



Estudo numerico da propagacao da fratura num suporte de um Dispositivo de Protecao Lateral com recurso a Metodos sem Malha

BRUNO MIGUEL FERREIRA ALVES

julho de 2026

**Estudo numérico da propagação da fratura num
suporte de um Dispositivo de Proteção Lateral
com recurso a Métodos sem Malha**

Bruno Miguel Ferreira Alves

**Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Automóvel**

Orientador: Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha

Júri: Professor Doutor Pedro Miguel Rosas de Almeida Areal

Júri: Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha

Júri: Professor Doutor Daniel do Espírito Santo Rodrigues

Porto, junho 2026

Agradecimentos

Deixo um especial agradecimento ao Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha por todo o apoio prestado ao longo da realização desta dissertação. Mostrou-se sempre disponível no esclarecimento de dúvidas e na superação dos obstáculos que surgiram ao longo das sucessivas reuniões semanais, constituindo um pilar fundamental através da sua vasta experiência nesta área de investigação.

Aos meus pais e à minha namorada, agradeço pelo apoio incondicional, pelos sacrifícios invisíveis desde o início do meu percurso académico até ao capítulo final desta jornada, e por acreditarem em mim em todos os momentos. Esta conquista é tanto minha como vossa.

Resumo

Esta dissertação de mestrado apresenta o estudo numérico de propagação de fratura num suporte de fixação vertical de um *Lateral Protection Device* (LPD) aplicado a veículos pesados de mercadorias. Um LPD constitui um componente mecânico crítico no âmbito da segurança rodoviária passiva, projetado de acordo com o Regulamento n.º 73 da *United Nations Economic Commission for Europe* (UNECE) para mitigar as consequências de colisões laterais e evitar o esmagamento de peões, ciclistas e motociclistas sob a estrutura do veículo pesado. Face à severidade operacional do setor automóvel, o componente pode estar sujeito a severos fenómenos de concentração de tensões. A simulação numérica através do tradicional método dos elementos finitos apresenta limitações, nomeadamente a dependência de uma malha com conectividade fixa e a necessidade de algoritmos de reconstrução de malha computacionalmente onerosos para simular a propagação de fissuras. Como alternativa para superar estes obstáculos, neste trabalho investigam-se os Métodos sem Malha, com foco no método *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) e o *Natural Neighbour Radial Interpolation Method* (NNRPIM).

Assim, o objetivo principal consiste em prever e analisar de forma rigorosa as trajetórias de fratura e a distribuição dos campos de tensão no suporte estrutural elaborado sob diferentes cenários de solicitação. Procura-se, deste modo, validar a eficiência e a fiabilidade dos métodos sem malha na análise de componentes da indústria automóvel.

A metodologia adotada compreendeu a implementação numérica e paramétrica de diferentes casos de estudo no software computacional *Finite Element and Meshless Analysis Software* (FEMAS), integrando pré-fendas nas faces inferior e superior da peça. Além do método dos elementos finitos, foram aplicados o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) e o *Natural Neighbour Radial Interpolation Method* (NNRPIM), formulados sob o princípio dos trabalhos virtuais. A direção e o avanço autónomo da fratura foram definidos pelo critério da Tensão Tangencial Máxima.

Os resultados geométricos demonstram uma forte correspondência na propagação das trajetórias da fratura geradas pelas abordagens sem malha e o modelo de referência em elementos finitos. Na análise dos campos de tensão, constatou-se que o desempenho dos métodos sem malha face ao método dos elementos finitos, proporciona uma maior nitidez cromática, mapeando o nível de tensões e a transição de tensões de forma contínua, fluida e suave.

Conclui-se que os métodos sem malha assumem-se como alternativas computacionais robustas, viáveis e precisas. A supressão de restrições de conectividade fixa baseada em elementos permitiu capturar a descontinuidade física da fratura de forma contínua e automatizada, mitigando o custo computacional associado a processos de construção de malha sucessivos. Por fim, o estudo paramétrico evidenciou que a localização da pré-fenda imposta condiciona não só a magnitude dos picos de tensão, mas também a estabilidade do componente.

PALAVRAS-CHAVE: Mecânica da Fratura, Métodos sem Malha, Propagação da fratura, Métodos dos Elementos Finitos, LPD

Abstract

This Master's degree presents a numerical study on crack propagation in the vertical mounting bracket of a Lateral Protection Device (LPD) applied to heavy goods vehicles. An LPD is a critical passive road safety component, designed in accordance with UNECE Regulation No. 73 to mitigate the consequences of side-impact collisions and prevent pedestrians, cyclists, and motorcyclists from being crushed under the heavy vehicle's structure. Given the operational severity of the automotive sector, this component can be subjected to severe stress concentration phenomena. Numerical simulation using the traditional finite element method presents limitations, namely the dependence on a fixed connectivity mesh and the need for computational costly remeshing algorithms to simulate crack propagation. As an alternative to overcome these obstacles, Meshless Methods are investigated, focusing on the Radial Point Interpolation Method (RPIM) and the Natural Neighbour Radial Interpolation Method (NNRPIM).

Thus, the main objective is to accurately predict and analyze the fracture trajectories and stress field distributions in the structural bracket under different loading scenarios. Consequently, this study aims to validate the efficiency and reliability of meshless methods in the analysis of automotive industry components.

The adopted methodology comprised the numerical and parametric implementation of different case studies in the computational software Finite Element and Meshless Analysis Software (FEMAS), integrating pre-cracks on both the lower and upper faces of the part. In addition to the finite element method, RPIM and NNRPIM were applied, formulated under the principle of virtual work. The direction and autonomous advance of the fracture were governed by the Maximum Tensile Stress criterion.

The geometric results demonstrated a strong correspondence in the propagation of fracture trajectories generated by the meshless approaches and the finite element reference model. In the analysis of the stress fields, it was found that the performance of meshless methods, compared to the finite element method, provides higher chromatic sharpness, mapping the stress level and transition in a continuous, fluid, and smooth manner.

In conclusion, meshless methods prove to be robust, viable, and precise computational alternatives. The suppression of fixed connectivity restrictions based on elements allowed capturing the physical discontinuity of the fracture in an automated and continuous way, mitigating the computational cost associated with successive meshing processes. Finally, the parametric study evidenced that the location of the imposed pre-crack deterministically conditions not only the magnitude of the stress peaks but also the stability of the component.

KEYWORDS: Fracture Mechanics, Meshless Methods, Crack Propagation, Finite Element Method, LPD

Índice

Lista de Figuras.....	xi
Acrónimos e Símbolos.....	xv
1. Introdução.....	1
1.1. Contextualização	1
1.2. Motivação.....	2
1.3. Objetivos	3
1.4. Estrutura da dissertação	3
2. Métodos numéricos	5
2.1. Método dos elementos finitos	5
2.2. Métodos sem malha.....	6
2.2.1. Formulação geral	7
2.2.2. Integração	8
2.2.3. Conetividade Nodal.....	14
2.2.4. Funções de forma	16
2.2.5. Equações de equilíbrio.....	19
3. Fratura.....	25
3.1. Mecânica da fratura	25
3.2. Estado da arte com FEM	28
3.3. Estado da arte com Meshless.....	29
3.4. Critérios de Fratura	35
3.5. Algoritmo de propagação de fratura.....	36
4. Aplicação numérica	45
4.1. Estudo da convergência	45
4.2. Exemplo da mecânica da fratura.....	56
4.3. Estudo da fratura num apoio para Dispositivo de Proteção Lateral	73
5. Conclusão	87
5.1. Conclusões finais	87
5.2. Limitações	88
5.3. Trabalhos futuros	89
6. Referências.....	91
Declaração de Integridade	95

Lista de Figuras

Figura 1 – (a) Domínio definido. (b) Exemplo de discretização regular. (c) Exemplo de discretização irregular [9]	7
Figura 2- (a) Quadrilátero inicial. (b) quadrado isoparamétrico. (c) Retorno à forma inicial [9]..	8
Figura 3- Diagrama de Voronoï [9].....	9
Figura 4- (a) Conjunto nodal. (b) Plano Adaptado de [9]	10
Figura 5- (a) Formação de planos. (b) Célula final Adaptado de [9]	11
Figura 6- (a) Diagrama de Voronoï inicial. (b) triangulação de Delaunay. (c) critério do círculo circunscrito [15]	11
Figura 7- a formação de sub-células irregulares. b formação de sub-células regulares Adaptado de [15].....	12
Figura 8- Ponto de integração no baricentro de cada sub-célula[9].....	13
Figura 9- Integração usando o esquema Gauss-Legendre [9].....	13
Figura 10- (a) Domínio retangular. (b) Domínios circulares com diferente número de nós. (c) Domínios circulares com o mesmo número de nós [9]	15
Figura 11- (a) células de influência de primeiro grau. (b) células de influência de segundo grau [9]	16
Figura 12- Modos de abertura [1]	26
Figura 13- Sistema de coordenadas radial [19].....	27
Figura 14- Publicação de estudos que recorrem a métodos sem malha no estudo da fratura (web of science)	29
Figura 15- Tensão de Von Mises em três estágios diferentes [16]	31
Figura 16- Análise força-deslocamento [28]	32
Figura 17- Critério da visibilidade [4]	33
Figura 18- Critério da difração [4]	34
Figura 19- Critério da transparência [4]	35
Figura 20- Nós da vizinhança da extremidade da fratura [17].....	37
Figura 21- (a) nova posição da extremidade da fissura (b) novos nós criados [17].....	38
Figura 22- (a)novos nós ao redor da extremidade da fissura (b) circunferência que determina os nós excluídos Adaptado de [17].....	39
Figura 23- Triângulos eliminados [17].....	39
Figura 24- Triângulos a serem eliminados [17]	40
Figura 25- Configuração antes de gerar novos elementos de ligação [17].....	41
Figura 26- (a) Divisão em setores. (b) Elementos de conexão à extremidade da fissura [17]...	41
Figura 27- Configuração final [17].....	42
Figura 28- Atribuição dos nós aos respectivos lados [16]	43
Figura 29- Placa quadrangular com furo central circular	46
Figura 30-Representação geométrica das variáveis de controlo da densidade da malha computacional	47
Figura 31- (a) malha triangular gerada de 34 nós (b) malha triangular gerada de 96 nós (c) malha triangular gerada de 306 nós (d) malha triangular gerada de 1154 nós (e) malha triangular gerada de 4020 nós.....	48

Figura 32- Deslocamento no ponto C	51
Figura 33- Deslocamento no ponto D	51
Figura 34- Tensão no ponto C	52
Figura 35- Tensão no ponto D	52
Figura 36- FEM a) $u_{m\acute{a}x}=6,1221E^{-6}$ m, $u_{min}=0$ m (b) $v_{m\acute{a}x}=0$ m, $v_{min}=-2,2000E^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_{m\acute{a}x}}= 3,3365$ MPa, $\sigma_{x_{min}}= -0,0525$ MPa (d) $\sigma_{y_{m\acute{a}x}}= 0,5348$ MPa, $\sigma_{y_{min}}= -1,2511$ MPa	53
Figura 37- RPIM a) $u_{m\acute{a}x}=6,1455E^{-6}$ m, $u_{min}=0$ m (b) $v_{m\acute{a}x}=0$ m, $v_{min}=-2,2000E^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_{m\acute{a}x}}= 3,1996$ MPa, $\sigma_{x_{min}}= -0,04638$ MPa (d) $\sigma_{y_{m\acute{a}x}}= 0,5113$ MPa, $\sigma_{y_{min}}= -1,1768$ MPa	54
Figura 38- NNRPIM V1 a) $u_{m\acute{a}x}=6,1919E^{-6}$ m, $u_{min}=0$ m (b) $v_{m\acute{a}x}=6,3400E^{-9}$ m, $v_{min}=-2,2000E^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_{m\acute{a}x}}= 3,2116$ MPa, $\sigma_{x_{min}}= -0,0801$ MPa (d) $\sigma_{y_{m\acute{a}x}}= 0,5323$ MPa, $\sigma_{y_{min}}= -1,1112$ MPa	54
Figura 39- NNRPIM V2 a) $u_{m\acute{a}x}=6,1683E^{-6}$ m, $u_{min}=0$ m (b) $v_{m\acute{a}x}=4,8654E^{-9}$ m, $v_{min}=-2,2217E^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_{m\acute{a}x}}= 3,3624$ MPa, $\sigma_{x_{min}}= -0,0459$ MPa (d) $\sigma_{y_{m\acute{a}x}}= 0,5253$ MPa, $\sigma_{y_{min}}= -1,1424$ MPa	55
Figura 40- Esquema do exemplo de estudo da mecânica da fratura	56
Figura 41- Malhas apresentando a variação da geometria e posicionamento da fenda inicial (a) a=0,1 m, d=1,0 m; (b) a=0,1 m, d=1,5 m; (c) a=0,1 m, d=2,0 m; (d) a=0,2 m, d=1,0 m; (e) a=0,2 m, d=1,5 m; (f) a=0,2 m, d=2,0 m;	58
Figura 42- (a) Gráfico x-y em que a=0,1 m e d=1,0 m (b) Gráfico x-y em que a=0,1 m e d=1,5 m (c) Gráfico x-y em que a=0,1 m e d=2,0 m (d) Gráfico x-y em que a=0,2 m e d=1,0 m (e) Gráfico x-y em que a=0,2 m e d=1,5 m (f) Gráfico x-y em que a=0,2 m e d=2,0 m	61
Figura 43- d=1,0 m e a=0,1 m FEM: (a) a=0,2D; (e) a=0,5D ; (i) a=0,7D; RPIM : (b) a=0,2D; (f) a=0,5D ; (j) a=0,7D; NNRPIM V1: (c) a=0,2D; (g) a=0,5D ; (k) a=0,7D; NNRPIM V2: (d) a=0,2D; (h) a=0,5D ; (l) a=0,7D	63
Figura 44- d=1,5 m e a=0,1 m FEM: (a) a=0,2D; (e) a=0,5D ; (i) a=0,7D; RPIM : (b) a=0,2D; (f) a=0,5D ; (j) a=0,7D; NNRPIM V1: (c) a=0,2D; (g) a=0,5D ; (k) a=0,7D; NNRPIM V2: (d) a=0,2D; (h) a=0,5D ; (l) a=0,7D	65
Figura 45- d=2,0 m e a=0,1 m FEM: (a) a=0,2D; (e) a=0,5D ; (i) a=0,7D; RPIM : (b) a=0,2D; (f) a=0,5D ; (j) a=0,7D; NNRPIM V1: (c) a=0,2D; (g) a=0,5D ; (k) a=0,7D; NNRPIM V2: (d) a=0,2D; (h) a=0,5D ; (l) a=0,7D	67
Figura 46- d=1,0 m e a=0,2 m FEM: (a) a=0,2D; (e) a=0,5D ; (i) a=0,7D; RPIM : (b) a=0,2D; (f) a=0,5D ; (j) a=0,7D; NNRPIM V1: (c) a=0,2D; (g) a=0,5D ; (k) a=0,7D; NNRPIM V2: (d) a=0,2D; (h) a=0,5D ; (l) a=0,7D	69
Figura 47- d=1,5 m e a=0,2 m FEM: (a) a=0,2D; (e) a=0,5D ; (i) a=0,7D; RPIM : (b) a=0,2D; (f) a=0,5D ; (j) a=0,7D; NNRPIM V1: (c) a=0,2D; (g) a=0,5D ; (k) a=0,7D; NNRPIM V2: (d) a=0,2D; (h) a=0,5D ; (l) a=0,7D	70
Figura 48- d=2,0 m e a=0,2 m FEM: (a) a=0,2D; (e) a=0,5D ; (i) a=0,7D; RPIM : (b) a=0,2D; (f) a=0,5D ; (j) a=0,7D; NNRPIM V1: (c) a=0,2D; (g) a=0,5D ; (k) a=0,7D; NNRPIM V2: (d) a=0,2D; (h) a=0,5D ; (l) a=0,7D	71
Figura 49- LPD aplicado num veículo pesado de mercadorias	73
Figura 50-Suporte de fixação do LPD ²	74
Figura 51-Esquema do suporte do LPD para o caso de estudo 1	75
Figura 52-Esquema do suporte do LPD para o caso de estudo 2	76
Figura 53-Esquema do suporte do LPD para o caso de estudo 3	76

Figura 54- (a) Configuração da malha para o caso de estudo 1. (b) Refinamento da malha do caso de estudo 1. (c) Configuração da malha para o caso de estudo 2. (d) Refinamento da malha do caso de estudo 2. (e) Configuração da malha para o caso de estudo 3. (f) Refinamento da malha do caso de estudo 3.	78
Figura 55- (a)Trajetória de propagação da fenda para o caso de estudo 1 (b) Trajetórias de propagação da fenda para o caso de estudo 1 (eixos com a mesma escala) (c)Trajetória de propagação da fenda para o caso de estudo 2 (d) Trajetórias de propagação da fenda para o caso de estudo 2 (eixos com a mesma escala) (e)Trajetória de propagação da fenda para o caso de estudo 3 (f) Trajetórias de propagação da fenda para o caso de estudo 3 (eixos com a mesma escala).....	79
Figura 56- FEM: (a) itr. 4; (e) itr.10 ; (i) itr.17; RPIM : (b) itr. 4; (f) itr.10 ; (j) itr.17; NNRPIM V1: (c) it. 4; (g) itr.10 ; (k) itr.17; NNRPIM V2: (d) itr.4; (h) itr.10 ; (l) itr.17	82
Figura 57- FEM: (a) itr. 4; (e) itr.15 ; (i) itr.33; RPIM : (b) itr. 4; (f) itr.15 ; (j) itr.33; NNRPIM V1: (c) it. 4; (g) itr.15 ; (k) itr.33; NNRPIM V2: (d) itr.4; (h) itr.15 ; (l) itr.33	84
Figura 58- FEM: (a) itr. 4; (e) itr.10 ; (i) itr.18; RPIM : (b) itr. 4; (f) itr.10 ; (j) itr.18; NNRPIM V1: (c) it. 4; (g) itr.10 ; (k) itr.18; NNRPIM V2: (d) itr.4; (h) itr.10 ; (l) itr.18	86

Acrónimos e Símbolos

Lista de Acrónimos

FEM	<i>Finite Element Method</i>
DEM	<i>Diffuse Element Method</i>
MLS	<i>Moving Least Squares</i>
EFGM	<i>Element-Free Galerkin Method</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i>
NEM	<i>Natural Element Method</i>
PIM	<i>Point Interpolation Method</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
NNRPIM	<i>Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method</i>
RBF	<i>Radial Basis Functions</i>
PBF	<i>Polynomial Basis Functions</i>
SIF	<i>Stress Intensity Factor</i>
DCB	<i>Double Cantilever Beam</i>
CZM	<i>Cohesive Zone Modeling</i>
SED	<i>Strain Energy Density</i>
MTS	<i>Maximum Tangential Stress</i>
MTSN	<i>Maximum Tangential Strain</i>
BEM	<i>Boundary Element Method</i>
X-FEM	<i>Extended Finite Element Method</i>
FEMAS	<i>Finite Element and Meshless Analysis Software</i>
FEMAP	<i>Finite Element Modeling and Postprocessing</i>
LPD	<i>Lateral Protection Device</i>
UNECE	<i>United Nations Economic Commission for Europe</i>

Lista de Símbolos

$\hat{w}_i$	Peso do ponto de integração
N	Conjunto nodal
n	Nó
V_i	Célula de Voronoï
V	Vetor constituído pelas células de Voronoï
$\mathbf{u}$	Vetor deslocamento
d_{0i}	Distância entre nó 0 e o nó vizinho i
Ω	Domínio
σ	Tensor das tensões de Cauchy
$\mathbf{b}$	Vetor de forças de corpo
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento da fronteira essencial
Γ_u	Fronteira essencial
Γ_t	Fronteira natural
K	Matriz de rigidez
B	Matriz de deformabilidade
H	Matriz de interpolação
E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
$\mathbf{c}$	Matriz Constitutiva
L	Matriz de operadores diferenciais
x	Coordenada do nó
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana
%	Porcentagem
∇	Operador gradiente
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor deformação
$\wedge$	e

1. Introdução

1.1. Contextualização

Nas últimas décadas, a engenharia automóvel tem registado um progresso tecnológico sem precedentes, impulsionado pela necessidade imperativa de desenvolver veículos estruturalmente mais seguros. Neste panorama de constante evolução, os métodos numéricos consolidaram-se como ferramentas computacionais indispensáveis no ambiente industrial e de investigação, permitindo transitar progressivamente de ensaios físicos destrutivos e onerosos para simulações virtuais de elevada precisão e fiabilidade. Esta transição metodológica confere aos engenheiros a capacidade de prever com rigor a resposta mecânica e a integridade estrutural de componentes críticos face às condições severas do seu ciclo de vida operativo, muito antes do investimento na produção de protótipos físicos.

No âmbito da segurança rodoviária passiva aplicada a veículos pesados de mercadorias, os Dispositivos de Proteção Lateral (LPD) assumem um papel vital na preservação de vidas humanas. Projetados e homologados em estrita conformidade com os requisitos estipulados pelo Regulamento n.º 73 da UNECE, estes sistemas são dimensionados para mitigar as consequências severas de colisões laterais. A sua função primordial consiste em atuar como uma barreira física contínua que impede o esmagamento de utilizadores vulneráveis da via pública designadamente peões, ciclistas e motociclistas sob a estrutura do veículo pesado de mercadorias em caso de acidente ou manobra.

Os suportes verticais de fixação que ligam estas barras de proteção ao chassis do veículo pesado encontram-se sujeitos a solicitações dinâmicas contínuas, vibrações induzidas pelo pavimento e potenciais carregamentos cíclicos ou de impacto. Sob este espectro de forças, a Mecânica da Fratura assume uma importância crítica na avaliação do componente. O aparecimento e a subsequente propagação de fissuras nestes suportes podem comprometer irremediavelmente a rigidez local do dispositivo, reduzindo a sua capacidade de absorção de energia e desencadeando falhas catastróficas inesperadas em serviço.

Historicamente, o Método dos Elementos Finitos (FEM) tem sido a ferramenta convencional e o padrão industrial mais utilizado na simulação computacional do comportamento mecânico de descontinuidades e campos de tensão. No entanto, a aplicação do FEM no estudo específico da propagação da fratura depara-se com limitações técnicas severas, decorrentes da sua estrita dependência de uma malha com conectividade fixa entre elementos e nós. Deste modo, este método exige algoritmos de remalhamento que são mais dispendiosos e exigem maior tempo de processamento.

Assim, a investigação científica tem recorrido a abordagens alternativas, destacando-se os Métodos sem Malha. Ao contrário das técnicas tradicionais, estes métodos permitem eliminar a conectividade fixa entre nós, oferecendo uma flexibilidade superior na modelação de descontinuidades. Esta dissertação demonstra o potencial e a precisão destas metodologias de discretização avançadas sem malha na previsão autónoma da trajetória de fratura. Neste sentido, o presente trabalho contextualiza-se na avaliação do desempenho dos métodos sem malha face ao FEM, recorrendo tanto a exemplos *benchmarks* como à sua aplicação em componentes reais da indústria automóvel.

1.2. Motivação

A génese deste estudo encontra-se na necessidade de garantir os padrões de segurança automóvel, através do domínio da mecânica computacional aplicada à fratura. Num cenário global, onde a mobilidade exige veículos cada vez mais leves, eficientes e, acima de tudo, seguros, a integridade estrutural tornou-se um pilar fundamental da confiança do consumidor e viabilidade económica das empresas. A falha catastrófica de um componente mecânico, muitas vezes originada pela propagação silenciosa de uma fissura, não representa apenas um prejuízo financeiro avassalador em termos de garantias e *recalls* das marcas automóveis. Representa, num sentido mais profundo, uma falha na proteção da vida humana.

É esta responsabilidade que torna a Mecânica da Fratura um pilar fundamental da engenharia atual especialmente num setor onde o transporte rodoviário de mercadorias desempenha um papel fulcral no desenvolvimento socioeconómico e na sustentabilidade do mercado europeu [46].

Contudo, a intensificação deste mercado e as severas exigências de cumprimento de prazos rígidos têm induzido elevados níveis de stress e pressão sobre a atividade diária dos motoristas de veículos pesados [45]. Esta realidade reflete-se de modo alarmante nos índices de sinistralidade rodoviária na União Europeia, sendo que, em 2019, foram registadas um total de 22.800 vítimas mortais, sendo que cerca de 23% destes acidentes graves envolveram, pelo menos, um veículo pesado de mercadorias [46]. Perante o compromisso das autoridades com a iniciativa *Vision Zero*, que estabelece como meta a erradicação de mortes nas estradas até 2050, torna-se prioritária a proteção de utentes vulneráveis, como peões e ciclistas [46,47]. Neste âmbito, os regulamentos europeus têm imposto a obrigatoriedade de sistemas que reduzam os ângulos mortos e melhorem a visibilidade periférica em veículos pesados para salvar peões e ciclistas [46]. Todavia, a par destas tecnologias de segurança ativa, torna-se crucial não esquecer o papel indispensável dos sistemas de segurança passiva, com especial destaque para o *Lateral Protection Device* (LPD), cuja integridade mecânica é vital para atuar como uma barreira física eficaz e impedir o esmagamento de utentes vulneráveis sob a estrutura do veículo em caso de colisão.

1.3. Objetivos

O objetivo principal desta dissertação consiste em avaliar a exequibilidade, a robustez e a precisão do Método dos Elementos Finitos e Métodos sem Malha, especificamente o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) e o *Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method* (NNRPIM) na simulação numérica e na previsão autónoma da propagação de fraturas.

Para alcançar este propósito, são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Realizar um levantamento bibliográfico e revisão do estado da arte analisando com rigor os desenvolvimentos científicos ao longo dos anos na área da mecânica da fratura e a evolução histórica dos métodos numéricos aplicados à modelação de descontinuidades;
- Avaliar comparativamente o desempenho numérico dos métodos sem malha (RPIM e NNRPIM) face ao FEM através de exemplos de referência (*benchmarks*) em mecânica da fratura;
- Estudar a influência da densidade da malha e discretização nodal realizando análises paramétricas e estudos de convergência;
- Validar a metodologia num cenário industrial automóvel aplicando os diferentes métodos numéricos estudados, recorrendo às capacidades computacionais do *Finite Element and Meshless Analysis Software* (FEMAS).

1.4. Estrutura da dissertação

A presente dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos principais, sendo estes a Introdução, Métodos Numéricos, Mecânica da Fratura, Aplicação Numérica e Conclusão.

No capítulo 1, é feita uma introdução ao trabalho que se pretende desenvolver, estabelecendo a contextualização e a motivação para o estudo da mecânica da fratura com recurso a diferentes métodos numéricos. É também neste capítulo que são apresentados os objetivos da dissertação.

No capítulo 2, dedicado à revisão bibliográfica dos métodos numéricos, estabelece-se o alicerce teórico necessário para a compreensão das ferramentas computacionais utilizadas. Inicia-se com uma breve retrospectiva histórica sobre o Método dos Elementos Finitos (FEM) e os Métodos sem Malha e seguidamente aborda-se a formulação matemática destes, explorando os conceitos de discretização nodal, conectividade e construção de funções de forma. A fundamentação é complementada com os princípios essenciais da mecânica dos sólidos, estabelecendo o conjunto de equações de equilíbrio que regem o comportamento dos materiais. Por fim, detalha-se a obtenção da solução através da Forma Fraca de Galerkin que permite transformar o problema diferencial num sistema de equações algébricas passível de resolução computacional.

O capítulo 3 é dedicado à mecânica da fratura, apresenta os fundamentos da mecânica da fratura linear elástica. São abordados os modos de abertura de fissura, o cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão (SIF) e os critérios de propagação de fenda, com particular destaque para o critério da Tensão Tangencial Máxima (MTS). O capítulo descreve também os algoritmos de propagação de fratura e a sua implementação em ambiente computacional.

No Capítulo 4, materializa-se a componente prática e experimental-numérica deste trabalho. Este capítulo divide-se em várias fases, sendo a primeira dedicada à exploração do software FEMAS e à validação da metodologia através de um estudo de convergência. Em seguida é realizada uma análise paramétrica numa geometria de referência (uma placa retangular com pré-fenda aplicada). Por último, analisa-se o suporte de fixação do LPD sob diferentes cenários de estudo, prevendo o local de início da fratura, as trajetórias de crescimento e realizando uma discussão comparativa dos campos de tensão gerados pelos métodos FEM, RPIM e NNRPIM.

Finalmente, no Capítulo 5, sintetizam-se as principais conclusões resultantes da investigação, validando a robustez e a viabilidade dos métodos sem malha como alternativas computacionais precisas para a indústria automóvel. Por fim, identificam-se as limitações encontradas ao longo do desenvolvimento do projeto e apontam-se perspetivas e sugestões para investigações futuras nesta área académica.

2. Métodos numéricos

2.1. Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos (FEM) é um método numérico computacional bastante utilizado em vários campos de engenharia e ciência, que surgiu a partir da evolução do trabalho e investigação de vários investigadores e engenheiros. Este método tem como base fundamentos desenvolvidos no início do século XX por diversos autores como Ritz, Galerkin e Trefftz que só puderam ser aplicados com sucesso neste método mais tarde devido ao desenvolvimento computacional [1].

Jon Turner é reconhecido como um dos pioneiros fundamentais do método, tendo introduzido a modelação de estruturas complexas como asas em delta através da montagem de elementos de placa bidimensionais. Embora Turner tenha apresentado este estudo inovador na reunião anual do Instituto de Ciências Aeronáuticas em janeiro em 1954, o artigo só acabou por ser publicado em 1956. Mais tarde, Clough foi o responsável por atribuir a designação “*Finite Element Method*” em 1960 para descrever esta abordagem de integração de componentes finitos. Para além dos nomes mencionados anteriormente, Clough destaca ainda dois nomes incontornáveis na história do método, sendo John Argyris, cujos teoremas de energia fundamentaram a teoria da análise estrutural, e Zienkiewicz, que após reconhecer as vantagens desta abordagem apresentou contribuições históricas na formalização matemática [2].

O FEM define-se como uma técnica de cálculo numérico importante para resolver problemas regidos por equações diferenciais. Para esta resolução o domínio é dividido em pequenos subdomínios a que chamamos elementos finitos e dentro de cada elemento, as variáveis desconhecidas são aproximadas por funções simples. Deste modo, o problema original complexo é transformado num sistema de equações algébricas que é resolvido computacionalmente [1].

Apesar da larga utilização do FEM, o método não está isento de limitações. A necessidade de pré-definir uma relação entre nós e dependência de uma malha apresenta-se como um obstáculo em certas aplicações como por exemplo na aplicação de estudos de propagação de fendas e estudos que envolvam a necessidade de remalhamento [3].

2.2. Métodos sem malha

Neste contexto, os Métodos sem Malha ou *Meshless Methods* surgem como uma alternativa ao FEM superando as barreiras intrínsecas à discretização por elementos [4].

Um método sem malha pioneiro a ser implementado na mecânica computacional foi o *Diffuse Element Method* (DEM) por Nayroles, aplicando-o em problemas de condução de calor. Este método utilizava funções de aproximação construídas com base no conceito dos *Moving Least Squares* (MLS) [5] que foram introduzidos por Lancaster e Salkauskas [6]. Mais tarde, Belytschko desenvolveu o *Element-Free Galerkin Method* (EFGM) que surge de uma evolução e melhoria do DEM através da implementação de uma malha de integração independente dos nós e uso de multiplicadores de Lagrange para impor as condições de fronteira [7].

Na mesma época continua o desenvolvimento de métodos sem malha e surgem novos métodos que utilizam também funções de aproximação como o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) e o *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) [8]. Estudos com estes métodos demonstraram que os mesmos ao explorarem as vantagens das funções de forma aproximadas e da maior conectividade entre nós garantiram resultados mais precisos [9].

Apesar da extensa aplicabilidade dos métodos mencionados anteriormente, os mesmos enfrentam certas limitações de entre as quais existe uma a destacar, a ausência da propriedade delta Kronecker. Esta limitação dificulta a imposição direta das condições de fronteira e leva à necessidade de recorrer a técnicas como multiplicadores de Lagrange para abordar esta questão, provocando um aumento do sistema de equações e como consequência o aumento do custo computacional [9].

Perante este cenário surge o *Natural Element Method* (NEM) introduzido por Sukumar, que foi um pioneiro no uso bem-sucedido de funções de forma interpoladoras [10]. À semelhança do que acontece no FEM este tipo de funções de forma permite a imposição das condições de fronteira de forma direta [11].

Mais tarde, surgem também outros métodos relevantes como o *Point Interpolation Method* (PIM) [12] e o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) [13]. Com o PIM era possível construir funções interpolantes com a propriedade do delta de Kronecker a partir de pontos arbitrariamente distribuídos. Contudo, o PIM revelou-se numericamente instável, apresentando problemas de singularidade na construção das funções sempre que os nós se encontravam perfeitamente alinhados. Para mitigar estas instabilidades, surgiu o RPIM que integrou Funções de Base Radial (RBF), como as Gaussianas ou as Multiquádricas, no processo de interpolação [9].

Como evolução dos métodos anteriormente referidos nasce o *Natural Neighbour Radial Point Interpolation Method* (NNRPIM). Este método refina o conceito de domínio de influência ao substituí-lo pelo conceito de células de influência baseadas nas concepções geométricas de Diagramas de Voronoï e Triangulação de Delaunay. Estas construções matemáticas são usadas para definir a conectividade nodal de forma automática e dependente apenas da densidade de nós, eliminando as restrições geométricas típicas do FEM o que classifica o NNRPIM como um método verdadeiramente sem malha [11].

2.2.1. Formulação geral

Do mesmo modo que outros métodos numéricos baseados na discretização nodal seguem um procedimento, o mesmo acontece com os métodos sem malha. Inicialmente, a geometria do problema é definida, sendo estabelecido o domínio, Figura 1 (a), e identificam-se as condições de fronteira [9]. Posteriormente, o domínio é discretizado em conjuntos de nós, segundo uma forma regular, Figura 1 (b), ou irregular, Figura 1 (c) [11].

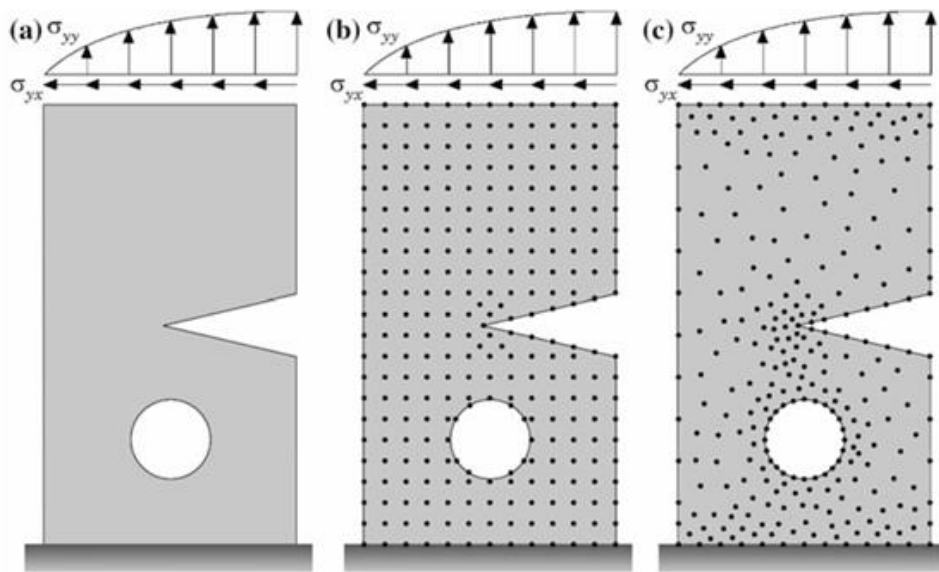


Figura 1 – (a) Domínio definido. (b) Exemplo de discretização regular. (c) Exemplo de discretização irregular [9]

O desempenho dos métodos numéricos, a qualidade e precisão dos resultados obtidos são influenciados pela densidade e distribuição nodal. É importante estabelecer um equilíbrio no que diz respeito ao esforço computacional e à precisão dos resultados obtidos. O recomendado é refinar regiões que apresentem concentração de tensões como por exemplo zonas de abertura de fenda [9].

Após a discretização nodal, procede-se à construção de uma malha de integração auxiliar. Com semelhança ao que acontece no FEM podem ser empregues malhas de integração baseadas na quadratura de Gauss-Legendre ou adotar outros métodos como a integração nodal baseada nos diagramas de Voronoï [9].

A etapa seguinte consiste em estabelecer a conectividade nodal. Enquanto nos FEM esta é imposta pelos elementos, nos métodos sem malha a conectividade é estabelecida pelos conceitos dos domínios de influência ou células de influência [11].

Após estabelecer a conectividade nodal, procede-se à construção de funções de forma que permitem aproximar e representar o campo de variáveis, estabelecendo seguidamente o

sistema de equações discretas, que transformado na forma de uma matriz global é resolvido encontrando as respectivas soluções [9].

2.2.2. Integração

Para efeitos de integração numérica, pode-se recorrer ao método da quadratura de Gauss-Legendre. No método da quadratura de Gauss-Legendre o domínio é dividido numa grelha regular e cada célula dessa mesma grelha é preenchida com pontos de integração. Definindo uma célula na forma de um quadrilátero, Figura 2 (a), esta é transformada num quadrado isoparamétrico, Figura 2 (b), onde são distribuídos os pontos da quadratura de Gauss-Legendre no seu interior. No exemplo demonstrado recorre-se a uma quadratura de 2 x 2. Através de funções de interpolação isoparamétricas obtém-se as coordenadas Cartesianas dos pontos da quadratura no quadrilátero inicial como representando na Figura 2 (c). Caso a grelha exceda os limites do domínio todos os pontos de integração que não se encontrem dentro do mesmo devem ser eliminados, em contrapartida quando a grelha se ajusta exatamente no domínio não é efetuado nenhum pós-tratamento [9].

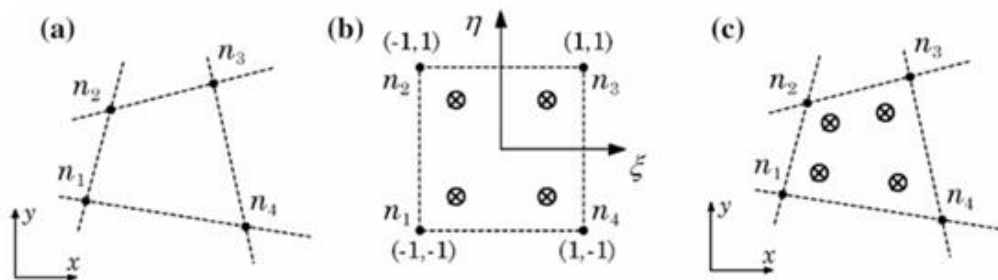


Figura 2- (a) Quadrilátero inicial. (b) quadrado isoparamétrico. (c) Retorno à forma inicial [9]

Multiplicando o peso isoparamétrico do ponto de quadratura pelo inverso do determinante da matriz jacobiana correspondente à célula da grelha é possível obter o peso de integração de cada ponto [9].

Para realizar a integração numérica, considera-se uma função $F(x)$ definida num domínio Ω . A integração global pode ser expressa através do somatório:

$$\int_{\Omega} F(x) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i F(x_i) \quad (1)$$

em que $\hat{w}_i$ representa o peso associado ao ponto de integração x_i [9, 11, 14].

Uma abordagem distinta consiste na utilização de células de integração baseadas no diagrama de Voronoï, o qual tem como base o conceito matemático dos vizinhos naturais. Esta técnica é amplamente abordada e descrita na literatura [9, 15].

Considerando um conjunto de nós $N = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, que discretiza o domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, sendo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \Omega$, o diagrama de Voronoï de N obtém-se seccionando o espaço discretizado por X em sub-regiões V_i , fechadas e convexas. Cada sub-região V_i está associada ao nó n_i , de forma que qualquer ponto localizado no interior de V_i se encontra mais próximo de n_i do que de qualquer outro nó $n_j \in N, j \neq i$ [15, 16]. Assim, cada célula de Voronoï pode ser definida pela seguinte expressão matemática:

$$V_i = \{x_I \in \Omega \subset \mathbb{R}^d : \|x_I - x_i\| < \|x_I - x_j\|, \forall j \neq i\} \quad (2)$$

em que x_I representa um ponto de interesse no domínio e $\|\cdot\|$ corresponde à norma métrica euclidiana. Na equação (2) podemos ver a expressão geral do diagrama de Voronoï [15, 16].

Podemos deste modo, definir o conceito de célula de Voronoï V_i , que consiste no lugar geométrico de todos os pontos que estão mais próximos do nó n_i do que qualquer outro nó, sendo o diagrama de Voronoï apresentado na Figura 3 definido pelo conjunto $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ [15].

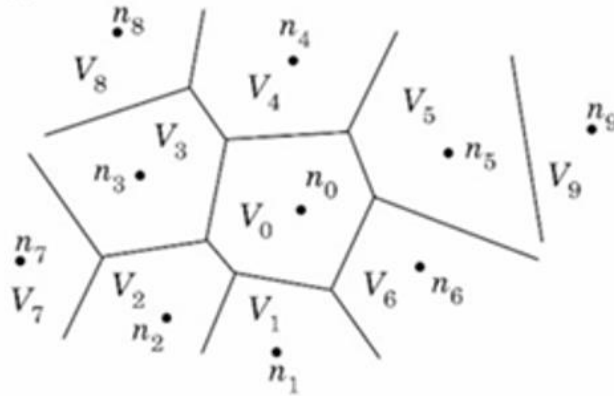


Figura 3- Diagrama de Voronoï [9]

Considerando um espaço bidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e considerando o conjunto de nós representado na Figura 4 (a), pode ser obtida a célula de Voronoï V_0 do correspondente nó n_0 . Primeiro são selecionados os nós designados como potenciais vizinhos próximos de n_0 e selecionando um desses nós como por exemplo o nó n_4 define-se o vetor [9]:

$$\mathbf{u}_{40} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_4}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_4\|} \quad (3)$$

Em que $\mathbf{u}_{40} = \{u_{40}, v_{40}, w_{40}\}$ [9].

Após definir o vetor é possível então definir o respetivo plano π_{40} identificado na Figura 4 (b):

$$u_{40}x + v_{40}y + w_{40}z = (u_{40}x_4 + v_{40}y_4 + w_{40}z_4) \quad (4)$$

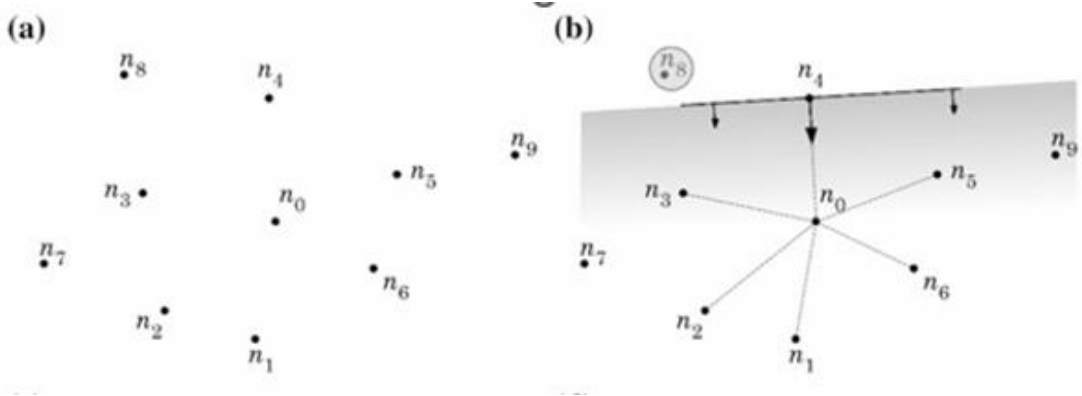


Figura 4- (a) Conjunto nodal. (b) Plano Adaptado de [9]

Após definir este plano todos os nós que não satisfaçam a condição:

$$u_{40}x + v_{40}y + w_{40}z \geq (u_{40}x_4 + v_{40}y_4 + w_{40}z_4) \quad (5)$$

não são considerados vizinhos naturais do nó n_0 e são respetivamente eliminados [9].

O processo descrito anteriormente é repetido, Figura 5 (a), para o conjunto nodal definido inicialmente e cada um dos seis vizinhos naturais de n_0 deverão satisfazer as condições (6):

$$\begin{cases} u_{10}x + v_{10}y + w_{10}z \geq (u_{10}x_1 + v_{10}y_1 + w_{10}z_1) \\ u_{20}x + v_{20}y + w_{20}z \geq (u_{20}x_2 + v_{20}y_2 + w_{20}z_2) \\ \dots \\ u_{60}x + v_{60}y + w_{60}z \geq (u_{60}x_6 + v_{60}y_6 + w_{60}z_6) \end{cases} \quad (6)$$

Como representado na Figura 5 (b) apenas os nós localizados no perímetro final obtido V_0^* podem ser considerados como nós vizinhos, sendo a célula de Voronoï representada na sua forma homotética através da expressão (7) [9]:

$$d_{0i}^* = \frac{\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i \|}{2} \quad (7)$$

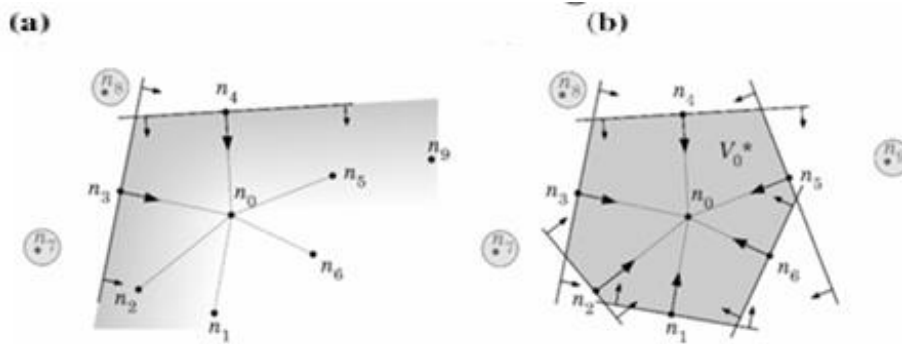


Figura 5- (a) Formação de planos. (b) Célula final Adaptado de [9]

A triangulação de Delaunay é obtida unindo os nós cujas células de Voronoï possuem fronteiras em comum. A dualidade entre o diagrama de Voronoï e a triangulação de Delaunay determina, que, se e somente se, duas células de Voronoï partilham uma aresta em comum, existe uma aresta de Delaunay entre dois pontos no plano [9, 15].

Considerando um conjunto de nós $N_t = \{n_j, n_k, n_l\} \in N$ que forma um triângulo de Delaunay, o círculo circunscrito formado por esse triângulo não contém qualquer outro nó do conjunto global N . A esta propriedade é dada o nome de “critério do círculo circunscrito vazio”. O centro de cada círculo circunscrito dos vizinhos naturais corresponde ao vértice da respetiva célula de Voronoï [15]. Estas características estão representadas na Figura 6.

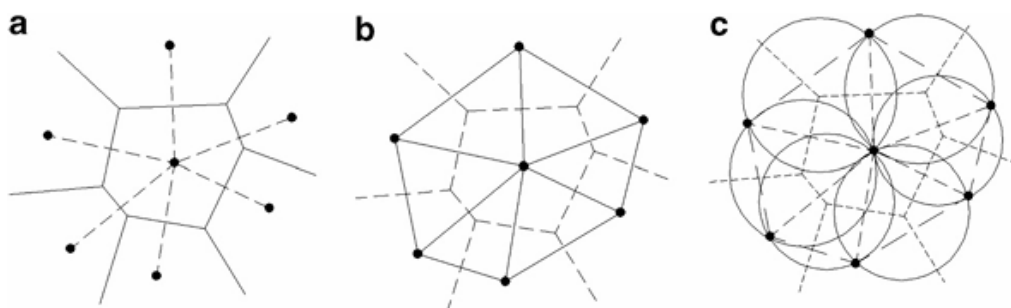


Figura 6- (a) Diagrama de Voronoï inicial. (b) triangulação de Delaunay. (c) critério do círculo circunscrito [15]

Após determinar as células de Voronoï associadas a cada nó é possível construir sub-células elementares, que constituem a base para os diferentes esquemas de integração utilizados nos métodos sem malha. Cada nó n_l identifica os seus vizinhos naturais através do diagrama de Voronoï, permitindo definir a célula correspondente V_l . A partir dos vértices da célula de Voronoï e dos pontos médios entre o nó central e cada vizinho natural, a célula é subdividida em n sub-células, sendo n o número total de vizinhos naturais [9, 44].

Em distribuições nodais irregulares, estas sub-células possuem a forma de um quadrilátero, Figura 7 (a), enquanto em distribuições regulares assumem forma triangular, Figura 7 (b) [15]. A área da célula de Voronoï é calculada a partir da soma das áreas das respectivas sub-células [9, 15].

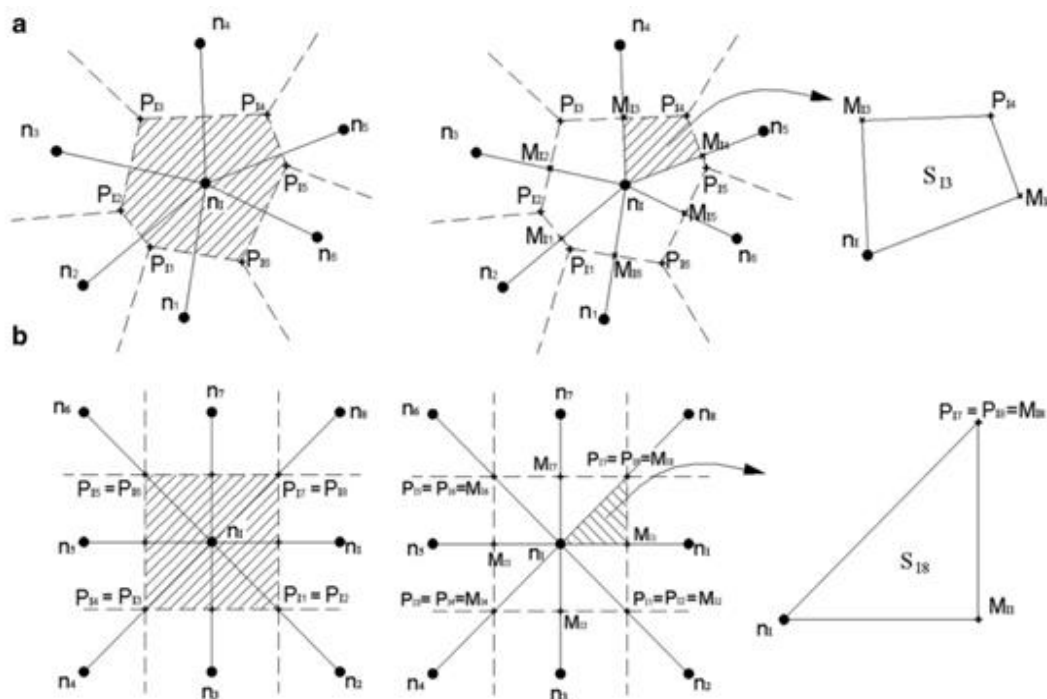


Figura 7- a formação de sub-células irregulares. b formação de sub-células regulares Adaptado de [15]

Com base nesta decomposição geométrica é possível definir diferentes esquemas de integração. O mais simples consiste na atribuição de um único ponto de integração no baricentro de cada sub-célula como apresentado na Figura 8, sendo o respetivo peso igual à área da mesma [9].

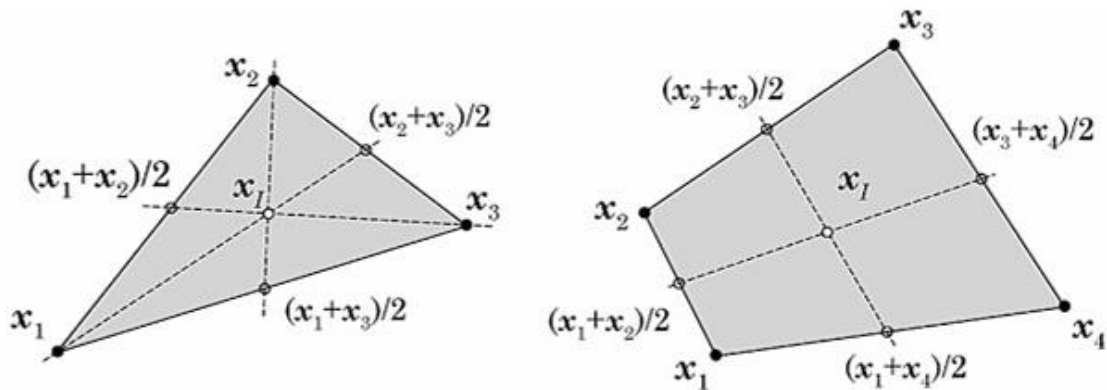


Figura 8- Ponto de integração no baricentro de cada sub-célula[9]

É também possível construir um esquema de integração recorrendo à quadratura de Gauss–Legendre como é visível na Figura 9 . Para tal, cada sub-célula é novamente subdividida em pequenos sub-quadriláteros, independentemente da forma inicial triangular ou quadrilateral e em cada novo sub-quadrilátero aplicam-se $k \times k$ pontos de Gauss, permitindo aumentar substancialmente a precisão da integração. O peso de cada ponto integra tanto a área local do sub-quadrilátero como os coeficientes da quadratura de Gauss [9, 11].

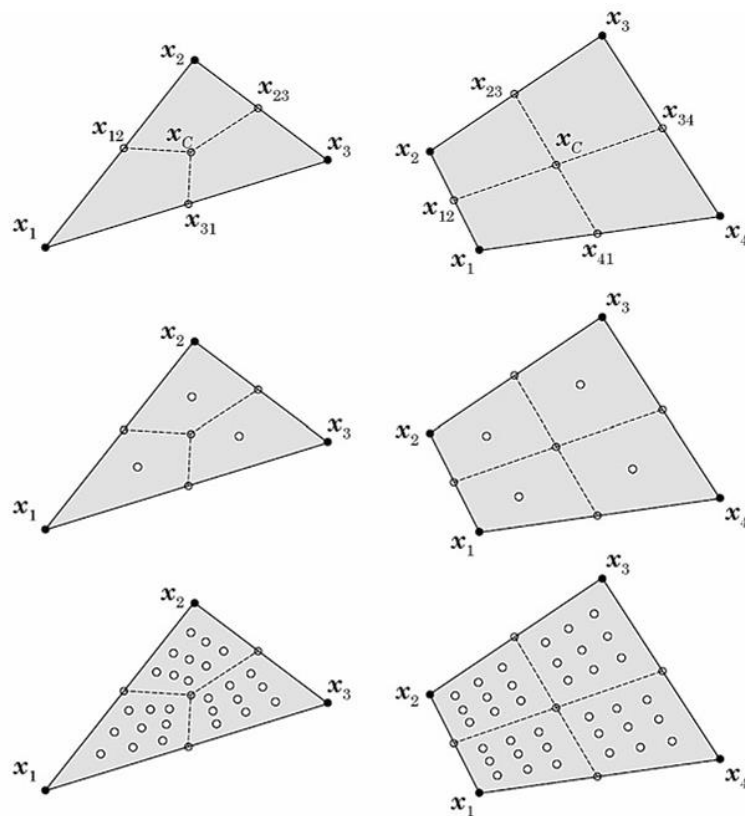


Figura 9- Integração usando o esquema Gauss-Legendre [9]

Existe ainda o esquema de integração nodal, no qual o ponto de integração coincide com o baricentro da própria célula de Voronoï e o seu peso corresponde à área total dessa célula. Embora simples, esta abordagem não proporciona uma integração suficientemente precisa das funções de forma utilizadas em métodos sem malha, exigindo assim a utilização de técnicas de estabilização, que tendem a aumentar o custo computacional do método. No conjunto, a construção das células e sub-células de Voronoï constitui um elemento fundamental para assegurar uma integração consistente e geometricamente fiel, sendo aplicável a diferentes métodos sem malha [9].

2.2.3. Conetividade Nodal

A conetividade nodal nos métodos sem malha é estabelecida com base em dois conceitos, sendo estes o domínio de influência e células de influência, uma vez que, ao contrário do que acontece no método FEM não existe uma conetividade nodal pré-estabelecida [11].

Os domínios de influência são obtidos definindo um determinado número de nós dentro de uma área ou volume fixo no caso de lidar com problemas 2D ou 3D respetivamente [9]. É importante que os domínios de influência apresentem o mesmo número de nós, caso contrário poderá afetar o desempenho e solução final [9]. Em várias pesquisas realizadas foi determinado que o número ideal de nós do domínio de influência está entre os 9 e 16 nós [12, 13, 44].

O domínio de influência pode ser dado pela expressão:

$$d = k \times h \quad (8)$$

Onde k representa uma componente adimensional entre 1,5 e 2,5 e h o espaçamento médio entre nós na vizinhança do ponto x_i . Os domínios podem ser retangulares ou circulares sendo que, os domínios retangulares são definidos por todos os nós que se encontram no retângulo definido pelas variáveis d_x e d_y e os domínios circulares definidos por todos os nós presentes no círculo de raio d_r e centro x_i , como representado na Figura 10 [9].

Domínios que contenham o mesmo número de nós garantem melhor performance, deste modo, nos domínios circulares não é adequado que os domínios contenham a dimensão d_r igual pois pode implicar numa quantidade diferente de nós [9].

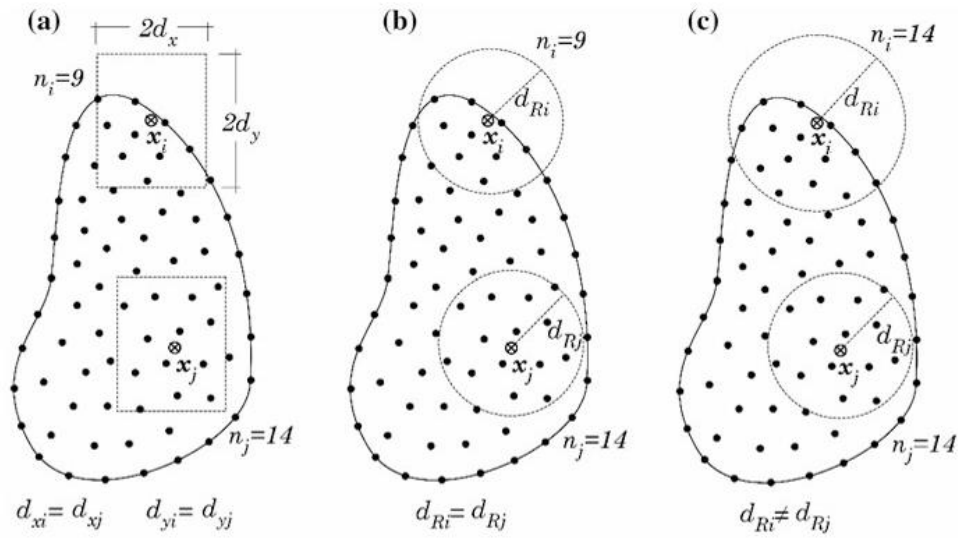


Figura 10- (a) Domínio retangular. (b) Domínios circulares com diferente número de nós. (c) Domínios circulares com o mesmo número de nós [9]

No conceito das células de influência a conectividade nodal é estabelecida baseando-se na geometria das células de Voronoï e triangulação de Delaunay explicada anteriormente no capítulo 2.2.2 e resulta da sobreposição de células associadas a um determinado ponto de interesse. Ao utilizar estes conceitos, as células de influência garantem que a vizinhança nodal reflete a geometria real da distribuição dos pontos, evitando a necessidade de parâmetros artificiais como raios de procura ou tamanhos fixos de domínios [9].

Existem dois tipos de células de influência, as de primeiro grau e as de segundo grau representadas na Figura 11 (a) e Figura 11 (b), respetivamente. As células de influência de primeiro grau de um determinado ponto de interesse são determinadas pelos nós vizinhos desse mesmo ponto. Já as células de influência de segundo grau são constituídas pelo domínio formado pelos vizinhos diretos de um ponto de interesse e pelos vizinhos naturais desses primeiros vizinhos, obtidos a partir do diagrama de Voronoï [11, 15].

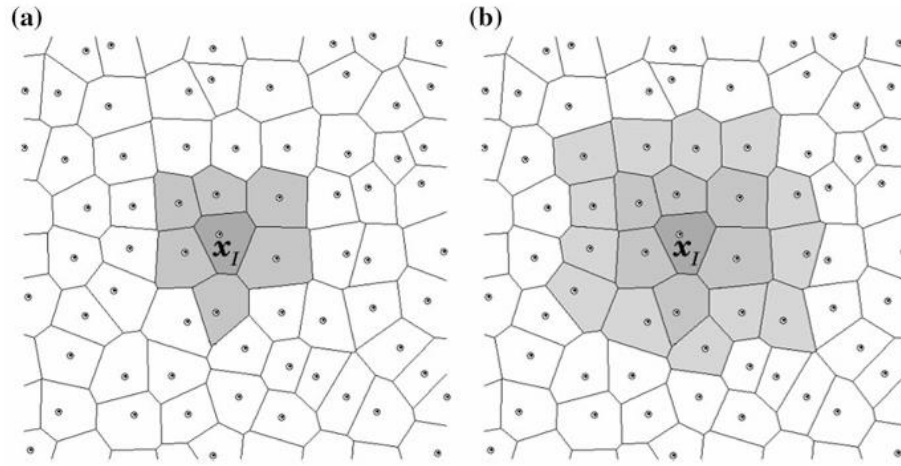


Figura 11- (a) células de influência de primeiro grau. (b) células de influência de segundo grau [9]

2.2.4. Funções de forma

As funções de forma são funções matemáticas que permitem aproximar variáveis dentro de um domínio numérico, permitindo transformar problemas descritos por equações diferenciais em problemas que podem ser resolvidos computacionalmente. Os diferentes métodos sem malha recorrem a diferentes tipos de funções de forma como já referido anteriormente, sendo que certos métodos recorrem a funções de aproximação enquanto outros, desenvolvidos posteriormente, recorrem a funções de interpolação devido à presença da propriedade delta Kronecker [9].

Os métodos RPIM e NNRPIM utilizam o método RPI para a construção das funções de forma [9], [17]. A função $u^h(x_I)$ é definida pela equação (9) da seguinte forma:

$$u^h(x_I) = \sum_{i=1}^n r_i(x_i - x_I) a_i(x_I) + \sum_{j=1}^m p_j(x_I) b_j(x_I) = \mathbf{r}(x_I)^T \mathbf{a}(x_I) + \mathbf{p}(x_I)^T \mathbf{b}(x_I) \quad (9)$$

Esta função combina funções de base radial (RBF) com funções de base polinomial (PBF) [9].

Os elementos $a_i(x_I)$ e $b_j(x_I)$ são os coeficientes não constantes de $r(x_I)$ e $p(x_I)$ respetivamente [17] e podem ser definidos como:

$$\mathbf{a}(x_I) = \{a_1(x_I) \quad a_2(x_I) \quad \cdots \quad a_n(x_I)\}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{b}(x_I) = \{b_1(x_I) \quad b_2(x_I) \quad \cdots \quad b_m(x_I)\}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{p}(x_I) = \{p_1(x_I) \quad p_2(x_I) \quad \cdots \quad p_m(x_I)\}^T \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}_I) &= \{r(\mathbf{x}_I) \quad r_2(\mathbf{x}_I) \quad \cdots \quad r_n(\mathbf{x}_I)\}^T \\ &= \{r(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_I) \quad r_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_I) \quad \cdots \quad r_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_I)\}^T \end{aligned} \quad (13)$$

Existem várias funções de base radial que podem ser implementadas, no entanto, a que oferece melhores resultados é a função multiquádrica [17] descrita da seguinte forma:

$$r_i(\mathbf{x}_I) = (d_{il}^2 + (\gamma d_a)^2)^p \quad (14)$$

O comportamento desta função é regulado pelos parâmetros γ e p que atuam como coeficientes de forma, controlando a curvatura da função, enquanto d_a representa a escala dimensional do domínio de influência associado ao ponto de interesse [9]. Num espaço tridimensional, a distância espacial entre o ponto de cálculo $\mathbf{x}_I$, e os nós que compõem a sua vizinhança $\mathbf{x}_i$, pode ser definida pela expressão (15):

$$d_{il} = \sqrt{(x_i - x_I)^2 + (y_i - y_I)^2 + (z_i - z_I)^2} \quad (15)$$

A construção das funções de forma exige que o campo aproximado satisfaça a condição de interpolação. Para tal, formula-se o sistema matricial:

$$\mathbf{R}\mathbf{a}(\mathbf{x}_I) + \mathbf{P}\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) = \mathbf{u}_s \quad (16)$$

Neste sistema, $\mathbf{R}$ é a matriz momento de RBF e é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{x}_1) & r_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & r_n(\mathbf{x}_1) \\ r_1(\mathbf{x}_2) & r_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & r_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1(\mathbf{x}_n) & r_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & r_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Aplicando a expressão (14) da função de base radial que descreve a função multiquadrática aos elementos da matriz momento $\mathbf{R}$, equação (17), é possível obter a seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (d_{11}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & (d_{12}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & \cdots & (d_{1n}^2 + (\gamma d_c)^2)^p \\ (d_{21}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & (d_{22}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & \cdots & (d_{2n}^2 + (\gamma d_c)^2)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (d_{n1}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & (d_{n2}^2 + (\gamma d_c)^2)^p & \cdots & (d_{nn}^2 + (\gamma d_c)^2)^p \end{bmatrix} \quad (18)$$

A matriz polinomial de momento $\mathbf{P}$ define-se como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (19)$$

A determinação dos coeficientes das funções de forma exige o acoplamento da equação (20) com a equação de interpolação definida anteriormente na equação (16).

O problema discreto incorpora assim a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}_1) = 0 \quad (20)$$

Que combinado com equação (16), permite obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x}_I)$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)$ são obtidos através da multiplicação da matriz inversa $\mathbf{M}_T$ pelo vetor $\mathbf{u}_s$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_I) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \end{Bmatrix} = \mathbf{M}_T^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Uma vez obtidos os valores dos coeficientes a equação (9) pode ser reescrita na equação (23):

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}_I)^T \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T\} \mathbf{M}_t^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I)^T \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_I)^T\} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Em que o vetor de interpolação $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ e o vetor subproduto $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ são definidos da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_I)^T = \{\varphi_1(\mathbf{x}_I) \quad \varphi_2(\mathbf{x}_I) \quad \cdots \quad \varphi_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_I)^T = \{\psi_1(\mathbf{x}_I) \quad \psi(\mathbf{x}_I) \quad \cdots \quad \psi_n(\mathbf{x}_I)\} \quad (25)$$

Observa-se que o vetor $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_I)$ designado na literatura como vetor subproduto, não possui significado relevante uma vez que é multiplicado por um vetor nulo $\mathbf{Z}$ [9]. Deste modo, o seu termo anula-se como representado na equação (26):

$$u^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) u_i + \sum_{j=1}^m \psi_j(\mathbf{x}_I) Z_j = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_I) u_i \quad (26)$$

2.2.5. Equações de equilíbrio

Na teoria da elasticidade tridimensional, a descrição do comportamento mecânico de um sólido elástico baseia-se num conjunto de equações fundamentais que modelam a sua resposta a ações externas. Considera-se que o corpo ocupa um domínio Ω , delimitado pela fronteira Γ . Em condições de equilíbrio estático, o estado do sólido é governado por equações diferenciais válidas em todo o domínio, as quais asseguram o equilíbrio das forças internas e externas, refletindo a conservação do momento linear [9, 16]:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (27)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor de tensões de Cauchy, $\mathbf{b}$ é o vetor das forças de corpo por unidade de volume e ∇ é o operador gradiente. A formulação é complementada pelas condições de fronteira. Nas superfícies onde são prescritas forças (fronteira natural Γ_t), impõe-se:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (28)$$

sendo $\bar{\mathbf{t}}$ a tração aplicada e $\mathbf{n}$ o versor normal exterior à superfície. Já nas regiões onde os deslocamentos são impostos (fronteira essencial Γ_u), define-se:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (29)$$

Os deslocamentos prescritos sobre a fronteira essencial Γ_u são representados por $\bar{\mathbf{u}}$, enquanto as forças de tração aplicadas na fronteira natural Γ_t são representadas por $\bar{\mathbf{t}}$. O vetor $\mathbf{n}$ indica a direção normal à superfície externa do domínio Ω [9]. O tensor de tensões de Cauchy, que descreve o estado de tensão em cada ponto do sólido, pode ser representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Também pode ser escrito na forma de vetor [9]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T \quad (31)$$

Analogamente o vetor que define o estado da deformação pode ser definido por [9]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \quad (32)$$

Assumindo um comportamento elástico linear, a relação constitutiva entre as tensões e as deformações é regida pela lei de Hooke [9], expressa pela equação (33):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (33)$$

Nesta expressão, $\mathbf{c}$ representa a matriz constitutiva, sendo que, para um caso de estudo tridimensional é possível assumir:

$$\mathbf{c} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Onde:

$$\mu_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \wedge \quad \mu_2 = \frac{1 - \nu}{2} \quad (35)$$

Estas duas constantes apresentadas na equação (35) e introduzidas na matriz constitutiva são definidas em função das propriedades E (módulo de elasticidade do material) e ν (coeficiente de Poisson do material) [16].

A relação entre deformações e deslocamentos do sólido pode ser expressa de forma compacta como:

$$\varepsilon = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \quad (36)$$

Sendo $\mathbf{L}$ e $\mathbf{u}$ definidos da seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad \wedge \quad \mathbf{u} = \{u \quad v \quad w\}^T \quad (37)$$

Os métodos sem malha podem ser classificados em duas categorias dependendo de como procuram obter a solução. Podem ser classificados conforme a forma forte ou forma fraca. A diferença destas duas categorias está na forma como a solução é obtida: a forma forte exige que a solução satisfaça diretamente as equações diferenciais parciais que regem um determinado fenómeno físico, enquanto a forma fraca permite trabalhar com soluções aproximadas que podem não ser perfeitamente diferenciáveis, utilizando princípios variacionais e funções teste para minimizar o erro residual [9].

A forma fraca de Galerkin baseia-se num princípio energético que pode ser reduzido à função de Lagrange:

$$L = T - U + Wf \quad (38)$$

Onde U representa a energia resultante da deformação, T a energia cinética e Wf o trabalho resultante da aplicação das forças externas [9], [16]. A energia cinética é representada pela equação:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (39)$$

A energia resultante da deformação é definida para materiais elásticos através da expressão:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (40)$$

E o trabalho exercido pelas forças externas:

$$Wf = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (41)$$

Tendo isto em conta, a Forma fraca de Galerkin pode ser expressa conforme a seguinte equação [16,48]:

$$\delta L = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (42)$$

A expressão (42) pode ainda ser simplificada dando origem à equação (43) [9]:

$$\Psi = \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}_b - \mathbf{f}_t) = 0 \quad (43)$$

Através da lei do anulamento do produto é obtida a igualdade:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_t \quad (44)$$

Onde $\mathbf{K}$ representa matriz de rigidez global, $\mathbf{f}_b$ força do corpo e $\mathbf{f}_t$ a força externa [9]. Através da manipulação das equações apresenta na bibliografia [9] podemos obter a matriz de rigidez global:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \, d\Omega = \sum_{i=1}^{nQ} \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \hat{\mathbf{w}} \quad (45)$$

Cuja matriz $\mathbf{B}$ corresponde à matriz de deformabilidade:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x}_I)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x}_I)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (46)$$

A matriz $\mathbf{H}$ é a matriz de interpolação definida como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \quad (47)$$

3. Fratura

3.1. Mecânica da fratura

A mecânica da fratura é um campo fundamental da engenharia que estuda e avalia processos de fratura e a capacidade de certos materiais e corpos resistirem à sua propagação, garantindo a integridade de componentes críticos. A mecânica da fratura considera que é inevitável um corpo, ou determinado material, apresentar alguma falha, a qual pode advir de defeitos e até características do próprio processo de fabrico [1].

A deformação e modo de abertura de uma fissura pode ser classificada tendo em conta os modos I, II e III que descrevem de forma independente a separação entre as faces da fissura sob diferentes estados de carregamento e cada modo tem associado um fator de intensidade de tensão K_I , K_{II} e K_{III} , respetivamente [1, 18]. Os três modos estão representados na Figura 12 e são descritos da seguinte forma:

- Modo I: O modo de abertura da fissura é na perpendicular ao seu plano por ser submetida a um esforço de tração
- Modo II: As faces da fissura deslizam uma em relação à outra no próprio plano, numa direção normal à frente da fissura causado por um esforço transversal ao corte.
- Modo III: As faces da fissura deslizam uma em relação à outra no próprio plano, mas numa direção paralela à frente da fissura causado por um esforço ao corte na direção longitudinal [1].

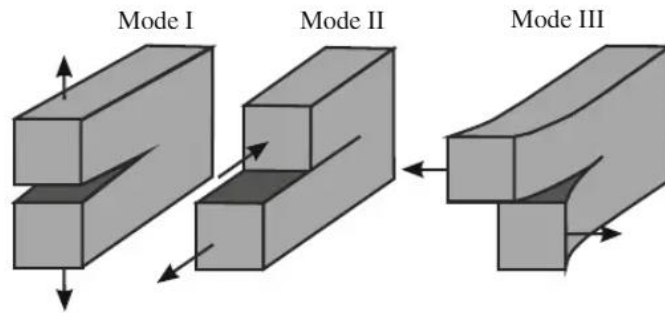


Figura 12- Modos de abertura [1]

Definidos os modos de abertura, torna-se necessário quantificar a severidade do campo de tensões na vizinhança da fissura. Irwin, na década de 1950, estabeleceu a base da Mecânica da Fratura Linear Elástica (LEFM), demonstrando que as tensões σ_{ij} na proximidade da extremidade da fissura são descritas num sistema de coordenadas radial (r, θ) [19] como representado na Figura 13 por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (48)$$

Onde K é designado o Fator de Intensidade de Tensão (SIF). Este parâmetro é fundamental pois caracteriza inteiramente o campo elástico na extremidade da fissura. O valor de K depende da tensão aplicada σ , da geometria da fissura e das dimensões do corpo de prova. Especificamente, considera-se a como o comprimento da fissura e W como a largura da placa, sendo a relação entre ambos expressa pelo fator geométrico adimensional $f\left(\frac{a}{W}\right)$. O denominador $\sqrt{2\pi r}$ representa a singularidade da tensão na ponta da fissura, indicando que as tensões elásticas tendem teoricamente para o infinito à medida que a distância radial r se aproxima de zero [19].

A forma geral do SIF está representada na equação (49) por:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (49)$$

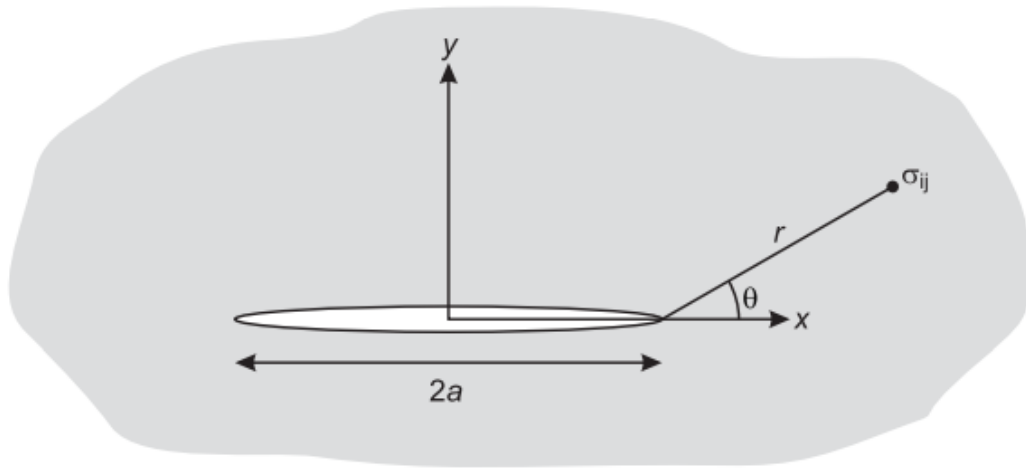


Figura 13- Sistema de coordenadas radial [19]

As tensões para o modo I,II e III são dadas respectivamente pelas equações (50),(51) e (52) [1].

Para o Modo I, tanto as componentes de tensão no plano normais (σ_{xx} e σ_{yy}) como a tensão de corte τ_{xy} são governadas pelo Fator de Intensidade de Tensão K_I e variam angularmente conforme as funções trigonométricas indicadas na equação (50). A variável θ define o ângulo polar, indicando a orientação angular do ponto em análise em relação à extremidade da fissura.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

No caso do Modo II, o campo de tensões é proporcional a K_{II} . As componentes mantêm a dependência radial da singularidade, mas apresentam uma distribuição angular distinta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Finalmente, para o Modo III, as tensões que atuam são perpendiculares ao plano da fissura (tensões de corte τ_{xz} e τ_{yz}), sendo definidas pelo fator K_{III} [1]:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

3.2. Estado da arte com FEM

No âmbito da mecânica da fratura computacional, a modelação de descontinuidades em componentes estruturais tem enfrentado desafios significativos quando abordada através do FEM. A utilização deste método em problemas de propagação de fenda obriga à regeneração constante da malha (remalhamento) à medida que a fenda evolui, o que aumenta drasticamente o custo computacional e a complexidade algorítmica [20].

No ano de 1999, Belytschko e Black apresentam um marco fundamental ao introduzir uma metodologia de elementos finitos com necessidade mínima de remalhamento para a simulação do crescimento de fratura. Desenvolvido na Northwestern University, este estudo propôs uma solução para uma das maiores limitações do FEM em que a malha do modelo necessitava de estar perfeitamente alinhada com a geometria da descontinuidade. A abordagem inovadora destes autores consistiu na adição de funções de enriquecimento descontínuas à aproximação clássica do FEM, fundamentada no conceito de partição da unidade. Este avanço permitiu que uma fenda fosse posicionada de forma arbitrária dentro da malha, atravessando os elementos sem exigir que os nós coincidissem com as faces da fenda. Através desta técnica, hoje amplamente conhecida como *Extended Finite Element Method* (X-FEM), os autores demonstraram ser possível calcular os Fatores de Intensidade de Tensão com bastante precisão, apresentando erros inferiores a 1% numa vasta gama de problemas bidimensionais [21].

Dando continuidade à linha de investigação iniciada por Belytschko e Black, no mesmo ano, Moës et al. apresentam um novo contributo para o X-FEM. Enquanto o trabalho anterior se focava na viabilidade da adição das funções de enriquecimento para evitar o remalhamento, neste novo estudo recorre-se a uma função designada *Heaviside* que permite representar o corte físico da fratura, separando os dois lados do material matematicamente sem que a malha seja alterada. Complementarmente, foram introduzidas funções assintóticas para descrever os campos de tensões singulares na extremidade da fenda, garantindo o rigor numérico nas zonas em iminência de fratura [22].

Para além dos avanços no domínio do X-FEM, outra abordagem na mecânica da fratura linear elástica é o *scaled boundary finite element method* (SBFEM). Em 2018, Song et al. destacam este método como uma alternativa de elevada fidelidade aos métodos convencionais. Este estudo demonstra como o SBFEM consegue superar as dificuldades do Método dos Elementos Finitos (FEM) tradicional ao lidar com a concentração de tensões na ponta da fenda, sem exigir

malhas extremamente complexas ou refinadas. A grande inovação desta metodologia reside no facto de ser um método semi-analítico que utiliza elementos poligonais de geometria livre. Esta abordagem permite que o sistema calcule diretamente parâmetros fundamentais, como os Fatores de Intensidade de Tensões, com um erro computacional muito reduzido. Conforme sublinhado pelos autores, a precisão neste cálculo é decisiva para prever se a trajetória de uma fenda será estável ou se sofrerá desvios inesperados (*kinking*), influenciando também a forma da zona plástica que se forma na extremidade da fratura [23].

3.3. Estado da arte com Meshless

Uma vez que, o método dos elementos finitos apresenta algumas limitações no que diz respeito a estudos no âmbito da fratura, os métodos sem malha têm ganho força na comunidade científica nos últimos anos [4].

Segundo pesquisa efetuada no *Web of Science* com as palavras-chave “*Meshless or Mesh-free Methods*” e “*Fracture*”, na Figura 14 está ilustrado o panorama de investigação no âmbito da fratura com recurso aos Métodos sem Malha entre os anos 1996 e 2025 demonstrando uma clara expansão e consolidação do campo de estudo em concordância com o aumento de publicações realizada ao longo dos anos.

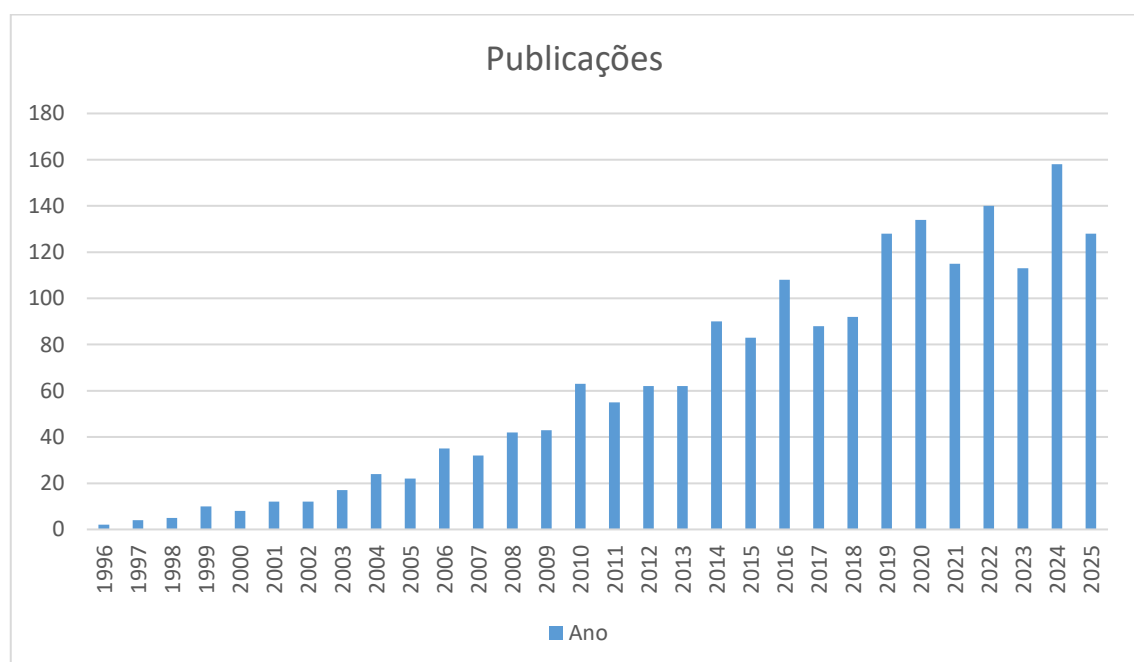


Figura 14- Publicação de estudos que recorrem a métodos sem malha no estudo da fratura (*web of science*)

Em 1994, Belytschko implementa o método EFG na análise de problemas com fratura em que recorre ao método do critério da visibilidade para calcular o fator de intensidade de tensões (SIF). Até esse momento, apenas dois métodos tinham sido apresentados no estudo de

propagação de fraturas, sendo o FEM e o *Boundary Element Method* (BEM). A aplicação do FEM implica uma análise iterativa e o remalhamento constante, o que é difícil aplicar de forma automática no problema em questão, podendo levar a erros significativos. O BEM, ao contrário do FEM, em que só é necessário o remalhamento na superfície da fissura (em estudos 3D) ou na sua linha de representação (estudos em 2D) utiliza uma função Green nas equações diferenciais o que o tornava difícil de aplicar em problemas com não linearidades geométricas. A maioria das aplicações do método dos elementos de contorno até esta época tinha sido em materiais elásticos isotrópicos [24].

Mais tarde, em 1996, Organ introduz o método da transparência e o método da difração num estudo da fratura em corpos não convexos em duas dimensões. As aplicações destes dois métodos trouxeram uma melhoria pouco significativa na precisão dos resultados em comparação com o método da visibilidade, mas quando combinados com funções de enriquecimento foi possível efetivamente alcançar uma melhoria nos resultados obtidos[25].

Posteriormente, foi apresentado por Belytschko um novo método que funde elementos finitos com o método EFG no estudo da fratura em 3D[26], que surge como uma evolução do método já desenvolvido pelo mesmo autor, anteriormente, em 2D [8].

No início do milénio, no ano de 2001, Rao e Rahman, investigadores da Universidade de Iowa, propuseram uma técnica híbrida para a análise de fratura linear elástica, acoplando o EFGM com o FEM. Motivados pelo elevado custo computacional intrínseco aos métodos sem malha e pelas limitações do FEM no processo de remalhamento, os autores desenvolveram uma estratégia de decomposição de domínio onde o EFGM é aplicado exclusivamente na vizinhança da fissura enquanto o FEM é utilizado no restante domínio para maximizar a eficiência numérica. A compatibilidade entre os dois métodos na zona de interface é assegurada através de funções de forma garantindo a convergência da solução. A metodologia foi validada através do cálculo de SIF em modo I e modo misto e da simulação de propagação de fissuras recorrendo ao MTS [27].

Mais recentemente, no âmbito da investigação nacional, no ano 2015, Azevedo, Belinha, Dinis e Natal Jorge apresentaram um estudo pioneiro na extensão do NRPIM à mecânica da fratura linear elástica, desenvolvido no âmbito da investigação em métodos numéricos na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. O algoritmo desenvolvido utiliza o critério MTS para ditar a direção de propagação, tirando partido da utilização de diagramas de Voronoï para estabelecer a conectividade nodal e a integração numérica, o que permite atualizar a geometria da fissura e as zonas de influência sem qualquer intervenção do utilizador. A metodologia foi validada através da análise de quatro exemplos de referência *benchmark*, abrangendo problemas de Modo I, Modo II e Modo Misto. Uma das evidências do sucesso deste método está representado na Figura 15 onde o algoritmo consegue prever o desvio da fissura ao interagir com vazios na geometria. Este resultado é particularmente interessante porque valida o uso do critério MTS para ditar a direção de propagação [16].

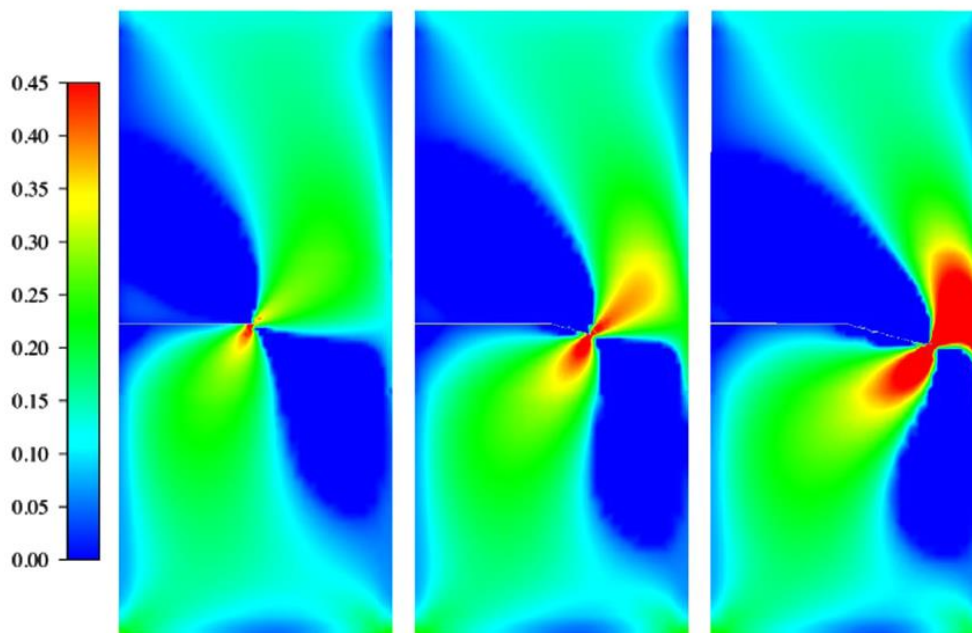


Figura 15- Tensão de Von Mises em três estágios diferentes [16]

Em 2019, Ramalho, Belinha e Campilho apresentaram um algoritmo numérico inovador para a simulação da propagação de fissuras em materiais frágeis, acoplando-o a dois métodos sem malha distintos, o RPIM e o NNRPIM. A implementação distingue as estratégias de atualização da malha consoante o método sendo uma reorganização baseada em setores para a grelha de fundo do RPIM e uma regeneração autónoma via células de Voronoï para o NNRPIM. A validação do algoritmo foi efetuada através da análise de três exemplos de referência diferentes modos de carregamento modo I, modo II e misto, concluindo-se que a abordagem proposta permite obter trajetórias de fissura precisas e concordantes com a literatura existente [17].

Três anos depois, Gonçalves et al. do INEGI e ISEP, propuseram uma metodologia numérica baseada numa técnica sem malha para prever a propagação da fratura em juntas adesivas do tipo *Double Cantilever Beam* (DCB). Dado que os métodos tradicionais, como o FEM, enfrentam dificuldades com a distorção da malha e requerem parâmetros de fratura pré-definidos como no método *Cohesive Zone Modeling* (CZM), este estudo é fundamental para fornecer uma abordagem mais flexível na discretização e simulação do comportamento mecânico de juntas coladas, amplamente usadas nas indústrias automóvel e aeronáutica. Os autores implementaram o método RPIM combinado com um algoritmo de remalhamento adaptativo local. A propagação da fenda e o seu início são definidos por um critério da mecânica da fratura baseado na taxa crítica de libertação de energia [28], enquanto o algoritmo de propagação é baseado no trabalho desenvolvido em [17]. A metodologia foi validada através da comparação com dados experimentais de juntas de alumínio AA6082 coladas com adesivo AV138, demonstrando que o algoritmo proposto consegue prever com precisão a curva força-deslocamento experimental e o caminho da fenda, mantendo uma discretização bem condicionada ao longo de toda a análise. Esta validação é evidenciada na Figura 16, que ilustra

a sobreposição entre a curva força-deslocamento experimental média e a previsão numérica [28].

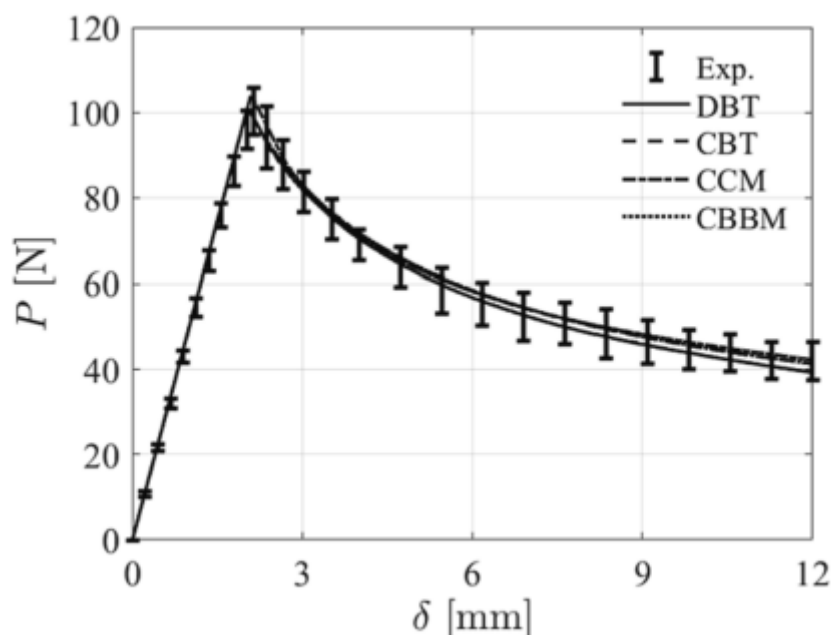


Figura 16- Análise força-deslocamento [28]

Em 2022, Chilakala et al. investigaram a aplicação do EFGM à simulação de fendas em revestimentos multicamada na engenharia automóvel. Os revestimentos são essenciais para a resistência à corrosão e desgaste em painéis de carroçaria e componentes de motor, e dado que a presença de micro-fendas nestes materiais compósitos pode levar a falhas catastróficas, este estudo reveste-se de grande importância para prever o comportamento da fratura com precisão. Os autores desenvolveram uma implementação numérica em MATLAB para analisar o comportamento de fendas sob carregamentos mecânicos e térmicos, comparando configurações de substrato e revestimento em Aço e Alumínio ou vice-versa. Os resultados demonstraram que o EFGM é eficaz na deteção de discontinuidades nas interfaces e no cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão, revelando fenómenos importantes como o efeito de *shielding* onde fendas centrais reduzem a tensão em fendas de aresta, e mostrando como a variação térmica afeta significativamente os campos de tensão, com uma concordância sólida face aos resultados do FEM [29].

Para que as simulações apresentadas anteriormente executem fielmente o comportamento singular da extremidade da fissura, é necessário definir como o campo de aproximação interage com a discontinuidade geométrica [4]. De seguida, apresentam-se as abordagens mais consolidadas na literatura para a modelação destas discontinuidades.

Tal como referido anteriormente, Belytschko foi o pioneiro na aplicação do critério da visibilidade. Este critério baseia-se na premissa de que a linha que representa a fratura atua como uma barreira física ou um objeto opaco dentro do domínio [30, 31].

O funcionamento deste critério pode ser descrito através de uma analogia, sendo a linha que conecta um determinado ponto de integração a um nó da discretização imaginada como um raio de luz [31]. Conforme ilustrado na Figura 17, se este raio, ao conectar um nó I a um ponto qualquer D , interseccionar o segmento que representa a fissura, considera-se que a visão está bloqueada. Consequentemente, o ponto D é removido do domínio de influência do nó I , anulando a interação entre ambos [30].

A aplicação deste critério resulta na introdução de uma descontinuidade, representado pela linha CD , abrupta na função de forma sempre que o domínio é cortado pela fissura [31].

Embora a criação de campos de aproximação não-contínuos seja teoricamente indesejável num método de Galerkin, estudos realizados por Krysl e Belytschko demonstram que estas descontinuidades não inviabilizam o método. Foi comprovado que a aplicação do critério de visibilidade, não conduz à falha de convergência, permitindo obter soluções numéricas robustas [31].

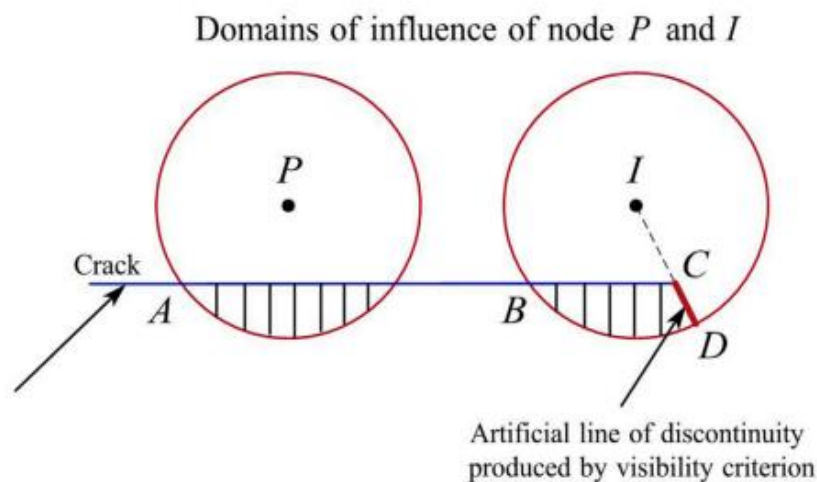


Figura 17- Critério da visibilidade [4]

Em 1996, Organ propôs o método da difração para lidar com as limitações associadas a descontinuidades inesperadas em estudos de corpos não convexos. Esta abordagem inspira-se no fenómeno físico da difração da luz que lhe oferece a capacidade de contornar objetos opacos. Consequentemente o domínio de influência de um determinado nó pode contornar a ponta da fissura evitando o corte abrupto na função de peso garantindo que ao contrário do que acontece no método da visibilidade os nós próximos da ponta da fratura sejam incluídos no domínio de influência do nó I .

A implementação matemática deste método baseia-se na modificação da distância utilizada na construção da função de peso. Em vez de considerar apenas a distância euclidiana direta, o método calcula uma distância de difração ajustada que considera o caminho mais curto

contornando a ponta da fissura que resulta da soma da distância do nó à extremidade da fratura com a distância da extremidade ao ponto de avaliação, como representado na Figura 18.

A principal vantagem desta técnica reside na garantia de continuidade das funções de forma em todo o domínio, eliminando as descontinuidades internas indesejáveis do critério de visibilidade [25].

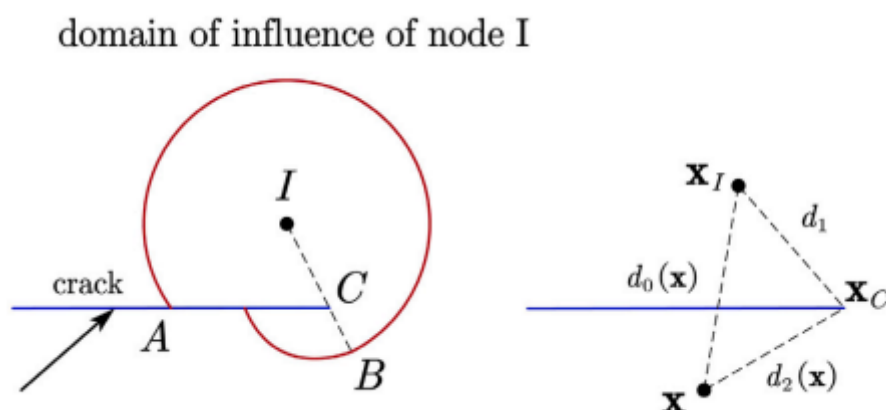


Figura 18- Critério da difração [4]

O método da transparência, representado esquematicamente na Figura 19 surge como uma alternativa robusta ao método da difração, sendo particularmente vantajoso na análise de problemas tridimensionais com descontinuidades geométricas. A sua principal finalidade é suavizar a aproximação numérica na vizinhança da fissura, mitigando as variações abruptas do campo de deslocamentos típicas do critério da visibilidade. Para tal, a fissura é modelada como sendo totalmente transparente na sua extremidade, tornando-se progressivamente opaca à medida que a distância a essa extremidade aumenta. Esta variação gradual da opacidade permite uma transição suave da influência da descontinuidade no domínio numérico, assegurando a continuidade das funções de forma [25].

Contudo, a estabilidade numérica deste método pode ser comprometida quando os nós discretizados se encontram excessivamente próximos da superfície da fissura, o que gera oscilações indesejadas na função de aproximação. Para mitigar este efeito, a literatura mais recente, descreve a imposição de uma restrição geométrica que define uma distância mínima de segurança entre os nós e a descontinuidade [4].

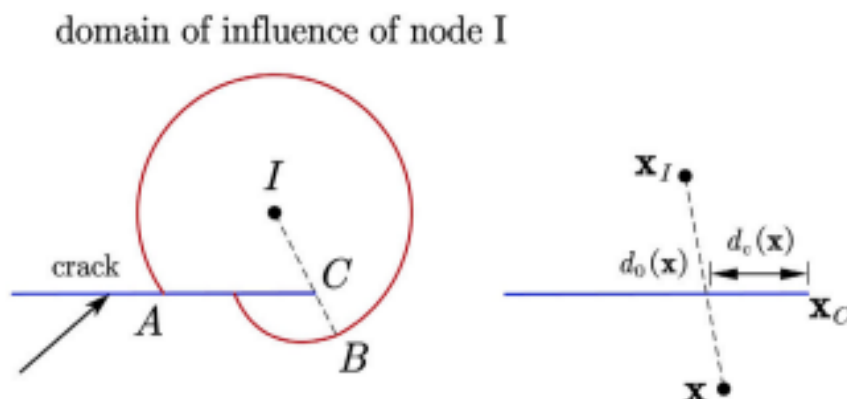


Figura 19- Critério da transparência [4]

3.4. Critérios de Fratura

Na mecânica da fratura é possível prever a trajetória de propagação da fenda recorrendo aos critérios da fratura. De acordo com o parâmetro estudado, os critérios da fratura podem-se basear na tensão, deformação ou densidade de energia na vizinhança da extremidade da fratura para determinar o início e a direção de propagação da fenda [32].

O trabalho de Griffith, desenvolvido em 1920, representa um marco fundamental no estudo da fratura. A sua inovação residiu na proposição de um critério de propagação de fraturas baseado na energia e postula que a propagação de uma fenda num corpo é regida por um balanço energético global do sistema. A fratura propaga-se se a diminuição da energia total de um sistema for superior ou igual ao aumento da energia superficial [33]. No ano de 1974, Hussain et al. desenvolvem o trabalho anteriormente realizado por Griffith, focando-se no cálculo da taxa de libertação de energia de deformação de um corpo, quando sujeito a uma condição de carregamento em modo misto. Neste artigo é ainda realizada uma análise da direção de propagação da fratura assumindo que a mesma se propagará numa direção onde a taxa de libertação de energia é máxima [34].

G.C. Sih contribuiu com uma alternativa aos estudos anteriores conhecida como *Strain Energy Density* (SED). Este critério considera que a fratura se propaga na direção onde a densidade de energia de deformação atinge um valor mínimo local, considerando que esta é a direção de menor resistência do material [35].

Este autor propôs também o critério *Maximum Tangential Stress* (MTS) baseado no estado de tensão na vizinhança da extremidade da fratura em que é considerado que a fratura se propaga ao longo da direção onde a tensão tangencial atinge o seu valor máximo a uma distância específica da sua extremidade [32]. Este critério assume-se como um dos mais utilizados na literatura devido à sua simplicidade de implementação em estudos com materiais frágeis [17, 32]. Uma das alternativas ou variantes da aplicação deste método indica que a fratura se

propaga segundo uma direção ortogonal à direção da primeira tensão principal [36], o que é equivalente dizer que a propagação toma a direção da segunda direção principal [17].

Chang desenvolveu o critério MTSN (*Maximum Tangential Strain*) para prever o começo da fratura em fendas inclinadas sujeitas a modo misto. Segundo esta abordagem, a direção de propagação coincide com o ângulo de máxima deformação tangencial a uma distância radial fixa da ponta da fenda. Contudo, este modelo apresenta uma limitação teórica significativa: baseia-se exclusivamente na singularidade do campo de deformações, negligenciando os termos de ordem superior da expansão de Williams. Embora esta aproximação seja válida para muitas situações de fratura frágil, a ausência desses termos adicionais compromete a precisão do critério em certas configurações geométricas, limitando a sua concordância com os resultados experimentais mais complexos [37].

3.5. Algoritmo de propagação de fratura

O algoritmo de propagação de fratura é um método iterativo. Inicialmente, o domínio do problema, incluindo a geometria da fenda inicial, é discretizado através de uma distribuição nodal. Seguidamente, procede-se à construção da malha de integração de fundo assegurando que os pontos de integração situados num dos lados da superfície da fissura não interagem com os nós do lado oposto, garantindo assim que a fissura atua como uma descontinuidade [16, 17].

Uma vez definida a integração e a conectividade nodal, são calculadas as funções de interpolação e as matrizes de rigidez locais, que são posteriormente assembladas na matriz de rigidez global, juntamente com o vetor de forças externas. Após a aplicação das condições de fronteira essenciais, o sistema de equações lineares é resolvido para obter o campo de deslocamentos, o qual serve de base para o cálculo subsequente dos campos de tensão e deformação [17].

Na fase final de cada iteração, o algoritmo utiliza o campo de tensões na vizinhança da ponta da fenda para determinar a nova direção de propagação. Caso não tenha sido atingido o comprimento total da fratura há uma reorganização da malha de integração para acomodar a nova geometria da fenda, reiniciando-se o ciclo iterativo até à conclusão da análise [16, 17].

No estudo desenvolvido em [17] para determinar a trajetória de propagação da fissura, o algoritmo recorre ao critério da tensão tangencial máxima abordado no capítulo 3.4 para determinar a trajetória da fratura e é abordado o conceito de tensão ponderada de todos os pontos de integração pertencentes aos nós da vizinhança da ponta da fratura representados pela cor cinzenta na Figura 20 ao invés de um único ponto de integração [17].

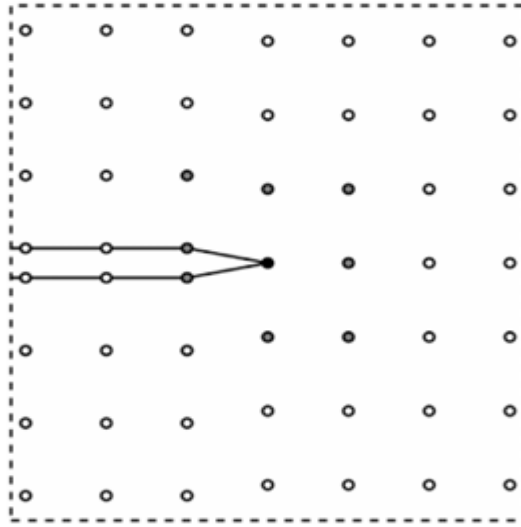


Figura 20- Nós da vizinhança da extremidade da fratura [17]

A tensão é obtida pela expressão:

$$\sigma_{tip} = \frac{\sum_{I=1}^{n_q} \sigma_I w_I}{\sum_{I=1}^{n_q} w_I} \quad (53)$$

Sendo n_q o número de pontos de integração na vizinhança da fratura e w_I o respetivo peso, representado pela expressão que relaciona a distância euclidiana entre a extremidade da fratura e o nó mais afastado da sua vizinhança e a distância entre o ponto de integração em avaliação e a extremidade da fissura [38]:

$$w_I = \frac{2d_{max}}{d_I} \quad (54)$$

Após calcular o tensor das tensões σ_{tip} é possível obter as tensões principais e as direções principais, sendo que, a fratura propaga-se segundo a segunda direção principal. Já o tamanho da propagação definido por Δa corresponde à distância entre o nó da extremidade da fissura e o seu nó mais próximo, conforme é exemplificado na Figura 21 [17].

O nó da ponta da fratura toma a sua nova posição e são gerados dois novos nós representados na Figura 21 por dois quadrados cinzentos e designados por n_L e n_R . Estes dois nós são posicionados na direção perpendicular à direção de propagação da fratura e a distância entre os mesmos é uma fração de Δa [17].

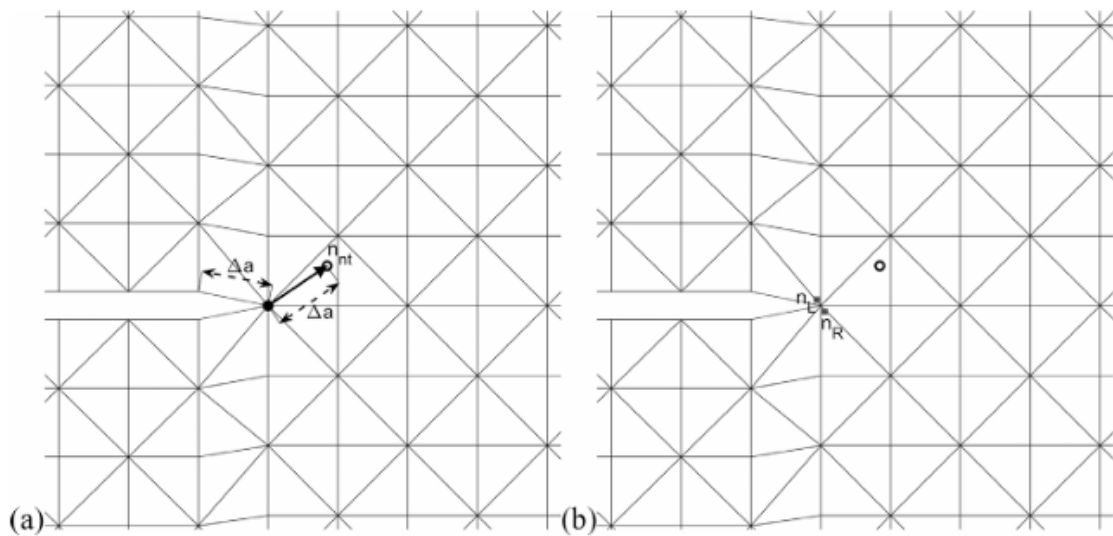


Figura 21- (a) nova posição da extremidade da fissura (b) novos nós criados [17]

Em consequência da alteração da direção da fratura descrita até ao momento e uma vez que, para calcular a sua direção de propagação é utilizado o conceito de tensão ponderada dos pontos de integração pertencentes aos nós da vizinhança da sua extremidade, é realizado um reajuste dos nós que pertencem a essa mesma vizinhança. De modo a garantir uma densidade de nós próxima da extremidade da fratura adequada, uma vez que quanto maior for esta densidade, maior será a precisão ao determinar a propagação na iteração seguinte, são adicionados sete nós novos dispostos num formato quadrangular conforme representado na Figura 22 [17, 38] .

A nova configuração da grelha será obtida eliminando os nós que estejam contidos na circunferência com centro no nó da extremidade da fissura e diâmetro $1,1d_{max}^n$, assim como, qualquer triângulo que contenha esses nós como demonstrado na Figura 23. A componente d_{max}^n representa a distância entre a nova extremidade da fratura e um dos lados do quadrado formado pelos novos nós [17, 38].

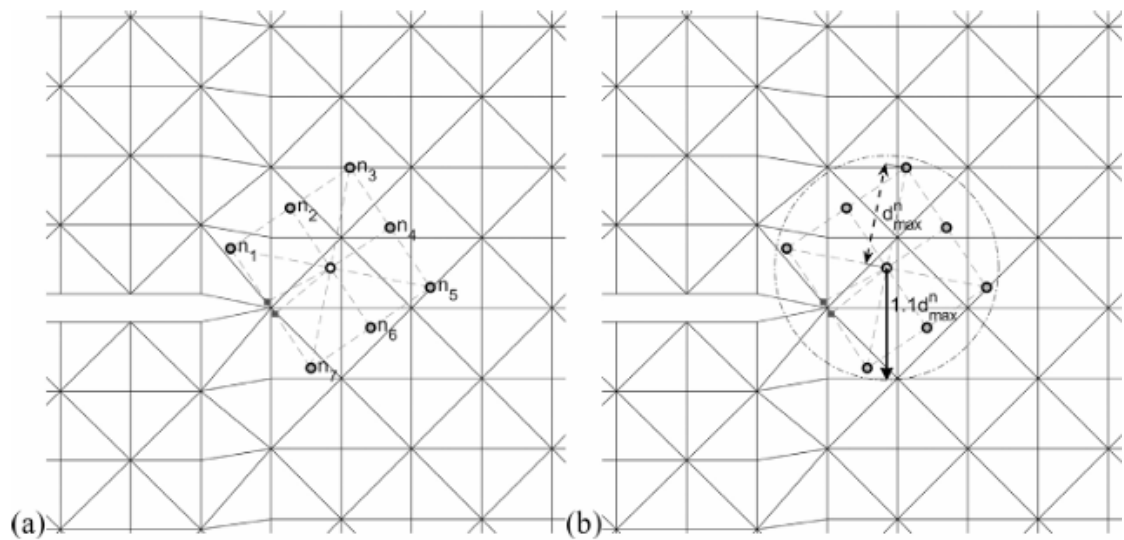


Figura 22- (a) novos nós ao redor da extremidade da fissura (b) circunferência que determina os nós excluídos Adaptado de [17]

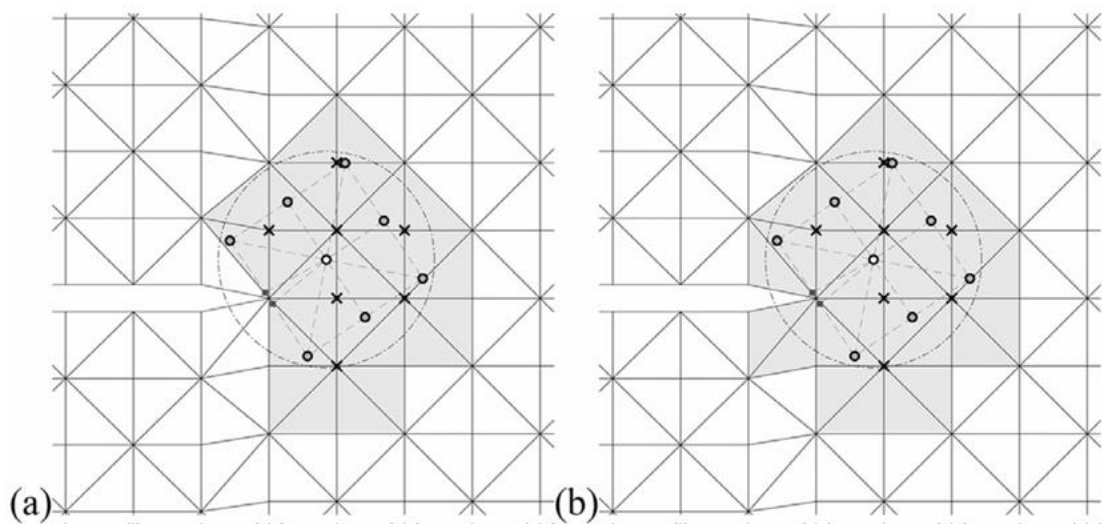


Figura 23- Triângulos eliminados [17]

Relativamente aos triângulos da grelha de fundo que não foram eliminados durante o processo de refinamento, mas que partilhavam o nó correspondente à antiga ponta da fissura, é imperativo atualizar a sua conectividade para refletir a separação física do material. Assim, na matriz de definição da grelha, procede-se à substituição do antigo nó por um dos novos nós criados, n_L ou n_R . Esta atribuição é determinada pela posição geométrica de cada triângulo face à trajetória da fissura, sendo que os elementos situados numa das margens da fissura passam a conectar-se ao nó n_L , enquanto os situados na margem oposta ligam-se ao nó n_R [17].

Nas iterações subsequentes, é comum detetar nós da grelha anterior posicionados no interior do círculo de exclusão, mas geometricamente muito próximos dos vértices n_1 ou n_7 da nova grelha local. Para preservar a integridade da malha, o algoritmo impõe a fusão destes nós

antigos com os novos vértices, em vez de os eliminar. Esta operação permite salvaguardar as células associadas, sob a condição estrita de que o nó fundido seja o único vértice desse elemento a residir dentro do círculo. Caso a proximidade não seja suficiente para justificar a fusão, opta-se pela remoção dos elementos ligados aos nós de substituição da ponta da fissura, n_L e n_R , garantindo assim uma topologia mais regular e livre de distorções numéricas [17, 38].

Após a fase inicial de remoção de elementos na zona de influência da fissura, conforme ilustrado na Figura 24, é comum subsistirem na malha elementos residuais formados exclusivamente por nós de ligação (identificados pelos pontos pretos). A presença destes triângulos residuais ou de nós de ligação associados a um único elemento potencializaria a ocorrência de sobreposição de células. Para mitigar este risco o algoritmo executa uma limpeza adicional, eliminando estes elementos e nós de fronteira redundantes, tal como demonstrado na Figura 24 [17].

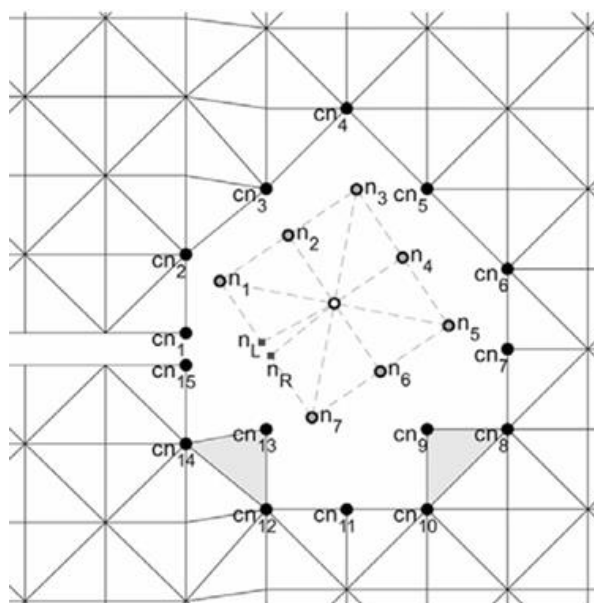


Figura 24- Triângulos a serem eliminados [17]

O resultado deste procedimento é uma interface regular e desobstruída, representada na Figura 25, que corresponde à configuração final da grelha de integração imediatamente antes da geração dos novos elementos de conexão [38].

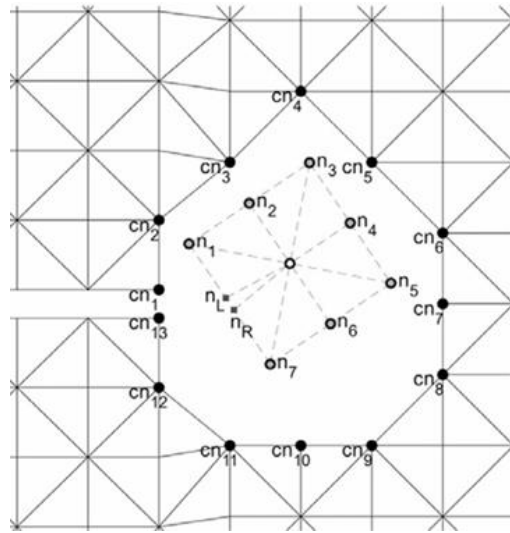


Figura 25- Configuração antes de gerar novos elementos de ligação [17]

A reconstrução da conectividade entre a nova grelha local e o restante domínio é gerida através de uma divisão do espaço em nove setores angulares, demonstrada na Figura 26 (a) [38]. Os elementos de ligação são gerados iterativamente percorrendo os setores de 1 a 9 e a metodologia para a conexão varia de acordo com a localização de cada setor [17].

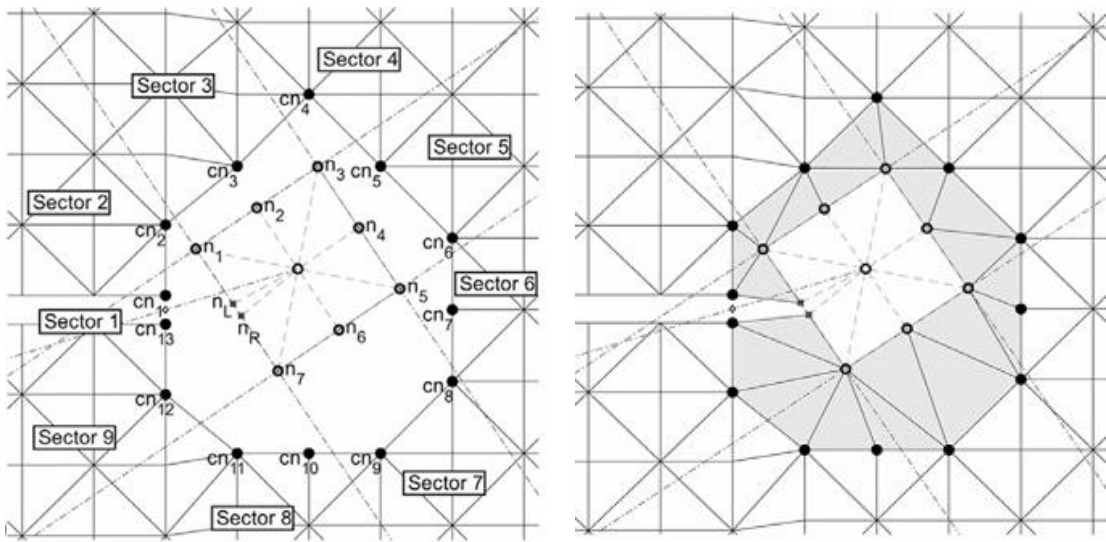


Figura 26- (a) Divisão em setores. (b) Elementos de conexão à extremidade da fissura [17]

Para estabelecer a configuração final da grelha de integração, demonstrada na Figura 27, o algoritmo aplica um procedimento de regularização geométrica aos nós de ligação criados. Este processo consiste no reposicionamento de cada nó de ligação para o centro geométrico da sua vizinhança imediata, o que é concretizado calculando a média aritmética das coordenadas dos nós adjacentes e atualizando a posição do nó em conformidade. Esta técnica de suavização visa melhorar a qualidade da malha na zona de transição. No entanto, o algoritmo impõe uma

exceção fundamental para preservar a integridade geométrica do modelo, no caso de um nó de ligação coincidir com um nó da fronteira do domínio, as suas coordenadas originais são mantidas inalteradas, impedindo assim qualquer distorção nos contornos físicos do problema [17].

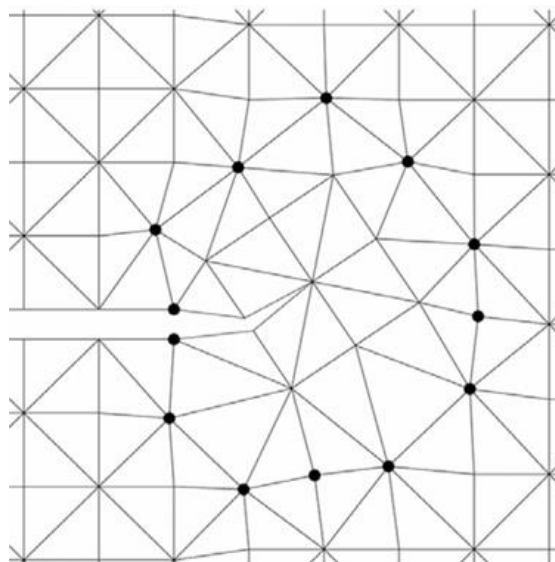


Figura 27- Configuração final [17]

No documento [16] à semelhança do processo descrito anteriormente a direção de propagação da fratura é também ditada pelo critério MTS e é calculado um tensor de tensões ponderado considerando todos os pontos de integração numa vizinhança definida em torno da extremidade da fratura.

No entanto, a metodologia [16] distingue-se da aplicada em [17] uma vez que o método NNRPIM é um método classificado como verdadeiramente sem malha o que quer dizer que a discretização do domínio depende apenas da distribuição nodal enquanto no método RPIM é necessária uma grelha de fundo de integração pré-definida. O algoritmo descrito posteriormente tira partido desta propriedade para automatizar o processo de remalhamento [16].

Para simular numericamente a propagação da fissura, é fundamental discretizar as arestas de abertura e distinguir fisicamente as duas faces criadas pela descontinuidade [16].

Para esse efeito, considera-se um conjunto de nós designado N_k que pertence a um determinado domínio discretizado por uma malha nodal N . Esse conjunto de nós pode ser dividido em dois subconjuntos N_{k1} e N_{k2} que serão fundamentais para identificar de que lado da fissura pertence cada nó da fronteira. Considerando inicialmente que os nós mais exteriores n_5 e n_6 pertencem a N_{k1} e N_{k2} respetivamente não existe mais nenhuma informação relativamente aos restantes nós [16, 39].

Definindo uma reta que passa pelo nó n_5 e n_4 como representado na Figura 28 a equação definida por essa reta será do tipo:

$$y = ax + b \quad (55)$$

Em que as constantes a e b são determinados conhecendo as coordenadas dos dois pontos [16].

Após definir a equação da reta, são testadas as condições para o nó 3:

$$y_3 > a \cdot x_3 + b \wedge y_6 > a \cdot x_6 + b \quad (56)$$

Deste modo, os nós n_3 e n_6 pertencem ao mesmo subconjunto caso as duas condições sejam ambas verdadeiras ou falsas. Caso as condições apresentem valor lógico diferente isso significa que n_3 e n_6 não pertencem ao mesmo subconjunto estando localizados em lados opostos da fratura como apresentado na Figura 28. As diversas configurações geométricas possíveis para a validação da posição dos nós encontram-se ilustradas nas Figura 28 (a) a (d) [16].

O algoritmo reitera o processo de classificação geométrica para todos os nós da frente de fissura até que os subconjuntos representativos das faces opostas N_{k1} e N_{k2} se encontrem integralmente definidos. Posteriormente, impõe-se a descontinuidade no domínio através da atualização das listas de vizinhos naturais, removendo-se reciprocamente a conectividade entre os nós que pertençam a faces distintas da fissura [16].

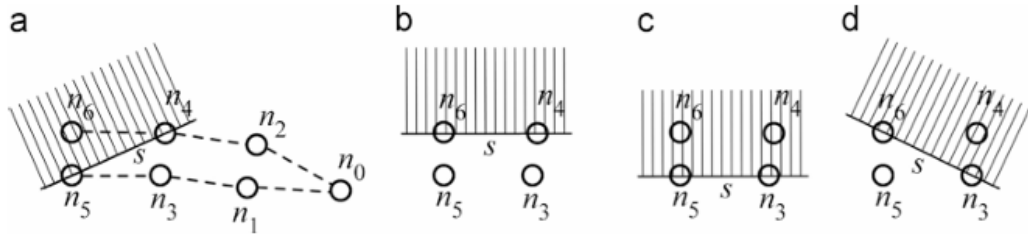


Figura 28- Atribuição dos nós aos respectivos lados [16]

4. Aplicação numérica

Neste capítulo, as metodologias descritas teoricamente nos capítulos anteriores serão aplicadas numericamente através de diferentes casos de estudo. A fase inicial deste trabalho consistiu na familiarização técnica e na exploração das capacidades do software *Finite Element and Meshless Analysis Software* (FEMAS) desenvolvido por Jorge Belinha. Os estudos conduzidos permitem comparar o comportamento do método FEM com os métodos RPIM e NNRPIM, consolidando a experiência de manipulação do software e servindo como base para a análise crítica dos resultados obtidos.

Inicialmente foi realizado um estudo da convergência, seguido de um estudo paramétrico da propagação da fratura numa placa retangular com uma fenda pré-existente. Este caso de estudo serve como base de validação fundamental, permitindo analisar de que forma variáveis controladas nomeadamente a extensão inicial da fenda e o seu posicionamento influenciam a propagação da fratura. Subsequentemente, a metodologia é transposta para um cenário da indústria automóvel através do estudo numérico num suporte de fixação de um LPD para veículos pesados de mercadorias.

4.1. Estudo da convergência

Com intuito de garantir fiabilidade nos resultados obtidos, foi realizado um estudo de convergência para os métodos FEM, RPIM e NNRPIM. Esta análise é fundamental para validar a estabilidade das formulações implementadas no software FEMAS. Este estudo visa determinar a taxa de evolução da solução de uma determinada metodologia face ao refinamento da malha. No contexto deste trabalho, analisa-se o comportamento da solução à medida que o número de nós aumenta, permitindo aferir a precisão, estabilidade e robustez do método numérico utilizado. É possível ainda identificar o ponto ideal onde um maior refinamento da malha já não traz ganhos significativos na precisão encontrando um equilíbrio com os custos computacionais.

O estudo da convergência teve como base um problema modelo documentado na literatura [9]. Neste estudo foi analisada uma placa quadrangular com um furo circular e centrado submetida a uma tensão unidirecional constante. Dada a natureza do problema em estudo e da existência de uma simetria, tanto ao nível da geometria como dos esforços aplicados, de forma a otimizar a eficiência computacional sem comprometer a exatidão dos resultados, a análise numérica foi circunscrita a apenas 1/4 do domínio como demonstrado na Figura 29.

Para que o modelo simplificado reproduza com fidelidade o comportamento mecânico da estrutura integral, é necessário impor condições de fronteira que simulem a simetria. Assim, restringiu-se o deslocamento na direção horizontal ao longo da face AC, enquanto na face DB foi impedido o deslocamento na direção vertical. Estas condições de fronteira estão documentadas na Figura 29.

Foram definidas as propriedades geométricas e mecânicas do modelo. Considerou-se um parâmetro unitário para a dimensão característica, $D = 1$ m, resultando numa geometria definida pelas proporções indicadas na Figura 29. Relativamente às propriedades do material, o módulo de Young adotado foi de $E = 200\,000$ MPa e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Estas propriedades são representativas de materiais metálicos estruturais, como o aço, garantindo a relevância física do estudo de convergência. Por fim, o modelo foi sujeito a uma tensão unidirecional e constante de 1 N/m e adotou-se ainda uma espessura de 1 mm.

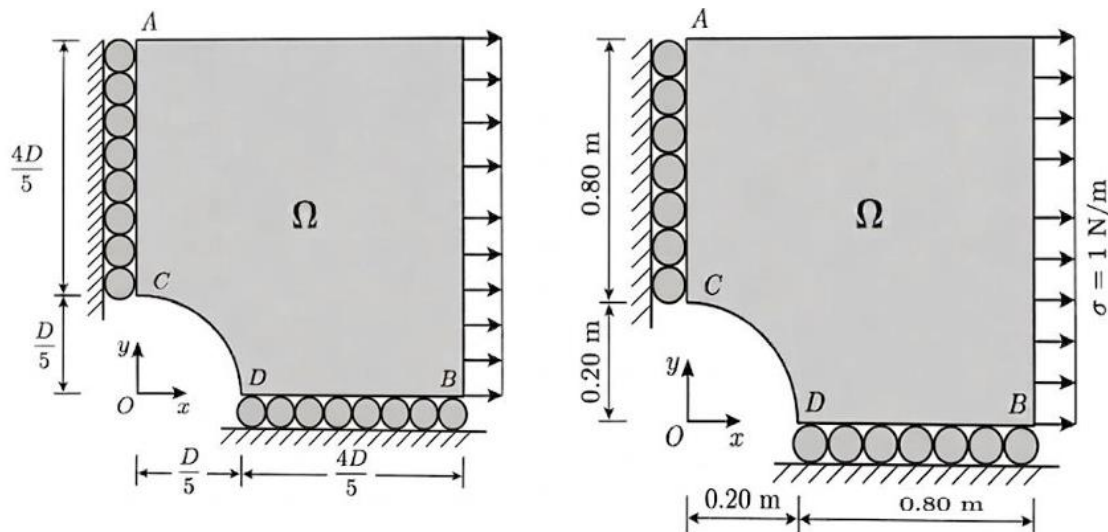


Figura 29- Placa quadrangular com furo central circular

Para a criação dos modelos numéricos, recorreu-se ao software *Finite Element Modeling and Postprocessing* (FEMAP) como ferramenta de pré-processamento, onde foram definidas as geometrias e geradas as respetivas malhas para posterior análise no FEMAS.

A definição da malha computacional para o domínio em estudo seguiu uma lógica de refinamento fundamentada na aplicação de uma regra quadrática para a distribuição de divisões elementares. Esta estratégia permite assegurar precisão geométrica na zona de curvatura, onde se espera uma maior variação da solução. O processo de discretização foi estruturado a partir de um parâmetro base, designado por *div*, o qual foi atribuído às fronteiras

superior e lateral direita, como representado na Figura 30 estabelecendo uma densidade de malha uniforme nestas regiões.

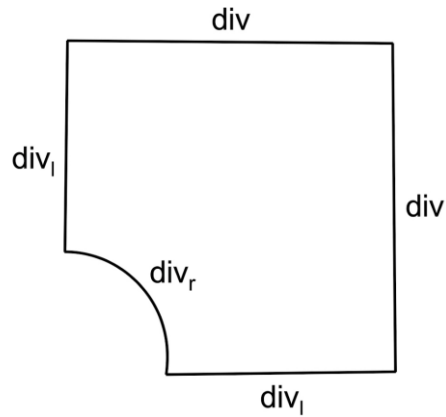


Figura 30-Representação geométrica das variáveis de controlo da densidade da malha computacional

Para as arestas que confinam com o entalhe circular implementou-se um ajuste de densidade definido por:

$$div_i = \frac{4div}{5} \quad (57)$$

A discretização da fronteira curva foi determinada pelo parâmetro div_r , calculado através da expressão:

$$div_r = \frac{\pi D}{10} div \quad (58)$$

Foram geradas cinco malhas triangulares distintas com densidades de nós de 34 (discretização mais grosseira), 96, 306, 1154 e 4020 (discretização mais refinada). Os parâmetros específicos de subdivisão utilizados para a geração de cada uma destas malhas encontram-se resumidos na Tabela 1.

Tabela 1-Divisões e número de nós das diferentes malhas

Malha	Div	Div _i	Div _r	Nós
1	4	4	2	34
2	8	7	3	96
3	16	13	6	306
4	32	26	11	1154
5	64	52	21	4020

A evolução do refinamento da malha triangular utilizada no domínio computacional é apresentada na Figura 31.

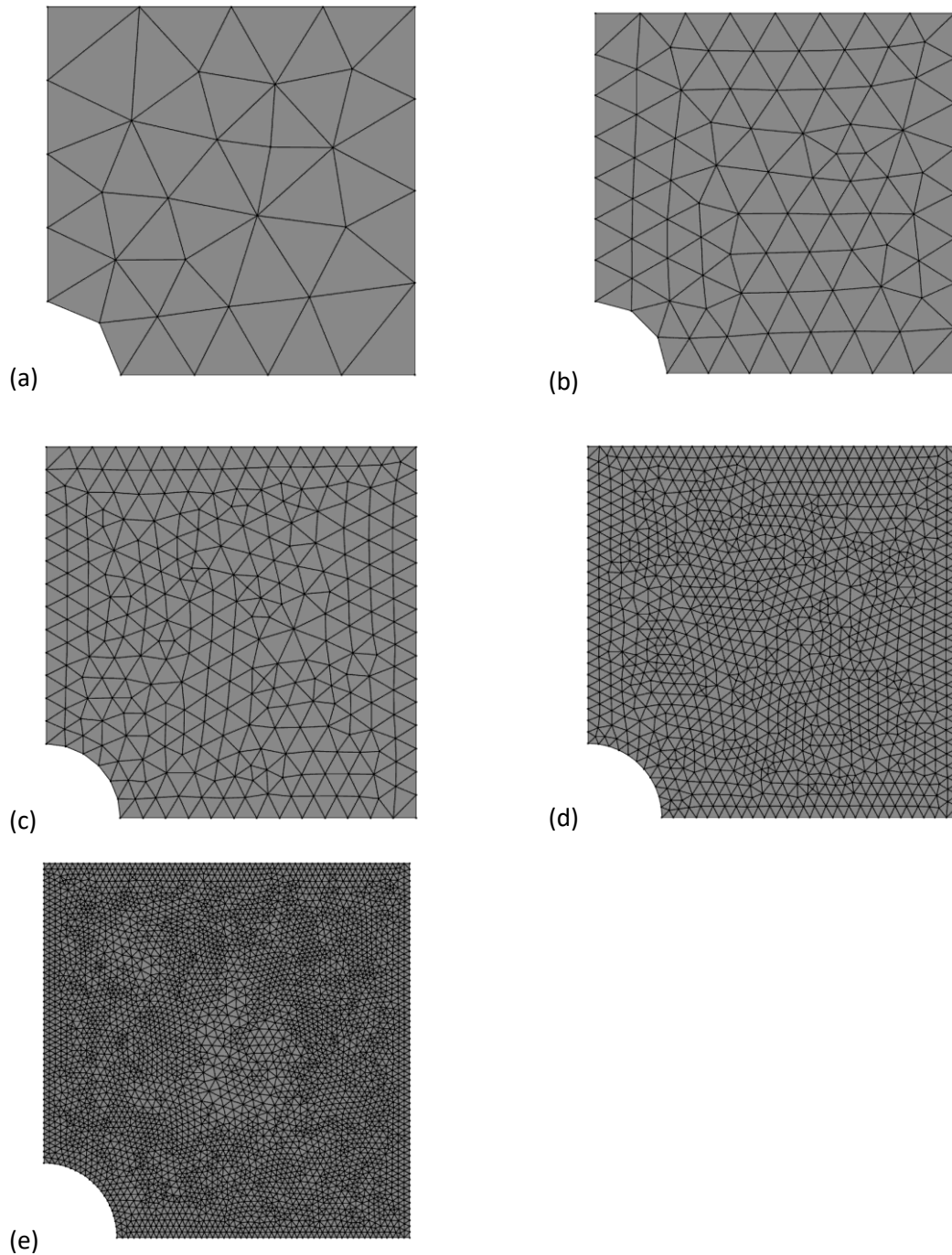


Figura 31- (a) malha triangular gerada de 34 nós (b) malha triangular gerada de 96 nós (c) malha triangular gerada de 306 nós (d) malha triangular gerada de 1154 nós (e) malha triangular gerada de 4020 nós

Com a finalidade de aferir o erro numérico e validar a precisão de aproximações obtidas pelos métodos FEM, RPIM e NNRPIM, é necessário confrontar os resultados do software FEMAS com uma solução de referência. No âmbito deste estudo, as componentes de tensão foram monitorizadas em pontos estratégicos da geometria para validar a convergência. Mais especificamente, analisou-se a tensão horizontal, σ_x , no ponto C e a tensão vertical, σ_y , no ponto D cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2- Coordenadas dos pontos de análise

Pontos	x [m]	y [m]
C	0	0,2
D	0,2	0

Numa placa com um orifício circular central sujeita a um estado de tensão uniaxial constante a validação é efetuada através da solução analítica clássica disponível na literatura [9]. Esta solução permite determinar o campo de tensões exato em qualquer ponto do domínio Ω . Considerando uma tensão aplicada de magnitude σ_0 , um raio do orifício circular a e um ponto definido pela sua distância radial r ao centro do orifício e pelo ângulo θ em relação ao eixo x , as componentes do campo de tensões são calculadas através das seguintes expressões:

$$\sigma_{xx}(\mathbf{x}) = \sigma_0 \cdot \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^2}{2r^2} \cos(4\theta) \right] \quad (59)$$

$$\sigma_{yy}(\mathbf{x}) = \sigma_0 \cdot \left[-\frac{a^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3a^2}{2r^2} \cos(4\theta) \right] \quad (60)$$

Em complemento à análise do campo de tensões, e com o intuito de realizar uma validação abrangente e robusta das formulações implementadas no software FEMAS, procedeu-se também à monitorização do campo de deslocamentos.

De forma a manter a consistência metodológica, a avaliação dos deslocamentos foi efetuada nos mesmos pontos geométricos utilizados para a análise de tensões (C e D). Foi avaliado o deslocamento vertical do ponto C, v_C , e o deslocamento horizontal no ponto D, u_D .

O campo de deslocamentos definido pelas componentes horizontal u e vertical v num referencial de coordenadas polares (r, θ) é rigorosamente descrito pelas seguintes equações:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_0 \cdot (1 + \bar{\nu})}{E} \cdot \left((1 - \bar{\nu}) \cdot \left(r + \frac{2a^2}{r} \right) \cos(\theta) + \left(\frac{a^2}{2r} - \frac{a^4}{2r^3} \right) \cos(3\theta) \right) \quad (61)$$

$$v(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_0 \cdot (1 + \bar{v})}{\bar{E}} \cdot \left(\left(-\bar{v} \cdot r - (1 - 2\bar{v}) \frac{a^2}{r} \right) \cdot \sin \theta + \left(\frac{a^2}{2r} - \frac{a^4}{2r^3} \right) \cos(3\theta) \right) \quad (62)$$

Sendo:

$$\bar{v} = \frac{v}{(1 + v)} \quad \wedge \quad \bar{E} = E(1 - v^2) \quad (63)$$

Os parâmetros específicos das funções de base radial (RBF) e as definições de conectividade nodal para os métodos RPIM e NNRPIM encontram-se resumidos na Tabela 3.

Tabela 3-Parâmetros numéricos

	RPIM	NNRPIM V1	NNRPIM V2
Conetividade nodal	Domínio de influência (16 nós)	Células de influência 1º grau	Células de influência de 2º grau
c	1,42	0,0001	0,0001
p	1,03	0,9999	0,9999
Base polinomial	Linear	Linear	Linear
Esquema de integração	1 ponto de integração por célula	1 ponto de integração por célula	1 ponto de integração por célula

Após a definição dos parâmetros numéricos e a execução das simulações para os diferentes níveis de discretização, os resultados foram compilados de forma a avaliar a trajetória de convergência de cada metodologia.

A análise da convergência numérica para os deslocamentos nos pontos C e D é apresentada na Figura 32 e na Figura 33, respetivamente.

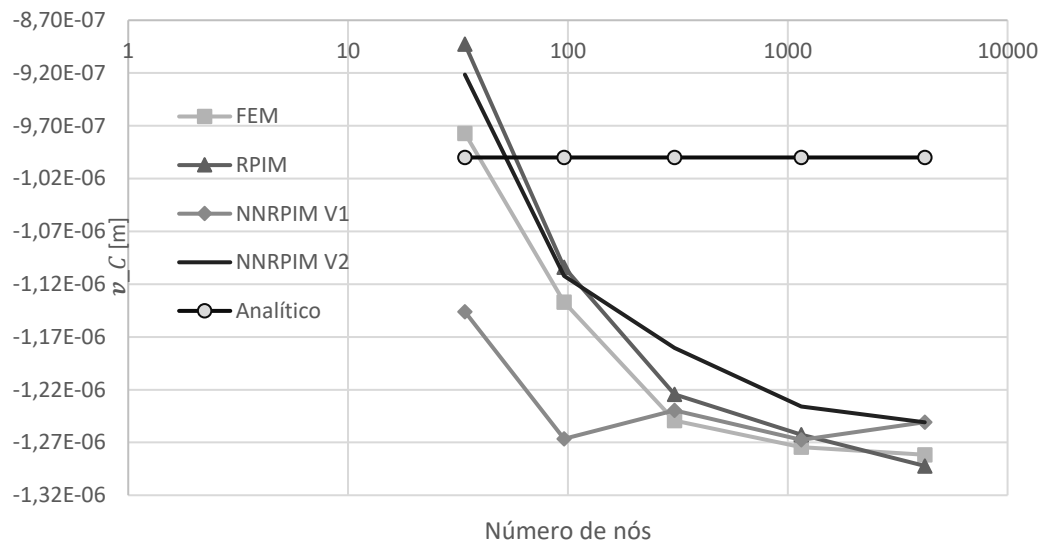


Figura 32- Deslocamento no ponto C

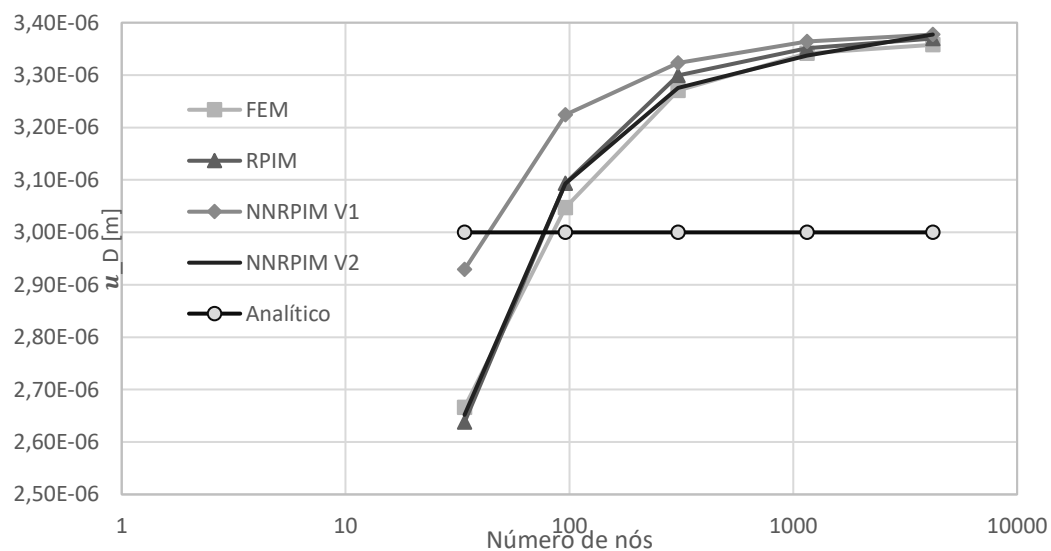


Figura 33- Deslocamento no ponto D

De uma forma geral, constata-se que todos os modelos numéricos testados convergem de forma consistente para uma solução estável à medida que o refinamento nodal aumenta. Conforme ilustrado na Figura 32 e Figura 33, as soluções aproximadas tendem para um patamar de equilíbrio que apresenta uma certa proximidade ao valor analítico.

Esta transição na taxa de convergência demonstra-se particularmente acentuada nas malhas de densidade intermédia, ponto a partir do qual os resultados numéricos iniciam a sua estabilização. Sobressai, contudo, o desempenho do método NNRPIM com células de influência de primeiro grau, que demonstra uma aproximação mais célere à solução de convergência logo nas discretizações iniciais, ao passo que os restantes métodos exigem uma densidade nodal superior para atingir um nível de estabilidade equivalente.

Prosseguindo com o estudo da convergência, a Figura 34 e Figura 35 ilustram a convergência das tensões em função do aumento da densidade nodal, confrontando os resultados obtidos pelos diferentes métodos numéricos com a solução analítica de referência.

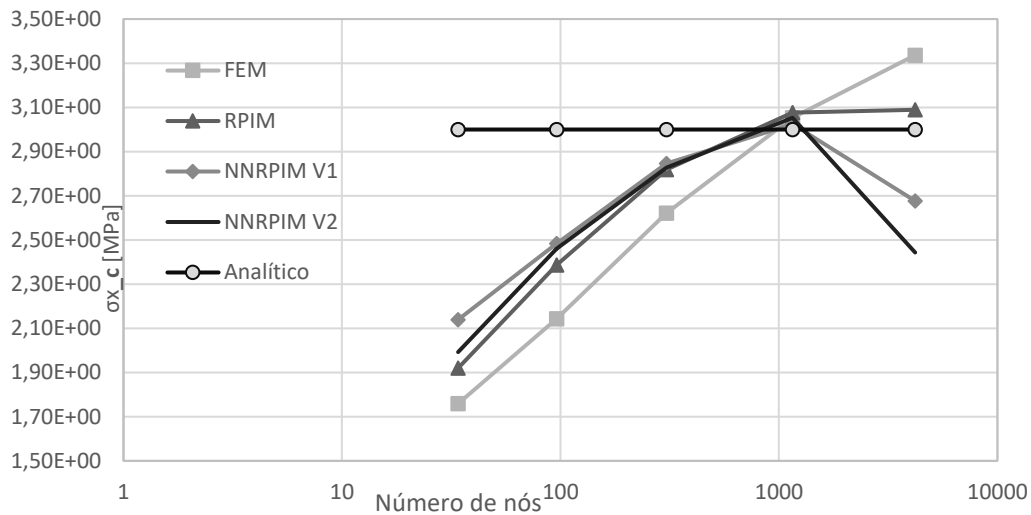


Figura 34- Tensão no ponto C

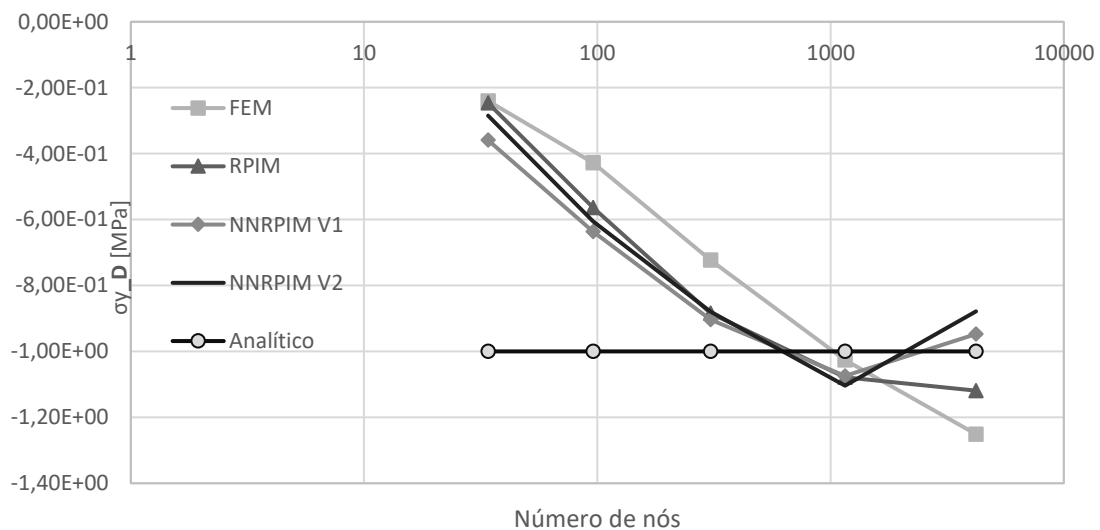


Figura 35- Tensão no ponto D

A avaliação das tensões revela um comportamento distinto do observado nos deslocamentos. Nas discretizações menos densas, nota-se uma dispersão menor entre os diferentes métodos. Contudo, à medida que o número de nós aumenta, as soluções do FEM e dos métodos sem malha RPIM e NNRPIM aproximam-se da solução analítica, estabilizando num patamar de convergência em torno dos 1154 nós. É importante notar que, mesmo no nível máximo de refinamento, subsiste um desvio residual em relação à solução teórica.

Um aspeto relevante surge na transição para a malha de 4020 nós, onde algumas variantes, nomeadamente o NNRPIM, apresentam uma ligeira inversão na trajetória de convergência.

Complementarmente à análise pontual de convergência, procedeu-se à visualização da distribuição dos deslocamentos e tensões ao longo de todo o domínio computacional através de mapas de cor. Para garantir a máxima fidelidade na representação, utilizou-se a malha mais refinada de 4020 nós em todas as metodologias comparadas.

A Figura 36 apresenta os campos obtidos pelo FEM. Seguidamente, a Figura 37 ilustra os resultados para o método RPIM. Por fim, apresentam-se na Figura 38 e na Figura 39 os mapas de cor relativos ao método NNRPIM, utilizando células de influência de primeiro e segundo grau, respetivamente.

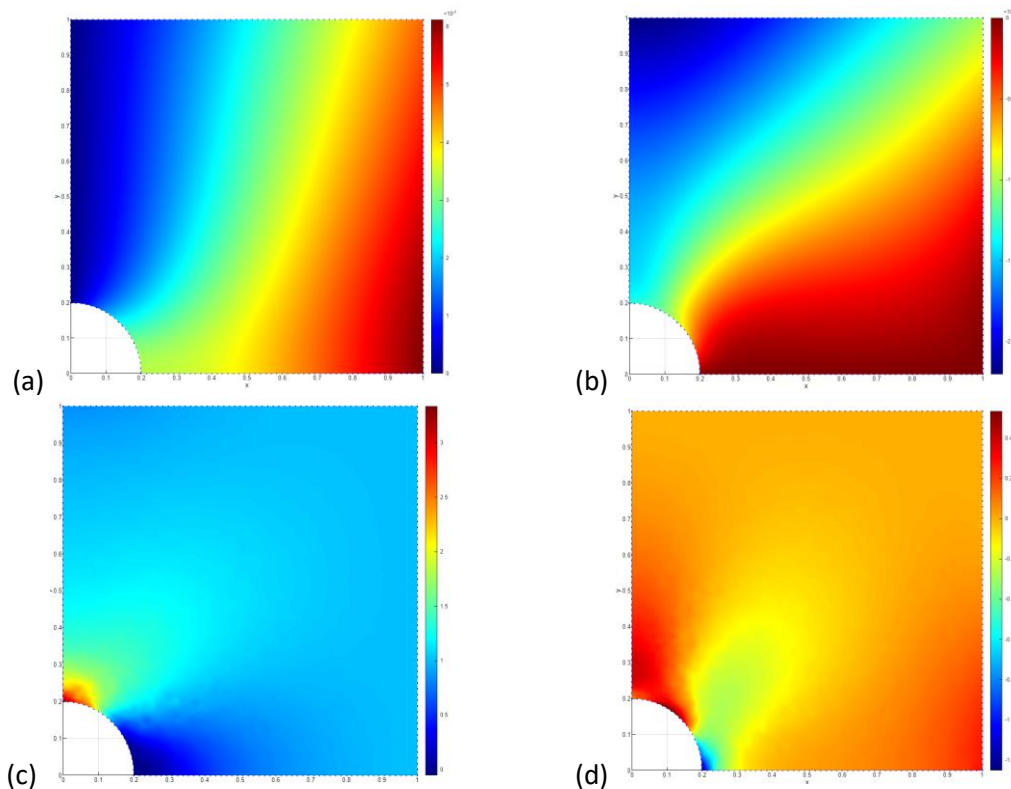


Figura 36- FEM a) $u_{\text{máx}}=6,1221\text{E}^{-6}$ m, $u_{\text{min}}=0$ m (b) $v_{\text{máx}}=0$ m, $v_{\text{min}}=-2,2000\text{E}^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_{\text{máx}}}=3,3365$ MPa, $\sigma_{x_{\text{min}}}=-0,0525$ MPa (d) $\sigma_{y_{\text{máx}}}=0,5348$ MPa, $\sigma_{y_{\text{min}}}=-1,2511$ MPa

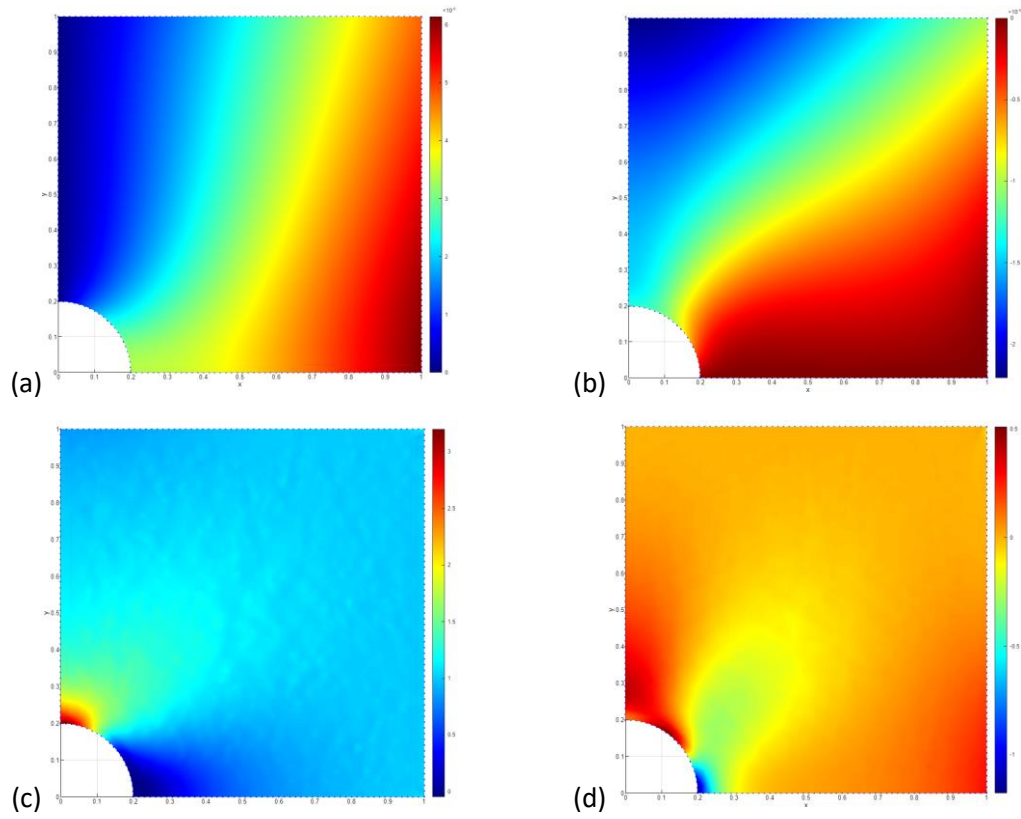


Figura 37- RPIM a) $u_{\text{máx}}=6,1455\text{E}^{-6}$ m, $u_{\text{min}}=0$ m(b) $v_{\text{máx}}=0$ m, $v_{\text{min}}=-2,2000\text{E}^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_máx}=3,1996$ MPa, $\sigma_{x_min}=-0,04638$ MPa (d) $\sigma_{y_máx}=0,5113$ MPa, $\sigma_{y_min}=-1,1768$ MPa

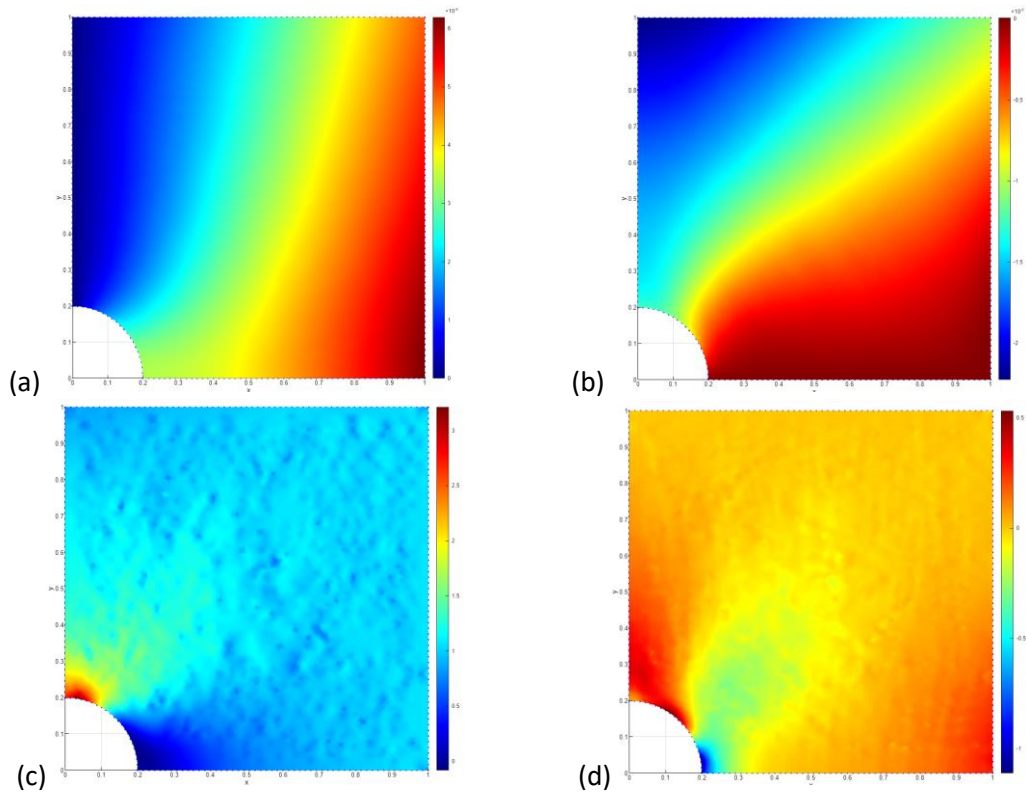


Figura 38- NNRPIM V1 a) $u_{\text{máx}}=6,1919\text{E}^{-6}$ m, $u_{\text{min}}=0$ m(b) $v_{\text{máx}}=6,3400\text{E}^{-9}$ m, $v_{\text{min}}=-2,2000\text{E}^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_máx}=3,2116$ MPa, $\sigma_{x_min}=-0,0801$ MPa (d) $\sigma_{y_máx}=0,5323$ MPa, $\sigma_{y_min}=-1,1112$ MPa

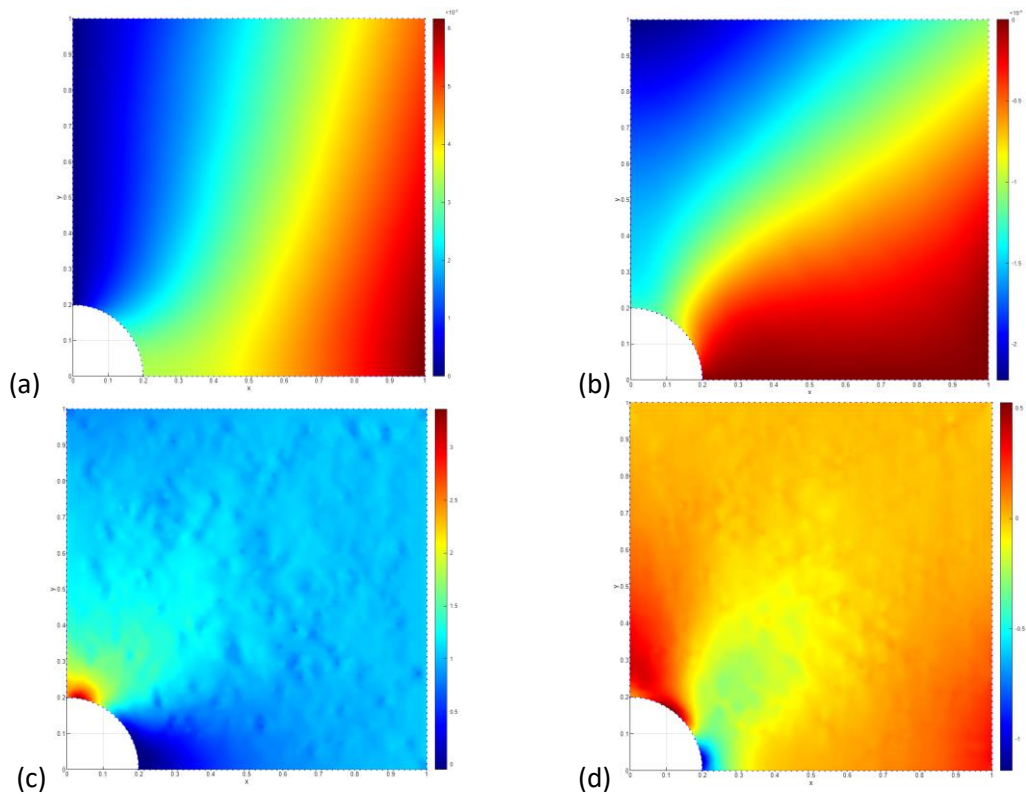


Figura 39- NNRPIM V2 a) $u_{\text{máx}}=6,1683\text{E}^{-6}$ m, $u_{\text{min}}=0$ m (b) $v_{\text{máx}}=4,8654\text{E}^{-9}$ m, $v_{\text{min}}=-2,2217\text{E}^{-6}$ m (c) $\sigma_{x_máx}= 3,3624$ MPa, $\sigma_{x_min}= -0,0459$ MPa (d) $\sigma_{y_máx}= 0,5253$ MPa, $\sigma_{y_min}= -1,1424$ MPa

No que diz respeito aos campos de deslocamento horizontal e vertical, a análise confirma uma concordância entre os métodos analisados. A distribuição de cores revela que tanto o FEM como as variantes dos métodos sem malha RPIM e NNRPIM conseguem capturar com precisão a tendência de comportamento da estrutura.

Relativamente à distribuição das tensões, as diferenças entre os métodos tornam-se mais evidentes. No que diz respeito à localização das zonas críticas, os mapas de cores permitem identificar claramente os fenómenos de concentração de tensão impostos pela geometria e pelas condições de fronteira. É demonstrado que as zonas de maior tensão localizam-se junto aos pontos de maior descontinuidade geométrica, especificamente na periferia superior do furo central.

Ao comparar os valores máximos registados, está evidenciado que o FEM apresenta o valor mais alto para a tensão, atingindo em y o valor de $0,5348$ MPa, superior a ambas a variantes do NNRPIM e do RPIM.

Embora a literatura aponte que os métodos sem malha podem gerar campos de tensão mais suaves comparativamente ao FEM [7, 9], os testes de convergência revelam uma aparente contradição, em linha com o reportado na literatura [11, 14]. Segundo a literatura esta discrepância está diretamente ligada ao tipo de integração adotado, verificando-se que uma quadratura de 2×2 Gauss-Legendre consegue, de facto, suavizar os campos de tensão ao invés de utilizar um único ponto de integração [11, 14].

Esta tendência acentua-se consideravelmente com o NNRPIM V1, como demonstrado na Figura 38 e Figura 39, uma vez que esta variante envolve um menor número de nós nos domínios de influência e adota um ponto de integração único em cada sub-quadrilátero da célula de Voronoi [11, 14].

4.2. Exemplo da mecânica da fratura

Para a análise numérica no âmbito da mecânica da fratura linear elástica, considerou-se um domínio retangular bidimensional com dimensões de 3,0 m de comprimento por 1,0 m de altura. O modelo inclui uma fenda vertical, apresentada na Figura 40 pela letra A, localizada na face inferior da placa. A geometria da fenda é definida pela sua altura a e pela sua posição horizontal d , medida a partir da origem do referencial, conforme ilustrado na Figura 40.

Com o intuito de avaliar o impacto da geometria da fenda na integridade estrutural e no comportamento mecânico da peça sob análise, delineou-se um estudo paramétrico. As variações consideradas para os parâmetros geométricos a e d foi respetivamente $a \in [0,1;0,2]$ e $d \in [1,0;1,5;2,0]$.

Para a caracterização do material, considerou-se o módulo de elasticidade de $E = 1 \times 10^9$ Pa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A tensão de cedência foi definida em 1×10^6 Pa para estabelecer o limite do regime elástico. A análise é complementada pela aplicação de uma força externa vertical F de 1 N sobre a peça, a qual apresenta uma espessura constante de 0,001m.

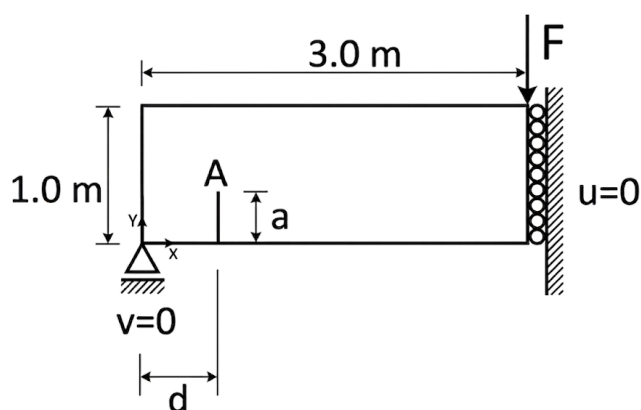


Figura 40- Esquema do exemplo de estudo da mecânica da fratura

Na Figura 41, encontram-se ilustradas as malhas numéricas concebidas para a totalidade dos cenários de estudo. Através desta representação visual, é possível observar a discretização do domínio aplicada de forma consistente e uniforme em todos os casos analisados, uma estratégia que se revela fundamental para assegurar a comparabilidade dos resultados e a integridade da base computacional necessária à execução das simulações. Esta uniformidade na densidade e na distribuição dos elementos e nós garante que as variações observadas na resposta mecânica da estrutura derivem exclusivamente das alterações paramétricas da geometria da fenda e não de discrepâncias na resolução da malha, salvaguardando assim a

precisão e a fiabilidade das conclusões retiradas para os diferentes métodos de simulação numérica.

No que respeita à densidade da discretização, importa especificar as características quantitativas das malhas ilustradas, uma vez que estas definem a resolução do problema numérico. Assim, nas configurações apresentadas na Figura 41 (a), Figura 41 (b) e Figura 41 (c) a malha é constituída por um total de 1283 nós e 2400 elementos. Por outro lado, para os cenários detalhados na Figura 41 (d), Figura 41 (e) e Figura 41 (f) é ilustrado um ajuste pontual na rede de discretização, a qual passa a integrar 1285 nós, mantendo-se contudo, o número de 2400 elementos.

A análise numérica foi conduzida através do Método dos Elementos Finitos (FEM) e dos métodos sem malha RPIM e NNRPIM, empregando células de influência de primeiro e segundo grau. Para os métodos RPIM e NNRPIM, os parâmetros das funções de base radial (RBF) e as definições de conectividade nodal basearam-se nos valores adotados na análise de convergência do exemplo anterior, detalhados na Tabela 3 do capítulo 4.1.

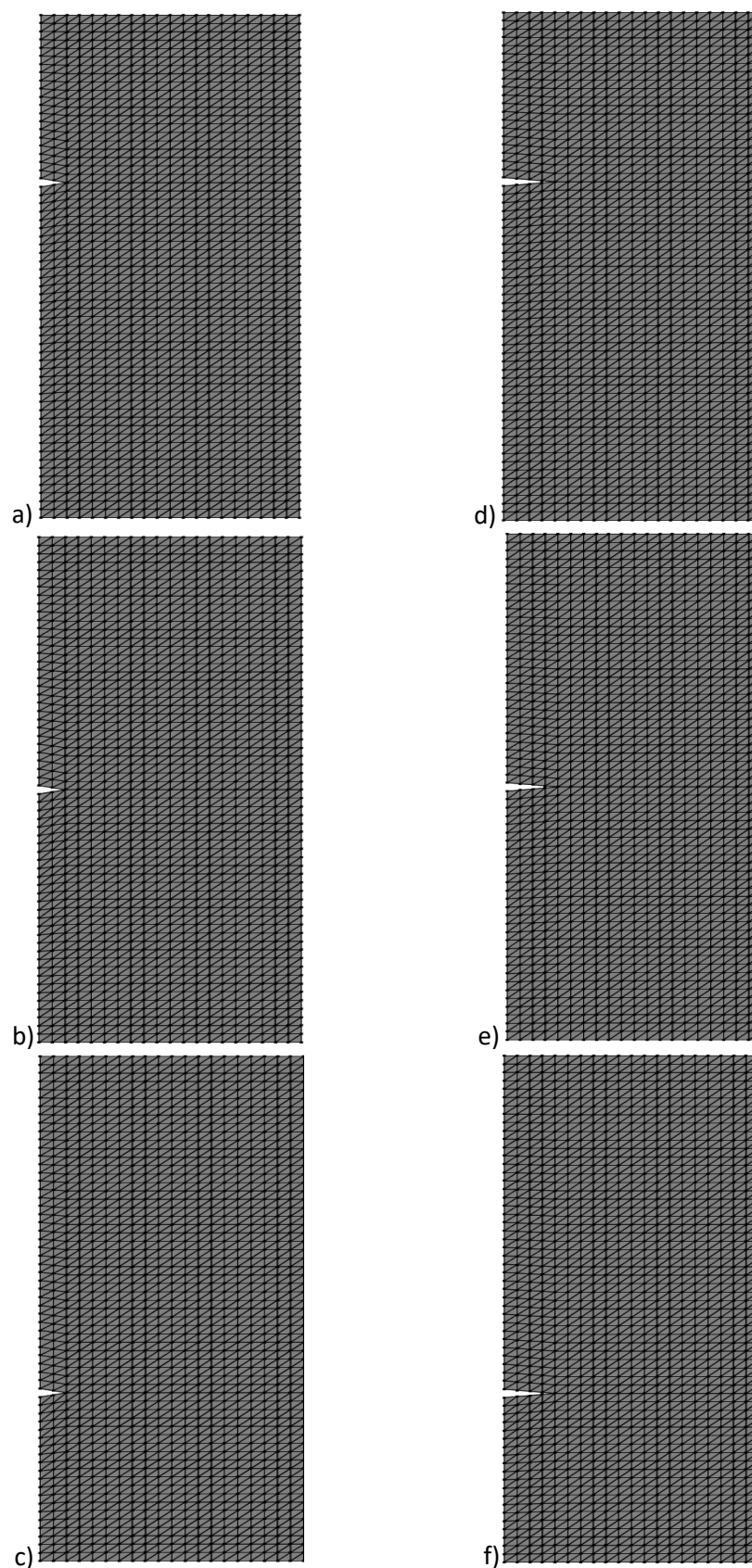


Figura 41- Malhas apresentando a variação da geometria e posicionamento da fenda inicial (a) $a=0,1$ m, $d=1,0$ m; (b) $a=0,1$ m, $d=1,5$ m; (c) $a=0,1$ m, $d=2,0$ m; (d) $a=0,2$ m, $d=1,0$ m; (e) $a=0,2$ m, $d=1,5$ m; (f) $a=0,2$ m, $d=2,0$ m;

Após a definição das malhas de discretização, o modelo computacional foi completado com a imposição das condições de fronteira e de carregamento previamente detalhadas. Com o domínio devidamente restringido e as solicitações aplicadas, procedeu-se à execução das simulações numéricas para a totalidade dos cenários em estudo.

Concluídas as simulações numéricas foram obtidos para os seis casos em estudo a trajetória de propagação da fratura correlacionando as coordenadas x e y ao longo do domínio como representado na Figura 42. A evolução da fenda foi monitorizada até ser atingida aproximadamente 70% da altura total da peça original.

A análise detalhada das trajetórias de propagação da fratura, apresentadas na Figura 42, constitui um elemento fundamental para a validação dos modelos numéricos implementados, permitindo uma comparação direta entre os mesmos. Conforme observado no conjunto de gráficos em análise, os resultados foram estruturados de forma a evidenciar a influência da posição inicial da fenda. Esta disposição permite verificar que, independentemente da metodologia numérica adotada, a trajetória da fratura exibe uma sensibilidade clara à geometria inicial do problema. Nos casos onde a fenda se inicia a uma cota inferior, é notório um desvio curvilíneo mais imediato e acentuado em direção à zona de aplicação da condição de fronteira da carga vertical externa, enquanto os casos com uma altura inicial da fenda de 0,2 m apresentam uma fase inicial de propagação com uma inclinação mais estável.

No que diz respeito à comparação entre as diferentes metodologias é notável a concordância entre os métodos sem malha e a solução obtida através do FEM. Em todos os seis cenários simulados, as curvas de propagação encontram-se próximas, o que atesta a eficácia dos parâmetros das funções de base radial (RBF) e das definições de conectividade nodal adotadas. No entanto, apesar desta proximidade geral entre as curvas das trajetórias de propagação da fratura em análise, é possível identificar ainda padrões de comportamento distintos entre as metodologias numéricas aplicadas. No que concerne à precisão geométrica, é possível observar que o método RPIM e a variante do método NNRPIM com células de influência de primeiro grau apresentam uma convergência de resultados particularmente elevada entre si, aproximando-se mutuamente de forma mais vincada do que em relação às restantes variantes.

Um fenómeno de particular relevância manifesta-se à medida que a extremidade da fratura progride em direção à zona de aplicação da força externa. Conforme se depreende da análise da Figura 42, verifica-se um afastamento progressivo entre a solução obtida pelo FEM e as soluções obtidas pelas metodologias sem malha, intensificando-se à medida que a extremidade da fratura se aproxima desta região crítica. Ao contrário do FEM, os métodos RPIM e NNRPIM demonstram uma sensibilidade distinta à proximidade do ponto de aplicação da carga, o que culmina numa divergência morfológica mais acentuada durante as iterações finais do processo de simulação. Esta discrepância sugere que as funções de forma globais, intrínsecas aos métodos sem malha, captam de modo mais refinado as variações do campo de tensões impostas pela carga pontual, contrastando com a rigidez local característica da formulação baseada em elementos.

Este fenómeno de afastamento do FEM em relação aos métodos sem malha é ainda mais evidente nos exemplos que a fenda imposta inicialmente toma o valor da distância d de 2,0 m.

Verifica-se que, apesar da forte concordância inicial entre todas as metodologias, a proximidade da zona de aplicação da força atua como um elemento perturbador que evidencia as diferenças fundamentais entre a interpolação polinomial do FEM e a aproximação baseada em funções de base radial (RBF) dos métodos RPIM e NNRPIM

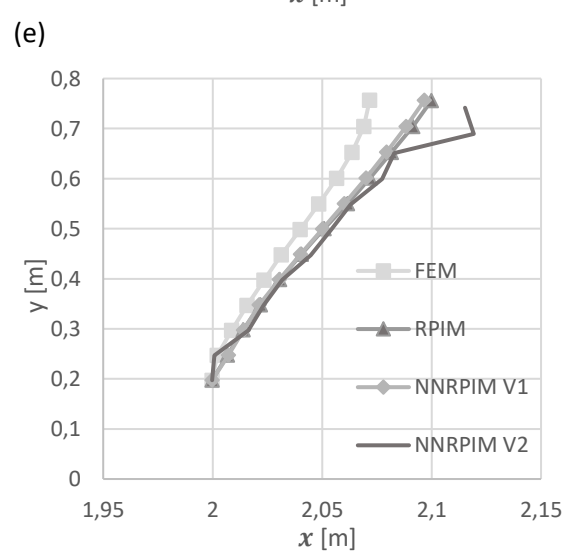
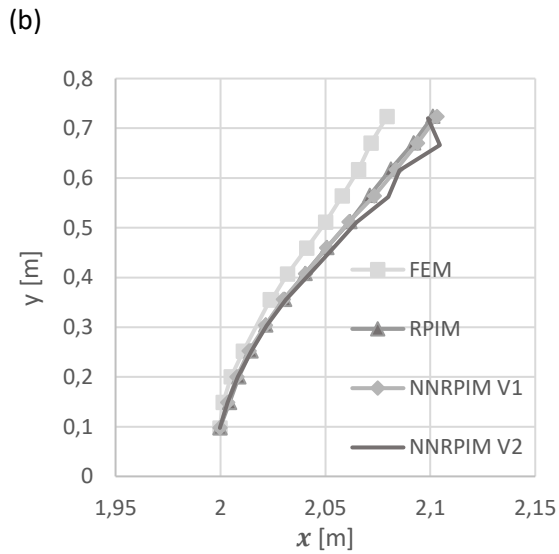
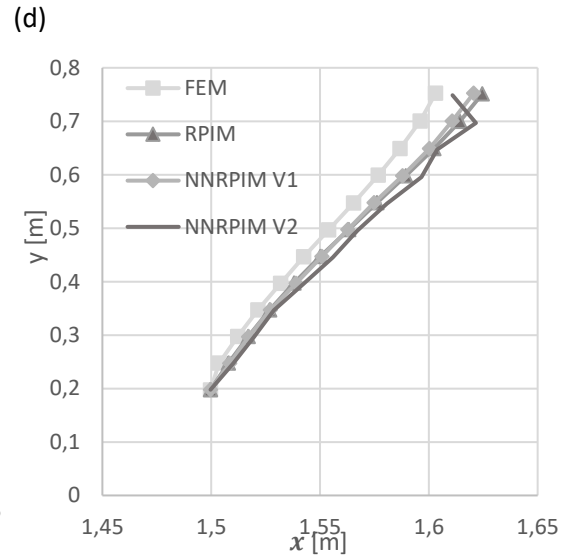
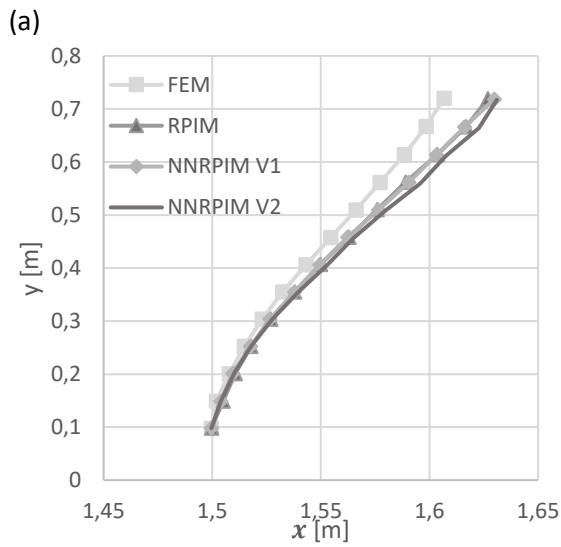
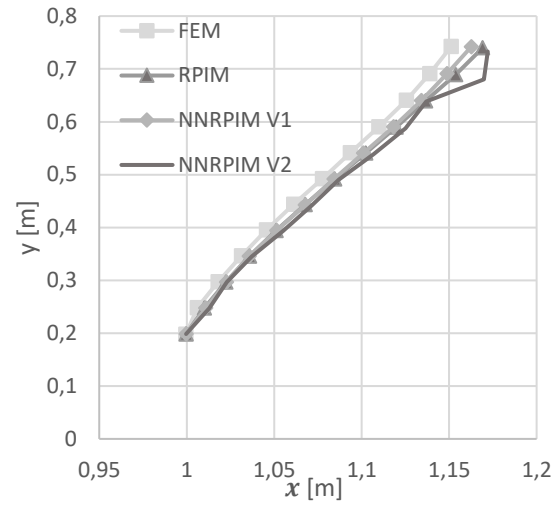
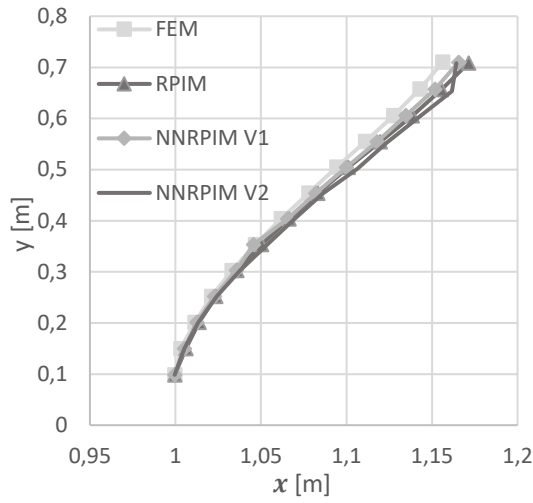


Figura 42- (a) Gráfico x-y em que $a=0,1$ m e $d=1,0$ m (b) Gráfico x-y em que $a=0,1$ m e $d=1,5$ m (c) Gráfico x-y em que $a=0,1$ m e $d=2,0$ m (d) Gráfico x-y em que $a=0,2$ m e $d=1,0$ m (e) Gráfico x-y em que $a=0,2$ m e $d=1,5$ m (f) Gráfico x-y em que $a=0,2$ m e $d=2,0$ m

A interpretação visual detalhada da distribuição do campo de tensões assume-se como uma componente fundamental, permitindo validar a resposta do modelo numérico perante os diversos cenários de fratura analisados. Com o intuito de ilustrar este fenómeno, apresenta-se a evolução progressiva das tensões em três estágios temporais distintos, os quais correspondem, respetivamente, a aproximadamente 20%, 50% e 70% da altura do domínio inicial estabelecido para os diferentes métodos de simulação comparados. Esta metodologia de análise é aplicada e estendida à totalidade dos seis casos de estudo considerados, os quais se distinguem entre si através das variações paramétricas introduzidas tanto na posição horizontal como na cota vertical da fenda imposta inicialmente na estrutura.

A distribuição das tensões para o caso em que $d = 1,0$ m e $a = 0,1$ m é apresentada na Figura 43.

Ao analisar o estágio inicial de carregamento, é evidenciado que, independentemente do método de simulação adotado, os picos de concentração de tensões localizam-se tipicamente nas regiões onde são aplicadas as condições de fronteira. Este fenómeno revela a resposta imediata da estrutura aos estímulos mecânicos, evidenciando como os pontos de apoio e de introdução de carga funcionam como focos primários de acumulação de esforços antes mesmo de a fenda assumir um papel predominante na redistribuição global das tensões no domínio.

Quando a propagação da fratura alcança metade da altura do domínio inicial, é possível observar que a fenda descreve já uma trajetória curvilínea significativamente mais acentuada, orientando-se de forma clara em direção à região central da estrutura. Uma análise comparativa mais detalhada entre os diversos métodos revela que o Método dos Elementos Finitos (FEM) exibe uma mancha de tensões ligeiramente mais fragmentada, fenómeno este que se apresenta como um reflexo direto da sua natureza de discretização baseada em elementos.

Em sentido oposto, as metodologias sem malha, nomeadamente o RPIM e o NNRPIM, demonstram uma distribuição de tensões visivelmente mais contínua, fluida e suave ao longo do domínio, característica que se deve à natureza das funções de forma globais empregues nestas formulações. É ainda de notar que, nesta fase específica da simulação, tanto o NNRPIM com conectividade nodal de células de influência de primeiro grau como o RPIM apresentam resultados que se revelam muito próximos entre si. Esta concordância visual e numérica reveste-se de grande importância, uma vez que permite validar a estabilidade e a eficácia da conectividade nodal utilizada no desenvolvimento dos modelos

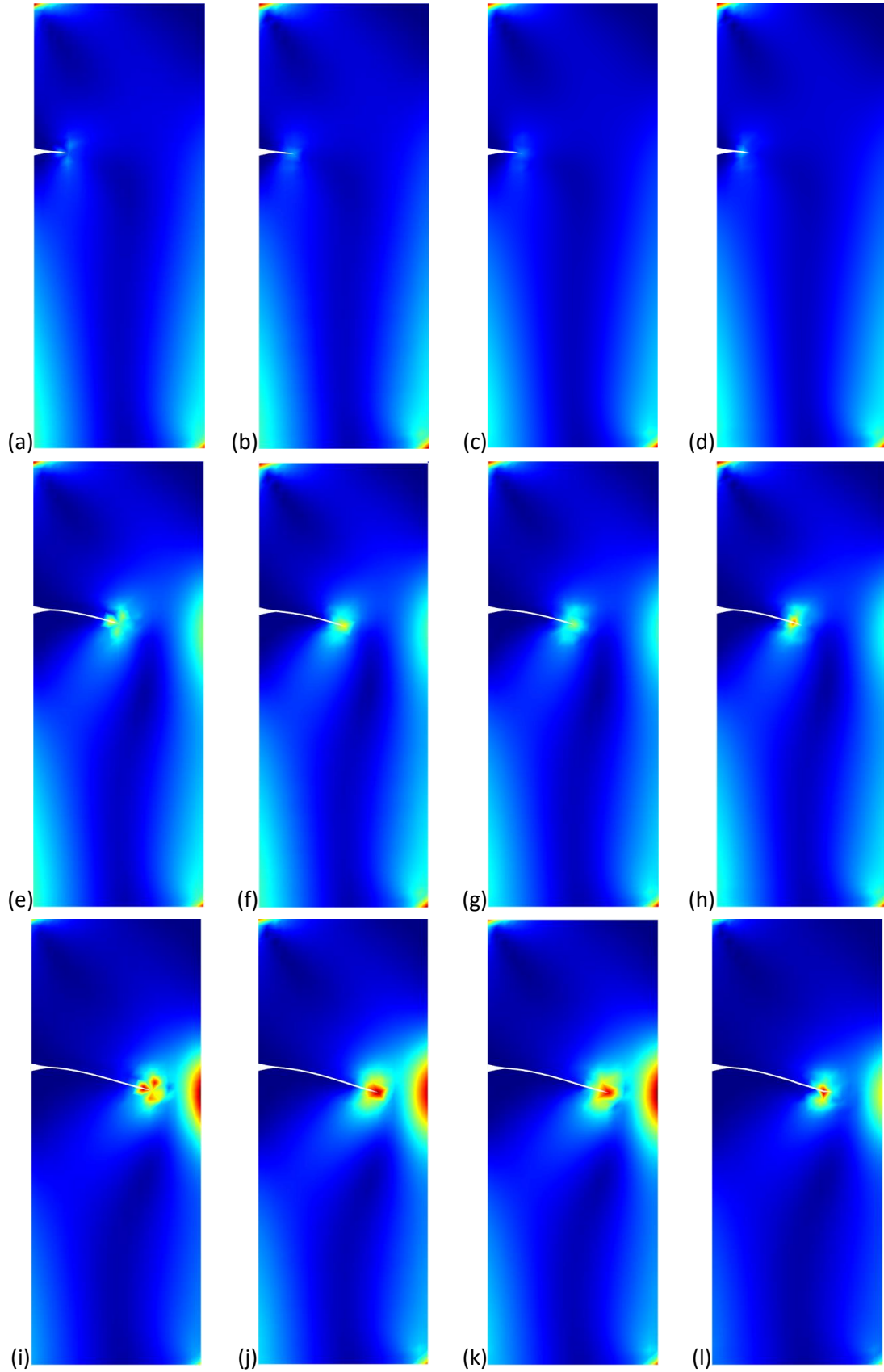


Figura 43- $d=1,0$ m e $a=0,1$ m FEM: (a) $a=0,2D$; (e) $a=0,5D$; (i) $a=0,7D$; RPIM : (b) $a=0,2D$; (f) $a=0,5D$; (j) $a=0,7D$; NNRPIM V1: (c) $a=0,2D$; (g) $a=0,5D$; (k) $a=0,7D$; NNRPIM V2: (d) $a=0,2D$; (h) $a=0,5D$; (l) $a=0,7D$

A investigação do segundo cenário de estudo, o qual se encontra definido por uma posição horizontal da fenda em $d=1,5$ m e uma cota inicial de $a=0,1$ m e é apresentado na Figura 44, permite evidenciar claramente como a localização estratégica da descontinuidade inicial condiciona, de modo determinante, os fenómenos de concentração e a subsequente redistribuição do campo de tensões ao longo de toda a estrutura. Em oposição ao observado no caso anterior relativamente ao campo de tensões é possível verificar que, numa fase inicial, este apresenta uma configuração marcadamente menos assimétrica, tal como se pode aferir através da análise pormenorizada dos mapas de cores correspondentes ao estágio de 20% da altura inicial.

À medida que o processo de simulação evolui para os estágios subsequentes de 50% e 70% da altura do domínio, é perceptível que a trajetória da fratura, não obstante a sua posição inicialmente centrada, mantém uma tendência persistente de curvatura orientada ao ponto de aplicação da carga externa. Contudo, devido ao maior espaço físico disponível para o pleno desenvolvimento e expansão do campo de tensões nesta configuração, as metodologias sem malha nomeadamente o RPIM e o NNRPIM exibem uma transição de gradientes de esforço que se revela ainda mais suave e contínua do que aquela que foi documentada no primeiro caso de estudo. Paralelamente, verifica-se que o método NNRPIM, configurado com células de influência de primeiro grau, e o método RPIM continuam a apresentar uma concordância de resultados. Este elevado grau de correlação visual e numérica permite verificar, com segurança, a premissa da estabilidade da conectividade nodal utilizada, reforçando a fiabilidade destes algoritmos na modelação de fenómenos de fratura.

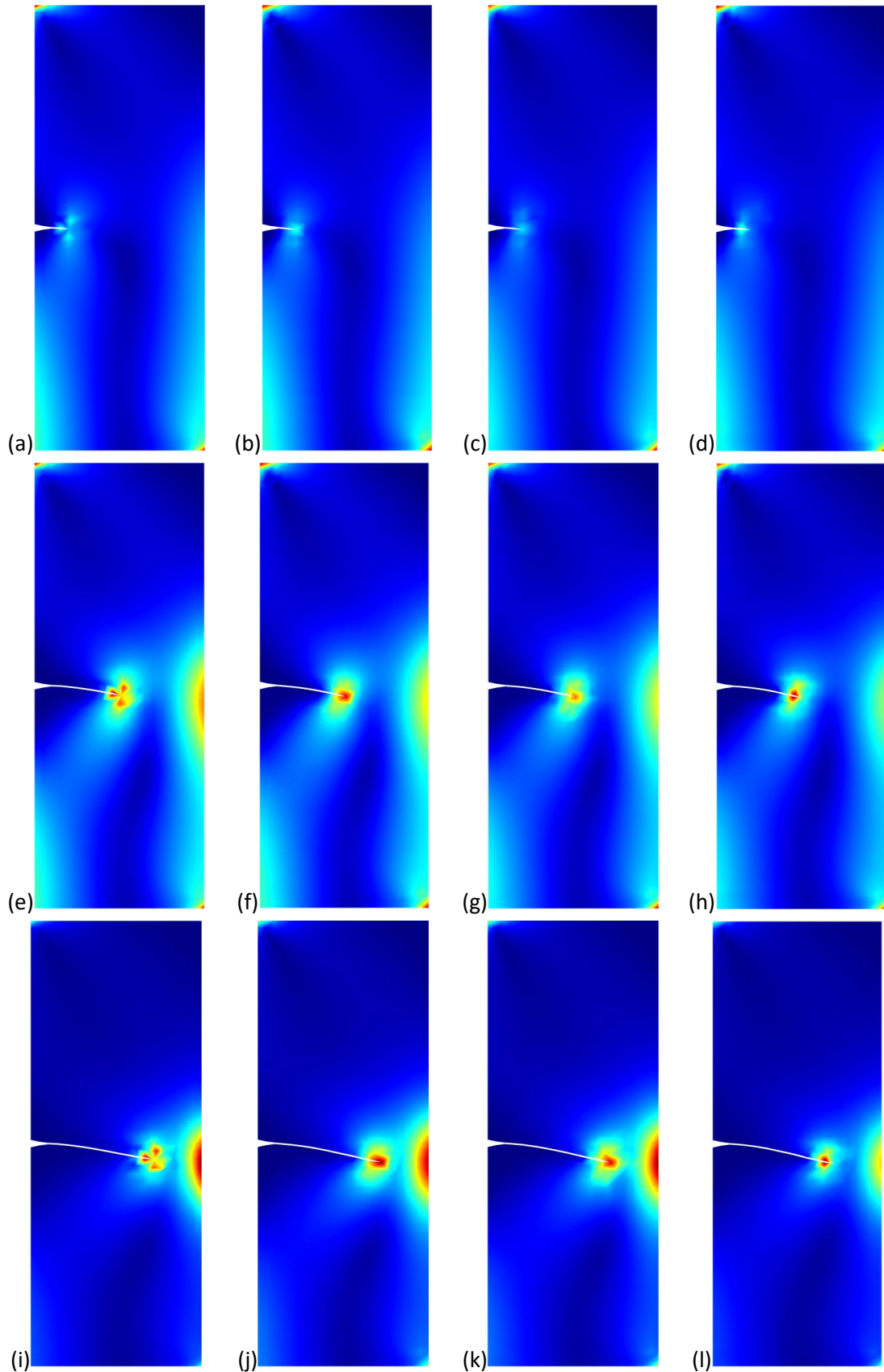


Figura 44- $d=1,5$ m e $a=0,1$ m FEM: (a) $a=0,2D$; (e) $a=0,5D$; (i) $a=0,7D$; RPIM : (b) $a=0,2D$; (f) $a=0,5D$; (j) $a=0,7D$; NNRPIM V1: (c) $a=0,2D$; (g) $a=0,5D$; (k) $a=0,7D$; NNRPIM V2: (d) $a=0,2D$; (h) $a=0,5D$; (l) $a=0,7D$

A investigação pormenorizada relativa ao terceiro cenário de estudo, apresentado na Figura 45 e definido pela posição horizontal da fenda em $d=2,0$ m e por uma cota inicial de $a=0,1$ m, oferece uma perspetiva crucial no que respeita à influência exercida pela proximidade física entre a fratura inicial e a zona de aplicação direta da força externa. Sob esta configuração específica, é perceptível que o campo de tensões inicial exibe uma assimetria com uma notoriedade significativamente mais acentuada, tal como acontece de certa forma no caso inicial deste estudo. Esta distribuição desigual de esforços reflete a forte interação mecânica que ocorre entre a descontinuidade geométrica e o ponto de introdução de carga, resultando numa distorção do campo de tensões que condiciona, desde os instantes precoces da simulação, o comportamento estrutural e a subsequente resposta do domínio perante a propagação da fratura.

Esta configuração promove ainda uma aceleração no processo de propagação da fratura, forçando-a a adotar uma trajetória que converge mais rapidamente em direção ao ponto de aplicação da carga externa. Deste modo, é possível ter a perceção que a morfologia marcadamente curvilínea, observada anteriormente, perde alguma parte da sua expressividade nesta análise, evoluindo gradualmente para um perfil com características progressivamente mais retilíneas. Esta transição morfológica decorre diretamente da alteração na orientação do campo das tensões principais na vizinhança imediata da fenda.

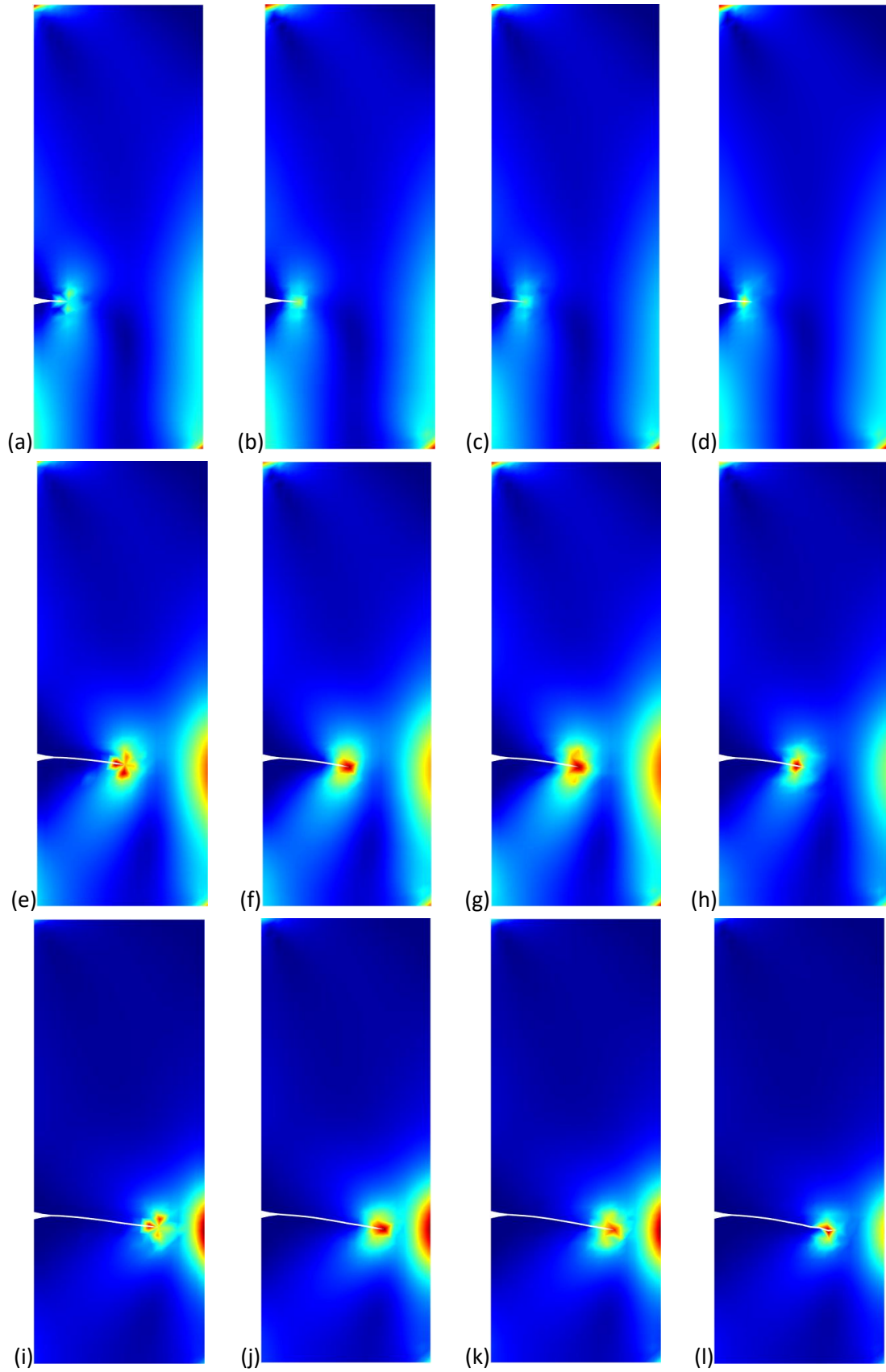


Figura 45- $d=2,0$ m e $a=0,1$ m FEM: (a) $a=0,2D$; (e) $a=0,5D$; (i) $a=0,7D$; RPIM : (b) $a=0,2D$; (f) $a=0,5D$; (j) $a=0,7D$; NNRPIM V1: (c) $a=0,2D$; (g) $a=0,5D$; (k) $a=0,7D$; NNRPIM V2: (d) $a=0,2D$; (h) $a=0,5D$; (l) $a=0,7D$

No seguimento da discussão detalhada dos resultados obtidos, introduzem-se agora os restantes casos de estudo apresentados na Figura 46, Figura 47 e Figura 48, nos quais a cota inicial da fenda sofre um incremento para $a = 0,2$ m, preservando-se, no entanto, as variações de posicionamento horizontal em $d = 1,0$ m, $1,5$ m e $2,0$ m, respetivamente. Esta nova série de simulações numéricas visa investigar aprofundadamente a influência determinante da geometria da fratura imposta inicialmente na resposta mecânica global do domínio, permitindo aferir com maior precisão como uma fenda de maior extensão condiciona a concentração de tensões. Ao ampliar a dimensão da fratura inicial, observa-se a forma como esta alteração paramétrica acelera os mecanismos de instabilidade e precipita a rotura estrutural, oferecendo um contraste elucidativo face aos cenários de menor profundidade discutidos anteriormente.

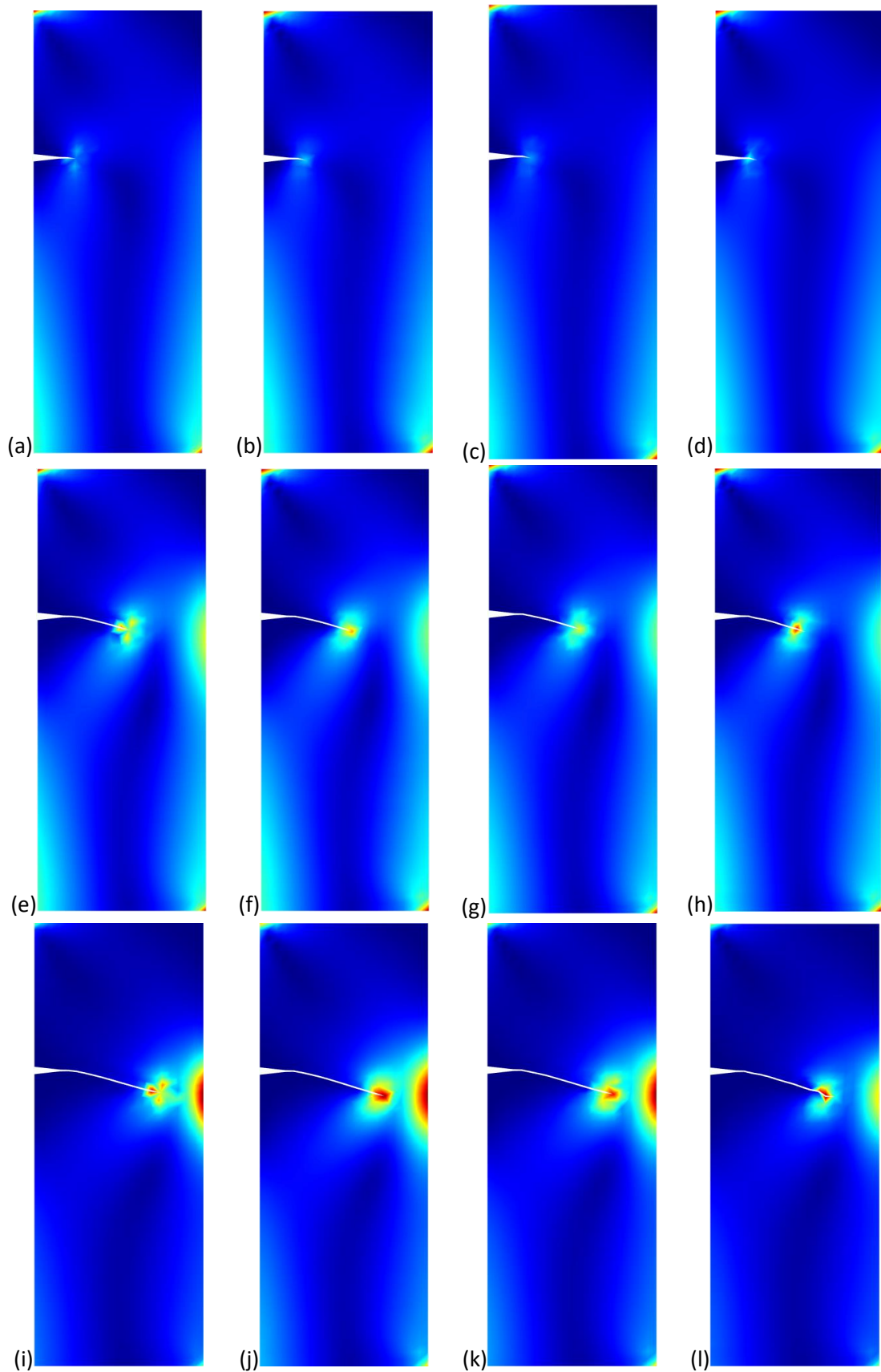


Figura 46- $d=1,0$ m e $a=0,2$ m FEM: (a) $a=0,2D$; (e) $a=0,5D$; (i) $a=0,7D$; RPIM : (b) $a=0,2D$; (f) $a=0,5D$; (j) $a=0,7D$; NNRPIM V1: (c) $a=0,2D$; (g) $a=0,5D$; (k) $a=0,7D$; NNRPIM V2: (d) $a=0,2D$; (h) $a=0,5D$; (l) $a=0,7D$

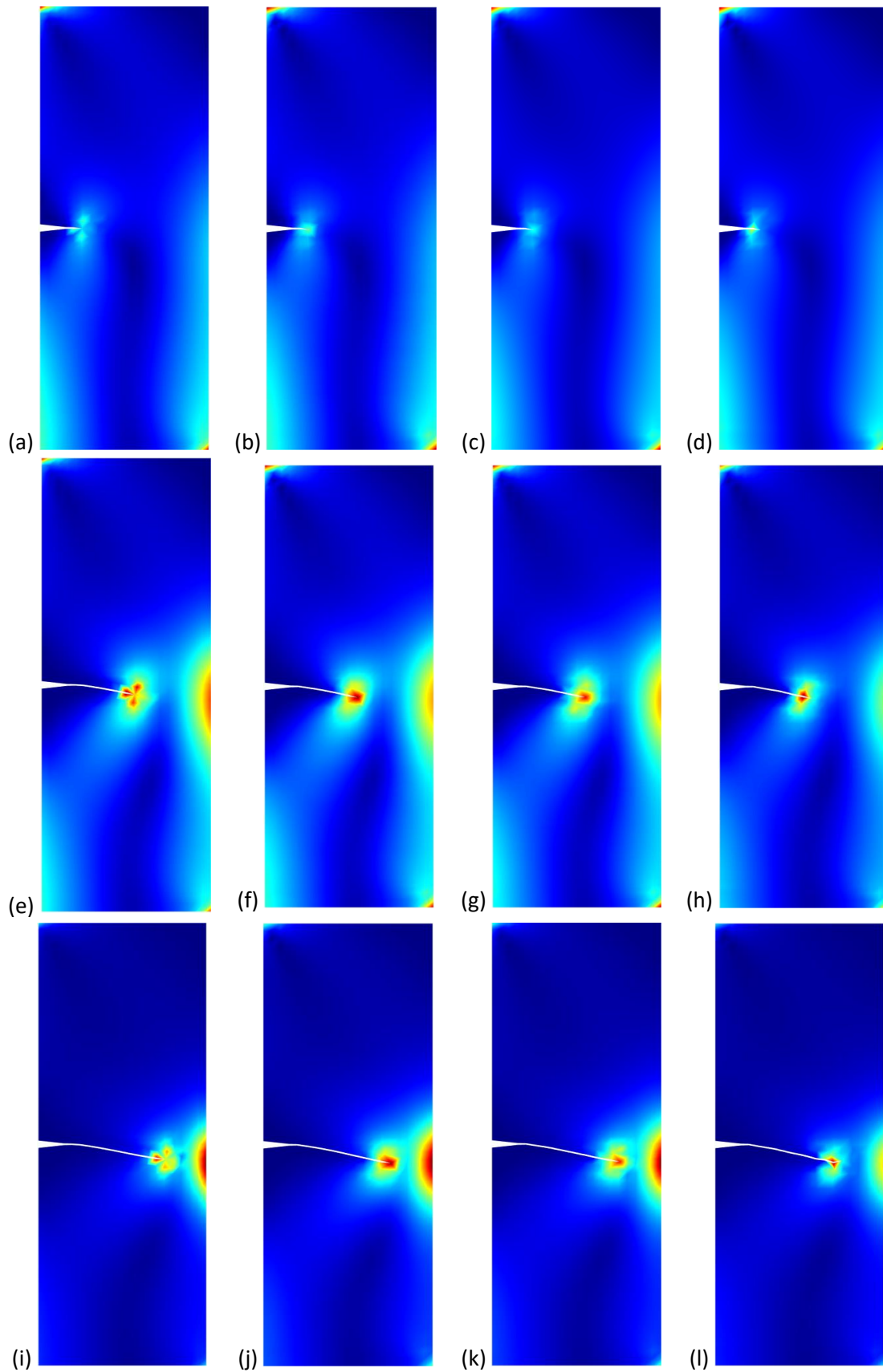


Figura 47- $d=1,5$ m e $a=0,2$ m FEM: (a) $a=0,2D$; (e) $a=0,5D$; (i) $a=0,7D$; RPIM : (b) $a=0,2D$; (f) $a=0,5D$; (j) $a=0,7D$; NNRPIM V1: (c) $a=0,2D$; (g) $a=0,5D$; (k) $a=0,7D$; NNRPIM V2: (d) $a=0,2D$; (h) $a=0,5D$; (l) $a=0,7D$

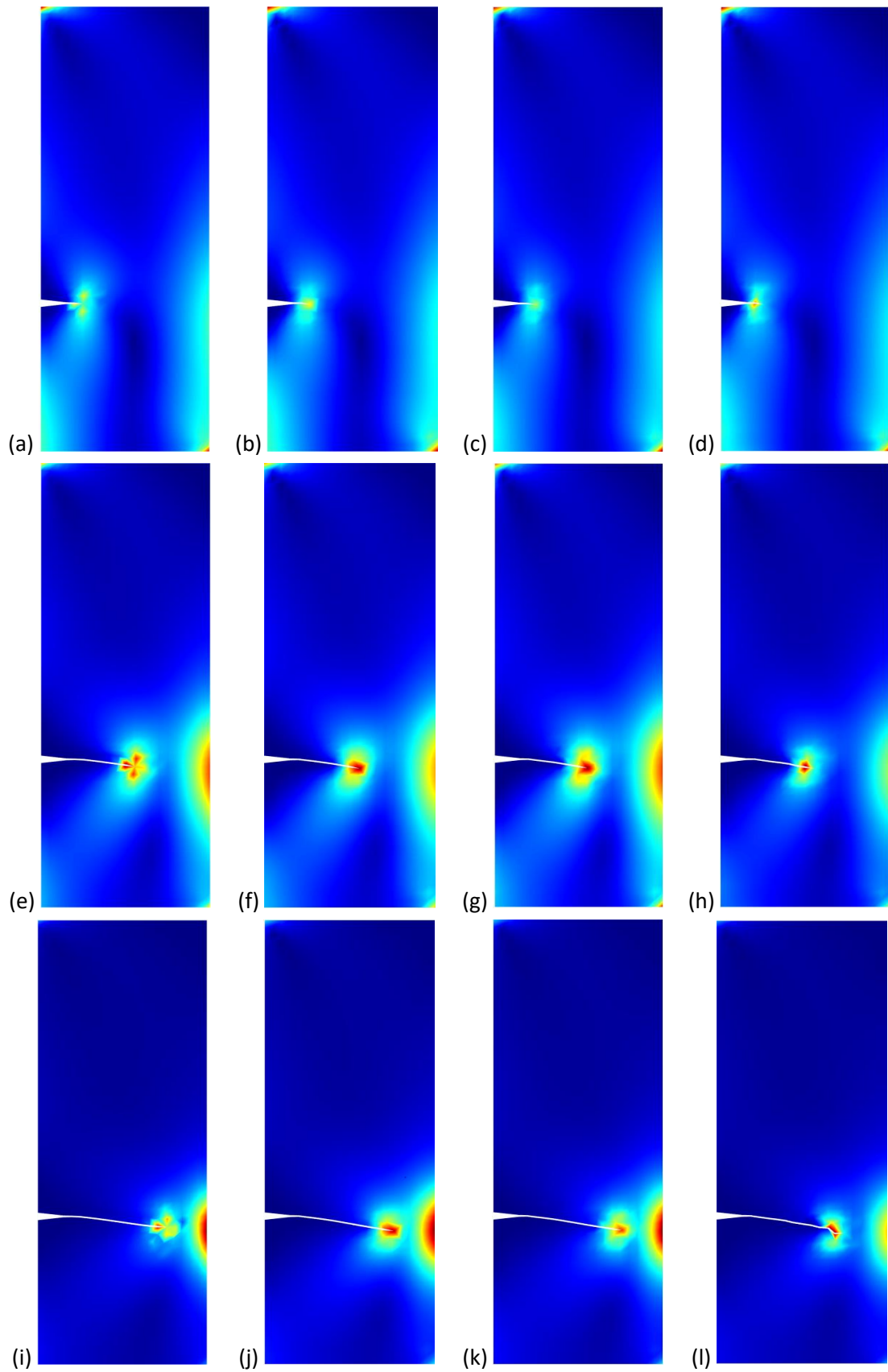


Figura 48- $d=2,0$ m e $a=0,2$ m FEM: (a) $a=0,2D$; (e) $a=0,5D$; (i) $a=0,7D$; RPIM : (b) $a=0,2D$; (f) $a=0,5D$; (j) $a=0,7D$; NNRPIM V1: (c) $a=0,2D$; (g) $a=0,5D$; (k) $a=0,7D$; NNRPIM V2: (d) $a=0,2D$; (h) $a=0,5D$; (l) $a=0,7D$

No âmbito da análise dos cenários quatro, cinco e seis, observa-se uma alteração na resposta mecânica do corpo decorrente do aumento da profundidade inicial da fenda para $a = 0,2$ m. Este incremento na descontinuidade geométrica inicial traduz-se, de forma imediata, numa redução da secção resistente da placa, o que intensifica a magnitude dos campos de tensão na ponta da fenda desde os estágios iniciais de carregamento. Ao comparar estes resultados com a primeira série de ensaios em que $a=0,1$ m, torna-se evidente que a severidade da singularidade de tensões é substancialmente superior, reduzindo a fase de propagação da fratura estável.

Nestes casos, como a fenda é mais profunda, a placa perde uma porção da sua base resistente. Esta configuração antecipa mais instabilidade, fazendo com que a estrutura atinja o estado crítico muito mais depressa do que quando a fenda era menor o que condiciona a sua progressão e torna a estrutura mais vulnerável. No caso apresentado na Figura 46 é notória a mancha de cores verdes e amarelas do campo de tensão mais expandidas em relação ao primeiro caso apresentado, que demonstra essa instabilidade do domínio, face à imposição uma fenda inicial superior.

Nestes casos de análise é ainda visível que a trajetória da fratura perde a sua curvatura dos casos iniciais, propagando-se de uma forma muito mais próxima de uma linha reta em direção ao topo da estrutura, o que precipita uma rotura muito mais agressiva.

De uma perspetiva global, importa salientar que a variante do método NNRPIM com células de influência de segundo grau demonstrou sistematicamente um ligeiro afastamento na sua trajetória terminal quando comparada com as tendências observadas nos restantes métodos numéricos. Uma análise transversal dos mapas de cores sugere que tal divergência é o resultado de uma análise mais abrangente do campo de tensões ao redor da fissura. Assim, esta variante destaca-se por mostrar como o tamanho das zonas de influência afetam os resultados do comportamento da estrutura.

Conclui-se que o aumento do parâmetro a de 0,1 m para 0,2 m não provoca apenas uma mudança quantitativa nos valores de tensão, mas sim uma alteração no comportamento e trajeto de propagação da fratura.

4.3. Estudo da fratura num apoio para Dispositivo de Proteção Lateral

Concluído o estudo numérico anterior foi posteriormente realizado um estudo numérico de um componente estrutural do setor automóvel. Planeou-se então um estudo focado num suporte de fixação vertical de um sistema de proteção lateral para veículos pesados de mercadorias.

Este componente desempenha um papel crítico na segurança rodoviária passiva, sendo projetado e dimensionado para mitigar as consequências de colisões laterais ao impedir que utilizadores vulneráveis da estrada, tais como peões, ciclistas ou até motociclistas, sejam projetados sob a estrutura inferior do veículo pesado [40]. A Figura 49 ilustra um exemplo de sistema de proteção lateral (LPD) instalado num veículo pesado de mercadorias, bem como a sua localização relativamente à estrutura do veículo.



Figura 49- LPD aplicado num veículo pesado de mercadorias¹

A avaliação da segurança rodoviária e da eficácia das tecnologias de mitigação de acidentes demonstra que as colisões que envolvem veículos pesados de mercadorias apresentam níveis de severidade criticamente distintos das colisões entre veículos ligeiros. De acordo com o estudo publicado por Jessica B. Cicchino e David G. Kidd em 2024 cerca de 12% de todas as mortes de ocupantes de veículos ligeiros de passageiros decorreram em 2021 de colisões com veículos pesados. Paralelamente, o estudo comprova que as tecnologias de segurança ativa, como os sistemas de prevenção de colisão frontal e travagem autónoma de emergência possuem limitações severas e um desempenho não uniforme consoante o tipo de veículo que vai ser atingido. Baseados em dados de mais de 160.000 acidentes, os autores demonstraram que a introdução destas tecnologias está associada a uma redução consolidada de 53,4% nas taxas de acidentes quando o veículo atingido é um ligeiro de passageiros. No entanto, quando

¹ <https://www.recosrl.it/en/>

o veículo que sofre o embate é um veículo pesado, a eficácia dos sistemas sofre um decréscimo significativo, caindo para uma taxa de redução de acidentes de apenas 38,4%. Os autores apontam que esta disparidade é resultado de um perfil geométrico diferente que um veículo pesado apresenta em relação a um veículo ligeiro de passageiros. Em suma, dado que os sistemas eletrónicos ativos falham mais frequentemente na deteção e travagem antes de um impacto contra veículos pesados, é possível constatar a necessidade de trabalhar na melhoria destes sistemas e na melhoria das soluções estruturais físicas [41].

O estudo desenvolvido por Talbot et al. publicado em 2017 demonstra que, embora os veículos pesados de mercadorias representem apenas cerca de 5% do tráfego rodoviário global na Grã-Bretanha, estão envolvidos em 23% de todas as colisões fatais com ciclistas. Em zonas urbanas densas com elevada atividade de ciclistas, como a cidade de Londres, esta representação em sinistros mortais atinge valores críticos situados em 39%. A análise indica que o cenário mais recorrente ocorre a baixas velocidades e na proximidade de cruzamentos, quando o camião muda de direção à esquerda e interseta a trajetória do ciclista que se deslocava em linha reta. O estudo revela ainda que mesmo nos veículos pesados onde as barras de proteção lateral estavam instaladas os ciclistas sofreram esmagamentos graves [42].

Neste contexto, a introdução de uma fenda geométrica num apoio de fixação de um LPD assume relevância sob a perspetiva da segurança rodoviária. Através desta abordagem baseada na Mecânica da Fratura computacional, pretende-se mapear e verificar a trajetória de propagação da fenda sob carga, analisando o seu percurso e a taxa de crescimento da descontinuidade.

A geometria implementada, apresentada na Figura 50, tomou como referência um modelo comercial produzido pelo fabricante RECO SRL² que é projetado em conformidade com os requisitos estipulados pelo Regulamento n.º 73 da Comissão Económica das Nações Unidas para a Europa (UNECE R73).



Figura 50-Suporte de fixação do LPD²

² <https://www.recosrl.it/en/>

Para efeitos de simulação computacional, o componente de referência responsável por estabelecer a ligação mecânica entre a estrutura do chassi do veículo pesado e as barras horizontais do dispositivo de proteção lateral (LPD) foi simplificado através de uma abordagem numérica bidimensional (2D) representada na Figura 51, Figura 52 e Figura 53.

Nesta abordagem simplificada, a extremidade do suporte correspondente à zona de fixação ao chassi foi restringida impedindo qualquer translação ou rotação nos nós de interface e simulando um encastramento. As ações mecânicas decorrentes do impacto nas barras do LPD foram idealizadas como forças pontuais, denotadas por F , aplicadas perpendicularmente à alma do perfil com um valor de 1N.

Para a caracterização do material, foi considerada uma liga de alumínio 6082-T6 devido à sua ampla utilização em aplicações estruturais. As propriedades mecânicas e o comportamento do material foram definidos com base nos resultados experimentais apresentados na literatura [43]. Considerou-se o módulo de elasticidade de $E = 71,54$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,31$. A tensão de cedência foi definida em 295 MPa [43].

As dimensões principais do componente são 565 mm de comprimento e 123 mm de altura. Visto que os esquemas se encontram devidamente representados à escala, as restantes dimensões geométricas não cotadas do componente podem ser obtidas por proporcionalidade.

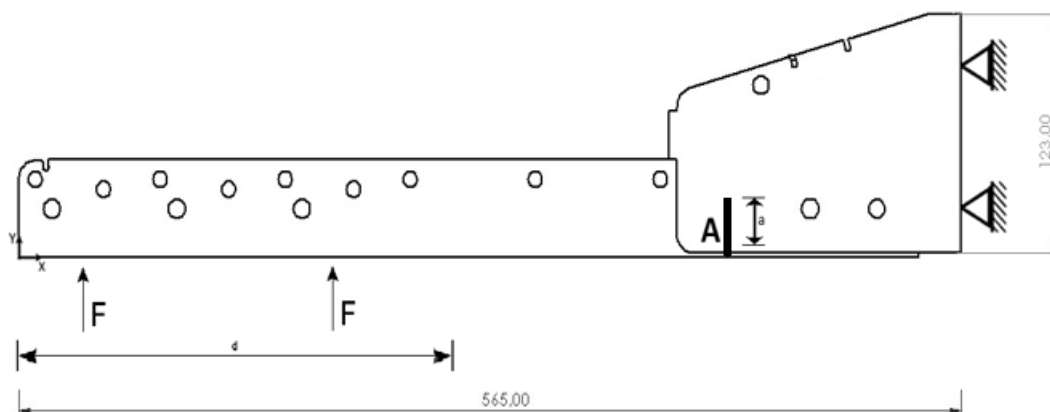


Figura 51-Esquema do suporte do LPD para o caso de estudo 1

Com o intuito de analisar a propagação da fratura em diferentes cenários de solicitação, foram consideradas pré-fendas localizadas em regiões distintas da peça. No primeiro e no segundo caso de estudo, a pré-fenda foi posicionada na face inferior da peça, com a extremidade localizada nos pontos de coordenadas em relação à origem do referencial de (395,4) mm e (498,4) mm, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 51 e Figura 52, respetivamente. Estes dois cenários simulam situações em que o impacto ocorre predominantemente nesta face resultantes de colisões ou impactos com utilizadores vulneráveis da via, nomeadamente ciclistas, peões ou motociclistas.

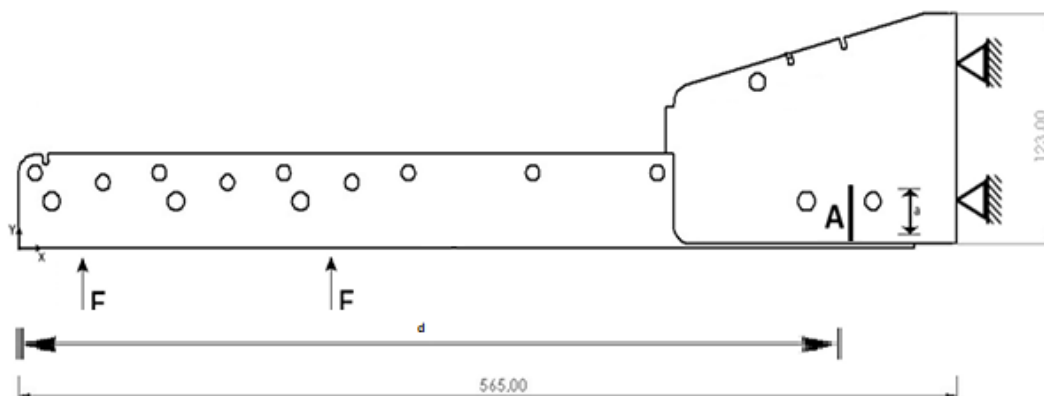


Figura 52-Esquema do suporte do LPD para o caso de estudo 2

Adicionalmente, no terceiro caso de estudo, a pré-fenda foi localizada na face superior da peça, com a extremidade da fratura localizada no ponto de coordenadas (355,46) mm como é visível com maior detalhe na Figura 53. Este caso de estudo tem o objetivo de representar cenários alternativos de carregamento, como aqueles que podem ocorrer durante manobras ou devido ao contacto com obstáculos que induzam esforços no sentido oposto ao considerado nos dois casos anteriores. Neste último caso, a carga foi aplicada na mesma face onde se encontra a pré-fenda, sendo considerada uma componente de força na direção vertical e descendente no eixo Y, de forma a reproduzir o efeito de uma solicitação atuando em sentido contrário ao dos cenários analisados nos casos 1 e 2.

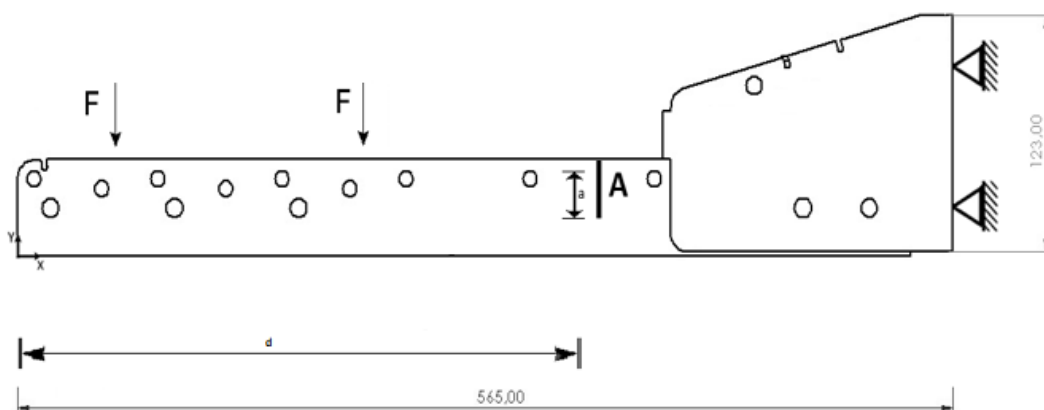


Figura 53-Esquema do suporte do LPD para o caso de estudo 3

Para a realização da análise numérica do comportamento à fratura do componente em estudo, procedeu-se à discretização do domínio geométrico. A precisão dos resultados numéricos e a convergência da solução estão intrinsecamente ligadas à qualidade e à densidade da malha utilizada, exigindo um compromisso ideal entre o custo computacional e a exatidão dos resultados.

Na Figura 54 são apresentadas as configurações das malhas desenvolvidas para o estudo analítico, onde foram utilizados elementos triangulares. A geração e discretização das malhas foram efetuadas através do software FEMAP.

Como se pode observar, foi implementado um refinamento localizado e progressivo da malha nas regiões críticas da geometria, nomeadamente nas descontinuidades ou furos situados nas proximidades da zona de propagação da fratura. Esta estratégia permite representar com maior precisão os resultados de tensão esperados nessas regiões, bem como capturar com detalhe os fenómenos associados ao processo de início e propagação da fratura.

Para os métodos RPIM e NNRPIM, os parâmetros das funções de base radial (RBF) e as definições de conectividade nodal basearam-se nos valores adotados na análise de convergência do exemplo anterior, detalhados na Tabela 3 do capítulo 4.1.

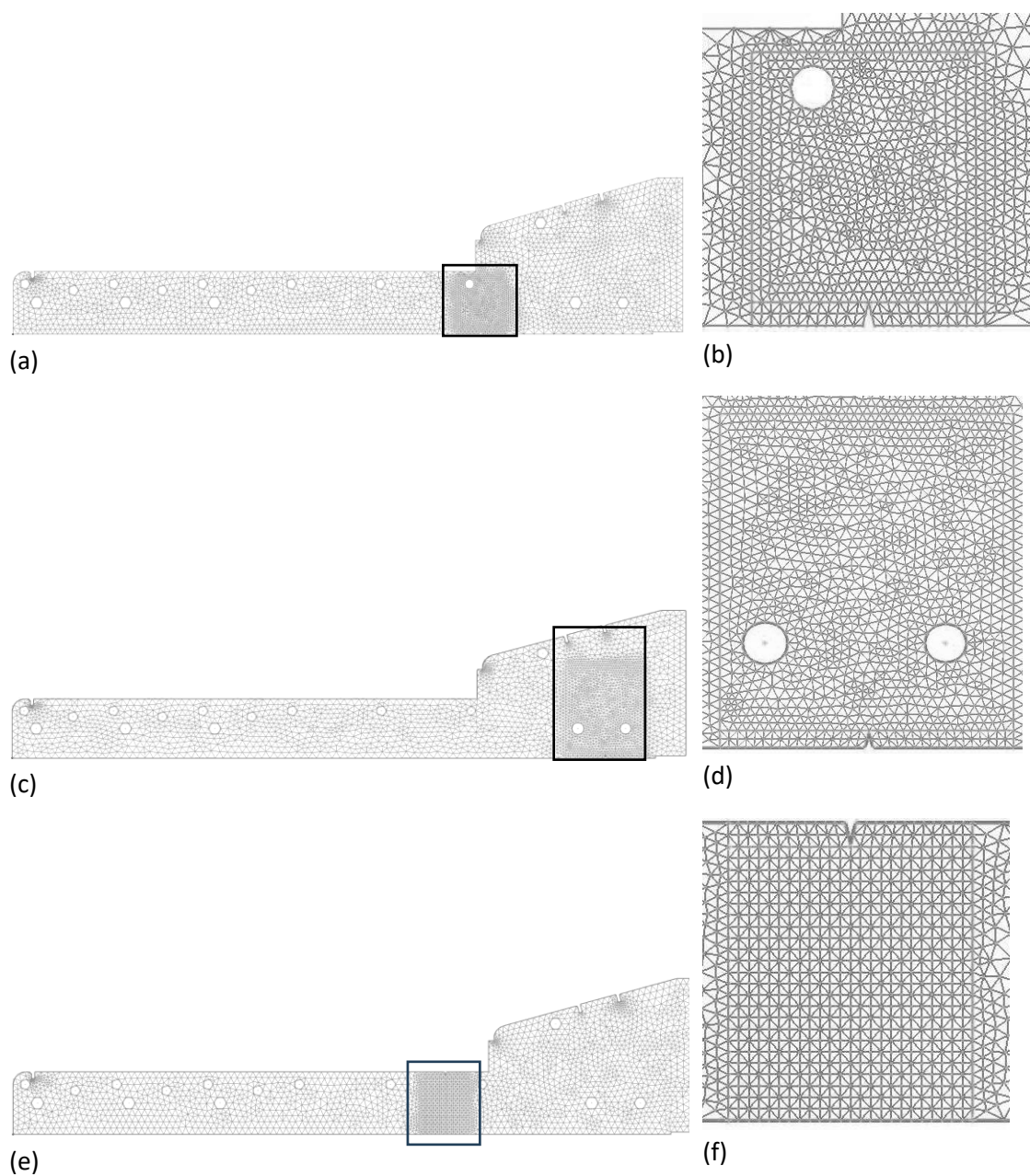


Figura 54- (a) Configuração da malha para o caso de estudo 1. (b) Refinamento da malha do caso de estudo 1. (c) Configuração da malha para o caso de estudo 2. (d) Refinamento da malha do caso de estudo 2. (e) Configuração da malha para o caso de estudo 3. (f) Refinamento da malha do caso de estudo 3.

Com o objetivo de validar o desempenho dos diferentes métodos implementados na análise numérica, a Figura 55 ilustra a evolução da trajetória de propagação da fratura para os diferentes casos de estudo correlacionando as coordenadas x e y ao longo do domínio. Esta figura estabelece uma comparação direta entre uma representação com a escala dos dois eixos independente, visível em (a), (c) e (e) e uma representação com os eixos à mesma escala, apresentada em (b), (d) e (f).

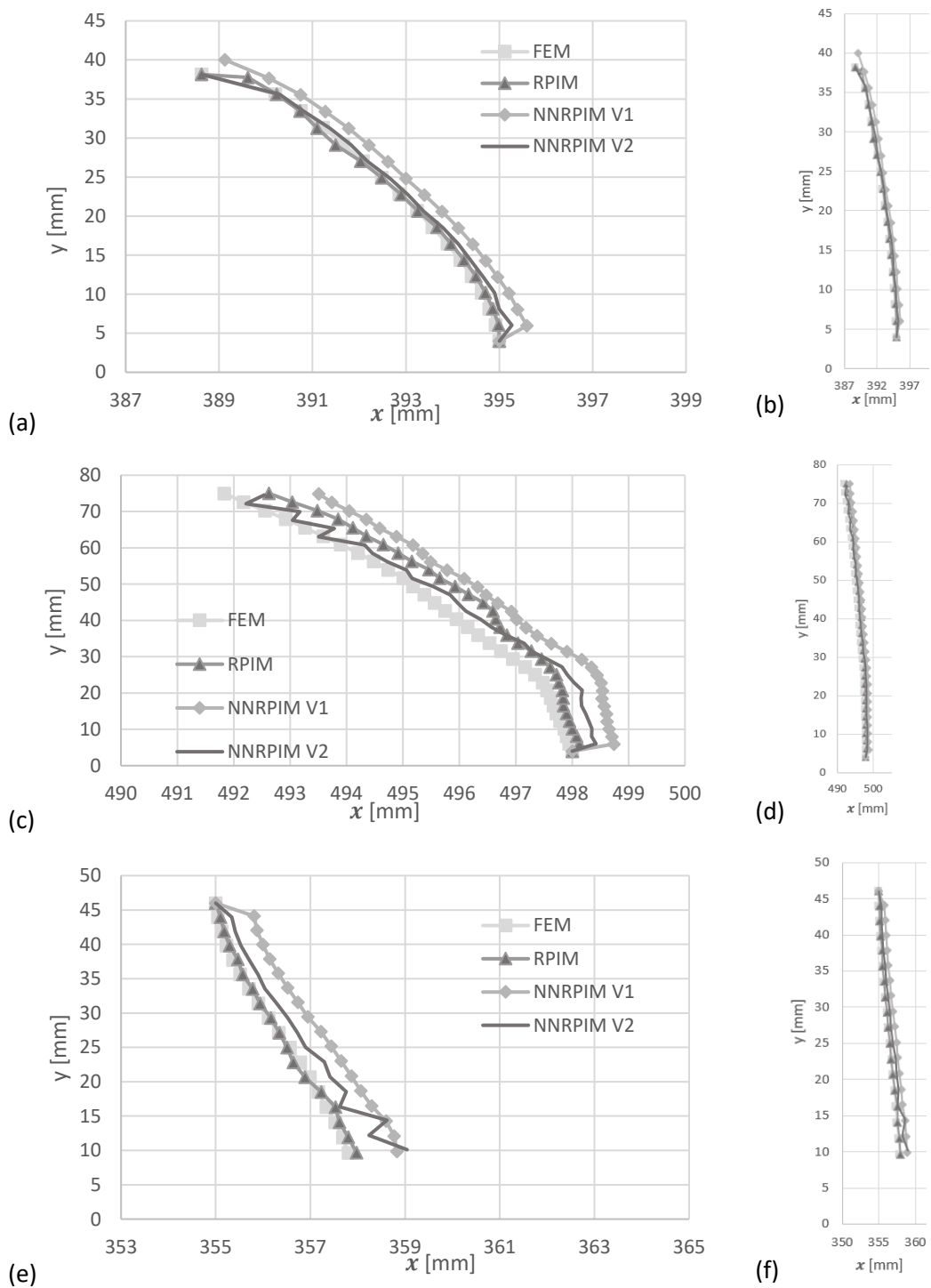


Figura 55- (a)Trajetória de propagação da fenda para o caso de estudo 1 (b) Trajetórias de propagação da fenda para o caso de estudo 1 (eixos com a mesma escala) (c)Trajetória de propagação da fenda para o caso de estudo 2 (d) Trajetórias de propagação da fenda para o caso de estudo 2 (eixos com a mesma escala) (e)Trajetória de propagação da fenda para o caso de estudo 3 (f) Trajetórias de propagação da fenda para o caso de estudo 3 (eixos com a mesma escala)

Na Figura 55 (a), correspondente ao primeiro caso de estudo, a análise isolada do gráfico sugere, à primeira vista, divergências perceptíveis entre os modelos numéricos ao longo do processo de fratura. Tomando a solução FEM como referência e comparando com método sem malha RPIM, os mesmos apresentam resultados e uma sobreposição muito próxima ao longo de toda a trajetória, validando os parâmetros da função de base radial utilizada. Por outro lado, as variantes baseadas em vizinhos naturais manifestam pequenas flutuações. O NNRPIM V1 e NNRPIM V2 acompanham a tendência de propagação da fenda apesar de um ligeiro desvio logo na fase inicial, sendo este desvio maior quando se recorre a células de influência do primeiro grau.

Contudo, ao normalizar a escala geométrica do gráfico, Figura 55 (b), a perspectiva visual altera-se significativamente, constatando-se que todas as metodologias em análise exibem uma boa correlação nos resultados obtidos. O comportamento macroscópico da fenda revela uma tendência predominantemente vertical, com ligeira curvatura, desviando ligeiramente de aproximadamente 395 mm na base para cerca de 389 mm no topo. Importa salientar que esta trajetória ocorre na direção do furo existente na vizinhança da fratura, sendo uma zona de concentração de tensões. Este fenómeno será evidenciado nas secções posteriores através da análise dos respetivos campos de distribuição de tensões.

No que concerne ao caso de estudo 2 e ao caso de estudo 3, cujos resultados analíticos se encontram representados na Figura 55 (c) e (e), respetivamente, observa-se uma repetição do comportamento numérico e geométrico anteriormente descrito.

Em ambos os cenários, a propagação da fratura segue a mesma linha de tendência para os diferentes métodos utilizados, mas é perceptível que com o NNRPIM V2 existe um comportamento oscilatório na fase terminal do processo. O RPIM assume valores muito próximos dos resultados obtidos com o FEM, principalmente nos estágios iniciais do processo para o caso 2 e em todo o percurso obtido no caso 3.

Em ambos os casos, 2 e 3, a representação gráfica da Figura 55 (c) e (e), respetivamente, evidencia pequenas flutuações locais no avanço da fenda, com particular incidência no método NNRPIM V1 que apresenta logo na fase inicial um desvio maior em relação ao FEM do que o RPIM.

No entanto, tal como verificado no primeiro cenário, a transição para a mesma escala nos dois eixos apresentada na Figura 55 (d) e (f) retifica a perceção visual das trajetórias. Sob uma escala de um para um a sobreposição quase perfeita entre as curvas do Método dos Elementos Finitos (FEM), do RPIM e das duas variantes do NNRPIM confirma de forma inequívoca que as instabilidades detetadas nos gráficos amplificados possuem um erro muito reduzido. Desta forma, os resultados transversais aos três casos de estudo consolidam a conclusão de que todos os métodos sem malha implementados demonstram uma elevada robustez e precisão, revelando-se alternativas computacionais viáveis e altamente fiáveis face à modelação convencional por elementos finitos.

Além da validação geométrica das trajetórias de fratura apresenta-se de seguida a evolução do estado das tensões ao longo das sucessivas iterações de avanço da propagação da fenda. A Figura 56 ilustra esta evolução para o primeiro caso de estudo em três estágios de propagação

diferentes, um estágio inicial, um estágio intermédio e um estágio avançado de fratura que correspondem às iterações de simulação 4, 10 e 17, respetivamente. Esta análise comparativa engloba os resultados obtidos para os quatro métodos numéricos em estudo.

Analisando a Figura 56, as zonas de maior tensão apresentadas encontram-se situadas na extremidade da fratura, algo que é expectável e que acompanha a trajetória de propagação, e próximo do furo da peça, demonstrando a reação da estrutura à presença desta descontinuidade e atraindo a fratura na sua direção à medida que se propaga.

A análise comparativa entre os quatro métodos expõe diferenças sobre a sensibilidade e precisão de cada formulação computacional. O FEM e o RPIM exibem zonas de concentração de tensões substancialmente mais amplas, volumosas e com contornos de transição cromática ligeiramente mais difusos na vizinhança da fratura. Adicionalmente, o FEM exhibe uma mancha de tensões ligeiramente mais fragmentada, resultado da discretização em elementos.

Por outro lado, o NNRPIM, apresenta mapas de contorno visivelmente mais suaves, limpos e com a singularidade de tensão na ponta da fenda confinada a uma região menor.

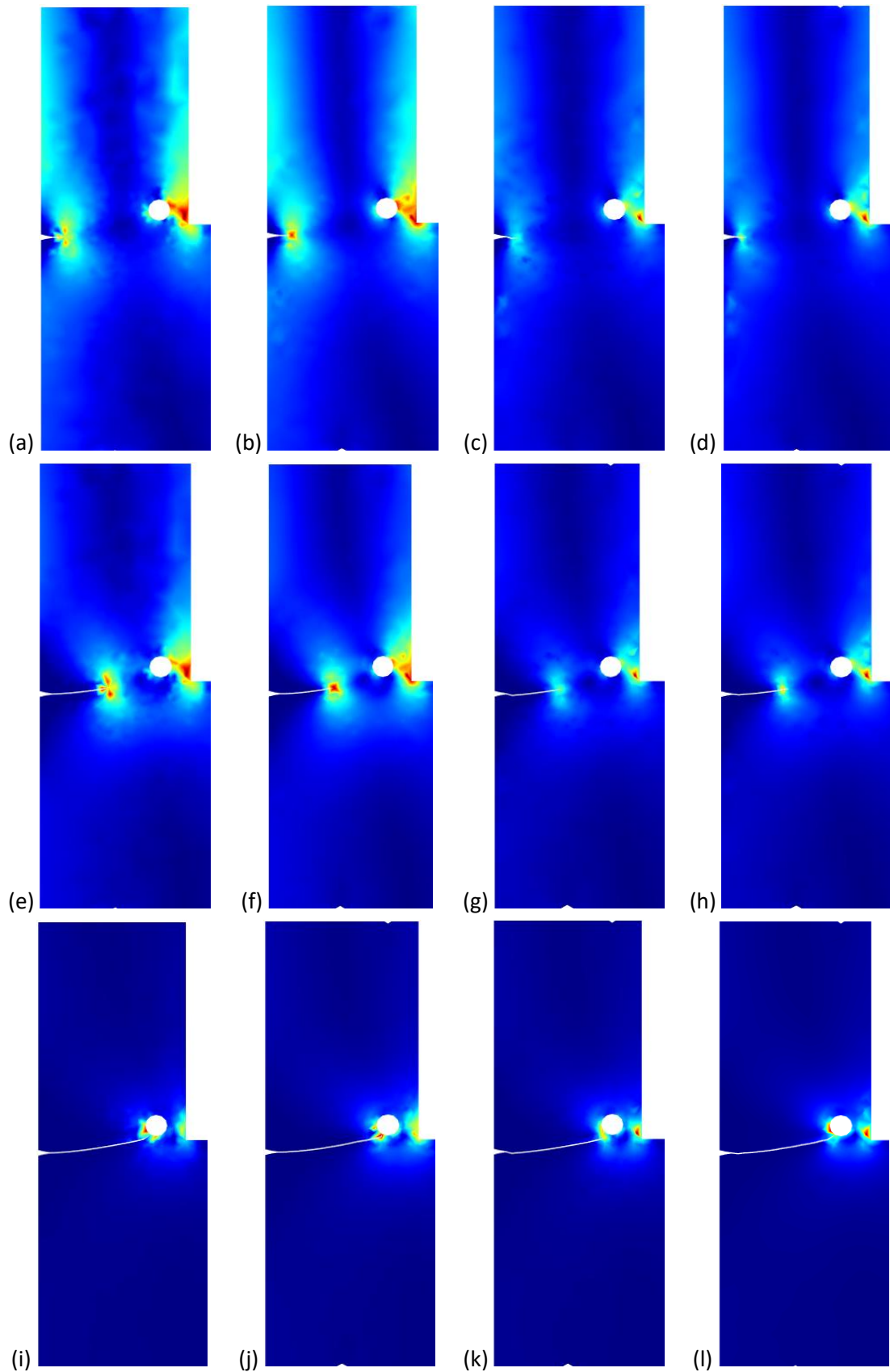


Figura 56- FEM: (a) itr. 4; (e) itr.10 ; (i) itr.17; RPIM : (b) itr. 4; (f) itr.10 ; (j) itr.17; NNRPIM V1: (c) it. 4; (g) itr.10 ; (k) itr.17; NNRPIM V2: (d) itr.4; (h) itr.10 ; (l) itr.17

Os resultados da simulação numérica para o segundo caso de estudo encontram-se compilados na Figura 57.

A avaliação do estágio inicial de propagação da fratura, correspondente à Figura 57 (a), (b), (c) e (d) revela que todos os métodos são capazes de identificar com sucesso as zonas críticas de concentração de tensões desde o estágio inicial. Contudo, denotam-se nuances importantes na suavidade dos contornos de tensão obtidos. Enquanto o método FEM apresenta gradientes ligeiramente mais discretizados e dependentes da malha, tal como já observado em casos de estudo anteriores, os métodos sem malha, exibem campos de tensão mais contínuos e homogêneos na periferia dos furos e entalhes e na periferia da própria fenda.

À medida que a fratura se propaga, a sua extremidade é uma das zonas que concentra maiores intensidades de tensão do componente, deslocando-se ao longo do canal entre os dois furos centrais. À medida que o dano progride, ocorre um alívio de tensão nas novas superfícies geradas, assinalado visualmente pela transição para tons de azul-escuro. Ao comparar os métodos, nota-se que os métodos sem malha modelam a abertura e a descontinuidade física da fenda com elevada nitidez

No estágio mais avançado, é possível verificar que a fenda se propaga de forma acentuada em direção ao entalhe exterior direito, sofrendo uma ligeira deflexão induzida pela atração dos campos de tensão gerados pelas irregularidades geométricas nessa fronteira. Neste patamar, a maior parte do componente encontra-se completamente aliviada de carga, evidenciando a perda severa de rigidez estrutural. O confronto direto entre as quatro metodologias nesta fase crítica demonstra uma forte coerência global na trajetória da fratura.

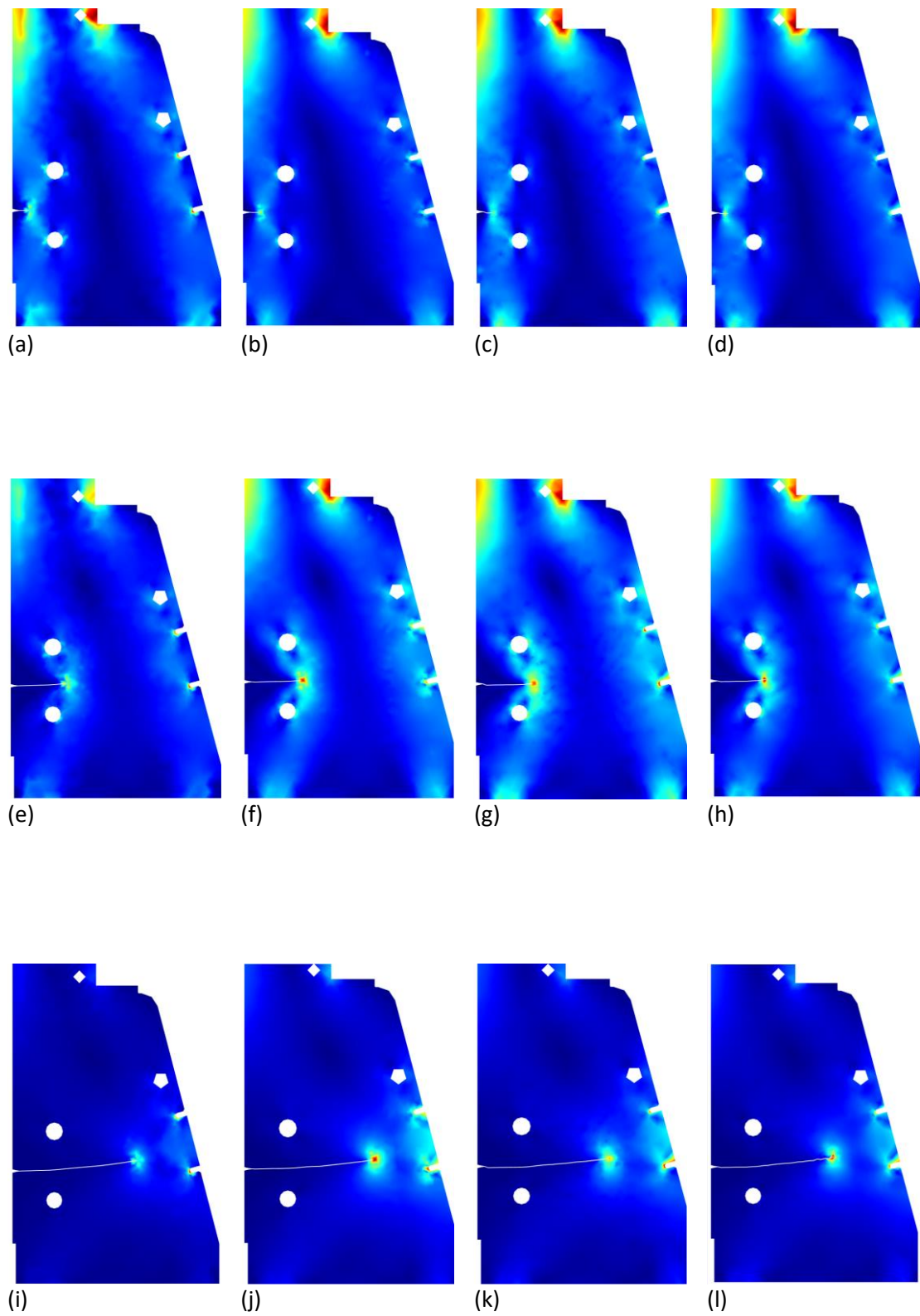


Figura 57- FEM: (a) itr. 4; (e) itr.15 ; (i) itr.33; RPIM : (b) itr. 4; (f) itr.15 ; (j) itr.33; NNRPIM V1: (c) it. 4; (g) itr.15 ; (k) itr.33; NNRPIM V2: (d) itr.4; (h) itr.15 ; (l) itr.33

A análise dos resultados numéricos obtidos para o terceiro caso de estudo, compilados na Figura 58, permite constatar uma clara correspondência com os comportamentos já identificados e validados no caso de estudo anterior. Confirma-se a capacidade de todas as metodologias em mapear com sucesso as zonas críticas de concentração de tensões. Repete-se ainda a mesma observação anterior em que o método FEM exhibe gradientes de tensão discretizados e intrinsecamente dependentes da orientação e rigidez da malha elementar, enquanto as abordagens sem malha mantêm a sua superioridade ao projetar campos de tensão contínuos, suaves e homogêneos na periferia das descontinuidades geométricas.

Enquanto o FEM sofre de um efeito de pixelização na frente de fratura as variantes baseadas em vizinhos naturais isolam a singularidade com elevada nitidez.

A trajetória descrita pela fratura é realizada caminhando progressivamente em direção às zonas que registam o maior campo de tensão. À medida que a fenda avança, a sua própria extremidade atua como uma zona de concentração de tensões e o caminho efetivo seguido por esta descontinuidade física não é retilíneo, mas sim governado pela atração dos campos de tensão periféricos gerados pelas restrições geométricas do componente.

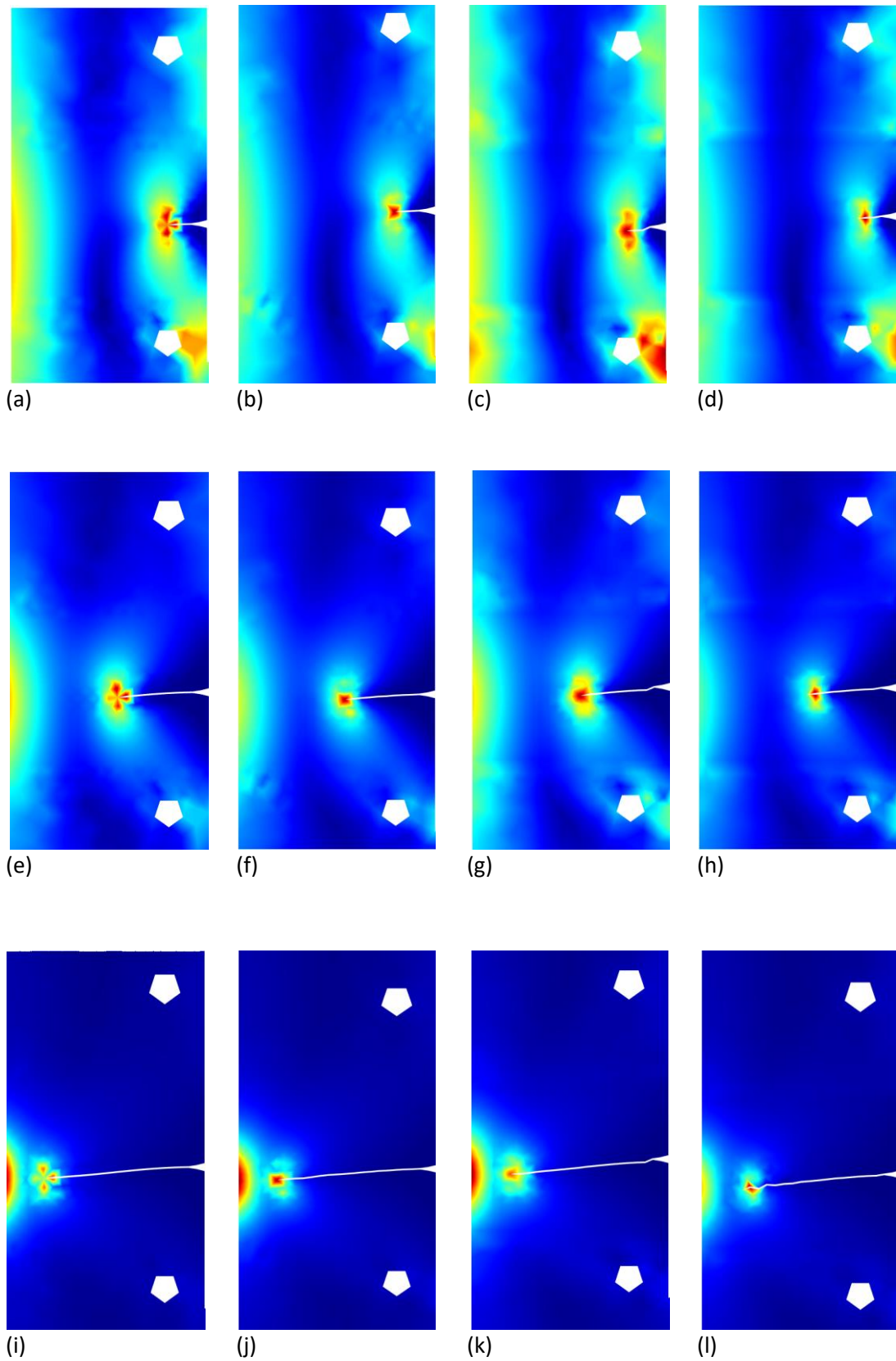


Figura 58- FEM: (a) itr. 4; (e) itr.10 ; (i) itr.18; RPIM : (b) itr. 4; (f) itr.10 ; (j) itr.18; NNRPIM V1: (c) it. 4; (g) itr.10 ; (k) itr.18; NNRPIM V2: (d) itr.4; (h) itr.10 ; (l) itr.18

5. Conclusão

5.1. Conclusões finais

O presente capítulo encerra esta dissertação de mestrado através da síntese das principais conclusões retiradas da investigação, apresentando uma reflexão crítica sobre o desempenho dos métodos numéricos avaliados e delineando perspectivas para trabalho futuro.

O trabalho iniciou-se com uma fundamentação teórica sólida assente nos princípios da Mecânica da Fratura Linear Elástica e no estudo das limitações do FEM face à versatilidade das abordagens sem malha. Através do FEMAS, foi possível analisar o comportamento da propagação da fratura num suporte de fixação vertical de um LPD fabricado na liga de alumínio 6082-T6, após a devida validação das ferramentas numéricas. Esta validação foi sustentada por um teste de convergência inicial conduzido numa geometria de controlo de uma placa com um furo central circular, o qual confirmou a estabilidade e a robustez das formulações ao demonstrar que o refinamento da malha é um fator crítico para aproximar as soluções numéricas das soluções analíticas. Houve ainda uma etapa anterior ao estudo do suporte do LPD onde se estendeu a investigação da propagação da fratura para um estudo paramétrico numa placa retangular, focado no comportamento deste elemento após introdução e variação geométrica de pré-fendas.

Demonstrou-se que a simulação recorrendo aos métodos sem malha, como o RPIM e o NNRPIM, produz uma fidelidade superior às abordagens tradicionais por eliminar as desvantagens impostas pela conectividade pré-definida do FEM, a qual exige processos de remalhamento constantes em situações de propagação de fissuras. Em contrapartida, os métodos sem malha permitem que a descontinuidade da fenda se propague continuamente, assentando a sua eficiência na construção de funções de forma interpolantes que garantem a satisfação direta das condições de fronteira e, no caso do NNRPIM, em esquemas de integração baseados em células de Voronoï que automatizam a conectividade nodal. Adicionalmente, validou-se o critério da Tensão Tangencial Máxima (MTS) como uma abordagem robusta para prever trajetórias de fratura em materiais de comportamento frágil ou quase-frágil, sendo documentados com maior frequência na literatura estudos em modelos bidimensionais (2D) pela capacidade de garantir um controlo mais rigoroso das variáveis numéricas.

No estudo da convergência verificou-se que a variante V1 do método NNRPIM, assente em vizinhos naturais de primeiro grau, destacou-se pela rapidez com que atingiu as taxas de convergência nas discretizações iniciais, otimizando o cálculo computacional face ao RPIM e ao FEM convencional. Embora a literatura associe frequentemente os métodos sem malha a

campos de tensão mais suaves, os testes de convergência revelaram uma aparente contradição ao registarem maior distorção gráfica nestas formulações. Esta discrepância, alinhada com referências bibliográficas da área, justifica-se diretamente pelo tipo de integração adotado, confirmando-se que a utilização de uma quadratura de 2×2 Gauss-Legendre suaviza eficazmente os campos de tensão quando comparada com o uso de um único ponto de integração. Na análise paramétrica subsequente, os resultados evidenciaram que a geometria inicial da fenda tem influência nos resultados obtidos. Fendas com menor profundidade inicial exibiram desvios curvilíneos mais acentuados em direção ao ponto de aplicação da carga externa, enquanto fendas superiores provocaram percursos mais retilíneos e agressivos devido à perda imediata de secção resistente. Relativamente à análise das trajetórias e evolução dos campos de tensão no suporte do LPD, os resultados demonstraram uma forte coerência global entre os métodos na identificação das zonas críticas, as quais acompanham a extremidade da fratura e são fortemente atraídas pelas descontinuidades geométricas da peça. À medida que o dano progride, a ponta da fenda caminha em direção aos maiores campos de tensão periféricos, gerando percursos governados pelas restrições da peça e provocando um alívio de carga nas novas superfícies geradas. No confronto metodológico, o FEM e o RPIM exibiram zonas de concentração mais amplas e difusas, registando-se no FEM um efeito de pixelização e fragmentação na frente da fratura devido à dependência da malha elementar. Em contrapartida, as variantes sem malha baseadas em vizinhos naturais demonstraram uma superioridade inequívoca ao isolar a singularidade da ponta da fenda com elevada nitidez, projetando mapas de contorno contínuos, suaves e homogêneos na periferia de todos os furos e entalhes.

A investigação desenvolvida nesta dissertação de mestrado permitiu validar com um caso prático uma ferramenta computacional totalmente automatizada, concebida para projetar e antever iterativamente as trajetórias de fratura. Este algoritmo destaca-se pela sua autonomia e simplicidade de utilização, exigindo apenas a introdução inicial do domínio geométrico, das restrições físicas e da extensão limite da fenda para mapear todo o percurso de rutura até à falha do componente mecânico. A principal vantagem desta implementação reside na sua capacidade de operar de forma transversal com diferentes formulações numéricas, estabelecendo uma ponte eficiente entre o FEM e as metodologias sem malha RPIM e NNRPIM. O facto de as diferentes formulações numéricas convergirem para valores de magnitude e trajetórias marcadamente semelhantes constitui um indicador inequívoco da sua robustez e fiabilidade.

5.2. Limitações

No desenvolvimento do presente estudo, uma das principais limitações identificadas relaciona-se com a capacidade computacional disponível para a execução das simulações. Embora os recursos utilizados tenham permitido obter resultados consistentes e responder aos objetivos gerais da investigação, as limitações da capacidade computacional condicionaram a profundidade e a escala da análise. Especificamente, a necessidade de otimizar o tempo de processamento exigiu a simplificação da peça simulada para 2D. Adicionalmente, um poder computacional mais elevado teria viabilizado a exploração de geometrias mais complexas, a

geração de malhas significativamente mais refinadas e a realização de testes mais exaustivos, minimizando potenciais vieses de discretização e aproximando os modelos da realidade física. Paralelamente, a disponibilização de uma infraestrutura de cálculo superior permitiria reduzir drasticamente o tempo necessário para a obtenção de resultados, acelerando o ciclo de iteração e validação do modelo. Contudo, importa ressaltar que o acesso a este nível de desempenho computacional avançado acarreta, frequentemente, custos financeiros significativamente superiores.

Recorrendo aos métodos sem malha foi possível notar vantagens face ao FEM. A eliminação completa da dependência de uma malha com conectividade fixa entre elementos, traduz-se na diminuição dos erros decorrentes de distorções geométricas nos elementos adjacentes à descontinuidade, permitindo obter na componente gráfica mapas de distribuição de tensões visivelmente mais contínuos, homogêneos e suaves, desprovidos do aspeto fragmentado que tipifica as fronteiras de conectividade do FEM. Contudo, como contrapartida, as formulações sem malha exigiram um maior tempo de processamento para correr as simulações quando comparadas com o FEM sob uma discretização da malha equivalente.

5.3. Trabalhos futuros

Como continuidade do trabalho de investigação desenvolvido nesta dissertação, e com a finalidade de colmatar as limitações identificadas e expandir o campo de aplicação das metodologias sem malha na engenharia automóvel, sugerem-se várias linhas de investigação futuras.

Em primeiro lugar, seria importante aplicar esta metodologia à geometria real em 3D do suporte, uma vez que neste trabalho a peça foi simplificada para 2D. Esta abordagem permitiria simular com maior fidelidade os efeitos das restrições e das tensões aplicadas na propagação da fratura, aproximando os resultados dos cenários reais de impacto. Contudo, esta maior complexidade geométrica exige um poder computacional muito superior, o que envolve custos financeiros mais elevados em termos de hardware.

Adicionalmente, seria de elevado valor científico a realização de ensaios experimentais em protótipos reais do componente para validação dos modelos numéricos. Sugere-se também alargar o âmbito do estudo para análises dinâmicas, simulando o comportamento do suporte durante o processo de colisão.

Por fim, reveste-se de grande interesse a realização de novos estudos focados na otimização dos parâmetros internos dos métodos sem malha dado que estas formulações são recentes e altamente sensíveis às propriedades do domínio de influência e dos esquemas de integração. Sugere-se a inclusão de critérios de propagação baseados na energia e na deformação, permitindo compará-los com o critério da máxima tensão tangencial. Propõe-se ainda a aplicação dos critérios de visibilidade, difração ou transparência nos métodos sem malha, aproveitando os nós de fronteira conhecidos da fenda para aumentar a precisão dos resultados.

6. Referências

- [1] M. Kuna, *Finite Elements in Fracture Mechanics*, Springer., vol. 201. 2013. doi: 10.1007/978-94-007-6680-8.
- [2] R. W. Clough, "Early history of the finite element method from the view point of a pioneer," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 60, no. 1, pp. 283–287, May 2004, doi: 10.1002/nme.962.
- [3] G. Yagawa, "Free mesh method: Fundamental conception, algorithms and accuracy study," *Proc Jpn Acad Ser B Phys Biol Sci*, vol. 87, no. 4, pp. 115–134, 2011, doi: 10.2183/pjab.87.115.
- [4] M. Zhang, A. R. Z. Abidin, and C. S. Tan, "State-of-the-art review on meshless methods in the application of crack problems," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 131, p. 104348, 2024.
- [5] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon, "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements," *Comput Mech*, vol. 10, pp. 307–318, 1992.
- [6] P. Lancaster and K. Salkauskas, "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods," *Math Comput*, vol. 37, no. 155, pp. 141–158, Jul. 1981.
- [7] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu, "Element-free Galerkin methods," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 37, pp. 229–256, 1994.
- [8] T. Belytschko, D. Organ, and Y. Krongauz, "A coupled finite element-element-free Galerkin method," *Comput Mech*, vol. 17, pp. 186–195, 1995.
- [9] J. Belinha, *Meshless Methods in Biomechanics Bone Tissue Remodelling Analysis*, vol. 16. Springer, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-06400-0.
- [10] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko, "The natural element method in solid mechanics," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 43, no. 5, pp. 839–887, Nov. 1998, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19981115)43:5<839::AID-NME423>3.0.CO;2-R.
- [11] J. Belinha, "Extending the Natural Neighbour Radial Point Interpolation Meshless Method to the Multiscale Analysis of Sandwich Beams with Polyurethane Foam Core," *Applied Sciences*, vol. 14, Oct. 2024, doi: 10.3390/app14209214.
- [12] G. R. Liu and Y. T. Gu, "A point interpolation method for two-dimensional solids," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 50, no. 4, pp. 937–951, 2001, doi: 10.1002/1097-0207(20010210)50:4<937::AID-NME62>3.0.CO;2-X.
- [13] J. G. Wang and G. R. Liu, "A point interpolation meshless method based on radial basis functions," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 54, no. 11, pp. 1623–1648, Aug. 2002, doi: 10.1002/nme.489.
- [14] J. Belinha, "Multiscale Analysis of Sandwich Beams with Polyurethane Foam Core: A Comparative Study of Finite Element Methods and Radial Point Interpolation Method," *Materials*, vol. 17, Sep. 2024, doi: 10.3390/ma17184466.
- [15] L. M. J. S. Dinis, R. M. Natal Jorge, and J. Belinha, "Analysis of 3D solids using the natural neighbour radial point interpolation method," *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 196, no. 13–16, pp. 2009–2028, Mar. 2007, doi: 10.1016/j.cma.2006.11.002.
- [16] J. M. C. Azevedo, J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, and R. M. Natal Jorge, "Crack path prediction using the natural neighbour radial point interpolation method," *Eng Anal Bound Elem*, vol. 59, pp. 144–158, Jul. 2015, doi: 10.1016/j.enganabound.2015.06.001.
- [17] L. D. C. Ramalho, J. Belinha, and R. D. S. G. Campilho, "The numerical simulation of crack propagation using radial point interpolation meshless methods," *Eng Anal Bound Elem*, vol. 109, pp. 187–198, Dec. 2019, doi: 10.1016/j.enganabound.2019.10.001.

- [18] D. Salimi-Majd, F. Shahabi, and B. Mohammadi, "Effective local stress intensity factor criterion for prediction of crack growth trajectory under mixed mode fracture conditions," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 85, pp. 207–216, Oct. 2016.
- [19] M. Janssen, J. Zuidema, and R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*, 2nd ed. Delft: Delft University Press, 2004.
- [20] A. Yazid, N. Abdelkader, and H. Abdelmadjid, "A state-of-the-art review of the X-FEM for computational fracture mechanics," *Appl Math Model*, vol. 33, no. 12, pp. 4269–4282, Dec. 2009, doi: 10.1016/j.apm.2009.02.010.
- [21] T. Belytschko and T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 45, no. 5, pp. 601–620, Jun. 1999, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S.
- [22] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 46, no. 1, pp. 131–150, Sep. 1999, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J.
- [23] C. Song, E. T. Ooi, and S. Natarajan, "A review of the scaled boundary finite element method for two-dimensional linear elastic fracture mechanics," *Eng Fract Mech*, vol. 187, pp. 45–73, Jan. 2018, doi: 10.1016/j.engfracmech.2017.10.016.
- [24] T. Belytschko, L. Gu, and Y. Y. Lu, "Fracture and crack growth by element free Galerkin methods," *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*, vol. 2, pp. 519–534, 1994.
- [25] D. Organ, M. Fleming, T. Terry, and T. Belytschko, "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency," *Comput Mech*, vol. 18, pp. 225–235, 1996.
- [26] N. Sukumar, B. Moran, T. Black, and T. Belytschko, "An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics," *Comput Mech*, vol. 20, pp. 170–175, 1997.
- [27] B. N. Rao and S. Rahman, "A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 78, pp. 647–657, 2001, [Online]. Available: <http://www.engineering.uiowa.edu/~rahman>.
- [28] D. C. Gonçalves, I. J. Sánchez-Arce, L. D. C. Ramalho, R. D. S. G. Campilho, and J. Belinha, "Fracture propagation based on meshless method and energy release rate criterion extended to the Double Cantilever Beam adhesive joint test," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 122, Dec. 2022, doi: 10.1016/j.tafmec.2022.103577.
- [29] M. Chilakala, R. Samyal, S. Garg, K. K. Saxena, and N. Gupta, "Numerical Simulation of Cracks in Automotive Coatings Under Mechanical and Thermal Loading Using Element Free Galerkin Method," *Advances in Materials and Processing Technologies*, vol. 8, no. sup3, pp. 1029–1047, 2022, doi: 10.1080/2374068X.2021.1927639.
- [30] F. Liaghat, M. R. Hematiyan, A. Khosravifar, and T. Rabczuk, "A robust meshfree method for analysis of cohesive crack propagation," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 104, Aug. 2019.
- [31] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl, "Meshless methods An overview and recent developments," *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 139, pp. 3–47, 1996.
- [32] W. Hua *et al.*, "A review of mixed mode I-II fracture criteria and their applications in brittle or quasi-brittle fracture analysis," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 124, p. 103741, 2023.
- [33] A. A. Griffith, "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 221, pp. 163–198, 1921.
- [34] M. A. Hussain, S. L. Pu, and J. Underwood, "Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II," *National Symposium on Fracture Mechanics, Part II*, pp. 1–27, 1973, doi: 10.1520/STP33130Si.

- [35] G. C. Sih, "Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems," *Int J Fract*, vol. 10, no. 3, 1974.
- [36] P.O. Bouchard, F. Bay, and Y. Chastel, "Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria," *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 192, pp. 3887–3908, 2003.
- [37] M. M. Mirsayar, "Mixed mode fracture analysis using extended maximum tangential strain criterion," *Mater Des*, vol. 86, pp. 941–947, Dec. 2015, doi: 10.1016/j.matdes.2015.07.135.
- [38] L. D. C. Ramalho, J. Belinha, and R. D. S. G. Campilho, "Fracture propagation using the radial point interpolation method," *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 43, no. 1, pp. 77–91, Jan. 2020, doi: 10.1111/ffe.13046.
- [39] J. Belinha, J. M. C. Azevedo, L. M. J. S. Dinis, and R. M. N. Jorge, "Simulating fracture propagation in brittle materials using a meshless approach," *Eng Comput*, vol. 34, no. 3, pp. 503–522, Jul. 2018, doi: 10.1007/s00366-017-0555-5.
- [40] M. L. Brumbelow, "Potential Benefits of Underride Guards in Large Truck Side Crashes", *Traffic Injury Prevention*, vol.13, pp. 592-599, 2012, doi:10.1080/15389588.2012.666595.
- [41] J. B. Cicchino and D. G. Kidd, "Are front crash prevention systems less effective at preventing rear-end crashes where trucks and motorcycles are struck?", *Traffic Injury Prevention*, vol.25, pp. 440-444, 2024, doi: 10.1080/15389588.2024.2321910
- [42] R. Talbot, S. Reed, N. Christie, J. Barnes, and P. Thomas, "Fatal and serious collisions involving pedal cyclists and trucks in London between 2007 and 2011", *Traffic Injury Prevention*, vol.18, pp. 657-665, 2017, doi: 10.1080/15389588.2017.1291938
- [43] S. Chen and Q. Zhang, "Study on constitutive model and mechanical performance test simulation of 6082-T6 based on genetic optimization algorithm", *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 2808, 2024, doi: 10.1088/1742-6596/2808/1/012062
- [44] J. Belinha, M. Aires, and D. E. S. Rodrigues, "Elastoplastic Analysis of Frame Structures Using Radial Point Interpolation Meshless Methods," *Applied Sciences*, vol. 13, no. 23, p. 12591, Nov. 2023, doi: 10.3390/app132312591
- [45] P. Delhomme and A. Gheorghiu, "Perceived stress, mental health, organizational factors, and self-reported risky driving behaviors among truck drivers circulating in France," *J. Safety Res.*, vol. 79, pp. 341-351, Dec.2021, doi: 10.1016/j.jsr.2021.10.001
- [46] M. Pizzicori, S. Piantini, C. Lucci, P. Cordellieri, M. Pierini, and G. Savino, "Retrofitting ADAS for Enhanced Truck Safety: Analysis Through Systematic Review, Cost-Benefit Assessment, and Pilot Field Testing," *Sustainability*, vol. 17, no.11, p.4298, 2025, doi: 10.3390/su17114928
- [47] G. Neamțu, A. M. Țîțu, A. B. Pop, and A. Bogorin-Predescu, "Road Safety in The European Road Transport System and the Correlation with Sustainable Development," *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, vol. 1311, no. 1, p. 012047, 2024, doi: 10.1088/1757-899X/1311/1/012047.
- [48] C. Oliveira, A. Pais, and J. Belinha, "Structural Optimisation of a Suspension Control Arm Using a Bi-Evolutionary Bone Remodelling Inspired Algorithm and the Radial Point Interpolation Method," *Applied Sciences*, vol. 15, p. 502, Jan. 2025, doi: 10.3390/app15010502.

Declaração de Integridade

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter conduzido este trabalho académico com integridade. Não plagiei ou apliquei qualquer forma de uso indevido de informações ou falsificação de resultados ao longo do processo que levou à sua elaboração. Declaro que o trabalho apresentado neste documento é original e de minha autoria, não tendo sido utilizado anteriormente para nenhum outro fim. Declaro ainda que tenho pleno conhecimento do Código de Conduta Ética do P.PORTO. ISEP,

NOME: Bruno Miguel Ferreira Alves

Porto, 06 de junho 2026

