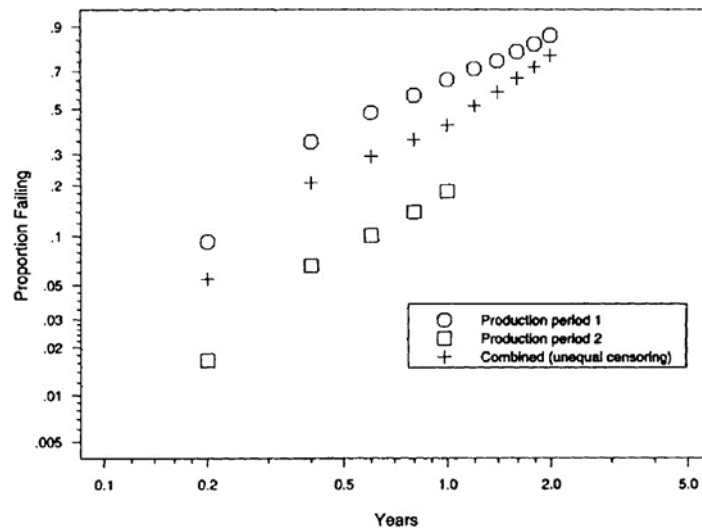


Figura 35 – Gráfico de probabilidade de falha para os dois períodos de produção após dois anos desde o início da produção

A probabilidade de falhas após dois anos de produção para ambas as amostras é representada na Figura 36. Este é o gráfico que teria sido obtido caso as unidades das duas amostras fossem colocadas em operação simultaneamente. A curvatura apresentada nos gráficos das amostras emparelhadas indica a presença de alguns desvios, em relação à distribuição Weibull. Uma vez que os tempos de vida das unidades foram gerados a partir de uma combinação de distribuições exponenciais, a distribuição Weibull não é a mais adequada para representar os tempos até à falha.

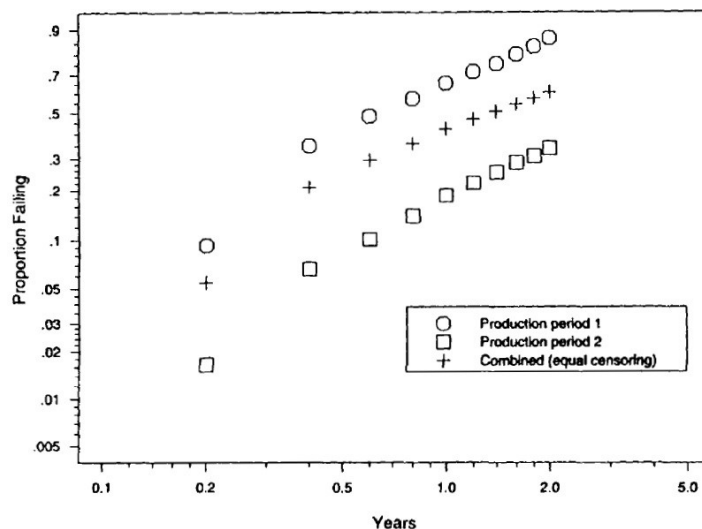


Figura 36 – Gráfico de probabilidade de falha após dois anos de operação para ambos os períodos de produção

Na primeira análise, ajustou-se uma distribuição Weibull aos tempos até à falha segundo processos de censura à direita distintos para os dois períodos de produção. O intervalo de

confiança de 95% relativo ao parâmetro de forma da distribuição Weibull correspondeu a [1,02; 1.151], indicando incorretamente uma taxa de risco crescente ao longo do tempo, tal como mostrou o exemplo conceptual.

Quanto à segunda análise, foi ajustada uma distribuição Weibull aos tempos até à falha segundo o mesmo processo de censura à direita para ambos os períodos de produção. O intervalo de confiança de 95% respeitante ao parâmetro de forma da distribuição Weibull correspondeu a [0,82, 0,92]. Segundo Proschan (1963), este intervalo indica uma taxa de risco decrescente ao longo do tempo.

Uma análise adequada dos tempos desigualmente censurados ajustar-se-ia em distribuições exponenciais individuais para os dois períodos de produção, visto que forneceria estimativas de probabilidades de falha concordantes com o modelo real a partir do qual os tempos foram simulados.

### 3.7.6.3 Últimas considerações

Na maioria dos problemas práticos, as análises dos tempos até à falha são frequentemente feitas com dados agrupados provenientes de duas ou mais amostras. Como a fiabilidade de um ativo varia com o tempo, são aconselhadas análises separadas para cada período de produção, comparando e combinando os resultados apenas se for apropriado. No entanto, nem sempre é possível proceder a análises individuais quando:

- Os períodos de produção não são conhecidos;
- Os períodos de produção não estão bem definidos. Por exemplo, na produção contínua podem existir pontos temporais indefinidos relativos a alterações do processo;
- Os dados são demasiado escassos para uma análise plausível.

Caso não seja possível fazer uma análise individual devido à escassez de dados ou a limitações relacionadas com a identificação dos períodos de produção, é necessário reconhecer que um modelo incorreto pode gerar resultados falaciosos.

### 3.7.7 Caso de estudo 7: Modelação da fiabilidade de impressoras utilizando algoritmos evolutivos

As impressoras são um dos equipamentos de escritório mais comuns e essenciais nos locais de trabalho atuais. A ocorrência de falhas neste tipo de equipamento causa grandes transtornos através da produção de documentos de baixa qualidade, atrasos na produção e aumento de custos por causa do desperdício e da perda de tempo. Há uma grande variedade de componentes numa impressora, causando vários modos de falha que se manifestam de várias maneiras, incluindo cópias com manchas, papel danificado, alimentação de papel e alinhamento incorretos. A natureza de planos de serviço ou contratos fora de garantia é baseada na análise dos tempos de falha e na modelação da fiabilidade da máquina.

O registo dos dados históricos presentes no anexo 6.9 cobrem o número de cópias nos instantes de falha analisados para os primeiros quatro anos e meio dos vários componentes que constituem uma impressora direccionada para o uso habitual em ambiente de escritório, embora por vezes os dados tenham indicado um nível volumoso de uso. Além disso, os dados históricos da impressora estão incompletos, pois foram apenas incluídos no estudo os componentes

substituídos pelo menos duas vezes durante o ciclo de vida total da impressora, exceto a substituição de materiais consumíveis. Consideraram-se como falhas as cópias com manchas de tinta, o papel amassado durante as cópias, a alimentação de papel insuficiente, o desalinhamento do papel e as marcas indesejadas nas cópias. A resolução destas falhas passou, muitas das vezes, pela substituição de apenas um ou dois componentes da impressora.

A produção de cópias da impressora estudada assenta em duas etapas: transferência da imagem para o papel e posterior colagem da imagem no papel. Esta impressora apresenta um componente designado por *cleaning web* (Blischke & Murthy, 2003, pág.400), colocado junto ao rolo superior de modo a remover a acumulação de resíduos resultantes do *toner*. À medida que a *cleaning web* extraí os resíduos, é desenrolada de forma a expor uma nova seção. A *cleaning web* deve ser substituída, assim que apresente sinais de desgaste de fim de vida.

Este caso de estudo aplicou o algoritmo evolutivo (Michalewicz, 1996) para determinar os modelos de fiabilidade dos vários modos e tempos de falha de uma impressora, fornecendo resultados sobre o ajuste desses modelos, com ênfase na distribuição Weibull. Os modelos incluem a distribuição Weibull de dois e de três parâmetros e conjugações de distribuições Weibull dadas pelo modelo de mistura, modelo de riscos concorrentes, modelo multiplicativo e pelo modelo seccional. Estes modelos são mais complexos do que os estudados na revisão bibliográfica porque o estudo da fiabilidade de um sistema complexo como uma impressora que é composto por diferentes componentes com diferentes modos e efeitos de falhas assim o exige. Os tempos de vida dos componentes considerados são tempos até à falha independentes, uma vez que os componentes foram substituídos quando sofreram danos (não reparáveis). Visto que a impressora que contém esses componentes também sofreu um processo de envelhecimento, as falhas do sistema foram consideradas independentes das falhas dos componentes.

Comparativamente com os métodos tradicionais como os mínimos quadrados e a máxima verossimilhança, o algoritmo evolutivo usado para ajustar os dados aos modelos referidos anteriormente é uma abordagem genérica e, portanto, não requer estimativas iniciais. Uma das vantagens mais relevantes do algoritmo evolutivo é a possibilidade de integrar novos modelos, apenas necessitando da especificação dos parâmetros e da expressão da fiabilidade do componente analisado, neste caso a *cleaning web* de uma impressora. A vantagem prática é que permite comparar facilmente os modelos candidatos e variar o critério de otimização usado no processo de ajuste.

A modelação ao nível do sistema é necessária para determinar os pedidos de intervenção de correção, enquanto que ao nível do componente é necessária para o planeamento de componentes substitutos. Uma análise preliminar permitiu revelar que poucos componentes falharam com frequência suficiente para permitir uma análise e modelação ao nível do componente. A *cleaning web* falhou 15 vezes, enquanto que os rolos de alimentação falharam 11 vezes. Os restantes componentes falharam menos de 10 vezes. Assim, analisaram-se os dados ao nível do sistema, ou seja, considerou-se que existe uma falha quando a impressora não funciona adequadamente e mesmo assim é utilizada, ignorando os componentes específicos que falharam. Posteriormente, foi realizada uma análise ao nível do componente referente à *cleaning web*.

A correlação entre o número de dias (denotado por  $n_t$ ) e o número de cópias entre falhas (denotado por  $n_c$ ) da impressora foi positiva, com  $r = 0,753$ . O número médio de dias entre falhas foi de 41,56, e o número médio de cópias entre falhas foi de 26647. No total, ocorreram 39 falhas no sistema, incluindo 98 falhas nos componentes.

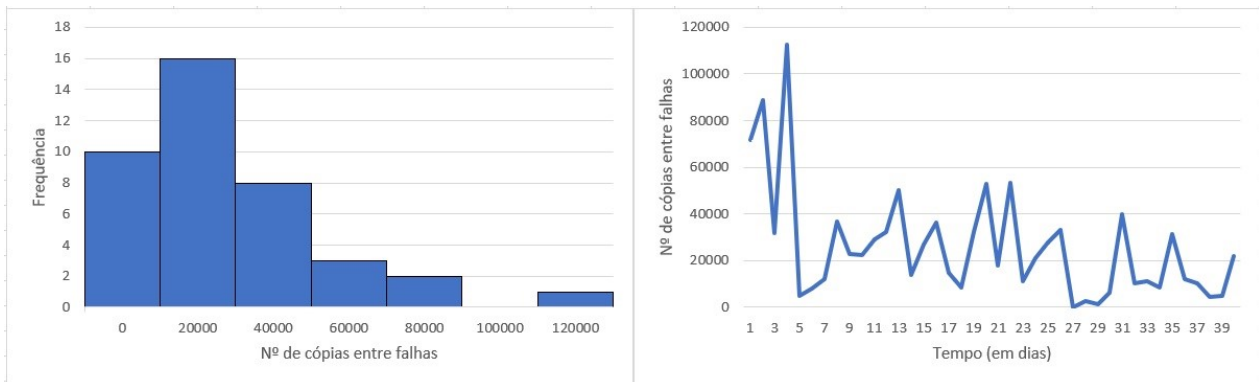


Figura 37 – Número de cópias entre falhas *versus* tempo (dias) e histograma do número de cópias entre falhas

Conforme a Figura 37, o número de cópias entre falhas diminuiu com o tempo e as falhas apareceram de forma mais assídua, pondo em evidência o efeito do processo de degradação da impressora. Também é possível verificar que a cauda do histograma é inclinada para a direita.

No que diz respeito ao tempo entre falhas da impressora indicado na Figura 38, o histograma é um pouco diferente do anterior, indicando uma necessidade de encontrar outros modelos de falha que modelem o número de cópias entre falhas e o tempo entre falhas.

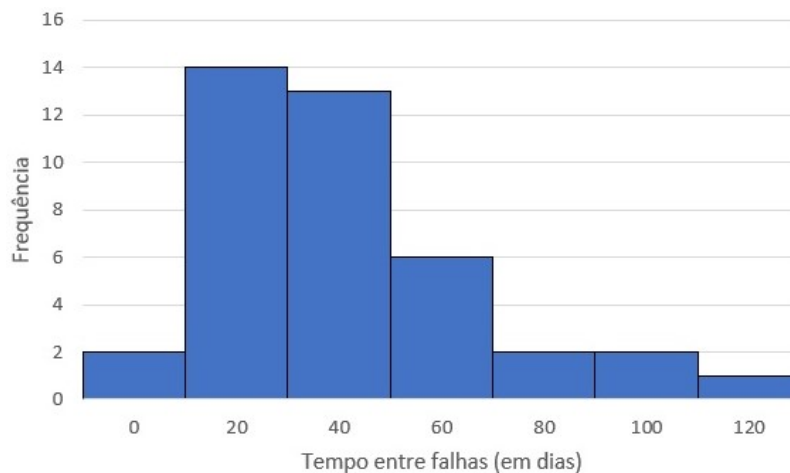


Figura 38 – Histograma do tempo (em dias) entre falhas da impressora

Outra variável de interesse é a média de cópias por período entre falhas da impressora, que pode ser interpretada como o número de cópias entre falhas dividido pelo número de dias entre falhas. O nível médio de utilização entre falhas foi de 670,2 cópias por dia com um desvio padrão de 409,8 cópias por dia. Situado na última barra vertical da Figura 39, observa-se um possível *outlier* provocado por uma gravação incorreta da impressora.

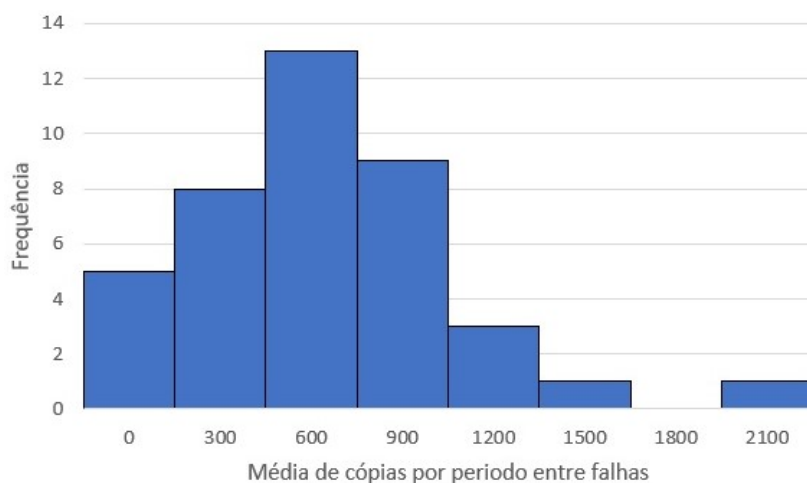


Figura 39 – Histograma da média de cópias por período entre falhas da impressora

A *cleaning web* foi o componente que mais falhas sofreu, como tal, a atenção do caso de estudo debruçou-se mais neste elemento. Observou-se uma forte correlação entre o tempo entre falhas e o número de cópias entre falhas da *cleaning web*, com  $r = 0,916$ . O tempo médio entre falhas foi de 115,1 dias e o número médio de cópias entre falhas foi de 72670. Estes valores são mais elevados comparativamente aos valores do sistema, visto que as falhas da *cleaning web* são um subconjunto das falhas da impressora. Os histogramas contidos na Figura 40 mostram que o tempo entre falhas e o número de cópias entre falhas da *cleaning web* são semelhantes aos restantes componentes da impressora, visto que as caudas dos histogramas estão inclinadas para a direita e o tempo entre falhas diminuiu ao longo do tempo.

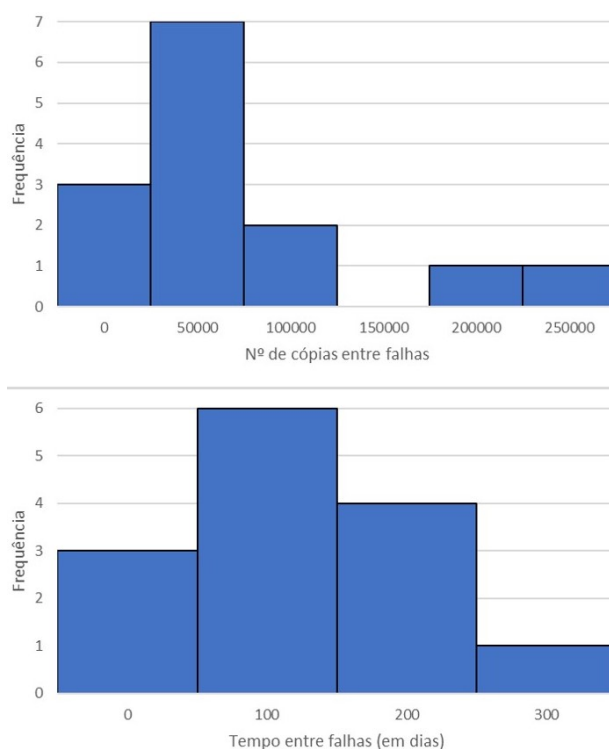


Figura 40 – Histogramas do número de cópias entre falhas e do tempo entre falhas da *cleaning web*

A Figura 41 mostra o histograma do nível de utilização entre falhas da *cleaning web*, em cópias por dia. O nível médio de utilização entre falhas foi de 598,8 cópias por dia com um desvio padrão de 235,8 cópias por dia.

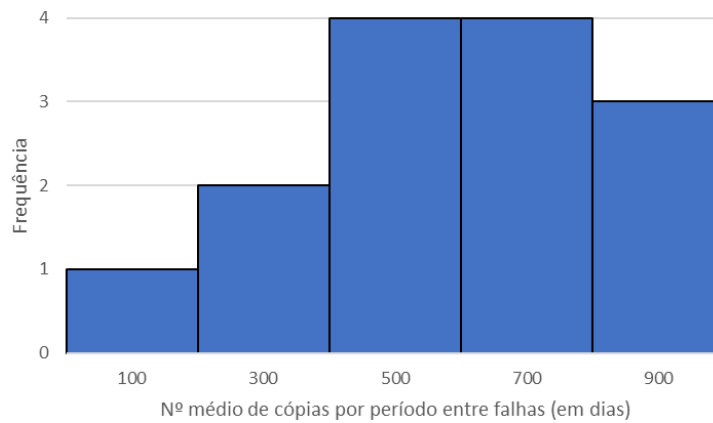


Figura 41 – Histograma do nível de utilização anterior às falhas da *cleaning web*

A estatística descritiva contida nos gráficos observados até ao momento denotam, como seria expectável, uma diminuição da fiabilidade da impressora à medida que esta acumula tempo de uso. A distribuição do número de cópias entre falhas e do tempo entre falhas evidenciou que a família de distribuições Weibull é potencialmente útil para modelar os dados de falha, com utilidade prática direcionada à elaboração de contratos de garantia. Além da distribuição Weibull biparamétrica e triparamétrica, surge o aparecimento de novos modelos não abordados na revisão bibliográfica, como o modelo de mistura, o modelo multiplicativo, o modelo de risco competitivo e o modelo seccional. O modelo de mistura é a combinação de duas distribuições Weibull biparamétricas, cada uma com um processo de falha distinto, resultando num modelo mais complexo composto por cinco parâmetros. Um deles é o parâmetro de mistura, que varia entre zero e um, outros dois são parâmetros de forma e os restantes dois são parâmetros de escala, representados por  $p$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , respetivamente. A função de fiabilidade do modelo de mistura corresponde a:

$$R(t) = p \exp(-(t/\eta_1)^{\beta_1}) + (1 - p) \exp(-(t/\eta_2)^{\beta_2}) \quad (105)$$

Caso os dois processos de falha sejam equivalentes, então obtém-se um modelo com um parâmetro de forma comum, isto é,  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ , convertendo-se num modelo de quatro parâmetros.

O modelo multiplicativo adquire a sua denominação por causa da função de falha, que resulta do produto das funções de falha de duas distribuições Weibull biparamétricas e que dá origem a uma distribuição de quatro parâmetros ( $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ ). Esta distribuição modela um sistema que só falha quando os dois subsistemas que o compõem falharem em simultâneo. A função de fiabilidade do modelo multiplicativo corresponde a:

$$R(t) = 1 - (1 - \exp(-(t/\eta_1)^{\beta_1})) + (1 - \exp(-(t/\eta_2)^{\beta_2})) \quad (106)$$

O modelo de riscos concorrentes possui uma função de fiabilidade formada pelo produto das funções de fiabilidade de duas distribuições Weibull biparamétricas com parâmetros  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , modelando um sistema que falha quando ocorre uma falha num dos dois subsistemas que o compõem. A função de fiabilidade do modelo de riscos concorrentes corresponde a:

$$R(t) = \exp(-(t/\eta_1)^{\beta_1}) \exp(-(t/\eta_2)^{\beta_2}) \quad (107)$$

O modelo seccional é constituído por diferentes distribuições Weibull para períodos de tempo distintos. O modelo seccional genérico apresenta duas distribuições Weibull, envolvendo seis parâmetros, quatro dos quais são independentes.

$$\begin{cases} \exp(-(t/\eta_1)^{\beta_1}), & 0 \leq t \leq t_0 \\ \exp(-((t-\gamma)/\eta_2)^{\beta_2}), & t_0 \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (108)$$

Com  $\gamma = (1 - \beta_2/\beta_1)t_0$ ,  $t_0 = (\eta_1^{\beta_1}((\beta_2/\beta_1)/\eta_2)^{\beta_2})^{1/(\beta_1-\beta_2)}$

A aplicação destes modelos a uma série de conjunto de dados, ajustados pelo algoritmo evolutivo, é dada por Bulmer & Eccleston (1998). Este algoritmo consiste no cálculo iterativo de uma população de parâmetros estimados, ao contrário dos métodos tradicionais que se centram apenas em pontos singulares (Holland, 1975).

Nas seguintes tabelas (da Tabela 44 até à Tabela 47) são dadas as estimativas dos parâmetros de cada modelo para o número de cópias entre falhas e o tempo entre falhas da impressora e da *cleaning web*, acompanhadas pelo respetivo *lof*. O *lof* é a designação para o valor da função objetivo, dado pela soma dos desvios quadrados, que representa a falta de ajuste entre os dados e o modelo ajustado. O modelo de melhor ajuste é destacado em itálico em cada tabela.

A Tabela 44 mostra as estimativas obtidas dos parâmetros pelo ajuste dos modelos através dos mínimos quadrados. Uma combinação de duas distribuições Weibull foi encontrada para dar o menor *lof* possível, também indicado em itálico. Esta combinação indica que estão em jogo dois mecanismos de falha ou que um deles sofre uma mudança brusca num determinado instante. A última causa é a explicação provável para o facto de mais componentes se desgastarem e falharem à medida que a impressora envelhece, tal como foi visto anteriormente pela Figura 37, sugerindo que a grande utilidade do modelo de mistura foi proporcionar um melhor ajuste das falhas que foram separadas por um grande número de cópias.

Tabela 44 – Estimativas dos parâmetros para modelação do número de cópias entre falhas da impressora

<b>Modelo</b>	$\beta_1$	$\beta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\gamma$	$p$	$t_0$	<i>lof</i>
Weibull Biparamétrica	1,261	-	28,219	-	-	-	-	1,050
Weibull Triparamétrica	1,152	-	27,274	-	753,7	-	-	0,712
<i>De mistura</i>	1,380	1,505	44,498	16,831	-	0,478	-	<i>0,544</i>
Multiplicativo	0,353	1,330	11,5	26,700	-	-	-	0,733
Riscos concorrentes	1,262	1,261	61,9	35,784	-	-	-	1,050
Seccional	1,259	1,970	11,6	92,588	123,987	-	219,888	1,050

Relativamente aos tempos entre falhas da impressora e de acordo com a Tabela 45, o modelo multiplicativo provou ser o mais apropriado para representar esses tempos.

Tabela 45 – Estimativas dos parâmetros para modelação dos tempos (em dias) entre falhas do sistema

Modelo	$\beta_1$	$\beta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\gamma$	$p$	$t_0$	$lof$
Weibull Biparamétrica	1,710	-	46,5	-	-	-	-	2,955
Weibull Triparamétrica	1,074	-	36,2	-	8,1	-	-	0,850
De mistura	7,492	2,014	14,2	54,0	-	0,177	-	0,969
Multiplicativo	5,666	1,464	11,5	46,0	-	-	-	0,551
Riscos concorrentes	1,709	1,710	61,9	80,8	-	-	-	2,955
Seccional	14,898	1,079	11,6	36,30	8,0	-	8,6	0,851

É interessante assinalar que o ajuste do modelo Weibull triparamétrico aos tempos entre falhas da impressora não é razoável, embora seja um modelo mais simples do que o multiplicativo. O número de cópias entre falhas da *cleaning web* foi bem ajustado pelo modelo de mistura, como mostra a Tabela 46. Observa-se ainda que a estimativa de  $\beta_1$  é igual a 0,851, estando próxima de 1. Nestas condições, um modelo exponencial simples poderá mais apropriado para representar o início de vida da impressora, enquanto que o modelo Weibull de dois parâmetros pode ser mais adequado para representar o componente após o período inicial de uso.

Tabela 46 – Estimativas dos parâmetros para modelação das cópias entre falhas da *cleaning web*

Modelo	$\beta_1$	$\beta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\gamma$	$p$	$t_0$	$lof$
Weibull Biparamétrica	1,060	-	80,035	-	-	-	-	0,543
Weibull Triparamétrica	1,060	-	80,035	-	0	-	-	0,543
De mistura	0,851	5,230	79,377	67,923	-	0,674	-	0,092
Multiplicativo	11,013	1,060	390,693	80,090	-	-	-	0,543
Riscos concorrentes	0,630	1,266	1046,923	96,110	-	-	-	0,502
Seccional	0,926	1,199	107,232	84,078	3483,4	-	11832,9	0,484

Tal como aconteceu com os tempos entre as falhas do sistema, a Tabela 47 mostra que as falhas da *cleaning web* parecem ser melhor ajustadas pelo modelo multiplicativo. Como a *cleaning web* é o componente com maior frequência de falhas, a concordância com o modelo do tempo entre falhas da impressora é satisfatória.

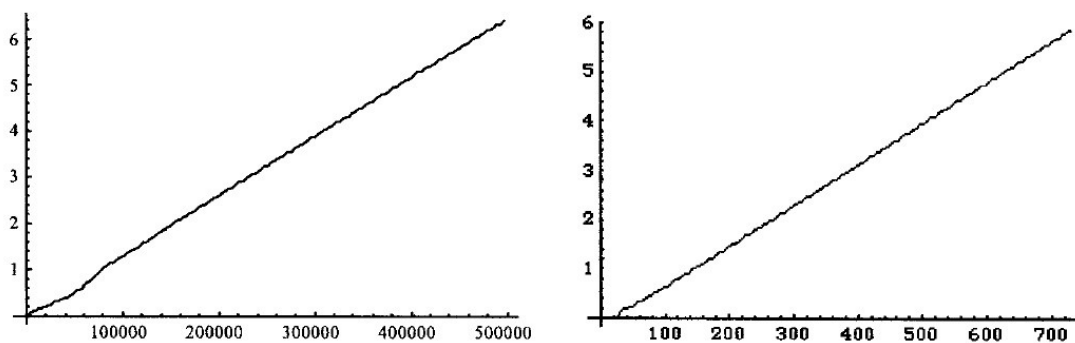
Tabela 47 – Estimativas dos parâmetros para modelação dos tempos (em dias) entre falhas da *cleaning web*

Modelo	$\beta_1$	$\beta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\gamma$	$p$	$t_0$	$lof$
Weibull Biparamétrica	1,481	-	129	-	-	-	-	0,752
Weibull Triparamétrica	0,851	-	100,3	-	23,2	-	-	0,365
De mistura	2,404	2,199	55,0	184,0	-	0,390	-	0,424
Multiplicativo	6,618	1,286	29,0	128,0	-	-	-	0,173
Riscos concorrentes	1,480	1,482	203,0	210,0	-	-	-	0,752
Seccional	3,663	0,988	56,0	103,0	20,2	-	27,7	0,362

A suposição subjacente em todos os modelos até agora é que os tempos entre pedidos de intervenção para a impressora são independentes. Esta é a suposição de um processo de renovação, no qual o sistema caracterizado pela impressora é considerado novo após uma falha. Tal suposição é plausível para componentes individuais, como é o caso da *cleaning web*, que só podem ser substituídos em vez de reparados. No entanto, ao nível do sistema, é provável que as falhas se tornem mais frequentes à medida que a impressora se deteriore, conforme foi visto no gráfico da Figura 37.

Tabela 48 – Estimativas dos parâmetros do modelo multiplicativo e estimativas de erro para os tempos entre falhas do sistema

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\eta_1$	$\eta_2$
Estimativa	5,666	1,464	11,5	46,0
Erro padrão	2,371	0,219	1,6	5,2

Figura 42 – Função de renovação das substituições da *cleaning web* versus o número de cópias (modelo de mistura à esquerda) e ao tempo entre falhas (modelo multiplicativo à direita)

Agora irá ser abordada a forma de como o número esperado de falhas pode ser estimado nestes dois cenários. Como é razoável modelar as substituições da *cleaning web* por um processo de renovação, uma caracterização útil do processo é a função de renovação,  $M(t)$ . A função fornece o número esperado de falhas em  $[0, t)$  e é descrita por uma equação integral

envolvendo a função de falha (Blischke & Murthy, 1994). O grande inconveniente desta equação é que não possui uma solução de forma fechada para as funções de falha, exceto para as mais simples, como a exponencial.

No início da vida da impressora, o componente representado pelo modelo de mistura possui um valor de  $\eta$  reduzido, resultando num mergulho da função de renovação desde que este componente registou  $\beta = 5,23$ . Mais adiante, os componentes tendem a possuir uma função de renovação linear. O mesmo padrão vale para o modelo baseado nos tempos entre falhas.

A função de renovação pode ser usada para estimar o número de componentes necessários durante determinados períodos de tempo. Por exemplo, usando o modelo baseado em nos tempos entre falhas, no primeiro ano estima-se que  $M(365) - M(0) = 2,83$  *cleaning webs* serão necessárias, enquanto que no segundo ano  $M(2 \cdot 365) - M(365) = 5,87 - 2,83 = 3,04$  *cleaning webs* serão necessárias para que a impressora funcione. Da mesma forma, a função de renovação estima que, nas primeiras 100000 cópias, serão substituídas 1,29 *cleaning webs*, enquanto que na segunda série de 100000 cópias, serão necessárias 1,32 *cleaning webs*. A Tabela 49 mostra a estimativa do número de *cleaning webs* substituídos ao longo dos próximos anos.

Tabela 49 – Estimativas de substituições de *cleaning webs* nos próximos 10 anos

Ano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de <i>Cleaning Webs</i> Estimadas	2,83	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04

Pode-se assumir as falhas da impressora como sendo um processo pontual não estacionário. A Figura 43 resume as falhas do sistema, representando o número de falhas em relação ao tempo. O gráfico contido na figura é uma função “degrau”, que aumenta uma unidade em cada momento de falha. Se os tempos entre as falhas forem independentes de uma distribuição exponencial, esse gráfico deverá seguir aproximadamente uma linha reta. Ao invés disso, a linha do gráfico é curva, com a seção mais íngreme correspondendo a tempos mais curtos entre falhas, sugerindo que geralmente as falhas tornam-se mais frequentes com a idade.

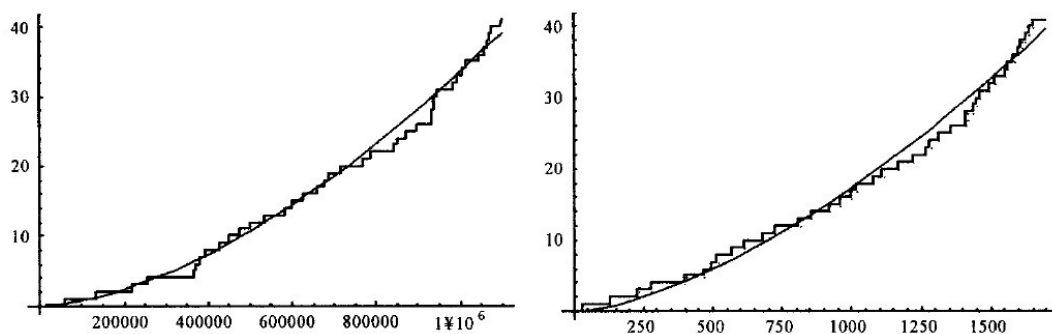


Figura 43 – Processo pontual para as falhas da impressora (número de cópias, à esquerda, e tempos entre falhas, à direita) com ajustes da função de potência

A curva da função “degrau” pode ser modelada usando a função de potência que se segue:

$$\Lambda(t) = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} \quad (109)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$  que constituem a função potência foram determinados pelo método dos mínimos quadrados. Os valores dos parâmetros estimados referentes ao tempo em números de cópias foram  $\alpha = 1,64$  e  $\beta = 157,5$ . Relativamente ao tempo medido em dias, os valores dos parâmetros estimados foram  $\alpha = 1,55$  e  $\beta = 157,5$ . A Figura 43 mostra as funções de potência ajustadas obtidas pelo método referido e são usadas de forma direta para estimar o número esperado de falhas em intervalos de tempo especificados. Neste caso de estudo, espera-se que existam  $\Lambda(365) - \Lambda(0) = 3,7$  falhas no ano seguinte ao estudo e passado mais um ano espera-se que haja  $\Lambda(2 \cdot 365) - \Lambda(365) = 10,8 - 3,7 = 7,1$  falhas.

A função potência derivada corresponde à função de intensidade estimada  $\lambda(t) = \Lambda'(t)$ , dando o número esperado de falhas por unidade de tempo. Na Figura 44 estão presentes as funções de intensidade representadas *versus* tempo em número de cópias e em dias. Ambas as funções indicam um aumento constante na taxa de falhas do sistema ao longo da vida da impressora, embora com um abrandamento relativo. A Tabela 50 mostra uma série de previsões semelhantes à da Tabela 49.

Tabela 50 – Estimativas de pedidos de intervenção nos próximos 10 anos

Ano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Estimativas de pedidos de intervenção	3,7	7,1	9,4	11,3	13,0	14,6	16,0	17,3	18,5	19,7

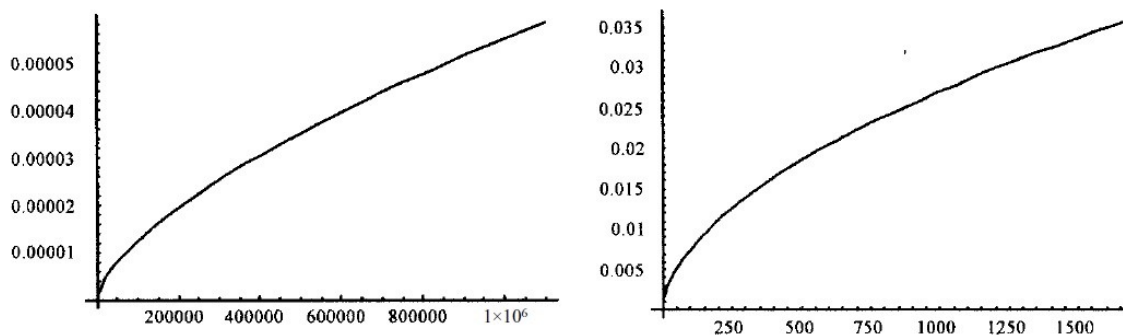


Figura 44 – Funções de intensidade estimadas para o número de cópias (à esquerda) e o tempo entre falhas (à direita)

Além das previsões dadas na Tabela 50, os modelos Weibull para os tempos entre falhas podem ser usados para descrever o processo de falha de várias maneiras. Considerando o modelo multiplicativo para os tempos entre falhas da *cleaning web*, este prevê um tempo médio entre falhas de 120,1 dias com um desvio padrão de 90,2 dias. A função de falha também pode ser usada para fazer previsões de *stocks*. Por exemplo, supondo que um fornecedor de serviços encarregado do funcionamento de uma única impressora pretenda manter um *stock* mínimo sem deixar que os tempos de serviço se alterem, pode ser utilizado um critério que permita especificar a disponibilidade de substituição da *cleaning web* ao fim de 95% do tempo. A função de falha do modelo ajustado mostrou que a possibilidade de um tempo entre falhas menor que 26 dias é de cerca de 5%. Assim, se um fornecedor de manutenção puder reabastecer as *cleaning webs* num prazo de 26 dias após a substituição de uma, o cliente só ficará à espera de uma peça por 5% do tempo. Este tipo de análise é um dos principais objetivos da modelação dos tempos entre falhas. Assim, o modelo ajustado pode ser usado para responder a uma ampla gama de perguntas sobre prováveis resultados futuros.

Em tom de conclusão, o algoritmo evolutivo provou ser um método útil para ajustar a gama de distribuições abordadas ao conjunto de falhas observadas, de forma a decidir o modelo mais apropriado, tendo em conta o valor do *lof*. É mais moroso que os métodos de otimização tradicionais, contudo a sua robustez é desejável para um sistema geral de ajuste de modelos.

# CONCLUSÕES

- 4.1 Conclusões
- 4.2 Contribuição do trabalho
- 4.3 Proposta de trabalhos futuros



## 4 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

### 4.1 Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo a análise de dados estatísticos que geram a criação de valor nas organizações e qual o modelo que melhor se ajusta aos tempos de vida dos ativos das empresas. Foi possível verificar que a vida útil dos ativos vai muito além dos seus tempos de vida, podendo variar mediante vários critérios a ter em conta, como a idade operacional, o nível de utilização, o processo de degradação, as condições do ambiente industrial onde estão inseridos e as políticas de manutenção. A atenção voltada para estes aspetos viabiliza estimativas dos tempos de vida útil dos ativos mais próximas da realidade, propiciando maiores níveis de desempenho e gerando maiores lucros, criando valor nas organizações.

De acordo com o estudo realizado, não existe uma resposta direta para a primeira questão de investigação sobre o modelo que melhor se ajusta aos tempos de vida dos ativos nas empresas. A partir das análises estatísticas realizadas não foi possível perceber o modelo que mais se tenha destacado entre os demais, devido ao estudo bastante homogêneo efetuado para as quatro distribuições abordadas. A principal razão para essa homogeneidade foi, como é óbvio, a comparação das distribuições aplicando os mesmos métodos de estimação e os mesmos modos de gerar falhas aleatórias. Assim, a escolha da distribuição mais representativa de um ativo deve ser baseada nos critérios tidos em conta no primeiro parágrafo. Tanto a distribuição Weibull, como a distribuição exponencial, normal ou lognormal podem ser as mais preferíveis numa certa situação, dependendo do contexto operacional em que se encontram os ativos. No entanto pode-se afirmar com firmeza que a distribuição Weibull foi o modelo mais relevante, cuja presença destacou-se praticamente por toda a literatura acerca do tema tratado. É um modelo versátil pois, mediante a variação do valor do parâmetro de forma, permite transformá-lo em outros tipos de modelos de fiabilidade. Assim é um modelo que se adapta facilmente a qualquer tipo de dados, quer sejam tempos de vida ou de falhas em sistemas reparáveis ou não reparáveis, ou quer haja completa ausência de censura ou bastante influência de censura.

Para além das conclusões com alusão às respostas das questões de investigação, observou-se ainda que a análise de um conjunto completo de tempos permitiu estimações e intervalos de confiança com maior exatidão do que a análise de um número limitado de falhas, que se mostrou menos competente no que toca à precisão dos valores das estatísticas descritivas dos estimadores dos parâmetros, devido ao reduzido número de tempos de falha considerados. No entanto, esta última análise torna-se uma alternativa simples e razoável para um número de falhas superior a cinco, quando não existe um histórico de dados aprofundado. Ainda assim não

é de todo recomendável realizar análises tendo como objeto de estudo apenas as duas primeiras falhas do ativo, visto que os resultados estatísticos estiveram muito afastados dos supostos.

## 4.2 Contribuição do trabalho

Uma das contribuições deste trabalho foi a retenção de um vasto conhecimento sobre os modelos de fiabilidade que proporcionam superioridade em relação às empresas que não possuem ferramentas adequadas para compreender a vida útil dos seus ativos, pois é este período em que se obtém proveito dos ativos. Outro aspeto que ajudou na retenção do conhecimento, foi a utilidade da simulação permitir criar vários cenários e obter diferentes resultados para detetar anomalias e decidir as melhores soluções aos problemas que se assemelham a situações da vida real, algo que permanece em falta quando se fala em aprendizagem no local de trabalho.

## 4.3 Proposta de trabalhos futuros

Uma proposta de trabalho futuro poderá passar pela análise de outros modelos de fiabilidade, para além dos abordados, como a distribuição gama, a distribuição de valor extremo, a distribuição Rayleigh, modelos de Markov (aplicados a sistemas reparáveis) e modelo de Crow (taxa de avarias não constante). Uma vez que estes modelos possuem parâmetros diferentes dos que foram estimados, poderão ser utilizados outros métodos de estimação.

Além do mais, outras propostas de trabalhos futuros poderão englobar os seguintes temas:

- Análise estatística de distribuições que incluam tempos de falha censurados;
- Efetuar simulação e posterior análise estatística através de suplementos do *excel*, como o SigmaXL e o DiscoverSim, ou a partir de outros *softwares* como o SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*);
- Exploração de modelos aplicados aos recursos humanos/análise de sobrevivência aplicada aos recursos humanos (tempos até à demissão);
- Análise do tempo de vida de empresas baseada em modelos aplicados à economia/análise de sobrevivência aplicada ao mundo empresarial (tempos até à falência);
- Análise de modelos no apoio à decisão na área da fiabilidade/manutenção.

**BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES  
DE INFORMAÇÃO**



## 5 BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

- Abernethy, R. B. (2006). *The New Weibull Handbook* (5ª edição). North Palm Beach, Florida: Publicado pelo autor.
- Abernethy, R. B., Breneman, J. E., Medlin, C. H., & Reinman, G. L. (1983). *Weibull Analysis Handbook*. West Palm Beach, Florida: Air Force Wright Aeronautical Laboratories.
- AER Worldwide. (2016). Top Ten Reasons Why Asset Management is Important. Retrieved June 14, 2018, from <https://www.aerworldwide.com/top-ten-reasons-why-asset-management-is-important/>
- Baker, R. D., & Wang, W. (1991). Determining the delay time distribution of faults in repairable machinery from failure data. *Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, 3, 259–282.
- Baker, R. D., & Wang, W. (1993). Developing and testing the delay time model. *Journal of the Operational Research Society*, 44, 361–374.
- Barlow, R. E., & Hunter, J. (1961). Optimal preventive maintenance policies. *Operations Research*, 8, 90–100.
- Bartholomew, D. J. (1957). A problem in life testing. *Journal of the American Statistical Association*, 52, 350–355.
- Bentley, J. P. (1993). *An Introduction to Reliability and Quality Engineering*. Longman Scientific & Technical.
- Bertling, L. (2002). *Reliability Centred Maintenance for Electric Power Distribution Systems*. Royal Institute Technology.
- Bertling, L., Allan, R., & Eriksson, R. (2003). *A reliability-centred asset maintenance method for assessing the impact of maintenance in power distribution systems*.
- Blischke, W. R., & Murthy, D. N. P. (1994). *Warranty Cost Analysis*. New York: Marcel Dekker.
- Blischke, W. R., & Murthy, D. N. P. (2000). *Reliability: Modeling, Prediction, and Optimization*. New York: Wiley.
- Blischke, W. R., & Murthy, D. N. P. (2003). *Case Studies in Reliability and Maintenance*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Bulmer, M., & Eccleston, J. A. (1998). Automated reliability modelling with a genetic algorithm. In *6th International Applied Statistics in Industry Conference* (pp. 1–8). Melbourne.
- Chorley, E. (1998). *Field Data—A Life Cycle Management Tool for Sustainable Inservice Support*. University of Exeter, UK.
- Christer, A. H., Wang, W., Choi, K., & Sharp, J. (1998). Modelling the preventive maintenance element of total productive maintenance: imperfect PM with incomplete repair. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, 9, 355–380.

- Christer, A. H., Wang, W., Sharp, J., & Baker, R. D. (1997). *A Stochastic Modelling Problem of High-Tech Steel Production*. Berlin: Springer.
- Christodoulou, S., & Et al. (2009). Risk-based asset management of water piping networks using neuro-fuzzy systems. *Science Direct*, 33(2).
- Coelho, R. (2015). *Aplicação do conceito de gestão de ativos físicos numa estação elevatória de águas*. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- Collet, D. (1994). *Modelling Survival Data in Medical Research*. London: Chapman & Hall/CRC.
- Colton, T. (1979). *Statistica in Medicine* (First Ital). Padova: Piccin Editore.
- Crow, L. H. (1974). Reliability analysis for complex, repairable systems. *Reliability and Biometry*, 13(6), 379–410.
- Davis, D. J. (1952). An analysis of some failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 47, 113–150.
- Davis, R. (2015). *An Introduction to Asset Management*. Capenhurst, Chester.
- El-Akruti, K. (2012). *The Strategic Role of Engineering Asset Management in Capital Intensive Organizations*. University of Wollongong.
- Elsayed, E. A. (1996). *Reliability Engineering*. Reading, MA: Addison-Wesley-Longman.
- Energy, U. (2015). Asset High Risk of Failure Assessment. No. UE PL 2044.
- Epstein, B. (1951). The Exponential Distribution and its Role in Life Testing, 20.
- Ferreira, L. A. (2012). Maintenance and Asset Management: Two Sides of the Same Coin?
- Fogliatto, F. S., & Ribeiro, J. L. R. (2011). *Fiabilidade e Manutenção Industrial*. São Paulo: Elsevier Editora Ltda.
- Hahn, G. J., & Meeker, W. Q. (1982). Pitfalls and practical considerations in product life analysis, part 2: mixtures of product populations and more general models. *Journal of Quality Technology*, 14, 177–185.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Ibarra, S., & Konet, R. R. (1994). *Life assessment of 1¼Cr-½Mo steel catalytic performer furnace tubes using the MPC omega method. Service Experience and Reliability Improvement: Nuclear, Fossil, and Petrochemical Plants* (Vol. 288).
- IBM Global Business Services. (2007). The evolution of Asset Management – Finding the Right Best Practice is Not All Theory.
- Jeng, S. L., & Meeker, W. Q. (2001). Parametric simultaneous confidence bands for cumulative distributions from censored data. *Technometrics*, 43, 450–461.
- Jia, X. (2000). *OR Modelling within RCM Context*. Salford University, UK.
- Jiang, R., & Murthy, D. N. P. (1995). Reliability modelling involving two Weibull distributions. *Reliability Engineering and System Safety*, 47, 187–198.
- Kahn, H. A., & Sempos, C. T. (1989). *Statistical Methods in Epidemiology*. New York: Oxford

University Press.

- Kaplan, E. L., & Meier, P. (1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations  
Author ( s ): E . L . Kaplan and Paul Meier Source : Journal of the American Statistical  
Association , Vol . 53 , No . 282 ( Jun . , 1958 ) , pp . 457- Published by : American Statistical  
Association Sta. *American Statistical Association*, 53(282), 457–481.  
<https://doi.org/10.2307/2281868>
- Kaplan, E. L., & Norton, D. P. (2004). *Mapas estratégicos: convertendo ativos intangíveis em resultados tangíveis*. (Editora Campus, Ed.). Rio de Janeiro.
- Kayo, E. K. (2002). *A estrutura de capital e o risco das empresas tangível e intangível-intensivas: uma contribuição ao estudo da valoração de empresas*. Universidade de São Paulo.
- Kececioglu, D. B. (2002). *Reliability & Life Testing Handbook, Volume 1*. DEStech Publications, Inc.
- Kleinbaum, D. G. (1996). *Survival Analysis: A Self-Learning Text*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Knezevic, J. (1995). *Introduction to Reliability, Maintainability and Supportability*. New York: Mc-Graw-Hill.
- Knotts, R. (1996). *Analysis of the Impact of Reliability, Maintainability and Supportability on the Business and Economics of Civil Air Transport Aircraft Maintenance and Support*  
*Analysis of the Impact of Reliability, Maintainability and Supportability on the Business and Ec.*  
University of Exeter, UK.
- Lamberson, L. R., & Kapur, K. C. (1977). *Reliability in Engineering Design*. John Wiley and Sons, Inc.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical models and methods for life-time data*. John Wiley & Sons, Inc.
- Lev, B. (2001). *Intangibles: Management, Measurement and Reporting*. Washington DC: The Brookings Institution Press.
- Lieblein, J., & Zelen, M. (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings. *Journal Of Research Of The National Bureau Of Standards*, 57(5), 273–316.  
<https://doi.org/10.6028/jres.057.033>
- Life Cycle Engineering. (2010). Risk-Based Asset Management (RBAM®). Retrieved June 14, 2018, from <https://www.lce.com/RiskBased-Asset-Management-209.html>
- Marco, V. S. (2013). Gestão de ativos e a PAS 55: um novo paradigma? *Revista Manutenção*, 50–54.
- Martins, M. E. G. (2006). *Introdução à Inferência Estatística*. Departamento de Estatística e Investigação Operacional.
- May, I. L., da Silveira, T. L., & Vianna, C. H. (1996). Criteria for the evaluation of damage and remaining life in reformer furnace tubes. *International Journal Pressure Vessels and Piping*, 66, 233–241.
- Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Michalewicz, Z. (1996). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. (Springer-Verlag, Ed.) (3rd editio). New York.

- Miller, R. G. (1998). *Survival Analysis*. Wiley Classics Library.
- Mojtahedzadeh, R., & Arumugam, C. V. (2011). Determinants of TQM in the Iranian automotive industry: A theoretical approach. *International Journal for Quality Research*, 5, 21–32.
- Morais, M. C. (2007). *Fiabilidade e Controlo de Qualidade: Notas de apoio* (Secção de Estatística e Aplicações).
- Moubray, J. (1997a). *Reliability-centered Maintenance* (Second Ed.). New York: Industrial Press Inc.
- Moubray, J. (1997b). *Reliability Centred Maintenance*. Woburn, MA: Butterworth-Heinemann.
- Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing*. New York: Wiley.
- Nicola, S., Ferreira, E. P., & Ferreira, J. J. P. (2012). A novel framework for modeling value for the customer, an essay on negotiation. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 11(03), 661–703. <https://doi.org/10.1142/S0219622012500162>
- Nicola, S., Ferreira, E. P., & Ferreira, J. J. P. (2015). Assets management - a conceptual model decomposing value for the customer and a quantitative model Assets management - a conceptual model decomposing value for the customer and a quantitative model. *International Journal for Quality Research, ISSN 1800-6450*, 9(1), 89–106.
- Nowlan, F. S., & Heap, H. F. (1978). *Reliability-Centered Maintenance*. San Francisco, California.
- Proschan, F. (1963). Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, 5, 375–383.
- R Development Core Team. (2008). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. <https://doi.org/ISBN 3-900051-07-0>
- Ramos, S. (2017). *Slides das aulas teóricas da unidade curricular de FIAMA*. Porto.
- Schneider, J., Gaul, A. J., Neumann, C., Hogräfer, J., Wellßow, W., Schwan, M., & Schnettler, A. (2006). Asset management techniques. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 28(9 SPEC. ISS.), 643–654. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2006.03.007>
- Shooman, M. L. (1968). Probabilistic Reliability: an Engineering Approach, 8.
- Stewart, T. A. (1997). *A Intellectual Capital: The New Wealth of Organizations*. New York: Doubleday.
- Sveiby, K.-E., Linard, K., & Dvorsky, L. (2002). Building a Knowledge-Based Strategy A System Dynamics Model for Allocating Value Adding. *Knowledge Creation Diffusion Utilization*, 1–23.
- Szklo, M., & Nieto, F. J. (2000). *Epidemiology: Beyond the Basics*. Annapolis: Aspen Publishers.
- Vardhan, R., & Balaswamy, S. (2016). *Transmuted New Modified Weibull Distribution*. Mathematical Sciences and Applications E-Notes.
- Zhang, X., & Gockenbach, E. (2008). Reliability Centered Asset Management for Power Distribution Systems. In *Conference Record of the 2008 IEEE International Symposium*. Institute of Electric Power Systems.

# ANEXOS

- 6.1 Restantes tabelas dos valores médios das estimativas de  $\beta$  e  $\eta$
- 6.2 Restantes gráficos das estimativas de  $\beta$  para as primeiras  $n$  falhas
- 6.3 Restantes gráficos das estimativas de  $\eta$  (constante) para as primeiras  $n$  falhas
- 6.4 Restantes intervalos de confiança para vários valores de  $\beta$  (todas as falhas)
- 6.5 Restantes intervalos de confiança para  $\eta=10000$  u.t (todas as falhas)
- 6.6 Restantes códigos R utilizados
- 6.7 Tempos de falha e tempos de vida do caso de estudo 1
- 6.8 Estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull (caso de estudo 4)
- 6.9 Dados de falhas da impressora do caso de estudo 7



## 6 ANEXOS

### 6.1 Restantes tabelas dos valores médios das estimativas de $\beta$ e $\eta$

Nº de falhas	$\beta$ teórico	$E(\hat{\beta})$ (MLE)	$E(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$E(\hat{\eta})$ (MLE)	$E(\hat{\eta})$ (MRR)
2	2,0	21,584	11,379	20000	19256	20438
5	2,0	2,949	2,385	20000	19630	19921
8	2,0	2,469	2,178	20000	19901	20063
10	2,0	2,336	2,120	20000	19778	19872

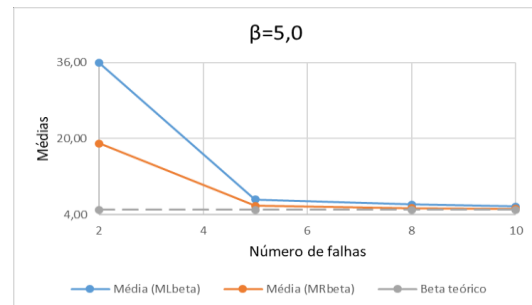
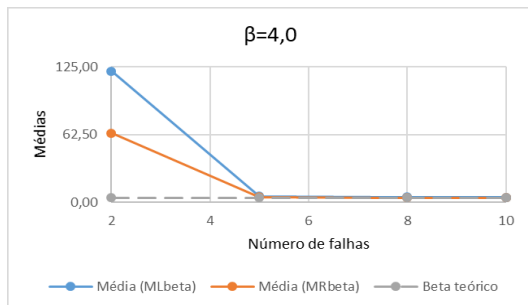
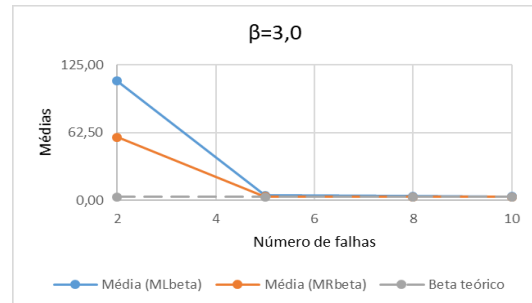
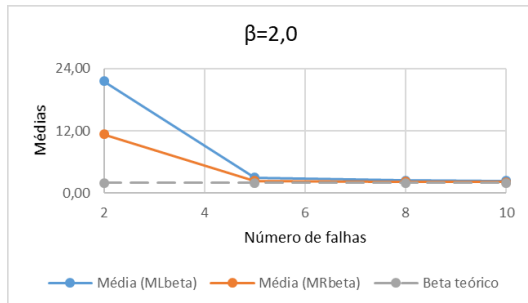
Nº de falhas	$\beta$ teórico	$E(\hat{\beta})$ (MLE)	$E(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$E(\hat{\eta})$ (MLE)	$E(\hat{\eta})$ (MRR)
2	3,0	110,240	58,121	20000	19083	19909
5	3,0	4,318	3,4875	20000	19719	19918
8	3,0	3,692	3,183	20000	19730	19859
10	3,0	3,485	3,135	20000	19884	19950

Nº de falhas	$\beta$ teórico	$E(\hat{\beta})$ (MLE)	$E(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$E(\hat{\eta})$ (MLE)	$E(\hat{\eta})$ (MRR)
2	4,0	120,990	63,790	20000	19048	19664
5	4,0	5,679	4,659	20000	19638	19770
8	4,0	4,886	4,274	20000	19743	19826
10	4,0	4,635	4,160	20000	19914	19977

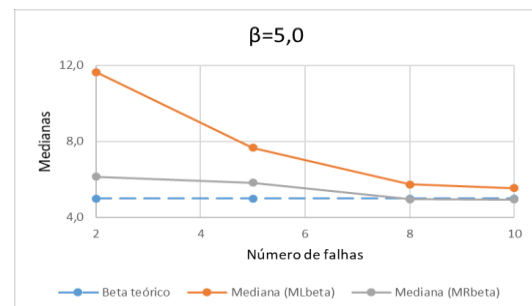
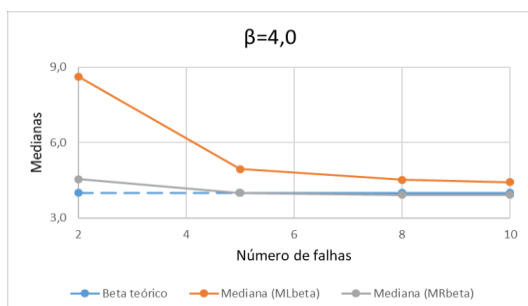
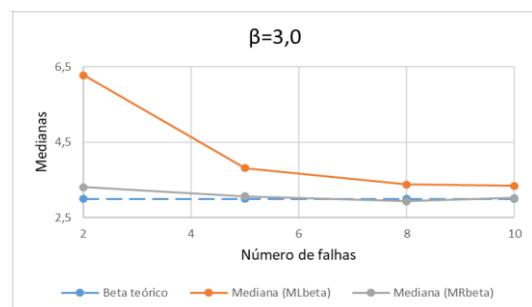
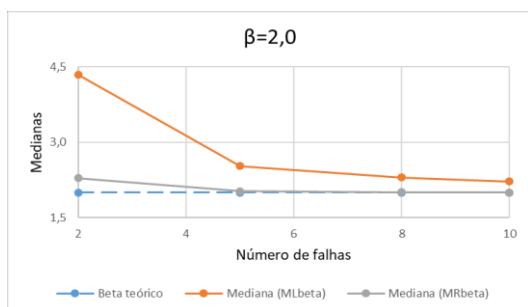
Nº de falhas	$\beta$ teórico	$E(\hat{\beta})$ (MLE)	$E(\hat{\beta})$ (MRR)	$\eta$ teórico	$E(\hat{\eta})$ (MLE)	$E(\hat{\eta})$ (MRR)
2	5,0	35,947	18,9523	20000	19259	19729
5	5,0	7,167	5,826	20000	19787	19896
8	5,0	6,118	5,346	20000	19883	19945
10	5,0	5,748	5,199	20000	19889	19937

## 6.2 Restantes gráficos das estimativas de $\beta$ para as primeiras $n$ falhas

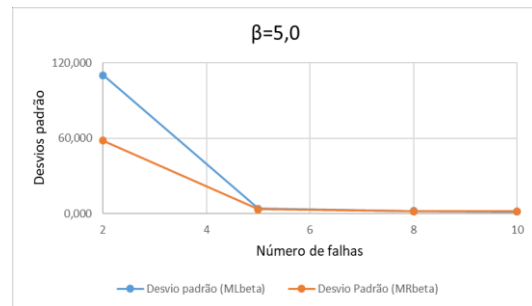
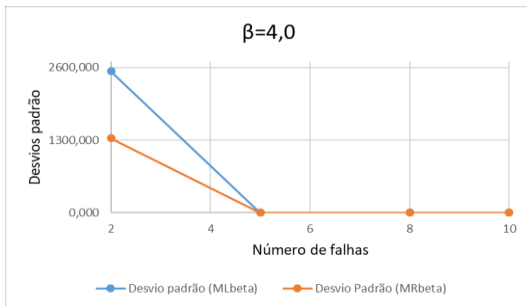
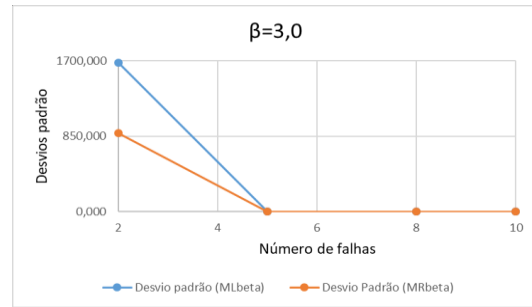
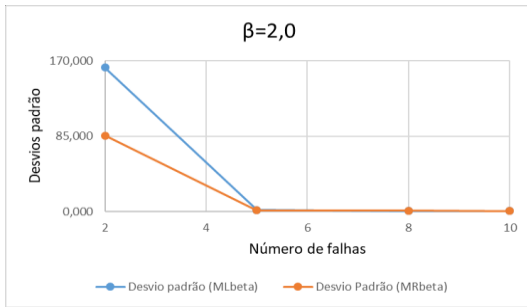
### 6.2.1 Valores médios



### 6.2.2 Valores medianos

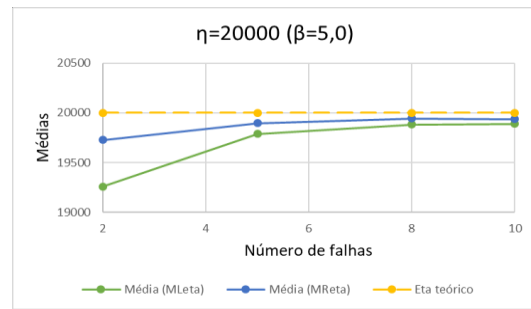
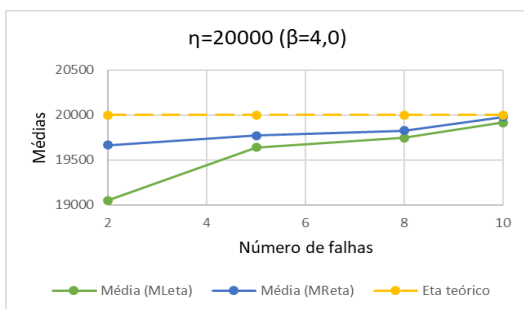
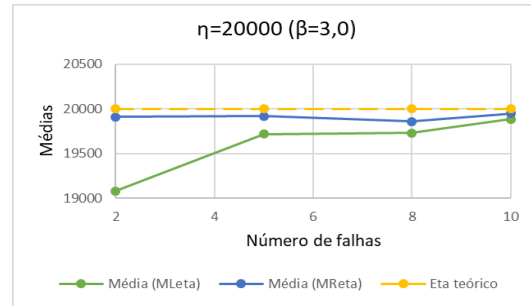
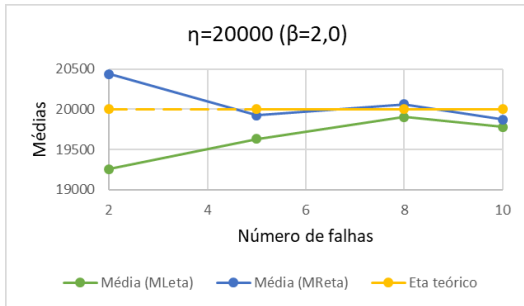


### 6.2.3 Desvios padrão

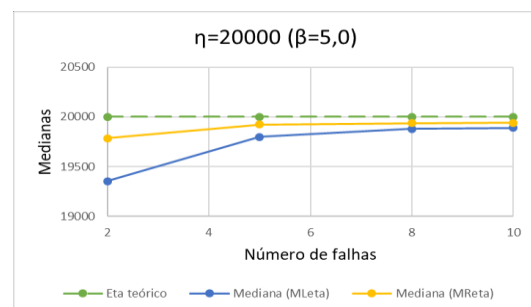
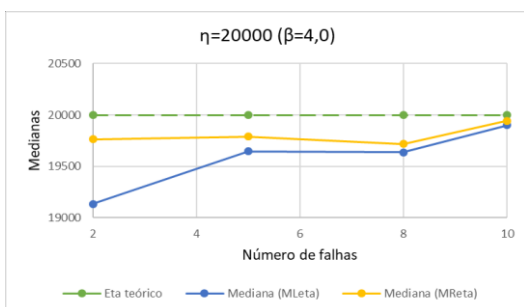
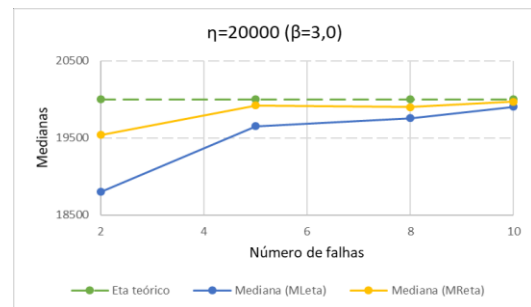
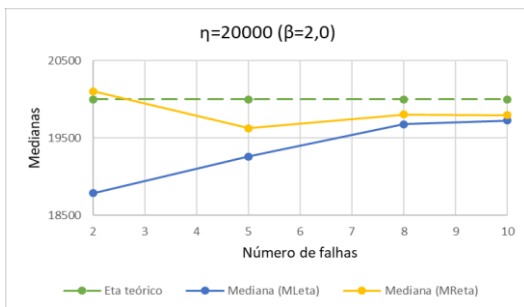


### 6.3 Restantes gráficos das estimativas de $\eta$ (constante) para as primeiras $n$ falhas

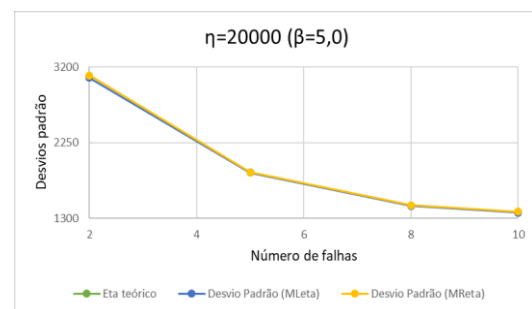
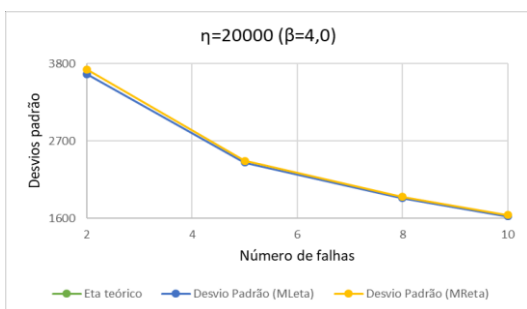
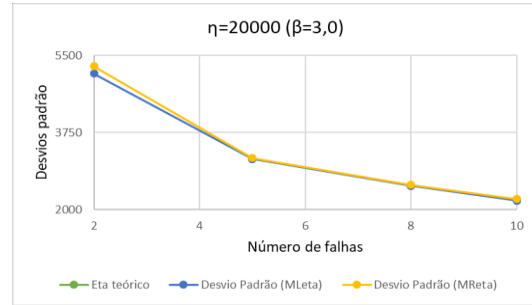
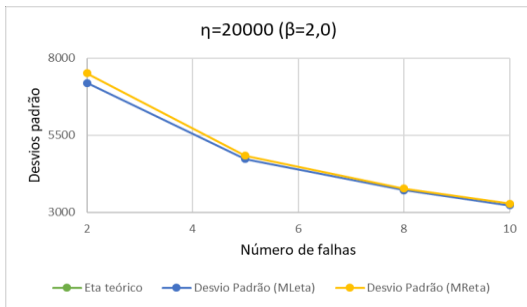
#### 6.3.1 Valores médios



#### 6.3.2 Valores medianos

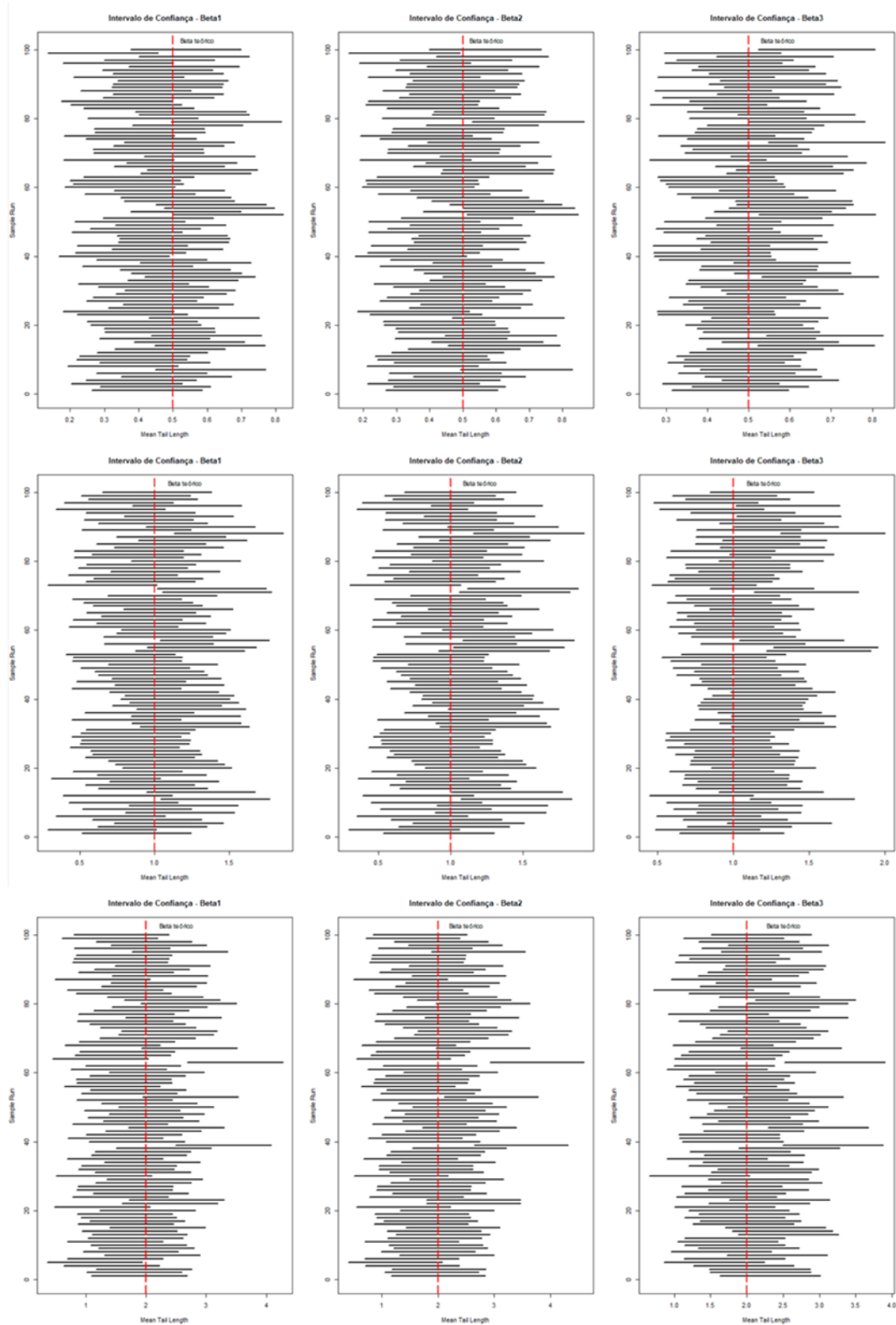


### 6.3.3 Desvios padrão

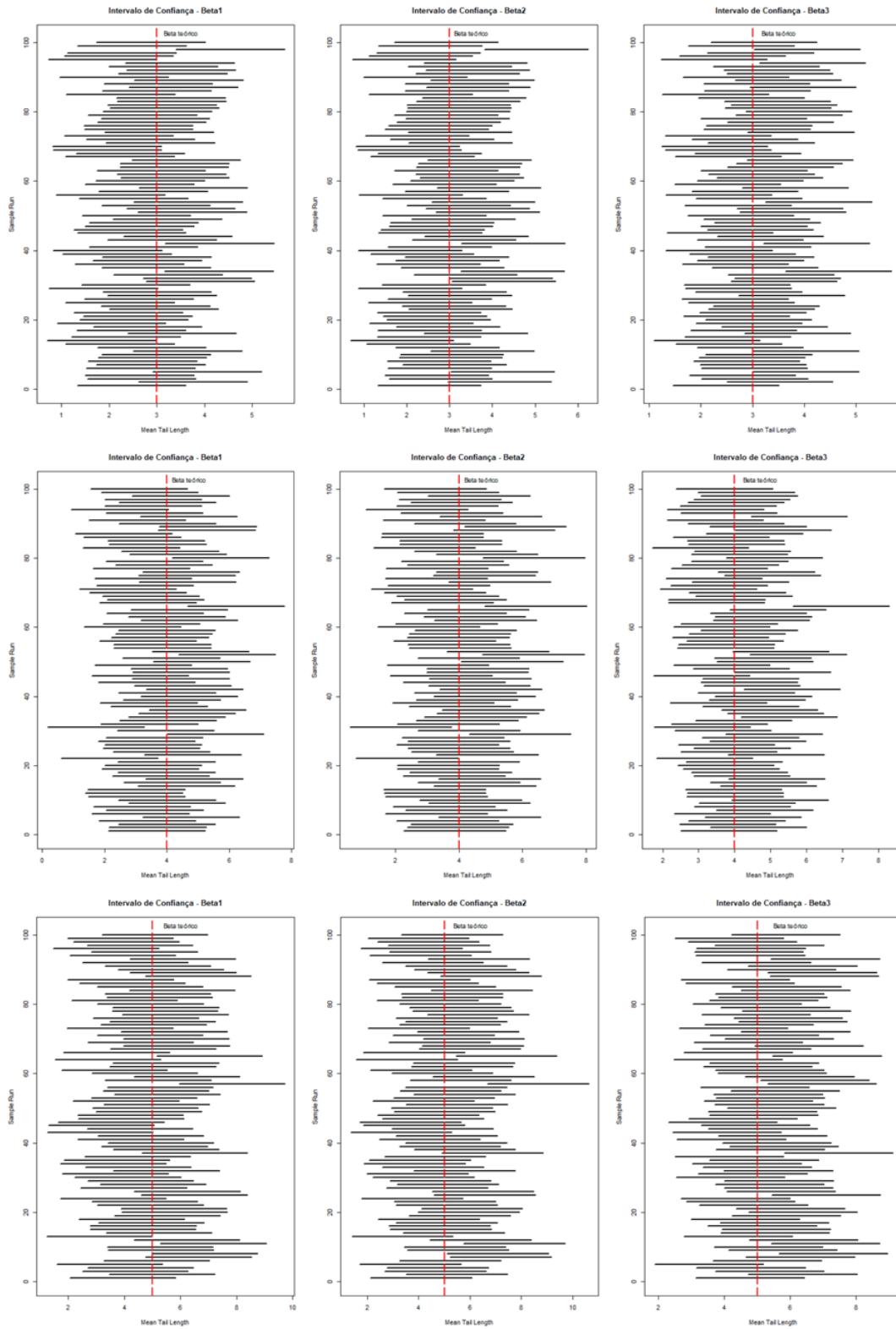


## 6.4 Restantes intervalos de confiança para vários valores de $\beta$ (todas as falhas)

Para  $\beta = 0,5$ ;  $\beta = 1$  e  $\beta = 2$

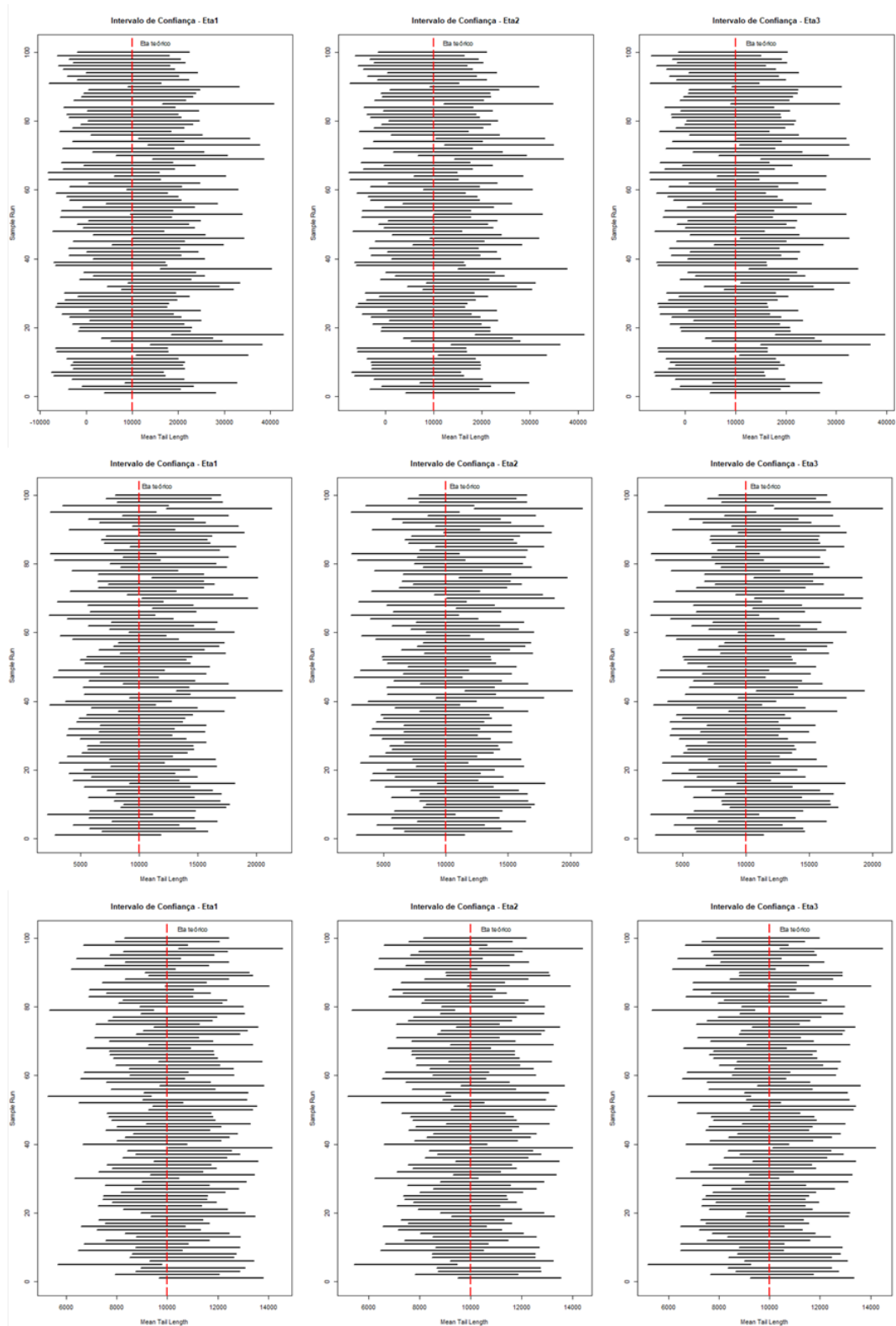


Para  $\beta = 3$ ;  $\beta = 4$  e  $\beta = 5$ :

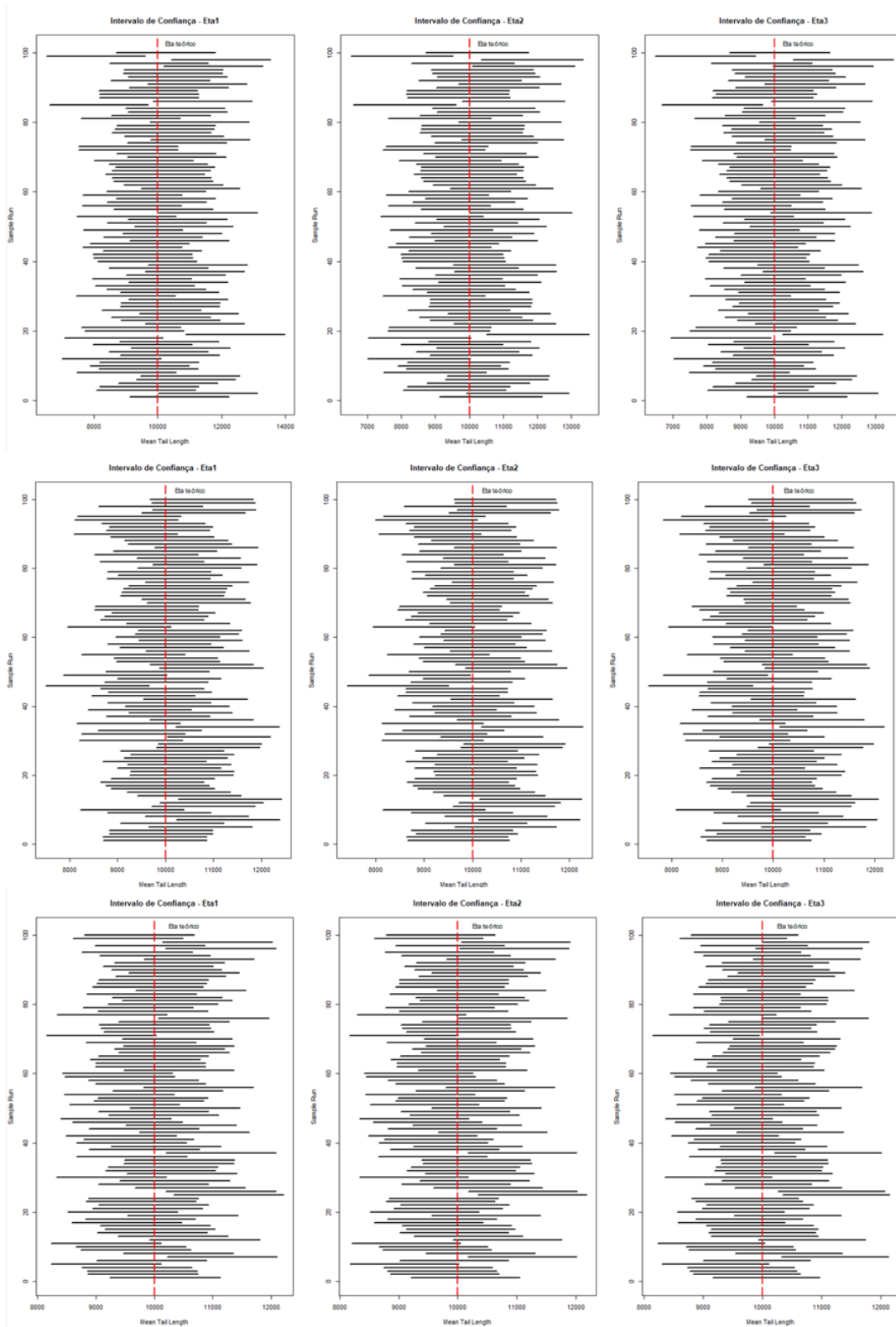


## 6.5 Restantes intervalos de confiança para $\eta = 10000$ u. t (todas as falhas)

Para  $\beta = 0,5$ ;  $\beta = 1$  e  $\beta = 2$ :



Para  $\beta = 3$ ;  $\beta = 4$  e  $\beta = 5$ :



## 6.6 Restantes códigos r utilizados

### 6.6.1 Código dos tempos da distribuição Weibull (sem censura):

```
Res=matrix (nrow=6, ncol=4)
Res2=matrix (nrow=6, ncol=4)
Res3=matrix (nrow=6, ncol=4)
Res4=matrix (nrow=6, ncol=4)
colnames(Res)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
colnames(Res2)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
colnames(Res3)=c("Média", "Viés", "Desvio Padrão", "EQM")
colnames(Res4)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
beta=seq(0.1,4,by=0.1)
sam=c(25, 100, 500, 1000, 2000, 5000)
A=matrix(nrow=1000, ncol=4)
MLE=matrix(nrow=1000, ncol=2)
colnames(A)=c("r.squared", "intercept", "slope", "beta")
eta=5000
for (i in 1:6){
  for (j in 1:1000){
    w=rweibull (sam[i],beta[10],eta)
    x=log (w)
    s=seq (1,sam[i],by=1)
    f=(s-0.3)/(sam[i]+0.40)
    y=log(-log(1-f))
    x=sort (x)
    plot(x,y, xlab="ln(Ti)",ylab="Fi",main="Método Mínimos Quadrados")
    abline(lm(y~x), col="red")
    regression.line=lm(y~x)
    a=c(summary(regression.line)$r.squared,regression.line$coefficients[1],regression.line$coefficients[2],beta[20])
```

```

A[j,1]=a[1]
A[j,2]=a[2]
A[j,3]=a[3]
A[j,4]=a[4]
MLE[j,1]=unname(fitdist(w,"weibull")$estimate[1]) #beta estimado
MLE[j,2]=unname(fitdist(w,"weibull")$estimate[2]) #eta estimado
}
Res[i,]=cbind(mean(A[,3]),mean(A[,3])-beta[20],var(A[,3]),mean((A[,3]-beta[10])^2))
Res2[i,]=cbind(mean(exp(-A[,2]/A[,3])),mean(exp(-A[,2]/A[,3]))-eta,var(exp(-
A[,2]/A[,3])),mean((exp(-A[,2]/A[,3]))-eta)^2)
Res3[i,]=cbind(mean(MLE[,1]),mean(MLE[,1])-beta[20],var(MLE[,1]),mean((MLE[,1]-
beta[10])^2))
Res4[i,]=cbind(mean(MLE[,2]),mean(MLE[,2])-eta,var(MLE[,2]),mean((MLE[,2]-eta)^2))
}

```

### 6.6.2 Código dos tempos exponenciais:

```

Library (Rcpp)
Library (WeibullR)
Library (MASS)
Require (fitdistrplus)
Res=matrix (nrow=6, ncol=4)
Res2=matrix (nrow=6, ncol=4)
colnames(Res)= c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
colnames(Res2)= c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
beta=seq (0.1,4,by=0.1)
sam=c(25, 100, 500, 1000, 2000, 5000)
A=matrix (nrow=1000,ncol=4)
MLbeta=matrix (nrow=1000,ncol=2)
colnames(A)=c ("r.squared","intercept","slope","beta")
eta=5000

```

```

for (i in 1:6){
  for (j in 1:1000){
    w=rexp (sam[i],1/log(eta))
    hist (w)
    s=seq (1,sam[i],by=1)
    f=(s-0.3)/(sam[i]+0.40)
    y=log (1-f)
    x=sort (w)
    plot(x,y, xlab="ln(Ti)",ylab="Fi",main="Método Mínimos Quadrados")
    abline(lm(y~x), col="red")
    regression.line=lm(x~y)
    a=c(summary(regression.line)$r.squared,regression.line$coefficients[1],regression.line$coefficients[2],beta[10])
    A[j,1]=a[1]
    A[j,2]=a[2]
    A[j,3]=-1/a[3]
    A[j,4]=a[4]
    MLbeta[j,1]=unname(fitdist(w,"exp")$estimate[1])
  }
  Res[i,]=cbind(mean(A[,3]),mean(A[,3])-beta[10],var(A[,3]),mean((A[,3]-beta[10])^2))
  Res2[i,]=cbind(mean(exp(-A[,2]/A[,3])),mean(exp(-A[,2]/A[,3]))-eta,var(exp(-A[,2]/A[,3])),mean((exp(-A[,2]/A[,3]))-eta)^2)
}
Res
summary(cbind(A[,3],MLbeta))

```

### 6.6.3 Código dos tempos normais:

```

library(Rcpp)
library(WeibullR)
library(MASS)
require(fitdistrplus)

```

```

Res=matrix(nrow=6,ncol=4)
Res2=matrix(nrow=6,ncol=4)
Res3=matrix(nrow=6,ncol=4)
Res4=matrix(nrow=6,ncol=4)
colnames(Res)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
colnames(Res2)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
colnames(Res3)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
colnames(Res4)=c("Média", "Viés", "Variância", "EQM")
beta=seq (0.1,4,by=0.1)
sam=c(25, 100, 500, 1000, 2000, 5000)
A=matrix (nrow=1000,ncol=6)
MLbeta=matrix (nrow=1000,ncol=2)
colnames(A)=c("r.squared","intercept","slope","beta","média","desvio padrão")
mu=c(5,6,7,8,9,11)
mu=mu[1]
for (i in 1:6){
for (j in 1:1000){
x=rnorm (sam[i],mu,0.4)
s=seq (1,sam[i],by=1)
f=(s-0.3)/(sam[i]+0.40)
y=qnorm (f)
x=sort (x)
plot(x,y, xlab="ln(Ti)",ylab="Fi",main="Método dos Mínimos Quadrados")
abline(lm(y~x), col="red")
regression.line=lm(y~x)
a=c(summary(regression.line)$r.squared,regression.line$coefficients[1],regression.line$coefficients[2],beta[36],mu=-regression.line$coefficients[1]/regression.line$coefficients[2],sd=1/regression.line$coefficients[2])
A[j,1]=a[1]
A[j,2]=a[2]
A[j,3]=a[3]

```

```

A[j,4]=a[4]
A[j,5]=a[5]
A[j,6]=a[6]
MLbeta[j,1]=unname(fitdist(x[x<quantile(x,0.95,"norm")]$estimate[1])
MLbeta[j,2]=unname(fitdist(x[x<quantile(x,0.95,"norm")]$estimate[2])
}
Res[i,]=cbind(mean(A[,5]),mean(A[,5])-mu,var(A[,5]),mean((A[,5]-mu)^2))
Res2[i,]=cbind(mean(A[,6]),mean(A[,6])-0.4,var(A[,6]),mean((A[,6]-0.4)^2))
Res3[i,]=cbind(mean(MLbeta[,1]),mean(MLbeta[,1])-mu,var(MLbeta[,1]),mean((MLbeta[,1]-
mu)^2))
Res4[i,]=cbind(mean(MLbeta[,2]),mean(MLbeta[,2])-0.4,var(MLbeta[,2]),mean((MLbeta[,2]-
0.4)^2))
}
Res
Res2
Res3
Res4
summary(cbind(A[,5],MLbeta[,1]))
summary(cbind(A[,6],MLbeta[,2]))

```

#### 6.6.4 Código dos tempos lognormais:

```

Res=matrix(nrow=6,ncol=4)
Res2=matrix(nrow=6,ncol=4)
Res3=matrix(nrow=6,ncol=4)
Res4=matrix(nrow=6,ncol=4)
colnames(Res)=c("Média","Viés","Variância","EQM")
colnames(Res2)= c("Média","Viés","Variância","EQM")
colnames(Res3)= c("Média","Viés","Variância","EQM")
colnames(Res4)= c("Média","Viés","Variância","EQM")

```

```

beta=seq(0.1,4,by=0.1)
sam=c(25,100,500,1000,2000,5000)
A=matrix(nrow=1000,ncol=6)
MLbeta=matrix(nrow=1000,ncol=2)
colnames(A)=c("r.squared","intercept","slope","beta","média","desvio padrão")
mu=c(4,6,7,8,9,11)
mu=mu[1]
for (i in 1:6){
  for (j in 1:1000){
    x=log(rlnorm(sam[i],mu,0.5))
    x1=rlnorm(sam[i],mu,0.5)
    s=seq(1,sam[i],by=1)
    f=(s-0.3)/(sam[i]+0.40)
    y=qnorm(f)
    x=sort(x)
    plot(x,y, xlab="ln(Ti)",ylab="Fi",main="Método Mínimos Quadrados")
    abline(lm(y~x), col="red")
    regression.line=lm(y~x)
    a=c(summary(regression.line)$r.squared,regression.line$coefficients[1],regression.line$coefficients[2],beta[25],mu=regression.line$coefficients[1]/regression.line$coefficients[2],sd=1/regression.line$coefficients[2])
    A[j,1]=a[1]
    A[j,2]=a[2]
    A[j,3]=a[3]
    A[j,4]=a[4]
    A[j,5]=a[5]
    A[j,6]=a[6]
    MLbeta[j,1]=unname(fitdist(x1[x1<quantile(x1,0.70)],"lnorm")$estimate[1])
    MLbeta[j,2]=unname(fitdist(x1[x1<quantile(x1,0.70)],"lnorm")$estimate[2])
  }
}

```

```
Res[i,]=cbind(mean(A[,5]),mean(A[,5])-mu,var(A[,5]),mean((A[,5]-mu)^2))
Res2[i,]=cbind(mean(A[,6]),mean(A[,6])-0.5,var(A[,6]),mean((A[,6]-0.5)^2))
Res3[i,]=cbind(mean(MLbeta[,1]),mean(MLbeta[,1])-mu,var(MLbeta[,1]),mean((MLbeta[,1]-
mu)^2))
Res4[i,]=cbind(mean(MLbeta[,2]),mean(MLbeta[,2])-0.5,var(MLbeta[,2]),mean((MLbeta[,2]-
0.5)^2))
}
Res
Res2
Res3
Res4
summary(cbind(A[,5],MLbeta[,1]))
summary(cbind(A[,6],MLbeta[,2]))
```

## 6.7 Tempos de falha e tempos de vida do caso de estudo 1

Motor	Parâmetros da distribuição Weibull		Soft-Life	Hard-Life	MISL*	Taxa de falhas por cada 1000 ciclos
	Escala	Forma				
Componente						
M-01						
Parte 1.1	15000	1	15000			0,067
Parte 1.2				23000	6000	
M-02						
Parte 2.1	16000	5	15000			0,068
Parte 2.2				17000	6000	
Parte 2.3				26000	6000	
M-03						
Parte 3.1	225000	1	15000			0,004
Parte 3.2				27000	6000	
M-04						
Parte 4.1	14000	2	15000			0,081
Parte 4.2				15000	6000	
Parte 4.3				19000	6000	
M-05						
Parte 5.1	10000	5	15000			0,109
Parte 5.2	10000	6	15000			0,108
M-06						
Parte 6.1			15000			
Parte 6.2	8500	6		14000	6000	0,0127
M-07						
Parte 7.1	17000	6	15000			0,063
Parte 7.2				27000	6000	
Parte 7.3				27000	6000	
Parte 7.4				18000	6000	
Parte 7.5				25000	6000	
Parte 7.6				16000	6000	
M-08						
Parte 8.1	15000	3	15000			0,075
M-09						
Parte 9.1	31000	2	15000			0,036
M-10	17000	3	15000			0,066

\*MISL: *Minimum Issue Life*

## 6.8 Estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull (caso de estudo 4)

<i>i</i>	Componente	Parâmetro de Escala ( $\beta_i$ )	Parâmetro de Forma ( $\eta_i$ )	Método de estimação
1	Gerador do guindaste	1,1076E+03	1,1904	MLE
2	Gerador de arrasto	1,4852E+03	1,3232	MLE
3	Gerador de balanço	5,3328E+03	2,1095	MLE
4	Motor síncrono	9,2290E+03	1,5852	MLE
5	Motor de elevação	2,0674E+03	1,1365	MLE
6	Motor de arrasto	3,8743E+03	1,2330	Mínimos quadrados
7	Motor de balanço	1,2466E+03	1,1367	Mínimos quadrados
8	Motor de propulsão	6,2218E+03	1,3211	Mínimos quadrados
9	Maquinaria da grua	565,7741	1,1010	Mínimos quadrados
10	Maquinaria de arrasto	769,7037	1,1153	Mínimos quadrados
11	Maquinaria do balanço	565,7506	1,1010	Mínimos quadrados
12	Maquinaria de propulsão	1,9862E+03	1,5889	MLE
13	Corda do guindaste	423,3406	1,0455	MLE
14	Corda de arrasto	302,2390	1,3213	MLE
15	Corda de despejo	188,0395	1,0455	Sem ajuste (utilizou-se o parâmetro de forma da corda do guindaste)
16	Cordas de suspensão	8,9572E+03	3,4450	MLE
17	Guia de cabo ( <i>fairlead</i> )	2,8608E+03	1,3660	MLE
18	Polias de deflexão	3,0781E+03	1,6706	MLE
19	Balde e cordame	64,6218	1,0661	Mínimos quadrados
20	Armação	789,9312	1,1117	Mínimos quadrados
21	Banheira	3,4554E+03	1,4647	MLE
22	Armação giratória ( <i>Revolving frame</i> )	372,5864	1,0938	Mínimos quadrados
23	Armação em A ( <i>A-frame</i> )	3,0607E+03	1,2628	MLE
24	Mastro	2,7577E+03	1,1827	Mínimos quadrados
25	Outros	47,5795	1,0625	Mínimos quadrados

## 6.9 Dados de falhas da impressora do caso de estudo 7

Contagem de cópias	Dia	Componente	Contagem de cópias	Dia	Componente
60152	29	Cleaning web	769384	1165	Feed rollers
60152	29	Toner filter	769384	1165	Upper fuser
60152	29	Feed rollers	769384	1165	Optics PS
132079	128	Cleaning web	787106	1217	Cleaning blade
132079	128	Drum cleaning	787106	1217	Drum claws
132079	128	Toner guide	787106	1217	Toner guide
220832	227	Toner filter	840494	1266	Feed rollers
220832	227	Cleaning blade	840494	1266	Ozone filter
220832	227	Dust filter	851657	1281	Cleaning blade
220832	227	Drum claws	851657	1281	Toner guide
252491	276	Drum cleaning	872523	1312	Drum claws
252491	276	Cleaning blade	872523	1312	Drum
252491	276	Drum	900362	1356	Cleaning web
252491	276	Toner guide	900362	1356	Upper fuser
365075	397	Cleaning web	900362	1356	Upper roller
365075	397	Toner filter	933637	1410	Feed rollers
365075	397	Drum claws	933637	1410	Dust filter
365075	397	Ozone filter	933637	1410	Ozone filter
370070	468	Feed rollers	933785	1412	Cleaning web
378223	492	Drum	936597	1436	Drive gear
390459	516	Upper fuser	938100	1448	Cleaning web
427056	563	Cleaning web	944235	1460	Dust filter
427056	563	Upper fuser	944235	1460	Ozone filter
449928	609	Toner filter	984244	1493	Feed rollers
449928	609	Feed rollers	984244	1493	Charging wire
449928	609	Upper roller	994597	1514	Cleaning web
472320	677	Feed rollers	994597	1514	Ozone filter
472320	677	Cleaning blade	994597	1514	Optics PS
472320	677	Upper roller	1005842	1551	Upper fuser
501550	722	Cleaning web	1005842	1551	Upper roller
501550	722	Dust filter	1005842	1551	Lower roller
501550	722	Drum	1014550	1560	Feed rollers
501550	722	Toner guide	1014550	1560	Drive gear
533634	810	TS block	1045893	1583	Cleaning web
533634	810	Charging wire	1045893	1583	Toner guide
583981	853	Cleaning blade	1057844	1597	Cleaning blade
597739	916	Cleaning web	1057844	1597	Drum

---

597739	916	<i>Drum claws</i>	1057844	1597	<i>Charging wire</i>
597739	916	<i>Drum</i>	1068124	1609	<i>Cleaning web</i>
597739	916	<i>Toner guide</i>	1068124	1609	<i>Toner filter</i>
624578	956	<i>Charging wire</i>	1068124	1609	<i>Ozone filter</i>
660958	996	<i>Lower roller</i>	1072760	1625	<i>Feed rollers</i>
675841	1016	<i>Cleaning web</i>	1072760	1625	<i>Dust filter</i>
675841	1016	<i>Feed rollers</i>	1072760	1625	<i>Ozone filter</i>
684186	1074	<i>Toner filter</i>	1077537	1640	<i>Cleaning web</i>
684186	1074	<i>Ozone filter</i>	1077537	1640	<i>Optics PS</i>
716636	1111	<i>Cleaning web</i>	1077537	1640	<i>Charging wire</i>
716636	1111	<i>Dust filter</i>	1099369	1650	<i>TS block</i>
716636	1111	<i>Upper roller</i>	1099369	1650	<i>Charging wire</i>

---