INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO
MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Aplicação de Técnicas de Otimização ao Escalonamento de Projetos

FILIPE AMÉRICO CORREIA RIBEIRO
Setembro de 2024

POLITÉCNICO
DO PORTO

ISEP INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

Aplicação de Técnicas de Otimização ao Escalonamento de Projetos

Filipe Américo Correia Ribeiro 1190567

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de Especialização em Gestão Industrial

Orientador: André Serra e Santos

Co-orientador: Anabela Tereso

Porto, setembro 2024

Resumo

No cenário empresarial atual, marcado por constantes mudanças e alta competitividade, as organizações precisam de inovar de forma rápida e consistente. Isso tem levado ao desenvolvimento de novas abordagens, métodos e ferramentas de otimização que auxiliam o processo de tomada de decisões. Na gestão de projetos, garantir a eficiência e a eficácia é crucial para alcançar o sucesso, e, por esse motivo, as ferramentas de apoio são projetadas para melhorar esses dois fatores críticos. Esta dissertação tem como propósito aplicar técnicas de otimização no escalonamento de projetos, com especial foco na utilização de meta-heurísticas, nomeadamente o Simulated Annealing. Para alcançar esse objetivo, foi elaborado um modelo matemático e um protótipo destinado a apoiar a gestão de cronogramas de projetos, otimizando a alocação de recursos e minimizando os prazos de execução, em particular nos ambientes complexos e com diversas restrições. O estudo iniciou-se com uma revisão detalhada da literatura sobre métodos de escalonamento de projetos, abordando tanto as técnicas exatas, quanto as meta-heurísticas, de forma a fundamentar a escolha da técnica de otimização. De seguida, foi desenvolvido um modelo matemático que incorpora as especificidades do escalonamento de projetos com restrição de recursos. A implementação do protótipo foi realizada com base nesse modelo, sendo testado em dados académicos para determinar a sua eficácia. Os resultados obtidos demonstraram que o protótipo é capaz de criar cronogramas eficazes e para além disso, apresentou uma flexibilidade notável, adaptando-se a diferentes tipos de projetos e múltiplos projetos. A dissertação conclui que o uso de meta-heurísticas como o Simulated Annealing oferece uma abordagem poderosa e eficaz para resolver problemas complexos de escalonamento de projetos, proporcionando uma vantagem substancial para as organizações que operam em ambientes dinâmicos e altamente restritos. Contudo, o estudo reconhece algumas limitações, como a necessidade de validação adicional em diferentes contextos industriais e a possibilidade de integrar outras meta-heurísticas e métodos híbridos para melhorar o desempenho do *framework* proposto. Finalmente, são sugeridos caminhos para futuras investigações, incluindo a aplicação do modelo em diferentes setores, a adaptação do protótipo para suportar decisões em tempo real e a exploração de novas técnicas de otimização que possam complementar o Simulated Annealing, ampliando assim a aplicabilidade das soluções propostas.

Palavras-chave: Gestão de Projetos, Escalonamento de Projetos, Escalonamento Multi-Projeto, projetos, Meta-heurísticas, Simulated Annealing.

Abstract

In today's rapidly evolving and competitive business environment, organizations must continuously innovate, leading to the development of new optimization techniques, methods, and tools to support decision-making. In project scheduling management, efficiency and effectiveness are crucial for organizational success, and the tools developed aim to enhance these two critical factors. This dissertation focuses on applying optimization techniques to project scheduling, with a particular emphasis on metaheuristics, specifically Simulated Annealing. To achieve this objective, a mathematical model and a prototype were developed to support project schedule management by optimizing resource allocation and minimizing execution times, especially in complex environments with multiple constraints. The study began with a comprehensive literature review on project scheduling methods, covering both exact techniques and metaheuristics, to substantiate the choice of the optimization technique. A mathematical model was then developed, incorporating the specific requirements of resource-constrained project scheduling. The prototype was implemented based on this model and tested using academic data to assess its effectiveness. The results demonstrated that the prototype could generate effective schedules and exhibited remarkable flexibility, adapting to different types of projects and multi-project environments. The dissertation concludes that using metaheuristics, such as Simulated Annealing, provides a powerful and effective approach to solving complex project scheduling problems, offering significant advantages for organizations operating in dynamic and highly constrained environments. However, the study acknowledges limitations, such as the need for further validation across different industrial contexts and the potential to integrate other metaheuristics or hybrid methods to enhance the framework's performance. Finally, future research directions include applying the model in various sectors, adapting the prototype for real-time decision-making, and exploring new optimization techniques to complement Simulated Annealing, thereby expanding the applicability of the proposed solutions.

Keywords: Project Management, Project Scheduling, Multi-Project Scheduling, Metaheuristics, Simulated Annealing.

Índice

1. Introdução 1
   1.1. Contextualização 1
   1.2. Objetivos 2
   1.3. Metodologia 2
   1.4. Estrutura do Relatório 3
2. Revisão Bibliográfica 5
   2.1. Gestão de Projetos 5
   2.2. Escalonamento de Projetos 7
      2.2.1. Representação de Problemas de Escalonamento de Projetos 7
      2.2.2. Problemas de Escalonamento de Projetos com Restrição de Recursos 13
      2.2.3. Problema de Nivelamento de Recursos 15
      2.2.4. Problema de Otimização Multiobjetivo 16
   2.3. Escalonamento de Múltiplos Projetos 17
      2.3.1. Problemas de Alocação 17
      2.3.2. Problemas de Sequenciamento/Calendarização 18
      2.3.3. Tipologias de Ambientes de Múltiplos Projetos 18
   2.4. Modelo Determinístico e Estocástico 19
   2.5. Modelo Estático e Dinâmico 19
   2.6. Teoria da Complexidade 20
   2.7. Métodos de Otimização 21
      2.7.1. Métodos Exatos 21
      2.7.2. Métodos Aproximados 22
   2.8. Meta-heurísticas 24
      2.8.1. Simulated Annealing 25
      2.8.2. Bat Algorithm 27
   2.9. Análise Bibliométrica 30
3. Métodos e Aplicação 35
   3.1. Descrição do problema 35
   3.2. Descrição da solução 37
      3.2.1. Método exato 37
      3.2.2. Codificação 40
      3.2.3. Estrutura de vizinhança 41
      3.2.4. Parametrização 41
   3.3. Implementação 41
   3.4. Teste da sua aplicabilidade e desempenho 44
4. Resultados e Discussão 45

4.1. RCPSP 45
4.1.1. Análise Estatística dos resultados do RCPSP 47
4.1.2. Inferência Estatística 49
4.1.3. Instância j303_2 50
4.2. RCMPSP 53
4.2.1. Análise Estatística dos resultados do RCMPSP 54
4.2.2. Análise Estatística - mp_j30_a2 54
4.2.3. Inferência Estatística - mp_j30_a2 56
4.2.4. Análise Estatística - mp_j30_a5 58
4.2.5. Inferência Estatística - mp_j30_a5 59
4.2.6. Análise Estatística - mp_j30_a2 e mp_j30_a5 60
4.2.7. Inferência Estatística - mp_j30_a2 e mp_j30_a5 62
4.2.8. Instância - mp_j30_a2_nr4_set 63
4.3. Conclusões finais sobre o PDD 67
5. Conclusão 69
5.1. Conclusões finais 69
5.2. Limitações e trabalhos futuros 70

Lista de Figuras

Figura 1 - Representação de um projeto em Rede AOA adaptado de [9] 10
Figura 2 - Representação de um projeto em Rede AON 10
Figura 3 - Representação gráfica I de uma regra em Rede GERT adaptado de [16] 12
Figura 4 - Representação gráfica II de uma regra em Rede GERT adaptado de [16] 13
Figura 5 - Representação de um projeto em Rede AON 13
Figura 6 - Publicações por ano no contexto de otimização de escalonamento de múltiplos projetos 31
Figura 7 - Publicações por área de investigação 31
Figura 8 - Palavras-chave mais utilizadas no contexto de otimização de escalonamento de múltiplos projetos 32
Figura 9 – Informação de um RCPSP 36
Figura 10 - Informação adicional de um RCMPSP 37
Figura 11 - Layout dos parâmetros do Simulated Annealing 42
Figura 12 – Messagebox de erro de entrada nos parâmetros do Simulated Annealing 42
Figura 13 – Messagebox dos parâmetros do Simulated Annealing corretamente preenchidos 42
Figura 14 - Layout dos parâmetros dos projetos 43
Figura 15 – Messagebox de erro de entrada dos parâmetros dos projetos 43
Figura 16 – Messagebox dos parâmetros dos projetos corretamente preenchidos 44
Figura 17 - Gráfico de barras da eficácia dos diferentes métodos para RCPSP 46
Figura 18 - Gráfico de barras da frequência do desvio relativo da eficácia do PDD para RCPSP 48
Figura 19 - Boxplot do desvio relativo da eficácia do PDD para RCPSP 49
Figura 20 - Convergência do Simulated Annealing da instância j303_2 51
Figura 21 - Gráfico de Gant da solução da instância j303_2 52
Figura 22 - Diagrama de carga dos recursos da instância j303_2 52
Figura 23 - Gráfico de barras da eficácia dos diferentes métodos 54
Figura 24 - Gráfico de barras do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2 55
Figura 25 - Boxplots do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2 55
Figura 26 - Gráfico de barras do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a5 58
Figura 27 - Boxplots do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a5 59
Figura 28 - Gráfico de barras do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5 61
Figura 29 - Boxplots do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5 62
Figura 30 - Convergência do Simulated Annealing da instância mp_j30_a2_nr4_set 64
Figura 31 - Gráfico de Gantt da solução da instância mp_j30_a2_nr4_set 65
Figura 32 - Diagrama de carga dos recursos da instância mp_j30_a2_nr4_set 66

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Dados de apoio à representação de um projeto em Rede AOA adaptado de [9].....9
Tabela 2 - Nomenclatura PERT [21] 11
Tabela 3 - Informação do problema de maximização de lucro..... 23
Tabela 4 - Exemplo do funcionamento de duas pesquisas locais e do ótimo local 24
Tabela 5 - Algoritmo base do *Simulated Annealing* adaptado de [76] 27
Tabela 6 - Algoritmo base do Algoritmo de Morcego adaptado de [82] 29
Tabela 7 - Dados das instâncias do RCPSP 45
Tabela 8 - Desvios relativos das instâncias do PDD para RCPSP 47
Tabela 9 - Teste t de Student da eficácia do PDD para RCPSP 50
Tabela 10 - Dados das instâncias do RCMPSP..... 53
Tabela 11 - Teste de normalidade da eficácia do PDD para mp_j30_a2 56
Tabela 12 - Teste de Kruskal-Wallis da eficácia do PDD para mp_j30_a2 57
Tabela 13 - Teste de Mann-Whitney da eficácia do PDD para mp_j30_a2 57
Tabela 14 - Teste de normalidade da eficácia do PDD para mp_j30_a2 60
Tabela 15 - Teste de Kruskal-Wallis da eficácia do PDD para mp_j30_a5 60
Tabela 16 - Teste de normalidade da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5 63
Tabela 17 - Teste de Kruskal-Wallis da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5 63

Acrónimos e Síglas

Lista de Acrónimos e Síglas

AOA	*Activity-On-Arrow*
AON	*Activity-On-Node*
BA	*Bat Algorithm*
CPM	*Critical path method*
GA	*Genetic Algorithms*
GERT	*Graphical Evaluation and Review Technique*
ISEP	Instituto Superior de Engenharia do Porto
MOP	*Multiobjective Optimization Problem*
MPM	*Multiple Project Management*
MPSPLIB	*Multi Project Scheduling Problems Library*
PDD	Protótipo Desenvolvido nesta Dissertação
PERT	*Project Evaluation and Review Technique*
PDD	Protótipo Desenvolvido nesta Dissertação
PPM	*Project Portfolio Management*
PSPLIB	*Project Scheduling Problem Library*
RCMPSP	*Resource-Constrained Multiple Project Scheduling Problem*
RCPSP	*Resource-Constrained Project Scheduling Problem*
RLP	*Resource Leveling Problem*
SA	*Simulated Annealing*

1. Introdução

Este capítulo apresenta a descrição do trabalho da dissertação. Inicia-se por contextualizar a importância da aplicação de técnicas de otimização no escalonamento de projetos, no contexto empresarial atual. Posteriormente, são estabelecidos os objetivos específicos e metas a cumprir, que representam a base da orientação do trabalho. A metodologia adotada será abordada de forma sucinta, o que possibilita uma visão global das estratégias a utilizar, de forma a validar o conteúdo deste documento. Por fim, apresenta-se a estrutura do relatório.

1.1. Contextualização

O ambiente empresarial atual é caraterizado por uma grande competitividade, impulsionada pela procura da satisfação dos clientes e da excelência operacional, na qual as diversas organizações lutam pela conquista de uma posição de destaque nos seus respetivos setores. Num ambiente onde a inovação é crucial, as organizações precisam, constantemente, de desenvolver e melhorar os produtos e/ou serviços prestados para atender às crescentes expectativas do mercado e à mudança nas preferências dos consumidores, ou seja, a capacidade de uma empresa se adaptar de forma rápida e eficaz a oportunidades e desafios é essencial. Para isto, é necessário implementar projetos e utilizar eficientemente os recursos disponíveis.

A criação de ferramentas de apoio à tomada de decisão surge como uma resposta estratégica e inovadora neste ambiente empresarial dinâmico. Estas ferramentas permitem que as organizações lidem com a complexidade crescente de decisões estratégicas, pois representam um suporte valioso para os gestores serem capazes de modelar e simular cenários distintos e, ainda, analisar dados dos mesmos. A utilização destas ferramentas de apoio no escalonamento de projetos permite aos gestores otimizar recursos, antecipar desafios e tomar decisões informadas, para proporcionar uma maior probabilidade de sucesso à organização [1].

A procura por ferramentas eficientes e eficazes no escalonamento de projetos tem sido um tema constante de investigação e estudo, impulsionado pelo crescente reconhecimento da importância estratégica da gestão de projetos em diversos setores. A complexidade inerente a esta temática envolve a consideração de diversas restrições, variáveis interdependentes e a alocação otimizada de recursos, com o propósito de mitigar os riscos, reduzir os custos e diminuir o tempo de execução dos projetos [2, 3].

Cada organização procura satisfazer da melhor forma as suas necessidades, através do alcance de metas e objetivos, utilizando os recursos disponíveis, possuindo caraterísticas diversas [1].

Com isto, cada empresa opta por ferramentas e métodos apropriados às suas necessidades, o que pode ser determinante para a sua estabilidade no mercado a curto, médio e longo prazo.

A grande amplitude de métodos e ferramentas para resolver problemas de escalonamento de projetos reflete a complexidade e diversidade destes desafios em diferentes contextos. Os métodos exatos são considerados as melhores abordagens do ponto de vista de eficácia, visto que apresentam, sempre, a solução ótima para um determinado conjunto de inputs. Contudo, e devido à sua possível morosidade, esta ferramenta não demonstra ser eficiente em todos os problemas, principalmente os de maior dimensão. Surgem, assim, os métodos aproximados como uma alternativa para solucionar os problemas de forma mais eficiente [2, 3].

Sucintamente, o desenvolvimento de metodologias cada vez mais eficientes possibilita novas óticas de apoio à tomada de decisão em múltiplos campos, nomeadamente no escalonamento de projetos, o que é fulcral e decisivo para a longevidade e resiliência de uma organização no ambiente dinâmico e competitivo da atualidade.

1.2. Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é desenvolver um modelo e um protótipo de apoio ao escalonamento de projetos, através da utilização de meta-heurísticas, nomeadamente *Simulated Annealing* (SA), para otimização de problemas específicos. O protótipo será criado com o propósito de auxiliar o utilizador a gerir o cronograma de um projeto. A validação do protótipo criado consiste na realização de testes com dados concretos (redes de projetos).

De forma concisa e direta, os objetivos são:

- Desenvolvimento de um modelo matemático de apoio ao escalonamento de projetos;
- Desenvolvimento de um protótipo de apoio ao escalonamento de projetos;
- Validação do modelo e do protótipo.

Assim, os objetivos ajudam a definir de forma simples o propósito da investigação, enquanto proporcionam uma clara orientação do estudo.

1.3. Metodologia

A presente secção descreve a metodologia adotada para a realização desta dissertação, que decorre num espaço temporal transversal.

A abordagem abdutiva é a que melhor descreve o procedimento de investigação, visto que o protótipo que será desenvolvido para apoio ao escalonamento de múltiplos projetos parte de meta-heurísticas já criadas e validadas, que serão integradas num protótipo e, posteriormente, este será testado e validado [4]. O método utilizado é mono quantitativo, pois o protótipo será testado com base num conjunto de casos de estudo selecionados, que, previamente, foram resolvidos por outras técnicas, sendo os dados e resultados quantitativos.

Relativamente à realização da revisão bibliográfica, foi utilizado o *purposive sampling*, o qual se baseia na seleção de artigos que cumpram critérios específicos da pesquisa em questão. Esta escolha contribui significativamente para uma compreensão aprofundada dos temas inerentes à dissertação [5].

Já no que engloba a metodologia do desenvolvimento e validação do protótipo de otimização, foi identificada a *Design Science Research* como sendo a mais apropriada, uma vez que esta foca-se na criação de métodos, o que proporciona uma estrutura sólida para desenvolver soluções eficientes de diversos desafios reais. Esta metodologia também segue um ciclo iterativo de desenvolvimento, avaliação e melhoria, fator este pretendido nesta dissertação, uma vez que o protótipo deve ser melhorado consoante a qualidade obtida em soluções anteriores [6].

1.4. Estrutura do Relatório

A presente secção tem como objetivo proporcionar uma visão detalhada da estrutura adotada para a elaboração desta dissertação, no qual é delineado de forma clara a organização dos diferentes capítulos que compõem o documento.

A dissertação tem cinco capítulos.

No 1º capítulo (1) é realizada a introdução da dissertação, a qual proporciona uma compreensão aprofundada, justificações e motivos para a sua realização, bem como os objetivos e metodologia de investigação.

Na revisão bibliográfica (2), 2º capítulo, são retratados todos os conceitos-chave necessários que apoiam o objetivo principal da dissertação. Inicia-se a mesma com diversas temáticas intrínsecas em todos os projetos, com foco nos seus principais problemas. Posteriormente, são abordados modelos e métodos de apoio ao escalonamento de projetos e múltiplos projetos, com uma maior relevância às meta-heurísticas, bem como, caraterísticas que permitem definir a complexidade dos problemas.

O 3º capítulo (3) retrata os métodos e aplicação, no qual é descrita a metodologia adotada para o desenvolvimento do modelo e protótipo de apoio ao escalonamento de projetos e múltiplos projetos. Este capítulo detalha as etapas de desenvolvimento do modelo matemático, a implementação do protótipo, estratégias de codificação e a parametrização implementadas.

Nos resultados e discussão (4), 4º capítulo, são apresentados os resultados obtidos nos testes realizados com o Protótipo Desenvolvido nesta Dissertação (PDD). Posteriormente, este é comparado com métodos já existentes através de análises e inferências estatísticas com o objetivo de determinar a sua eficácia.

O último capítulo (5), 5º capítulo, sintetiza as principais descobertas e contribuições da dissertação. Este capítulo, primeiramente, foca-se nas conclusões finais, destacando os avanços retirados desta pesquisa e a sua relevância para a área de gestão de projetos. De seguida, aborda as limitações do estudo e possíveis melhorias.

2. Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será realizada uma revisão da literatura relacionada com o escalonamento de projetos, uma área intrínseca e relevante para o avanço do entendimento em gestão de projetos. Esta revisão visa realçar a complexidade inerente ao escalonamento de projetos e contextualizar a investigação atual num panorama mais amplo.

2.1. Gestão de Projetos

Um projeto é um empreendimento com o objetivo de criar um produto, serviço ou um outro resultado único, existindo um início e um fim temporal para o seu desenvolvimento [7]. Este desempenha um papel fulcral na criação de valor e apresenta diversos benefícios para as organizações. Os projetos compreendem vários componentes-chave que possuem relações de interdependência entre si [8]:

- *Project Life Cycle*: o ciclo de vida de um projeto representa todas as fases de um projeto e estabelece a estrutura fundamental para a gestão do mesmo;
- *Project Phase*: as múltiplas atividades do projeto são agrupadas em fases, de acordo com as relações de dependência existentes entre si;
- *Phase Gate*: engloba uma análise no final de cada fase do projeto com o objetivo de se tomar uma decisão em relação à continuidade do projeto, ou seja, se este deve prosseguir como delineado inicialmente, com modificações ou se deve ser encerrado;
- *Project Management Processes*: cada processo de gestão do projeto representa um conjunto de atividades, no qual inputs são processados para gerar outputs;
- *Project Management Process Group*: cada grupo representa um conjunto de processos relacionados para se atingir um objetivo específico do projeto. Estes grupos são iniciação, planeamento, execução, monitorização e controlo e encerramento;
- *Project Management Knowledge Areas*: representa todas as áreas de conhecimento da gestão de projetos, definidas pelos seus requisitos de *Know-How*.

A existência de uma gestão eficaz e eficiente destes componentes-chave é necessária para concluir os projetos de acordo com os objetivos delineados. *Project Management*, ou, gestão de projetos é fulcral, pois é aqui que são aplicados todos os conhecimentos, habilidades, ferramentas e técnicas ao conjunto de atividades de um projeto, para atender aos seus

requisitos, proporcionando às empresas uma maior competitividade na economia mundial [8]. Um conceito intrínseco na gestão de projetos é o *Iron Triangle* que retrata os principais critérios de desempenho de um projeto: qualidade, tempo e custo [7].

No que remete as áreas de conhecimento de gestão de projetos, estas, apesar de estarem relacionadas entre si, são definidas de forma independente [8]:

- *Project Integration Management*: engloba os processos e atividades fundamentais para identificar, definir, combinar, unir e coordenar os restantes processos e atividades do projeto;
- *Project Scope Management*: inclui os processos necessários de forma a garantir que todo o trabalho é realizado para a correta conclusão do projeto;
- *Project Schedule Management*: compreende os processos fulcrais para a gestão do tempo do projeto;
- *Project Cost Management*: abrange todos os processos relacionados com custos de modo a certificar que o custo total do projeto não ultrapassa o delineado;
- *Project Quality Management*: representa os processos indispensáveis para integrar a política de qualidade da organização no projeto a fim de atender às expectativas das partes interessadas;
- *Project Resource Management*: contém os processos essenciais para identificar, adquirir e gerir os recursos necessários para o projeto;
- *Project Communications Management*: retrata os processos responsáveis pelo planeamento, execução, monitorização e controlo da transmissão das informações de um projeto, o que garante uma comunicação eficiente entre as partes interessadas;
- *Project Risk Management*: engloba os processos de gestão do risco de um projeto;
- *Project Procurement Management*: inclui os processos fundamentais para adquirir todos os produtos, serviços e/ou resultados necessários para o projeto, que têm de ser obtidos de forma externa à organização;
- *Project Stakeholder Management*: engloba os processos necessários para identificar as pessoas, grupos ou organizações que podem influenciar ou serem influenciadas pelo projeto, com o objetivo de analisar as expectativas das partes interessadas e desenvolver estratégias apropriadas.

As áreas de conhecimento de gestão de projetos são importantes para um correto desenvolvimento de um projeto, pois: 1) apoiam a execução do cronograma do mesmo; 2) incorporam boas práticas de trabalho, diminuindo o tempo e recursos desperdiçados; 3) facilitam a comunicação da organização com as partes interessadas; 4) ajudam a identificar e mitigar riscos; 5) proporcionam uma maior viabilidade do projeto.

O escalonamento é uma etapa fundamental durante o ciclo de vida do projeto. Inicia-se na fase de planeamento da gestão do cronograma (*Project Schedule Management*), na qual o

cronograma é desenvolvido, e apoia as seguintes fases de execução e monitorização e controlo, garantindo que os projetos prosseguem de acordo com o delineado no cronograma [9].

2.2. Escalonamento de Projetos

O escalonamento de projetos caracteriza-se por ser o método de agendamento da execução das atividades de um projeto, tendo em conta diversas restrições associadas aos recursos e aos prazos [1], ou seja, é necessário compreender toda a envolvente para um melhor planeamento, execução e controlo, garantindo sempre o cumprimento dos objetivos e das expectativas delineadas. Esta envolvente engloba: 1) a lista de tarefas a cumprir; 2) o objetivo ou objetivos base; 3) os *key resources*, ou, recursos chave, para o desenvolvimento do projeto; 4) as restrições inerentes a todos estes.

Os problemas de escalonamento de projetos podem ser agrupados em 2 grupos: problemas determinísticos e problemas estocásticos. O primeiro grupo refere que toda a informação necessária para o desenvolvimento dos projetos é conhecida no ponto de partida, enquanto os problemas do segundo englobam incerteza em vários aspetos dos projetos, desde a procura dos recursos até à possibilidade de alteração dos objetivos principais de um projeto [10].

No que remete o objetivo ou objetivos base de um projeto, a maior parte dos problemas reais de escalonamento são problemas multiobjetivo, que apresentam uma natureza altamente complexa, pois, frequentemente, a otimização de um objetivo é conflituante com a dos outros. Sendo assim, é inevitável fazer um balanço da importância da otimização de cada objetivo [11].

Para identificar a quantidade necessária de cada recurso para o correto desenvolvimento das tarefas é indispensável, primeiramente, agrupar os recursos em 2 categorias, os *renewable resources*, e os *non-renewable resources*. Os recursos renováveis caraterizam-se por serem reutilizáveis, ou seja, estão limitados numa certa atividade num certo período, contudo, eventualmente, os mesmos poderão ser alocados a outras atividades. Por sua vez, os recursos não renováveis são definidos como recursos limitados para o projeto, isto é, existe um valor pré-definido que não pode ser ultrapassado [12].

Escalonamento de projetos é uma metodologia capaz de abranger inúmeros problemas reais que possuem diversas peculiaridades e a criação de uma metodologia que possa solucionar todos é algo utópico, portanto existem sistemas de apoio que facilitam, em parte, a tomada de decisão relacionada com o escalonamento de projetos.

2.2.1. Representação de Problemas de Escalonamento de Projetos

Rede *Activity-On-Arrow* e Rede *Activity-On-Node*

A representação em rede de um projeto é fulcral para o correto desenvolvimento do mesmo, sendo que existem diversas nomenclaturas. Neste capítulo serão abordadas duas: 1) a A*ctivity-On-Arrow* (AOA), na qual é possível identificar que as atividades são representadas por setas e denotadas por (i, j), e o fim e o início das atividades (eventos) são representados por nós e denotados por (i); 2) a *Activity-On-Node* (AON), na qual as atividades são representadas por

nós e denotadas por (j) e as setas apenas indicam a sequência de execução [13]. Estas abordagens, apesar de proporcionarem objetivos semelhantes, devem seguir regras distintas no seu desenvolvimento.

Para ser possível construir uma rede AOA de forma adequada é necessário seguir os seguintes princípios [14, 15]:

- Identificar as relações de precedência ou de subsequência entre as diversas atividades;
- A rede deve ter um único nó de início e de fim;
- Nenhuma atividade deve ser representada por mais do que uma seta;
- Não pode haver duas atividades com o mesmo nó de início e de fim, para ser viável identificá-las pelos números dos nós correspondentes (isto nem sempre é possível o que obriga à criação de atividades fictícias);
- Os eventos devem ser numerados de tal forma que, para qualquer atividade, o número do nó de conclusão seja superior ao de começo;

Por sua vez, para ser possível construir uma rede AON de forma adequada é necessário seguir os seguintes princípios [14 – 16]:

- Identificar as relações de precedência ou de subsequência das diversas atividades;
- A rede deve ter um único nó fictício de início e de fim;

Critical Path Method

O *Critical Path Method* (CPM) é um método de apoio à tomada de decisão de gestão de projetos, aplicável ao escalonamento, que permite identificar a duração do projeto e o caminho crítico, ou seja, o conjunto de atividades cujo mínimo atraso tem impacto na duração total do projeto [17 – 20]. É uma técnica analítica que pode ser implementada através de representações em rede AOA ou AON.

Para identificar as atividades que pertencem ao caminho crítico, tendo em consideração a representação em rede AOA é fulcral realizar as seguintes tarefas [14, 15]:

- Determinar o *Early Event Time*, denotado por ET_i, que representa a data mínima para a ocorrência do evento i. $ET_i = max\ (ET_{i\ precedentes} + d_{i\ precedentes})$, em que $ET_{inicial} = 0$;
- Determinar o *Late Event Time*, denotado por LT_i, que representa a data máxima para a ocorrência do evento i, sem prolongar o tempo de execução do projeto. $LT_i = min\ (LT_{i\ subsequentes} - d_{i\ subsequentes})$, em que $LT_{final} = ET_{final}$;
- Determinar o *Total Float*, denotado por TF_i, que representa o atraso máximo permitido para a ocorrência do evento i, sem prolongar o tempo de execução do projeto. $TF_i = (LT_i - ET_i)$.

Para identificar as atividades que pertencem ao caminho crítico, tendo em consideração a representação em rede AON é fulcral realizar as seguintes tarefas [21]:

- Definir o conjunto de atividades $N = \{1, \dots, n\}$ de um projeto;
- Identificar as relações de precedência ou de subsequência das diversas atividades;
- Determinar o *Early Start Time,* denotado por ES_j, que representa a data mínima para o começo da atividade j. $ES_{inicial} = 0$ e $ES_j = \max(EF_{j\ precedentes})$;
- Determinar o *Early Finish Time*, denotado por EF_j, que representa a data mínima para a conclusão da atividade j. $EF_j = ES_j + d_j$;
- Determinar o *Late Finish Time* da atividade final, que representa a data máxima para a conclusão da atividade final, sem prolongar o tempo de execução do projeto. $LF_{final} = EF_{final}$;
- Determinar o *Late Start Time*, denotado por LS_j, que representa a data máxima para o começo da atividade j. $LS_j = LF_j - d_j$;
- Determinar o *Late Finish Time*, denotado por LF_j, das atividades com sucessoras. $LF_j = \min(LS_{j\ subsequentes})$;
- Determinar o *Total Float*, denotado por TF_j, que representa o atraso máximo permitido para a ocorrência da atividade j, sem prolongar o tempo de execução do projeto. $TF_j = (LS_j - ES_j)$ ou $TF_j = (LF_j - EF_j)$;
- Definir o conjunto de atividades críticas de um projeto. As atividades críticas de um projeto possuem um $TF_j = 0$.

Este método também ajuda no cumprimento dos prazos das atividades inerentes ao projeto e auxilia na alocação eficiente dos diversos recursos, apesar de não os considerar no seu desenvolvimento [19, 22]. Todas estas caraterísticas proporcionam o correto desenvolvimento do cronograma do projeto em questão.

Na Figura 1 está ilustrado um exemplo de como o CPM e o AOA são aplicados em conjunto num projeto, cujos dados para o seu desenvolvimento podem ser observados na Tabela 1.

Tabela 1 - Dados de apoio à representação de um projeto em Rede AOA adaptado de [9]

Atividade	Duração	Precedentes
A	5	-
B	4	-
C	3	-
D	1	A
E	2	C
F	4	B, D e E
G	9	C
H	5	C
I	2	H

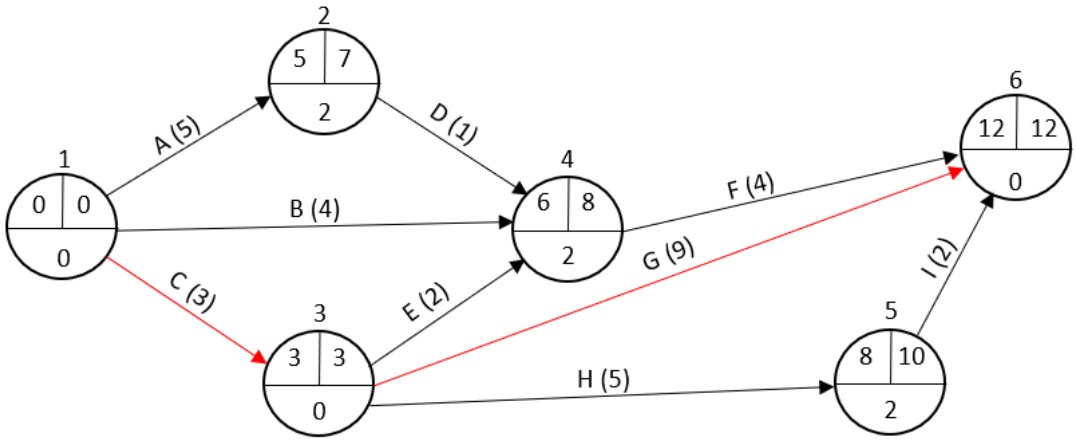

Figura 1 - Representação de um projeto em Rede AOA adaptado de [9]

Como se pode verificar na Figura 1: 1) os eventos 1 e 6 representam o início e o fim do projeto, respetivamente; 2) cada atividade é representada por uma única seta, sendo que nenhuma possui o mesmo nó inicial e final; 3) todas as atividades possuem um nó final com número superior ao inicial. Para demonstrar as restantes caraterísticas considera-se como exemplo o evento 4 cuja data mínima e máxima para ocorrer sem prolongar o tempo de execução do projeto é a unidade de tempo 6 e 8, respetivamente, o que significa que o atraso máximo para a sua ocorrência é de 2 unidade de tempo. Este evento dá início à atividade F que possui como precedentes as atividades B, D e E.

Na Figura 2 está ilustrado um exemplo de como o CPM e o AON podem ser aplicados em conjunto num projeto, cujos dados para o seu desenvolvimento podem ser observados na Tabela 1, anteriormente apresentada.

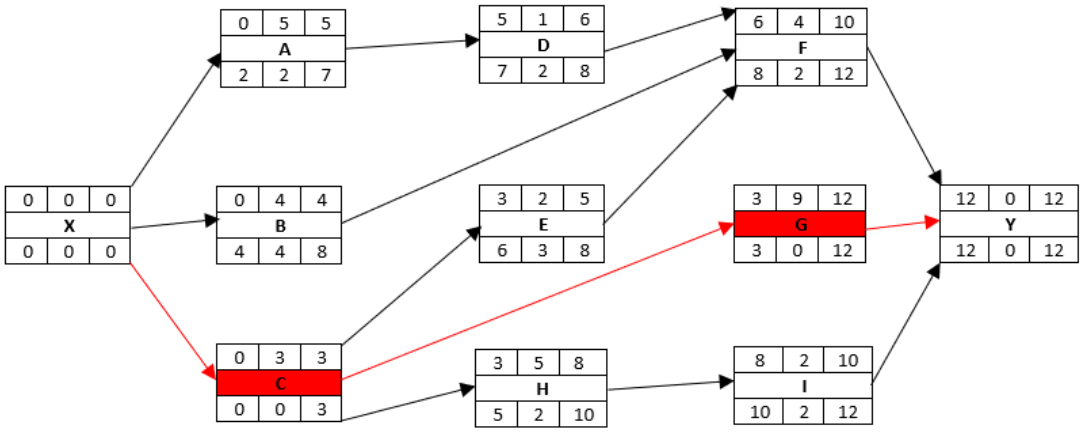

Figura 2 - Representação de um projeto em Rede AON

Como se pode verificar na Figura 2 existem 2 atividades fictícias, X e Y, que representam o início e o fim do projeto, respetivamente. Para demonstrar as restantes caraterísticas considera-se

como exemplo a atividade F cujas precedentes são as atividades B, D e E. Esta possui um ES_F de 6, um EF_F de 10, um LS_F de 8, um LF_F de 12 e um TF_F de 2.

Project Evaluation and Review Technique

O CPM é um método determinístico bastante utilizado, contudo, maior parte dos problemas reais possuem variantes no que remete à duração das atividades do projeto, aumentando a dificuldade do problema [23, 24]. O *Project Evaluation and Review Technique* (PERT) é uma extensão do CPM que ultrapassa esta limitação.

No que engloba a simbologia das diversas variáveis, Herman Steyn e John Nicholas introduziram uma nomenclatura para o PERT [21]. Na Tabela 2 está representada essa mesma nomenclatura com algumas alterações para uniformizar a terminologia utilizada.

Tabela 2 - Nomenclatura PERT [21]

Simbologia	Definição
N	Um conjunto de atividades independentes $N = \{1, \dots, n\}$ de um projeto. O termo "independente" simboliza que a duração de uma atividade não influência a duração de outras
C	O conjunto de atividades críticas de um projeto
m_n	Representa a duração mais provável associada à realização da atividade n
a_n	Representa a duração mínima associada à realização da atividade n
b_n	Representa a duração máxima associada à realização da atividade n
t_n	Representa a duração estimada da atividade n
t_P	Representa a duração estimada do projeto
t_S	Representa a duração pretendida do projeto
σ_n	Representa o desvio padrão da duração da atividade n
σ_P	Representa o desvio padrão da duração do projeto

Segundo Charles Clark, a utilização da distribuição beta é uma possibilidade para determinar o tempo de uma atividade, cuja duração é incerta [25]. Para esse efeito, é necessário verificar o tempo otimista (a), pessimista (b) e mais provável (m) para a conclusão da atividade e, posteriormente, fazer um balanço das três componentes com base na esquação (1). A equação (2) representa o desvio padrão da duração da mesma [26].

$$t_n = (a_n + 4 * m_n + b_n)/6 \quad (1)$$

$$\sigma_n = (b_n - a_n)/6 \quad (2)$$

Com base nestas equações, é possível determinar a duração do projeto e o seu desvio padrão.

$$t_P = \sum_{n \in C} t_n \tag{3}$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{n \in C} {\sigma_n}^2} \tag{4}$$

Por fim, a probabilidade de o projeto acabar antes do tempo pretendido é dada pela equação (5), sendo que $\phi(z)$ representa a função de distribuição cumulativa da distribuição normal standard.

$$\phi(z) = P(t_P \leq t_S) \tag{5}$$

$$Z = (t_S - t_P)/\sigma_P \tag{6}$$

As técnicas retratadas, CPM e PERT, apresentam uma elevada importância nos problemas de escalonamento de projetos, permitindo, principalmente, a existência de um planeamento estruturado e de tomada de decisão informada. Contudo, possuem diversas limitações [21]:

- Antes de ser possível iniciar uma atividade, é necessário que todas as suas precedentes tenham sido concluídas;
- Não é permitido repetir atividades e retornar às suas precedentes;
- O caminho crítico representa a maior duração possível de um projeto;
- Existe apenas um nó final nos projetos que representa a conclusão de todas as atividades inerentes a estes.

Graphical Evaluation and Review Technique

O método *Graphical Evaluation and Review Technique* (GERT) é uma extensão do PERT que ultrapassa estas limitações. Ambos possuem inúmeros aspetos semelhantes, mas o GERT permite a repetição das atividades e utiliza nós que especificam o número de atividades que devem ser concluídas, para ser possível avançar para uma nova atividade [21].

Ou seja, tomando como exemplo a Figura 3, para se iniciar a atividade Y e Z pela primeira vez é indispensável serem concluídas três das quatro atividades (A, B, C e D) que concluem a sua execução neste nó. Posteriormente, para se iniciar de novo as atividades Y e Z, apenas é necessário serem concluídas duas das mesmas quatro atividades [21].

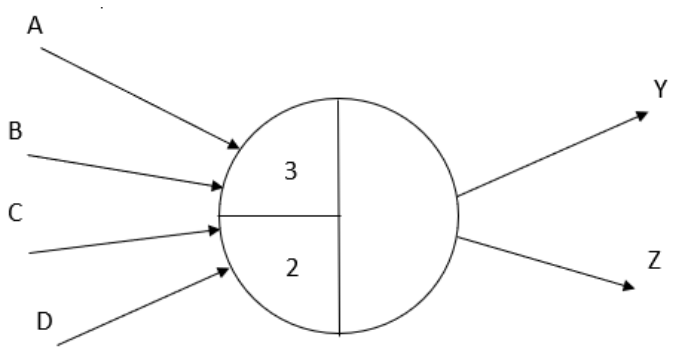

Figura 3 - Representação gráfica I de uma regra em Rede GERT adaptado de [16]

O GERT também possibilita indicar a probabilidade do início de uma atividade, em que a soma destas tem de ser igual a 1. Tomando como exemplo a Figura 4, depois da conclusão da execução das atividades A e B, a probabilidade de a atividade Y ser realizada é de 60%. O ∞ simboliza que este nó só pode ser alcançado uma vez, não permite repetição.

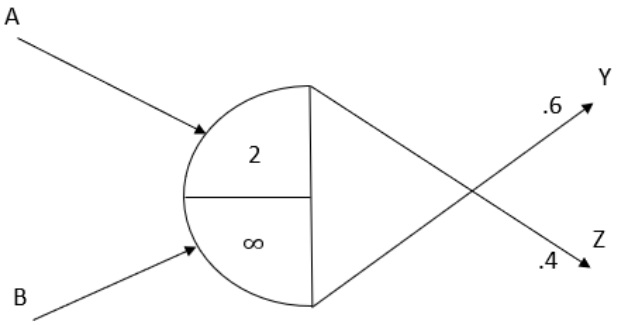

Figura 4 - Representação gráfica II de uma regra em Rede GERT adaptado de [16]

Para simplificar o entendimento dos conceitos abordados, na Figura 5 está representada uma rede de projeto, realizada a partir do GERT.

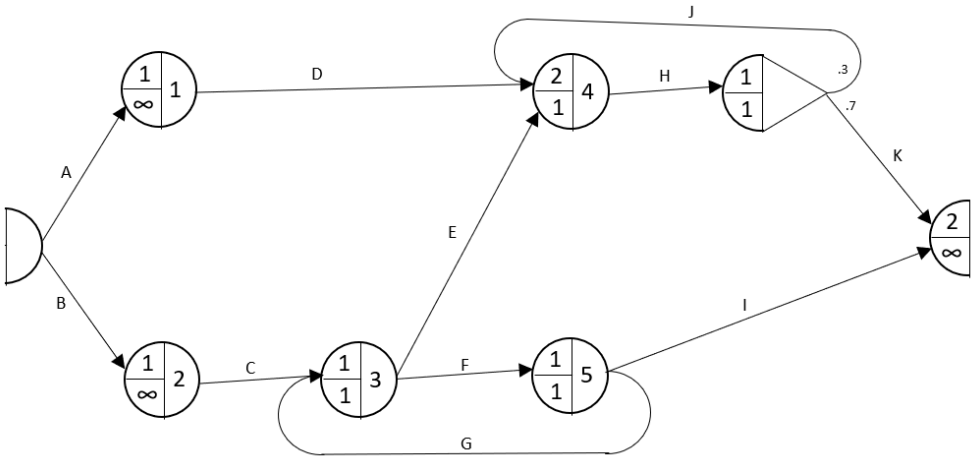

Figura 5 - Representação de um projeto em Rede AON

Como se pode verificar na Figura 5, existem dois eventos que representam o início e o fim do projeto. Para demonstrar as restantes caraterísticas considera-se como exemplo o evento 4, que dá início à atividade H se duas das suas atividades precedentes (D e E) forem concluídas. Isto apenas acontece da primeira vez que se atinge o evento em questão. Das seguintes apenas uma das atividades (D, E ou J) é necessária ser realizada.

2.2.2. Problemas de Escalonamento de Projetos com Restrição de Recursos

O *Resource-Constrained Project Scheduling Problem* (RCPSP), ou problema de escalonamento de projetos com restrição de recursos, é um problema de otimização combinatória bastante conhecido e estudado no campo de escalonamento de projetos, devido à sua utilidade e complexidade em casos reais e académicos. Este tipo de problema foca-se em apresentar soluções, que estão limitadas pelas restrições dos recursos, relacionadas com o

sequenciamento de um conjunto de atividades de forma a cumprir e/ou a otimizar um ou mais objetivos pré-definidos [27, 28].

O RCPSP é considerado um problema NP-difícil, ou seja, não existe um algoritmo que obtenha a solução ótima num tempo eficiente, por isso, na maior parte dos casos, a sua resolução é efetuada a partir de heurísticas e meta-heurísticas [29].

Este tipo de problema permite explorar soluções e abordagens algorítmicas destinadas a otimizar a gestão de projetos em contextos de recursos limitados. Contudo é necessário, primeiramente, compreender as suas diversas nuances, nomeadamente a nomenclatura e a modelação. De seguida está descrita uma das nomenclaturas [30]:

- Existe um conjunto de atividades $V = \{1, \dots, n\}$ de um projeto, no qual não existe prioridade sobre a ordem de realização de cada tarefa, sendo que as atividades 1 e n são atividades fictícias que representam o início e o fim do projeto, respetivamente;
- O fim da atividade i é denotado por f_i;
- A duração da atividade i é denotada por d_i, em que $d_1 = d_n = 0$;
- Existem K tipos de recursos, cuja disponibilidade é r_k unidades, em que $1 \leq k \leq K$;
- Existem P períodos e cada um é representado por t_p, em que $1 \leq p \leq P$;
- Cada atividade i necessita r_{ik} unidades do recurso k, em que $r_{1k} = r_{nk} = 0$, $1 \leq k \leq K$ e $i \in V$;
- x_{ip} representa uma variável binária que indica se a atividade i está a ser realizada no instante p, em que $i \in V$ e $1 \leq p \leq P$;
- Todos os parâmetros são inteiros não negativos.

Existem restrições do tipo *finish-start*, em que $FS = 0$, ou seja, o atraso entre a conclusão de uma atividade e o começo da subsequente é de 0. A formulação apresentada de seguida retrata uma das múltiplas possibilidades de representação, que tem como objetivo diminuir o tempo de execução do projeto, através da equação (7), tendo em consideração a limitação dos recursos inerentes ao mesmo.

$$min\, f_n \tag{7}$$

A equação (8) define o início do projeto para o instante 0. A equação (9) implica que todas as atividades só possam ser iniciadas depois da conclusão das suas precedentes. A equação 10 limita a quantidade máxima permitida a utilizar de cada recurso em cada instante temporal.

$$f_1 = 0 \tag{8}$$

$$f_j \leq f_i - d_i, \text{ em que } i, j \in V \text{ e } j \text{ corresponde às atividades precedentes de } i \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \times r_{ik} \leq r_k, \text{ em que } 1 \leq k \leq K \text{ e } 1 \leq p \leq P \tag{10}$$

2.2.3. Problema de Nivelamento de Recursos

O *Resource Leveling Problem* (RLP), ou, problema de nivelamento de recursos, em semelhança ao RCPSP, é um problema de otimização bastante conhecido e estudado, devido à sua utilidade e complexidade em casos reais e académicos. Este tipo de problema é considerado um problema NP-difícil e foca-se em apresentar soluções cuja finalidade é manter a utilização dos diversos recursos o mais constante possível, sem invalidar o objetivo ou os objetivos principais do projeto em questão [29, 31].

A nomenclatura base referente ao RLP é idêntica ao RCPSP, tal como se pode observar de seguida com um exemplo [32]:

- Existe um conjunto de atividades $N = \{0, \dots, n+1\}$ de um projeto, sendo que a 0 e a $n+1$ são atividades fictícias que representam o início e o fim do projeto, respetivamente;
- A duração da atividade i é denotada por d_i, em que $i \in N$;
- Existem P períodos e cada um é representado por t_p, em que $1 \leq p \leq P$ e t_P representa o prazo do projeto;
- x_{ip} representa uma variável binária que indica se a atividade i está a ser realizada no instante p, em que $i \in V$ e $1 \leq p \leq P$;
- Existem K tipos de recursos e a disponibilidade de cada recurso é r_k unidades, em que $1 \leq k \leq K$;
- A quantidade necessária do recurso r_k para realizar a atividade i é denotada por b_{ki}, em que $1 \leq k \leq K$ e $i \in N$;
- Cada atividade i inicia-se no período S_i, em que $i \in N$;
- A alocação do recurso r_k no período t_p é denotada por u_{kp}, que é cálculo pela expressão $\sum_{i=1}^{n} x_{ip} \times b_{ki}$, em que $1 \leq k \leq K$ e $1 \leq p \leq P$;
- Todos os parâmetros são inteiros não negativos.

A formulação apresentada de seguida retrata uma das múltiplas possibilidades de representação, que tem como objetivo uniformizar a quantidade de recursos utilizados por período, através da equação (11).

$$min \sum_{k=1}^{K} \sum_{p=1}^{P} \left(\frac{(u_{kp})}{r_k}\right)^2 \tag{11}$$

A equação (12) define o fim do projeto para o instante t_P. A equação (13) implica que todas as atividades têm de ser concluídas antes do início das suas subsequentes. A equação (14) limita a quantidade máxima permitida a utilizar de cada recurso em cada instante temporal.

$$S_{n+1} \leq t_P \tag{12}$$

$S_i + d_i \leq S_j$, em que $i, j \in N$ e j corresponde às atividades subsequentes de i (13)

$$u_{kp} \leq r_k, \text{ em que } 1 \leq k \leq K \text{ e } 1 \leq p \leq P \quad (14)$$

2.2.4. Problema de Otimização Multiobjetivo

O M*ultiobjective Optimization Problem* (MOP), ou, problema de otimização multiobjetivo, tem despertado cada vez mais interesse no mundo da engenharia, nomeadamente na área de escalonamento de projetos, devido à sua utilidade em casos reais [33]. É um problema de otimização combinatória [34] com diversas vantagens inerentes à sua aplicação, pois, em oposição ao de otimização de objetivo único, permite ao utilizador selecionar múltiplos critérios de desempenho, de maximização e de minimização, que necessitam de ser atendidos da forma pretendida, consoante cada caso de estudo [35]. Ou seja, o MOP pretende potencializar a solução fornecida através da realização de um balanço da importância dos critérios de desempenho. Este equilíbrio apenas é necessário devido à incompatibilidade das relações entre os diferentes objetivos, o que provoca um aumento significativo na complexidade de resolução destes problemas [11].

Na maioria dos casos de estudo reais, não existe uma única solução ótima, ou seja, uma solução que apresente melhores valores em todos os critérios de desempenho. Com isto, torna-se uma mais valia para um gestor de projetos entender as seguintes caraterísticas do MOP [34]:

- Conjunto de Pareto: conjunto das melhores soluções;
- Dominância de Pareto: uma solução é superior a outra, se apresentar pelo menos um valor de critério de desempenho melhor e valores iguais nos restantes;
- Fronteira de Pareto: soluções pertencentes à mesma fronteira de Pareto não são superiores entre si, mas soluções da fronteira 1 (Conjunto de Pareto) são superiores às da fronteira 2., ou seja, para cada solução pertencente à fronteira 2, existe pelo menos uma solução da fronteira 1 que lhe é superior.

Entender os diversos conceitos abordados tem demonstrado ser um benefício para os gestores de projetos, pois facilitam a resposta aos desafios dinâmicos e multifacetados dos problemas reais, contribuindo para a eficácia e eficiência da gestão dos projetos. O MOP pode ser dividido de múltiplas formas, sendo uma das principais a divisão de acordo com as medidas de desempenho. Problemas do mesmo grupo podem não ser solucionados da mesma forma, mas apresentam algumas semelhanças na sua formulação, logo, pode ser vantajoso conhecer algumas destas subdivisões do MOP:

- Custo/Tempo: representam problemas cujo objetivo é diminuir, simultaneamente, o custo e o *makespan*. É comum, neste assunto, existir um conflito entre a melhoria dos parâmetros, visto que uma diminuição do tempo total de execução de um projeto pode requerer um aumento na quantidade de recursos, uma melhor alocação dos mesmos e manutenção e controlo mais frequentes, sendo que todos estes fatores remetem para um aumento no custo total necessário [36];
- Tempo/Fiabilidade: representam problemas cujo objetivo é diminuir o *makespan* e aumentar a fiabilidade. Uma diminuição no tempo total de execução de um projeto

aumenta o risco e a probabilidade de ocorrerem erros e pode levar à falta de disponibilidade para se realizar um controlo de qualidade adequado [37];

- Custo/Eficiência: representam problemas cujo objetivo é diminuir o custo e aumentar a eficiência global [38]. Um aumento da eficiência pode levar à necessidade de melhorar a alocação dos recursos, de realizar uma avaliação dos riscos e de desenvolver estratégias de mitigação dos mesmos, o que provoca um aumento significativo nos custos do projeto.

2.3. Escalonamento de Múltiplos Projetos

Multiple Project Management (MPM) e *Project Portfolio Management* (PPM) são conceitos fundamentais, quando se aborda o tópico Múltiplos Projetos. O MPM retrata a gestão de vários projetos, simultaneamente, em que estes podem variar: 1) em tamanho, em termos de quantidade de atividades e de espaço temporal; 2) em relevância para a organização e podem estar em diferentes instantes do seu ciclo de vida. O PPM é um conceito mais abrangente do que o MPM, visto que engloba não só gestão dos vários projetos como a seleção destes mesmos [39]. Tal como definido por *Project Management Institute* o foco do MPM é "doing the work right", enquanto o do PPM é "doing the right work" [40].

À semelhança do escalonamento de projetos, o escalonamento de múltiplos projetos carateriza-se por ser o método de agendamento da execução de todas as atividades de cada projeto, tendo em conta diversas restrições associadas aos recursos e aos prazos dos mesmos. Por sua vez, este método não tem em consideração apenas um projeto de cada vez, mas sim vários, cujas finalidades têm de ser cumpridas da melhor forma.

A organização destes problemas, no que remete à tomada de decisão, é crucial para simplificar e diminuir todas as adversidades entre indivíduos. No *basic multi-project scheduling problem* a tomada de decisão é de responsabilidade de uma única pessoa, ou seja, esta programa, globalmente, todo o portfólio do conjunto de projetos. Contudo, na maior parte dos casos reais, a programação do problema é descentralizada, a tomada de decisão é de responsabilidade de um conjunto de indivíduos, o que resulta na necessidade de um mecanismo de coordenação para facilitar as decisões [41].

O escalonamento de múltiplos projetos é uma abordagem que visa abordar uma ampla variedade de desafios do mundo real, cada um com as suas próprias caraterísticas. Desenvolver uma metodologia que resolva todos esses problemas é bastante difícil. De forma a simplificar a sua resolução é importante entender que este tipo de problemas compreende decisões de alocação e de sequenciamento/calendarização.

2.3.1. Problemas de Alocação

Os problemas de alocação são problemas de decisão, pois em ambientes onde existem diversas atividades a ocorrer simultaneamente é fulcral haver uma gestão da distribuição eficiente dos

recursos. Desta forma, é possível realizar todas as atividades, enquanto se atende aos objetivos dos projetos [13].

Embora existam inúmeras dificuldades intrínsecas neste tipo de problemas, é de realçar a sobre-alocação dos recursos, que ocorre quando a necessidade por um recurso num determinado momento ultrapassa a sua disponibilidade. Muitas vezes, para solucionar esta dificuldade, é indispensável realizar uma realocação dos recursos ou recalendarizar as tarefas. Com isto, conclui-se que os problemas de alocação não precedem nem sucedem os problemas de sequenciamento/calendarização. Ambos são solucionados ao mesmo tempo, a fim de existir um balanço entre a diminuição dos recursos necessários para a realização das atividades e a diminuição do tempo de execução dos projetos [42].

2.3.2. Problemas de Sequenciamento/Calendarização

Os problemas de sequenciamento/calendarização, em semelhança aos problemas de alocação, são problemas de decisão, caraterizados por distribuir as atividades no tempo, de forma a atender aos objetivos dos projetos. Este problema pode ser dividido em 2 fases, o sequenciamento, ou ordem em que as atividades serão executadas, e a calendarização das datas da sua execução [43], sendo que o sequenciamento precede ou ocorre simultaneamente à calendarização.

O sequenciamento engloba a determinação da ordem em que as diversas atividades dos projetos devem ser realizadas, identificando as dependências entre estas. Esta etapa apoia a visualização temporal dos projetos, o que permite concluir a execução da primeira fase de um cronograma apropriado. Por sua vez, a calendarização é o processo de atribuir datas específicas às atividades sequenciadas, designando prazos para cada uma, certificando, sempre, que os projetos são exequíveis dentro dos objetivos delineados. A calendarização é a fase final para a obtenção de um cronograma [43].

Com isto conclui-se que ambas as fases são fulcrais para um planeamento, controlo e execução apropriados do escalonamento de múltiplos projetos.

2.3.3. Tipologias de Ambientes de Múltiplos Projetos

A compreensão da dinâmica e estrutura de ambientes de múltiplos projetos demonstra ser essencial para os gestores [44], visto que afeta a eficiência operacional, a alocação de recursos, a mitigação de riscos e a capacidade de se alcançar objetivos previamente definidos. Com isto, é fulcral para um gestor entender as diversas tipologias inerentes neste contexto, nomeadamente as suas definições e caraterísticas.

Num ambiente de múltiplos projetos convergente, a principal particularidade é a integração estratégica e tática de diversos projetos com o intuito de otimizar um objetivo comum. Esta abordagem é adotada quando uma organização procura maximizar os benefícios da colaboração e coordenação dos diversos projetos, de forma a atingir um resultado global mais robusto e eficaz. A diversidade de perspetivas de diferentes projetos possibilita a inovação colaborativa [45].

Por sua vez, num ambiente de múltiplos projetos paralelo, os projetos são, maioritariamente, independentes e abordam problemas de objetivos diferentes, o que permite uma maior flexibilidade na sua gestão. Este fator realça uma menor necessidade de alinhamento e de gestão colaborativa dos projetos, contudo, a mesma permanece fulcral, devido ao compartilhamento de recursos [45].

O ambiente de múltiplos projetos divergente revela ser uma combinação dos dois ambientes anteriormente referidos. Em semelhança ao ambiente paralelo, os projetos possuem objetivos diferentes, mas compartilham uma origem comum, ou seja, derivam do mesmo conjunto de atividades iniciais [45].

As tipologias retratadas apresentam desafios e benefícios caraterísticos, o que remete para a necessidade de o gestor compreender os objetivos organizacionais globais e a natureza de cada projeto, para, posteriormente, selecionar a tipologia que melhor retrata o problema real.

2.4. Modelo Determinístico e Estocástico

No escalonamento de projetos, o modelo adotado para solucionar o problema deve refletir a realidade do mesmo, uma vez que este impacta diretamente a necessidade de compreender e gerir a incerteza e riscos associados aos projetos. Com isto, é fulcral para um gestor entender as diferenças entre os modelos determinísticos e os estocásticos.

Problemas de escalonamento de projetos determinísticos são problemas cujos parâmetros estão definidos [46, 47]. O número e as durações das atividades, os recursos disponíveis, os custos associados e todas a relações de interdependência são consideradas fixas, sem sofrer alteração ao longo dos projetos. No entanto, problemas de escalonamento de projetos estocásticos apresentam variabilidade na informação necessária para os resolver [46 – 48].

Os problemas de escalonamento de projetos reais são, maioritariamente, problemas estocásticos, o que provoca um aumento de complexidade das suas resoluções, portanto, são, tradicionalmente, solucionados a partir de uma abordagem determinística ou a partir de métodos que permitam modelar a incerteza.

Num problema de escalonamento determinístico existe um componente estático, pois apresenta indubitabilidade na duração e no número das diversas atividades dos projetos. Contudo, um problema estático pode não ser determinístico se apenas manifestar ambiguidade nos restantes parâmetros.

2.5. Modelo Estático e Dinâmico

O interesse nos modelos estáticos e dinâmicos tem aumentado por parte das comunidades acadêmicas e profissionais, uma vez que a necessidade de compreender estes conceitos tem se demonstrado urgente e fulcral para ultrapassar diversas adversidades e solucionar problemas em diferentes áreas [49], nomeadamente no escalonamento de projetos. Com isto, torna-se evidente que assimilar a informação relacionada com estes conceitos é um benefício para todos os gestores.

Problemas de escalonamento de projetos estáticos são problemas cujas variáveis referentes ao número de atividades permanecem constantes ao longo do tempo [50]. Por sua vez, no início da gestão de problemas dinâmicos, todas as atividades são desconhecidas, ou seja, existe a possibilidade de se implementar novos projetos ou tarefas em diferentes momentos [51].

Os problemas de escalonamento de projetos reais são, maioritariamente, problemas dinâmicos, o que implica que a solução inicialmente concebida se torne rapidamente desatualizada. Assim sendo, é necessário um maior cuidado e flexibilidade por parte dos gestores para rapidamente adaptarem as soluções de escalonamento e ultrapassarem as diferentes complicações que possam surgir.

Problemas de escalonamento dinâmicos evidenciam caraterísticas estocásticas, visto que demonstram incertezas na quantidade das diversas atividades dos projetos. Por sua vez, problemas estocásticos podem não ser dinâmicos se apenas existir a incerteza em relação aos restantes parâmetros dos problemas.

2.6. Teoria da Complexidade

A diversidade na complexidade de resolução de problemas de escalonamento de projetos é uma caraterística importante, que existe devido à natureza variada dos projetos e das suas restrições. As dependências entre as atividades, as restrições de recursos, o tamanho dos projetos, os objetivos e os critérios de desempenho são algumas das variáveis que contribuem para essa mesma diversidade.

A teoria da complexidade computacional desempenha um papel crucial na identificação e compreensão das limitações e do potencial da computação, permite classificar os problemas conforme a sua complexidade de resolução e ainda avalia o desempenho dos algoritmos [52].

No que engloba a classificação de problemas, esta possibilita uma melhor compreensão sobre a dificuldade intrínseca dos mesmos e verifica a viabilidade de resolver determinado caso de estudo de forma eficiente. Cada categoria desta classificação representa um conjunto de problemas com caraterísticas computacionais semelhantes [29, 44]:

- Classe *P*: problemas de classe *P* são problemas cuja resolução pode ser resolvida em tempo polinomial por uma *Deterministic Turing Machine*, ou seja, o tempo para obter a solução ótima é limitado por uma função polinomial do tamanho da entrada do problema em questão;
- Classe *NP*: problemas de classe *NP* são problemas cuja resolução pode ser resolvida em tempo não polinomial, o que, na maior parte dos casos, resulta numa discrepância enorme no número de ciclos necessários para se obter a solução ótima. Este tipo de problemas apenas pode ser resolvido em tempo polinomial através de uma *Non-Deterministic Turing Machine*;
- Classe *NP-complete*: problemas de classe *NP-complete* pertencem aos problemas de classe *NP* e são de elevada importância, pois a resolução de um destes problemas em tempo polinomial significa que todos os problemas da Classe *NP* também o podem ser;

- Classe *NP-Hard*: problemas de classe *NP-Hard* são problemas cuja dificuldade de resolução é, pelo menos, igual à dos problemas *NP-complete* e simbolizam os problemas mais complexos.

O escalonamento de projetos compreende problemas de decisão e de otimização. Os problemas de decisão são semelhantes aos problemas booleanos, pois são de resposta binária, 1, "sim", ou 0, "não", e podem pertencer à classe P ou à NP. Por sua vez, as soluções dos problemas de otimização podem representar qualquer valor numérico, o que resulta num aumento da complexidade para as obter. Por este motivo, a maior parte destes problemas enquadram-se na classe NP-complete ou na NP-Hard. Ambos estes problemas são utilizados no escalonamento de projetos de forma a solucioná-lo de acordo com os critérios de desempenho [44, 45].

2.7. Métodos de Otimização

A otimização desempenha um papel fundamental no escalonamento de projetos, uma vez que proporciona ferramentas e abordagens que permitem encontrar soluções eficientes e eficazes numa ampla variedade de problemas académicos e reais. O objetivo principal da otimização é identificar a solução mais adequada num determinado caso de estudo [2, 3]. Esta solução, normalmente, é expressa pela maximização ou minimização de uma medida de desempenho ou, ainda, pela ponderação da importância destas mesmas [48]. Com isto, entende-se que o foco primordial da otimização é encontrar o equilíbrio ideal que corresponde aos requisitos específicos do problema, refletindo a relevância relativa das diferentes variáveis e critérios envolvidos [2, 3].

Os métodos de otimização podem ser classificados em métodos exatos ou aproximados. Os métodos exatos procuram a solução ótima, ou seja, a melhor resposta possível tendo em consideração os parâmetros previamente estabelecidos. Por sua vez, os métodos aproximados são abordagens mais flexíveis, simplistas e menos rigorosas, cujo propósito é encontrar soluções eficientes num espaço temporal adequado. Estes são, maioritariamente, utilizados em problemas complexos e de grande escala, nos quais a pesquisa por uma solução ótima é um acontecimento utópico [2, 3].

2.7.1. Métodos Exatos

A gestão eficiente de projetos engloba a alocação de recursos e a programação adequada das diversas atividades com o objetivo de se atingir metas específicas. Para enfrentar estas dificuldades e solucionar o problema global da melhor forma, são utilizados métodos de otimização exatos [2, 3], dos quais se destaca: 1) *Dynamic Programming Methods*, ou, Métodos de Programação Dinâmica e 2) *Branch and Bound Method*, ou, Método de *Branch and Bound*. A escolha do método para solucionar determinado problema depende da complexidade e da natureza específica do mesmo e da eficiência computacional. Com isto, torna-se importante caraterizar em que consiste cada método.

Método de Programação Dinâmica

O método de Programação Dinâmica é definido pelo princípio de Bellman, cujo afirma que uma solução ótima global pode ser formada a partir de soluções ótimas locais, ou seja, é uma técnica de otimização que divide um determinado caso de estudo em problemas mais pequenos e independentes e, posteriormente, procura individualmente e sequencialmente a solução ótima de cada subproblema e, de modo a evitar redundâncias nos cálculos, armazena essa mesma. Por fim, a solução ótima global é dada por todas as soluções ótimas dos subproblemas [54].

A Programação Dinâmica é uma ferramenta eficaz na resolução de problemas de otimização de sistemas dinâmicos, uma vez que possui a capacidade de incluir restrições no seu desenvolvimento e proporcionar uma solução ótima de minimização ou maximização. No entanto, a sua eficiência computacional decresce exponencialmente com o aumento do tamanho do problema, tornando a sua resolução inviável, o que reforça a implementação de outros métodos em problemas de grande escala [55].

Método de *Branch and Bound*

O Método de Branch and Bound é utilizado em problemas de otimização, nos quais inúmeras soluções são avaliadas com o objetivo de se encontrar a melhor (solução ótima) [56, 57].

Esta técnica explora o espaço de soluções de um caso de estudo representado por uma árvore de decisão, na qual cada ramo representa a divisão (*Branch*) do caso em problemas mais simples. Simultaneamente, as ramificações são avaliadas (Bound) e selecionadas para continuarem a ser foco de estudo, ou seja, se determinado ramo não apresentar uma solução melhor do que a obtida até ao momento, é eliminado, permitindo reduzir a complexidade computacional do problema. Este método só termina quando todos os nós forem explorados ou eliminados [56, 57].

Com isto, verifica-se que o método de *Branch and Bound* permite obter a solução ótima sem existir a necessidade de analisar todas as soluções possíveis, tornando-se um método eficaz para resolver problemas de otimização combinatória. No entanto, à semelhança do método de Programação Dinâmica, a sua eficiência computacional decresce exponencialmente com o aumento do tamanho do problema, tornando a sua resolução inviável, o que reforça a implementação de outros métodos em problemas de grande escala [56, 57].

2.7.2. Métodos Aproximados

Em múltiplos casos de gestão de projetos a procura pela solução ótima é altamente complexa e exigente a nível computacional. Nestes cenários, os métodos de otimização aproximados oferecem abordagens com o intuito de solucionar um caso de estudo de forma eficiente, no que engloba a própria solução e o tempo necessário para a obter [20, 58]. Estes métodos podem ser divididos em três grupos: 1) Heurísticas Construtivas; 2) ou, Pesquisa Local e 3) Meta-heurísticas, em que cada grupo aborda problemas de forma única, o que disponibiliza uma elevada flexibilidade na procura por uma solução adequada.

Heurísticas Construtivas

As heurísticas construtivas representam uma abordagem de resolução de problemas de otimização, que criam, passo a passo, soluções a partir do zero, ou seja, a solução inicial é aprimorada incrementalmente, através da adição de decisões individuais que compõem a solução final. No desenvolvimento de cada decisão não existe a ponderação do seu impacto nas posteriores, o que torna as heurísticas construtivas em técnicas míopes [59, 60]. Este fator destaca a ausência de uma visão global do problema o que contribui para um aumento na eficiência computacional em detrimento da eficácia da solução, permitindo a rápida obtenção de uma solução eficiente [20].

Em comparação com os métodos exatos, as heurísticas construtivas são menos eficazes, mas muito mais eficientes, especialmente em problemas de grande dimensão [20].

Pesquisa Local

A pesquisa local inicia-se a partir de uma solução escolhida de forma aleatória ou determinística, cujas vizinhas são analisadas com o objetivo de se verificar a existência de uma melhor solução. Em caso positivo, a nova solução substitui a anterior e passa a ser objeto de estudo, repetindo o mesmo processo. Em caso negativo, a procura por uma melhor solução acaba, o que indica que a atual é a melhor solução encontrada para o problema analisado [61, 62].

A principal adversidade deste método engloba o conceito ótimo local, cujo retrata que uma solução que não apresente melhores vizinhas, não simboliza a inexistência de melhores soluções na grande amplitude do espaço de procura, ou seja, a qualidade de soluções noutro local pode ser melhor [61, 62].

Na Tabela *3* é apresentada toda a informação necessária para a demonstração de um problema simples de maximização de lucro, que depende apenas da ordem de execução das diferentes atividades, de forma a simplificar o entendimento dos conceitos abordados.

Tabela 3 - Informação do problema de maximização de lucro

Atividade	**1**	**2**	**3**	**4**
Lucro se for executada em 1º lugar	20	15	12	30
Lucro se for executada em 2º lugar	17	15	10	5
Lucro se for executada em 3º lugar	12	12	10	15
Lucro se for executada em último lugar	5	1	6	12

Na Tabela 4 é retratado o modo de funcionamento de duas pesquisas locais e de como a solução pode ser afetada pelo ótimo local.

Tabela 4 - Exemplo do funcionamento de duas pesquisas locais e do ótimo local

Etapa	Soluções	$f(x)$
1ª Solução Inicial	1 2 3 4	57
1ª Iteração	2 1 3 4	54
	1 3 2 4	**58**
	1 2 4 3	56
2ª Iteração	3 1 2 4	55
	1 2 3 4	57
	1 3 4 2	48
2ª Solução Inicial	4 2 1 3	66
1ª Iteração	2 4 1 3	41
	4 1 2 3	**67**
	4 2 3 1	60
2ª Iteração	1 4 2 3	45
	4 2 1 3	66
	4 1 3 2	58

Como se pode verificar na Tabela 4, a partir da 1ª solução inicial, o melhor valor obtido foi de 58, valor este que, dada apenas a primeira pesquisa local, seria o melhor valor encontrado (ótimo local). Por sua vez, e após uma 2ª pesquisa local com uma solução inicial distinta, observa-se que existia uma ampla gama de diferentes soluções com valores mais satisfatórios.

O retratado na Tabela 4 é uma abordagem muito utilizada para ultrapassar a dificuldade intrínseca do ótimo local, na qual são utilizadas diferentes soluções iniciais para se explorar um maior número de possíveis soluções [61, 62] .Outros métodos como *Simulated Annealing* [63], *Improved Artificial Bee Colony Algorithm* [64] compreendidos nas meta-heurísticas, também foram propostos para ultrapassar esta dificuldade.

2.8. Meta-heurísticas

As meta-heurísticas são abordagens de otimização que solucionam problemas complexos e de difícil resolução de forma eficiente. Intensificação, diversificação e aprendizagem são os três pilares fundamentais em meta-heurísticas, que representam o triângulo *Intensification, Diversification and Learning*, apesar deste último não estar presente em todas as meta--heurísticas. Cada um destes conceitos desempenha um papel distinto, mas inter-relacionado, na procura por soluções eficientes [47, 48].

- Intensificação: representa o ênfase dado na procura por soluções numa região conhecida, ou seja, um espaço onde, normalmente, foram identificadas soluções com potencial. Métodos que utilizam excessivamente intensificação podem levar à convergência prematura das soluções, o que leva à supressão da exploração de outros locais, como é o caso da pesquisa local [66].

- Diversificação: representa a ênfase dado na procura por soluções em novas áreas do espaço de pesquisa, mesmo quando se identificaram soluções promissoras nas áreas conhecidas do espaço de soluções. Um método com muita diversificação na sua metodologia pode se assemelhar com uma pesquisa não guiada, ou aleatória [66].
- Aprendizagem: representa a capacidade de um algoritmo ajustar a sua pesquisa com base em soluções anteriores, ou seja, permite que a meta-heurística adapte as suas estratégias de pesquisa ao longo do tempo, através da informação sobre o desempenho das diversas soluções previamente identificadas. Este pilar é crucial para melhorar a eficiência de um método, pois proporciona um ajuste dinâmico às caraterísticas do problema [65].

O balanço entre a intensificação e a diversificação é uma parte intrínseca e fulcral na eficácia e na eficiência das meta-heurísticas, pois estes conceitos retratam abordagens distintas para explorar determinado problema e, por isso, são, frequentemente, utilizados em conjunto para encontrar um equilíbrio entre a pesquisa de novos locais e a pesquisa de locais conhecidos. O terceiro pilar, aprendizagem, apoia a identificação do balanço ideal, pois permite um ciclo contínuo de diversificação e intensificação, ou seja, permite que o algoritmo explore novas áreas, se adapte com as experiências e se concentre nas regiões mais promissoras de encontrar uma solução semelhante à ideal [47, 48].

As meta-heurísticas podem ser divididas em dois grupos, com base na forma de pesquisa pela melhor solução: 1) Solução Única; 2) População. As de solução única utilizam uma única solução candidata em cada iteração, na qual a solução atual é modificada e aceite, dependendo dos critérios que apresentar e do método considerado [67]. Os mais frequentes são *Simulated Annealing* [68], *Tabu Search* [68], *Iterated Local Search* [69], *Variable Neighbourhood Search* [70] e *Guided Local Search* [71]. As meta-heurísticas de população utilizam várias soluções candidatas, que interagem entre si ou são modificadas individualmente e simultaneamente, permitindo explorar o local de pesquisa de forma colaborativa ou competitiva [67]. As meta--heurísticas de população mais frequentes são *Genetic Algorithms* (GA) [72], *Ant Colony Optimization* [73], *Artificial Bee Colony* [74], *Particle Swarm Optimization* [75].

2.8.1. Simulated Annealing

Em 1983, Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi [76] apresentaram o *Simulated Annealing*. A abordagem utilizada foi concebida com inspiração no processo de tratamento térmico dos materiais metálicos: 1) Um material é aquecido a elevadas temperaturas até fundir, o que proporciona um maior movimento aleatório das partículas que o compõem. Este aquecimento simboliza a procura aleatória por uma solução eficiente no espaço global, em que uma maior temperatura permite uma exploração mais ampla e aleatória; 2) A diminuição lenta da temperatura no processo térmico favorece a configuração das partículas do material em posições melhores e mais estáveis. Esta caraterística reflete o foco gradual da procura por uma solução eficiente em regiões promissoras, ou seja, à medida que o algoritmo progride, a temperatura diminui, o que reduz a probabilidade de aceitação de soluções piores do que as encontradas [58, 59].

O SA inicia-se a partir de uma solução escolhida de forma aleatória ou determinística, cujas vizinhas são analisadas com o objetivo de se verificar a existência de uma melhor solução. Em caso positivo, a nova solução, ou, solução candidata, substitui a anterior e passa a ser objeto de estudo, repetindo o mesmo processo. Em caso negativo, existe uma probabilidade de aceitação, definida pela equação (15), que indica se a solução candidata substitui a atual [59, 60].

$$P_a(s`) = e^{-\frac{f(s`)-f(s)}{T}} \tag{15}$$

Como se pode verificar com a equação 7, quanto menor a diferença entre as duas soluções, maior será a probabilidade de aceitar a solução candidata com pior desempenho. Além disto, e como explicado anteriormente, uma maior temperatura tem o mesmo efeito.

O SA é uma meta-heurística que possui inicialmente uma pesquisa muito diversificada e pouco intensa, caraterísticas estas que se vão invertendo no decorrer da pesquisa, ou seja, à medida que a temperatura, T, diminui, existe um maior foco na exploração de locais promissores. Contudo, devido ao facto de, por vezes, serem aceites soluções piores do que as atuais, a solução final pode não corresponder à melhor solução encontrada, o que remete para a necessidade de se guardar sempre a melhor solução encontrada até ao momento [58, 59].

O arrefecimento da temperatura é um componente crucial no algoritmo SA que pode influenciar a eficiência e o desempenho do método em questão. Por isso, torna-se essencial para um utilizador desta meta-heurística ter o conhecimento em relação a algumas formas de execução desse mesmo arrefecimento, para assim selecionar a mais adequada para solucionar o seu caso de estudo [61 – 63].

- Linear: a temperatura é reduzida linearmente em cada iteração, ou seja, existe um decremento constante na temperatura. $T_k = T_0 - k \times \beta$, em que β é uma constante definida no início de cada caso de estudo;
- Geométrica: a diminuição da temperatura é cada vez menos acentuada à medida que se progride no algoritmo. $T_k = T_0 \times \alpha^k$, em que $\alpha \in]0{,}1[$ é uma constante definida no início de cada caso de estudo;
- Logarítmica: a temperatura é atualizada de acordo com uma função logarítmica. Esta abordagem ao arrefecimento permite uma melhor aproximação da solução encontrada com a ótima, contudo existe um vultoso número de iterações necessárias a serem realizadas. $T_k = \frac{T_0}{\log(k+v)}$, em que v é uma constante definida no início de cada caso de estudo.

O algoritmo base referente ao *Simulated Annealing* pode ser observado na Tabela 5, em que: 1) ψ simboliza a expressão "melhor do que"; 2) $v(s)$ representa o conjunto de vizinhos da solução em análise (s); 3) $T_{máx}$ e $T_{mín}$ representam a temperatura inicial e final, respetivamente; 4) $L_{máx}$ representa o número de soluções a analisar para cada valor de T.

Tabela 5 - Algoritmo base do *Simulated Annealing* adaptado de [76]

$s = s_{inicial}$

$s_{melhor} = s_{inicial}$

$T = T_{máx}$

While $T > T_{mín}$ **Do**

$L = 0$

While $L < L_{máx}$ **Do**

selecionar aleatoriamente $s` \in v(s)$

If $f(s`)\ \psi\ f(s_{melhor})$ **Then**

$s_{melhor} = s`$

$s = s`$

Else

if $f(s`)\ \psi\ f(s)$ **Then**

$s = s`$

Else

$s = s`$, em que a probabilidade de aceitação é dada pela equação 7

End If

End If

$L = L + 1$

End While

Diminuir T

End While

Return $f(s_{melhor})$

O Simulated Annealing proporciona uma abordagem robusta e versátil para a resolução de problemas de otimização. Destaca-se pela sua capacidade de explorar diversos locais de pesquisa, contudo, a sua aplicação adequada requer um ajuste dos seus parâmetros e uma compreensão detalhada do problema. A grande flexibilidade e aplicabilidade do SA torna este método numa das meta-heurísticas mais estudadas e investigadas.

2.8.2. Bat Algorithm

Em 2010, Yang [82] propôs o *Bat Algorithm* (BA), baseado no comportamento de ecolocalização dos morcegos. Este método segue uma abordagem de população, visto que utiliza várias

soluções candidatas ao mesmo tempo, que interagem entre si e são modificadas individualmente, permitindo explorar o local de pesquisa de forma colaborativa. É um método criado com o propósito de encontrar boas soluções em diferentes problemas [64 – 66] e que explora os três pilares das meta-heurísticas iterativamente.

Todos os morcegos utilizam ecolocalização para se deslocarem de forma segura, identificarem e localizarem presas e predadores. Na inicialização do processo de caça ou de fuga, os morcegos encontram-se num dado espaço físico (s_i), deslocam-se com uma determinada velocidade (v_i), emitem diferentes frequências (f_i) e intensidades (A_i) de sons, e a taxa de emissão (r_i) destes sons, também, é distinta. Posteriormente, os morcegos adaptam-se e alteram estas caraterísticas a cada instante temporal (L) para desta forma se aproximarem das presas e/ou fugirem dos predadores. O Algoritmo dos Morcegos utiliza a mesma lógica, visto que todos estes parâmetros são alterados iterativamente com o objetivo de se alcançar a solução ótima (presa), enquanto se salvaguarda das soluções não eficientes (predadores) [64 – 66].

O BA inicia-se a partir de um conjunto de soluções (colónia de morcegos) escolhidas de forma aleatória ou determinística, que são analisadas e alteradas com o objetivo de se verificar a existência de uma melhor solução. Primeiramente, a posição (solução), a velocidade e a frequência de cada solução são alteradas segundo as equações (16), (17) e (18), respetivamente, em que $\beta \in [0; 1]$ e s_{melhor} representa a melhor solução conhecida até ao momento [82].

$$s_i^L = s_i^{L-1} + v_i^L \tag{16}$$

$$v_i^L = v_i^{L-1} + (s_i^L - s_{melhor}) \times f_i \tag{17}$$

$$f_i = f_{mín} + (f_{máx} - f_{mín}) \times \beta \tag{18}$$

Posteriormente a estas alterações, é introduzido, aleatoriamente, um valor e verificado se este valor é superior à taxa de emissão de sons de cada morcego. Em caso positivo, a solução atual (s_i^L) é substituída por uma solução próxima de uma das melhores soluções guardadas (m_i^L). Em caso negativo, a solução atual é substituída por uma solução aleatória (x_i^L) [82]. Esta etapa permite concluir que: 1) quanto maior o valor da taxa de emissão de sons de um morcego em determinado instante (r_i^L), maior será a procura por uma solução num local desconhecido em contraste com a procura por uma solução num local conhecido, o que indica uma maior diversificação do algoritmo. O oposto indica uma maior intensificação do algoritmo; 2) o 3º pilar das meta-heurísticas está presente no Algoritmo de Morcegos, visto que existem soluções que são alteradas consoante soluções anteriormente encontradas.

De seguida, é introduzido, aleatoriamente, um valor e verificado: 1) se este é inferior à intensidade dos sons imitidos por cada morcego em determinado instante (A_i^L); 2) se a solução atual de cada morcego é melhor do que a melhor solução guardada até ao momento. Se ambas as condições para cada morcego, individualmente, forem cumpridas, então: 1) a solução é guardada como uma das melhores soluções; 2) a taxa de emissão de sons aumenta; 3) a intensidade dos sons imitidos diminui [82]. Esta etapa permite concluir que quanto maior o

valor da intensidade dos sons de um morcego em determinado instante, maior será a probabilidade de aceitação de uma solução melhor.

Por último, se uma das soluções acabadas de guardar for melhor do que todas as outras, então substitui a melhor solução encontrada até ao momento [82].

Estas quatro fases são repetidas um número definido de vezes ($L_{máx}$), em que no final do ciclo é apresentado a melhor solução, bem com toda a informação pretendida pelo utilizador [82].

O algoritmo base referente ao Algoritmo de Morcego pode ser observado na Tabela 6.

Tabela 6 - Algoritmo base do Algoritmo de Morcego adaptado de [82]

$L = 0$

While $L < L_{máx}$ **Do**

$f_i = f_{mín} + (f_{máx} - f_{mín}) \times \beta$

$v_i^L = v_i^{L-1} + (s_i^L - s_{melhor}) \times f_i$

$s_i^L = s_i^{L-1} + v_i^L$

If $rand > r_i^L$ **Then**

Selecionar uma solução aleatoriamente das melhores m_i^L

$s_i^L = m_i^L + \epsilon \times \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i^L}{N}$

Else

$s_i^L = x_i^L$; Solução gerada aleatoriamente

End If

If $rand < A_i \ \wedge \ f(s_i^L) \ \psi \ f(s_{melhor})$ **Then**

$m_i^L = \ s_i^L$

$A_i^{t+1} = \alpha \times A_i^t$

$r_i^{t+1} = r_i^{inicial} \times [1 - e^{-\gamma L}]$

End If

If $f\left(m_i^L\right) \ \psi = \ f(m_j^L)$; em que $j \in N/\{i\}$ **Then**

$s_{melhor} = \ m_i^L$

End If

$L = L + 1$

End While

Return s_{melhor} e $f(s_{melhor})$

O Algoritmo de Morcego é uma técnica de otimização flexível e simples de implementar, visto que apresenta parâmetros ajustáveis, o que proporciona uma possível aplicação em diferentes contextos e prolemas. O algoritmo possui a capacidade de encontrar um equilíbrio eficiente entre explorar novas regiões do espaço de soluções e regiões que, previamente, demonstraram ser promissoras, o que contribui para a ideia deste algoritmo incorporar os três pilares das meta-heurísticas [85].

A utilização deste método de otimização tem sido provada uma mais-valia em múltiplos problemas, através da sua implementação e comparação com outros métodos. Ramesh et al. [86] apresentaram um estudo, cujo objetivo era comparar a eficiência e eficácia deste algoritmo com o *Ant Colony Algorithm*, entre outros, para solucionar um problema de "*Combined Economic Load and Emission Dispatch"*, e os resultados demonstraram que o BA era superior. Hesam e Farid [87] divulgaram um estudo, cujo objetivo era analisar o BA para solucionar um problema de "*Estimation of Air Overpressure*", em que as conclusões apresentadas pelos autores foram positivas, visto que as soluções obtidas eram eficazes e eficientes, autores estes que referem que o BA é um método robusto e versátil.

2.9. Análise Bibliométrica

Com o intuito de se realizar a análise bibliométrica foi utilizado o *Web of Science* para recolher dados relevantes das diversas publicações relacionadas com a otimização de escalonamento de múltiplos projetos. Posteriormente, foi utilizado o *VOSviewer* para apresentar esquemas que representam informação pertinente e importante nesta temática de análise.

Relativamente à *search query* utilizada no *Web of Science*, a categoria em ambas as fases é "Topic", sendo que a primeira engloba o escalonamento de múltiplos projetos e a segunda engloba o conceito de otimização, nomeadamente meta-heurísticas, com destaque para a SA. Ou seja, a *query* é representada por ("multi-project scheduling" or "multiproject scheduling" or "multiple project scheduling") and ("metaheuristics" or "meta-heuristics" or "metaheuristic" or "meta-heuristic" or "Simulated Annealing" or "optimization"), a qual permitiu obter 112 publicações.

O termo "escalonamento de múltiplos projetos" faz parte da *query*, uma vez que é à volta deste conceito que a dissertação se desenvolve. Para se obter um maior número de publicações é necessário mencionar os conceitos em inglês, logo foram utilizadas as principais formas que os diversos autores costumam referir o escalonamento de múltiplos projetos.

Relativamente à segunda parte da query, "otimização" é um conceito crucial, visto que o objetivo desta dissertação é a criação de uma ferramenta de otimização para apoio ao escalonamento de múltiplos projetos. O conceito "meta-heurísticas" surge, pois o método que será utilizado no protótipo é o Simulated Annealing, uma meta-heurística. As diversas nomenclaturas utilizadas para traduzir "meta-heurísticas" advêm para englobar as principais formas utilizadas pelos autores de referir este conceito.

Na Figura 6, é possível observar um crescente número de artigos publicados relacionados com a otimização de escalonamento de múltiplos projetos ao longo dos anos, o que reflete o aumento do interesse neste campo de pesquisa.

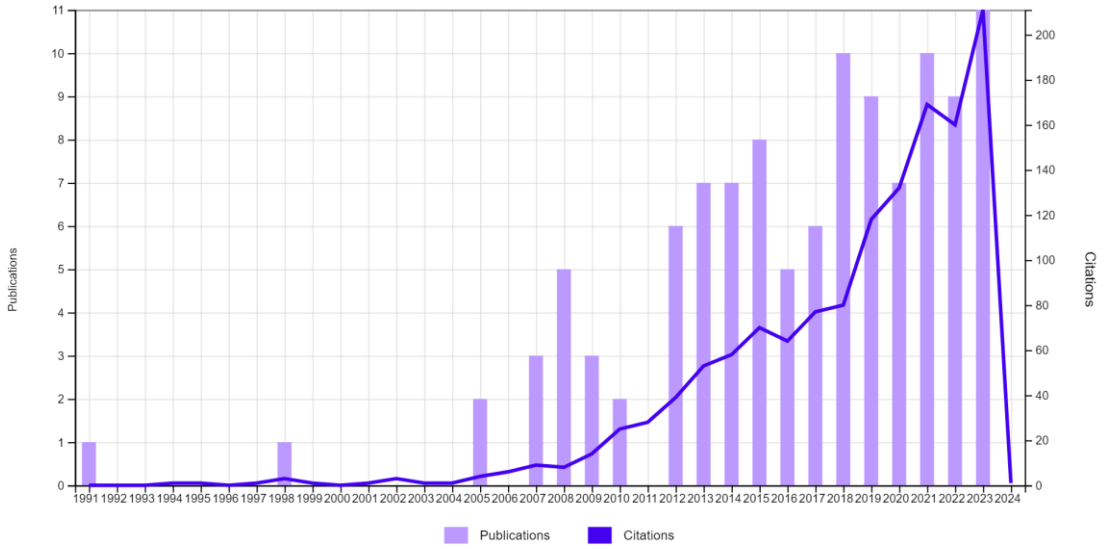

Figura 6 - Publicações por ano no contexto de otimização de escalonamento de múltiplos projetos

A Figura 7 mostra as principais áreas de investigação da temática de estudo.

Figura 7 - Publicações por área de investigação

Como se pode observar na Figura 7, a área associada ao maior número de artigos publicados é a “Operations Research Management Science” o que é espectável, visto que é uma área que utiliza métodos analíticos e técnicas quantitativas para auxiliar na tomada de decisão. Outras áreas intrínsecas na engenharia, nomeadamente “Engineering Industrial” e “Engineering Multidisciplinary”, e na ciência da computação, nomeadamente, “Computer Science Artificial Intelligence” e “Computer Science Interdisciplinary Applications”, evidenciam uma elevada contribuição para a crescente publicação de artigos, devido à relação existente entre estas áreas e o campo de pesquisa.

A Figura 8 apresenta as palavras-chave, relacionadas com a otimização do escalonamento de múltiplos projetos, mais utilizadas pelos autores.

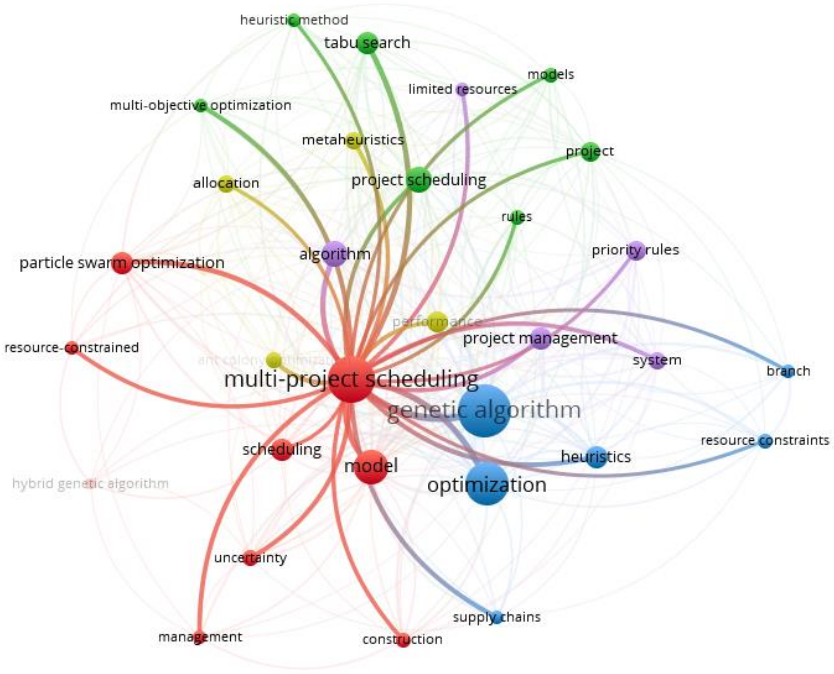

Figura 8 - Palavras-chave mais utilizadas no contexto de otimização de escalonamento de múltiplos projetos

Pela análise da Figura 8 verifica-se que algumas das principais palavras-chave são, previsivelmente, “multi-project scheduling” e “optimization”, visto que são expressões que fazem parte da *query* e do tema em questão. Contudo, “genetic algorithm”, uma outra meta-heurística, demonstrou ser a mais referida, o que reflete a sua importância e aplicabilidade na temática em análise. Também, é necessário realçar “algorithm” e “model”, pois, frequentemente, os métodos de otimização incorporam algoritmos e modelos, matemáticos ou de simulação, para solucionar um problema. Destes métodos, podemos destacar “heuristics” e “metaheuristics”, pois evidenciam ser componentes fundamentais para diversos autores obterem uma solução eficiente em diferentes contextos de escalonamento de múltiplos projetos. A palavra “performance” é amplamente utilizada no contexto empresarial e simboliza o desempenho da realização das atividades dos projetos, ou seja, quanto melhor os resultados a nível de eficácia e de eficiência de um sistema, melhor é a performance desse mesmo. Por fim, “allocation” e “resource constraints”, “resource-constrained” ou “limited resources” são conceitos intrínsecos neste campo de pesquisa, uma vez que num ambiente de múltiplos projetos existem atividades que requerem o mesmo tipo de recursos e, devido ao facto de estes serem finitos, é necessário realizar uma alocação eficiente dos mesmos.

Casos de estudo

Serão abordados de seguida os dois artigos de maior importância e pertinência, resultantes de uma análise mais abrangente da otimização de escalonamento de múltiplos projetos. O objetivo desta análise é demonstrar, de forma clara, o objetivo pretendido pelos autores no

desenvolvimento das suas publicações, bem como a metodologia adotada e as conclusões derivadas dos métodos criados, o que proporciona uma contribuição significativa para a literatura existente.

A genetic algorithm for the resource constrained multi-project scheduling problem [88]

O artigo [88] apresenta uma nova abordagem para solucionar o *Resource-Constrained Multiple Project Scheduling Problem* (RCMPSP). Este tipo de problema é bastante semelhante ao RCPSP, retratado na presente dissertação, com a diferença de poderem ser realizados múltiplos projetos simultaneamente, o que aumenta a complexidade de resolução (problema NP-hard).

A abordagem retratada no artigo engloba: 1) a utilização de uma meta-heurística já existente, Algoritmo Genético, com base em chaves aleatórias; 2) um procedimento de criação de cronogramas ativos parametrizados, o que indica uma perspetiva dinâmica de solução; 3) uma nova forma de medir o desempenho do protótipo criado, a qual considera prazos, stock, restrições e atividades previamente iniciadas.

Os autores avaliaram o desempenho (performance) do GA num conjunto de problemas distintos, com diferentes quantidades de projetos e atividades. Os resultados demonstraram que este método pode encontrar soluções de alta qualidade, próximas da ótima, num período aceitável, o que valida a eficácia e eficiência desta abordagem.

Hybrid of genetic algorithm and simulated annealing for multiple project scheduling with multiple resource constraints [89]

O artigo [89] apresenta uma nova abordagem, GA-SA Hybrid, para solucionar o RCMPSP. Esta abordagem tem como base o método GA, com algumas caraterísticas do SA, nomeadamente: 1) existir uma probabilidade de aceitação de uma solução menos eficiente do que as encontradas até ao momento; 2) uma diminuição da probabilidade de aceitação, no decorrer do algoritmo.

Os autores procuraram validar o GA-SA Hybrid através da comparação dos resultados apresentados por este método com o SA, modified SA, GA e algumas das heurísticas mais investigadas nesta temática, em três casos de estudo de teste e três casos reais. De forma a tornar a análise fiável entre as diversas meta-heurísticas, o número de soluções obtidas (10 000) foi igual para todas. O desempenho do GA-SA Hybrid foi constantemente eficiente e comprovou ser a segunda melhor meta-heurística para resolver os casos de estudo de teste e a melhor para os casos reais. Fatores que os autores dizem ser indicativos do método se tornar mais adequado quanto maior for a complexidade do problema.

3. Métodos e Aplicação

Este capítulo tem como objetivo apresentar o problema central abordado nesta dissertação, bem como o método de resolução proposto para otimizar o escalonamento de projetos e múltiplos projetos. A complexidade deste problema consiste na necessidade de tomar decisões eficientes sobre a alocação de recursos, sequenciamento de atividades e calendarização, garantindo que as restrições impostas em cada contexto sejam respeitadas.

Para atingir os objetivos estabelecidos, este capítulo está dividido em quatro. Primeira (3.1) é descrito, detalhadamente, o problema de escalonamento, abordando os desafios específicos relacionados com o RCPSP e RCMPSP. Posteriormente (3.2), é apresentada a formulação matemática do problema, bem como diversas caraterísticas relacionadas com a meta-heurística utilizada no protótipo. Já na terceira secção (3.3) é descrita a implementação computacional, com ênfase na interface do utilizador do PDD. Por último (3.4), aborda-se o modo de verificação da aplicabilidade e do desempenho de um protótipo no contexto desta dissertação.

3.1. Descrição do problema

Nesta dissertação, o protótipo de apoio ao escalonamento de projetos e de múltiplos projetos tem como objetivo solucionar de forma eficiente e eficaz um conjunto de problemas reais que compreendem decisões relacionadas com a alocação, sequenciamento e calendarização dos diversos componentes a eles associados.

Os problemas considerados para o desenvolvimento deste protótipo foram o RCPSP e o RCMPSP, sendo estes os dois problemas mais investigados e utilizados nas empresas da atualidade. Esta escolha também se deveu à complexidade dos problemas, que são NP-Hard, o que destaca a importância de se desenvolver/aplicar heurísticas e/ou meta-heurísticas eficientes para os solucionar.

O RCPSP e o RCMPSP são problemas que envolvem inúmeras questões e restrições que variam de problema para problema, contudo um fator comum é que a informação considerada é determinística e estática, ou seja, durante todo o processo de procura por soluções eficientes de um problema, a informação é conhecida e não se altera. No que remete o primeiro grupo, as instâncias do caso de estudo estão disponíveis na base de dados *Project Scheduling Problem Library* (PSPLIB) [90]. Para os RCMPSP, as instâncias do caso de estudo estão disponíveis na base de dados *Multi Project Scheduling Problems Library* (MPSPLIB)[91].

Relativamente às instâncias do problema RCPSP em análise: 1) cada projeto é composto por $n + 2$ atividades, às quais estão associadas relações de precedência, uma duração e requisitos de recursos específicos para a sua execução; 2) existem 2 atividades fictícias que representam o início e o fim do projeto; 3) apresentam o prazo para a conclusão do projeto e a penalidade associada ao seu atraso; e 4) existem apenas 4 variedades de recursos renováveis disponíveis para serem alocados às tarefas do projeto.

Na Figura 9 pode ser analisado um exemplo da informação disponível em cada caso.

```
file with basedata            : j30_17.bas
initial value random generator: 28123
************************************************
projects                      :  1
jobs (incl. supersource/sink ):  32
horizon                       :  158
RESOURCES
  - renewable                 :  4   R
  - nonrenewable              :  0   N
  - doubly constrained        :  0   D
************************************************
PROJECT INFORMATION:
pronr.  #jobs rel.date duedate tardcost  MPM-Time
    1     30      0       38       26       38
************************************************
PRECEDENCE RELATIONS:
jobnr.    #modes  #successors   successors
   1        1          3           2   3   4
   2        1          3           6  11  15
   3        1          3           7   8  13
   4        1          3           5   9  10
   5        1          1          20
   6        1          1          30
   7        1          1          27
   8        1          3          12  19  27
   9        1          1          14
  10        1          2          16  25
  11        1          2          20  26
  12        1          1          14
  13        1          2          17  18
  14        1          1          17
  15        1          1          25
  16        1          2          21  22
  17        1          1          22
  18        1          2          20  22
  19        1          2          24  29
  20        1          2          23  25
  21        1          1          28
  22        1          1          23
  23        1          1          24
  24        1          1          30
  25        1          1          30
  26        1          1          31
  27        1          1          28
  28        1          1          31
  29        1          1          32
  30        1          1          32
  31        1          1          32
  32        1          0
```

```
REQUESTS/DURATIONS:
jobnr. mode duration  R 1  R 2  R 3  R 4
------------------------------------------
  1      1     0       0    0    0    0
  2      1     8       4    0    0    0
  3      1     4      10    0    0    0
  4      1     6       0    0    0    3
  5      1     3       3    0    0    0
  6      1     8       0    0    0    8
  7      1     5       4    0    0    0
  8      1     9       0    1    0    0
  9      1     2       6    0    0    0
 10      1     7       0    0    0    1
 11      1     9       0    5    0    0
 12      1     2       0    7    0    0
 13      1     6       4    0    0    0
 14      1     3       0    8    0    0
 15      1     9       3    0    0    0
 16      1    10       0    0    0    5
 17      1     6       0    0    0    8
 18      1     5       0    0    0    7
 19      1     3       0    1    0    0
 20      1     7       0   10    0    0
 21      1     2       0    0    0    6
 22      1     7       2    0    0    0
 23      1     2       3    0    0    0
 24      1     3       0    9    0    0
 25      1     3       4    0    0    0
 26      1     7       0    0    4    0
 27      1     8       0    0    0    7
 28      1     3       0    8    0    0
 29      1     7       0    7    0    0
 30      1     2       0    7    0    0
 31      1     2       0    0    2    0
 32      1     0       0    0    0    0
******************************************
RESOURCEAVAILABILITIES:
  R 1  R 2  R 3  R 4
   12   13    4   12
```

Figura 9 – Informação de um RCPSP

Já para as instâncias do problema RCMPSP: 1) cada múltiplo projeto é composto por n instância do RCPSP; 2) podem existir recursos globais, ou seja, recursos que necessitam de ser alocados a diferentes atividades de diferentes projetos; e 3) cada projeto apenas pode ser iniciado depois de uma data específica.

Um exemplo da informação disponível em cada caso de RCMPSP é composta por n redes, como a representada na Figura 9, e pela Figura 10. Esta última remete para os dados que não constam nos RCPSP.

```
<mp-list>
  <mp>
    <name>mp_j30_a2_nr3</name>
    <project-list>
      <project>
        <filename>KolischInstanzen/j30/j304_2.sm</filename>
        <start>0</start>
      </project>
      <project>
        <filename>KolischInstanzen/j30/j301_4.sm</filename>
        <start>4</start>
      </project>
    </project-list>
    <resources>
      <resource>22</resource>
      <resource>16</resource>
      <resource>0</resource>
      <resource>0</resource>
    </resources>
  </mp>
</mp-list>
```

Figura 10 - Informação adicional de um RCMPSP

3.2. Descrição da solução

O PDD aplica a meta-heurística Simulated Annealing, anteriormente descrita, para resolver problemas de escalonamento de projetos e múltiplos projetos. A seleção desta meta-heurística assenta no facto de ser eficiente e flexível em problemas complexos e de permitir um equilíbrio entre explorar novas áreas do espaço de soluções e regiões que, previamente, demonstraram ser promissoras. Por sua vez, o protótipo foi desenvolvido na linguagem de programação Python, recorrendo ao Visual Studio Code.

3.2.1. Método exato

Inicialmente foi necessário desenvolver uma nomenclatura e uma formulação que retratassem uma das múltiplas possibilidades de formulação dos RCPSP e RCMPSP. Este desenvolvimento foi um processo que se fundamentou na revisão da literatura existente, bem como na análise cuidadosa dos dados disponíveis dos casos de estudo selecionados e embora tenha sido

essencial compreender e adaptar as representações previamente propostas, foi imprescindível criar uma abordagem inovadora e distinta.

De seguida é apresentada a formulação desenvolvida para o RCPSP de forma detalhada.

$$S_{it} \in \{0; 1\}, \text{ em que } 1 \leq i \leq I \text{ e } 1 \leq t \leq T \tag{19}$$

S_{it}, é uma variável de decisão binária que indica se a atividade i inicia no instante t. Sendo que I representa o número total de atividades do projeto, contabilizando as atividades fictícias e T simboliza a soma das durações de todas as atividades.

$$\sum_{t=1}^{T} S_{it} = 1, \text{ em que } 1 \leq i \leq I \tag{20}$$

$$X_{it} = \sum_{m=t-(d_i-1)}^{t} S_{im}, \text{ em que } 1 \leq i \leq I \text{ e } 1 \leq t \leq T \tag{21}$$

A equação (20) garante que a atividade i é iniciada uma vez.

X_{it}, é uma variável de decisão binária que indica se a atividade i é realizada no instante t. A equação (21) assegura que a atividade i é realizada sem interrupções (*non preemptable*).

$$\sum_{m=1}^{t-d_i} S_{im} - \sum_{m=1}^{t} S_{jm} \geq 0, \text{ em que } j \text{ corresponde às atividades subsequentes de } i \text{ e } 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq I \text{ e } 1 \leq t \leq T \tag{22}$$

A equação (22) simboliza a restrição de precedência entre as diversas atividades, ou seja, a atividade j, só pode ser iniciada depois da conclusão da atividade i.

$$\sum_{i=1}^{I} x_{it} \times RR_{ir} \leq RR_r, \text{ em que } 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq r \leq R \tag{23}$$

A equação (23) representa a restrição do limite máximo dos recursos renováveis (RR), ou seja, certifica que o limite máximo em cada instante não é ultrapassado. Sendo que R representa o número total de recursos diferentes.

$$Z_t \in \{0; 1\}, \text{ em que } 1 \leq t \leq T \tag{24}$$

Z_t é uma variável de decisão binária que indica se o instante t foi utilizado para realizar pelo menos uma atividade i.

$$\sum_{i=1}^{I} X_{it} - M \times Z_t \leq 0, \text{ em que } 1 \leq t \leq T \tag{25}$$

A equação (25) garante que se uma atividade i for realizada durante o instante t, a variável de decisão Z_t para esse mesmo instante é ativada. Sendo que M simboliza um valor infinito.

$$mín \sum_{t=1}^{T} Z_t \tag{26}$$

A função objetivo, retratada pela equação (26), evidencia a necessidade de diminuir o tempo de execução do projeto em questão.

De seguida é apresentada a formulação desenvolvida para RCMPSP de forma detalhada.

$$S_{itp} \in \{0; 1\}, \text{ em que } 1 \leq i \leq I, 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq p \leq P \tag{27}$$

S_{itp} é uma variável de decisão binária que indica se a atividade i do projeto p inicia no instante t. Sendo que I representa o número total de atividades de um dos projetos, contabilizando as atividades fictícias, T simboliza a soma das durações de todas as atividades de todos os projetos e P retrata o número total de projetos.

$$\sum_{t=1}^{T} S_{itp} = 1, \text{ em que } 1 \leq i \leq I \text{ e } 1 \leq p \leq P \quad (28)$$

$$\sum_{t=ST_p}^{T} S_{0tp} = 1, \text{ em que } 1 \leq p \leq P \quad (29)$$

$$X_{itp} = \sum_{m=t-(d_{ip}-1)}^{t} S_{imp}, \text{ em que } 1 \leq i \leq I, 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq p \leq P \quad (30)$$

A equação (28) garante que a atividade i do projeto p é iniciada uma vez.

A equação (29) previne o início do projeto antes de uma data específica para esse mesmo (ST_p).

X_{itp}, é uma variável de decisão binária que indica se a atividade i do projeto p é realizada no instante t. A equação (30) assegura que a atividade i do projeto p é realizada sem interrupções (*non preemptable*).

$$\sum_{m=1}^{t-d_{ip}} S_{imp} - \sum_{m=1}^{t} S_{jmp} \geq 0, \text{ em que } j \text{ corresponde às atividades subsequentes de } i \text{ e } 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq I, 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq p \leq P \quad (31)$$

A equação (31) simboliza a restrição de precedência entre as diversas atividades, ou seja, a atividade j do projeto p, só pode ser iniciada depois da conclusão da atividade i do projeto p.

$$\sum_{i=1}^{I} x_{itp} \times RR_{irp} \leq RR_{rp}, \text{ em que } 1 \leq t \leq T, 1 \leq p \leq P \text{ e } 1 \leq r \leq R_1 \quad (32)$$

A equação (32) representa a restrição do limite máximo dos recursos renováveis (RR_r), ou seja, certifica que o limite máximo em cada projeto e em cada instante não é ultrapassado. Sendo que R_1 representa o número total de recursos não globais diferentes.

$$\sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{I} x_{itp} \times RG_{irp} \leq RG_r, \text{ em que } 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq r \leq R_2 \quad (33)$$

A equação (33) representa a restrição do limite máximo dos recursos renováveis globais (RG_r), ou seja, certifica que a soma dos recursos utilizados em todos os projetos em cada instante não é ultrapassada. Sendo que R_2 representa o número total de recursos globais diferentes.

$$Z_{tp} \in \{0; 1\}, \text{ em que } 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq p \leq P \quad (34)$$

Z_{tp} é uma variável de decisão binária que indica se o instante t foi utilizado para realizar pelo menos uma atividade i do projeto p.

$$\sum_{i=1}^{I} X_{itp} - M \times Z_{tp} \leq 0, \text{ em que } 1 \leq t \leq T \text{ e } 1 \leq p \leq P \quad (35)$$

A equação (35) garante que se uma atividade i do projeto p for realizada durante o instante t, a variável de decisão Z_{tp} para esse mesmo instante é ativada. Sendo que M simboliza um valor infinito.

$$\sum_{t=1}^{T} Z_{tp} \leq DD_p + C_p, \text{ em que } 1 \leq p \leq P \quad (36)$$

A equação (36) garante que o tempo utilizado em cada projeto não excede o seu prazo de conclusão (DD_p), sem contabilizar o atraso associado (C_p).

$$mín \sum_{p=1}^{P} (C_p * P_p) \tag{37}$$

A função objetivo, retratada pela equação (37), evidencia a necessidade de diminuir o custo associado ao atraso (P_p) no tempo de execução dos projetos em questão.

3.2.2. Codificação

A implementação do SA requer uma estrutura minuciosa dos componentes fundamentais do algoritmo, que servirão de base para todo o desenvolvimento do código.

Em primeiro, a representação/codificação das soluções deve ser escolhida de forma apropriada. A representação/codificação e a estrutura de vizinhança desempenham um papel crucial na exploração do espaço de pesquisa. Ambas devem ser concebidas de forma a garantir a conectividade do espaço de soluções, ou seja, possibilitem a transição entre quaisquer duas soluções. Isto assegura que o algoritmo possa explorar a totalidade do espaço de pesquisa.

Sendo assim, a codificação selecionada para a implementação deste protótipo é uma codificação binária. Em cada solução, existem n atividades que possuem t instantes booleanos, o que permite representar o início da execução de uma atividade. Como é evidente em casos de atividades *non-preemptable*, apenas um instante por atividade pode ser positivo.

Já no que diz respeito às restrições do problema, nesta dissertação foram utilizadas duas formas distintas de garantir que estas são cumpridas:

- A primeira forma e mais comum consiste em verificar, após a geração de uma nova solução, se esta satisfaz as restrições necessárias. Em caso negativo, a solução é eliminada e o algoritmo cria uma outra solução, repetindo o processo. Em caso positivo, a solução é aceite e o algoritmo progride para os seguintes passos. Este método, geralmente, é mais flexível, o que possibilita a definição de restrições complexas de forma mais simples;
- Na segunda abordagem, o algoritmo gera apenas soluções que satisfaçam as restrições pretendidas, ou seja, ajusta o processo de geração de soluções. Este método aumenta a taxa de aceitação de novas soluções, o que por vezes é crucial para aumentar a eficiência computacional.

O primeiro método garante o cumprimento das restrições relacionadas com a utilização dos recursos renováveis limitados e o segundo as relações de precedência entre as diferentes atividades.

A avaliação das soluções candidatas é realizada por meio de uma função objetivo, a qual quantifica o número de instantes utilizados para a execução do projeto (*makespan*), no caso dos RCPSP, ou o custo associado ao atraso da execução dos projetos, no caso dos RCMPSP.

3.2.3. Estrutura de vizinhança

A estrutura de vizinhança é um conceito fundamental em algoritmos de otimização e define o conjunto de solução que são "adjacentes" a uma determinada solução, ou seja, existe um conjunto de soluções que podem ser obtidas através de pequenas modificações numa solução, permitindo assim a exploração do espaço de soluções de forma sistemática. Estes movimentos são definidos por operações específicas que dependem do problema em questão, pois influenciam diretamente a capacidade de o algoritmo explorar o espaço de pesquisa, escapar de mínimos locais e convergir para a solução ótima.

Existem diversos tipos de estruturas de vizinhança, cada uma adequada para diferentes tipos de problemas de otimização. A utilizada nesta dissertação é a denominada por inserção, a qual consiste em movimentar um elemento (início de uma atividade para uma posição diferente da qual se encontra). No caso dos RCMPSP, primeiro é selecionado aleatoriamente um dos projetos, posteriormente uma das atividades desse mesmo projeto, e por fim a posição para a qual o início da atividade se vai deslocar.

3.2.4. Parametrização

A parametrização do SA é um componente fulcral que determina a eficiência e a eficácia do protótipo e deve ser feita de forma a garantir o equilíbrio entre os 2 pilares das meta-heurísticas (intensificação e diversificação). Uma parametrização inadequada pode resultar numa procura ineficaz ou ineficiente, com o algoritmo a ficar retido em ótimos locais ou a não convergir.

A temperatura inicial define a probabilidade de aceitação de uma solução pior. Uma maior temperatura promove uma exploração mais diversificada e uma menor temperatura promove uma exploração mais intensa. A abordagem utilizada nesta parametrização, para encontrar uma temperatura inicial, é descrita de seguida:

1. Determinar a melhor e a pior solução (ou soluções próximas). Caso não seja possível, gerar n soluções e verificar a melhor e a pior;
2. Através da equação (15), determinar a temperatura inicial para uma probabilidade de aceitação de aproximadamente 80% [92].

A velocidade de arrefecimento utilizada nesta parametrização é geométrica, em que os valores de α devem variar entre [0.80, 0.995] [93, 94].

O número de iterações por temperatura deve ser do tamanho da instância do problema. Nos casos do RCPSP e RCMPSP, corresponde, respetivamente, ao número de atividades do projeto e ao conjunto de projetos [95].

3.3. Implementação

Com o intuito de facilitar a utilização do protótipo criado, foi desenvolvida uma interface, a qual simplifica a alteração de valores relacionados com o Simulated Annealing ou com as instâncias em análise. O layout dos parâmetros do Simulated Annealing é representado na Figura 11.

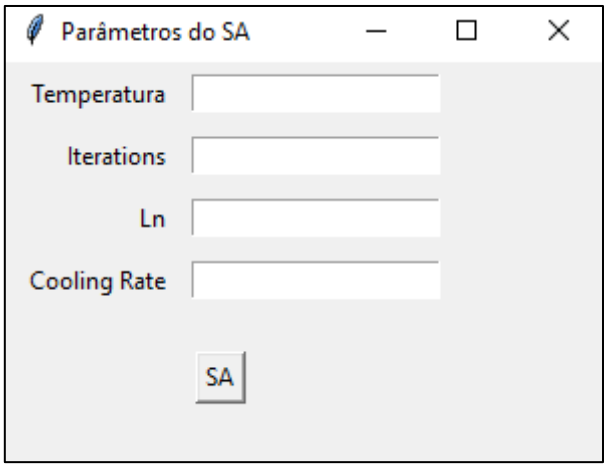

Figura 11 - Layout dos parâmetros do Simulated Annealing

A introdução dos dados é realizada de forma muito simples. O utilizador deve colocar os valores dos parâmetros do Simulated Annealing nos respetivos locais, sendo que o "Iterations" e o "Ln" necessitam de ser valores inteiros, caso contrário surge a Figura 12.

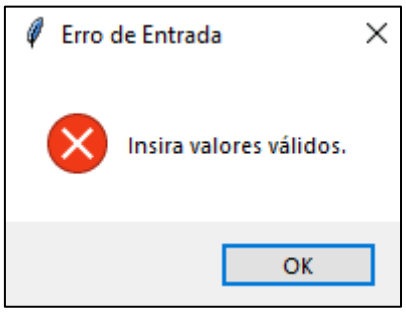

Figura 12 – Messagebox de erro de entrada nos parâmetros do Simulated Annealing

Quando o utilizador tiver preenchido os parâmetros todos de forma correta, deve pressionar o botão "SA", o que resulta no surgimento da Figura 13.

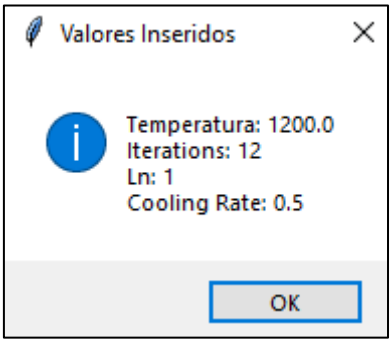

Figura 13 – Messagebox dos parâmetros do Simulated Annealing corretamente preenchidos

Posteriormente, surge o layout dos parâmetros dos projetos, cujo é ilustrado na Figura 14.

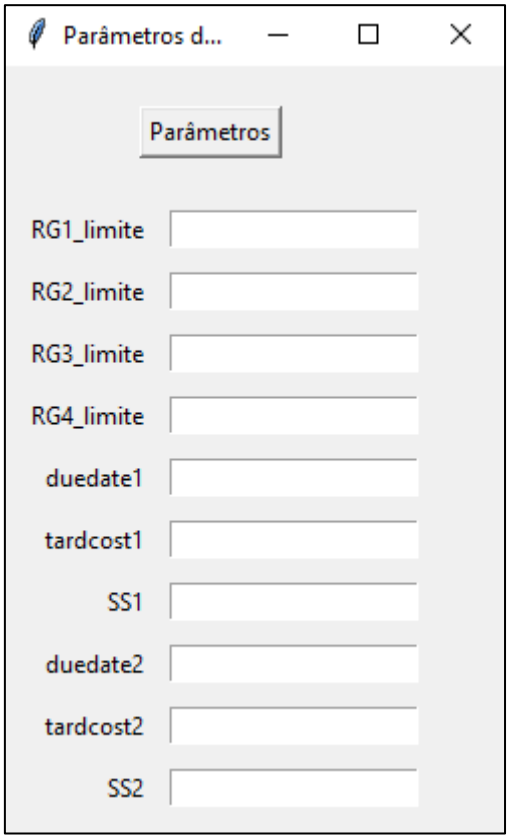

Figura 14 - Layout dos parâmetros dos projetos

A introdução dos dados é realizada de forma muito simples. O utilizador deve colocar os valores dos parâmetros dos projetos nos respetivos locais, sendo que todos necessitam de ser valores inteiros, caso contrário surge a Figura 15. É de notar que nos recursos que não são recursos globais, o utilizador deve preencher o respetivo recurso global com o valor 0.

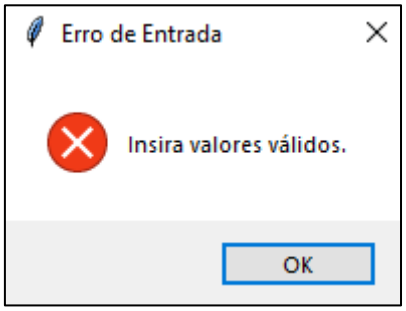

Figura 15 – Messagebox de erro de entrada dos parâmetros dos projetos

Quando o utilizador tiver preenchido os parâmetros todos de forma correta, deve pressionar o botão “Parâmetros”, o que resulta no surgimento da Figura 16.

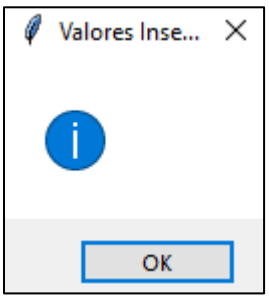

Figura 16 – Messagebox dos parâmetros dos projetos corretamente preenchidos

É importante referir que os dados introduzidos no protótipo e demonstrados nesta secção são meramente exemplos.

3.4. Teste da sua aplicabilidade e desempenho

O estudo da aplicabilidade e desempenho do protótipo criado envolve uma análise detalhada da eficácia obtida em diferentes casos de estudo face às atingidas por outros métodos.

A boa qualidade de um método pode ser verificada se este apresentar maior eficácia em relação a outro que, anteriormente, foi comprovado como adequado para resolver os problemas em questão.

A análise e a inferência estatística desempenham um papel essencial para validar a eficácia e a relevância de um novo método quando comparado com outros já existentes. Estes processos são fundamentais para demonstrar, de forma objetiva e rigorosa, se o novo método oferece melhorias significativas às abordagens existentes.

Neste contexto, um dos primeiros objetivos da estatística é avaliar a eficácia do novo método. Isto engloba determinar se este apresenta uma melhoria em relação aos métodos existentes em termos de métricas relevantes. Para isso, são utilizados testes de hipótese. Estes testes permitem identificar a existência de diferenças estatisticamente significativas.

Também é importante identificar as vantagens e limitações do novo método, o que implica aplicar este a diferentes situações e casos de estudo. Uma análise comparativa detalhada pode ser realizar através de gráficos de barras e *boxplots* que ajudam a visualizar as diferenças entre os diferentes métodos em diversas métricas de forma clara, objetiva e compreensível. A partir desses resultados, realiza-se uma análise crítica para contextualizar o novo método.

Em suma, a análise e a inferência estatística são processos rigorosos que fornecem uma visão abrangente da qualidade e desempenho do novo método, garantindo que as conclusões retiradas sejam bem fundamentadas e aplicáveis no contexto real.

No próximo capítulo (4), serão abordadas as implicações práticas dos resultados obtidos, incluindo uma análise das vantagens e limitações do PDD em diferentes cenários de estudo.

4. Resultados e Discussão

Neste capítulo serão apresentados os resultados do PDD, aplicado em várias instâncias de RCPSP e RCMPSP. Para cada foram realizados três testes, com parâmetros adequados, dos quais se retirou a informação mais importante: 1) a melhor solução encontrada; 2) o tempo de execução do programa.

4.1. RCPSP

Os dados da Tabela 7 apresentam os resultados para as diferentes instâncias do RCPSP, os quais demonstram os valores das soluções (eficácia) e os seus tempos de execução (eficiência). Relativamente PDD, a solução apresentada é a melhor, enquanto o tempo de execução é a média dos três testes efetuados. Por sua vez, a solução da base de dados é a melhor solução apresentada no PSPLIB [90].

Tabela 7 - Dados das instâncias do RCPSP

Instâncias	Base de Dados	PDD	
	Solução	Solução	Tempo (s)
j301_1	43	46	525,50
j301_2	47	47	504,80
j301_3	47	47	626,10
j301_4	62	64	683,40
j301_5	39	40	304,00
j301_6	48	49	389,70
j301_7	60	60	515,10
j301_8	53	55	436,80
j301_9	49	51	449,60
j301_10	45	48	407,90
j302_1	38	39	396,60
j302_2	51	53	541,90
j302_3	43	46	538,70
j302_4	43	43	518,60
j302_5	51	53	542,50
j302_6	47	47	434,70
j302_7	47	49	467,60

Instâncias	Base de Dados	PDD	
	Solução	Solução	Tempo (s)
j302_8	54	55	520,50
j302_9	54	55	688,70
j302_10	43	47	459,80
j303_1	72	72	707,20
j303_2	40	40	417,30
j303_3	57	57	683,40
j303_4	98	98	614,30
j303_5	53	53	604,50
j303_6	54	56	470,10
j303_7	48	48	450,70
j303_8	54	55	448,60
j303_9	65	65	449,70
j303_10	59	60	583,20

Conforme a Tabela 7, verifica-se que o PDD solucionou todas as instâncias com uma qualidade de solução próxima ou até igual à da base de dados. No que diz respeito aos tempos de processamento, estes são significativos.

A Figura 17 realça as diferenças da eficácia dos métodos analisados para cada instância.

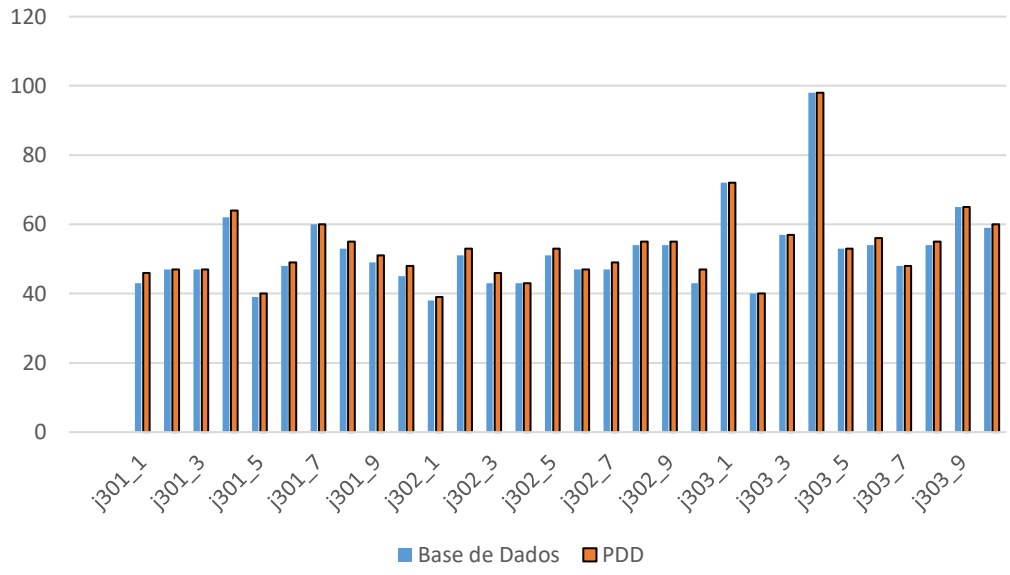

Figura 17 - Gráfico de barras da eficácia dos diferentes métodos para RCPSP

4.1.1. Análise Estatística dos resultados do RCPSP

A análise estatística dos resultados do RCPSP foi realizada e analisada no programa IBM SPSS, com o objetivo de ajudar a organizar, interpretar e apresentar dados de forma clara e precisa, o que facilita a identificação da qualidade do PDD.

Os dados da Tabela 8 apresentam o desvio relativo para cada instância de RCPSP.

Tabela 8 - Desvios relativos das instâncias do PDD para RCPSP

Instâncias	Desvio Relativo (%)	Intervalo Correspondente (%)
j301_1	7,0	5 - 10
j301_2	0,0	0
j301_3	0,0	0
j301_4	3,2	3 - 5
j301_5	2,6	0 - 3
j301_6	2,1	0 - 3
j301_7	0,0	0
j301_8	3,8	3 - 5
j301_9	4,1	3 - 5
j301_10	6,7	5 - 10
j302_1	2,6	0 - 3
j302_2	3,9	3 - 5
j302_3	7,0	5 - 10
j302_4	0,0	0
j302_5	3,9	3 - 5
j302_6	0,0	0
j302_7	4,3	3 - 5
j302_8	1,9	0 - 3
j302_9	1,9	0 - 3
j302_10	9,3	5 - 10
j303_1	0,0	0
j303_2	0,0	0
j303_3	0,0	0
j303_4	0,0	0
j303_5	0,0	0
j303_6	3,7	3 - 5
j303_7	0,0	0
j303_8	1,9	0 - 3
j303_9	0,0	0
j303_10	1,7	0 - 3

Para compreender a distribuição e a variabilidade dos dados, foram utilizados o gráfico de barras e o *boxplot*, que são fundamentais para a interpretação de diferentes aspetos do conjunto de dados.

A Figura 18 ilustra a frequência dos diferentes desvios relativos, o que permite uma comparação direta entre a eficácia do PDD e a da base de dados.

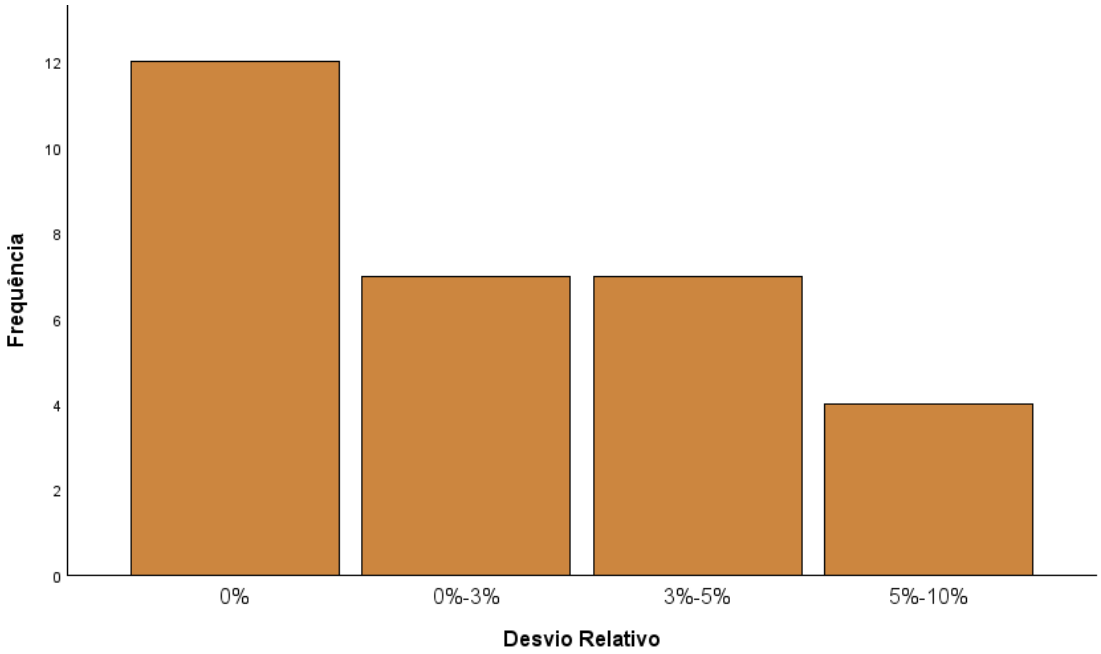

Figura 18 - Gráfico de barras da frequência do desvio relativo da eficácia do PDD para RCPSP

O protótipo criado demonstrou a capacidade de encontrar soluções iguais à melhor solução da base de dados em 40% das instâncias analisadas. Nas restantes, apresentou valores praticamente idênticos, sendo que a instância j302_10 destacou-se por apresentar o maior desvio relativo de $9{,}3\%$, relativamente à solução da base de dados. No entanto, na maioria das instâncias ($86{,}7\%$), os valores mantiveram-se abaixo dos 5%.

A Figura 19 fornece uma visão mais detalhada da distribuição dos desvios relativos, permitindo uma melhor compreensão das caraterísticas intrínsecas, evidenciando a assimetria e a concentração de valores.

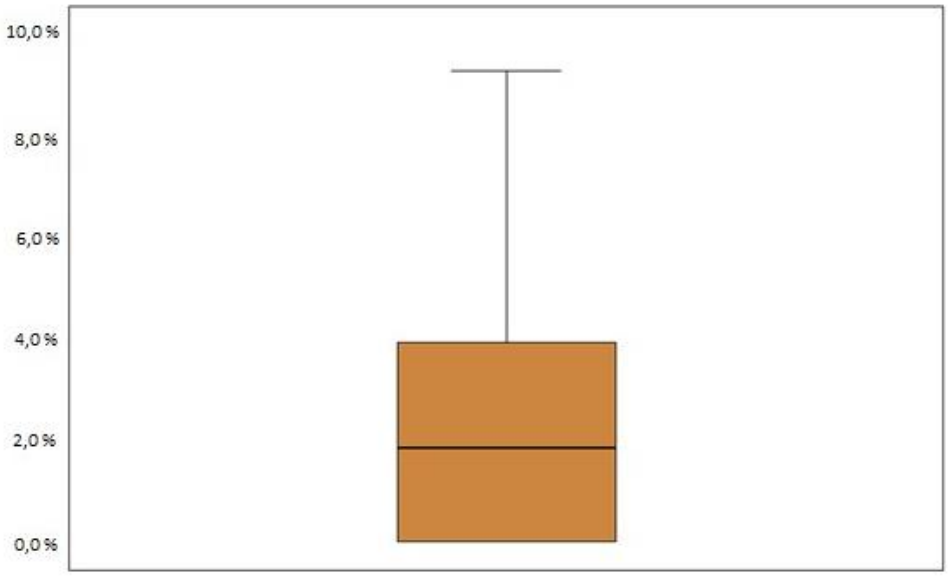

Figura 19 - Boxplot do desvio relativo da eficácia do PDD para RCPSP

A Figura 19 exibe uma distribuição pequena, com desvios relativos das soluções que variam entre 0% e 10%. A mediana é ligeiramente inferior a 2% e o facto de não poder existir um whisker[1] inferior significativo indica que as soluções são de alta qualidade.

Todos estes gráficos e tabelas demonstram que o PDD é capaz de solucionar o RCPSP com qualidade.

4.1.2. Inferência Estatística

A inferência estatística é fundamental para a tomada de decisões informadas com base em dados amostrais com o objetivo de estimar valores desconhecidos na população e avaliar a validade de diferentes hipóteses sobre a mesma. Ou seja, a inferência estatística permite realizar generalizações precisas e confiáveis sobre a eficácia do PDD através das amostras limitadas e analisadas nesta dissertação.

Posteriormente à definição do problema, à coleta de dados e à sua análise descritiva é necessário selecionar um modelo estatístico adequado. Contudo, primeiramente, é necessário verificar se os dados seguem uma distribuição normal.

Segundo o Teorema do Limite Central, é possível assumir a normalidade de uma amostra com 30 ou mais instâncias. Posteriormente, com o objetivo de comparar duas amostras independentes para determinar se existe uma diferença significativa entre a média amostral do PDD e a da base de dados, foi realizado o Teste t de Student para amostras independentes.

[1] Linha que se estende a partir da caixa do gráfico e assinala a variabilidade dos dados fora dos quartis

Sendo μ_{PDD} a distância média relativa das soluções do PDD e μ_{BD} a distância média relativa das soluções presentes na base de dados, as hipóteses que serão analisadas no teste são:

$$H_0: \mu_{PDD} - \mu_{BD} = 0 \quad (38)$$

$$H_1: \mu_{PDD} - \mu_{BD} \neq 0 \quad (39)$$

Os resultados do Teste t de Student estão representados na Tabela 9.

Tabela 9 - Teste t de Student da eficácia do PDD para RCPSP

Variâncias	Teste de Levene para igualdade de variâncias		Teste-t para igualdade de médias				
	Z	Sig.	t	df	Sig.(2 extremi-dades)	Diferença média	Erro padrão da diferença
Variâncias iguais assumidas	0,02	**0,892**	-0,38	58	**0,705**	-1,13	2,98
Variâncias iguais não assumidas			-0,38	57,95	0,705	-1,13	2,98

Com base no valor do *p-value* apresentado na Tabela 9 é possível aceitar a hipótese nula, o que simboliza a inexistência de diferenças significativas entre as médias de ambas as amostras.

4.1.3. Instância j303_2

A instância j303_2, selecionada aleatoriamente do conjunto de instâncias, será analisada detalhadamente com o objetivo de facilitar a compreensão da importância e do modo de funcionamento de alguns aspetos relacionados com a técnica utilizada.

Os parâmetros do Simulated Annealing foram obtidos da seguinte forma:

- O número de iterações total, it, foi definido como 100000;
- Ln, o número de iterações por temperatura, é igual ao número de atividades de cada projeto, logo, neste caso específico, o valor é 30;
- A temperatura inicial, T, foi calculada através do método explicado em 3.2.4, sendo que a melhor e a pior solução são 57 e 177, respetivamente;
- A velocidade de arrefecimento, Cr considerada foi de $0{,}003$, pois permite um balanço adequado entre a pesquisa de novos locais e a pesquisa de locais conhecidos, tendo em consideração os valores de Ln, it e T.

A Figura 20 ilustra de forma clara e simples a natureza exploratória do Simulated Annealing, através da evolução do custo da solução atual ao longo das iterações.

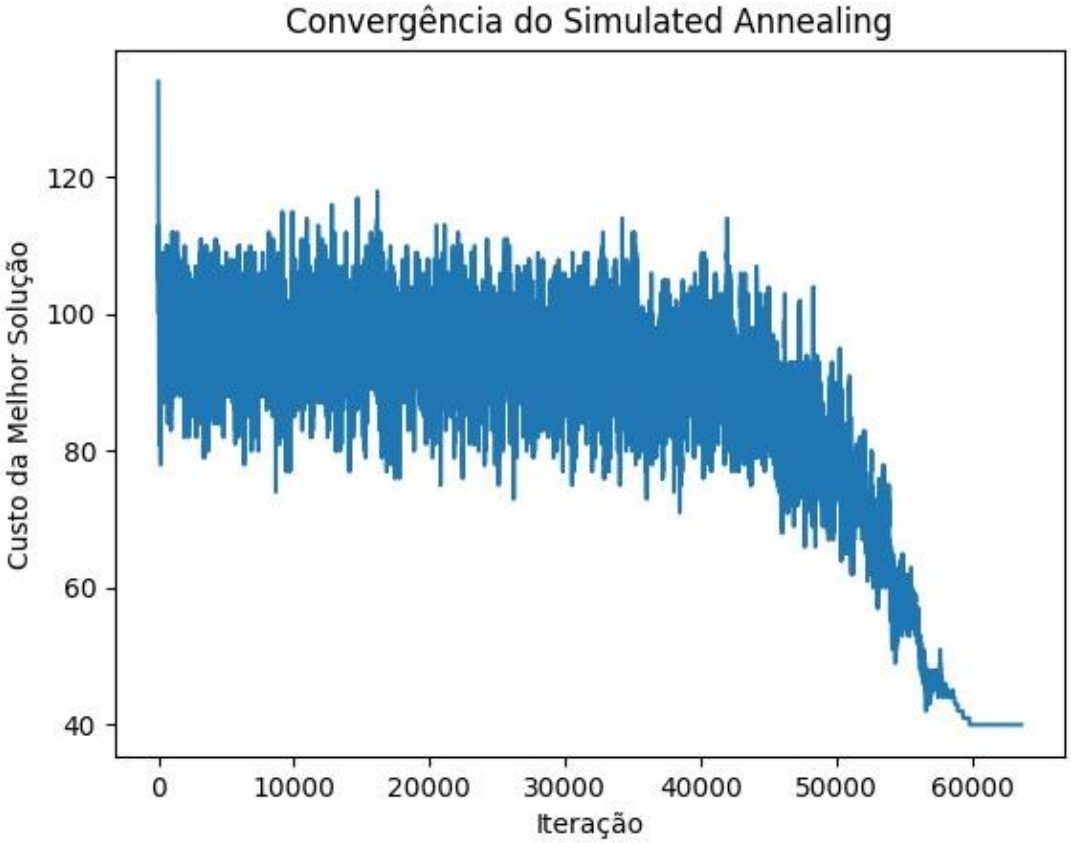

Figura 20 - Convergência do Simulated Annealing da instância j303_2

Pela análise da Figura 20, observa-se, na fase inicial e intermédia, uma grande variabilidade nos valores com grandes oscilações e uma tendência pouco decrescente, o que reflete o pilar de diversificação da meta-heurística utilizada. Posteriormente, na fase final, o gráfico demonstra uma tendência decrescente acentuada e contínua no custo com flutuações menos frequentes e intensas, acabando por se estabilizar, o que indica que o algoritmo está a convergir para um ótimo local. Neste caso específico, o algoritmo convergiu para a solução ótima.

A Figura 21 permite uma visão clara e simples da programação e execução das diversas atividades (Gráfico de Gantt), pois são apresentados os seus inícios, as suas durações e as suas sobreposições, ou seja, esta ilustração facilita a análise do cronograma da instância em análise.

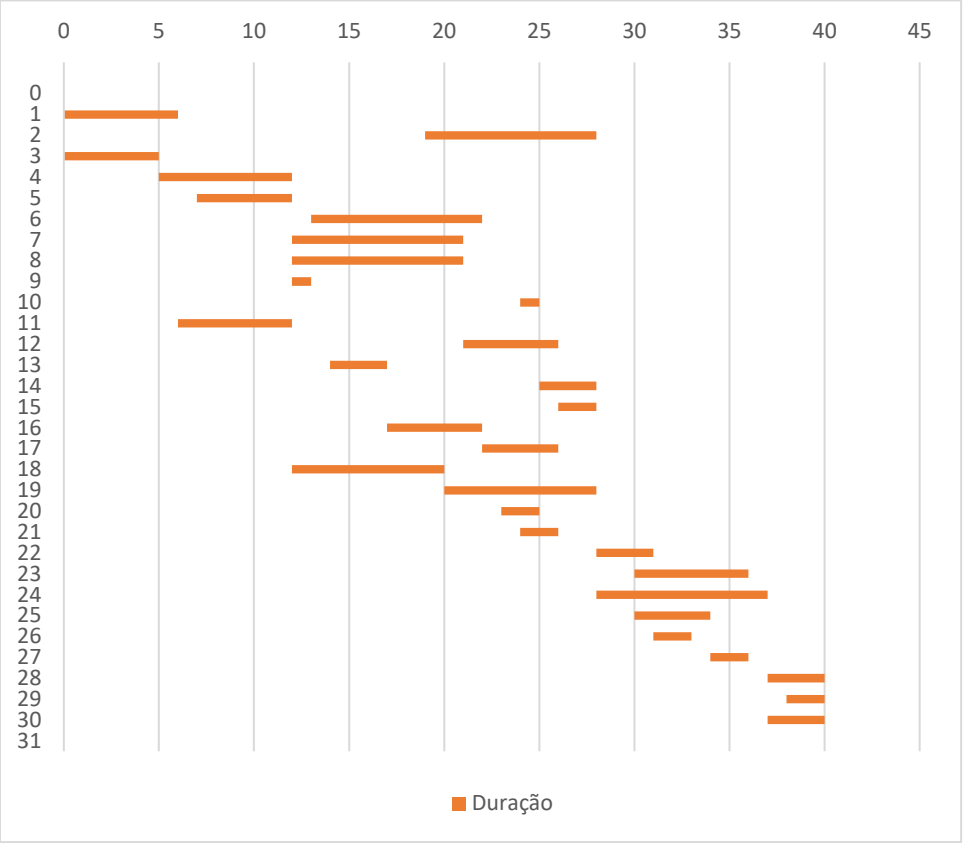

Figura 21 - Gráfico de Gant da solução da instância j303_2

A Figura 22 apresenta a alocação dos diferentes recursos ao longo de todo o projeto (Diagrama de carga dos recursos), bem como o limite permitido para cada.

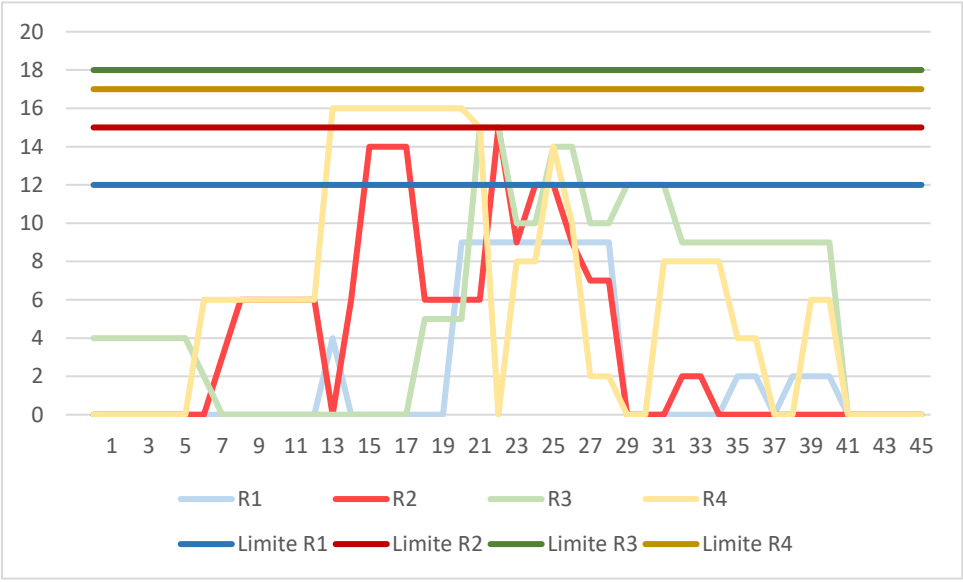

Figura 22 - Diagrama de carga dos recursos da instância j303_2

4.2. RCMPSP

A Tabela 10 apresenta os resultados para as diferentes instâncias do RCMPSP, a qual inclui a solução do PDD e o seu tempo de execução, a melhor, a pior e a solução mediana da base de dados. Relativamente ao protótipo, a solução apresentada é a melhor, enquanto o tempo de execução é a média dos três testes efetuados. Por sua vez, a solução da base de dados é a melhor solução apresentada no MPSPLIB [91].

Tabela 10 - Dados das instâncias do RCMPSP

Instâncias	Base de Dados			PDD	
	Melhor Solução	Mediana Solução	Pior Solução	Solução	Tempo (s)
mp_j30_a2_nr1_set	14	217	546	259	12297,3
mp_j30_a2_nr2_set	523	650	1250	620	8983,6
mp_j30_a2_nr3_set	168	392	836	528	10845,5
mp_j30_a2_nr4_set	365	441	1015	410	9679,6
mp_j30_a2_nr5_set	459	648	1275	780	9665,4
mp_j30_a5_nr1_set	561	847	1661	1463	88280,3
mp_j30_a5_nr2_set	885	1130	3334	2540	66779,0
mp_j30_a5_nr3_set	1714	1887	4862	2895	67307,0
mp_j30_a5_nr4_set	0	0	336	1917	99119,4
mp_j30_a5_nr5_set	1697	2693	3928	3223	61215,3

Os dados da Tabela 10 demonstram que o protótipo é capaz de solucionar adequadamente problemas RCMPSP, mas não da melhor forma possível. No que engloba os tempos de execução, estes são significativamente superiores aos obtidos nos problemas RCPSP.

A Figura 23 realça as diferenças da eficácia dos métodos analisados para cada instância.

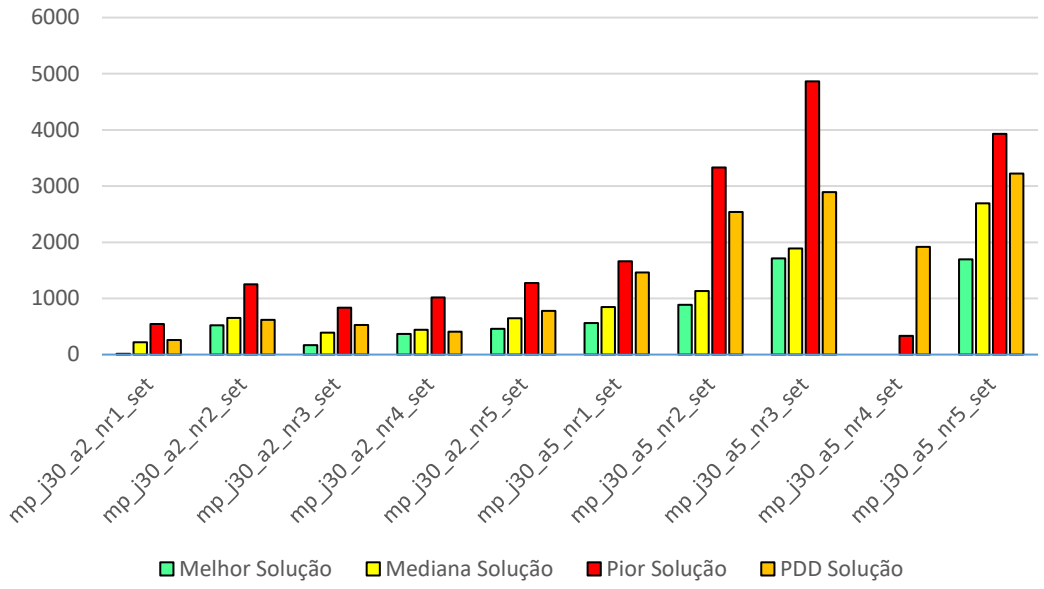

Figura 23 - Gráfico de barras da eficácia dos diferentes métodos

4.2.1. Análise Estatística dos resultados do RCMPSP

A análise estatística dos resultados do RCMPSP foi realizada e analisada no programa IBM SPSS, com o objetivo de ajudar a organizar, interpretar e apresentar dados de forma clara e precisa, o que facilita a identificação da qualidade do protótipo criado. É de notar que a análise dos resultados do RCMPSP foi dividida em 3 partes: 1) serão analisadas as instâncias de RCMPSP com dois projetos de 30 atividades (mp_j30_a2) (secções 4.2.2 e 4.2.3); 2) serão analisadas as instâncias de RCMPSP com cinco projetos de 30 atividades (mp_j30_a5) (584.2.4 e 4.2.5); 3) serão analisadas todas as instâncias de RCMPSP referidas nos 2 grupos anteriores (mp_j30_a2 e mp_j30_a5) (Secções 4.2.6 e 4.2.7).

Para compreender a distribuição e a variabilidade dos dados, foram utilizados o gráfico de barras e o *boxplot*, que são fundamentais para a interpretação da qualidade do PDD face às melhores, piores e soluções medianas.

4.2.2. Análise Estatística - mp_j30_a2

A Figura 24 ilustra os diferentes desvios relativos para cada instância, o que permite uma comparação direta entre a eficácia do PDD e as da base de dados.

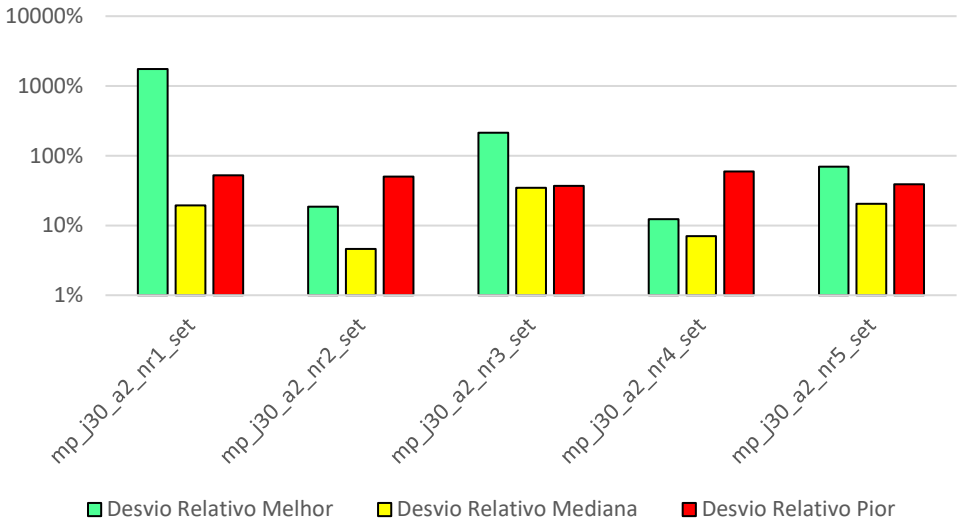

Figura 24 - Gráfico de barras do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2

O PDD apresenta, em todas as instâncias, soluções muito próximas das soluções medianas da base de dados. Isso indica que, embora não sejam das piores soluções, ainda não atingem a eficácia das melhores. Em duas instâncias (mp_j30_a2_nr2_set e mp_j30_a2_nr4_set), o PDD demonstrou uma eficácia elevada, superior à da mediana e mais próxima da melhor solução em comparação com a pior. No entanto, o efeito foi inverso nas restantes, com destaque para a instância mp_j30_a2_nr1_set que desenvolveu um desvio relativo extremamente elevado, de 1750% face à melhor solução.

A Figura 25 fornece uma visão mais detalhada da distribuição dos desvios relativos, permitindo uma melhor compreensão das caraterísticas intrínsecas, evidenciando a assimetria e a concentração de valores.

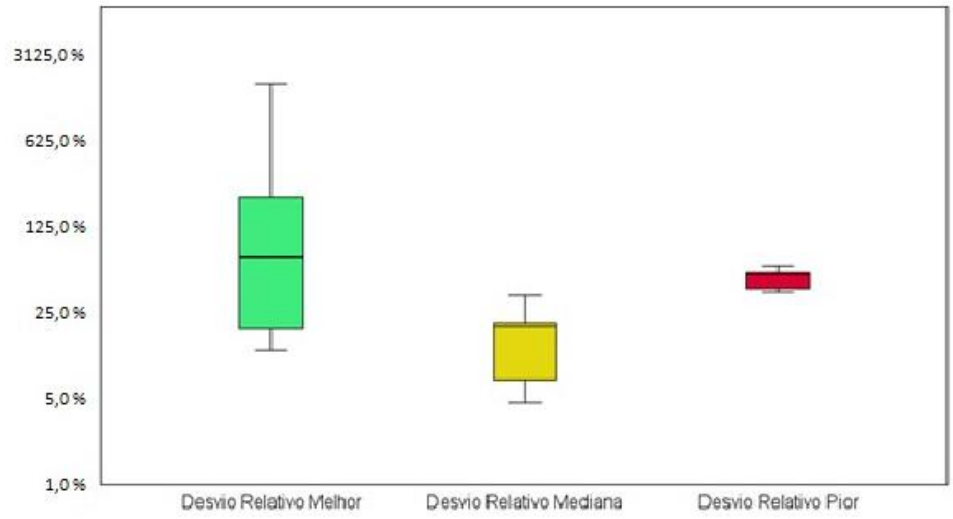

Figura 25 - Boxplots do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2

Na Figura 25 observa-se que o desvio relativo da categoria melhor apresenta uma ampla variabilidade, com valores que variam maioritariamente entre $12{,}33\%$ e $214{,}29\%$. A mediana está situada nos $69{,}93\%$ e a existência de um whisker que atinge os 1750% sugere a presença de valores extremos, refletindo uma distribuição dispersa e menos consistente dos resultados.

Por sua vez, as distribuições do desvio relativo das categorias mediana e pior exibem menor variabilidade, com valores concentrados em faixas mais estreitas. Na categoria mediana, os desvios variam entre $4{,}62\%$ e $34{,}69\%$, com uma mediana nos $19{,}35\%$, indicando um desempenho do PDD mais semelhante às soluções medianas. Da mesma forma, a categoria pior apresenta uma distribuição ainda mais compacta, mas com desvios superiores entre $36{,}84\%$ e $59{,}61\%$.

Estas observações reforçam as conclusões retiradas anteriormente de que o PDD apresenta soluções de qualidade, mas com um tempo de execução um pouco elevado.

4.2.3. Inferência Estatística - mp_j30_a2

Com o objetivo de verificar se os dados referentes aos desvios relativos da eficácia do PDD seguem uma distribuição normal realizou-se o Teste de Shapiro-Wilk, apropriado quando a amostra é menor que 30, que é o caso do grupo mp_j30_a2. As hipóteses do Teste de Shapiro-Wilk para cada categoria são:

H_0: Os dados provêm de uma distribuição normal. (40)

H_1: Os dados não provêm de uma distribuição normal. (41)

Os resultados dos Testes de Shapiro-Wilk estão representados na Tabela 11.

Tabela 11 - Teste de normalidade da eficácia do PDD para mp_j30_a2

	Teste de Normalidade		
	Shapiro-Wilk		
	Estatística	**gl**	**Sig.**
Eficácia Melhor	0,639	5	0,002
Eficácia Mediana	0,925	5	0,562
Eficácia Pior	0,921	5	0,538

No que engloba os testes da eficácia mediana e pior, ambos demonstram um *p-value* superior a $0{,}050$, que não permite rejeitar as hipóteses nulas. Contudo, o teste para a eficácia melhor manifesta um valor que possibilita afirmar que os dados não provêm de populações normalmente distribuídas, o que obriga à utilização de um teste não paramétrico para todo o conjunto de eficácias, sendo o escolhido o Teste de Kruskal-Wallis, cujas hipóteses são:

$H0$: A mediana dos diversos grupos é igual (42)

$H1$: Pelo menos uma das medianas dos diversos grupos é diferente (43)

Os resultados do Teste de Kruskal-Wallis estão representados na Tabela 12.

Tabela 12 - Teste de Kruskal-Wallis da eficácia do PDD para mp_j30_a2

	Teste de Kruskal-Wallis		
	H de Kruskal-Wallis	**df**	**Sig.**
Eficácia	10,383	3	0,016

Os resultados da Tabela 12 demonstram um valor da significância inferior a $0{,}050$, o que resulta na rejeição da hipótese nula de que não existem diferenças significativas na mediana das soluções do PDD comparativamente com as da base de dados.

Com a rejeição da hipótese nula do Teste de Kruskal-Wallis, é importante realizar testes de Mann-Whitney para comparar a mediana das soluções do PDD com as diferentes categorias da base de dados. As hipóteses destes testes são:

$$H_0: \eta_{PDD} - \eta_{BD} = 0 \quad (44)$$

$$H_1: \eta_{PDD} - \eta_{BD} \neq 0 \quad (45)$$

Os resultados dos Testes de Mann-Whitney estão representados na Tabela 13.

Tabela 13 - Teste de Mann-Whitney da eficácia do PDD para mp_j30_a2

	Teste de Mann-Whitney			
	U de Mann-Whitney	**Wilcoxon W**	**Z**	**Significância Sig. (2 extremidades)**
Eficácia Melhor	5,000	20,000	-1,567	0,117 (0,151, não corrigido para vínculos)
Eficácia Mediana	11,000	26,000	-0,313	0,754 (0,841)
Eficácia Pior	2,000	17,000	-2,193	0,028 (0,32)

Os resultados da Tabela 13 demonstram diferentes conclusões para as diferentes categorias de eficácia. O valor de U de Mann-Whitney representa a diferença dos valores entre os dois grupos de amostras, sendo que quando maior o valor de U, menor a diferença entre os mesmos. Logo, o valor de U de $2{,}000$ na eficácia pior sugere uma diferença considerável entre ambos os métodos. Isto pode ser comprovado com o valor da significância de $0{,}028$, que simboliza a existência de diferenças significativas entre as medianas amostrais.

Por sua vez, o valor de U de Mann-Whitney nas restantes categorias é superior, o que sugere uma menor diferença entre ambos os métodos. A significância ser de $0{,}117$ para a eficácia melhor e de $0{,}754$ para a eficácia mediana, ou seja, superior a $0{,}050$, indica que se aceita a

hipótese nula de que não existem diferenças significativas nas medianas das amostras consideradas.

4.2.4. Análise Estatística - mp_j30_a5

A Figura 26 ilustra os diferentes desvios relativos para cada instância, o que permite uma comparação direta entre a eficácia do PDD e as da base de dados. É de notar que na instância mp_j30_a5_nr4_set da Figura 26, o desvio relativo face a mediana e a melhor solução é infinito. Este fator advém de o valor das soluções da base de dados ser 0.

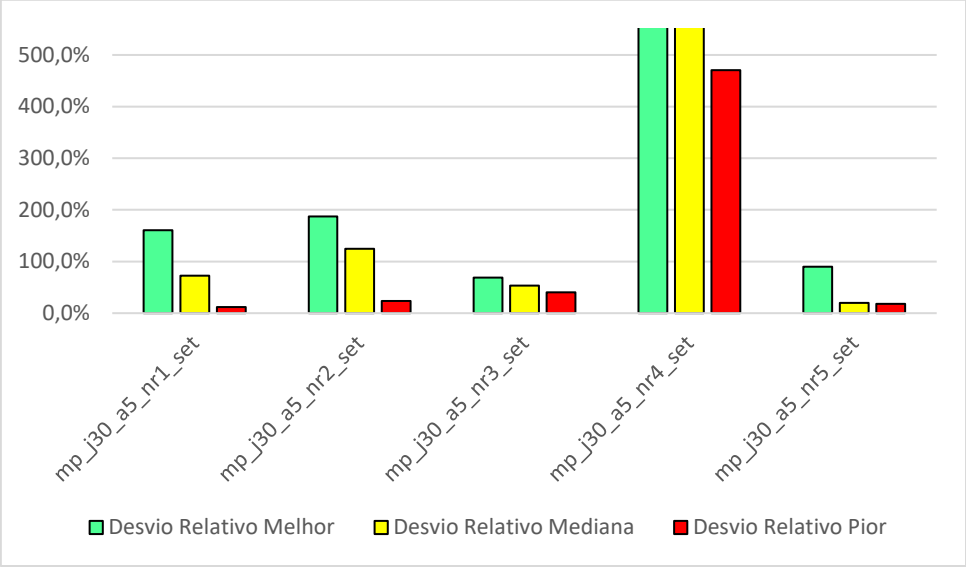

Figura 26 - Gráfico de barras do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a5

O PDD apresenta soluções com uma menor qualidade do que as soluções medianas da base de dados, mas melhores do que as piores, sendo que acabam por se aproximar mais deste último conjunto. A mp_j30_a5_nr4_set destaca-se por representar a única instância, à qual o PDD não produziu uma solução melhor do que a pior da base de dados. Estes fatores indicam que, apesar da qualidade do PDD continuar adequada, diminuiu em relação ao primeiro grupo de análise de RCMPSP.

A Figura 27 fornece uma visão mais detalhada da distribuição dos desvios relativos, permitindo uma melhor compreensão das caraterísticas intrínsecas, evidenciando a assimetria e a concentração de valores.

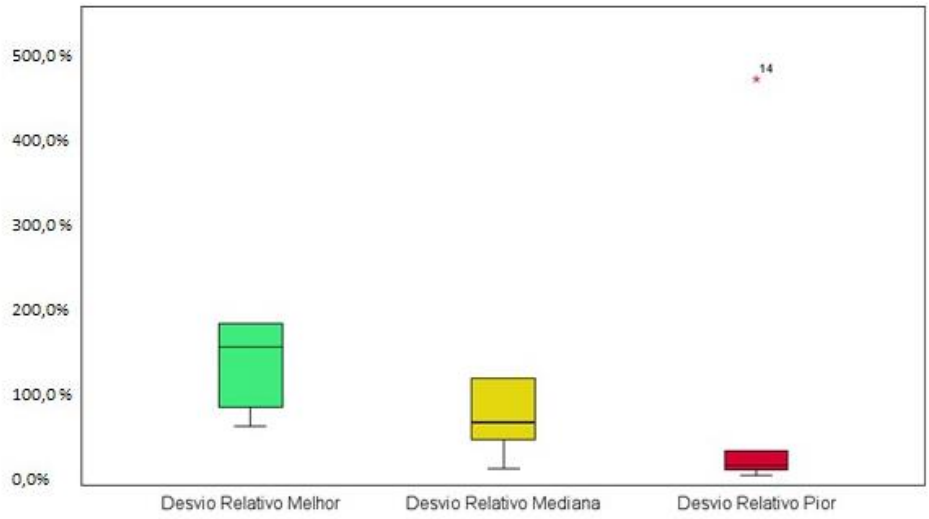

Figura 27 - Boxplots do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a5

A Figura 27 ilustra *boxplots* com variabilidades reduzidas com realce na categoria do desvio relativo pior, o que reforça o mencionado anteriormente. Todos apresentam um outlier relativo à instância mp_j30_a5_nr4_set, o que revela que esta é um elemento dissidente no conjunto analisado.

Estas observações reforçam as conclusões retiradas anteriormente de que o PDD apresenta soluções de qualidade, mas com um tempo de execução elevado, com exceção da instância mp_j30_a5_nr4_set.

4.2.5. Inferência Estatística - mp_j30_a5

Com o objetivo de verificar se os dados referentes aos desvios relativos da eficácia do PDD seguem uma distribuição normal realizou-se o Teste de Shapiro-Wilk, apropriado quando a amostra é menor que 30, que é o caso do grupo mp_j30_a2. As hipóteses do Teste de Shapiro-Wilk para cada categoria são:

H_0: Os dados provêm de uma distribuição normal. (46)

H_1: Os dados não provêm de uma distribuição normal. (47)

Os resultados dos Testes de Shapiro-Wilk estão representados na Tabela 14.

Tabela 14 - Teste de normalidade da eficácia do PDD para mp_j30_a2

	Teste de Normalidade		
	Shapiro-Wilk		
	Estatística	Gl	Sig.
Eficácia Melhor	0,961	5	0,815
Eficácia Mediana	0,969	5	0,872
Eficácia Pior	0,600	5	<0,001

No que engloba os testes da eficácia melhor e mediana, ambos demonstram um *p-value* superior a $0{,}050$, que não permite rejeitar as hipóteses nulas. Contudo, o teste para a eficácia pior manifesta um valor que possibilita afirmar que os dados não provêm de populações normalmente distribuídas, o que obriga à utilização de um teste não paramétrico para todo o conjunto de eficácias, sendo o escolhido o Teste de Kruskal-Wallis, cujas hipóteses são:

$H0$: A mediana dos diversos grupos é igual (48)

$H1$: Pelo menos uma das medianas dos diversos grupos é diferente (49)

Os resultados do Teste de Kruskal-Wallis estão representados na Tabela 15.

Tabela 15 - Teste de Kruskal-Wallis da eficácia do PDD para mp_j30_a5

	Teste de Kruskal-Wallis		
	H de Kruskal-Wallis	df	Sig.
Eficácia	0,966	3	0,810

Da análise da Tabela 15, como o *p-value* é maior que o nível de significância de $0{,}050$, não existem evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula de que não há diferenças estatisticamente significativas entre as medianas dos grupos analisados, ou seja, não é possível provar que as medianas dos diversos grupos são diferentes.

4.2.6. Análise Estatística - mp_j30_a2 e mp_j30_a5

A Figura 28 ilustra os diferentes desvios relativos para cada instância de ambos os grupos anteriormente analisados.

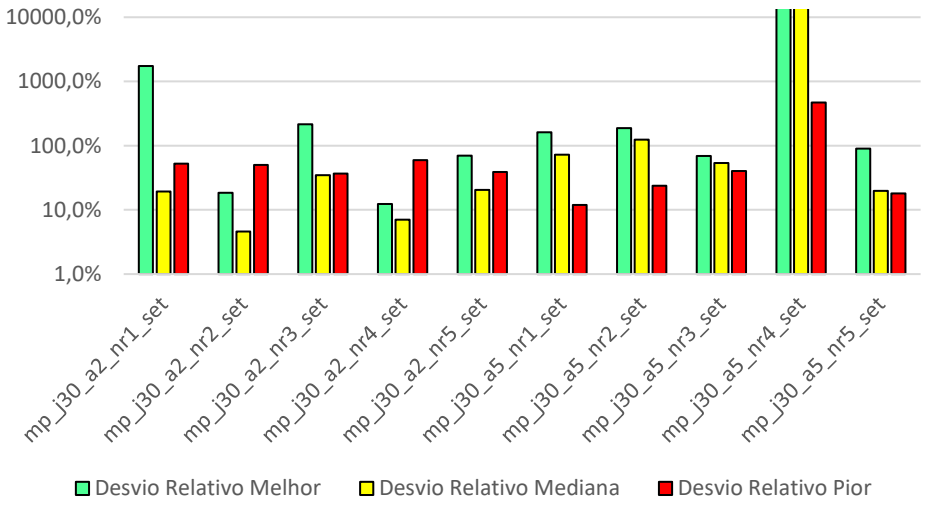

Figura 28 - Gráfico de barras do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5

A Figura 28 ilustra algumas diferenças entre ambos os grupos analisados, sendo que é notável uma diminuição da qualidade da FDD no 2º grupo. Isto é percetível no aumento do desvio relativo face as soluções medianas, o que, juntamente com um desvio relativo aproximadamente igual face as piores soluções, contribui para soluções do PDD mais semelhantes a estas piores.

A Figura 29 fornece uma visão mais detalhada da distribuição dos desvios relativos, permitindo uma melhor compreensão das caraterísticas intrínsecas, evidenciando a assimetria e a concentração de valores.

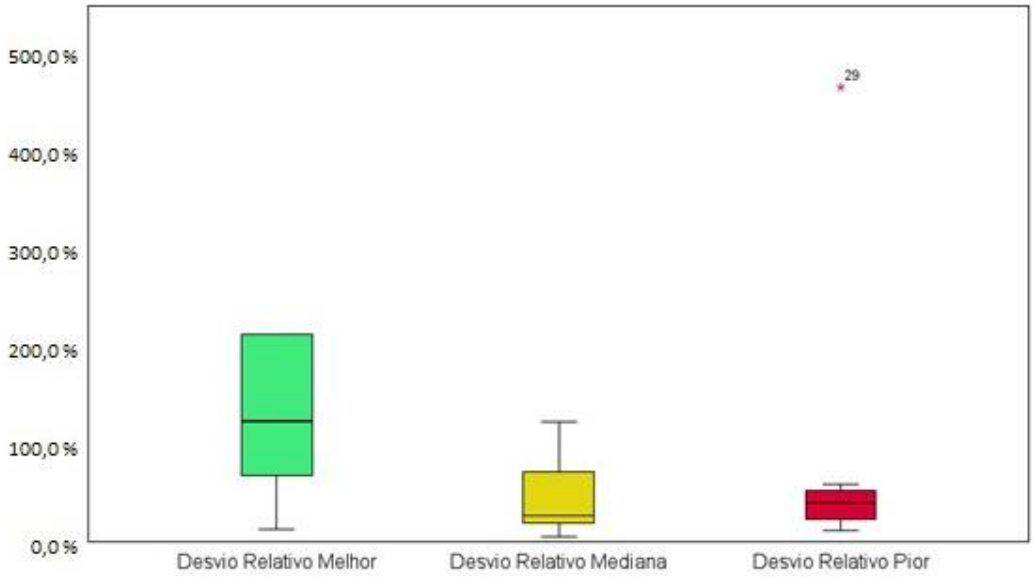

Figura 29 - Boxplots do desvio relativo da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5

A Figura 29 ilustra um intervalo interquartil significativamente maior para o desvio relativo melhor em comparação com as restantes categorias, indicando uma maior dispersão dos dados, o que coincide com o retratado nas secções anteriores (4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5). No que remete os desvios relativos mediana e pior, a variabilidade dos dados apresenta diferenças apesar de ser baixa em ambas. No *boxplot* do desvio relativo pior, o intervalo interquartil é menor e apresenta whiskers menos divergentes.

4.2.7. Inferência Estatística - mp_j30_a2 e mp_j30_a5

Com o objetivo de verificar se os dados referentes aos desvios relativos da eficácia do PDD seguem uma distribuição normal realizou-se o Teste de Shapiro-Wilk, apropriado quando a amostra é menor que 30, que é o caso do grupo mp_j30_a2 e mp_j30_a5. As hipóteses do Teste de Shapiro-Wilk para cada categoria são:

H_0: Os dados provêm de uma distribuição normal. (50)

H_1: Os dados não provêm de uma distribuição normal. (51)

Os resultados dos Testes de Shapiro-Wilk estão representados na Tabela 16.

Tabela 16 - Teste de normalidade da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5

	Teste de Normalidade		
	Shapiro-Wilk		
	Estatística	gl	Sig.
Eficácia Melhor	0,495	10	<0,001
Eficácia Mediana	0,833	10	0,037
Eficácia Pior	0,473	10	<0,001

O teste para a eficácia mediana apresenta um *p-value* que remete para a aceitação da hipótese nula, logo indica que os dados provêm de uma distribuição normal. Por sua vez, os testes para a melhor e a pior eficácia demonstram *p-values* inferiores a $0{,}001$, levando à rejeição desta mesma hipótese. Estes fatores levam à utilização de um teste não paramétrico para todo o conjunto de eficácias, sendo o escolhido o Teste de Kruskal-Wallis, cujas hipóteses são:

$H0$: A mediana dos diversos grupos é igual (52)

$H1$: Pelo menos uma das medianas dos diversos grupos é diferente (53)

Os resultados do Teste de Kruskal-Wallis estão representados na Tabela 17.

Tabela 17 - Teste de Kruskal-Wallis da eficácia do PDD para mp_j30_a2 e mp_j30_a5

	Teste de Kruskal-Wallis		
	H de Kruskal-Wallis	df	Sig.
Eficácia	6,886	3	0,076

Da análise da Tabela 17, como o valor da significância é superior a $0{,}050$, não existem evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula, ou seja, não há diferenças estatisticamente significativas entre as medianas dos grupos analisados.

4.2.8. Instância - mp_j30_a2_nr4_set

A instância mp_j30_a2_nr4_set, selecionada aleatoriamente do conjunto de instâncias, será analisada detalhadamente com o objetivo de facilitar a compreensão da importância e do modo de funcionamento de alguns aspetos relacionados com a técnica utilizada.

Os parâmetros do Simulated Annealing foram obtidos da seguinte forma:

- O número de iterações total, it, foi definido como 500000;
- Ln, o número de iterações por temperatura, é igual ao número de atividades do conjunto de projetos, logo, neste caso específico, o valor é 60;

- A temperatura inicial, T, foi calculada através do método explicado em 3.2.4, sendo que a melhor e a pior solução são 49 e 304, respetivamente;
- A velocidade de arrefecimento, Cr, considerada foi de 0,003, pois permite um balanço adequado entre a pesquisa de novos locais e a pesquisa de locais conhecidos, tendo em consideração os valores de Ln, it e T.

A Figura 30 ilustra de forma clara e simples a natureza exploratória do Simulated Annealing, através da evolução do custo da solução atual ao longo das iterações.

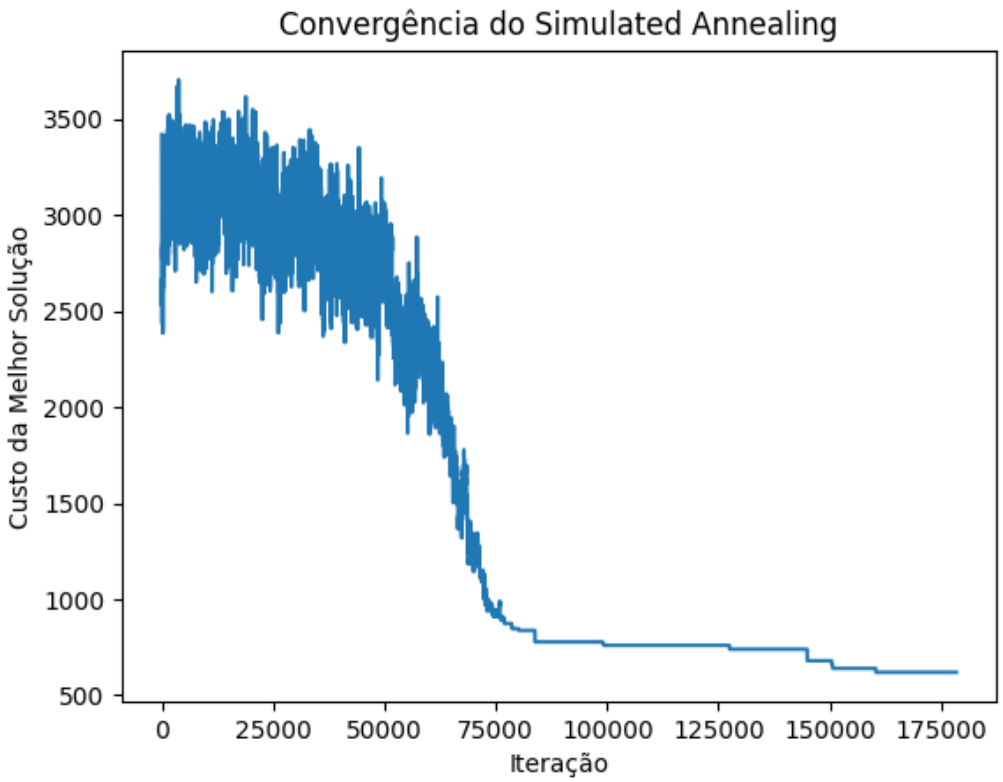

Figura 30 - Convergência do Simulated Annealing da instância mp_j30_a2_nr4_set

Pela análise da Figura 30, observa-se, na fase inicial, uma grande variabilidade nos valores com grandes oscilações e uma tendência decrescente cada vez mais acentuada, o que reflete o pilar diversificação da meta-heurística utilizada. Posteriormente, na fase intermédia, o gráfico demonstra uma inclinação decrescente muito acentuada no custo com flutuações menos frequentes e intensas, acabando por se estabilizar, o que indica que o algoritmo está a convergir para um ótimo local. Na fase final ocorrem as últimas melhorias no custo e, devido à estrutura do código e à dimensão da instância em análise, são necessárias muitas iterações para estas ocorrerem.

Através da análise detalhada de todas as instâncias de RCPSP e RCMPSP é importante referir que quanto maior a instância em análise, no que engloba o número de atividades e o tempo de execução das mesmas, maior será o número de iterações necessárias para alcançar uma solução

adequada, principalmente na fase de intensificação da meta-heurística. Isto pode ser verificado analisando a Figura 20 e a Figura 30.

A Figura 31 permite uma visão clara e simples da programação e execução das diversas atividades dos diversos projetos, pois são apresentados os seus inícios, as suas durações e as suas sobreposições, ou seja, esta ilustração facilita a análise do cronograma da instância em análise.

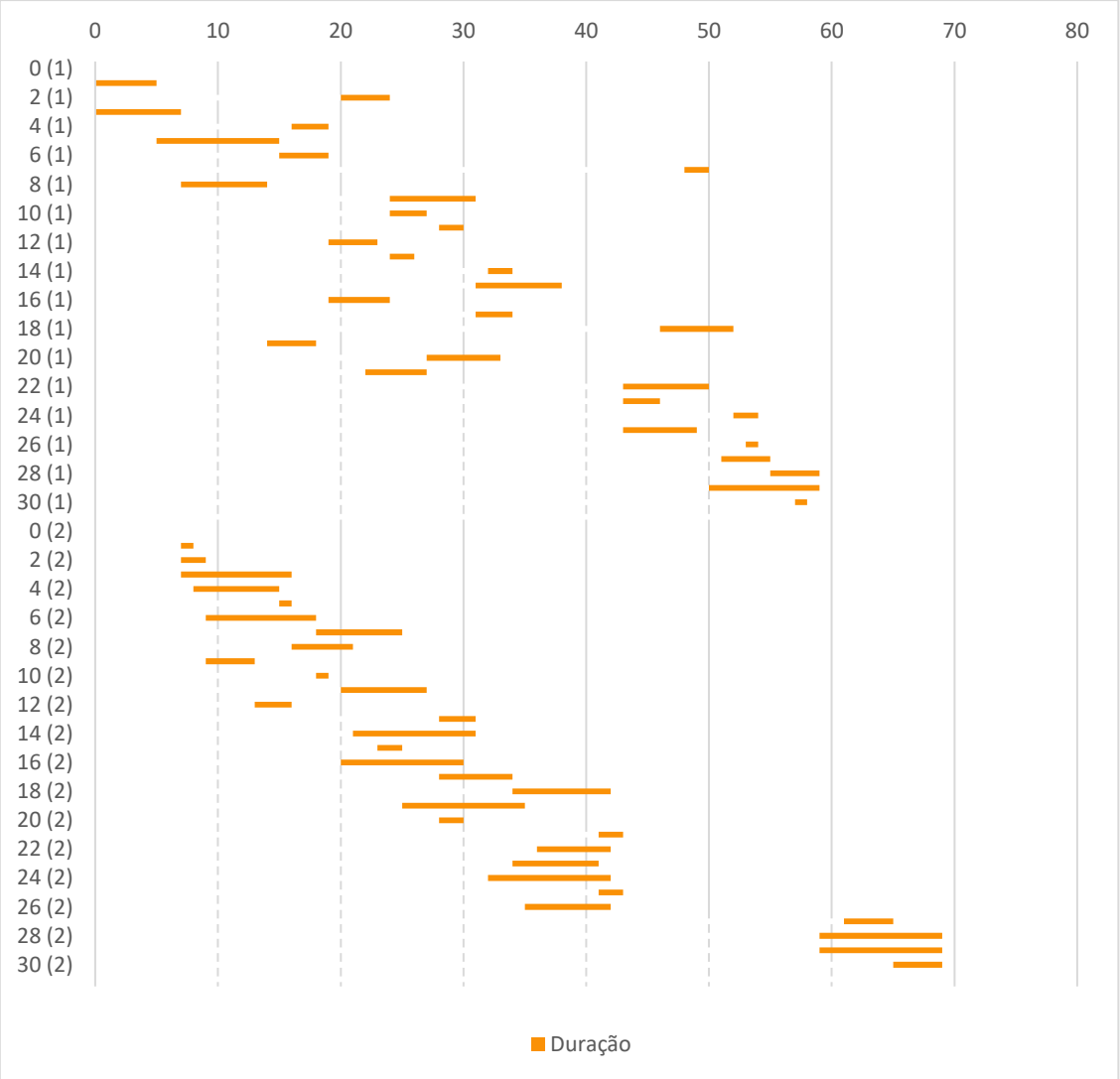

Figura 31 - Gráfico de Gantt da solução da instância mp_j30_a2_nr4_set

A Figura 32 apresenta a alocação dos diferentes recursos ao longo do conjunto dos projetos, bem como o limite permitido para cada.

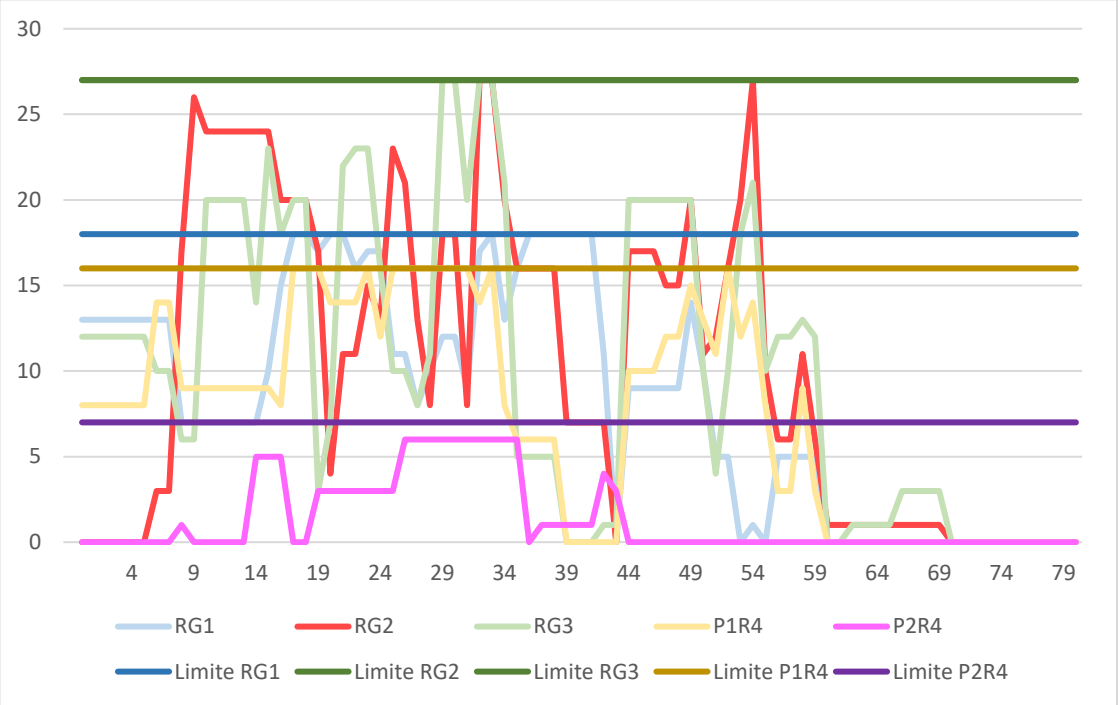

Figura 32 - Diagrama de carga dos recursos da instância mp_j30_a2_nr4_set

4.3. Conclusões finais sobre o PDD

Primeiramente, o PDD alcançou soluções muito boas para RCPSP. Atingiu diversas vezes a solução ótima para o problema em questão, sendo que no pior dos casos adquiriu um desvio relativo de 9,3% face à melhor solução presente na base de dados.

Posteriormente, a qualidade do protótipo diminuiu comparativamente às existentes. Contudo, ainda alcançou soluções boas e adequadas na maioria dos casos.

Para problemas RCMPSP, em particular mp_j30_a2, obteve soluções muito semelhantes às medianas da base de dados. Por sua vez, nas instâncias mp_j30_a5, a variabilidade na eficácia foi maior.

No que engloba as inferências estatísticas, o PDD apresentou, exclusivamente no grupo mp_j30_a2, diferenças significativas nas medidas estatísticas analisadas face às da base de dados. No que remete a comparação com as melhores e soluções medianas da base de dados, estas mesmas diferenças foram de seguida analisadas e estipuladas como insignificantes.

Em suma, não foi possível provar estatisticamente que as soluções medianas e melhores da base de dados possuem uma qualidade melhor do que as apresentadas pelo PDD.

Todos os gráficos, tabelas e análises presentes neste capítulo demonstram que o PDD é um método capaz de solucionar RCPSP e RCMPSP com qualidade.

5. Conclusão

Este capítulo final sintetiza os principais resultados da pesquisa, destacando as contribuições e a relevância do trabalho realizado. São abordadas as conclusões gerais sobre o desenvolvimento e aplicação de técnicas de otimização no escalonamento de projetos e múltiplos projetos, com ênfase nas meta-heurísticas.

Os impactos positivos da aplicação do protótipo na gestão de cronogramas são identificados, bem como as suas limitações, oferecendo uma reflexão crítica sobre as áreas onde o protótipo pode ser aprimorado.

5.1. Conclusões finais

O dinamismo existente no ambiente empresarial atual exige das organizações uma inovação constante e rápida, o que leva à criação de técnicas, métodos e ferramentas de otimização de apoio à tomada de decisão. Na gestão de escalonamento de projetos, a eficiência e a eficácia são os dois pilares e fundamentos que permitem assegurar o sucesso organizacional, por isso as ferramentas de apoio criadas possuem a finalidade de melhorar estes dois parâmetros.

Esta dissertação abordou o desenvolvimento e a aplicação de técnicas de otimização para o escalonamento de projetos e múltiplos projetos, com foco na utilização de meta-heurísticas, em particular o Simulated Annealing, como uma ferramenta eficaz para a otimização de problemas específicos. No decorrer deste trabalho, foram abordados diversos desafios inerentes à gestão de projetos em ambientes complexos e multifacetados, onde a necessidade de otimizar recursos, reduzir custos e minimizar o tempo de execução é crítica para o sucesso organizacional.

O modelo proposto e o PDD demonstraram ser capazes de auxiliar significativamente o escalonamento de projetos e múltiplos projetos, proporcionando uma solução robusta para problemas que tradicionalmente exigem grande esforço computacional. A validação do protótipo através de testes com dados concretos revelou a sua eficácia na gestão de cronogramas, comprovando que a utilização de meta-heurísticas, neste caso específico o Simulated Annealing pode oferecer soluções viáveis mesmo em casos com uma elevada complexidade.

Além disso, a análise estatística dos resultados reforçou a eficácia do método proposto. O modelo assemelhou-se às abordagens já existente em termos de eficácia, mas também demonstrou ser adaptável a diferentes tipos de problemas, destacando a sua flexibilidade. O estudo contribuiu de forma relevante para o campo da gestão de projetos, oferecendo uma nova perspetiva sobre a aplicação de técnicas de otimização no escalonamento de projetos e múltiplos projetos, especialmente na gestão de recursos limitados.

Em suma, a dissertação evidencia o potencial de técnicas de otimização como ferramentas adequadas para a gestão de projetos, particularmente em cenários complexos. O trabalho não

só contribui para a literatura existente, como também oferece uma aplicação prática que pode ser utilizada para melhorar a eficácia e a eficiência operacional em diversas indústrias.

5.2. Limitações e trabalhos futuros

Apesar dos resultados promissores, o estudo apresenta algumas limitações que sugerem a necessidade de trabalhos e investigações futuras. O PDD, embora eficaz, foi testado em um conjunto limitado de casos de estudo, o que sugere a possibilidade de uma validação mais extensa em diferentes contextos. A aplicabilidade do mesmo em cenários reais e variados também necessita de ser explorada para garantir a sua eficácia em situações ainda mais complexas.

Outra limitação poderá estar relacionada com a natureza do método Simulated Annealing, que, apesar da sua flexibilidade e robustez, pode não ser o melhor para todos os tipos de problemas de escalonamento. Existe a possibilidade de integração de outras meta-heurísticas e métodos híbridos que possam complementar e aprimorar o desempenho deste protótipo.

Para trabalhos futuros, sugere-se a expansão do protótipo através da combinação de diferentes técnicas de otimização, como algoritmos genéticos, que podem oferecer uma exploração mais ampla e rápida do espaço de soluções. Além disso, a adaptação do protótipo para suportar decisões em tempo real e a inclusão de aprendizagem automática como forma de aprimorar a eficiência dos algoritmos.

A exploração da aplicação do protótipo em setores específicos, pode proporcionar *insights* valiosos sobre a flexibilidade e a adaptabilidade do PDD, consolidando a sua utilidade prática em diferentes contextos organizacionais.

Referências

[1] A. Parchami Afra, A. Kheirkhah, and H. Ahadi, “Systematic literature review of integrated project scheduling and material ordering problem: Formulations and solution methods,” *Comput Ind Eng*, vol. 173, Nov. 2022, doi: 10.1016/j.cie.2022.108711.

[2] S. N. Makhadmeh, A. T. Khader, M. A. Al-Betar, S. Naim, A. K. Abasi, and Z. A. A. Alyasseri, “Optimization methods for power scheduling problems in smart home: Survey,” Nov. 01, 2019, *Elsevier Ltd*. doi: 10.1016/j.rser.2019.109362.

[3] Z. Beheshti, S. Mariyam, and H. Shamsuddin, “A Review of Population-based Meta-Heuristic Algorithm,” 2013. [Online]. Available: www.i-csrs.org

[4] M. Urbański and A. Klawiter, “Abduction: Some Conceptual Issues,” *Logic and Logical Philosophy*, vol. 27, no. 4, pp. 583–597, Nov. 2018, doi: 10.12775/LLP.2018.016.

[5] S. Campbell *et al.*, “Purposive sampling: complex or simple? Research case examples,” *Journal of Research in Nursing*, vol. 25, no. 8, pp. 652–661, Dec. 2020, doi: 10.1177/1744987120927206.

[6] Hevner, March, Park, and Ram, “Design Science in Information Systems Research,” *MIS Quarterly*, vol. 28, no. 1, p. 75, 2004, doi: 10.2307/25148625.

[7] R. Atkinson, “Project management: cost, time and quality, two best guesses and a phenomenon, its time to accept other success criteria,” *International Journal of Project Management*, vol. 17, no. 6, pp. 337–342, Dec. 1999, doi: 10.1016/S0263-7863(98)00069-6.

[8] Project Management Institute, *A guide to the project management body of knowledge*, 6th ed. Project Management Institute, 2017.

[9] Project Management Institute, *A guide to the project management body of knowledge (PMBOK® guide).*, 5th ed. Newtown Square, Pennsylvania: Project Management Institute, Inc., 2013.

[10] J. Dumond and V. A. Mabert, “Evaluating Project Scheduling and Due Date Assignment Procedures: An Experimental Analysis,” *Manage Sci*, vol. 34, no. 1, pp. 101–118, Jan. 1988, doi: 10.1287/mnsc.34.1.101.

[11] Y. Cui, Z. Geng, Q. Zhu, and Y. Han, “Review: Multi-objective optimization methods and application in energy saving,” 2017, *Elsevier Ltd*. doi: 10.1016/j.energy.2017.02.174.

[12] R. K. Chakrabortty, R. A. Sarker, and D. L. Essam, “Resource constrained project scheduling with uncertain activity durations,” *Comput Ind Eng*, vol. 112, pp. 537–550, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.cie.2016.12.040.

[13] J. P. Lewis, *Project planning, scheduling, and control : the ultimate hands-on guide to bringing projects in on time and on budget*, 6th ed. James P. Lewis, 2023.

[14] J. Santiago and D. Magallon, “Critical Path Method,” 2009.

[15] K. R. Baker and D. Trietsch, *Principles of Sequencing and Scheduling*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2019.

[16] A. Tereso, “CPM -– Slides de Gestão Integrada de Projetos,” 2023, *Universidade do Minho*.

[17] D. Trietsch and K. R. Baker, “PERT 21: Fitting PERT/CPM for use in the 21st century,” *International Journal of Project Management*, vol. 30, no. 4, pp. 490–502, May 2012, doi: 10.1016/j.ijproman.2011.09.004.

[18] S. W. Kramer and J. L. Jenkins, “what is scheduling software really telling you?,” 2006, *Madrid, Spain*.

[19] Jin-Shing Yao and Feng-Tse Lin, “Fuzzy critical path method based on signed distance ranking of fuzzy numbers,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, vol. 30, no. 1, pp. 76–82, 2000, doi: 10.1109/3468.823483.

[20] R. Padman, D. E. Smith-Daniels, and V. L. Smith-Daniels, “Heuristic scheduling of resource-constrained projects with cash flows,” *Naval Research Logistics*, vol. 44, no. 4, pp. 365–381, 1997, doi: 10.1002/(SICI)1520-6750(199706)44:4<365::AID-NAV6>3.0.CO;2-4.

[21] J. M. Nicholas and H. Steyn, *Project Management for Business, Engineering, and Technology: Principles and Practice*, 3rd ed. Canada: Elsevier Inc., 2008.

[22] H. Kerzner, *Project management : a systems approach to planning, scheduling, and controlling*, 8th ed. Hoboken, New Jersey and Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[23] A. Sule Adegoke, “Measuring Process Effectiveness Using Cpm/Pert,” *International Journal of Business and Management*, vol. 6, no. 6, Jun. 2011, doi: 10.5539/ijbm.v6n6p286.

[24] J. F. Hutchings, *Project scheduling handbook*. Marcel Dekker, 2004.

[25] C. E. Clark, “Letter to the Editor—The PERT Model for the Distribution of an Activity Time,” *Oper Res*, vol. 10, no. 3, pp. 405–406, Jun. 1962, doi: 10.1287/opre.10.3.405.

[26] E. W. Larson and C. F. Gray, *Project management : the managerial process*, 5th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc, 2011.

[27] A. Fahmy, T. M. Hassan, and H. Bassioni, “Improving RCPSP solutions quality with Stacking Justification - Application with particle swarm optimization,” *Expert Syst Appl*, vol. 41, no. 13, pp. 5870–5881, Oct. 2014, doi: 10.1016/j.eswa.2014.03.027.

[28] M. Vanhoucke and J. Coelho, “An approach using SAT solvers for the RCPSP with logical constraints,” in *European Journal of Operational Research*, Elsevier, Mar. 2016, pp. 577–591. doi: 10.1016/j.ejor.2015.08.044.

[29] M. R. Garey and D. S. Johnson, “Computers, Complexity and Intractability,” in *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, vol. 1, Victor Klee, Ed., United States of America: Bell Telephone Laboratories, Incorporated, 1979, pp. 1–15.

[30] V. Valls, F. Ballestín, and S. Quintanilla, “Justification and RCPSP: A technique that pays,” in *European Journal of Operational Research*, Sep. 2005, pp. 375–386. doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.008.

[31] K. Neumann and J. Zimmermann, “Procedures for resource leveling and net present value problems in project scheduling with general temporal and resource constraints,” *Eur J Oper Res*, vol. 127, no. 2, pp. 425–443, Dec. 2000, doi: 10.1016/S0377-2217(99)00498-1.

[32] J. L. Ponz-Tienda, V. Yepes, E. Pellicer, and J. Moreno-Flores, “The Resource Leveling Problem with multiple resources using an adaptive genetic algorithm,” *Autom Constr*, vol. 29, pp. 161–172, Jan. 2013, doi: 10.1016/j.autcon.2012.10.003.

[33] A. Beirami, V. Vahidinasab, M. Shafie-khah, and J. P. S. Catalão, “Multiobjective ray optimization algorithm as a solution strategy for solving non-convex problems: A power generation scheduling case study,” *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 119, Jul. 2020, doi: 10.1016/j.ijepes.2020.105967.

[34] M. Gen, W. Zhang, L. Lin, and Y. S. Yun, “Recent advances in hybrid evolutionary algorithms for multiobjective manufacturing scheduling,” *Comput Ind Eng*, vol. 112, pp. 616–633, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.cie.2016.12.045.

[35] K. Deb, “Multi-objective Optimisation Using Evolutionary Algorithms: An Introduction,” in *Multi-objective Evolutionary Optimisation for Product Design and Manufacturing*, London: Springer London, 2011, pp. 3–34. doi: 10.1007/978-0-85729-652-8_1.

[36] P. Han, C. Du, J. Chen, F. Ling, and X. Du, “Cost and makespan scheduling of workflows in clouds using list multiobjective optimization technique,” *Journal of Systems Architecture*, vol. 112, Jan. 2021, doi: 10.1016/j.sysarc.2020.101837.

[37] P. Chitra, R. Rajaram, and P. Venkatesh, “Application and comparison of hybrid evolutionary multiobjective optimization algorithms for solving task scheduling problem on heterogeneous systems,” in *Applied Soft Computing Journal*, Mar. 2011, pp. 2725–2734. doi: 10.1016/j.asoc.2010.11.003.

[38] H. Lou, X. Wang, Z. Dong, and Y. Yang, “Memetic algorithm based on learning and decomposition for multiobjective flexible job shop scheduling considering human factors,” *Swarm Evol Comput*, vol. 75, Dec. 2022, doi: 10.1016/j.swevo.2022.101204.

[39] Project Management Institute, : *The standard for project management and a guide to the project management body of knowledge (PMBOK guide)*, 7th ed. Newtown Square, Pennsylvania: Project Management Institute, Inc., 2021.

[40] Project Management Institute, *The standard for portfolio management*, 4th ed. Newtown Square, Pennsylvania: Project Management Institute, Inc, 2017.

[41] Jacek. Błażewicz, *Handbook on Project Management and Scheduling*, vol. 2. Springer International Publishing Switzerland, 2015. doi: 10.1007/978-3-319-05915-0.

[42] R. K. Wysocki, *Effective Project Management: Traditional, Agile, Extreme*, 7th ed. Indianapolis, Indiana and Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2014.

[43] K. R. Baker and D. Trietsch, “INTRODUCTION,” in *PRINCIPLES OF SEQUENCING AND SCHEDULING*, Hoboken, New Jersey and Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2009, ch. 1, pp. 1–9.

[44] R. J. Gray, “Alternative approaches to programme management,” *International Journal of Project Management*, vol. 15, no. 1, pp. 5–9, Feb. 1997, doi: 10.1016/S0263-7863(96)00014-2.

[45] M. Danilovic and H. Börjesson, “MANAGING THE MULTIPROJECT ENVIRONMENT,” in *The Third Dependence Structure Matrix (DSM) International Workshop*, 2001.

[46] R. L. C. Souza, A. Ghasemi, A. Saif, and A. Gharaei, “Robust job-shop scheduling under deterministic and stochastic unavailability constraints due to preventive and corrective maintenance,” *Comput Ind Eng*, vol. 168, Jun. 2022, doi: 10.1016/j.cie.2022.108130.

[47] M. Chaieb and D. Ben Sassi, “An advanced hyperheuristic approach for the home health care scheduling problem with time window in deterministic and uncertain environments,” *Expert Syst Appl*, vol. 238, Mar. 2024, doi: 10.1016/j.eswa.2023.122141.

[48] Y. Carson and A. Maria, “Simulation optimization,” in *Proceedings of the 29th conference on Winter simulation - WSC ’97*, S. Andradbttir, K. J. Healy, D. H. Withers, and B. L. Nelson, Eds., New York, New York, USA: ACM Press, 1997, pp. 118–126. doi: 10.1145/268437.268460.

[49] R. Guerreiro, A. S. Santos, and A. Tereso, “Online Scheduling: A Survey,” in *2023 18th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI)*, IEEE, Jun. 2023, pp. 1–6. doi: 10.23919/CISTI58278.2023.10211826.

[50] J. Keller and S. Litzinger, “Systematic search space design for energy-efficient static scheduling of moldable tasks,” *J Parallel Distrib Comput*, vol. 162, pp. 44–58, Apr. 2022, doi: 10.1016/j.jpdc.2022.01.004.

[51] B. Firme, J. Figueiredo, J. M. C. Sousa, and S. M. Vieira, “Agent-based hybrid tabu-search heuristic for dynamic scheduling,” *Eng Appl Artif Intell*, vol. 126, Nov. 2023, doi: 10.1016/j.engappai.2023.107146.

[52] S. Arora and B. Barak, *Computational Complexity: A Modern Approach*. 2007.

[53] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. 2009.

[54] Y. Cai and K. L. Judd, “Stable and Efficient Computational Methods for Dynamic Programming,” *J Eur Econ Assoc*, vol. 8, no. 2–3, pp. 626–634, Apr. 2010, doi: 10.1162/jeea.2010.8.2-3.626.

[55] C.-W. V. Yen and T.-Z. Liu, “An inverse dynamics-based dynamic programming method for optimal control problems of linear systems,” *Optim Control Appl Methods*, vol. 19, no. 5, pp. 363–370, Sep. 1998, doi: 10.1002/(SICI)1099-1514(199809/10)19:5<363::AID-OCA635>3.0.CO;2-6.

[56] S. Nakariyakul, “A comparative study of suboptimal branch and bound algorithms,” *Inf Sci (N Y)*, vol. 278, pp. 545–554, Sep. 2014, doi: 10.1016/j.ins.2014.03.072.

[57] Y. L. Gao and B. Zhang, “Output-space branch-and-bound reduction algorithm for generalized linear fractional-multiplicative programming problem,” *Chaos Solitons Fractals*, vol. 175, Oct. 2023, doi: 10.1016/j.chaos.2023.113924.

[58] M. Dorigo and C. Blum, “Ant colony optimization theory: A survey,” *Theor Comput Sci*, vol. 344, no. 2–3, pp. 243–278, Nov. 2005, doi: 10.1016/j.tcs.2005.05.020.

[59] B. Xin, J. Chen, Z. Peng, L. Dou, and J. Zhang, “An efficient rule-based constructive heuristic to solve dynamic weapon-target assignment problem,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A:Systems and Humans*, vol. 41, no. 3, pp. 598–606, May 2011, doi: 10.1109/TSMCA.2010.2089511.

[60] C. Alós-Ferrer and A. Ritschel, “The reinforcement heuristic in normal form games,” *J Econ Behav Organ*, vol. 152, pp. 224–234, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.jebo.2018.06.014.

[61] T. Friedrich, T. Kötzing, M. S. Krejca, and A. Rajabi, “Escaping Local Optima with Local Search: A Theory-Driven Discussion,” in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2022, pp. 442–455. doi: 10.1007/978-3-031-14721-0_31.

[62] E. Tsang and C. Voudouris, “Fast local search and guided local search and their application to British Telecom’s workforce scheduling problem,” *Operations Research Letters*, vol. 20, no. 3, pp. 119–127, Mar. 1997, doi: 10.1016/S0167-6377(96)00042-9.

[63] W. L. Goffe, G. D. Ferrier, and J. Rogers, “Global optimization of statistical functions with simulated annealing,” *J Econom*, vol. 60, no. 1–2, pp. 65–99, Jan. 1994, doi: 10.1016/0304-4076(94)90038-8.

[64] P. Zhang and Y. Liu, “Application of An Improved Artificial Bee Colony Algorithm,” in *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, IOP Publishing Ltd, Feb. 2021. doi: 10.1088/1755-1315/634/1/012056.

[65] F. Glover and M. Samorani, “Intensification, Diversification and Learning in metaheuristic optimization,” Oct. 01, 2019, *Springer New York LLC*. doi: 10.1007/s10732-019-09409-w.

[66] M. Sarhani, S. Voß, and R. Jovanovic, “Initialization of metaheuristics: comprehensive review, critical analysis, and research directions,” Nov. 01, 2023, *John Wiley and Sons Inc*. doi: 10.1111/itor.13237.

[67] J. Teghem, “<title/>,” *Eur J Oper Res*, vol. 205, no. 2, pp. 486–487, Sep. 2010, doi: 10.1016/j.ejor.2009.12.010.

[68] Y. He, Z. He, and N. Wang, “Tabu search and simulated annealing for resource-constrained multi-project scheduling to minimize maximal cash flow gap,” *Journal of Industrial & Management Optimization*, vol. 17, no. 5, p. 2451, 2021, doi: 10.3934/jimo.2020077.

[69] A. S. Ramos, E. Olivares-Benitez, and P. A. Miranda-Gonzalez, “Multi-start iterated local search metaheuristic for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem,” *Expert Syst*, vol. 39, no. 1, Jan. 2022, doi: 10.1111/exsy.12830.

[70] R. K. Chakrabortty, A. Abbasi, and M. J. Ryan, “Robust Project Scheduling with Unreliable Resources: A Variable Neighbourhood Search Based Heuristic Approach,” in *2018 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, IEEE, Dec. 2018, pp. 656–660. doi: 10.1109/IEEM.2018.8607628.

[71] S. Hu, Z. Zhang, S. Wang, Y. Kao, and T. Ito, “A project scheduling problem with spatial resource constraints and a corresponding guided local search algorithm,” *Journal of the Operational Research Society*, vol. 70, no. 8, pp. 1349–1361, Aug. 2019, doi: 10.1080/01605682.2018.1489340.

[72] E. Pérez, M. Posada, and A. Lorenzana, “Taking advantage of solving the resource constrained multi-project scheduling problems using multi-modal genetic algorithms,” *Soft comput*, vol. 20, no. 5, pp. 1879–1896, May 2016, doi: 10.1007/s00500-015-1610-z.

[73] W. Zhang *et al.*, “Decision Support for Project Rescheduling to Reduce Software Development Delays based on Ant Colony Optimization,” *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 11, no. 1, p. 894, 2018, doi: 10.2991/ijcis.11.1.68.

[74] B. Crawford, R. Soto, F. Johnson, E. Norero, and E. Olguín, “An Artificial Bee Colony Algorithm for the Resource Contrained Project Scheduling Problem,” 2015, pp. 582–586. doi: 10.1007/978-3-319-21380-4_99.

[75] J. Joy, S. Rajeev, and V. Narayanan, “Particle Swarm Optimization for Resource Constrained-project Scheduling Problem with Varying Resource Levels,” *Procedia Technology*, vol. 25, pp. 948–954, 2016, doi: 10.1016/j.protcy.2016.08.185.

[76] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” *Science (1979)*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, 1983, doi: 10.1126/science.220.4598.671.

[77] C. Yang and M. Kumar, “An information guided framework for simulated annealing,” *Journal of Global Optimization*, vol. 62, no. 1, pp. 131–154, Apr. 2015, doi: 10.1007/s10898-014-0229-4.

[78] M. Ventresca and H. R. Tizhoosh, “Simulated Annealing with Opposite Neighbors,” in *2007 IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence*, IEEE, Apr. 2007, pp. 186–192. doi: 10.1109/FOCI.2007.372167.

[79] R. Khairuddin and Z. M. Zainuddin, “A Comparison of Simulated Annealing Cooling Strategies for Redesigning a Warehouse Network Problem,” in *Journal of Physics: Conference Series*, Institute of Physics Publishing, Nov. 2019. doi: 10.1088/1742-6596/1366/1/012078.

[80] Z. Ye, K. Xiao, and Y. Deng, “Investigation of Simulated Annealing Cooling Schedule for Mobile Recommendations,” in *Proceedings - 15th IEEE International Conference on Data Mining Workshop, ICDMW 2015*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Jan. 2016, pp. 1078–1084. doi: 10.1109/ICDMW.2015.226.

[81] A. Abubaker, A. Baharum, and M. Alrefaei, “Cooling schedule for multi-objective simulated annealing algorithm,” in *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., 2014, pp. 55–61. doi: 10.1063/1.4894331.

[82] X.-S. Yang, “A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm,” 2010, pp. 65–74. doi: 10.1007/978-3-642-12538-6_6.

[83] A. O. Topal and O. Altun, “A novel meta-heuristic algorithm: Dynamic Virtual Bats Algorithm,” *Inf Sci (N Y)*, vol. 354, pp. 222–235, Aug. 2016, doi: 10.1016/j.ins.2016.03.025.

[84] M. Kalra and S. Singh, “A review of metaheuristic scheduling techniques in cloud computing,” *Egyptian Informatics Journal*, vol. 16, no. 3, pp. 275–295, Nov. 2015, doi: 10.1016/j.eij.2015.07.001.

[85] X. S. Yang, “Bat algorithm: Literature review and applications,” 2013, *Inderscience Enterprises Ltd.* doi: 10.1504/IJBIC.2013.055093.

[86] B. Ramesh, V. C. J. Mohan, and V. C. V. Reddy, “Application of bat algorithm for combined economic load and emission dispatch,” *Journal of Electrical Engineering*, pp. 1–9, Jan. 2013.

[87] H. Dehghani and F. Ali Mohammad Nia, “Estimation of air overpressure using bat algorithm,” *Mining Science*, vol. 28, pp. 77–92, 2021, doi: 10.37190/msc212806.

[88] J. F. Gonçalves, J. J. M. Mendes, and M. G. C. Resende, “A genetic algorithm for the resource constrained multi-project scheduling problem,” *Eur J Oper Res*, vol. 189, no. 3, pp. 1171–1190, Sep. 2008, doi: 10.1016/j.ejor.2006.06.074.

[89] P.-H. Chen and S. M. Shahandashti, “Hybrid of genetic algorithm and simulated annealing for multiple project scheduling with multiple resource constraints,” *Autom Constr*, vol. 18, no. 4, pp. 434–443, Jul. 2009, doi: 10.1016/j.autcon.2008.10.007.

[90] “Project Scheduling Problem Library (PSPLIB).” Accessed: Jun. 25, 2024. [Online]. Available: https://www.om-db.wi.tum.de/psplib/getdata_sm.html

[91] “multi project scheduling problems (MPSPLib).” Accessed: Jul. 25, 2024. [Online]. Available: http://www.mpsplib.com/download.php

[92] M.-W. Park and Y.-D. Kimto, “A SYSTEMATIC PROCEDURE FOR SETTING PARAMETERS IN SIMULATED ANNEALING ALGORITHMS,” 1998.

[93] J. Rose, W. Klebsch, A. N. D Jurgen Wolf, A. R. Editor H J M Otten J Rose, W. Klebsch, and J. Wolf, “Temperature Measurement and Equilibrium Dynamics of Simulated Annealing Placements,” 1990.

[94] H. S. Cho, C. H. Paik, H. M. Yoon, and H. G. Kim, “A robust design of simulated annealing approach for mixed-model sequencing,” in *Computers and Industrial Engineering*, Jun. 2005, pp. 753–764. doi: 10.1016/j.cie.2004.12.005.

[95] P. J. M. van Laarhoven and E. H. L. Aarts, *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987. doi: 10.1007/978-94-015-7744-1.

Declaração de Integridade

Declaro ter conduzido este trabalho académico com integridade. Não plagiei ou apliquei qualquer forma de uso indevido de informações ou falsificação de resultados ao longo do processo que levou à sua elaboração.

Declaro que o trabalho apresentado neste documento é original e de minha autoria, não tendo sido utilizado anteriormente para nenhum outro fim.

Declaro ainda que tenho pleno conhecimento do Código de Conduta Ética do P.PORTO.

NOME: Filipe Ribeiro

ISEP, Porto, 12 de setembro de 2024