



Combinação de métodos de discretização sem malha com otimização topológica estrutural na análise de problemas bidimensionais

RODRIGO MIGUEL MARTINS RAJÃO

julho de 2023

Combinação de métodos de discretização sem malha com otimização topológica estrutural na análise de problemas bidimensionais

Rodrigo Rajão

2023

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

isen

P.PORTO

Combinação de métodos de discretização sem malha com otimização topológica estrutural na análise de problemas bidimensionais

Rodrigo Rajão

1171081

Dissertação apresentada ao Instituto Politécnico de Engenharia do Porto de forma a cumprir os requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, supervisionado pelo Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha.

2023

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

isen

P.PORTO

Agradecimentos

Uma vez acabada a dissertação gostava de agradecer ao engenheiro Jorge Américo Oliveira Pinto Belinha por todo o apoio e disponibilidade ao longo desta longa etapa. Foi um orgulho poder fazer parte deste processo de aprendizagem, o que permitiu aprimorar os meus conhecimentos neste campo da otimização estrutural. Foi sempre uma pessoa disponível para me ajudar e explicar todas as dúvidas e não podia estar mais grato.

Também agradecer à minha família por todo o apoio e motivação não só ao longo destes longos meses mas desde o início de toda a minha caminhada universitária.

E por fim, um especial obrigado à minha namorada que me ajudou sempre nas horas mais difíceis e sempre esteve ao meu lado para me apoiar.

ABSTRACT

The importance of preserving resources and protecting the environment is a major concern these days. In the field of engineering, optimized solutions are increasingly sought to obtain the final result avoiding unnecessary waste and expense, while maintaining the conditions of safety and structural resistance.

Thus, the field of optimization has been growing significantly in recent years and is one of the main areas of study. With this in mind, several structural optimization techniques have been used through computationally numerical methods. The objective of the dissertation is to analyze the efficiency and effectiveness of these numerical methods when optimization algorithms are applied. The FEM (finite element method) for many years has been considered the best method of structural analysis thanks to its excellent results. However, when complex problems with difficult geometrics were analyzed, high distortions in the mesh affected the results obtained. Thus, meshless methods have emerged in order to overcome the existing mesh problems in the studies of the FEM since they do not need the mesh as the FEM but only the location of the nodes in the problem domain. Throughout the dissertation, the results obtained with meshless methods will be compared to the ones of FEM and their capabilities will be tested. Benchmark examples will be studied in order to calibrate and analyze what are the best parameters of the optimization algorithm and will also be applied this optimization algorithm in practical cases in order to generate a new and more optimized design.

KEYWORDS

Structural optimization; Topology optimization; Meshless methods; Finite element Method.

RESUMO

A importância de preservar recursos e proteger o ambiente é uma das principais preocupações nos dias de hoje. No ramo da engenharia, cada vez mais se procuram soluções otimizadas que permitam obter o resultado final evitando desperdícios e gastos desnecessários, mantendo as condições de segurança e de resistência estrutural. Assim, o campo da otimização tem vindo a crescer muito nos últimos anos e é uma das principais áreas de estudo.

Assim, várias técnicas de otimização estrutural têm vindo a ser utilizadas através de métodos numéricos computacionais. O objetivo da dissertação passa pela análise da eficiência e eficácia destes métodos numéricos quando aplicados em combinação com algoritmos de otimização topológica. O MEF (método dos elementos finitos) durante muitos anos foi considerado o melhor método de análise estrutural graças aos seus ótimos resultados. Contudo, quando analisados problemas complexos e com geometrias difíceis, elevadas distorções na malha afetavam os resultados obtidos. Assim sendo, os métodos sem malha, surgiram de modo a superar os problemas de malha existentes nos estudos do MEF uma vez que não necessitam da malha como o MEF mas apenas da localização dos nós no domínio do problema.

Ao longo da dissertação, os resultados obtidos com os métodos sem malha irá ser comparados com as soluções do MEF, e irão ser testadas as capacidades dos métodos sem malha. Vão ser estudados exemplos de referência de forma a calibrar e analisar os melhores parâmetros do algoritmo de otimização topológica, e também irá ser aplicado o algoritmo de otimização em casos práticos de modo a gerar um novo e mais otimizado design.

PALAVRAS-CHAVE

Otimização estrutural; Otimização da topologia; Métodos sem malha; Métodos de elementos finitos.

Índice

1	Introdução	1
1.1	ENQUADRAMENTO	1
1.2	MOTIVAÇÃO	2
1.3	OBJETIVOS	2
1.4	ESTRUTURA DO RELATÓRIO	2
2	Métodos sem malha e otimização estrutural topológica	5
2.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS(MEF)	5
2.2	MÉTODOS SEM MALHA	5
2.2.1	<i>ESTADO DA ARTE</i>	6
2.2.2	<i>PROCEDIMENTO GERAL DOS MÉTODOS SEM MALHA</i>	7
2.2.3	<i>INTEGRAÇÃO NUMÉRICA</i>	9
2.2.3.1	QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE - RPIM	9
2.2.3.2	DIAGRAMA DE VORONOÏ	10
2.2.3.3	TESSELAGEM DE DELAUNAY	12
2.2.3.4	INTEGRAÇÃO DE BASE NODAL- NNRPIM	13
2.2.4	<i>CONNECTIVIDADE NODAL</i>	15
2.2.4.1	DOMÍNIO DE INFLUÊNCIA- RPIM	15
2.2.4.2	CÉLULAS DE INFLUÊNCIA- NNRPIM	16
2.2.5	<i>FUNÇÕES DE FORMA</i>	17
2.2.6	<i>MECÂNICA DOS SÓLIDOS</i>	22
2.2.6.1	TEORIA DA ELASTICIDADE 3D	22
2.2.6.2	FORMA FRACA DE GALERKIN	23
2.2.6.3	DESCRITIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	24
2.3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	26
2.3.1	<i>FLUXOGRAMA DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL</i>	27
2.3.2	<i>ESTADO DA ARTE</i>	28
2.3.3	<i>MÉTODO SIMP</i>	29
2.3.4	<i>MÉTODO HARD KILL</i>	30
2.3.5	<i>MÉTODOS NUMÉRICOS NA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL</i>	32
3	Resultados numéricos	35
3.1	ESTUDO DE CONVERGÊNCIA	35
3.1.1	<i>ANÁLISE BIDIMENSIONAL</i>	36
3.1.1.1	RESULTADOS	39
3.1.1.2	ANÁLISE DE RESULTADOS	41
3.2	EXEMPLO DE ESTUDO GENÉRICO	46
3.2.1	<i>VIGA ENCASTRADA</i>	47
3.2.2	<i>RESULTADOS DA MALHA DE 693 NÓS</i>	49
3.2.3	<i>ANÁLISE DE RESULTADOS DA MALHA DE 693 NÓS</i>	53
3.2.4	<i>RESULTADOS DA MALHA DE 1519 NÓS</i>	54

3.2.5	<i>ANÁLISE DE RESULTADOS DA MALHA DE 1519 NÓS</i>	58
3.2.6	<i>CONCLUSÕES GERAIS</i>	59
3.3	<i>APLICAÇÕES DA OTIMIZAÇÃO NA INDÚSTRIA AUTOMÓVEL</i>	60
3.3.1	<i>OTIMIZAÇÃO DO DESIGN LATERAL DE UM AUTOMÓVEL</i>	60
3.3.2	<i>PILAR DO AUTOMÓVEL</i>	68
4	Conclusões	73
4.1	<i>CONCLUSÕES GERAIS</i>	73
4.2	<i>LIMITAÇÕES DO ESTUDO E AS SUAS VANTAGENS</i>	74
4.3	<i>TRABALHOS FUTUROS</i>	75

Índice de figuras

FIGURE 2.1	a) DIVISÃO DO DOMÍNIO DO PROBLEMA E TAMBÉM DA SUA FRONTEIRA. b) DISTRIBUIÇÃO REGULAR DE NÓS. c) DISTRIBUIÇÃO IRREGULAR DE NÓS.[8]	7
FIGURE 2.2	a) INTEGRAÇÃO DE GAUSS-LEGENDRE DE ACORDO COM O DOMÍNIO DO PROBLEMA. b) OUTRO EXEMPLO DE FORMA DE INTEGRAÇÃO DE GAUSS-LEGENDRE c) INTEGRAÇÃO NODAL DE ACORDO COM O DIAGRAMA DE VORONOÏ.[8]	8
FIGURE 2.3	a) CÉLULA ORIGINAL b) CÉLULA QUADRILÁTERA ISOMÉTRICA SEGUNDO A REGRA DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE c) RETORNO À FORMA ORIGINAL EM COORDENADAS CARTESIANAS.[8]	9
FIGURE 2.4	a) POTENCIAIS VIZINHOS DO NÓ n_0 b) LIMITE DO NÓ n_3 EM RELAÇÃO AO n_0 c) REMOÇÃO DOS NÓS n_7 E n_8 d) REPETIÇÃO DO MÉTODO NO NÓ n_4 . e) NÓS VIZINHOS DE n_0 f) NÓ n_o E CÉLULA DE VORONOÏ V_0 g) DIAGRAMA DE VORONOÏ [ADAPTADO DE 8]	12
FIGURE 2.5	a) DIAGRAMA DE VORONOÏ b) TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY c) CIRCUNFERÊNCIAS VIZINHAS NATURAIS [8]	13
FIGURE 2.6	DISTRIBUIÇÃO NODAL IRREGULAR- SUBCÉLULA QUADRÁTICA [8]	13
FIGURE 2.7	DISTRIBUIÇÃO NODAL REGULAR- SUBCÉLULA TRIANGULAR [8]	14
FIGURE 2.8	RESPECTIVOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DE GAUSS-LEGENDRE [8]	14
FIGURE 2.9	a) FORMA RETANGULAR b) FORMA CIRCULAR COM O MESMO RAIOS c) FORMA CIRCULAR COM O MESMO NÚMERO DE NÓS.[8]	15
FIGURE 2.10	a) 1º GRAU DA CÉLULA DE INFLUÊNCIA b) 2º GRAU DA CÉLULA DE INFLUÊNCIA [8]	17
FIGURE 2.11	PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL. a) OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL b) OTIMIZAÇÃO DA FORMA c) OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA.[61]	26
FIGURE 2.12	FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.[ADAPTADO DE 62]	28
FIGURE 2.13	EXEMPLO EM ESTUDO[63]	30
FIGURE 2.14	a) TOPOLOGIA b) MATERIAL A c) MATERIAL B.[63]	31
FIGURE 2.15	EVOLUÇÃO DO VOLUME, ENERGIA POR UNIDADE DE VOLUME E FORÇA DE ESMAGAMENTO.[63]	31
FIGURE 2.16	a) MODELO ORIGINAL b) MODELO OTIMIZADO [76]	32
FIGURE 2.17	a) EXEMPLO DE ESTUDO b) OTIMIZAÇÃO SEGUNDO EFG c) OTIMIZAÇÃO SEGUNDO MEF[82]	33
FIGURE 2.18	a) EXEMPLO DE ESTUDO b) OTIMIZAÇÃO SEGUNDO SPH c) OTIMIZAÇÃO SEGUNDO MEF[82]	34
FIGURE 3.1	MODELO DA VIGA ENCASTRADA E LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS	35
FIGURE 3.2	DEMONSTRAÇÃO DAS DIVISÕES QUER NO EIXO X QUER NO EIXO Y DA 1ª MALHA	38
FIGURE 3.3	TENSÕES NO PONTO A	40
FIGURE 3.4	TENSÕES NO PONTO B	40
FIGURE 3.5	TENSÃO DE CORTE NO PONTO C	41

FIGURE 3.6	DESLOCAMENTOS NO PONTO D	41
FIGURE 3.7	a) FEM _{3n} ($\sigma_{xxmin} = -21,7$ MPA; $\sigma_{xxmax} = 21,7$ MPA) b) FEM _{4n} ($\sigma_{xxmin} = -22$ MPA; $\sigma_{xxmax} = 22$ MPA) c) RPIM _{3n} ($\sigma_{xxmin} = -20,8$ MPA; $\sigma_{xxmax} = 20,8$ MPA) d) RPIM _{4n} ($\sigma_{xxmin} = -18,7$ MPA; $\sigma_{xxmax} = 18,7$ MPA) e) NNRPIM _{1c} ($\sigma_{xxmin} = -22,2$ MPA; $\sigma_{xxmax} = 22,2$ MPA) f) NNRPIM _{2c} ($\sigma_{xxmin} = -21,8$ MPA; $\sigma_{xxmax} = 21,8$ MPA) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DAS TENSÕES	43
FIGURE 3.8	a) FEM _{3n} ($\sigma_{yymin} = -9,3$ MPA; $\sigma_{yymax} = 9,3$ MPA) b) FEM _{4n} ($\sigma_{yymin} = -8$ MPA; $\sigma_{yymax} = 8$ MPA) c) RPIM _{3n} ($\sigma_{yymin} = -6,7$ MPA; $\sigma_{yymax} = 6,7$ MPA) d) RPIM _{4n} ($\sigma_{yymin} = -4,4$ MPA; $\sigma_{yymax} = 4,4$ MPA) e) NNRPIM _{1c} ($\sigma_{yymin} = -8,2$ MPA; $\sigma_{yymax} = 8,2$ MPA) f) NNRPIM _{2c} ($\sigma_{yymin} = -7,6$ MPA; $\sigma_{yymax} = 7,6$ MPA) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DAS TENSÕES	43
FIGURE 3.9	a) FEM _{3n} ($\tau_{xymin} = -5,87$ MPA; $\tau_{xymax} = 0,00665$ MPA) b) FEM _{4n} ($\tau_{xymin} = -5,5$ MPA; $\tau_{xymax} = 0,0124$ MPA) c) RPIM _{3n} ($\tau_{xymin} = -5$ MPA; $\tau_{xymax} = -0,008$ MPA) d) RPIM _{4n} ($\tau_{xymin} = -3,94$ MPA; $\tau_{xymax} = 0,0123$ MPA) e) NNRPIM _{1c} ($\tau_{xymin} = -5,64$ MPA; $\tau_{xymax} = 0,026$ MPA) f) NNRPIM _{2c} ($\tau_{xymin} = -5,4$ MPA; $\tau_{xymax} = 0,0134$ MPA) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DAS TENSÕES	44
FIGURE 3.10	a) FEM _{3n} ($\sigma_{11min} = -6,96$ MPA; $\sigma_{11max} = 24$ MPA) b) FEM _{4n} ($\sigma_{11min} = -6,1$ MPA; $\sigma_{11max} = 23,9$ MPA) c) RPIM _{3n} ($\sigma_{11min} = -5,14$ MPA; $\sigma_{11max} = 22,4$ MPA) d) RPIM _{4n} ($\sigma_{11min} = -3,3$ MPA; $\sigma_{11max} = 19,6$ MPA) e) NNRPIM _{1c} ($\sigma_{11min} = -6,24$ MPA; $\sigma_{11max} = 24,2$ MPA) f) NNRPIM _{2c} ($\sigma_{11min} = -5,84$ MPA; $\sigma_{11max} = 23,6$ MPA) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DAS TENSÕES	44
FIGURE 3.11	a) FEM _{3n} ($\sigma_{22min} = -24$ MPA; $\sigma_{22max} = 6,96$ MPA) b) FEM _{4n} ($\sigma_{22min} = -23,9$ MPA; $\sigma_{22max} = 6,1$ MPA) c) RPIM _{3n} ($\sigma_{22min} = -22,4$ MPA; $\sigma_{22max} = 5,14$ MPA) d) RPIM _{4n} ($\sigma_{22min} = -19,6$ MPA; $\sigma_{22max} = 3,33$ MPA) e) NNRPIM _{1c} ($\sigma_{22min} = -24,2$ MPA; $\sigma_{22max} = 6,24$ MPA) f) NNRPIM _{2c} ($\sigma_{22min} = -23,6$ MPA; $\sigma_{22max} = 5,84$ MPA) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DAS TENSÕES	45
FIGURE 3.12	a) FEM _{3n} ($\sigma_{eqmin} = -0,4$ MPA; $\sigma_{eqmax} = 21,4$ MPA) b) FEM _{4n} ($\sigma_{eqmin} = -0,41$ MPA; $\sigma_{eqmax} = 21,5$ MPA) c) RPIM _{3n} ($\sigma_{eqmin} = -0,354$ MPA; $\sigma_{eqmax} = 20,4$ MPA) d) RPIM _{4n} ($\sigma_{eqmin} = -3,53$ MPA; $\sigma_{eqmax} = 18,6$ MPA) e) NNRPIM _{1c} ($\sigma_{eqmin} = -0,344$ MPA; $\sigma_{eqmax} = 21,8$ MPA) f) NNRPIM _{2c} ($\sigma_{eqmin} = -0,375$ MPA; $\sigma_{eqmax} = 21,3$ MPA) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DAS TENSÕES	45
FIGURE 3.13	a) FEM _{3n} ($ u _{min} = 0$ M; $ u _{max} = 0,0368$ M) b) FEM _{4n} ($ u _{min} = 0$ M; $ u _{max} = 0,0368$ M) c) RPIM _{3n} ($ u _{min} = 0$ M; $ u _{max} = 0,0368$ M) d) RPIM _{4n} ($ u _{min} = 0$ M; $ u _{max} = 0,0369$ M) e) NNRPIM _{1c} ($ u _{min} = 0$ M; $ u _{max} = 0,0369$ M) f) NNRPIM _{2c} ($ u _{min} = 0$ M; $ u _{max} = 0,0369$ M) g) DISTRIBUIÇÃO GERAL DOS DESLOCAMENTOS	46
FIGURE 3.14	a) MODELO [85]E RESPECTIVAS SOLUÇÕES OTIMIZADAS : b) [85] c) [85] d) [85]	47
FIGURE 3.15	CARACTERIZAÇÃO DA VIGA EM ESTUDO E SUAS PROPRIEDADES	47
FIGURE 3.16	a) REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA MALHA MENOS Densa (693 NÓS) b) REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA MALHA MAIS Densa (1519 NÓS)	48
FIGURE 3.17	GEOMETRIA DO AUTOMÓVEL EM ESTUDO [86]	60
FIGURE 3.18	DOMÍNIO DO ESTUDO	61

FIGURE 3.19 REPRESENTAÇÃO DA ZONA DE REMOÇÃO DE MATERIAL QUANDO: a) A JANELA NÃO ENTRA NA CONSIDERAÇÃO DO ESTUDO b) A JANELA ENTRA NA CONSIDERAÇÃO DO ESTUDO	61
FIGURE 3.20 ZONA DE ENCASTRAMENTO	62
FIGURE 3.21 POSICIONAMENTO DAS FORÇAS	62
FIGURE 3.22 VALORES DE C_d [87]	63
FIGURE 3.23 POSICIONAMENTO E VALOR DAS FORÇAS DO VENTO	64
FIGURE 3.24 a) MODELO OTIMIZADO PELO SOFTWARE FEMAS b) MODELO COM DESIGN BASEADO NO MODELO OTIMIZADO PELO FEMAS	66
FIGURE 3.25 POSICIONAMENTO DE PORTAS E JANELAS	66
FIGURE 3.26 POSICIONAMENTO DE UMA POTENCIAL JANELA OU POSSÍVEL ZONA DE REMOÇÃO DE MATERIAL	66
FIGURE 3.27 a) DESLOCAMENTOS TOTAIS NO MODELO ORIGINAL b) DESLOCAMENTOS TOTAIS NO MODELO OTIMIZADO	67
FIGURE 3.28 a) TENSÕES MÁXIMAS NO MODELO ORIGINAL b) TENSÕES MÁXIMAS NO MODELO OTIMIZADO	67
FIGURE 3.29 ZONA DE ANÁLISE	68
FIGURE 3.30 DESIGN DO MODELO EM ESTUDO	68
FIGURE 3.31 CONDIÇÕES FRONTEIRA	69
FIGURE 3.32 a) MODELO OTIMIZADO PELO SOFTWARE FEMAS b) MODELO COM DESIGN BASEADO NO MODELO OTIMIZADO PELO FEMAS	70
FIGURE 3.33 a) DESLOCAMENTOS TOTAIS NO MODELO ORIGINAL b) DESLOCAMENTOS TOTAIS NO MODELO OTIMIZADO	70
FIGURE 3.34 a) TENSÕES MÁXIMAS NO MODELO ORIGINAL b) TENSÕES MÁXIMAS NO MODELO OTIMIZADO	70

Índice de tabelas

TABLE 3.1 DIFERENTES MALHAS DO ESTUDO DE CONVERGÊNCIA	38
TABLE 3.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA 1 ^A E ÚLTIMA MALHA A ESTUDAR DE CADA MÉTODO NUMÉRICO	39
TABLE 3.3 DIVISÃO DOS DOMÍNIOS E RESPETIVAS MALHAS	48
TABLE 3.4 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO CRITÉRIO DE VON MISES - MALHA 693 NÓS .	49
TABLE 3.5 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO CRITÉRIO DE VON MISES - MALHA 693 NÓS (CONTINUAÇÃO)	50
TABLE 3.6 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO SED - MALHA 693 NÓS	51
TABLE 3.7 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO CRITÉRIO SED - MALHA 693 NÓS (CONTIN- UAÇÃO)	52
TABLE 3.8 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO CRITÉRIO DE VON MISES - MALHA 1519 NÓS	54
TABLE 3.9 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO CRITÉRIO DE VON MISES - MALHA 1519 NÓS (CONTINUAÇÃO)	55
TABLE 3.10 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO SED - MALHA 1519 NÓS	56
TABLE 3.11 SOLUÇÃO OTIMIZADA SEGUNDO CRITÉRIO SED - MALHA 1519 NÓS (CONTINUAÇÃO)	57
TABLE 3.12 SOLUÇÕES OTIMIZADAS NO CASO EM QUE O CARRO NÃO OTIMIZA A ZONA DA JANELA	64
TABLE 3.13 SOLUÇÕES OTIMIZADAS NO CASO EM QUE TODA A ÁREA É OTIMIZADA	65
TABLE 3.14 QUADRO RESUMO DOS DESLOCAMENTOS E TENSÕES	67
TABLE 3.15 SOLUÇÕES OTIMIZADAS	69
TABLE 3.16 QUADRO RESUMO DOS DESLOCAMENTOS E TENSÕES	71

Lista de siglas e símbolos

Lista de siglas

BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
DEM	Diffuse Element Method
DR	Taxa de Remoção
EFGM	Element Free Galerkin Method
ESO	Evolutionary Structural Optimization
FEMAP	Finite Element Modelling And Postprocessing
FEMAS	Finite Element and Meshless Analysis Software
FPM	Finite Point Method
FSD	Fully Stress Design
ISEP	Instituto Superior de Engenharia do Porto
MEF	Método dos elementos finitos
MFS	Method of the Finite Sphere
MLPG	Meshless Local Petrov-Galerkin
MLS	Moving Least Square
MQ-RBF	Multi-Quadrics Radial Basis Functions
MFEM	Meshless Finite Element Method
MP	Mathematical Programming
NEM	Natural Element Method
NNFEM	Natural Neighbour Finite Element Method
NNRPIM	Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method
NREM	Natural Radial Element Method
OC	Optimality Criteria
PBF	Polynomial Basis Function
PIM	Point Interpolation Method
RBF	Radial Basis Function
RBFM	Radial Basis Function Method
RPI	Radial Point Interpolators
RPIM	Radial Point Interpolation Method
SED	Strain Energy Density
SIMP	Solid Isotropic Microstructures with Penalization
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
VM	Von Mises

Lista de símbolos

$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$	Coeficiente de RBF
\mathbf{B}	Matriz de Deformabilidade
$\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$	Coeficiente de PBF
\mathbf{c}	Matriz de Características do Material
d	Dimensão do Domínio
D	Tamanho do Suporte do Domínio
d_a	Espaçamento Médio Nodal
d_{il}	Norma do Vetor
d_{0i}	Distância Entre Nó 0 e um Vizinho Nó i
d_{0i}^*	Metade de d_{0i}
d_x, d_y	Dimensões de Influência de Domínio Retangular
E	Módulo de Elasticidade
$\mathbf{F}(\mathbf{x})$	Função Numérica de Integração
\mathbf{f}_b	Força do Corpo
\mathbf{f}_t	Força Externa
g	Aceleração da Gravidade
\mathbf{H}	Matriz de Interpolação
h	Altura da Viga
h_v	Espaço Nodal Envolvente do Ponto \mathbf{x}_I
I	Momento de Inércia
L	Comprimento da Viga
\mathbf{L}	Operador diferencial de matriz
M_I	Ponto Médio
m	Número de Monómios
\mathbf{N}	Vetor Nodal
N_i	Função Isoparamétrica
n	Número de Nós no Domínio
n_I	Correspondente Nó
\mathbf{P}	Matriz Momento Polinomial
P_I	Vértice da Célula de Voronoï
$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)$	Vetor PBF
\mathbf{R}	Matriz Momento de RBF
\mathbb{R}^2	Conjunto de Números Bidimensionais
\mathbb{R}^d	Conjunto de Números D-dimensionais
$\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)$	Vetor RBF
\mathbf{T}	Energia Cinética
\mathbf{U}	Energia da Derformação
$u(\mathbf{x}_I)$	Valor Nodal
$u^h(\mathbf{x}_I)$	Função Interpolação
\mathbf{V}	Vetor da Célula de Voronoï
V_i	Célula de Voronoï
\mathbf{W}_f	trabalho efetuado pelas forças

Lista de símbolos (Continuação)

\mathbf{X}	Vetor de Coordenadas Nodais
\mathbf{x}_I	Ponto de Interesse
$\ \cdot\ $	Norma da Distância
Ω	Espaço Bidimensional
\in	Pertence
\subset	Subconjunto
Γ	Fronteira
Γ_t	Fronteira Natural
Γ_u	Fronteira Essencial
ε	Deformação
σ	Tensão
%	Porcentagem
ν	Coefficiente de Poisson

1 Introdução

1.1 Enquadramento

Nos dias de hoje, a sustentabilidade é um importante fator a ter em conta, sobretudo porque os materiais estão a ser consumidos de uma forma mais rápida do que a sua regeneração natural. Isto deve-se principalmente a excessos de consumo e consequentemente mau aproveitamento dos materiais. Atualmente, vivemos tempos em que a eficiência e a sustentabilidade falam mais alto e têm de estar presentes.

Recentemente, devido ao aumento da densidade populacional e à urbanização, a construção de edifícios tem vindo a acelerar exponencialmente. O procedimento de construção de edifícios tem por base um conceito de ajustamento de cálculos e de modo a obter uma estrutura conceptual apta, é necessário passar por várias etapas. Exemplo dessas fases são a análise do projeto, análise mecânica, análise comercial de elementos finitos, entre outras [1-5]. Ao efetuar todas estas etapas e após um longo processo de tentativa erro, há um gasto de tempo de trabalho exagerado e consequentemente um aumento de preços uma vez que o não se trata de um sistema otimizado. De modo a ultrapassar estes problemas, vários estudos a nível de otimização estrutural têm servido não só para diminuir o peso total da estrutura (beneficiando a nível de custos e no facto de melhor aproveitamento de materiais) mas também para acelerar o processo de cálculo, minimizando grande parte das etapas antes referidas e garantindo acima de tudo os parâmetros de exigência de engenharia, mantendo a mesma ou maior capacidade de resistência. No final, tanto a segurança e eficácia estrutural como os benefícios monetários são atingidos com maior eficiência. [6]

Graças ao desenvolvimento da tecnologia, é possível utilizar estudos numéricos tais como método dos elementos finitos (MEF) [7], método elementos sem malha [8], para simular e calcular problemas complexos e adversidades no ramo da engenharia de forma otimizada, e de certa forma promovendo a sustentabilidade. É através destes métodos que a otimização estrutural tem vindo a ser cada vez mais eficaz e rentável.

A otimização estrutural tem nos últimos anos evoluído também noutras áreas, principalmente na aeronáutica [9,10] e ramo automóvel cujo objetivo consiste na diminuição do peso. Assim sendo, de acordo com estudos quanto menor o peso automóvel/estrutura, menor são as emissões de carbono para a atmosfera. Também no ramo da saúde como por exemplo na biomédica a introdução da otimização estrutural permite o desenvolvimento de próteses antes inexistentes.

1.2 Motivação

Proporcionar a melhor qualidade e segurança, tentando economizar o máximo, tem sido dos maiores desafios da engenharia. Nos últimos anos novas técnicas, estudos e investigações têm sido efetuados de modo a permitir melhor qualidade de produtos tendo em conta a minimização dos seus custos e da poluição consequente. De um modo geral, o grande objetivo é aumentar a eficiência, eficácia e produtividade na construção de componentes mecânicos através da otimização topológica estrutural.

A otimização estrutural tem por base esse princípio e graças aos avanços das tecnologias principalmente a nível computacional, é possível a utilização do MEF e de elementos sem malha em diversos problemas. Estes métodos de análise são ferramentas imprescindíveis nos dias de hoje e a sua aplicação tem vindo a crescer exponencialmente.

1.3 Objetivos

Os principais objetivos da dissertação são:

- Estudo e aplicação de métodos numéricos de forma a promover a otimização estrutural;
- Utilização como base exemplos de otimização de referência de modo a aferir os parâmetros de otimização topológicos mais eficientes;
- Comparar a performance entre um modelo inicial e após a sua otimização utilizando Softwares como o FEMAS e o FEMAP;
- Demonstrar a importância destes métodos na otimização estrutural, promovendo melhores propriedades, resistência e redução de peso.

1.4 Estrutura do relatório

No primeiro capítulo é apresentada uma pequena introdução do tema de trabalho e são explicados os objetivos e motivação.

O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica efetuada sobre o tema escolhido. Em primeiro lugar fez-se uma ligeira abordagem ao método dos elementos finitos, seguido da apresentação do tema dos métodos sem malha. Por fim, é abordada a otimização topológica estrutural.

No terceiro capítulo é apresentada o desenvolvimento da dissertação, onde são realizados: estudo de convergência, comparações de otimizações tendo por base

exemplos referências e também aplicações de otimização em casos práticos.

No capítulo final, são apresentadas as conclusões e também ideias para futuros trabalhos.

2 Métodos numéricos e otimização estrutural topológica

2.1 Método dos elementos finitos(MEF)

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica de simulação computacional de problemas complexos, principalmente utilizado em campos de engenharia como aeronáutica, mecânica, civil, entre outros.

Neste método, o domínio é dividido em elementos finitos ligados entre si, formando assim uma malha que para além de conter os elementos, contém também as relações de conectividade entre cada elemento [11].

Apesar de, atualmente, ser uma das técnicas mais usadas, o MEF pode apresentar dificuldade numéricas na análise de estruturas discretizadas com malha muito distorcidas [12-16] ou na análise de problemas de grandes deformações que conduzam a elevadas distorções da malha [17-19]. Devido a tal, outros métodos surgiram de modo a ultrapassar tais problemas e têm atraído o interesse da comunidade da mecânica computacional [20]. Este é o caso dos métodos sem malha, que pelo facto de não apresentar malha, tal como o nome indica, não sofrerá distorção da malha [21].

2.2 Métodos sem malha

Recentemente, o campo de investigação de métodos discretos sem malha tem vindo a receber um maior grau de atenção, principalmente devido a não necessitar de malha estruturada na resolução das equações [22-25].

Os métodos sem malha [8], usam uma série de nós para definir o domínio de solução, e permitem a inexistência de malha estruturada ou de qualquer interligação preestabelecida entre os nós [26]. Os nós podem ser distribuídos arbitrariamente uma vez que as funções de campo são aproximadas dentro de um domínio de influência ao invés de um elemento. Ao contrário da regra de não sobreposição existente no MEF, nos métodos sem malha, os domínios de influência podem e devem-se sobrepor[8].

Neste estudo serão explorados os métodos “Radial Point Interpolation Method” [RPIM] e no “Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method” [NNRPIM].

2.2.1 Estado da arte

Os métodos sem malha surgiram de modo a melhorar desvantagens existentes em métodos discretos anteriores, como por exemplo a distorção da malha quando perante elevadas deformações.

Os primeiros métodos sem malha a serem utilizados usavam funções aproximadas.

Um dos métodos mais antigos é o “Smooth Particle Hydrodynamics Method” (SPH) [27], e tem por base a aproximação de Kernel que anos mais tarde iria levar ao aparecimento do Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) [28]. Mais tarde Lancaster e Salkauskas, em 1981, foram os responsáveis por desenvolver o “Moving Least Square” (MLS) [29]. O primeiro método a ser implementado, e que usava o MLS, foi o “Diffuse Element Method” (DEM) [30]. Vários estudos foram feitos de modo a melhorar o DEM e, em 1994, Belytschko propôs o método “Element Free Galerkin Method” (EFGM) [31], um dos principais métodos sem malha que usa um espaço nodal independente da malha de integração. Em 1998, o método Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)[32] foi desenvolvido para resolver problemas lineares e não lineares e anos mais tarde evoluiu de forma a originar o “Method of the Finite Spheres” (MFS) [33]. Outro método relevante é o “Finite Point Method” (FPM) [34-35]. O Radial Basis Function Method (RBFM) [36] emprega funções de base radial para aproximar os campos de variáveis do domínio, aplicando a norma euclidiana.

Apesar do seu sucesso, estes métodos de aproximação de funções não possuíam a propriedade de delta Kronecker. Tal impedia a imposição de condições de fronteira essenciais e naturais utilizando métodos de imposição diretos. De modo a ultrapassar esse problema, foram desenvolvidos nos últimos anos outros métodos que, apesar de não serem tão suaves como os descritos anteriormente, utilizam funções de interpolação para superar o problema antes existente, a falta da propriedade delta de Kronecker.

Os métodos mais pertinentes foram o “Point Interpolation Method” (PIM) [37], o “Point Assembly Method” [38], o “Radial Point Interpolation Method” (RPIM) [39,40], o “Meshless Finite Element Method” (MFEM) [41]. Quer o “Natural Neighbour Finite Element Method” (NNFEM) [42,43] quer o “Natural Element Method” (NEM) [44,45] utilizam as funções de interpolação de Sibson e o diagrama de Voronoi para estabelecer a conectividade nodal entre nós.

A combinação do NEM com o RPIM permitiu desenvolver o Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method (NNRPIM) [46]. Recetemente, surgiu também o Natural Radial Element Method (NREM) [47,48].

2.2.2 Procedimento geral dos métodos sem malha

Tal como na maioria dos métodos numéricos, os métodos sem malha seguem um procedimento específico. Em primeiro lugar, é necessário estabelecer a geometria do problema em questão, sendo definidos os seus contornos e condições fronteiras essenciais. A segunda etapa, corresponde à discretização do domínio do problema e também da sua fronteira (figura 2.1 a)), em conjuntos de nós, quer de uma forma regular (figura 2.1 b)) quer irregular (figura 2.1 c)).

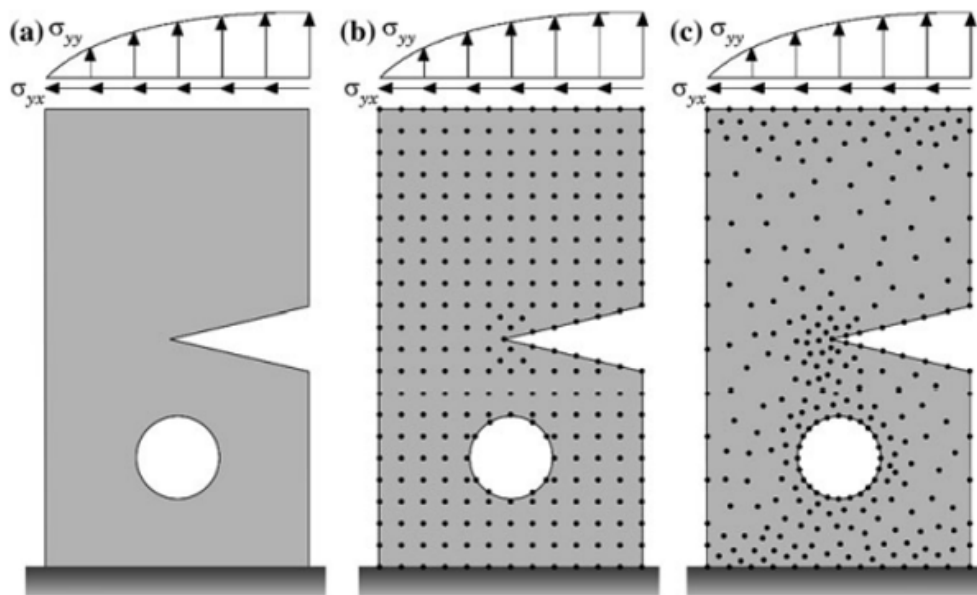


Figure 2.1 – a) Divisão do domínio do problema e também da sua fronteira. b) Distribuição regular de nós. c) Distribuição irregular de nós.[8]

Assim como o nome indica, as distribuições nodais dos métodos sem malha não formam uma malha. Isto deve-se ao facto de não ser necessária nenhuma informação sobre a relação entre cada nó de modo a obter a função interpolada do campo de variáveis. A única informação requisitada por estes métodos é a localização Cartesiana de cada nó existente no problema. Tal como no MEF, a densidade nodal e o espaço entre distribuição de nós, afetam a performance dos métodos sem malha. Quanto melhores estes parâmetros, melhor será a precisão dos resultados obtidos. Contudo, quanto maior for a concentração nodal, mais elevados são os custos computacionais. Desse modo é necessário uma melhor gestão da concentração nodal. Por exemplo quando é previsto um grande campo de concentração de tensões, a densidade nodal deve ser maior, de modo a obter uma maior precisão de resultados, enquanto que noutras zonas menos relevantes não é necessário tal preocupação, evitando custos desnecessários.

Após a conclusão da distribuição nodal, é necessário a construção de uma malha de integração devido aos requisitos dos métodos numéricos, cujo objetivo passa pela

integração numérica das equações da “weak form” que regem o fenômeno físico[8]. Tal como no MEF, é mais usual a utilização da integração de Gauss-Legendre de acordo com o domínio do problema (figura 2.2 a)). Todavia, outras soluções também são validas nos métodos sem malha (figura 2.2 b)). Outra forma de integrar a equação da forma fraca de Galerkin é através da integração nodal(figura 2.2 c)), que utiliza os princípios dos diagramas de Voronoï para obter o peso de integração de cada nó. Ao utilizar a integração nodal, a distribuição nodal vai permitir a geração automática da malha de integração, levando em alguns casos a uma diminuição da eficiência do método, sendo necessário implementar métodos de estabilização, aumentando naturalmente o custo computacional [49-51].

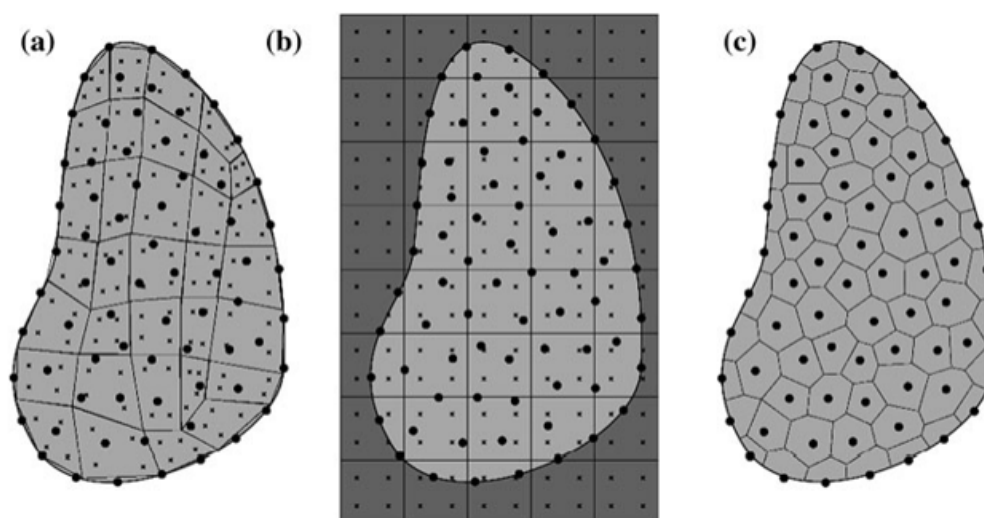


Figure 2.2 – a) Integração de Gauss-Legendre de acordo com o domínio do problema. b) Outro exemplo de forma de integração de Gauss-Legendre c) Integração nodal de acordo com o diagrama de Voronoï.[8]

O próximo passo passa pelo estabelecimento da conectividade nodal. Dependendo do método, são utilizados diferentes conceitos. No caso do NNRPIM é utilizada o conceito das células de influência, enquanto no RPIM é usado conceito do domínio de influência.

Quando a conectividade nodal é finalizada, são construídas funções de aproximações ou interpolações para obter uma aproximação/interpolação do campo de variáveis.

Por último, é estabelecido o sistema de equações, que quando agrupadas em forma de matriz são resolvidas utilizando técnicas apropriadas para o problema em estudo [8].

2.2.3 Integração numérica

Garantir a melhor relação entre a densidade de nós e a densidade da malha de integração é dos fatores mais importante a ter em consideração quando se aplicam os métodos sem malha. Esta relação tem de ser revista sempre que o procedimento é alterado ou quando os domínios de influência são modificados. De modo a obter esta melhor relação, vários estudos de autores diferentes foram efetuados, propondo diferentes expressões empíricas[64] .

Os dois tipos de integração apresentados são a quadratura de Gauss-Legendre (RPIM) e a integração de base nodal (NNRPIM).

2.2.3.1 Quadratura de Gauss-Legendre - RPIM

O RPIM não é verdadeiramente considerado um método de elemento sem malha uma vez que usa um processo de integração independente da malha de nós. O método de integração numérica utilizado é o da quadratura de Gauss-Legendre e, posteriormente, é aplicado o conceito de domínio de influência, o qual permite estabelecer a conectividade nodal.

O método de integração da quadratura de Gauss-Legendre [39,40] é o utilizado pelo RPIM. Este método baseia-se na transformação de uma célula de integração quadrilátera “original” (figura 2.3 a)) - numa célula quadrilátera isométrica e de seguida pontos são distribuídos dentro desse mesmo quadrado usando a regra da quadratura de Gauss-Legendre (no caso da figura são utilizados 2×2 pontos de Gauss (figura 2.3 b)). Estando atribuída a localização destes pontos de integração nas coordenadas isoparamétricas, é possível regressar ao espaço Cartesiano e definir as coordenadas cartesianas do ponto de integração (figura 2.3 c)). Caso a malha de integração esteja adaptada ao domínio de estudo não são necessários quaisquer pós tratamento (figura 2.2 a)) - mas se não estiver, todos os pontos fora do domínio terão de ser eliminados (figura 2.2 b)).

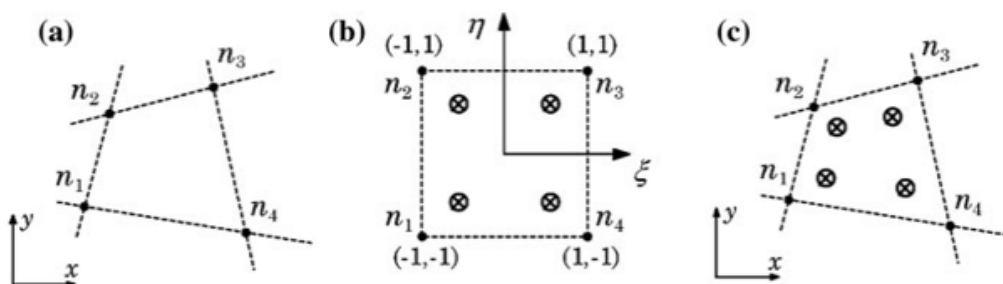


Figure 2.3 – a) Célula original b) Célula quadrilátera isométrica segundo a regra da quadratura de Gauss-Legendre c) Retorno à forma original em coordenadas cartesianas.[8]

Note-se que a célula de integração quadrilátera original, está segundo o sistema de coordenadas globais Cartesiana representado por (x,y) e o sistema de coordenadas naturais por (ζ,η) .

As equações 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 representam as funções de interpolação.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 - \eta) \quad (2.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \zeta)(1 + \eta) \quad (2.2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \zeta)(1 + \eta) \quad (2.3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \zeta)(1 - \eta) \quad (2.4)$$

Através das funções de função isoparamétricas é possível determinar qualquer ponto no interior da célula. O peso de integração de cada um dos pontos de integração é obtido através da multiplicação do peso isoparamétrico destes mesmos pontos com o inverso do determinante da matriz Jacobian das respetivas células [8].

Assim, é possível definir o integral de uma dada função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ do domínio Ω através da sua expressão exacta, ou através da sua expressão aproximada,

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_Q} W_i \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \quad (2.5)$$

sendo, W_i o peso no ponto \mathbf{x}_i e n_Q o número total de pontos de integração definidos no interior do domínio Ω .

2.2.3.2 Diagrama de Voronoï

O diagrama de Voronoï[52] é contruido com base no conceito dos vizinhos naturais, introduzido por Sibson[53].

Considerando um conjunto de nós $\mathbf{N} = \{ n_1, n_2, \dots, n_N \} \subset \mathbb{R}^d$ com $\mathbf{X} = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \} \in \Omega$. O diagrama de Voronoï é definido por N sub-regiões V_i fechadas e convexas, divididas no espaço \mathbf{X} . Cada célula V_i está associada a um nó n_i de maneira que qualquer ponto dentro do conjunto V_i está mais perto de n_i do que $n_j \in \mathbf{N} \wedge i \neq j$. Um conjunto de células Voronoï $\mathbf{V} = \{ V_1, V_2, \dots, V_N \}$ definem o diagrama de Voronoï e são definidas por:

$$V_i = \{ \mathbf{x}_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_i\| < \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\|, \forall i \neq j \} \quad (2.6)$$

, onde \mathbf{x}_I corresponde a um ponto de interesse no domínio e $\|\cdot\|$ a norma da dis-

tância entre dois pontos do domínio. Assim, a célula de Voronoï V_i é representada geometricamente por todos os pontos mais próximos de n_i do que qualquer outro ponto.

Assim sendo, é representado um espaço bidimensional $\Omega \in \mathbb{R}^2$, de modo a permitir uma melhor visualização da construção do diagrama de Voronoï. O objetivo passa pela determinação da célula de Voronoï V_0 correspondente ao nó n_0 . Consideremos o seguinte exemplo de conjunto de potenciais nós “vizinhos” de n_0 (representado na figura 2.4 a)). Destes nós, é escolhido um nó próximo de n_0 , por exemplo o nó n_3 (figura 2.4 b)) e é determinado o seu vetor \mathbf{u}_{30} :

$$\mathbf{u}_{30} = \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_3)}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_3\|} \quad (2.7)$$

Assumindo que $\mathbf{u}_{30} = \{u_{30}, v_{30}, w_{30}\}$ corresponde ao vetor normal de um plano, é formado o plano π_{30} :

$$u_{30}x + v_{30}y + w_{30}z = u_{30}x_3 + v_{30}y_3 + w_{30}z_3 \quad (2.8)$$

Todos os nós que não pertençam à seguinte expressão, serão eliminados da possibilidade de ser “vizinhos” do nó n_0 .

$$u_{30}x + v_{30}y + w_{30}z \geq u_{30}x_3 + v_{30}y_3 + w_{30}z_3 \quad (2.9)$$

De tal forma são excluídos os nós n_7 e n_8 como pode ser visto na figura 2.4 c). O método é repetido para os diferentes nós que rodeiam n_0 (figura 2.4d)) acabando por ser eliminados todos os nós não pertencentes ao sistema da equação 2.10:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{10}x + v_{10}y + w_{10}z \geq u_{10}x_1 + v_{10}y_1 + w_{10}z_1 \\ u_{20}x + v_{20}y + w_{20}z \geq u_{20}x_2 + v_{20}y_2 + w_{20}z_2 \\ u_{60}x + v_{60}y + w_{60}z \geq u_{60}x_6 + v_{60}y_6 + w_{60}z_6 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Após a seleção nodal restam apenas os nós designados de nós “vizinhos” e assim é definido o perímetro do domínio obtido (figura 2.4 e)). O último passo para obter a célula de Voronoï, passa por aplicar a expressão 2.11, onde é determinado o domínio exato da célula:

$$d_{0i}^* = \frac{d_{0i}}{2} = \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i\|}{2} \quad (2.11)$$

A célula de Voronoi corresponde à área deste último domínio (figura 2.4 f)). Este processo é repetido para os seguintes nós, formando assim as restantes células de Voronoi (figura 2.4 g)).

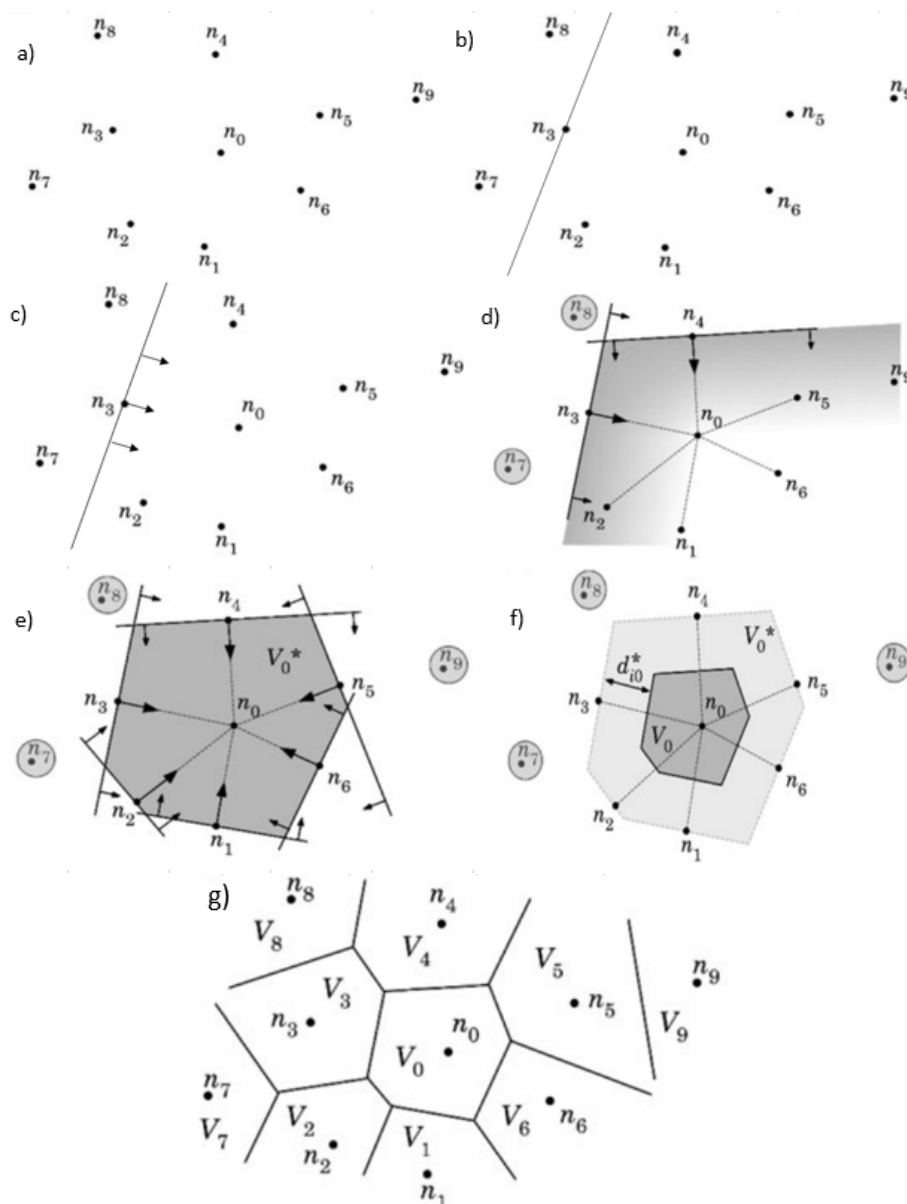


Figure 2.4 – a) Potenciais vizinhos do nó n_0 b) limite do nó n_3 em relação ao n_0 c) Remoção dos nós n_7 e n_8 d) Repetição do método no nó n_4 . e) nós vizinhos de n_0 f) Nó n_0 e célula de Voronoi V_0 g) Diagrama de Voronoi [adaptado de 8]

2.2.3.3 Tesselagem de Delaunay

O método da triangulação de Delaunay[54] aplica a geometria apresentada no subcapítulo 2.2.3.2 e é construído através da conexão de nós respetivos às células de Voronoi (figura 2.5 a)).

Uma importante propriedade deste método é o “critério da circunferência vazia”[55,

56], mostrado na figura 2.5 c). A integração numérica do NNRPIM resulta do teorema de triangulação de Delaunay (figura 2.5 b)).

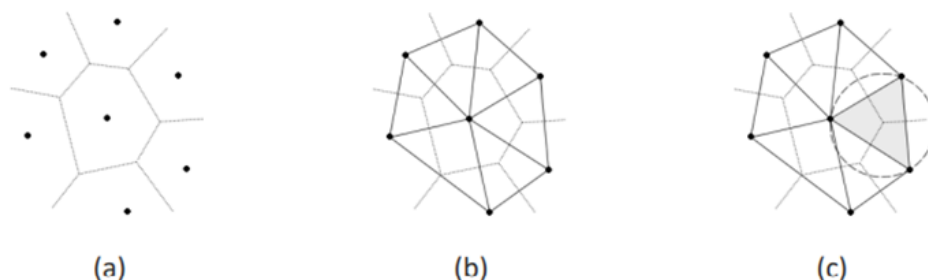


Figure 2.5 – a) Diagrama de Voronoi b) Triangulação de Delaunay c) circunferências vizinhas naturais [8]

2.2.3.4 Integração de base nodal- NNRPIM

O método NNRPIM utiliza uma nova técnica de integração da base nodal que tem por base o diagrama de Voronoi e a triangulação de Delaunay. Ao contrário do RPIM, este método é considerado verdadeiramente sem malha, porque apenas necessita da localização espacial dos nós para estabelecer a conectividade nodal (através de células de influência), determinar os pontos de integração e construir as funções de forma.

Considerando a geometria da célula de Voronoi e usando a triangulação de Delaunay é possível dividir cada uma das células de Voronoi em n sub-células (figura 2.6). Estas sub-células quadrática são definidas por um ponto n_I , P_I , que corresponde ao vértice da célula de Voronoi, e os pontos médios M_I . No caso de a distribuição nodal ser regular a célula de Voronoi possui uma forma quadrática perfeitas, e repetindo o mesmo processo obtemos uma sub-célula triangular em vez de quadráticas (figura 2.7).

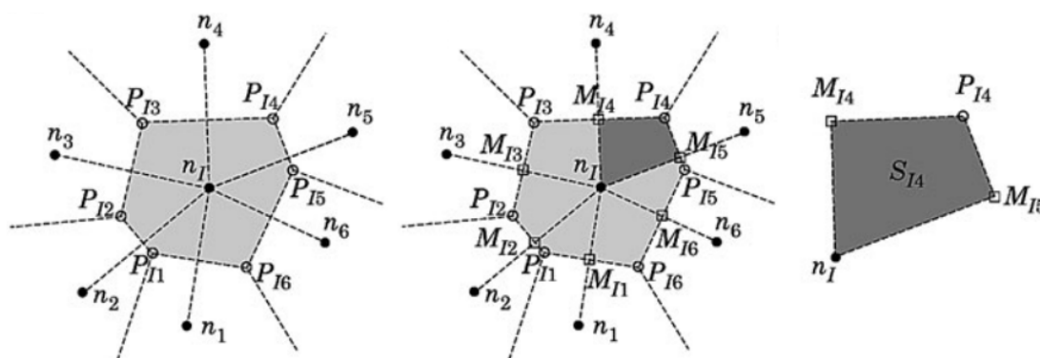


Figure 2.6 – Distribuição nodal irregular- subcélula quadrática [8]

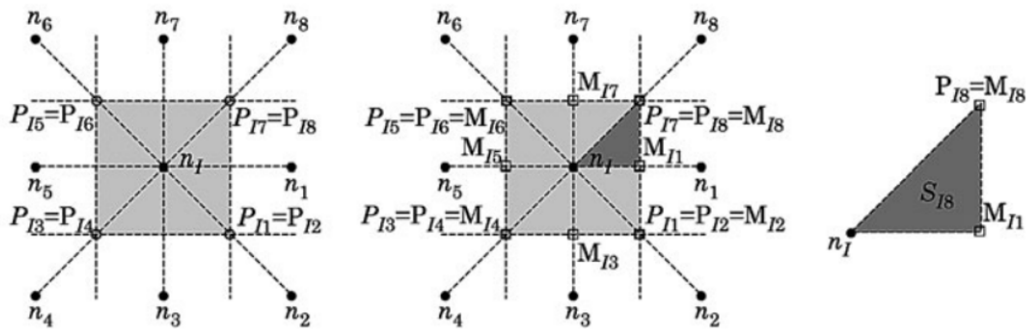


Figure 2.7 – Distribuição nodal regular- subcélula triangular [8]

O passo seguinte passa por aplicar o método da quadratura de Gauss-Legendre. Este pode ser aplicado apenas um ponto de integração no centro da célula (ordem de integração 0). É também possível efetuar uma nova divisão das sub-células de Voronoi através do ponto central e dos pontos médios das arestas desta subcélula. Neste caso aplicando a integração de Gauss vai originar entre 1 (ordem de integração 1) a k pontos (ordem de integração k).

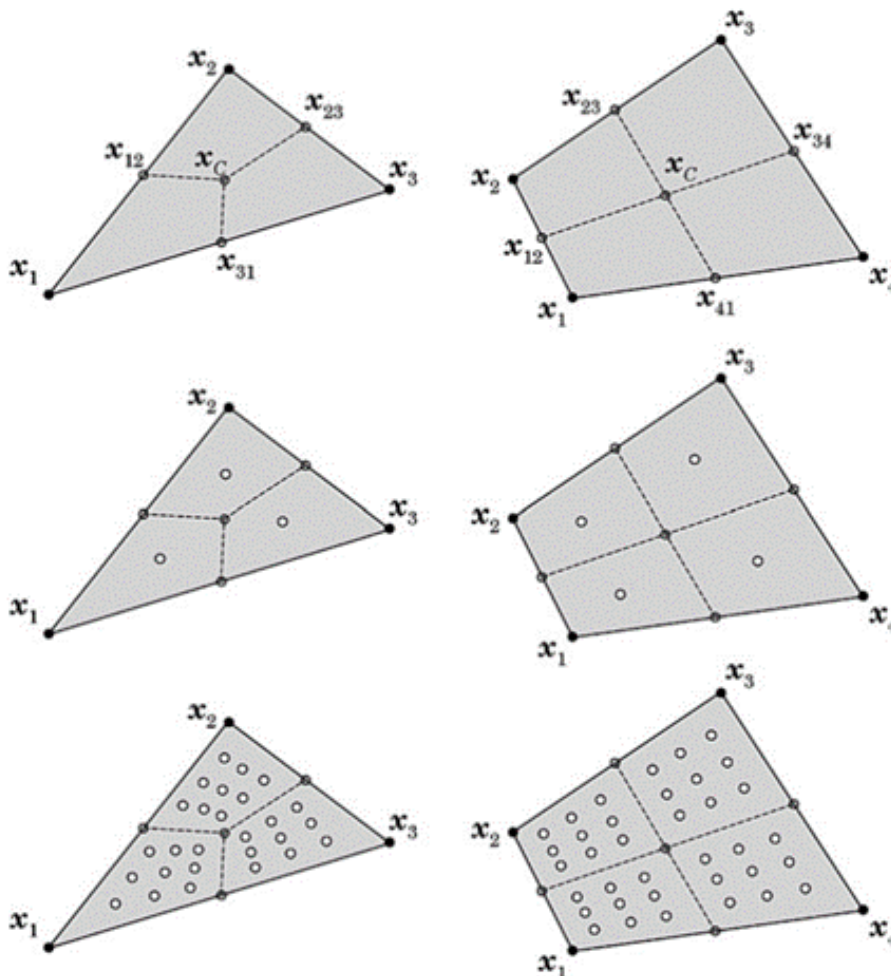


Figure 2.8 – Respetivos pontos de integração através do método de Gauss-Legendre [8]

O peso de cada subcélula corresponde ao valor da sua área e conseqüentemente o peso da célula de Voronoï responde à soma das áreas das subcélulas correspondentes.

Após a apresentação da formulação bidimensional (2D), é possível compreender a formulação tridimensional (3D). Se a distribuição nodal é irregular, a célula 3D de Voronoï é subdividida em subcélulas hexagonais. Caso seja regular, é subdividida em subcélulas tetraédricas.

2.2.4 Conectividade nodal

O próximo passo do estudo dos métodos sem malha passa pelo estudo da conectividade nodal. Uma vez que não há uma conectividade nodal pré-estabelecida entre os nós, os métodos sem malha utilizam o conceito de "domínio de influência", no caso do RPIM e, no caso do NNRPIM, é aplicado o conceito das células de influência. [8].

2.2.4.1 Domínio de influência- RPIM

O método RPIM utiliza o domínio de influência para estabelecer a conectividade nodal. Cada domínio de influência corresponde a uma área que abrange n número de nós quando se trata de uma análise 2D. Quando se trata de um espaço 3D, o domínio de influência em vez de acomodar a área, é definido pelo volume de n nós.

Contudo, a eficácia do resultado final depende principalmente da variação da forma e tamanho destes domínios. No caso de uma análise 2D, existem 2 tipos de domínios: retangulares e circulares.

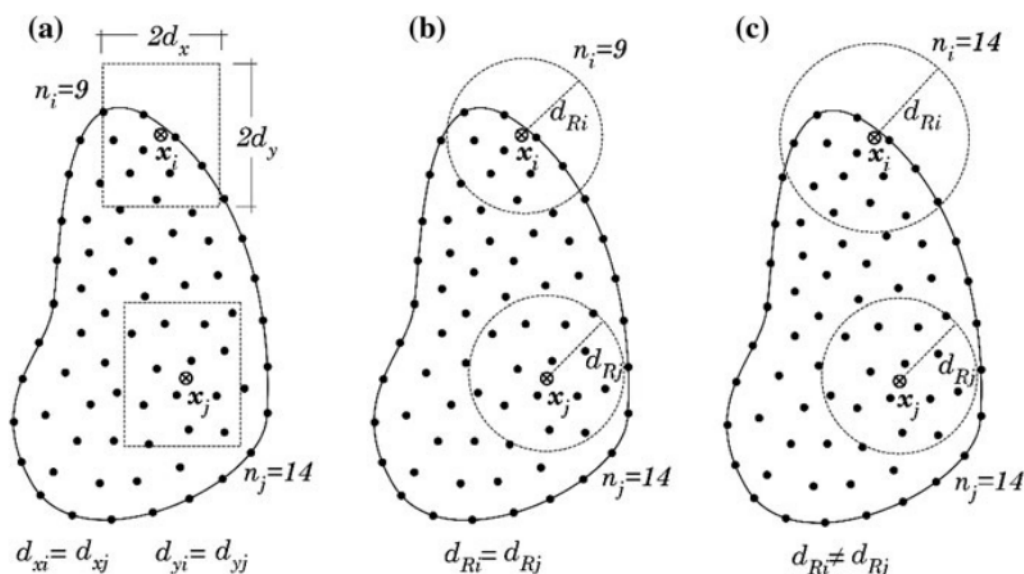


Figure 2.9 – a) Forma retangular b) Forma circular com o mesmo raio c) Forma circular com o mesmo número de nós.[8]

Os domínios retangulares são definidos de acordo com as variáveis d_x e d_y . Escolhendo um ponto \mathbf{x}_I como origem do retângulo e tendo as variáveis d_x e d_y atribuídas, o domínio de influência fica definido contendo todos os nós que se encontram dentro deste retângulo (figura 2.9a)).

No caso de um domínio circular, este depende da variável d_R (raio da circunferência). Escolhendo um ponto \mathbf{x}_I e sendo atribuída a variável d_R , o ponto \mathbf{x}_I funciona como centro do círculo e d_R como valor do raio. Todos os nós dentro deste círculo fazem parte do domínio de influência.

De modo a melhorar a performance é importante que os domínios contenham a mesma quantidade de nós. Domínios de influência não equilibrados são originados devido a irregularidades na definição dos limites. Assim sendo, no caso da forma circular, não é adequado que os domínios tenham o mesmo valor de d_R porque para o mesmo raio pode existir uma grande diferença de nós. Tal é evidenciado na fig. 2.9 b), onde os domínios têm o mesmo valor de raio, mas um deles engloba 14 nós enquanto que o outro apenas 9. Então de forma a obter os melhores resultados, utilizam-se domínios diferentes, mas que contenham a mesma quantidade de nós tal como na figura 2.9 c).

De acordo com estudos na área dos métodos sem malha, chegou-se à conclusão que a quantidade de nós dos domínios de influência deveriam ser entre 9 e 16 [37,39]. Nesses trabalhos, a dimensão d é definida através da expressão 2.12:

$$d = k \times h_v \quad (2.12)$$

Onde h_v corresponde ao espaço nodal envolvente do ponto x_I e k um valor adimensional entre 1,5 e 2,5[8].

2.2.4.2 Células de influência- NNRPIM

Ao contrário do NRPIM, o NNRPIM utiliza uma nova técnica desenvolvida em 2007 por Jorge Belinha e os seus colegas de trabalho. Esta técnica utiliza a localização espacial dos nós para determinar de forma automática os domínios de influência. O diagrama de Voronoi e a triangulação de Delaunay (conceitos já abordados antes nos capítulos 2.2.3.2 e 2.2.3.3 da dissertação) são métodos usados para estabelecer a conectividade nodal. Para determinar os domínios de influência utiliza-se a metodologia e geometria das células de Voronoi e é daí que se obteve o nome de “Células de influência” para os domínios de influência.

Tal como no domínio de influência do método RPIM, as células de influência têm uma metodologia idêntica através da sobreposição das células. O que difere é a determinação do conjunto de nós através do diagrama de Voronoi ao invés de uma busca radial como é feito no RPIM.

São então abordados dois tipos de diferentes de células de influência: as de 1º grau (figura 2.10 a)) e as de 2º grau (fig. 2.10 b)).

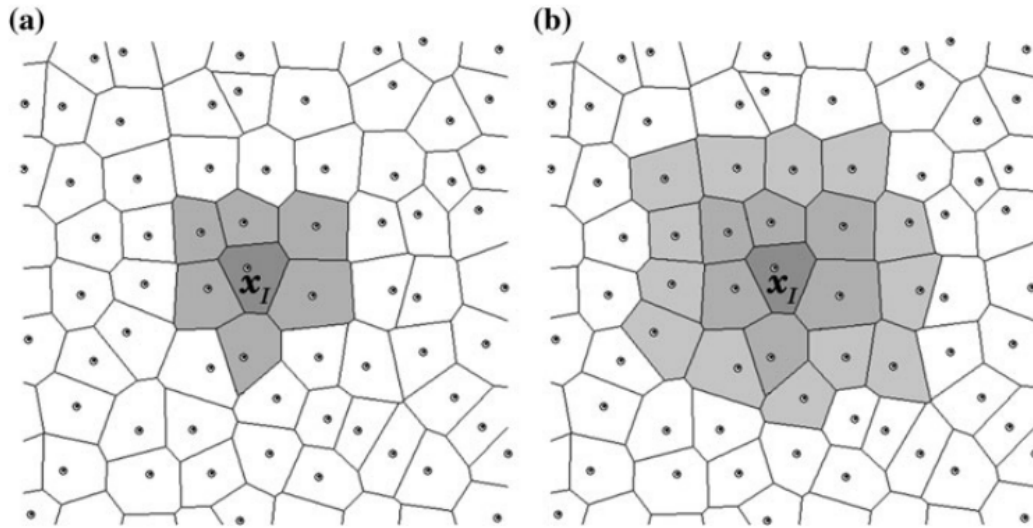


Figure 2.10 – a) 1º grau da célula de influência b) 2º grau da célula de influência [8]

De forma a obter a “célula de influência de 1º grau” é escolhido um ponto de interesse \mathbf{x}_I . Este ponto “procura” à sua volta os nós mais próximos seguindo o princípio do diagrama de Voronoï. Esta célula de influência de 1º grau é composta apenas por estes primeiros vizinhos.

A “célula de influência de 2º grau” é inicialmente obtida através da mesma forma que a “célula de influência de 1º grau”. Com base no diagrama de Voronoï já anteriormente construído, os vizinhos naturais da “célula de influência de 1º grau” são adicionados à célula de influência. No essencial, a “célula de influência de 2º grau” é constituída pela “célula de influência de 1º grau” e os seus vizinhos. Uma vez sendo maior, esta “célula de influência de 2º grau” obterá maior e melhor precisão de resultados. Em contrapartida o tempo e custo computacional é superior neste caso.

2.2.5 Funções de forma

Para obter as funções de forma, quer o RPIM quer o NNRPIM utilizam o métodos interpoladores pontuais radiais (RPI). O RPI combina funções de base polinomial com funções de base radial (RBF) para formular as funções de forma e este método tem uma grande influência nos parâmetros de forma da solução final.

O RBF pode ser definido por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_I) = \{r_1(\mathbf{x}_I) \quad r_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad r_n(\mathbf{x}_I)\}^T = \{r_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_I) \quad r_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_I) \quad \dots \quad r_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_I)\}^T \quad (2.13)$$

Há diferentes tipos de RBF que podem ser utilizados como funções de base na formulação do RPI, mas para o caso do estudo de métodos sem malha o mais comum é a função de base radial multiquadrática MQ-RBF[57]. É definida segundo a equação 2.14:

$$r_i(\mathbf{x}_I) = (d_{iI}^2 + (\gamma d_a)^2)^p \quad (2.14)$$

onde, d_{iI} corresponde à norma do vetor entre o ponto de interesse e o campo de nós. Num campo tridimensional pode ser definida como:

$$d_{iI} = \sqrt{(x_i - x_I)^2 + (y_i - y_I)^2 + (z_i - z_I)^2} \quad (2.15)$$

e, γ e p são parâmetros de forma da MQ-RBF. Estes servem para melhorar os resultados e otimizar o processo.

Para estudos de métodos sem malha em que se usa o conceito de domínio de influência, como o RPIM, o valor de d_a é definido como o espaçamento nodal médio de n nós dentro do domínio de \mathbf{x}_I e pode ser determinado segundo a expressão 2.16.

$$d_a = \frac{D^{\frac{1}{d}}}{n^{\frac{1}{d}} - 1} \quad (2.16)$$

O valor de d corresponde à variável da dimensão do domínio e D o tamanho do suporte do domínio. No caso de um espaço unidimensional(1D), D define o comprimento do domínio de suporte, no caso de um espaço bidimensional(2D), define a área do domínio de suporte, e quando num espaço tridimensional(3D) define o volume.

Para estudos do NNRPIM, que aborda o conceito das células de influência, o coeficiente d_a pode ser considerado como o tamanho da célula de Voronoï do ponto de interesse \mathbf{x}_I .

Para o MQ-RBF o coeficiente d_a corresponde ao peso da integração de \mathbf{x}_I , onde \mathbf{x}_I é definido como um ponto de integração. Na literatura é possível encontrar trabalhos dedicados à otimização dos parâmetros de forma da MQ-RBF [58]: $\gamma = 1.42d_a^{-1}$ e $p = 1.03$. Contudo Belinha[59] chegou a outros valores ótimos que serão os utilizados neste trabalho.

Considerando agora um espaço dimensional \mathbb{R}^d composto por um conjunto de nós N com coordenadas $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \in \Omega \wedge \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ e uma função contínua escalar (u^h). Através de um ponto de interesse é possível obter a função de interpolação mostrada na equação 2.17:

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_I) b_j(\mathbf{x}_I) = \mathbf{r}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) + \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \quad (2.17)$$

Sendo $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}_j(\mathbf{x}_I)$ os coeficientes não constantes de $\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)$ respectivamente e podem ser definidos como:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = \{a_1(\mathbf{x}_I) \quad a_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad a_n(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (2.18)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) = \{b_1(\mathbf{x}_I) \quad b_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad b_m(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (2.19)$$

onde n corresponde ao número de nós dentro de domínio de interesse do ponto \mathbf{x}_I e m o número de monómios de polinómio base. Pode ser definido através do triângulo de Pascal e através expressão 2.20:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) = \{p_1(\mathbf{x}_I) \quad p_2(\mathbf{x}_I) \quad \dots \quad p_m(\mathbf{x}_I)\}^T \quad (2.20)$$

Caso seja analisado um campo espacial de duas dimensões, $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I)$ pode ser definido por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T = \{1 \quad x_I \quad y_I \quad x_I^2 \quad x_I y_I \quad y_I^2\}, m = 6 \quad (2.21)$$

e no caso de um espaço tridimensional, $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I, z_I)$ pode ser definido por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T = \{1 \quad x_I \quad y_I \quad z_I \quad x_I^2 \quad x_I y_I \quad y_I^2 \quad y_I z_I \quad z_I^2 \quad z_I x_I\}, m = 10 \quad (2.22)$$

Continuando a análise da equação 2.17, e aplicando todos os n nós do domínio do ponto de interesse \mathbf{x}_I cujos n e m são desconhecidos, é gerado o seguinte sistema de equações representado na equação 2.23:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^h(\mathbf{x}_1) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_1) b_j(\mathbf{x}_I) = u(\mathbf{x}_1) \\ u^h(\mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_2) a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_2) b_j(\mathbf{x}_I) = u(\mathbf{x}_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^h(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n r_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_n) a_i(\mathbf{x}_I) + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_n) b_j(\mathbf{x}_I) = u(\mathbf{x}_n) \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Pode ser simplificado e representado recorrendo à sua forma matricial, cujo \mathbf{u}_s representa o vetor que contém os parâmetros da função de campo para cada nó do domínio de suporte (equação 2.24).

$$\mathbf{R}\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) + \mathbf{P}\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{u}_s \quad (2.24)$$

A matriz momento de RBF, \mathbf{R} , é definida na equação 2.25 :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{x}_1) & r_2(\mathbf{x}_1) & \dots & r_n(\mathbf{x}_1) \\ r_1(\mathbf{x}_2) & r_2(\mathbf{x}_2) & \dots & r_n(\mathbf{x}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1(\mathbf{x}_n) & r_2(\mathbf{x}_n) & \dots & r_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Uma vez aplicada a expressão da equação 2.14 (aplicação do MQ-RBF), a equação 2.25 fica assim desenvolvida:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (d_{11}^2 + (\gamma d_a)^2)^p & (d_{12}^2 + (\gamma d_a)^2)^p & \dots & (d_{1n}^2 + (\gamma d_a)^2)^p \\ (d_{21}^2 + (\gamma d_a)^2)^p & (d_{22}^2 + (\gamma d_a)^2)^p & \dots & (d_{2n}^2 + (\gamma d_a)^2)^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (d_{n1}^2 + (\gamma d_a)^2)^p & (d_{n2}^2 + (\gamma d_a)^2)^p & \dots & (d_{nn}^2 + (\gamma d_a)^2)^p \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

A matriz momento polinomial, \mathbf{P} , é definida na equação 2.27:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Recorrendo ao teorema de Duchon, as equações presentes no sistema da equação 2.28 são então geradas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n p_1(\mathbf{x}_i) a_i(\mathbf{x}_I) = p_1(\mathbf{x}_1) a_1(\mathbf{x}_I) + p_1(\mathbf{x}_2) a_2(\mathbf{x}_I) + \dots + p_1(\mathbf{x}_n) a_n(\mathbf{x}_I) = 0 \\ \sum_{i=1}^n p_2(\mathbf{x}_i) a_i(\mathbf{x}_I) = p_2(\mathbf{x}_1) a_1(\mathbf{x}_I) + p_2(\mathbf{x}_2) a_2(\mathbf{x}_I) + \dots + p_2(\mathbf{x}_n) a_n(\mathbf{x}_I) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^n p_m(\mathbf{x}_i) a_i(\mathbf{x}_I) = p_m(\mathbf{x}_1) a_1(\mathbf{x}_I) + p_m(\mathbf{x}_2) a_2(\mathbf{x}_I) + \dots + p_m(\mathbf{x}_n) a_n(\mathbf{x}_I) = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Que podem ser escritas da forma matricial como indica a equação 2.29:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) = 0 \quad (2.29)$$

Combinando a equação 2.29 à equação 2.24, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$ são obtidos através da multiplicação da matriz inversa \mathbf{M}_T pelo vetor \mathbf{u}_s :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Uma vez obtidos os valores dos coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$ a equação 2.17 pode ser reescrita como é observado na equação 2.32:

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

De tal forma pode ser simplificada (equação 2.33):

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\varphi(\mathbf{x}_I)^T \Psi(\mathbf{x}_I)^T\} \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

$\varphi_i(\mathbf{x}_I)$ é a função de forma cujo ponto de interesse é \mathbf{x}_I enquanto que o vetor $\Psi(\mathbf{x}_I)$ apenas existe caso haja uma base polinomial. Para obter o campo de interpolação variável, o vetor é multiplicado pelo vetor nulo e por isso $\Psi(\mathbf{x}_I)$ é nulo.

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) u_i + \underbrace{\sum_{j=1}^m \Psi_j(\mathbf{x}_I) z_j}_{(0)} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) \mathbf{u}_i \quad (2.34)$$

2.2.6 Mecânica dos sólidos

De modo a estabelecer as equações de equilíbrio, é necessário utilizar os conceitos gerais da teoria da elasticidade e dos princípios energéticos.

2.2.6.1 Teoria da elasticidade 3D

Considerando um sólido com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definido pela fronteira Γ , onde $\Gamma \in \Omega : \Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma \wedge \Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$, onde Γ_t representa a fronteira natural e Γ_u a fronteira essencial. As equações de equilíbrio lineares de um problema elasto-estático são as representadas na equação 2.35:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.35)$$

Onde ∇ é o operador divergente, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor das tensões de Cauchy e \mathbf{b} é o vetor de forças do corpo por unidade de volume. As condições fronteiras são representadas nas equações 2.36 e 2.37 :

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \bar{\mathbf{t}}, \text{ na fronteira natural } \Gamma_t \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ na fronteira essencial } \Gamma_u \quad (2.37)$$

Onde $\bar{\mathbf{t}}$ é a tração na fronteira natural, $\bar{\mathbf{u}}$ é o deslocamento imposto na fronteira essencial e \mathbf{n} é o vetor normal do limite do domínio Ω .

O estado de tensão e de deformação [7,60], $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, respetivamente, são definidos pelos vetores:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T \quad (2.39)$$

Aplicando a lei de Hooke, é possível relacionar a tensão com a deformação através da expressão 2.40:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.40)$$

Onde \mathbf{c} é definido pela matriz que contém as características do material, obtidas através de ensaios experimentais. Para caso de um estudo tridimensional é possível assumir:

$$\mathbf{c} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Em que :

$$\mu_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \wedge \mu_2 = \frac{1 - \nu}{2} \quad (2.42)$$

Sendo E o valor correspondente ao módulo de elasticidade do material e ν o coeficiente de Poisson.

O vetor de deformação é definido na expressão 2.43:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.43)$$

Onde $\mathbf{u} = \{u \ v \ w\}^T$ e \mathbf{L} o operador diferencial da matriz, podendo a expressão ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial_z \\ \partial/\partial_y & \partial/\partial_x & 0 \\ 0 & \partial/\partial_z & \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z & 0 & \partial/\partial_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

2.2.6.2 Forma fraca de Galerkin

A forma fraca de Galerkin é uma forma integral que envolve as variáveis de estudo, que neste caso são os deslocamentos u , v e w (numa análise tridimensional), e permite a obtenção de resultados aproximados. Baseia-se num princípio energético, o qual pode ser reduzido à função de Lagrange, L [8].

$$L = T - U + W_f \quad (2.45)$$

Na equação 2.45 U representa a energia resultante da deformação, T a energia cinética e por fim, W_f o trabalho exercido pelas forças externas. A energia cinética T é definida segundo a equação 2.46 onde Ω representa o volume do sólido, $\dot{\mathbf{u}}$ a

primeira derivada em ordem ao tempo, ou seja, a velocidade, e ρ a densidade:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.46)$$

A energia de deformação para materiais elásticos é definida na expressão 2.47:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.47)$$

E o trabalho exercido pelas forças externas, W_f , pode ser definido na equação 2.48:

$$W_f = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.48)$$

Na equação 2.48 \mathbf{u} representa o deslocamento, \mathbf{b} as forças de corpo e $\boldsymbol{\Gamma}_t$ fronteira onde as forças são aplicadas.

A forma fraca de Galerkin pode ser descrita da seguinte forma (equação 2.49):

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.49)$$

Eliminando o facto de a energia cinética não contribuir para o estudo, é possível chegar à expressão final da forma fraca de Galerkin (equação 2.50).

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.50)$$

2.2.6.3 Descritização do sistema de equações

A forma fraca de Galerkin pode também ser representada pela expressão 2.51 :

$$\Psi = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}_b - \mathbf{f}_t) = 0 \quad (2.51)$$

E através da regra lei do anulamento do produto é possível chegar à seguinte expressão 2.52:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t \quad (2.52)$$

Onde \mathbf{K} representa matriz rigidez global, \mathbf{f}_b força do corpo e \mathbf{f}_t força externa e através da manipulação das expressões [8], é possível chegar às seguintes equações (equações 2.53 - 2.55):

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} d\Omega = \sum_{I=1}^{n_Q} \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{c} \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) w_I \quad (2.53)$$

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_{I=1}^{n_Q} \mathbf{H}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \hat{w}_I \quad (2.54)$$

$$\mathbf{f}_t = \int_{\Gamma} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Gamma = \sum_{I=1}^{n_Q} \mathbf{H}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_I) \hat{w}_I \quad (2.55)$$

Cuja matrix \mathbf{B} corresponde à matriz de deformabilidade:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_1(x_I)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_n(x_I)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

O peso do ponto de integração é representado por w_I , e n_Q representa o número de pontos de integração definidos. Por fim, \mathbf{H} é a matriz de interpolação:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Como as funções de forma RPI possuem a propriedade delta de Kronecker (propriedade mencionada no capítulo 2.2.1), as condições de fronteira essenciais podem ser aplicadas diretamente na matriz de rigidez global.

2.3 Otimização estrutural

A otimização estrutural é um método de análise e melhoria de projeto que tem como principal objetivo relacionar a melhor distribuição e forma de materiais numa estrutura tendo em consideração critérios de desempenho, como resistência, peso ou custo. Utiliza também técnicas de análise e algoritmos de otimização para encontrar soluções eficientes.

A otimização estrutural teve um grande impacto na evolução e desenvolvimento de grandes áreas/indústrias tais como a automóvel e aeronáutica. A sua grande vantagem passa por permitir manter ou aumentar a capacidade de resistência e segurança diminuindo o peso e custos associados. A queima de combustíveis fósseis é diretamente influenciada pela massa dos veículos, o que exige que se atinja uma solução que represente o melhor balanço entre o desempenho estrutural e peso total. Por sua vez, a queima de combustíveis fósseis está ligada à emissão de gases poluentes para a atmosfera, como por exemplo o CO_2 . Graças à otimização estrutural, é possível atingir a solução ideal, permitindo não só evitar gastos desnecessários mas também reduzir os níveis de poluição. Assim sendo, a otimização estrutural tem tido um grande investimento e evolução nos últimos anos.

A otimização estrutural pode ser classificada em três categorias [60]: otimização dimensional, otimização de forma e otimização da topologia. A otimização dimensional tem como objetivo dimensionar o tamanho de uma estrutura, como por exemplo, as dimensões da secção de uma treliça/viga (Figura 2.11(a)). Quanto à otimização de forma, esta pretende modificar os limites de modo a alcançar geometrias e formatos ideais (Figura 2.11(b)). Por fim, a otimização da topologia tem como objetivo encontrar a configuração ideal e a sua posição (Figura 2.11(c)).

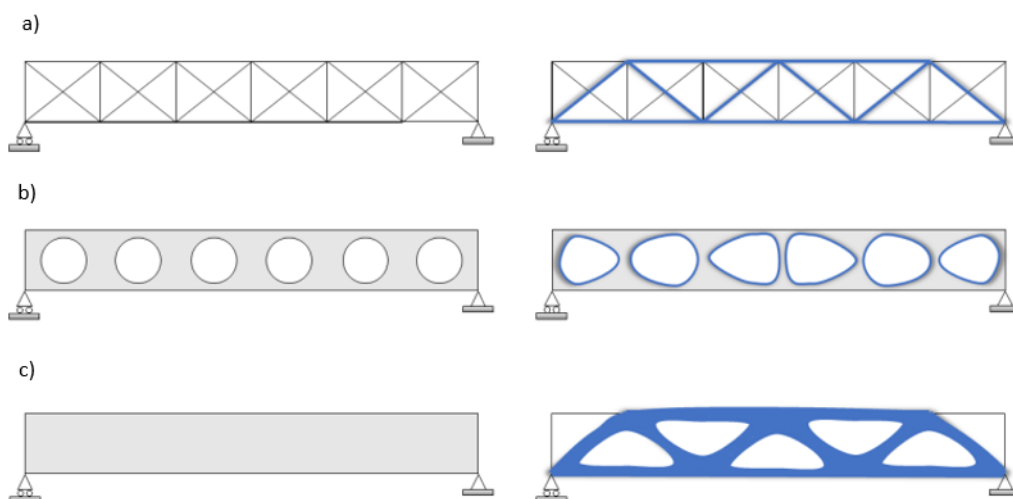


Figure 2.11 – Parâmetros da otimização estrutural. a) Otimização dimensional b) Otimização da forma c) Otimização de topologia.[61]

2.3.1 Fluxograma da otimização estrutural

Os critérios de otimização para encontrar a topologia ideal de uma estrutura consistem nas seguintes etapas [62]:

Pré-processamento de geometria e condições fronteira:

- Escolher um domínio de referência adequado que permita definir os contornos;
- Escolher partes do domínio de referência que devem ser projetadas;
- Construir uma malha de elementos finitos. Além disso, a malha deve permitir definir as áreas da estrutura, atribuindo variáveis de projeto fixas a essas áreas. A malha permanece inalterada durante todo o processo;
- Construir zonas de elementos finitos para os campos independentes de deslocamentos e as variáveis de projeto.

Otimização:

Calcular a distribuição ótima sobre o domínio de referência. A otimização usa uma análise de elementos finitos baseada no deslocamento e um esquema de critérios de atualização de otimização para a densidade. As etapas do algoritmo são:

- Calcular pelo método dos elementos finitos os deslocamentos e deformações resultantes;
- Verificar a conformidade do projeto. Se a melhoria não for significativa em relação ao último projeto, deve-se interromper as iterações. Caso contrário, deve-se continuar e apenas parar quando estiverem satisfeitas as condições necessárias de otimização;
- Calcular a atualização da variável de densidade. Esta etapa consiste também num loop de iteração interno para encontrar o valor do multiplicador de Lagrange Λ para a restrição de volume;
- Repetir o loop de iteração.

Pós-processamento dos resultados:

- Interpretar a distribuição ótima do material, definindo uma forma com o intuito de efetuar uma representação CAD.

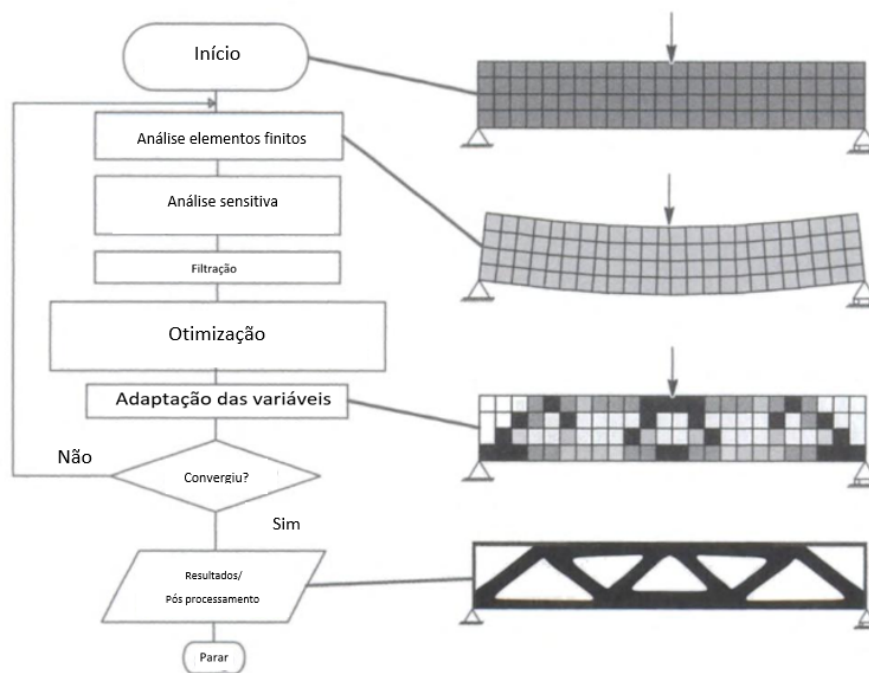


Figure 2.12 – Fluxograma do processo de otimização estrutural.[adaptado de 62]

2.3.2 Estado da arte

O campo da otimização estrutural evoluiu significativamente nos últimos anos devido ao avanço de técnicas computacionais e melhorias em algoritmos de otimização.

O pioneiro no ramo da otimização estrutural foi Michell [65] que se dedicou ao estudo de treliças estaticamente para um caso de condições de carga e de suporte.

Em 1960, foi introduzido “ground structure approach “ à otimização estrutural e teve uma grande influência no desenvolvimento da mesma [66]. Inicialmente eram utilizadas técnicas computacionais como por exemplo o algoritmo “mathematical programming” (MP). Apesar de serem apropriados para problemas objetivos e com algumas restrições, eram ineficientes quando se estudavam problemas de elevada otimização. De tal forma surgiram novas técnicas tais como o algoritmo “optimality criteria” (OC). A abordagem baseada no critério OC é também denominado de “fully stress design” (FSD)[67].

Mais tarde em 1972, Rozvany desenvolveu a teoria de Michell em treliças e vigas. A sua teoria ficou conhecida como “optimal layout theory”. [68]

Considerável atenção foi dada ao trabalho de Bendsøe e Kikuchi. Desenvolveram o método de homogeneização [69]. Este método utiliza o domínio de design construído a partir de um número finito de células, em que cada uma pode ter uma

microestrutura própria e, adicionalmente, cada célula pode ter material ou um vazio retangular.

O método “The Solid Isotropic Microstructures with Penalization” (SIMP) [70-72] é uma variante do método de homogeneização. Esta é uma das técnicas mais comuns na otimização estrutural devido à sua facilidade de implementação e a sua eficiência computacional.

O algoritmo de otimização utilizado no desenvolvimento da tese foi o desenvolvido por Xie e Steven - o método “Evolutionary Structural Optimization” (ESO)[73] que tem por base a remoção de material ineficiente no domínio do design até atingir a otimização ideal.

Uma melhoria do ESO original, foi proposta por Querin et al [74] e Yang et al [75] ponderando existir uma abordagem ESO bidirecional (BESO). O BESO permite a remoção e adição de material simultaneamente, permitindo assim a recuperação de elementos deletados. Apesar dos seus benefícios em relação ao ESO, é uma técnica que necessita de uma maior capacidade computacional.

2.3.3 Método SIMP

“Solid isotropic material with penalization” (SIMP) , desenvolvido por Bendsøe, é uma das formas de otimização estrutural que envolve a otimização de topologia. Neste caso o método tem por base evitar a formação de regiões intermédias concentrações de densidades.

Quando analisado um problema, o método procede a uma penalização do material isotrópico tendo por base a densidade do elemento. A obtenção de uma solução de distribuição de densidade de material varia entre zero e um, onde 0 corresponde a um elemento vazio e 1 a um elemento sólido. O SIMP identifica estas zonas através da densidade e também zonas de densidade intermédia (portanto, consistindo de uma mistura de ambas as fases). Estas são consideradas como as mais propícias a causar instabilidades e de modo a evitar estas zonas, um coeficiente de penalização é aplicado. É através da formação de zonas solidas e/ou vazias que é estimulada uma penalização de densidades intermédias. Esta penalização significa que a topologia otimizada é menos ideal do que o caso onde a densidade intermediária não era penalizada. Caso existisse uma maneira de fabricar essas regiões intermediárias, não haveria necessidade de penalizá-las.

O objetivo passa pela criação de uma sequência de soluções aproximadas em relação ao problema inicial. Assim sendo, diferentes abordagens matemáticas foram desenvolvidas para aumentar a eficiência, tais como: SLP, SQP, MMA, entre outros.

O método SIMP permite encontrar a melhor distribuição de material na estrutura, resultando em uma configuração eficiente e eficaz em termos de peso. No

entanto, é importante realçar que o método SIMP não tem em consideração restrições de fabrico, que possam ser importantes na realização do projeto. Portanto, é necessário realizar ajustes e considerar esses fatores ao aplicar os resultados obtidos com o método SIMP em projetos reais.

2.3.4 Método Hard Kill

”Bidirectional Evolutionary Structural Optimization” (BESO) é um método resultante da evolução da otimização estrutural que tem por base o conceito de acrescento ou remoção de material consoante a necessidade ou falta de necessidade do material[63]. É aplicado através do número de sensibilidade de cada elemento existente na malha da estrutura. O termo “hard-kill” é assim designado uma vez que são removidos elementos que estão em excesso.

Quando aplicado este método, a solução final irá ser a mais otimizada possível, não podendo haver mais remoção de material para obter os resultados pretendidos. Caso haja um erro na remoção de material, não há forma de recuperar nem com futuras iterações. Caso tal aconteça, o resultado final pode comprometer a segurança e propriedades finais.

Por exemplo, esta metodologia pode ser aplicada em casos que envolvam materiais e geometrias não lineares de modo a garantir uma maior absorção de energia na estrutura [63].

Alguns exemplos de aplicações deste método foram estudados. No fim da experiência resultante de um desses estudos, chegou-se à conclusão de que a mesma topologia era obtida para diferentes materiais, apenas ajustando os parâmetros de força, que é um parâmetro do design, que depende da escolha do material.

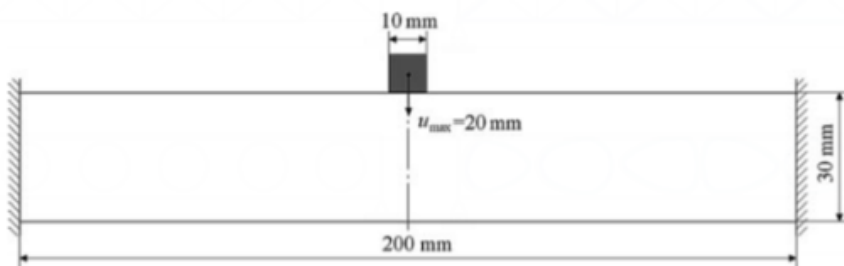


Figure 2.13 – Exemplo em estudo[63]

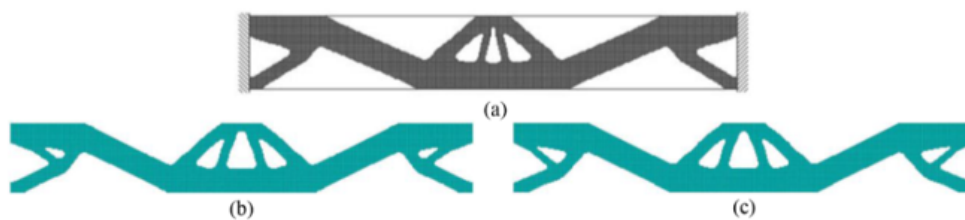


Figure 2.14 – a) topologia b) material A c) material B.[63]

A topologia é similar para qualquer um dos materiais, mantendo o design idêntico. Como é possível observar na figura 2.15, verificou-se que a energia absorvida por unidade de volume tende a aumentar à medida que o volume diminui e a força de esmagamento máxima reduz gradualmente à medida da redução do volume.

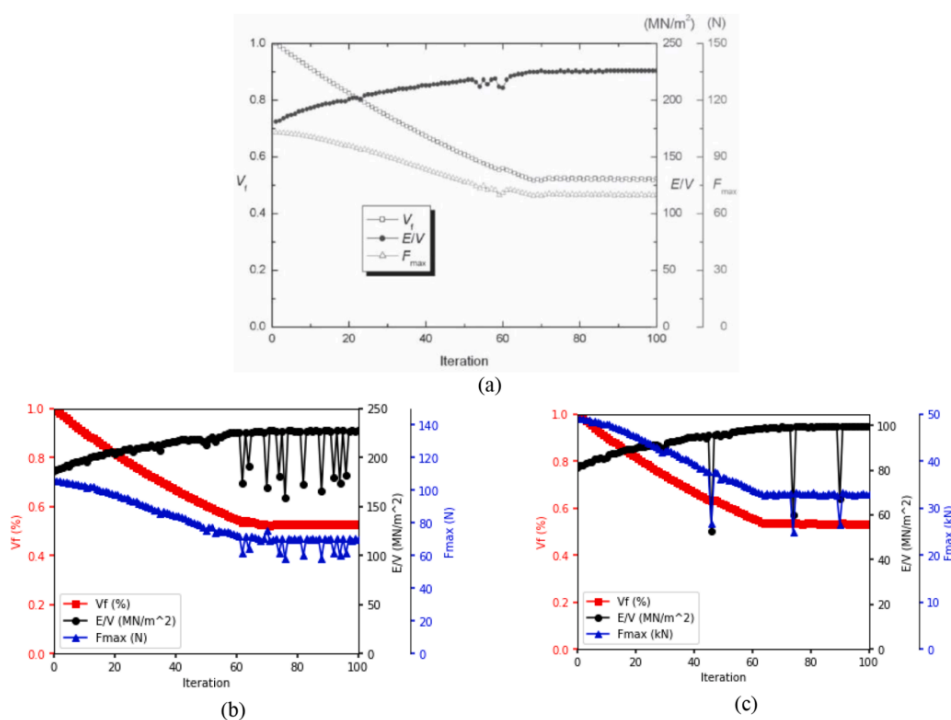


Figure 2.15 – Evolução do volume, energia por unidade de volume e força de esmagamento.[63]

Comparando as figuras 2.15 a) e b) com a c), é possível concluir que o volume é experimentalmente o mesmo abreviando mais de metade do volume inicial. Os parâmetros de força máxima e de função objetiva são maiores no material 1 do que no 2. Isto deve-se ao facto do material 1 ser mais plástico do que o material 2 tendo por isso menos capacidade de suportar elevadas tensões.

2.3.5 Métodos numéricos na otimização estrutural

É através da inclusão dos métodos numéricos na otimização estrutural que é possível a realização e estudo de problemas complexos. A implementação de estudos/métodos numéricos na otimização estrutural levou a uma melhoria quer da eficiência quer da eficácia obtida.

Graças à sua capacidade de eficiência, o MEF ganhou popularidade como técnica discreta para ideal para ser combinada com a otimização estrutural. Estudos recentes mostram a otimização de uma articulação rotativa de um braço robótico através do MEF tendo por base os critérios SIMP e OC [76]. O braço robótico foi alvo de otimização de topologia e de forma e após estas, ainda sofreu algumas alterações por parte de um designer, obtendo uma solução mais simples e com menos custos. Foi formado um produto com a mesma capacidade de sustentar elevadas tensões, mas mais leve e eficiente.

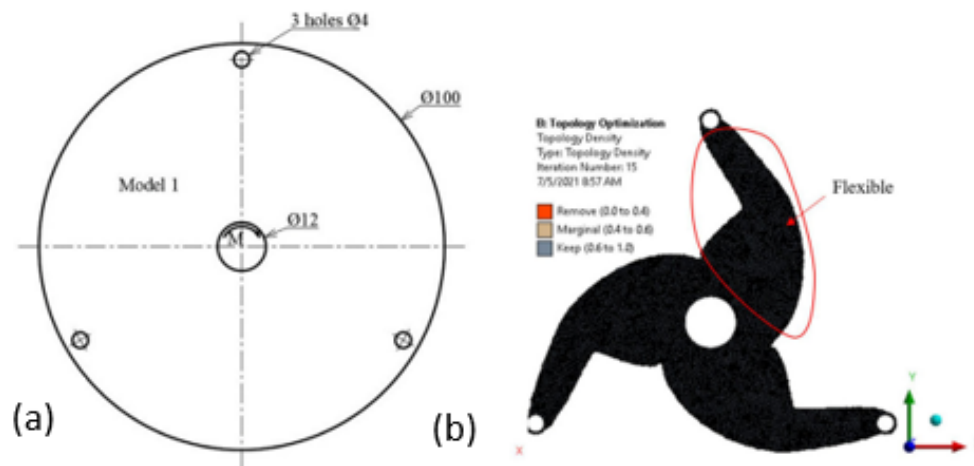


Figure 2.16 – a) Modelo original b) Modelo otimizado [76]

Na figura 2.16 a) é possível observar o modelo original que através da aplicação do MEF na otimização estrutural, gerou o modelo otimizado (figura 2.16 b)). É possível observar a diferença de área desnecessária existente no modelo original, evitando assim desperdícios de material e de custos.

Contudo, o facto da solução do MEF ser dependente da malha, levou a que novos métodos, entretanto desenvolvidos, comesçassem igualmente a ser combinados com algoritmos de otimização estrutural.

Assim sendo, os métodos sem malha surgiram como alternativa ao MEF. Após alguns estudos com métodos sem malha na otimização estrutural, Kim [77] aplicou o método do EFGM, permitindo a otimização de topologia através do método Shepard Function [78]. O método EFGM foi aplicado com o BESO [79] e com o SIMP [80]. Este método é computacionalmente considerado muito dispendioso, mas é capaz de resolver uma grande variedade de problemas de otimização [81]. De forma a com-

parar os efeitos da otimização deste método, foi realizado um estudo de comparação entre o EFGM e o MEF através do exemplo descrito na figura 2.17. O exemplo passa pela aplicação de cargas simétricas ($F_1 = -F_2$) na extremidade direita da viga, e considerando a extremidade esquerda encastrada.

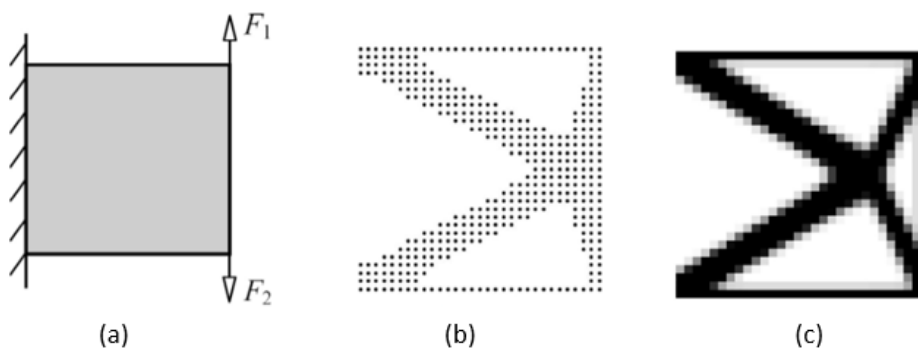


Figure 2.17 – a) Exemplo de estudo b) otimização segundo EFG c) otimização segundo MEF[82]

Os resultados obtidos mostram que o método EFG apresenta valores muito semelhantes aos obtidos pelo MEF.

O Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) foi também usado para a otimização de topologia através do método SIMP e do Optimality Criteria (OC) [83].

Outro método sem malha utilizado para a otimização estrutural é o SPH. Quando utilizado em problemas de otimização, é considerado das técnicas mais rápidas em relação à programação dos códigos. Foi graças aos estudos de Belytschko [83] que rapidamente se tornou um dos métodos mais utilizados para estudos de grandes deformações. Tal foi comprovado em estudos [84] onde o método SPH demonstrou-se mais eficiente do que o MEF no ABAQUS quando o caso de estudo era uma viga encastrada.

De forma a comparar a eficácia deste método, foram feitos estudos numa viga encastrada em ambas as extremidades e aplicadas forças (figura 2.18). Estes estudos foram comparados com a análise do MEF.

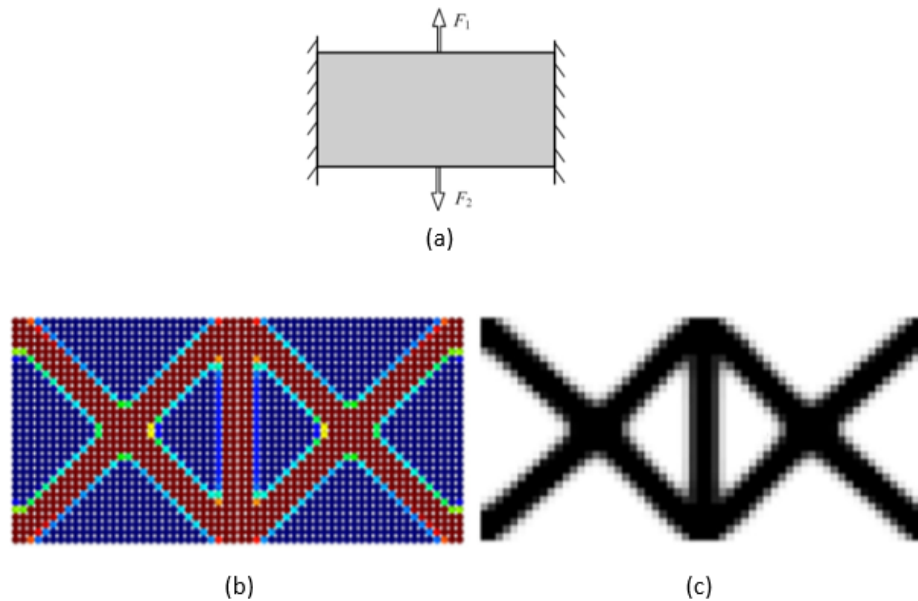


Figure 2.18 – a) Exemplo de estudo b) otimização segundo SPH c) otimização segundo MEF[82]

Este estudo considera cargas simétricas ($F_1=-F_2$) no meio vão da viga e ambas as extremidades encastradas, como mostra a figura 2.18. Os resultados obtidos permitiram concluir que a otimização através do método SPH apresenta resultados idênticos aos do MEF de uma forma mais eficiente e menos trabalhosa, diminuindo o tempo de computação em relação ao MEF, otimizando o processo de otimização.

Outros estudos com métodos sem malha serão aplicados na fase seguinte da tese onde irão ser estudadas as capacidades do RPIM e NRPIM, e também do MEF, com a aplicação de um algoritmo de otimização.

3 Resultados numéricos

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos. De forma a validar e mostrar a eficiência dos métodos numéricos (MEF, RPIM e NNRPIM) será efetuado um estudo de convergência. Esse estudo vai avaliar os valores obtidos pelo software, comparando-os com os valores obtidos através da solução analítica. Após essa verificação, o algoritmo de otimização irá ser aplicado num exemplo de referência de forma a estudar os diversos parâmetros associados ao algoritmo de otimização. No final, o algoritmo de otimização será aplicado na otimização da indústria automóvel tentando atingir uma estrutura mais otimizada e com menos massa do que a original.

O software utilizado nesta dissertação é o FEMAS (Finite Element and Meshless Analysis Software: cmech.webs.com) e é corrido através do Matlab. Numa primeira fase, os elementos, nós e malhas são gerados a partir do FEMAP (Finite Element Modelling And Postprocessing) e após esta etapa, o modelo será importado para o FEMAS onde se irão realizar os estudos.

3.1 Estudo de convergência

Inicialmente irá ser feito um estudo de convergência com os métodos numéricos a estudar (MEF, RPIM e NNRPIM). O estudo tem por base um modelo bidimensional correspondente a uma viga encastrada lateralmente com as dimensões de $L = 2 \text{ m}$ e $h = 1 \text{ m}$ e as suas propriedades elásticas $E = 1 \text{ Kpa}$ and $\nu = 0,3$ (figura 3.1). Uma carga distribuída irá ser aplicada ao longo do lado oposto ao encastrado e tem o valor de $P = 1 \text{ N/m}$. São considerados 4 pontos de análise, a partir dos quais são obtidas as soluções para efeitos de comparação. Os pontos de análise são os seguintes: $A = \{0,0 \ 0,5\}$ $B = \{0,5 \ 0,5\}$ $C = \{1,0 \ 0,0\}$ e $D = \{2,0 \ 0,0\}$.

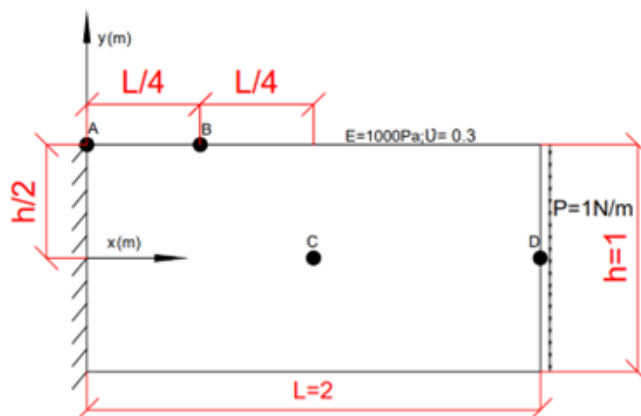


Figure 3.1 – Modelo da viga encastrada e localização dos pontos

Os objetivos deste estudo de convergência passam por demonstrar a eficiência dos métodos numéricos quando comparados com valores analíticos e poder comparar os métodos sem malha com o MEF.

3.1.1 Análise bidimensional

O estudo de convergência vai ser aplicado num problema bidimensional (2D) e para tal é necessário identificar quais irão ser as análises a ser estudadas. Ao longo da viga, diversos pontos foram escolhidos estrategicamente e consoante a sua posição irão ser analisados diferentes estudos. Essas diferentes análises são: as tensões segundo o eixo xx, tensões principais e tensões equivalentes, assim como tensões de corte e deslocamentos verticais e horizontais. O eixo de origem referência é o que se encontra representado na figura 3.1.

As soluções analíticas quer de deslocamento quer de tensões podem ser encontradas na bibliografia [8] e são as seguintes:

A equação que representa a tensão segundo o eixo x é:

$$\sigma_{xx}(x) = -\frac{P \cdot (L - x) \cdot y}{I} \quad (3.1)$$

Onde, P é a carga distribuída aplicada, L o comprimento da viga, x o posicionamento do ponto a estudar segundo o eixo das abcissas, y o posicionamento do ponto a estudar segundo o eixo das ordenadas e I o momento de Inércia relativo à viga em estudo.

Uma vez que se trata de uma viga bidimensional, a equação relativa à Inércia é:

$$I = \frac{h^3}{12} \quad (3.2)$$

As equações relevantes às tensões principais são as descritas nas equações 3.3 - 3.5:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \quad (3.3)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (3.4)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \quad (3.5)$$

Relativamente a este campo das tensões falta fazer referência à equação que representa a fórmula das tensões equivalentes de Von Mises (equação 3.6):

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (3.6)$$

A expressão que representa a tensão de corte é a seguinte:

$$\tau_{xy} = -\frac{P \cdot h^2}{8I} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \quad (3.7)$$

Sendo h a altura da viga.

A expressão correspondente ao deslocamento horizontal é:

$$u(x) = -\frac{2P}{E \cdot h^3} \left[3x \cdot (2L - x) \cdot y + (2 + \nu) \cdot \left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot y \right] \quad (3.8)$$

E por último a expressão do deslocamento vertical:

$$v(x) = -\frac{2P}{E \cdot h^3} \left[x^2 \cdot (3L - x) + 3\nu \cdot (L - x) \cdot y^2 + x \cdot (4 + 5\nu) \cdot \frac{h^2}{4} \right] \quad (3.9)$$

O FEMAP é capaz de gerar malhas de elementos triangulares e quadrangulares. Assim, vai ser possível analisar dois tipos de malhas diferentes uma vez que a disposição dos nós e quantidade de elementos altera de acordo com a malha a estudar.

Assim sendo, no caso do MEF, foram utilizados dois tipos de malha: a triangular (FEM 3n) e outra quadrangular (FEM 4n). Quanto ao RPIM, a integração Gaussiana é realizada tendo por base células de integração triangulares (RPIM 3n) e quadrangulares (RPIM 4n), onde são considerados 16 nós dentro de cada célula de influência. Os parâmetros usados são: $c = 1.42$ e $p = 1.03$ e base polinomial linear. Em relação ao NNRPIM, são consideradas quer as células de primeira ordem (NNRPIM 1c) quer as de segunda (NNRPIM 2c). Os parâmetros usados são: $c = 0.0001$, $p = 0.9999$ e base polinomial constante.

Tal como o nome do estudo indica, um estudo de convergência tem como objetivo verificar a taxa de convergência de uma dada metodologia, como por exemplo, verificar como evolui a solução de uma dada metodologia com o aumento do número de nós da discretização. Assim, é necessário discretizar o domínio do problema com várias malhas de densidade crescente. É normal que quanto mais refinada for a malha mais aproximado será o valor dado em relação ao valor teórico mas também é objetivo deste estudo saber a partir de que malha já se encontram valores muito próximos aos considerados exatos.

De forma a obter vários resultados com diferentes malhas o domínio do problema foi dividido quer sobre o comprimento quer sobre a largura de forma igual e com um aumento do número de divisões a dobrar em relação à anterior.

A primeira malha teve uma divisão segundo o comprimento em 4 repartições e segundo a largura de 2 repartições criando uma malha de 15 nós. A última malha analisada tinha 8385 nós.

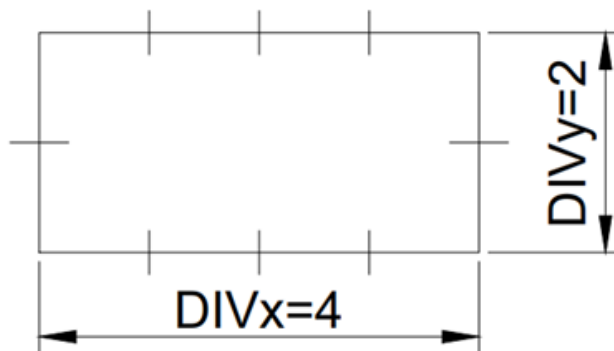


Figure 3.2 – Demonstração das divisões quer no eixo x quer no eixo y da 1ª malha

Para este estudo de convergência foram analisadas as malhas descritas na tabela 3.1:

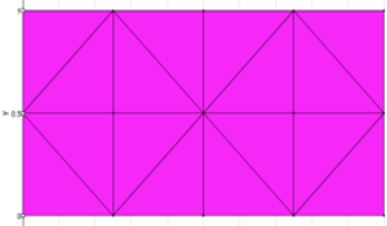
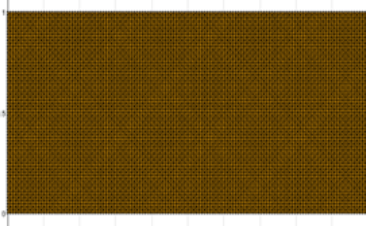
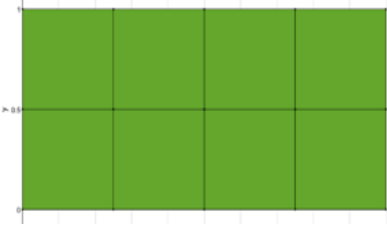
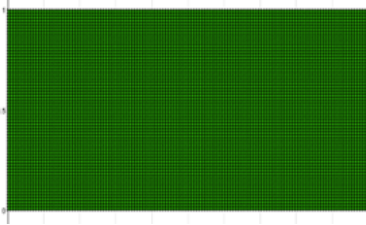
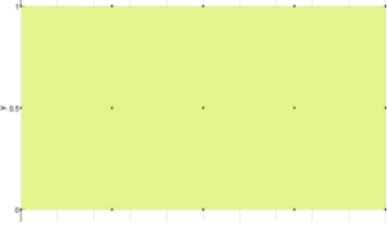
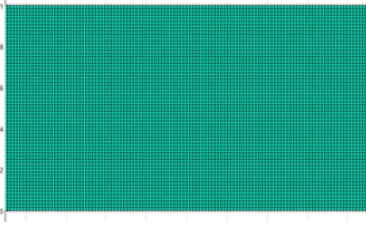
Table 3.1 – Diferentes malhas do estudo de convergência

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
DIV_x	4	8	16	32	64	128
DIV_y	2	4	8	16	32	64
Nº de nós	15	45	153	561	2145	8385

Cada uma dessas divisões foi analisada segundo dois tipos diferentes de malha: triangulares e quadrangulares. Cada uma dessas malhas apresenta o mesmo número de nós, mas um número e disposição diferente de elementos.

Para mostrar como seria a representação gráfica das malhas triangulares e quadrangulares, é mostrado a sua representação na tabela 3.2, a 1ª (malha de 15 nós) e última malha (malha de 8385 nós).

Table 3.2 – Representação gráfica da 1ª e última malha a estudar de cada método numérico

	15 nós	8385 nós
FEM_{3n}		
FEM_{4n}		
$RPIM$ e $NNRPIM$		

Analisando a tabela 3.2, os resultados da última malha são difíceis de observar devido à elevada concentração de nós mas a partir da observação da primeira malha é possível visualizar que os métodos sem malha, como o nome indica, não necessitam da malha para gerar os resultados. Eles apenas necessitam da localização dos nós para promover a solução.

Nos pontos A e B, irão ser estudados os valores de tensão segundo o eixo xx (σ_{xx}) tensão principal (σ_{11}) e tensão equivalente (σ_{eq}). No ponto C, os valores da tensão de corte (τ_{xy}) e por fim, no ponto D os valores correspondentes ao deslocamento segundo x e y (u e v). Os valores teóricos foram calculados segundo as equações 3.1 até 3.9.

3.1.1.1 Resultados

Nas figuras 3.3 à 3.6, é possível observar os valores obtidos para cada ponto.

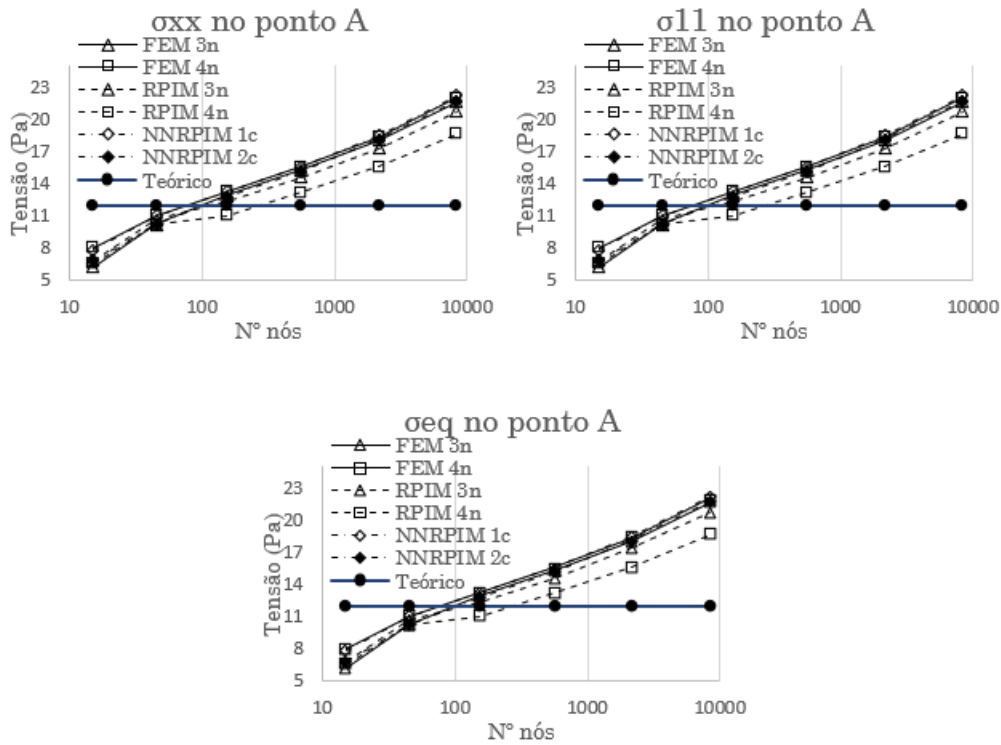


Figure 3.3 – Tensões no ponto A

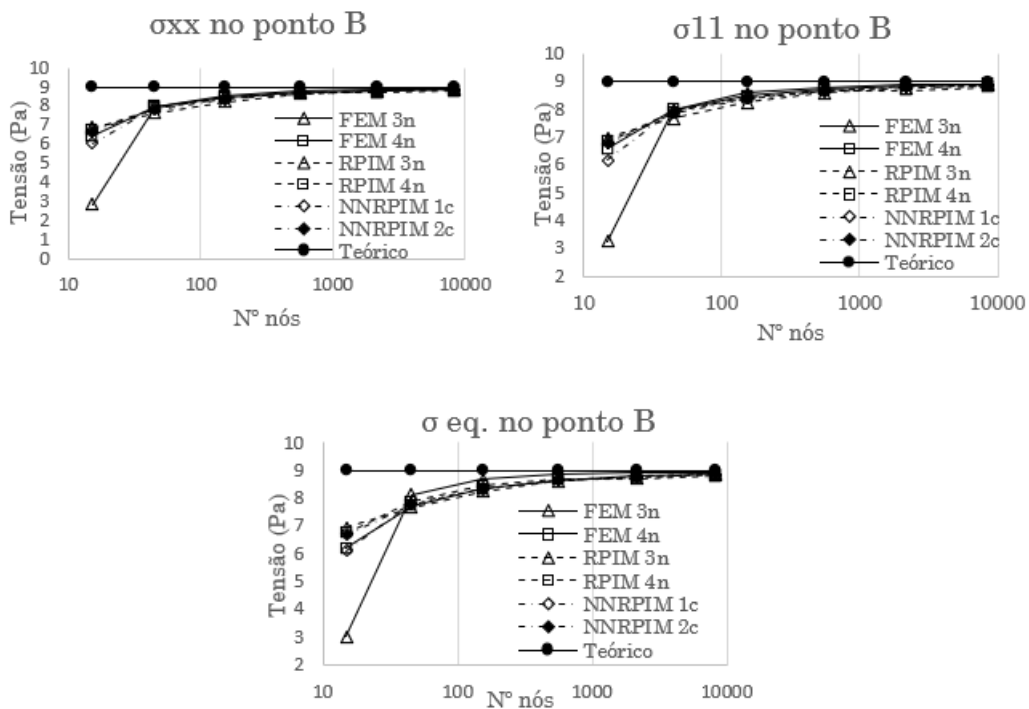


Figure 3.4 – Tensões no ponto B

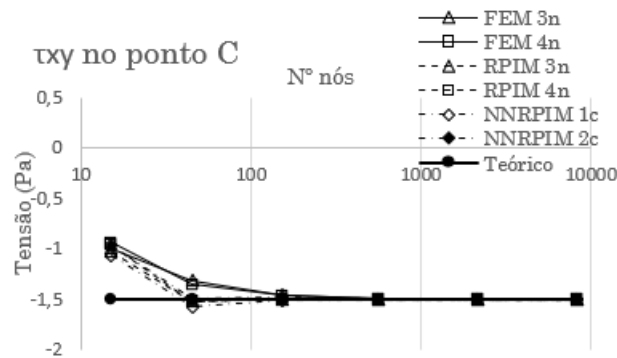


Figure 3.5 – Tensão de corte no ponto C

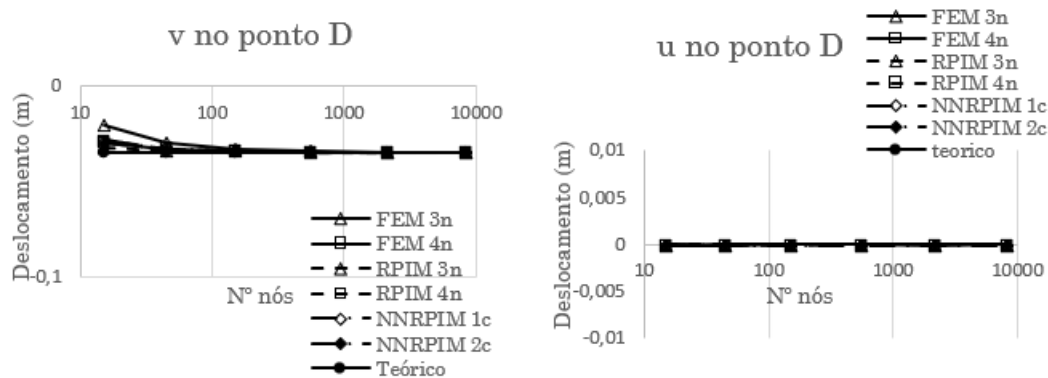


Figure 3.6 – Deslocamentos no ponto D

3.1.1.2 Análise de resultados

Poderiam ter sido analisados outros pontos para além destes, mas uma vez que as distribuições dos pontos analisados já abrangiam todos os locais importantes da viga, não se tendo então optado por analisar mais nenhum ponto.

O ponto “A” pertence a uma zona de fronteira encastrada. Através da análise dos gráficos correspondentes a este ponto, é possível concluir que não se observou a convergência esperada. Tal pode ser explicado pelo facto do seu posicionamento: uma vez que se encontra na zona encastrada, as concentrações de tensões podem ter interferido nos valores e desse modo não correspondeu ao valor real.

O ponto “B” é um ponto sujeito aos mesmo estudos que o ponto “A” e já atinge os valores esperados. Ao contrário do ponto anterior, o ponto B já não se encontra na zona de encastramento. Este ponto está deslocado na horizontal de 0,5 metros da zona de fronteira e já não é afetado pela concentração de tensões. As 3 análises deste ponto (tensão xx, tensão 11 e tensão equivalente) apresentam valores idênticos. A malha menos densa ainda está ligeiramente afastada do esperado, especialmente no

estudo do FEM 3n, mas à medida que a densidade das malhas aumenta, todos os métodos numéricos apresentam bons resultados convergindo para o valor teórico. O RPIM 4n e o NNRPIM 1c são os métodos que apresentam os melhores resultados.

O ponto “C” encontra-se localizado mesmo no centro do domínio do problema. O foco de estudo neste ponto era a tensão de corte. Como era de esperado, os valores convergem para o valor teórico e a partir da malha de 561 nós todos os casos apresentam excelentes resultados. É também de salientar que inicialmente todos os casos apresentam valores muito idênticos e quando analisada a malha de 45 nós os dois estudos do caso NNRPIM apresentam já valores muito próximos do esperado teoricamente. É um caso onde com a geração de uma malha não tão densa é possível obter excelentes valores.

Por fim o ponto “D” tinha como objetivo o estudo dos deslocamentos quer segundo a horizontal quer segundo a vertical. Este ponto encontrava-se na extremidade direita da viga, e em relação ao eixo das coordenadas localizava-se a meio do domínio. Era de esperar que o valor do deslocamento segundo o eixo x fosse de zero uma vez que se está a aplicar uma força perpendicular a esta direção. E como mostra na figura 3.6 do lado direito, todos os métodos numéricos desde a malha menos densa apresentam excelentes valores com um erro muito baixo. Quanto ao deslocamento no eixo das ordenadas, era de esperar que fosse dentro do campo dos deslocamentos, o mais importante de analisar uma vez que a carga distribuída é segundo o seu eixo. Os valores tendem a convergir para o valor teórico e a partir da malha de 153 nós já todos os métodos numéricos apresentam excelentes resultados.

Fazendo uma análise geral a todos os casos estudados, é possível concluir que todos os métodos numéricos a partir da malha de 2185 nós apresentam os valores esperados. Também é de salientar que para uma malha menos densa, foram os métodos sem malha que obtiveram os melhores resultados.

Para finalizar este estudo de convergência, serão apresentadas as representações gráficas dos respetivos deslocamentos e tensões ao longo de toda a viga (figura 3.7 - 3.13).

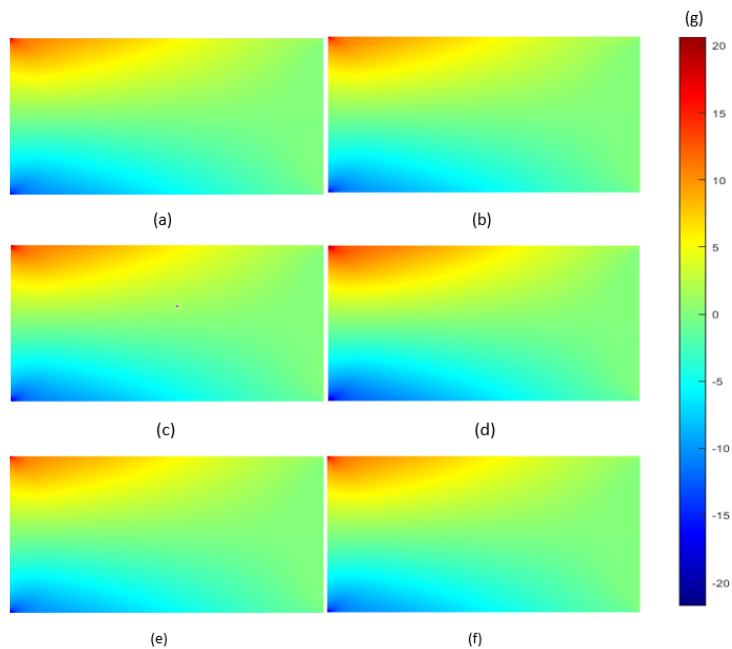


Figure 3.7 – **a)** $FEM_{3n}(\sigma_{xxmin} = -21,7 \text{ Mpa}; \sigma_{xxmax} = 21,7 \text{ Mpa})$ **b)** $FEM_{4n}(\sigma_{xxmin} = -22 \text{ Mpa}; \sigma_{xxmax} = 22 \text{ Mpa})$ **c)** $RPIM_{3n}(\sigma_{xxmin} = -20,8 \text{ Mpa}; \sigma_{xxmax} = 20,8 \text{ Mpa})$ **d)** $RPIM_{4n}(\sigma_{xxmin} = -18,7 \text{ Mpa}; \sigma_{xxmax} = 18,7 \text{ Mpa})$ **e)** $NNRPIM_{1c}(\sigma_{xxmin} = -22,2 \text{ Mpa}; \sigma_{xxmax} = 22,2 \text{ Mpa})$ **f)** $NNRPIM_{2c}(\sigma_{xxmin} = -21,8 \text{ Mpa}; \sigma_{xxmax} = 21,8 \text{ Mpa})$ **g)** distribuição geral das tensões

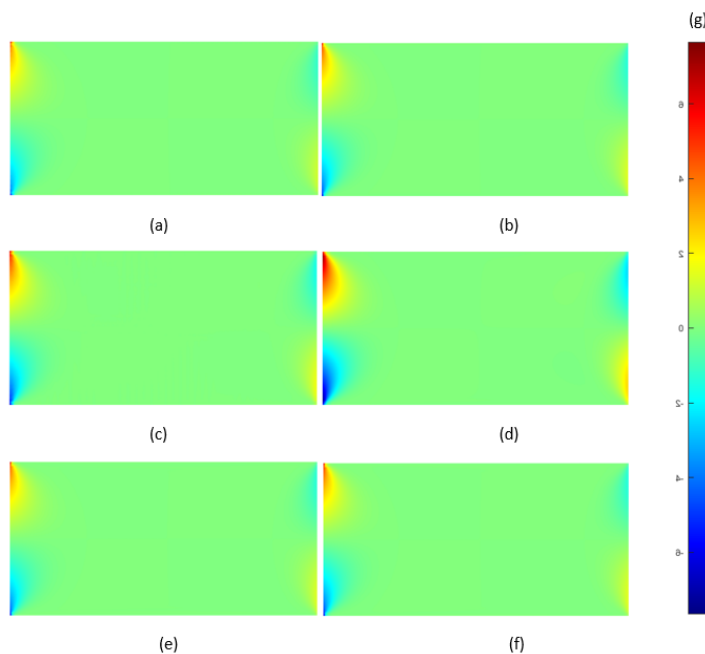


Figure 3.8 – **a)** $FEM_{3n}(\sigma_{yymin} = -9,3 \text{ Mpa}; \sigma_{yymax} = 9,3 \text{ Mpa})$ **b)** $FEM_{4n}(\sigma_{yymin} = -8 \text{ Mpa}; \sigma_{yymax} = 8 \text{ Mpa})$ **c)** $RPIM_{3n}(\sigma_{yymin} = -6,7 \text{ Mpa}; \sigma_{yymax} = 6,7 \text{ Mpa})$ **d)** $RPIM_{4n}(\sigma_{yymin} = -4,4 \text{ Mpa}; \sigma_{yymax} = 4,4 \text{ Mpa})$ **e)** $NNRPIM_{1c}(\sigma_{yymin} = -8,2 \text{ Mpa}; \sigma_{yymax} = 8,2 \text{ Mpa})$ **f)** $NNRPIM_{2c}(\sigma_{yymin} = -7,6 \text{ Mpa}; \sigma_{yymax} = 7,6 \text{ Mpa})$ **g)** distribuição geral das tensões

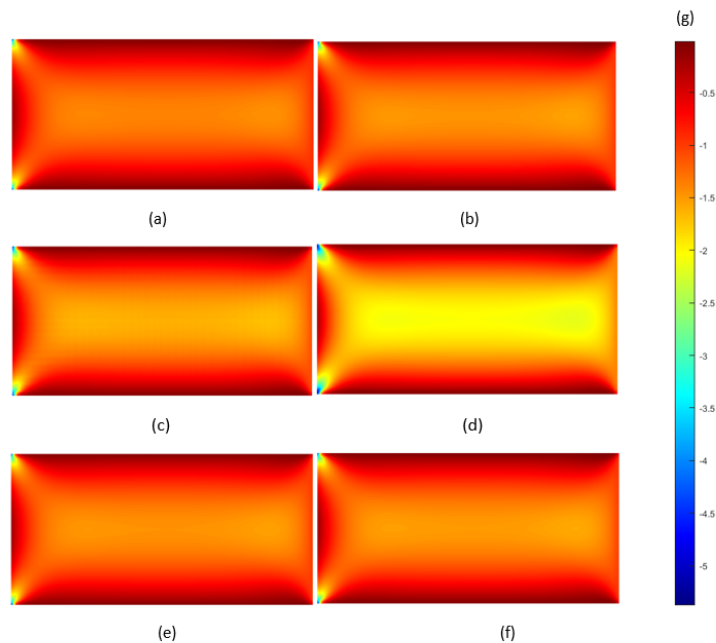


Figure 3.9 – **a)** $FEM_{3n}(\tau_{xymin} = -5,87 \text{ Mpa}; \tau_{xy max} = 0,00665 \text{ Mpa})$ **b)** $FEM_{4n}(\tau_{xymin} = -5,5 \text{ Mpa}; \tau_{xy max} = 0,0124 \text{ Mpa})$ **c)** $RPIM_{3n}(\tau_{xymin} = -5 \text{ Mpa}; \tau_{xy max} = -0,008 \text{ Mpa})$ **d)** $RPIM_{4n}(\tau_{xymin} = -3,94 \text{ Mpa}; \tau_{xy max} = 0,0123 \text{ Mpa})$ **e)** $NNRPIM_{1c}(\tau_{xymin} = -5,64 \text{ Mpa}; \tau_{xy max} = 0,026 \text{ Mpa})$ **f)** $NNRPIM_{2c}(\tau_{xymin} = -5,4 \text{ Mpa}; \tau_{xy max} = 0,0134 \text{ Mpa})$ **g)** distribuição geral das tensões

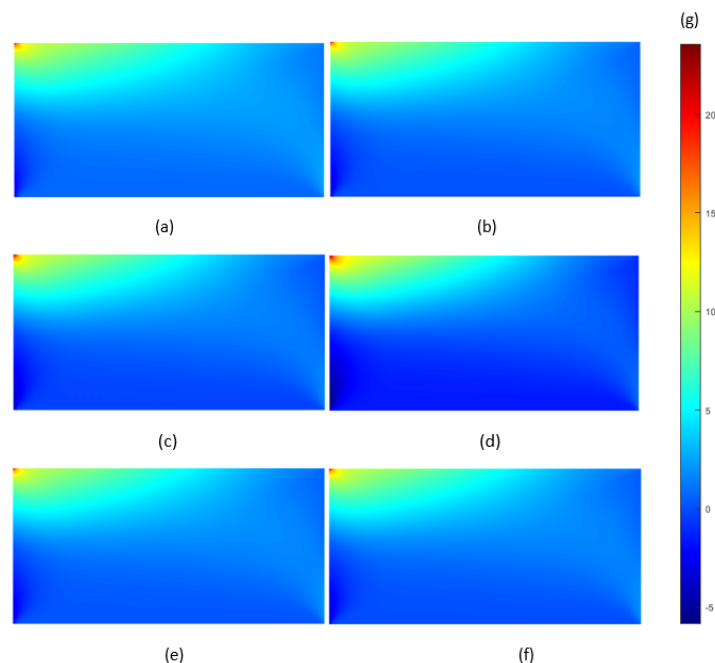


Figure 3.10 – **a)** $FEM_{3n}(\sigma_{11min} = -6,96 \text{ Mpa}; \sigma_{11max} = 24 \text{ Mpa})$ **b)** $FEM_{4n}(\sigma_{11min} = -6,1 \text{ Mpa}; \sigma_{11max} = 23,9 \text{ Mpa})$ **c)** $RPIM_{3n}(\sigma_{11min} = -5,14 \text{ Mpa}; \sigma_{11max} = 22,4 \text{ Mpa})$ **d)** $RPIM_{4n}(\sigma_{11min} = -3,3 \text{ Mpa}; \sigma_{11max} = 19,6 \text{ Mpa})$ **e)** $NNRPIM_{1c}(\sigma_{11min} = -6,24 \text{ Mpa}; \sigma_{11max} = 24,2 \text{ Mpa})$ **f)** $NNRPIM_{2c}(\sigma_{11min} = -5,84 \text{ Mpa}; \sigma_{11max} = 23,6 \text{ Mpa})$ **g)** distribuição geral das tensões

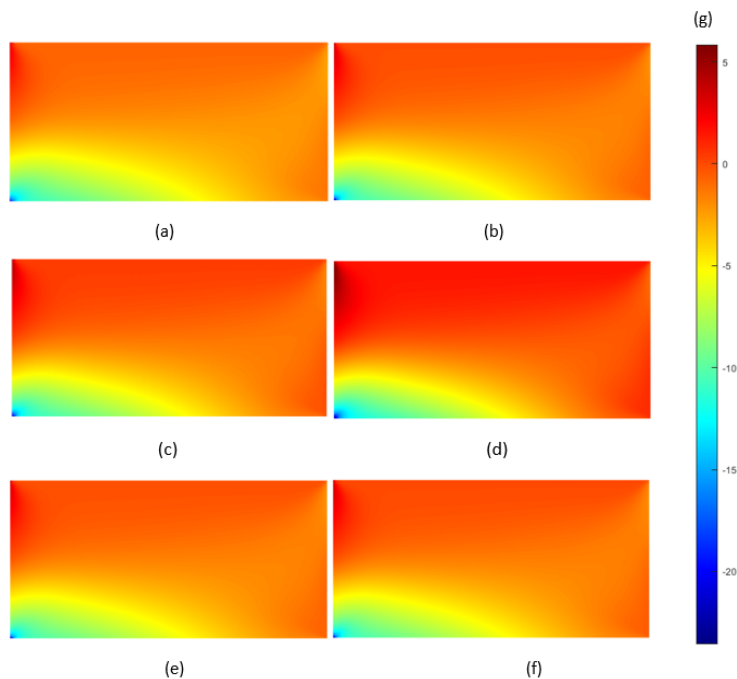


Figure 3.11 – **a)** FEM_{3n} ($\sigma_{22min} = -24$ Mpa; $\sigma_{22max} = 6,96$ Mpa) **b)** FEM_{4n} ($\sigma_{22min} = -23,9$ Mpa; $\sigma_{22max} = 6,1$ Mpa) **c)** $RPIM_{3n}$ ($\sigma_{22min} = -22,4$ Mpa; $\sigma_{22max} = 5,14$ Mpa) **d)** $RPIM_{4n}$ ($\sigma_{22min} = -19,6$ Mpa; $\sigma_{22max} = 3,33$ Mpa) **e)** $NNRPIM_{1c}$ ($\sigma_{22min} = -24,2$ Mpa; $\sigma_{22max} = 6,24$ Mpa) **f)** $NNRPIM_{2c}$ ($\sigma_{22min} = -23,6$ Mpa; $\sigma_{22max} = 5,84$ Mpa) **g)** distribuição geral das tensões

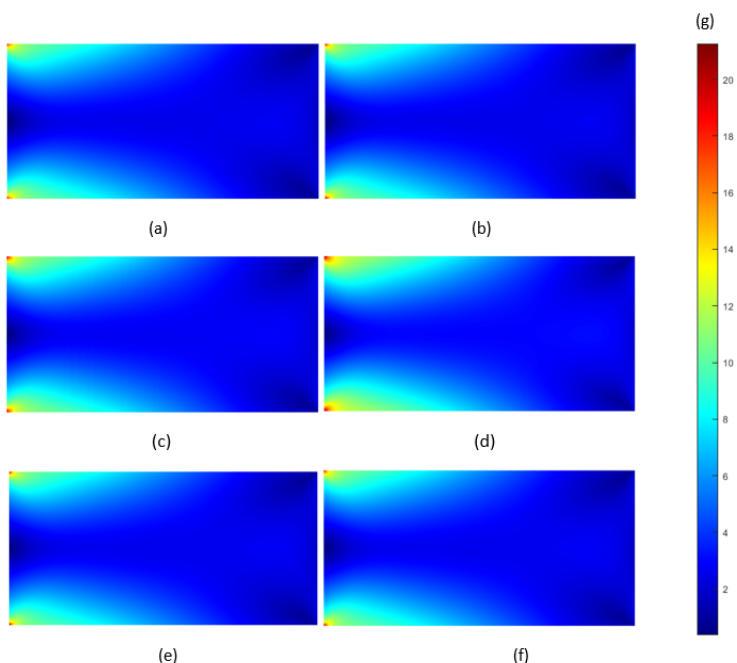


Figure 3.12 – **a)** FEM_{3n} ($\sigma_{eqmin} = -0,4$ Mpa; $\sigma_{eqmax} = 21,4$ Mpa) **b)** FEM_{4n} ($\sigma_{eqmin} = -0,41$ Mpa; $\sigma_{eqmax} = 21,5$ Mpa) **c)** $RPIM_{3n}$ ($\sigma_{eqmin} = -0,354$ Mpa; $\sigma_{eqmax} = 20,4$ Mpa) **d)** $RPIM_{4n}$ ($\sigma_{eqmin} = -3,53$ Mpa; $\sigma_{eqmax} = 18,6$ Mpa) **e)** $NNRPIM_{1c}$ ($\sigma_{eqmin} = -0,344$ Mpa; $\sigma_{eqmax} = 21,8$ Mpa) **f)** $NNRPIM_{2c}$ ($\sigma_{eqmin} = -0,375$ Mpa; $\sigma_{eqmax} = 21,3$ Mpa) **g)** distribuição geral das tensões

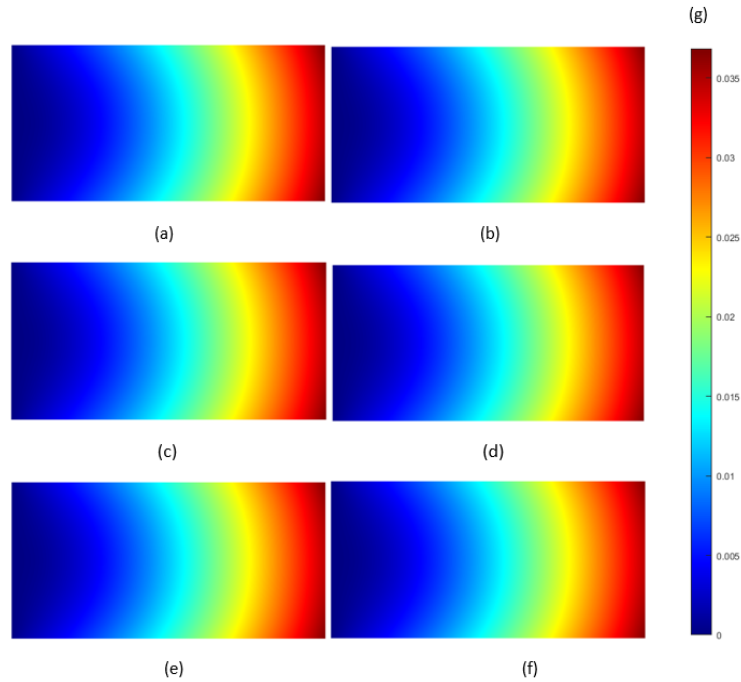


Figure 3.13 – a) FEM_{3n} ($|u|_{min} = 0$ m; $|u|_{max} = 0,0368$ m) b) FEM_{4n} ($|u|_{min} = 0$ m; $|u|_{max} = 0,0368$ m) c) $RPIM_{3n}$ ($|u|_{min} = 0$ m; $|u|_{max} = 0,0368$ m) d) $RPIM_{4n}$ ($|u|_{min} = 0$ m; $|u|_{max} = 0,0369$ m) e) $NNRPIM_{1c}$ ($|u|_{min} = 0$ m; $|u|_{max} = 0,0369$ m) f) $NNRPIM_{2c}$ ($|u|_{min} = 0$ m; $|u|_{max} = 0,0369$ m) g) distribuição geral dos deslocamentos

3.2 Exemplo de estudo genérico

Uma vez demonstradas, através do estudo de convergência, as capacidades e eficácia do software é possível passar para o próximo passo de estudo - a otimização estrutural. Para tal, irá ser abordado um exemplo genérico, já utilizado em simulações anteriores, de forma a atingir os mesmos resultados através dos métodos numéricos em estudo.

Desse modo será feito um estudo de 2 malhas com diferentes nós para analisar o efeito das mesmas nos resultados. Os exemplos genéricos de otimização estrutural vão seguir uma análise de plano de tensão. A malha utilizada no estudo do MEF será de forma quadrangular. No RPIM será usado a topologia de 16 nós dentro dos domínios de influência e a integração gaussiana através de células de integração quadráticas com 2×2 pontos de integração. As funções de formas do RPIM seguem as seguintes constantes: $c = 1.42$, $p = 1.03$. No NNRPIM, serão usados as células de primeiro grau e é considerada uma integração completa. As funções de forma do NNRPIM dependem das seguintes constantes: $c = 0.0001$, $p = 0.9999$ e base polinomial constante.

3.2.1 Viga encastrada

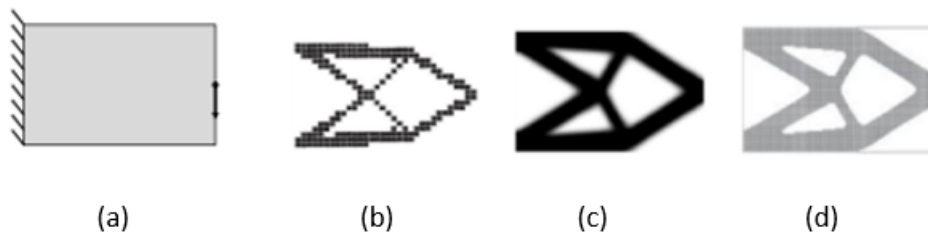


Figure 3.14 – a) Modelo [85] e respectivas soluções otimizadas : b)[85] c)[85] d)[85]

O estudo deste exemplo genérico tem como objetivo verificar a performance dos métodos numéricos propostos quando combinados com algoritmos de otimização. Também é importante pelo facto de permitir estudar qual o tipo de refinamento de malha mais apropriado e quais os parâmetros de otimização ideais para obter a solução final. Este caso de estudo apresentado na figura 3.15, representa uma viga encastrada com uma aplicação de força no ponto indicado. É um dos problemas de otimização mais utilizados de referência quando aplicada a otimização estrutural. A literatura propõe como solução as indicadas na figura 3.14. O objetivo deste estudo passa por mostrar se o MEF, RPIM e NRPIM através do algoritmo de otimização conseguem atingir a modelação ideal.

A viga a estudar (figura 3.15) tem as dimensões de $L = 1,6 \text{ m}$ e $h = 1 \text{ m}$, e o carregamento aplicado é de 100 N no centro da extremidade livre. As propriedades mecânicas do material são as seguintes $E = 1 \text{ Mpa}$, $\nu = 0,3$ e $\sigma_y = 1 \text{ Kpa}$.

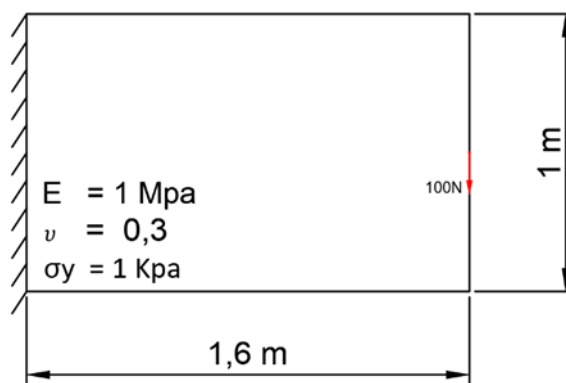


Figure 3.15 – Caracterização da viga em estudo e suas propriedades

De forma a comparar o comportamento de diferentes tipos de refinamentos de malhas, os domínios do problema foram divididos da mesma forma como foi explicado no capítulo 3.1.1 e está demonstrado na tabela 3.3.

Table 3.3 – Divisão dos domínios e respetivas malhas

	M_1	M_2
DIV_x	32	48
DIV_y	20	30
Nº de nós	693	1519

As respetivas representações gráficas das malhas são demonstradas na figura 3.16:

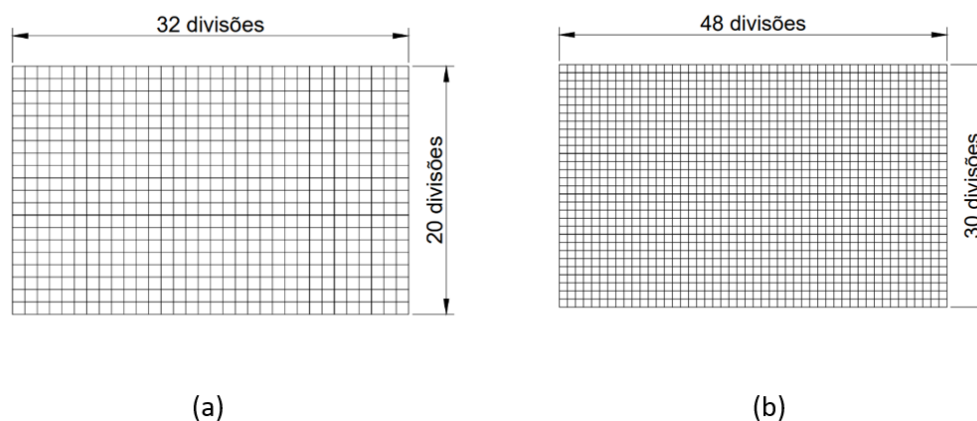


Figure 3.16 – a) representação gráfica da malha menos densa (693 nós) b) representação gráfica da malha mais densa (1519 nós)

De forma a estudar a influência da densidade da malha serão realizados 2 ensaios. O 1º corresponderá a uma malha de 693 nós (figura 3.10 (a)) e uma segunda malha de 1519 nós (figura 3.10 (b)). Uma vez que concentrações de tensões são indesejadas na obtenção da estrutura ideal a carga será aplicada em 3 nós centrais da extremidade livre no caso da malha de 693 nós e em 5 pontos na malha de 1519 nós.

É também importante salientar a importância do coeficiente de redução percentual (DR) nos casos de estudo. Os casos de DR a utilizar vão ser os seguintes: 1%, 2%, 4% e 6%.

A evolução de densidade ao longo de todas as malhas e iterações é apresentada nas tabelas abaixo representadas. As soluções ideais estão destacadas a verde assim como também é apresentada a percentagem de volume da solução final. Vão ser utilizados dois tipos de critérios de otimização: VM effective stress e Strain Energy Density (SED).

3.2.2 Resultados da malha de 693 nós

Table 3.4 – Solução otimizada segundo Critério de Von Mises - malha 693 nós

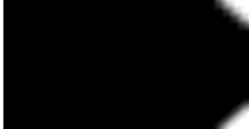


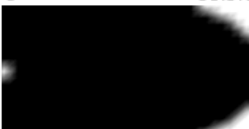






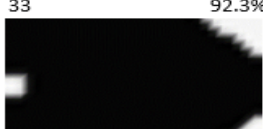













	MEF	RPIM	NNRPIM
1%	 5 95.9%	 5 97.1%	 5 95.1%
	 10 92.6%	 19 94.9%	 9 91.6%
	 15 89.5%	 33 92.3%	 13 88%
	 20 86.9%	 47 90.1%	 16 86.9%
2%	 2 97.3%	 5 94.2%	 5 91.4%
	 5 91.8%	 10 89.7%	 14 79.9%
	 8 87.2%	 15 89.2%	 21 72.6%
	 11 86.2%	 22 87.9%	 27 63.9%

Table 3.5 – Solução otimizada segundo Critério de Von Mises - malha 693 nós (Continuação)





















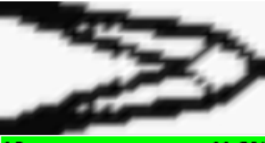



DR	MEF	RPIM	NNRPIM
4%	 10 72.2%	 15 76.4%	 5 83.9%
	 14 63%	 22 60.2%	 8 75.2%
	 137 65.4%	 40 60.4%	 12 62.2%
	 218 64.2%	 222 63.2%	 14 59.9%
6%	 10 76.3%	 7 80.4%	 6 71.5%
	 13 66%	 12 70.6%	 9 58.1%
	 17 47.1%	 17 53.2%	 12 41.9%
	 19 38%	 20 48.8%	 15 25.4%

Table 3.6 – Solução otimizada segundo SED - malha 693 nós
































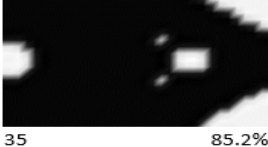





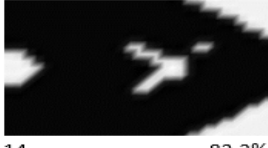

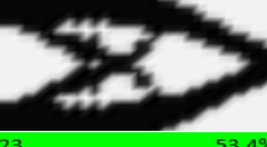








	MEF	RPIM	NNRPIM
1%	 5 95.4%	 5 97.1%	 5 95.3%
	 12 95.1%	 8 95.8%	 8 92.9%
	 22 93.1%	 12 95.9%	 12 89.1%
	 32 92.3%	 18 95.9%	 16 86.9%
2%	 5 91.8%	 5 94.2%	 10 85%
	 8 87.5%	 13 93.1%	 21 73%
	 13 88.4%	 19 89.9%	 37 58.2%
	 17 86.9%	 28 90%	 49 44.6%

Table 3.7 – Solução otimizada segundo Critério SED - malha 693 nós (Continuação)

DR	MEF	RPIM	NNRPIM	
4%	 8 76.5%	 8 86.2%	 8 76.2%	
	 19 66.4%	 18 83.6%	 23 53.4%	
	 29 59.8%	 35 85.2%	 33 50.6%	
	 39 65.3%	 59 80.5%	 53 51.6%	
	6%	 8 76.2%	 14 83.2%	 8 62.2%
		 23 53.4%	 28 72.6%	 13 69.9%
		 33 50.6%	 39 73.3%	 23 48.4%
		 53 51.6%	 58 70.3%	 29 46.2%

3.2.3 Análise de resultados da malha de 693 nós

Foram realizados vários estudos de otimização tendo uns atingido a solução ideal enquanto que outros não. Tal é possível observar nas tabelas 3.4 até 3.7, onde são apresentadas num quadro resumo algumas soluções do processo de iteração. As que se encontram a verde foram as que obtiveram os resultados mais próximos do pretendido.

Nesta análise da malha de 693 nós é possível concluir que nenhum dos métodos numéricos atinge a solução ideal quer pelo método de Von Mises quer pelo método SED quando realizado o ensaio de DR= 1%. Isto deve-se ao facto da taxa de redução ser muito baixa e isso incapacitou o desenvolvimento do algoritmo mantendo praticamente a forma original. O mesmo aconteceu no caso de DR= 2% para o MEF e para o RPIM. Apenas no NNRPIM é que foi possível observar uma otimização o mais idêntico ao esperado. No caso do critério de Von Mises, já apresenta um design muito idêntico ao pretendido mas ainda apresenta uma quantidade em exagero de material (63.9 % da massa inicial). Comparando com o critério SED, apresenta uma geometria quase perfeita mas este último critério já evidencia quase a geometria perfeita com uma grande redução de massa em relação à inicial (44.6 %).

Quando analisadas as soluções com DR= 4% quer o critério de Von Mises quer o SED, apresentam resultados muito parecidos tendo os resultados do SED uma maior taxa de remoção de material relativamente ao domínio inicial quando comparados ao critério de Von Mises. As soluções ideais foram obtidas no MEF e no NNRPIM, sendo a mais próxima do pretendido a iteração 29 do MEF quando aplicado o critério SED.

À taxa de DR de 6 % também se obtiveram bons resultados, principalmente os resultados do MEF quando aplicado o critério de Von Mises e o NNRPIM quando aplicado o SED. O RPIM esteve mais próximo de atingir o design ideal mas houve pouca remoção de material em comparação com os outros métodos.

Concluindo, a malha de 693 nós já é capaz de atingir soluções pretendidas e apresenta os melhores resultados no MEF e no NNRPIM com taxas de DR de 4 e 6%. O RPIM provavelmente necessitaria de uma taxa de DR maior para atingir soluções como o MEF e o NNRPIM.

3.2.4 Resultados da malha de 1519 nós

Table 3.8 – Solução otimizada segundo Critério de Von Mises - malha 1519 nós



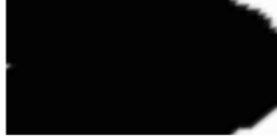





















	MEF	RPIM	NNRPIM
1%	 5 95.6%	 5 96.5%	 5 95.6%
	 14 91.8%	 12 95.5%	 13 89.2%
	 25 88.7%	 22 94.3%	 21 83.4%
	 38 87.4%	 29 92.2%	 26 81.8%
	 5 91.5%	 5 93.2%	 6 89.7%
	 11 89.8%	 15 90.3%	 14 78.8%
	 19 79.3%	 23 90.1%	 25 75.4%
	 28 78.5%	 29 86.2%	 35 72.8%
2%			

Table 3.9 – Solução otimizada segundo Critério de Von Mises - malha 1519 nós (Continuação)














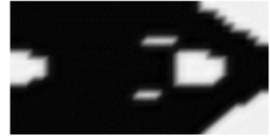



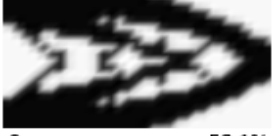


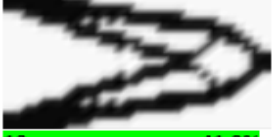


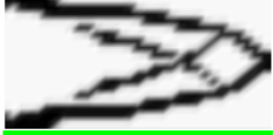
DR	MEF	RPIM	NNRPIM
4%	 5 84.5%	 8 82.3%	 6 80.7%
	 13 73.5%	 18 74.9%	 17 78.4%
	 24 58.1%	 39 72.5%	 32 71.2%
	 29 43%	 58 75.9%	 55 70.2%
6%	 5 76.5%	 7 80.4%	 6 71.5%
	 8 61.2%	 12 70.6%	 9 58.1%
	 12 60.2%	 17 53.2%	 12 41.9%
	 15 44.7%	 20 48.8%	 15 25.4%

Table 3.10 – Solução otimizada segundo SED - malha 1519 nós












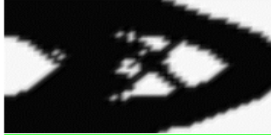




































	MEF	RPIM	NNRPIM
1%	 5 95.6%	 5 96.5%	 5 95.6%
	 14 91.9%	 19 93.2%	 25 83.1%
	 26 88.2%	 34 93.5%	 49 70.9%
	 37 88.1%	 57 92.4%	 75 71.2%
2%	 6 90.2%	 6 92.1%	 6 89.7%
	 27 79.2%	 29 86.3%	 16 77.1%
	 44 79.8%	 39 85.9%	 35 72.8%
	 59 74.5%	 48 86.8%	 43 73.4%

Table 3.11 – Solução otimizada segundo Critério SED - malha 1519 nós (Continuação)

DR	MEF	RPIM	NNRPIM
4%	 6 81.4%	 7 84%	 6 80.7%
	 16 64.5%	 29 74%	 14 70.2%
	 35 47.5%	 39 70.6%	 26 65.4%
	 46 37.6%	 49 73.4%	 42 65.1%
6%	 3 87.7%	 4 85.7%	 5 76.6%
	 5 77.5%	 9 73.7%	 10 68.1%
	 8 63.85%	 19 59.9%	 17 63.4%
	 15 48.6%	 29 53.1%	 34 76.5%

3.2.5 Análise de resultados da malha de 1519 nós

Nesta análise da malha de 1519 nós é possível concluir que nenhum dos métodos numéricos atinge a solução ideal pelo método de Von Mises, mas em contrapartida consegue atingir uma solução muito boa pelo método SED quando aplicado no NNRPIM realizando o ensaio de $DR= 1\%$. O mesmo aconteceu no caso de $DR= 2\%$ e apenas no NNRPIM é que foi possível observar uma otimização o mais idêntico ao esperado também pelo método SED. No caso do critério de Von Mises, já apresenta um design a tender para o esperado mas ainda apresenta demasiadas treliças na zona central, não sendo por isso considerado ainda uma solução ideal.

Quando analisadas as soluções com $DR= 4\%$ quer o critério de Von Mises quer o SED, apresentam resultados muito parecidos tendo os resultados do SED uma maior taxa de remoção de material relativamente ao domínio inicial quando comparados ao critério de Von Mises. As soluções ideais foram obtidas no MEF e no NNRPIM, sendo a mais próxima do pretendido a iteração 42 do NNRPIM quando aplicado o critério SED (tabela 3.11). O RPIM também apresentou uma solução interessante mas ainda apresentava uma elevada taxa de área quando comparado ao modelo inicial.

À taxa de DR de 6 % também se obtiveram ótimos resultados, principalmente os resultados do MEF e NNRPIM quando aplicado o critério de Von Mises e o RPIM e o NNRPIM quando aplicado o SED.

3.2.6 Conclusões gerais

Comparando a malha de 1519 nós com a de 693 pode-se concluir que ambas atingiram soluções ideais. Em ambas as malhas quer o MEF quer o NNRPIM atingiram bons resultados enquanto que apenas na malha mais densa é que foram observados resultados ideais no RPIM. É também de salientar a influência da densidade da malha no tempo de análise computacional: quanto mais densa a malha maior será esse tempo.

O MEF apresentou os melhores resultados na malha menos densa quando aplicado um DR de 6%.

O RPIM, como foi explicado antes, apenas obteve soluções ideais quando aplicada a malha mais densa e também com um DR de 6%.

O NNRPIM foi o método que melhores soluções apresentou quer com a malha menos densa quer com a malha mais densa e também perante vários tipos de DR, sendo os de 4% e 6% os melhores.

Quando comparados os critérios de otimização, pode-se concluir que ambos apresentaram resultados idênticos sendo quer um quer outro propícios a utilizar.

Em relação aos tempos computacionais estes são apenas influenciados pela densidade da malha, não variando nem com os métodos numéricos nem com critérios de otimização.

3.3 Aplicações da otimização na indústria automóvel

Este capítulo tem como objetivo a aplicação dos métodos numéricos até à data estudados na tese num caso prático. O objeto de estudo foram alguns casos da indústria automóvel: tentar atingir um novo design mais eficaz do automóvel comum e otimização de peças isoladas como por exemplo os pilares de um carro. Não ser utilizados os mesmos métodos numéricos, as mesmas constantes e critérios de otimização. Como foi analisado no capítulo anterior, a taxa de DR mais eficiente situava-se entre os 4 % e 6 %, por isso considerou-se uma taxa de DR de 5% e através do critério de Von Mises. Uma vez que se tratam de designs mais específicos e com geometrias complexas, foram usadas malhas triangulares.

O processo passou primeiro pela pesquisa e desenho CAD do modelo já existente. Este desenho foi efetuado no FEMAP e também foi gerada a malha triangular nesse software. Esse modelo é então importado para o FEMAS onde são aplicadas as características do material e definidas as condições de carga e de fronteira no domínio em estudo. Através da otimização, um novo design é gerado e analisado, comparando as capacidades deste com o original.

3.3.1 Otimização do design lateral de um automóvel

Nesta secção o design e forma do automóvel vai ser analisada e é pretendido atingir uma topologia que seja possível de fabrico e possivelmente diferente da habitual.

Para tal, primeiramente é necessário uma geometria já conhecida e, assim sendo, foi consultado o catálogo da Mercedes [86] correspondente ao modelo EQS SUV. A partir da informação relativamente à geometria e massa do veículo é possível começar o projeto.

Na figura 3.17, é demonstrada a geometria inicial do veículo.

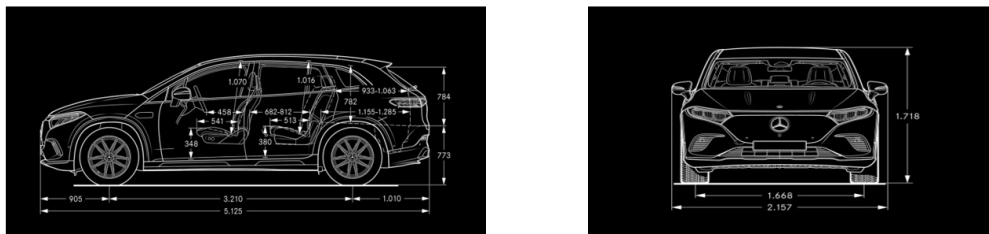


Figure 3.17 – geometria do automóvel em estudo [86]

Foi considerado um aço com as seguintes propriedades mecânicas: $E=200 \text{ Gpa}$, $\nu=0.3$ e $\sigma_{ced}= 600 \text{ Mpa}$.

Assim sendo foi possível desenhar o domínio do automóvel.

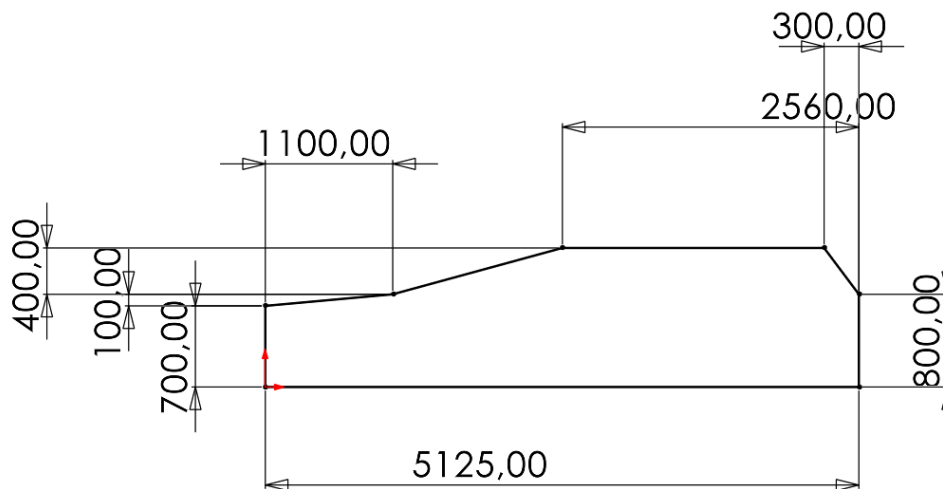


Figure 3.18 – domínio do estudo

A análise vai ter em consideração duas condições diferentes: uma em que não se tem em consideração a posição das janelas (que são essenciais num carro) e outra em que se tem em consideração as janelas.

Em qualquer um desses casos vai ser considerado um perfil de 100 mm a toda a volta do domínio mas com uma densidade diferente de modo restringir e permitir uma melhor visualização do modelo original.

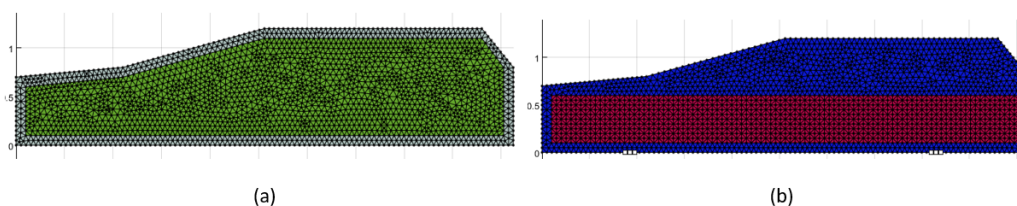


Figure 3.19 – representação da zona de remoção de material quando: a) a janela não entra na consideração do estudo b) a janela entra na consideração do estudo

Apenas a zona a verde na figura 3.19 a) e a vermelho na figura 3.19 b) será remodelada no estudo.

Uma vez já tendo o domínio do problema definido é preciso definir as condições fronteiras.

A zona de encastramento corresponde ao local dos eixos do automóvel. Para evitar concentração de tensões, foram escolhidos os 3 nós mais próximos dos eixos e foram definidas as condições de encastramento. Os pontos brancos da figura 3.20 correspondem a essa zona.

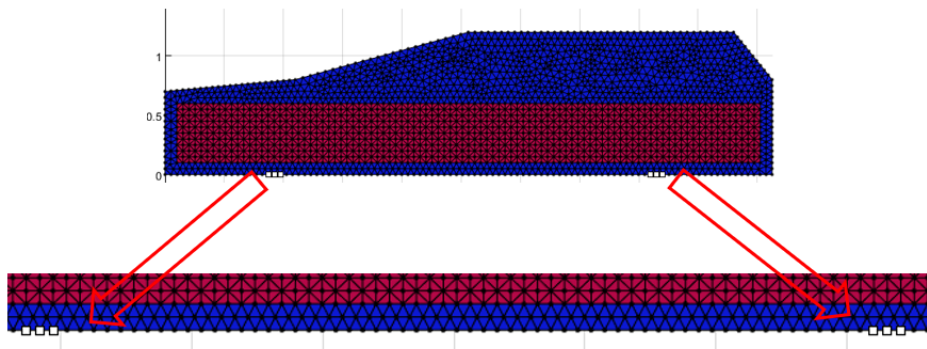


Figure 3.20 – zona de encastramento

Tendo por base o conhecimento de um chassis de um carro, foi possível posicionar as cargas existentes no veículo. Estas são: P1 - peso distribuído total do veículo; P2- peso do motor; P3 - peso equivalente a 4 pessoas com 80Kg, P4- peso do combustível mais o peso da bagageira; e P5- influência do vento quando o carro está em movimento a 120Km/h

Começando pelos posicionamentos das cargas. Estas forças acima referidas têm um posicionamento de acordo com a forma do chassis e também do próprio posicionamento das mesmas ao longo do veículo. Considerando o seguinte chassis na figura 3.21, foram então distribuídas as cargas da seguinte forma:

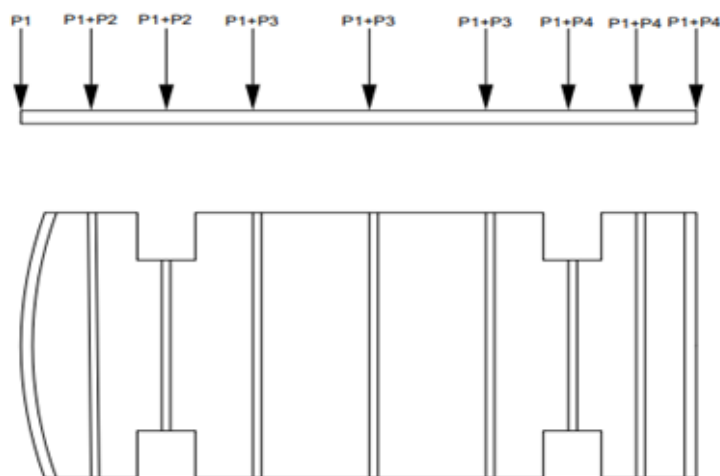


Figure 3.21 – posicionamento das forças

É de salientar que foi aplicado um coeficiente de segurança de 2.5 a todos os valores das forças. P1 corresponde ao peso do carro sem o motor. De acordo com o catálogo da Mercedes, o peso bruto do automóvel é de 2700Kg e o do motor (P2) é de 200Kg, assim sendo, foi dividido por 9 como é mostrado na figura 3.15. O peso das pessoas (P3) foi de 360 Kg, o que equivale a 4 pessoas de 80 Kg e foi dividido segundo 3 espaços como mostra a figura. O peso do combustível mais o peso da bagageira (P4) foi considerado 150Kg no total e também foi dividido segundo 3 espaços.

Todas estas cargas foram aplicadas em 3 nós, como aconteceu no caso do encastramento, para evitar concentração de tensões nesse local.

Falta ainda referir como foi calculada e posicionada a força relativa ao vento (P5). Inicialmente esta força não tinha sido considerada, mas para aproximar o valor da otimização ao mais real possível, foi então feito de seguida um estudo onde a força do vento fosse aplicada. Esta tem direção oposta ao movimento do automóvel e foi considerada uma velocidade de 120Km/h. A força do vento num automóvel foi calculada a partir da equação 3.10:

$$F = C_d \left(\frac{\rho \mu^2}{2} \right) A \quad (3.10)$$

Onde C_d é a constante do vento quando o impacto é num automóvel e o seu valor é de 0.23; ρ é a densidade do ar ($\rho=1.27\text{Kg}/\text{m}^3$); μ é a velocidade em m/s e por fim A é a área de contacto.

Type of Object	Drag Coefficient - C_d -	Frontal Area
Laminar flat plate (Re=106)	0.001	
Dolphin	0.0036	wetted area
Turbulent flat plate (Re=106)	0.005	
Subsonic Transport Aircraft	0.012	
Supersonic Fighter, M=2.5	0.016	
Streamlined body	0.04	$\pi / 4 d^2$
Airplane wing, normal position	0.05	
Sreamlined half-body	0.09	
Long stream-lined body	0.1	
Bicycle - Streamlined Velomobile	0.12	5 ft ² (0.47 m ²)
Airplane wing, stalled	0.15	
Modern car like a Tesla model 3 or model Y	0.23	
Toyota Prius, Tesla model S	0.24	frontal area
Tesla model X		
Sports car, sloping rear	0.2 - 0.3	frontal area
Common car like Opel Vectra (class C)	0.29	frontal area
Hollow semi-sphere facing stream	0.38	
Bird	0.4	frontal area
Solid Hemisphere	0.42	$\pi / 4 d^2$
Sphere	0.5	
Saloon Car. stepped rear	0.4 - 0.5	frontal area

Figure 3.22 – valores de C_d [87]

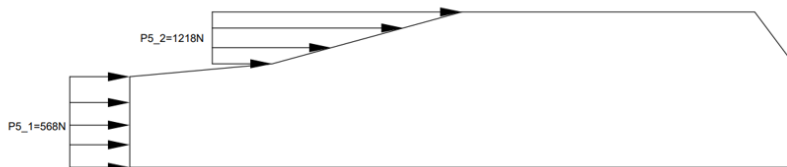


Figure 3.23 – posicionamento e valor das forças do vento

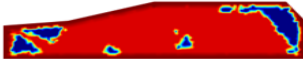
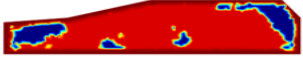
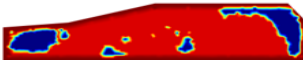
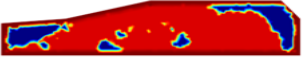
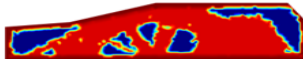
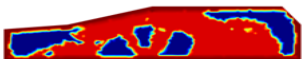
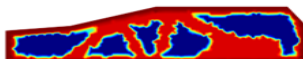
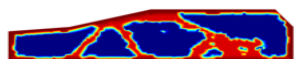
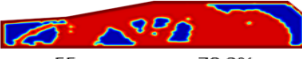
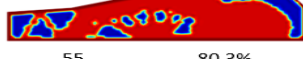
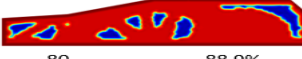
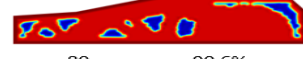
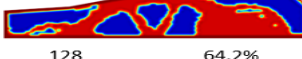
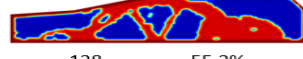
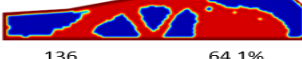
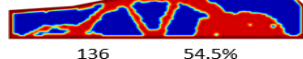
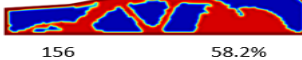
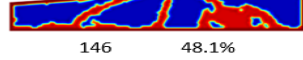
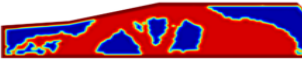
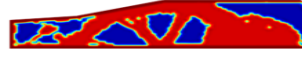
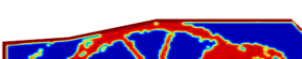
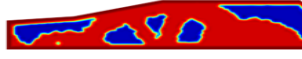
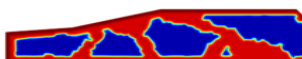
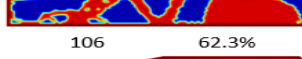
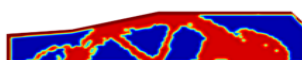
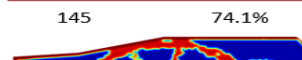

Já tendo as condições fronteiras definidas, o próximo passo passa pela otimização estrutural. Vão ser então analisados os casos em que a janela é influente ou não e também o caso em que o vento é aplicado ou não.

Table 3.12 – Soluções otimizadas no caso em que o carro não otimiza a zona da janela

	Sem efeito do vento	Efeito do vento	
MEF	12 83.2%	12 84.8%	
	15 77.7%	14 80.6%	
	17 72.3%	16 75.1%	
	RPIM	8 78.5%	8 81.3%
		11 83.8%	13 81.5%
		14 78.1%	
NNRPIM		42 82.8%	30 84.7%
	57 82.3%		
	78 85.2%	64 85.5%	

Uma vez acabadas as análises mostradas na tabela 3.12, dá para concluir que o facto de restringir a zona da janela, impediu atingir uma solução viável e prática. Passamos então a analisar o caso em que não foi restringida a área da janela, podendo a otimização afetar essa zona verificar se será possível obter uma otimização exequível.

Table 3.13 – Soluções otimizadas no caso em que toda a área é otimizada

	Sem efeito do vento	Efeito do vento
MEF	 61 90.7%	 61 88.7%
	 82 87.3%	 82 86.4%
	 107 79.7%	 107 75.1%
	 160 66.5%	 148 47.9%
RPIM	 55 78.2%	 55 80.3%
	 80 88.9%	 80 90.6%
	 128 64.2%	 128 55.2%
	 136 64.1%	 136 54.5%
	 156 58.2%	 146 48.1%
NNRPIM	 53 70.1%	 53 68.6%
	 82 50.1%	 82 75.8%
	 106 59.2%	 106 62.3%
	 145 58.6%	 145 74.1%
		 158 47.6%

Tendo em consideração as soluções apresentadas na tabela 3.13, é possível compatibilizar esta solução com o modelo de um carro. Vai ser construído um novo modelo e assim será apresentado um novo design para o automóvel.

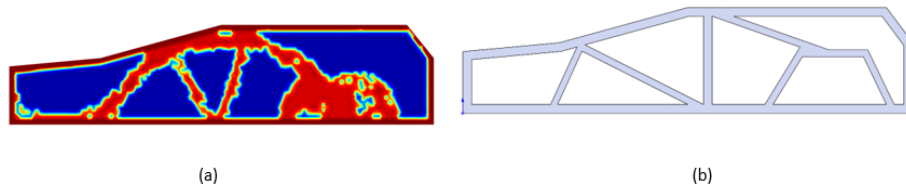


Figure 3.24 – a) Modelo otimizado pelo software FEMAS b) Modelo com design baseado no modelo otimizado pelo FEMAS

O novo design mostra que é possível incorporar portas e janelas. A porta da frente seria uma solução não usual, porque teria de abrir ao contrário do normalmente existente.

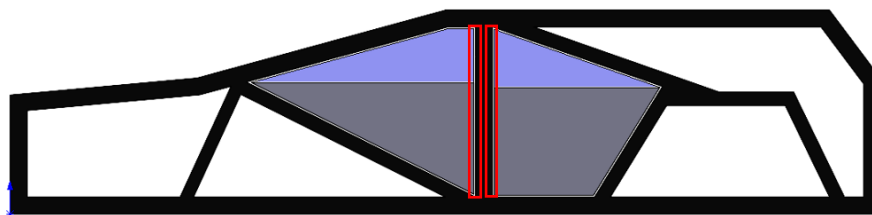


Figure 3.25 – posicionamento de portas e janelas

Na figura 3.25 é possível verificar o posicionamento das portas e janelas. Como dito anteriormente, a porta da frente teria de abrir para a direita. As zonas a vermelho mostram o local onde seriam posicionadas as dobradiças.

Também seria possível colocar uma janela na parte traseira do carro devido ao elevado espaço existente ou então, outra opção seria diminuir o comprimento do carro evitando gastos desnecessários (figura 3.26).

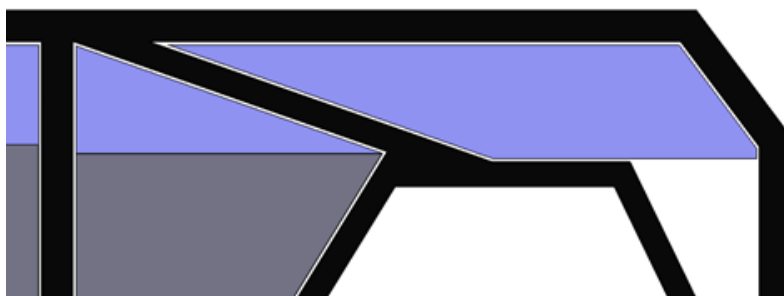


Figure 3.26 – posicionamento de uma potencial janela ou possível zona de remoção de material

Este novo modelo com barras treliçadas e será comparado os deslocamentos totais e tensões máximas relativamente ao modelo inicial.

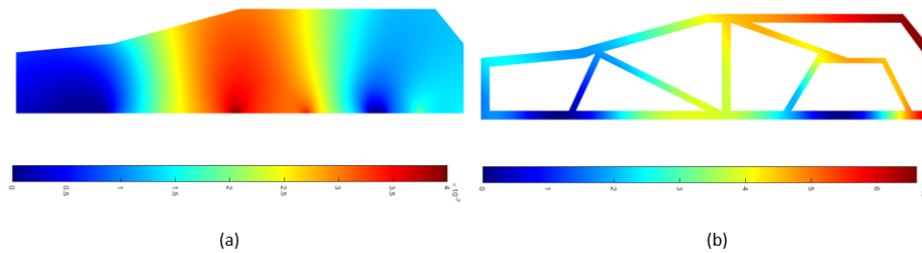


Figure 3.27 – a) Deslocamentos totais no modelo original b) Deslocamentos totais no modelo otimizado

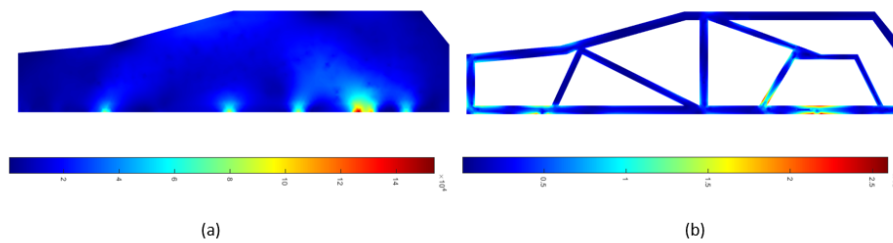


Figure 3.28 – a) Tensões máximas no modelo original b) Tensões máximas no modelo otimizado

Table 3.14 – Quadro resumo dos deslocamentos e tensões

	Modelo original	Modelo otimizado
$ u $ [m]	$4,002 \times 10^{-7}$	$6,603 \times 10^{-6}$
σ_{VM}^{max} [Pa]	$1,54 \times 10^5$	$2,59 \times 10^5$
área final [100%]	100	31,8

A solução original tinha a área de $1072,4 \text{ m}^2$ enquanto que a otimizada apresenta apenas uma área de $341,14 \text{ m}^2$. Isto corresponde a uma redução de cerca de 31,8%.

Como é demonstrado nas figuras 3.27 e 3.28 e na tabela 3.14, quando comparados os valores correspondentes ao deslocamento do domínio inicial com a solução final, é possível concluir que a solução final apresenta valores ligeiramente superiores. No entanto esses valores encontram-se localizados na parte anterior do automóvel e seria possível melhorar a solução caso fosse acrescentada uma barra de fixação extra ou diminuindo o comprimento total do automóvel. Mesmo assim, os valores dos deslocamentos são tão reduzidos que não são preocupação no estudo. Em relação às tensões máximas de Von Mises, os valores da solução otimizada foram superiores aos do domínio inicial mas ainda bastante longe do valor de tensão máxima admissível, mostrando assim a viabilidade da solução otimizada.

O facto de a diminuição de área ser tão elevada, significa uma grande diminuição do peso total e conseqüentemente uma melhoria significativa no projeto. Esta aplicação dos métodos numéricos na otimização estrutural, demonstra a capacidade do algoritmo de otimização na origem de novos designs e formas mais eficientes em problemas antes sem resposta.

3.3.2 Pilar do automóvel

Uma vez feita a otimização do domínio total do automóvel, é também de interesse otimizar partes específicas do mesmo. Assim sendo, o modelo da próxima análise vai ter por base o estudo do pilar do automóvel como pode ser visto na figura 3.29.

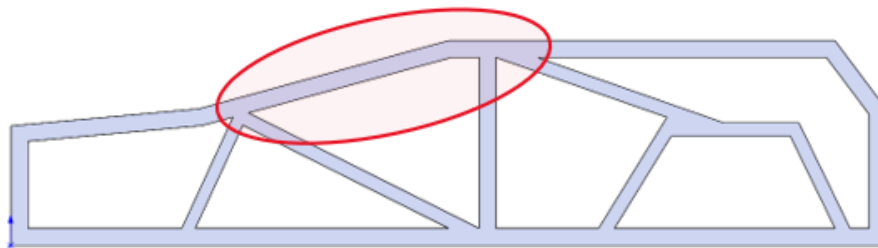


Figure 3.29 – Zona de análise

Esta era uma zona que inicialmente tinha sido restringida de modo a não sofrer remodelação, daí não ter sido otimizada no estudo anterior. As propriedades são as mesmas utilizadas anteriormente, uma vez que se trata do mesmo material e o modelo apresenta 1629 nós e 2880 elementos triangulares.

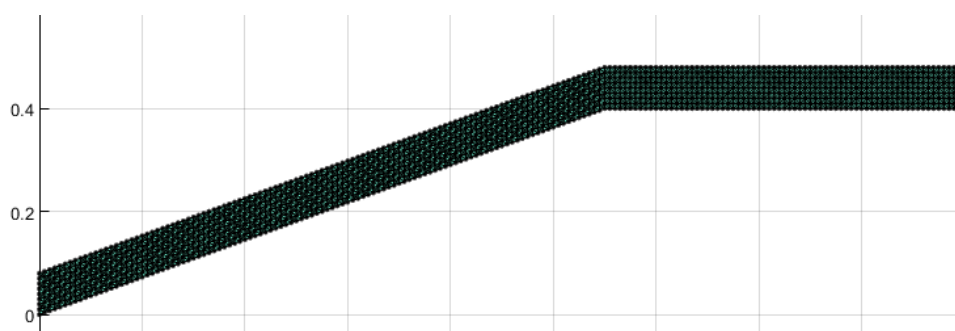


Figure 3.30 – Design do modelo em estudo

As zonas de encastramento e de carregamento de forças foram as representadas na figura 3.31. Aplicou-se a mesma carga anteriormente usada causada pelo efeito do vento, e também o efeito da carga do tejadilho.

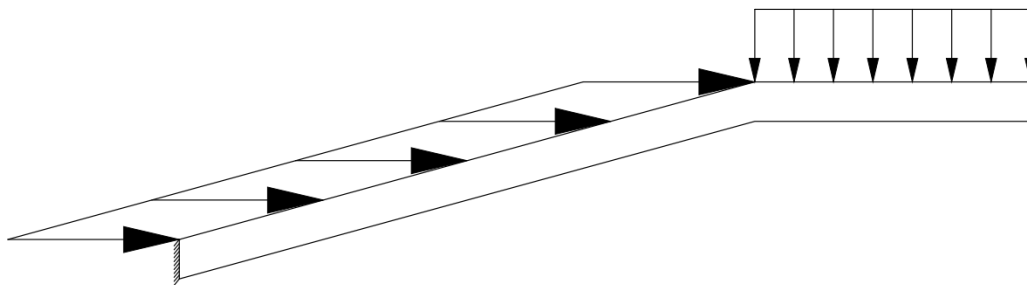
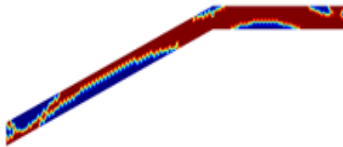
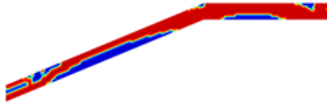
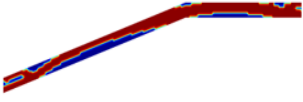
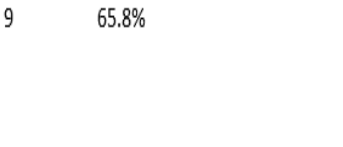
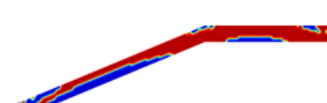
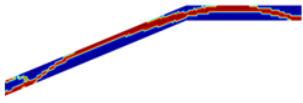
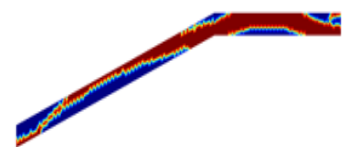
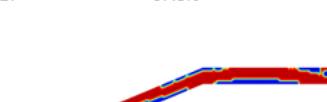
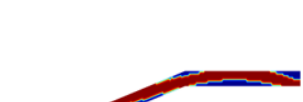


Figure 3.31 – Condições fronteira

Table 3.15 – Soluções otimizadas

MEF	RPIM	NNRPIM
 9 65.8%	 18 71.4%	 11 70.2%
 15 57.7%	 27 67.8%	 19 36.8%
 15 57.7%	 49 55.1%	 23 57.8%

Assim sendo foi possível desenhar um novo domínio do problema tendo por base a vigésima terceira iteração da otimização do NNRPIM (figura 3.32).

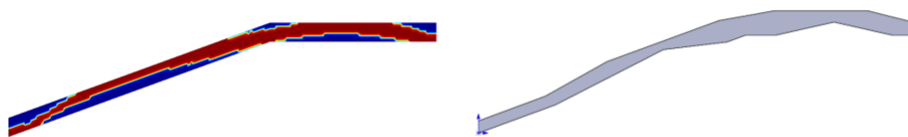


Figure 3.32 – **a)** Modelo otimizado pelo software FEMAS **b)** Modelo com design baseado no modelo otimizado pelo FEMAS

Este novo modelo vai ser sujeito às mesmas forças do modelo original e vão ser comparados os resultados de ambos.

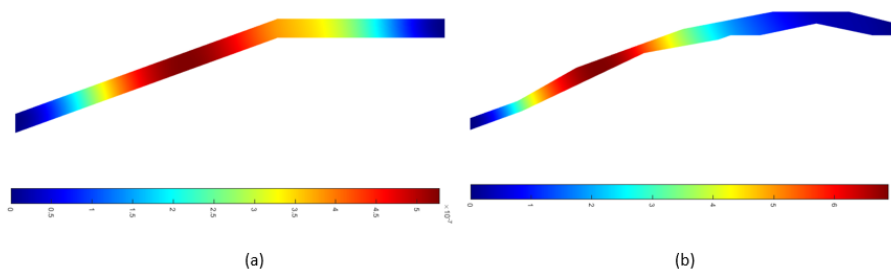


Figure 3.33 – **a)** Deslocamentos totais no modelo original **b)** Deslocamentos totais no modelo otimizado

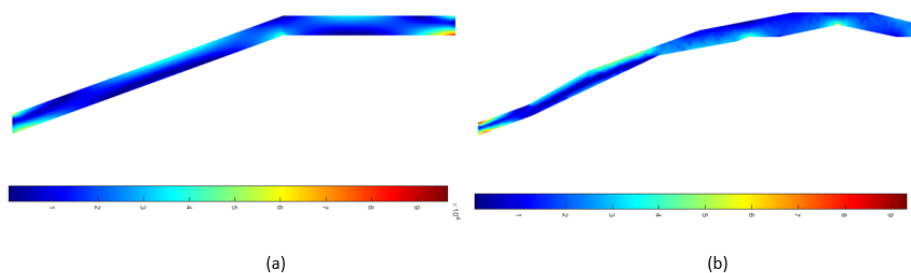


Figure 3.34 – **a)** Tensões máximas no modelo original **b)** Tensões máximas no modelo otimizado

Table 3.16 – Quadro resumo dos deslocamentos e tensões

	Modelo original	Modelo otimizado
$ \mathbf{u} $ [m]	$5,28^{-7}$	$6,89 \times 10^{-7}$
σ_{VM}^{max} [Pa]	$9,67 \times 10^4$	$9,34 \times 10^4$
área final [100%]	100	64,6

A solução original tinha a área de $0,399 \text{ m}^2$ enquanto que a otimizada apresenta apenas uma área de $0,257 \text{ m}^2$. Isto corresponde a uma redução de cerca de 35,4%.

Como é demonstrado nas figuras 3.33 e 3.34 e na tabela 3.16, as diferenças no que toca ao deslocamento, foram mínimas. O que é um índice excelente quando analisando um estudo de otimização estrutural. De forma a combater este ligeiro aumento, poderia ser reforçada esta zona de maior deformação. Em relação às tensões máximas de Von Mises, a o modelo otimizado superou as expectativas e apresentou um valor inferior ao original.

Neste exemplo de otimização estrutural é possível concluir exatamente as vantagens e desvantagens do estudo. Apesar de a solução apresentar um peso inferior à original e apresentar melhores resultados, o custo de produção iria acabar por inverter a situação uma vez que se trata de uma geometria bastante diferente ao comum. Apenas com uma inovação no processo de produção poderia ser um processo competitivo com o original.

4 Conclusões

4.1 Conclusões gerais

O principal objetivo desta dissertação passou pelo estudo da otimização topológica estrutural quando aplicada em combinação com diversos métodos numéricos. Assim, um dos objetivos do presente estudo foi analisar o comportamento dos métodos sem malha - RPIM e o NNRPIM - quando combinados o algoritmo de otimização topológica, e comparar os seus resultados com os obtidos com o MEF. Tal comparação é relevante pois o MEF é considerado o método numérico de análise estrutural mais popular, graças aos seus resultados robustos e de elevada nível de precisão. Contudo, quando analisados problemas de geometria complexa, surgiam elevadas distorções na malha afetando os resultados obtidos. De tal forma, e como o nome indica, os métodos sem malha, surgiram de modo a superar os problemas de malha existentes nos estudos do MEF uma vez que não necessitam da malha como o MEF mas apenas da localização dos nós no domínio do problema.

A otimização estrutural é um dos campos mais relevantes da área da mecânica estrutural, uma vez que visa uma obter uma redução de peso e materiais (e consequentemente de custo), sem comprometer a segurança ou a resistência da estrutura. Tal abordagem permite a construção de estruturas mais eficientes em termos sustentabilidade, uma vez que reduz o consumo de recursos naturais e impactos ambientais. Também contribui para melhorar a durabilidade e a vida útil das estruturas. Desenvolvendo-se uma configuração ótima, é possível distribuir as cargas de forma mais uniforme e assim, reduzir concentrações de tensões e minimizar os efeitos de fadiga e deformação excessiva ao longo do tempo.

Nesta dissertação, inicialmente foi efetuado um estudo de convergência dos métodos numéricos de forma a verificar a sua estabilidade e robustez numérica. Assim sendo, os resultados do estudo de convergência foram comparados com os valores calculados analiticamente. Foi possível concluir que quanto mais densa for a malha do domínio em estudo, mais próxima será a solução obtida com os métodos discretos com a solução analítica. É também possível concluir que todos os métodos numéricos atingiram os valores esperados exceto quando analisado um ponto coincidente com o encastramento. Tal pode ser explicado devido pelos efeitos de extrapolação da tensão para os nós (uma vez que as tensões são obtidas nos pontos de integração e não nos nós).

Após o estudo de convergência, foi realizado um estudo da influência da densidade da malha e de calibração do algoritmo de otimização num estudo de otimização. Foram então comparados os valores obtidos na análise de um exemplo genérico: viga de cantilever. Neste estudo, duas malhas diferentes foram analisadas e foram con-

siderados duas variáveis de campo distintas a otimizar - a tensão de von Mises e a SED - quando aplicados a taxas de remoção de material de 1%, 2%, 4% e 6%.

As conclusões desses estudos foram:

- Estudos com taxas de remoção de 1% e 2% não permitiram a obtenção dos resultados esperados (documentados na literatura), com a exceção do NNRPIM;
- Quer o MEF quer o NNRPIM apresentaram os melhores resultados com taxas de remoção de 4% e 6%, independentemente do campo de variáveis otimizada (tensão de Von Mises ou SED);
- O RPIM apenas foi capaz de convergir para a solução esperada na análise com a malha mais densa e considerando uma taxa de remoção de 6%;
- O tempo computacional depende apenas da densidade nodal da malha.

A última etapa da dissertação passou pela aplicação do algoritmo de otimização em exemplos práticos. A área escolhida foi a indústria automóvel. O objetivo foi a geração de uma nova tipologia de design lateral de um automóvel e otimizar zonas específicas como um pilar do automóvel.

No estudo de um novo design lateral de um automóvel, a solução final apresenta apenas 31,8% da área do domínio inicial, permitindo uma grande diminuição de peso e garantir na mesma um modelo resistente e possível de fabricar. Quer tensões máximas, quer deslocamentos atingiram valores muito longe dos críticos, mostrando assim a viabilidade da solução proposta.

No caso do estudo do pilar é de salientar que a solução otimizada superou a original. Uma redução aproximadamente de 35% da massa original e apresentou tensões inferiores ao modelo inicial. Contudo a geometria obtida é bastante diferente do convencional, levando a um elevado custo de produção.

4.2 Limitações do estudo e as suas vantagens

Recorrendo à aplicação da otimização estrutural é possível obter soluções mais ajustadas e evitar excessos desnecessários. O reforço de certas zonas e remoção de material noutras permite cumprir os parâmetros exigidos do problema como por exemplo não ultrapassar tensões de cedência, deformações máximas, entre outros, e diminuir o peso total da estrutura, permitindo assim um grande benefício ambiental.

Embora todas as vantagens destacadas até ao momento, o processo de otimização estrutural pode ter os seus contras. Por vezes, origina soluções de tal forma complexas que podem ser impraticáveis ou exageradamente difíceis de produzir, aumentando assim os custos, não compensado os valores poupados antes. Outra desvantagem da abordagem proposta, é o elevado tempo computacional requerido para atingir soluções ideais. Quanto maior for a densidade nodal do domínio em

estudo, maior será o tempo computacional.

4.3 Trabalhos futuros

Em estudos futuros, seria importante a validação e realização de ensaios experimentais de modo a testar as soluções obtidas. Outro grande objetivo seria a aplicação destes estudos em problemas tridimensionais de forma a verificar se seria obtido o mesmo resultado ou não. Note-se que a análise tridimensional apenas não foi realizada neste trabalho devido à falta de poder computacional.

Outro tópico interessante seria desenvolver novos processos mecânicos, de forma a garantir a produção exata das geometrias geradas pelo algoritmo e permitir competir com os custos de produção das técnicas de fabrico já existentes. Assim, seria possível não só diminuir o peso (e consequentemente o custo de material), mas também diminuir o custo de produção, aumentando a atratividade da proposta.

Por último, também seria interessante realizar novos estudos e propor novos parâmetros para a otimização dos métodos sem malha uma vez que se tratam de métodos muito recentes e com poucos estudos feitos até à data.

Referências

- [1] Zhang Y, He Z. Seismic collapse risk assessment of super high-rise buildings considering modeling uncertainty: a case study. *Struct Des Tall Special Build* 2020; 29(3):e1687
- [2] He Z, Fu S, Shi Y, et al. New speedup algorithms for nonlinear dynamic time history analysis of supertall building structures under strong earthquakes. *Struct Des Tall Special Build* 2017;26(16):e1369
- [3] Zhao J, Zhen Z. PKPM and SAP2000 software on a layer of engineering seismic structure performance analysis based on structure mechanics. *Adv Mater Res* 2013; 788:498–501
- [4] Pechorskaya SA, Galishnikova VV, et al. Structural analysis of high-rise building using ETABS and RSA software. *Struct Mech Eng Constr Build* 2021;17(2):133–9
- [5] Fu Xueyi Wu, Bing MM, et al. Structural design on T1 tower of Shenyang Baoneng Financial Hub. *Build Struct* 2017;47(05):1–8. in Chinese
- [6] Wenchen Shan, Yao Ding, Junwen Zhou Automatic structural optimization design using sensitivity-based method. *Structures* 46 (2022) 99-118
- [7] Campilho R. Método de Elementos Finitos(2012) - Ferramentas para Análise Estrutural. First Edit. Guimarães J, editor. Porto: Publindústria
- [8] J. Belinha, *Meshless Methods in Biomechanics (2014) - Bone Tissue Remodelling Analysis*, 1st ed. Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer
- [9] Hicks RM, Murman EM, Vanderplaats GN (1974) An Assessment of Airfoil Design by Numerical Optimization. Technical report, NASA TM-X-3092
- [10] Hicks RM, Henne PA (1978), Wing design by numerical optimization. *J Aircr* 15(7):407–12
- [11] Liu GR.(2010) *Meshfree Methods Moving Beyond the Finite Element Method*. Second Edi. Boca Raton: CRC Press
- [12] Ohs RR, Aluru NR (2001) Meshless analysis of piezoelectric devices. 27(01):23–36
- [13] Duarte CA, Odent JT. H-p clouds—an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 1996;12(06):673–705
- [14] Liu GR, Gu YT. A point interpolation method for two-dimensional solids. *Int J Numer Meth Eng* 2001;50(04):937–51
- [15] Wang JG, Liu GR. A point interpolation meshless method based on radial basis

- functions. *Int J Numer Meth Eng* 2002;54(11):1623–48.
- [16] Liu GR, Gu YT (2001), A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *J Sound Vib*, 246(01):29–46
- [17] Chen JS, Pan CH, Wu CT, Liu WK. Reproducing Kernel Particle Methods for large deformation analysis of non-linear structures. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1996;139(01):195–227
- [18] Chen JS, Pan C, Wu CT. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. *Comput Mech* 1997;19(03):211–27
- [19] Liu F, Wu Q, Cheng Y. A Meshless Method Based on the Nonsingular Weight Functions for Elastoplastic Large Deformation Problems. *Int J Appl Mech* 2019;11(01):1950006.
- [20] Reddy JN (1999) *Theory and Analysis of Elastic Plates*. London: Taylor Francis
- [21] Liu GR (2010) *Meshfree Methods Moving Beyond the Finite Element Method*. Second Edi. Boca Raton: CRC Press
- [22] Kumar Alpesh, Bhardwaj Akanksha, Kumar BVRathish. A meshless local collocation method for time fractional diffusion wave equation. *Comput Math Appl* 2019;78(6):1851–61
- [23] Kumar Alpesh, Bhardwaj Akanksha. A local meshless method for time fractional nonlinear diffusion wave equation. *Numer Algorithms* 2020;85(4):1311–34
- [24] Bhardwaj Akanksha, Kumar Alpesh. A meshless method for time fractional nonlinear mixed diffusion and diffusion-wave equation. *Appl Numer Math* 2021;160:146–65
- [25] Nikan Omid, Avazzadeh Zakieh, Machado JATenreiro. Numerical study of the nonlinear anomalous reaction–subdiffusion process arising in the electroanalytical chemistry. *J Comput Sci* 2021;53:101394.
- [26] X.C.He, J.S. Yang, G.X. Mei, L.X.Peng. Bending and free vibration analyses of ribbed plates with a hole based on the FSDT meshless method. *Engineering Structures* 272 (2022)114914
- [27] Gingold RA, Monaghan JJ (1997) Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars. *Mon Not Astron Soc* 181:375–380
- [28] Liu WK, Jun S, Zhang YF (1995) Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Meth Fluids* 20(6):1081
- [29] Lancaster P, Salkauskas K (1981) Surfaces generation by moving least squares methods. *Math Comput* 37:141–149
- [30] Nayroles B, Touzot G, Villon P (1992) Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Comput Mech* 10:307
- [31] Belytschko T, Lu YY, Gu L (1994) Element-free galerkin method. *Int J Numer Meth Eng* 37:229

- [32] Atluri SN, Zhu T (1998) A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput Mech* 22(2):117
- [33] De S, Bathe KJ (2000) The method of finite spheres. *Comput Mech* 25(4):329–345
- [34] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OC, Taylor RL, Sacco CA (1996) A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Comput Methods Appl Mech Eng* 139(1–4):315–346
- [35] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OC, Taylor RL (1996) A finite point method in computational mechanics—applications to convective transport and fluid flow. *Int J Numer Meth Eng* 39:3839–3866
- [36] Kansa EJ (1990) Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-I surface approximations and partial derivative estimates. *Comput Math Appl* 19(8–9):127–145
- [37] Liu GR, Gu YT. A point interpolation method for two-dimensional solids. *Int J Numer Meth Eng* 50:937–951, 2001
- [38] Liu GR (2002) A point assembly method for stress analysis for two-dimensional solids. *Int J Solid Struct* 39:261–276
- [39] Wang JG, Liu GR (2002) A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *Int J Numer Meth Eng* 54:1623–1648
- [40] Wang JG, Liu GR (2002) On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Comput Methods Appl Mech Eng* 191:2611–2630
- [41] Sergio R, Idelsohn S, Oñate E, Calvo N, Del Pin F (2003) The meshless finite element method. *Int J Numer Meth Eng* 58(6):893–912,
- [42] Traversoni L. Natural neighbour finite elements (1994) In: International conference on hydraulic engineering software. Hydrosoft proceedings of computational mechanics publications, vol 2, pp 291–297
- [43] Sukumar N, Moran B, Semenov AY, Belikov VV (2001) Natural neighbour Galerkin methods. *Int J Numer Meth Eng* 50(1):1–27
- [44] Braun J, Sambridge M (1995) A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature* 376:655–660
- [45] Sukumar N, Moran B, Belytschko T (1998) The natural element method in solid mechanics. *Int J Numer Meth Eng* 43(5):839–887
- [46] Dinis LMJS, Jorge RMN, Belinha J (2007) Analysis of 3D solids using the natural neighbour radial point interpolation method. *Comput Methods Appl Mech Eng* 196(13–16):2009–2028
- [47] Belinha J, Jorge RMN, Dinis LMJS (2013) The natural radial element method. *Int J Numer Meth Eng* 93(12):1286–1313
- [48] Belinha J, Jorge RMN, Dinis LMJS (2013) Composite laminated plate analysis

- using the natural radial element method. *Compos Struct* 103(1):50–67
- [49] Chen JS, Wu CT, Yoon S, You Y (2001) A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *Int J Numer Methods Eng* 50(2):435–466
- [50] Sze KY, Chen JS, Sheng N, Liu XH (2004) Stabilized conforming nodal integration: exactness and variational. *Finite Elem Anal Des* 41(2):147–171
- [51] Elmer W, Chen JS, Puso M, Taciroglu E (2012) A stable, meshfree, nodal integration method for nearly incompressible solids. *Finite Elem Anal Des* 51
- [52] Belytschko T, Gu L, Lu YY (1994) Fracture and crack growth by element free Galerkin methods. *Modell Simul Mater Sci Eng* 2(3A):519–534
- [53] Sibson R (1981) A brief description of natural neighbor interpolation. In: Barnett V (ed) *Interpreting multivariate data*. Wiley, Chichester, pp 21–36
- [54] Mukherjee YX, Mukherjee S (1997) On boundary conditions in the element-free Galerkin method. *Comput Mech* 19(4):264–270
- [55] Lawson CL (1977) Software for C1 surface interpolation. In: Rice JR (ed) *Mathematical software III*, 3rd edn. Academic Press, New York 3.4 Numerical Implementation 85
- [56] Watson DF (1992) *Contouring: a guide to the analysis and display of spatial data*. Pergamon Press, Oxford
- [57] Dinis LMJS, Jorge RMN, Belinha J (2010) A 3D shell-like approach using a natural neighbour meshless method: isotropic and orthotropic thin structures. *Compos Struct* 92(5):1132–1142
- [58] Dinis LMJS, Jorge RMN, Belinha J (2009) The natural neighbour radial point interpolation method: dynamic applications. *Eng Comput* 26(8):911–949
- [59] Moreira S, Belinha J, Dinis LMJS, Jorge RMN. Analysis of laminated beams using the natural neighbour radial point interpolation method. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 2014.
- [60] P.W. Christensen, A. Klarbring, *An introduction to structural optimization, Solid Mechanics and its Applications* 153 (2008) 1–220
- [61] J. S. Jensen, “Topology optimization,” in *Wave Propagation in Linear and Non-linear Periodic Media*, vol. 540, Vienna: Springer Vienna, 2012, pp. 109–159
- [62] M P Bendsoe and O Sigmund (2003) *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Engineering online library. Springer Berlin Heidelberg
- [63] Fabio Morais de Andrade, Cristina Almeida Magalhaes. Evolutionary structural optimization in energy absorption structures. *Advances in Engineering Software* 169 (2022) 103145
- [64] Dolbow J, Belytschko T (1999) Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. *Comput Mech* 23:219–230

- [65] A.G.M. Michell(1904), The limits of economy of material in frame-structures, *Philos. Mag.* 8 589–597
- [66] W.C. Dorn(1964), R.E. Gomory, H.J. Greenberg, Automatic design of optimal structures, *J. Mec.* 3 25–52
- [67] R.H. Gallagher (1977), Fully stressed design, in: R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz (Eds.), *Optimum Structural Design*, John Wiley, Great Britain, pp. 19–32
- [68] G. I. N. Rozvany (1977), “Optimum Choice of Determinate Trusses under Multiple Loads,” *J. Struct. Div.*, vol. 103, no. 12, pp. 2432–2433
- [69] M.P. Bendsøe, N. Kikuchi(1988), Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 71 197–224
- [70] M. P. Bendsøe (1989), “Optimal shape design as a material distribution problem,” *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202
- [71] M. Zhou and G. I. N. Rozvany (1991), “The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 89, no. 1–3, pp. 309–336
- [72] G. I. N. Rozvany, M. Zhou, and T. Birker (1992), “Generalized shape optimization without homogenization,” *Struct. Optim.*, vol. 4, no. 3–4, pp. 250–252,
- [73] Y. M. Xie and G. P. Steven (1993), “A simple evolutionary procedure for structural optimization,” *Computers Struct.*, vol. 49, no. 5, pp. 885–896
- [74] O. M. Querin, G. P. Steven, and Y. M. Xie (1998), “Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm,” *Eng. Comput.*, vol. 15, no. 8, pp. 1031–1048
- [75] X. Y. Yang, Y. M. Xie, G. P. Steven (1999), and O. M. Querin, “Bi-directional evolutionary method for stiffness optimisation,” *AIAA J.*, vol. 37, no. 11, pp. 1493–1488
- [76] N. Le Chau, M.P. Dang, C. Prakash, D. Buddhi, Thanh-Phong Dao. Structural optimization of a rotary joint by hybrid method of FEM, neural-fuzzy and water cycle-moth flame algorithm for robotics and automation manufacturing. *Robotics and autonomous systems* 156 (2022) 104199
- [77] Kim J(1997), *Topology optimization for two-dimensional continuum using Element Free Galerkin method*. Arlington: The University of Texas
- [78] Wang Y, Luo Z, Wu J, Zhang N (2015), Topology optimization of compliant mechanisms using element-free Galerkin method;85:61–72.
- [79] V. Shobeiri (2016), Topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization based on the element-free Galerkin method, *Eng. Optim.* 48 (3) 380–396.
- [80] Y. Du, Z. Luo, Q. Tian, L. Chen (2009), Topology optimization for thermo-

mechanical compliant actuators using mesh-free methods, *Eng. Optim.* 41 (8) 753–772.

[81] Z. Luo, N. Zhang, W. Gao, H. Ma (2012), Structural shape and topology optimization using a meshless Galerkin level set method, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 90 (3) 369–389.

[82] Jiao Lia, Yanjin Guanb, Guangchun Wanga, Guilong Wanga, Haiming Zhanga, Jun Lina, (2020), A meshless method for topology optimization of structures under multiple load cases. *Structures* 25 173-179.

[83] Li S, Atluri SN (2008), Topology-optimization of structures based on the MLPG mixed collocation method. *CMES-Comput Model Eng*;26:61–74.

[84] in J, Naceur H, Coutellier D, Laksimi A (2015), Geometrically nonlinear analysis of twodimensional structures using an improved smoothed particle hydrodynamics method. *Eng Comput*;32:779–805.

[85] X. Huang and Y. M. Xie (2010), *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures*. WILEY

[86] Retirado do Website:

<https://www.mercedesbenz.pt/passengercars/models/suv/eqs/overview.html>tech-data

[87] Retirado do Website:

https://www.engineeringtoolbox.com/drag-coefficient-d_627.html

