

27

MATEMÁTICA

ANÁLISE MATEMÁTICA I

RESUMO TEÓRICO,
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E PROPOSTOS

Funções reais de variável real
Integrais indefinidos e definidos
Séries numéricas e de funções

ALZIRA FARIA • HELENA BRÁS • ISABEL FIGUEIREDO



COLEÇÃO MATEMÁTICA

27

COLEÇÃO MATEMÁTICA

- 1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- 2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM \mathbb{R}^n
- 3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS
- 4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA
- 5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
- 6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
- 7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
- 8 – CÁLCULO INTEGRAL EM \mathbb{R} – PRIMITIVAS
- 9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS
- 10 – SUCESSÕES E SÉRIES
- 11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
- 12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM \mathbb{R}
- 13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM \mathbb{R}^n – EXERCÍCIOS
- 14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
- 15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS
- 16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES
- 17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS
- 18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE
- 19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA – Com Python 3 e R
- 20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação
- 21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações
- 22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos
- 23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM \mathbb{R}^n
- 24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS
- 25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais
- 26 – ÁLGEBRA LINEAR – TEORIA E PRÁTICA
- 27 – ANÁLISE MATEMÁTICA I – Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos

Análise Matemática I

**Resumo Teórico, Exercícios
Resolvidos e Propostos**

ALZIRA FARIA
HELENA BRÁS
ISABEL FIGUEIREDO



EDIÇÕES SÍLABO

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, este livro. As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor. Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos. O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Análise Matemática I – Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos

Autoras: Alzira Faria, Helena Brás, Isabel Figueiredo

© Edições Sílabo, Lda.

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, setembro de 2021

Impressão e acabamentos: Europress, Lda.

Depósito Legal: 486652/21

ISBN: 978-989-561-179-9



EDIÇÕES SÍLABO, Lda.

Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2

1170-100 Lisboa

Tel.: 218130345

e-mail: silabo@silabo.pt

www.silabo.pt

Índice

Prefácio	9
Capítulo 1. Funções reais de variável real	11
1.1. Resumo teórico.	11
1.1.1. Derivadas	13
1.1.1.1. Reta tangente e reta normal ao gráfico de uma função num ponto	13
1.1.1.2. Diferencial	15
1.1.1.3. Função inversa e derivada.	16
1.1.1.4. Função composta e derivada	17
1.1.2. Função módulo	17
1.1.3. Função exponencial.	18
1.1.4. Função logarítmica	19
1.1.5. Funções trigonométricas	20
1.1.5.1. Funções trigonométricas inversas.	22
1.2. Provas de avaliação resolvidas	26
1.3. Provas de avaliação propostas	59
Capítulo 2. Integral indefinido.	69
2.1. Resumo teórico.	69
2.1.1. Primitivas	71

2.1.2. Integral indefinido	72
2.1.2.1. Integração de frações racionais	73
2.1.2.2. Método de integração por partes	74
2.1.2.3. Método de integração por substituição	75
2.2. Provas de avaliação resolvidas	77
2.3. Provas de avaliação propostas	98

Capítulo 3. Integral definido e aplicações 105

3.1. Resumo teórico.	105
3.1.1. Somas de Riemann	107
3.1.2. Integral de Riemann.	108
3.1.3. Propriedades do integral definido	110
3.1.4. Teorema fundamental do cálculo integral	111
3.1.5. Integração por partes em integrais definidos	111
3.1.6. Integração por substituição para integrais definidos.	111
3.1.7. Cálculo de áreas de regiões planas	112
3.1.7.1. Regiões do tipo I: Projeção no eixo das abcissas	112
3.1.7.2. Regiões do tipo II: Projeção no eixo das ordenadas	113
3.1.8. Integrais impróprios	114
3.2. Provas de avaliação resolvidas	115
3.3. Provas de avaliação propostas	159

Capítulo 4. Séries numéricas e séries de funções 171

4.1. Resumo teórico.	171
4.1.1. Séries numéricas	173
4.1.1.1. Convergência de séries numéricas	175
4.1.1.2. Série geométrica.	176
4.1.1.3. Série de Riemann	177
4.1.1.4. Séries alternadas	177

4.1.2. Séries de funções	178
4.1.2.1. Representação de funções em séries de potências: séries de Taylor e séries de MacLaurin.	180
4.1.2.2. Polinómios de Taylor e polinómios de MacLaurin	181
4.2. Provas de avaliação resolvidas	182
4.3. Provas de avaliação propostas	233

Prefácio

OBJETIVOS

Esta obra foi especialmente concebida para auxiliar estudantes, nomeadamente das Licenciaturas em Faculdades ou Institutos Superiores nas áreas das Ciências Exatas e tem como objetivo principal fornecer uma preciosa ferramenta de treino, constituída por um elevado número de exercícios resolvidos e exercícios propostos com solução, que ilustram os temas que são objeto de estudo. Neste sentido, é uma mais-valia na preparação de estudantes para a realização de provas de avaliação de Análise Matemática ou Cálculo, unidade curricular transversal das Licenciaturas nas áreas das Ciências Exatas.

MOTIVAÇÃO

O atual paradigma do processo de ensino e aprendizagem orienta cada vez mais para um trabalho autónomo de cada estudante. No entanto, é necessário fornecer ao estudante ferramentas de trabalho adequadas aos seus interesses e às suas necessidades. Este projeto arrancou a partir de uma compilação de apontamentos preparados para responder às necessidades dos estudantes na preparação para os exames nas unidades curriculares de Matemática, no sentido de facilitar o estudo e a interiorização dos conceitos, auxiliando na consolidação dos mesmos e no desenvolvimento de métodos de trabalho. Procuramos, assim, motivar os estudantes na aprendizagem e, conseqüentemente, ajudá-los a alcançar o sucesso no seu percurso académico.

CONTEÚDO

Este livro é composto exclusivamente por exercícios retirados dos exames realizados, nos últimos seis anos, em avaliações de unidades curriculares de várias Licenciaturas em Engenharia. As autoras, tiveram a preocupação de apresentar a resolução dos exercícios com grande detalhe e clareza, de modo que cada resolução contribua para uma aprendizagem consistente das matérias abordadas. Este livro, Análise Matemática I (Resumo teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos), aborda os assuntos: cálculo diferencial em \mathbb{R} , primitivação indefinida e definida e séries numéricas e funcionais. Para que seja abordada a maior parte das matérias das unidades curriculares de

matemática das Licenciaturas em Faculdades ou Institutos Superiores nas áreas das Ciências Exatas, será publicado futuramente um outro livro *Análise Matemática II* (Resumo teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos) no qual serão abordados os assuntos: cálculo diferencial em \mathbb{R}^n , equações diferenciais, transformadas de Laplace e integrais duplos.

ORGANIZAÇÃO

A obra é composta por quatro capítulos, estando cada capítulo dividido em três seções. Na primeira seção é apresentado um breve e sucinto resumo teórico das matérias abordadas nos exercícios. Na segunda seção estão dez propostas de exames resolvidos. Na terceira seção estão dez propostas de exames com soluções que se pretende que funcione como barômetro para a avaliação da aquisição de conhecimentos nas duas primeiras seções.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer a todos os colegas que de alguma forma, direta ou indiretamente, ajudaram na concretização deste projeto, assim como o apoio incondicional das nossas famílias.

1

Funções reais de variável real

Definição 1.1. Derivada de uma função num ponto

Seja f uma função real de variável real de domínio D . Chama-se **derivada** da função f no ponto de abscissa $x = x_0$, e denota-se por $f'(x_0)$, ao seguinte limite, quando existe,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dizemos que uma *função é derivável*, se for derivável em todos os pontos do seu domínio. Podemos representar a função derivada da função $f(x)$, por $f'(x)$, ou, usando a notação de *Leibniz*, por $\frac{dy}{dx}$.

Geometricamente, o *valor da derivada* de uma função f num ponto $P(x_0, f(x_0))$ é numericamente igual ao *valor do declive da reta tangente* à curva nesse ponto, isto é,

$$m_t = f'(x_0) = \text{tg}(\theta).$$

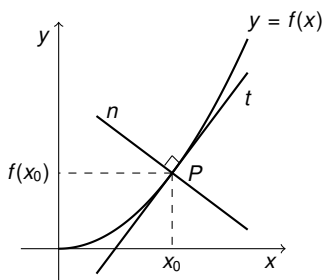
Recorrendo à Figura 1.1,

- m_t – declive da reta tangente, t ;
- θ – ângulo definido pela direção positiva de OX e a reta tangente t à curva de f no ponto P .

Considere-se a reta normal n , no mesmo ponto P . Como se pode ver no gráfico da Figura 1.2, esta reta é perpendicular à reta tangente t , sendo assim,

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Figura 1.2. Reta tangente t e reta normal n , ao gráfico de uma função f , num ponto P .



Assim, uma equação da reta tangente à curva da função f no ponto de abscissa x_0 é dada por,

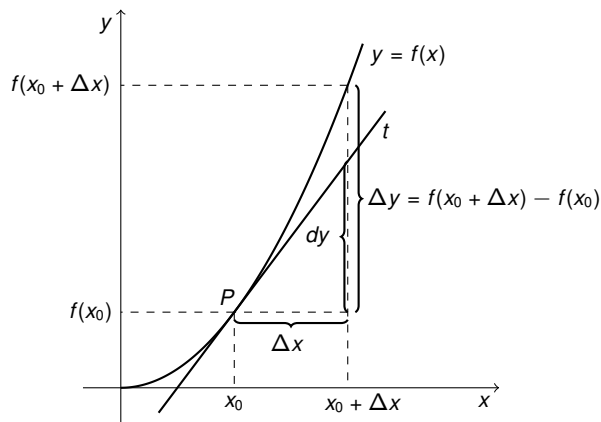
$$y - y_0 = m_t(x - x_0) \text{ tal que } m_t = f'(x_0)$$

e uma equação da reta normal à curva da função f no ponto de abscissa x_0 é dada por,

$$y - y_0 = m_n(x - x_0) \text{ tal que } m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

1.1.1.2. Diferencial

Figura 1.3. Diferencial de uma função f , num ponto P .



Recorrendo à Figura 1.3, consideremos que a abscissa do ponto $P(x_0, y_0)$, sofre um acréscimo Δx , em consequência, o valor da função também sofre um acréscimo Δy , dado por, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Definição 1.2. Diferencial de uma função

Seja $y = f(x)$ a expressão de uma função real de variável real. Um acréscimo da variável independente Δx , provoca um acréscimo da variável dependente

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Define-se *diferencial da variável independente* x , denotado por dx , como $dx = \Delta x$.

Define-se *diferencial da função* f e denota-se por dy , ao valor aproximado do acréscimo da variável dependente, dado por,

$$dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0) dx.$$

Para valores suficientemente pequenos de Δx tem-se, $dy \approx \Delta y$.

A aproximação entre o diferencial dy , e o acréscimo da variável dependente Δy , dado um acréscimo da variável independente, é tanto maior quanto menor for o acréscimo da variável independente Δx .

Em consequência da definição, tem-se,

$$\Delta y \approx dy \iff f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy \iff f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$$

ou seja, o valor aproximado da função na abscissa resultante do acréscimo Δx , é dado pela soma entre o valor da função na abscissa antes do acréscimo e o valor do diferencial.

1.1.1.3. Função inversa e derivada

Definição 1.3. Função inversa

Seja f uma função real de variável real de domínio D_f , *injetiva* num intervalo $I \subseteq D_f$ e f^{-1} a função inversa de f quando restringida ao intervalo I , $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

A derivada desta função inversa pode ser calculada através da derivada da função f .

Teorema 1.1. Teorema de derivação da função inversa

Seja f uma função real de variável real, *injetiva* num intervalo $I \subseteq D_f$ e f^{-1} a *função inversa* de f quando restringida ao intervalo I , $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

Se f é derivável num ponto x interior ao intervalo I e $f'(x) \neq 0$, então f^{-1} é derivável no ponto $y = f(x)$ e tem-se:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Ou,

usando a notação de Leibniz, considerando $x = f^{-1}(y)$, podemos escrever a derivada da sua função inversa do seguinte modo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}}.$$

Note-se que, se a função $y = f(x)$, de domínio D_f e contradomínio D'_f , admite função inversa, $x = f^{-1}(y)$, então verifica-se que $D_{f^{-1}} = D'_f$ e $D'_{f^{-1}} = D_f$.



Alzira Fernanda M. C. Faria, licenciada em Matemática Aplicada – Ramo Ciências dos Computadores, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e mestre em Métodos Quantitativos em Gestão pela Escola de Gestão do Porto da Universidade do Porto. Exerce atividade docente no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto desde 1995.



Helena C. M. Brás, licenciada em Matemática Aplicada – Ramo Ciências dos Computadores, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, mestre em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores/Telecomunicações, pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e doutora em Matemática Aplicada, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Exerce atividade docente no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto desde 1997.



Isabel M. P. Figueiredo, licenciada em Matemática – ramo de especialização científica em Matemática Aplicada, pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, mestre em Estatística Aplicada e Modelação, pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e doutora em Matemática Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Exerce atividade docente no Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto desde 1999.

Este manual dirige-se aos estudantes das licenciaturas nas áreas das ciências exatas oferecidas pelas faculdades e institutos superiores do país. Os três capítulos que integram o livro – funções, integrais e séries – iniciam-se com uma síntese teórica da matéria abordada, apresentando depois um vasto conjunto de exercícios resolvidos, seguido de um vasto conjunto de exercícios propostos com solução.

O conteúdo teórico e compilação dos exercícios presentes nesta obra proporcionam aos estudantes uma imprescindível ferramenta de estudo e treino para a obtenção de sucesso nos desafios de avaliação.

