

Integrais e Derivadas Fraccionárias

APLICAÇÃO À MODELIZAÇÃO E CONTROLO

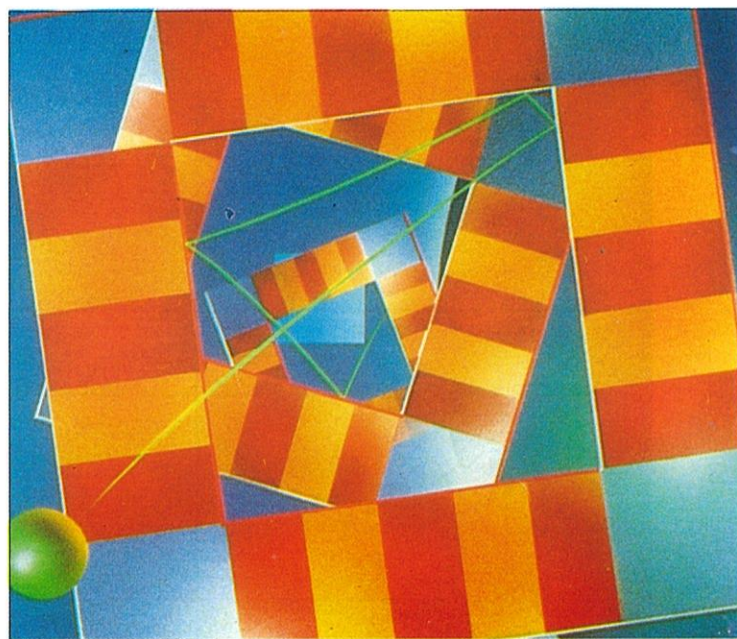
O controlo de sistemas recorre ao cálculo integral e diferencial. Assim, o popular algoritmo PID (Proporcional, Integral e Diferencial) não é mais do que o estabelecimento de um controlo baseado em três acções integro-diferenciais de ordem inteira consecutivas, "pesadas" através de ganhos que se podem ajustar através de técnicas experimentais e analíticas. No entanto, este tipo de algoritmos revela limitações de natureza vária, pelo que têm vindo a ser desenvolvidos controladores baseados em conceitos alternativos. Este artigo apresenta um resumo do estado da arte sobre a generalização do cálculo integral e diferencial para valores não inteiros e valores complexos. De seguida, esta teoria é analisada no contexto do controlo de sistemas sendo apontadas as perspectivas de aplicação e desenvolvimento.

1. EVOLUÇÃO HISTÓRICA

A generalização do conceito de derivada $d^\alpha f(x)/dx^\alpha$ para valores não inteiros de α remonta ao início do desenvolvimento do cálculo diferencial [1]. Na correspondência de Leibniz com Bernoulli e, posteriormente, com L'Hôpital (1695) e Wallis (1697) encontram-se alguns apontamentos relativamente à derivada de ordem $\alpha = 1/2$. No entanto, deveu-se a Euler (1738) o primeiro passo, quando este analisou o cálculo de derivadas fraccionárias (DF's) para a função potência.

No seguimento deste resultado Laplace (1812), Lacroix (1820) e Fourier (1822) sugeriram, também, algumas ideias relativas ao cálculo de DF's.

O verdadeiro início da teoria relativa ao cálculo de derivadas e integrais fraccionários (DIF's) deu-se com os trabalhos de Abel e Liouville. Abel (1823) investigou certas expressões fora do contexto do cálculo de DIF's, mas os resultados foram de importância considerável para o desenvolvimento da teoria. Por seu lado, Liouville (1822-1837) estudou, explicitamente, várias questões nomeadamente a definição e o cálculo de DF's para valores complexos de α , a sua aplicação a certos tipos de equações diferenciais lineares ordinárias, o efeito de uma mudança de variável no cálculo de DIF's e a definição de uma DF como o limite do quociente $D_h^\alpha f/h^\alpha$ onde $D_h^\alpha f$ é a uma diferença de ordem fraccionária. Riemann (1947), Holmgren (1865-1867) e Letnikov (1868) tiveram, também, papéis de relevo no prosseguimento da teoria. Entre outros resultados, Holmgren considerou, pela primeira vez, a derivação e a integração fraccionárias como operações inversas e generalizou a expressão de $d^\alpha (u.v)/dx^\alpha$. No tocante a Letnikov, este desenvolveu a DF como limite da expressão $\lim_{h \rightarrow 0} D_h^\alpha f/h^\alpha$, demonstrou que as expressões propostas por Liouville e Riemann estavam de acordo com esta definição e generalizou a teoria dos DIF's para valores complexos. Mais próximo dos nossos dias, são de referir numerosas contribuições tais como as de Hadamard (1892), Weyl (1917) e Marchaud (1927), que têm vindo a ampliar o âmbito desta teoria.



2. ASPECTOS MATEMÁTICOS FUNDAMENTAIS DAS DERIVADAS E INTEGRAIS FRACCIONÁRIOS

Ao longo dos anos têm sido apresentadas várias expressões para definição dos DIF's. A tabela 1 mostra várias definições possíveis seja através de definições "directas", a partir do cálculo integro-diferencial convencional, seja através de definições "indirectas", a partir das transformadas de Fourier $F\{\}$ ou de Laplace $L\{\}$ (por simplicidade encontram-se representadas somente as expressões para DIF's à esquerda). Uma vez estabelecida uma definição é possível generalizar toda uma colecção de resultados e teoremas conhecidos. A título de exemplo, vejamos dois casos:

- O teorema de Leibniz correspondente à derivação de ordem fraccionária de um produto de duas funções passa a ter a forma:

$$D_{a+}^\alpha (fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta-k+1)\Gamma(\beta+k+1)} \left(D_{a+}^{\alpha-\beta-k} f \right) \left(D_{a+}^{\beta+k} g \right) \quad (1)$$

onde Γ representa a função gama.

- O desenvolvimento em série de Taylor de ordem fraccionária de uma função assume a forma:

Definição	Expressão
LIOUVILLE	$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}, -\infty < x < +\infty$
	$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, -\infty < x < +\infty$
RIEMAN-LIOUVILLE	$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}, a < x$
	$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, a < x$
HADAMARD	$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{[\ln(x/t)]^{1+\alpha}} \cdot \frac{dt}{t}$
	$(I_+^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{t[\ln(t/x)]^{1-\alpha}}, x > 0, \alpha > 0$
GRÜNWARD-LETNIKOV	$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{h \rightarrow +0} h^\alpha \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)} \varphi(x-jh)$
CHEN	$(D_c^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt, x > c$
	$(I_c^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, x > c$
MARCHAUD	$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt$
TRANSFORMADA DE FOURIER	$F\{I_\pm^\alpha \varphi\} = F\{\varphi\} / (\mp i\omega)^\alpha, 0 < \text{Re}(\alpha) < 1$
	$F\{D_\pm^\alpha \varphi\} = (\mp i\omega)^\alpha F\{\varphi\}, \text{Re}(\alpha) \geq 0$
TRANSFORMADA DE LAPLACE	$L\{I_{0+}^\alpha \varphi\} = L\{\varphi\} / s^\alpha, \text{Re}(\alpha) > 0$
	$L\{D_{0+}^\alpha \varphi\} = s^\alpha L\{\varphi\}, \text{Re}(\alpha) \geq 0$

Tabela 1 - Definições de Derivadas e Integrais de Ordem Fracionária

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{(D_{a+}^{\alpha+j} f)(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j} + R_n(x), \quad R_n(x) = (I_{a+}^{\alpha+n} D_{a+}^{\alpha+n} f)(x) \quad (2)$$

$$m' \frac{\pi}{2} (\log \epsilon + \log \eta) = \frac{\pi}{2} \log \epsilon \quad (7)$$

A partir destes conceitos é possível construir uma tabela para os integrais e derivadas de ordem fraccionária conforme indicado na tabela 2.

que conduz a um resultado idêntico a (6).

Considere-se agora, por exemplo, o sistema de controlo representado pelo diagrama de blocos da figura 3, onde $1 < \alpha < 2$. Na figura 4 estão representados os diagrama-

3. APLICAÇÃO DAS DERIVADAS E INTEGRAIS FRACCIONÁRIOS

A aplicação dos DIF's aos vários campos da ciência é, ainda, relativamente restrita devido à lenta difusão desta teoria. A título de exemplo, no campo da física matemática são de referir os trabalhos de Koeller [2], Nigmatullin [3] e Le Méhauté [4-5] entre outros. Na área do controlo é de salientar o trabalho pioneiro de Oustaloup [6-7]. No entanto este investigador limitou-se à aplicação de DIF's no domínio das frequências e à sua aproximação através de derivadas/integrais inteiros pelo que se encontra em aberto um vasto campo de aplicação dos DIF's.

A fim de interpretar o conceito de DIF vamos começar por analisar no domínio das frequências o circuito representado na figura 1. Sabendo que:

Tabela 2 - Tabela de Derivadas e Integrais de Ordem Fraccionária

$\varphi(x), x \in \mathfrak{R}$	$(I_+^\alpha \varphi)(x), x \in \mathfrak{R}, \alpha \in C$
$(x-a)^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}, \text{Re}(\beta) > 0$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}, \text{Re}(\lambda) > 0$
$\begin{cases} \sin(\lambda x) \\ \cos(\lambda x) \end{cases}$	$\lambda^{-\alpha} \begin{cases} \sin(\lambda x - \alpha \pi/2) \\ \cos(\lambda x - \alpha \pi/2) \end{cases}, \lambda > 0, \text{Re}(\alpha) > 1$
$e^{\lambda x} \begin{cases} \sin(\gamma x) \\ \cos(\gamma x) \end{cases}$	$\frac{e^{\lambda x}}{(\lambda^2 + \gamma^2)^{\alpha/2}} \begin{cases} \sin(\gamma x - \alpha \phi) \\ \cos(\gamma x - \alpha \phi) \end{cases}, \phi = \arctan(\gamma/\lambda), \gamma > 0, \text{Re}(\lambda) > 1$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i, \text{ onde } R_{i+1} = \frac{R_i}{\epsilon} \text{ e } C_{i+1} = \frac{C_i}{\eta} \quad (3)$$

aplicando a transformada de Laplace obtém-se:

$$I(s) = V(s) \cdot Y(s) \text{ onde } Y(s) = \sum_{i=0}^n \frac{sC\epsilon^i}{sCR + (\eta\epsilon)^i} \quad (4)$$

Para este circuito, estabelecido de modo recursivo, podem esboçar-se os diagramas de Bode de módulo e fase representados na figura 2. Para $Y(s)$, designando as frequências dos pólos e zeros respectivamente por ω_i e ω'_i , verificam-se facilmente as relações:

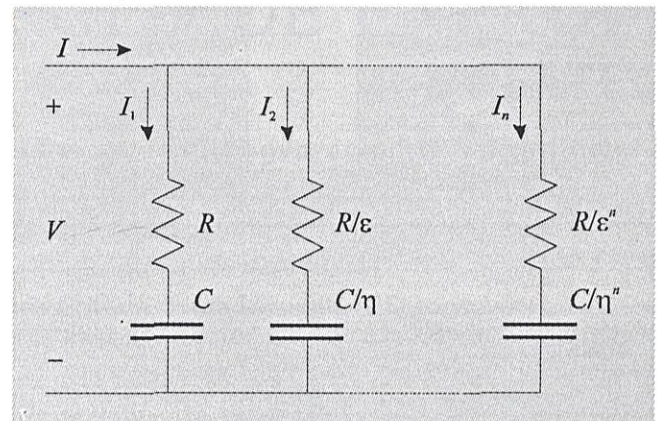
$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \epsilon \eta, \quad \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \epsilon, \quad \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta \quad (5)$$

Assim, do diagrama de Bode de amplitudes conclui-se que o declive médio m' vem dado pela expressão:

$$\begin{cases} 20 m' \text{ dB / dec} = \frac{\Delta_{dB}}{\log \epsilon + \log \eta} \\ 20 \text{ dB / dec} = \frac{\Delta_{dB}}{\log \epsilon} \end{cases} \Rightarrow m' = \frac{\log \epsilon}{\log \epsilon + \log \eta} \quad (6)$$

Analisando o diagrama de Bode das fases, verifica-se para a fase média a expressão:

Fig. 1 - Circuito eléctrico com associação recursiva em paralelo de elementos RC em série



mas de amplitude e fase de Bode (em malha aberta), bem como o lugar de raízes. Assim, constasse facilmente que, ao invés do que acontece com os sistemas clássicos, qualquer variação do ganho mantém constante a margem de fase pelo que o sistema apresenta uma robustez notável. Esta característica torna este tipo de algoritmos interessantes para o controlo de sistemas variantes ou não-lineares, pelo que constitui actualmente um campo de investigação e desenvolvimento particularmente atractivo.

4. CONCLUSÕES

A teoria dos DIF's é ainda pouco divulgada mas apresenta fortes potencialidades de aplicação várias áreas científicas. No campo do controlo de sistemas foi já desenvolvido algum trabalho e os resultados conseguidos revelam numerosas possibilidades de aplicação.

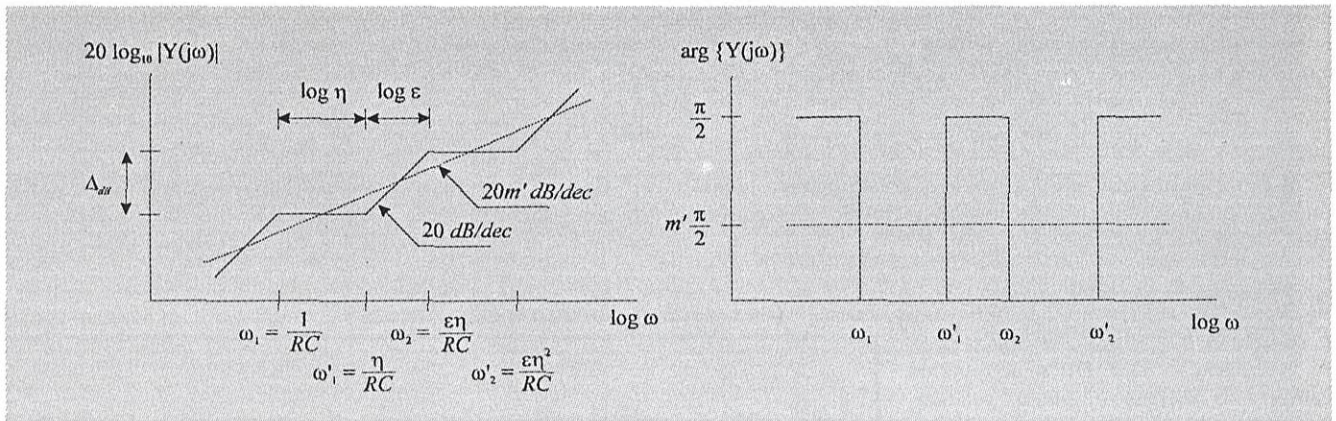


Fig. 2 - Diagramas assintóticos de Bode de amplitude e fase para o circuito eléctrico da figura 1

Nesta perspectiva, encontra-se em curso investigação relativa à aplicação dos DIF's no domínio dos tempos (discreto e contínuo), das ferramentas de análise (lugar de raízes, plano de fase) e métodos de simulação com particular incidência no controlo de manipuladores robóticos.

AGRADECIMENTOS

O autor deste artigo deseja agradecer aos Professores Manuel Rogério (FCUP) e J. Sá da Costa (IST) a ajuda na recolha das referências [1] e [7], respectivamente.

Fig. 3 - Diagrama de blocos de sistema de controlo realimentado, com função de transferência fraccionária

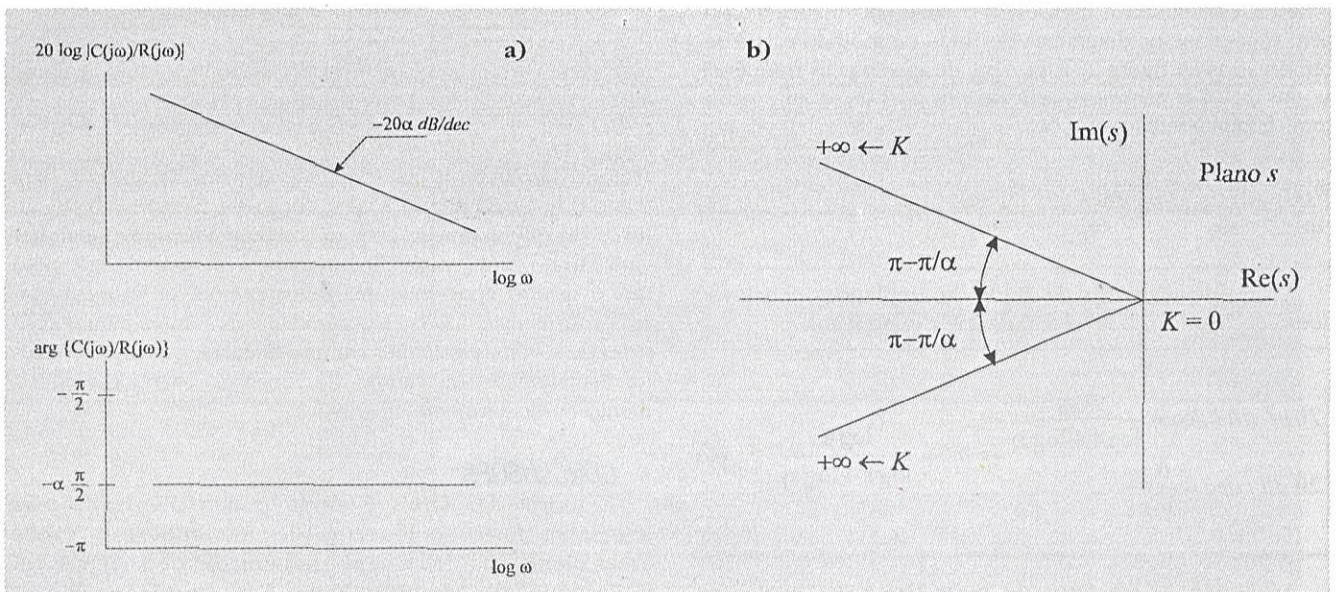
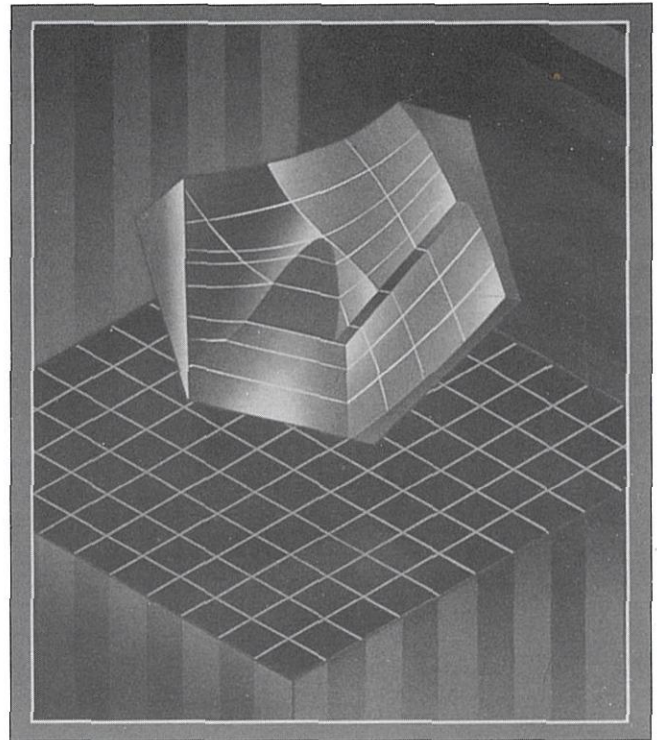
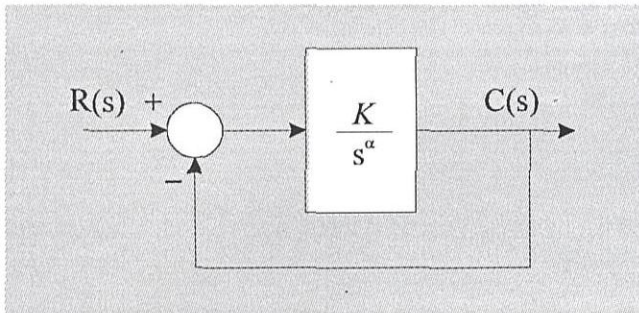


Fig. 4 - Análise da estabilidade do sistema representado na figura 3. a) Diagramas de Bode. b) Lugar de raízes

REFERÊNCIAS

- [1] Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas, Oleg I. Marichev, "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications", Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [2] R.C. Koeller, "Polynomial Operators, Stieltjes Convolution, and Fractional Calculus in Hereditary Mechanics", Acta Mechanica, vol. 58, pp. 251-264, 1986.
- [3] R.R. Nigmatullin, "The Realization of the Generalized Transfer Equation in a Medium with Fractal Geometry", Phys. stat. sol. (b), vol. 133, pp. 425-430, 1986.
- [4] Alain R.P. Le Méhauté, Gilles Crepy, "Dissipation and Non Integer Derivative: The Fractal Analysis of Battery Efficiency", 12th IMACS World Congress on Scientific Computation, 1988, Paris, França.
- [5] A. Le Méhauté, F. Héliodore, "New Trends in the Application of the Non Integer Derivative in Physics", 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, 1991, Dublin, Irlanda.
- [6] A. Oustaloup, "Fractional Order Sinusoidal Oscillators: Optimization and Their Use in Highly Linear FM Modulation", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 28, n. 10, pp. 1007-1009, Oct. 1981.
- [7] Alain Oustaloup, "La Commande CRONE: Commande Robuste d'Ordre Non Entier", Hermes, 1991.

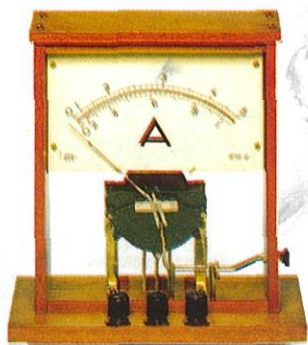
* Prof. Auxiliar do Depart.º
de Engenharia Electrotécnica
e de Computadores da FEUP

SISTEMAS DE CONTROLO DE ENERGIA

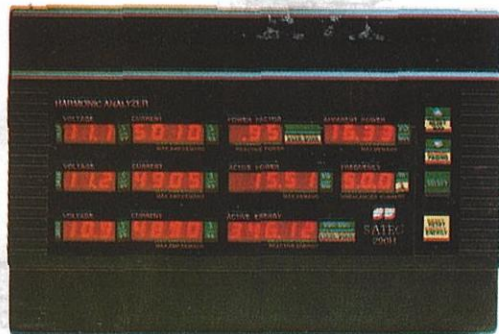
Monitores de Potência



Equipamentos controlados por microprocessador para medida, monitorização e controlo de energia eléctrica.



O Passado.



O Futuro.

- Medida até 23 parâmetros de grandezas eléctricas (visualização até 11 em simultâneo)
- Medida de RMS Verdadeiro (até à 15ª harmónica)
- Entrada directa de Tensão e de Corrente
- Saída por impulsos (kWh e kVArh)
- Medida de Ponta Máxima de Corrente
- Saída analógica (opcional)
- Porta de comunicações RS422/232/485 (opcional)
- Análise de harmónicas cobrindo o espectro até à 31ª
- Software para análise, em ambiente Windows®



TECNILAB PORTUGAL, LDA

Av. Columbano Bordalo Pinheiro, 97 2º Dtº 1000 LISBOA
Tel.: (01) 726 91 29 (BAL 6 Linhas) FAX: (01) 726 45 50

Rua Ferreira Cardoso, 111 - 113 4300 PORTO
Tel.: (02) 56 07 85 - 56 08 68 FAX: 57 63 14