



IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE UMA PLACA LAMINADA A PARTIR DAS SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

PRISCILLA DO ROCIO BERTOLDI

julho de 2023

IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE UMA PLACA LAMINADA A PARTIR DAS SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Priscilla do Rocio Bertoldi

2022-2023

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

isen

P.PORTO

IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DE UMA PLACA LAMINADA A PARTIR DAS SUAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

Priscilla do Rocio Bertoldi

1180030

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação do Professor Doutor Hernâni Miguel Reis Lopes e coorientação do Professor Doutor Púria Esfandiari.

2022-2023

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

isen

P.PORTO

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, minha fonte de amor, paz e integridade.

Singular agradecimento a minha família, em especial ao meu marido Richard Gonçalves, pelo amor e cuidado, por sempre me encorajarem a continuar e fazer o trabalho com excelência.

E de forma especial, gostaria de agradecer ao meu professor orientador Hernâni Miguel Reis Lopes pelos conselhos dados no decorrer da realização deste trabalho, os quais foram fundamentais para o desenvolvimento e redação da dissertação. Também gostaria de agradecer ao meu professor coorientador Púria Esfandiari pelo auxílio na procura de bibliografias e durante a escrita da dissertação.

Página propositadamente em branco

RESUMO

A presente dissertação descreve a identificação das propriedades elásticas de um laminado compósito através da aplicação de um método inverso. Neste âmbito, são apresentadas as metodologias não destrutivas mais relevantes na identificação das propriedades em placas laminadas compósitas, com destaque para os trabalhos mais recentes sobre a resolução do problema inverso através da aplicação dos algoritmos de otimização meta-heurísticos inspirados na natureza. Com base neste estudo, são descritas de forma sucinta as metodologias dos algoritmos meta-heurísticos Genético, Enxame de Partículas, Pirilampo e Pesquisa Cuco. São igualmente apresentados os métodos de fabrico de materiais compósitos, assim como a Teoria Clássica dos Laminados, dando ênfase ao processo de moldação por compressão a quente, o qual foi usado no fabrico do laminado compósito que serviu de caso de estudo para a identificação das suas propriedades elásticas.

A metodologia proposta procura identificar as propriedades elásticas da placa a partir da medição das suas frequências naturais. A implementação da metodologia envolveu o desenvolvimento de um modelo numérico do laminado utilizando o ANSYS® MAPDL que fará o cálculo das frequências naturais numéricas, e a criação de um programa em MATLAB® que irá gerar as propriedades do laminado, seguindo a filosofia do algoritmo Genético e do Enxame de Partículas, na procura de minimizar a diferença entre as frequências naturais numéricas e experimentais. Para a aplicação do método inverso de identificação das propriedades, foi fabricado um laminado compósito de fibra de carbono e resina epóxida. Após o seu fabrico foram identificadas as suas frequências naturais experimentais para a condição livre-livre através da excitação da estrutura por martelo de impacto e medição da sua resposta através de um microfone.

Um estudo comparativo entre os dois algoritmos implementados foi conduzido, o qual permitiu identificar o Enxame de Partículas como o mais eficaz na identificação das propriedades elásticas da placa. A influência do número de frequências naturais e do número de agentes de pesquisa no desempenho deste algoritmo foi analisada, tendo-se identificados entre 8 a 12 frequências e 100 agentes como as melhores escolhas.

A validação das propriedades elásticas identificadas pelo método inverso foi realizada por comparação com as medidas através do ensaio clássico de tração. Para tal, foram extraídos da placa seis provetes e ensaiados. Os resultados demonstraram-se que existe grande proximidade entre os módulos de elasticidade, E_1 e E_2 , e o coeficiente de *Poisson* ν_{12} obtidos pelos dois métodos. Provou-se que o método inverso pode ser assumido como boa alternativa para a identificação das propriedades elásticas do laminado, com a vantagem adicional de ser um método não destrutivo.

PALAVRAS-CHAVE

Laminados compósitos, identificação das propriedades elásticas, métodos meta-heurísticos, elementos finitos.

página propositadamente em branco

ABSTRACT

This dissertation describes the identification of the elastic properties of a composite laminate by applying an inverse method. In this scope, the most relevant non-destructive methodologies in the identification of properties in composite laminated slabs are presented, with emphasis on the most recent works on solving the inverse problem by applying nature-inspired meta-heuristic optimization algorithms. Based on this study, the methodologies of Genetic, Particle Swarm, Firefly and Cuckoo Search meta-heuristic algorithms are briefly described. The methods for manufacturing composite materials are also presented, as well as the Classical Theory of Laminates, emphasizing the hot compression molding process, which was used in the manufacture of the composite laminate that served as a case study for the identification of its elastic properties.

The proposed methodology seeks to identify the elastic properties of the plate from the measurement of its natural frequencies. The implementation of the methodology involved the development of a numerical model of the laminate using ANSYS® MAPDL that will calculate the numerical natural frequencies, and the creation of a program in MATLAB® that will generate the properties of the laminate, following the philosophy of the Genetic Algorithm and the Particle Swarm, in the search to minimize the difference between the numerical and experimental natural frequencies. To apply the inverse method of identifying the properties, a carbon fiber and epoxy resin composite laminate was fabricated. After its fabrication, its experimental natural frequencies for the free-free condition were identified by excitation of the structure by impact hammer and measurement of its response using a microphone.

A comparative study between the two implemented algorithms was conducted, which allowed identifying the Particle Swarm as the most effective in identifying the elastic properties of the plate. The influence of the number of natural frequencies and the number of search agents on the performance of this algorithm was analyzed, with 8 to 12 frequencies and 100 agents identified as the best choices.

The validation of the elastic properties identified by the inverse method was performed by comparison with those measured through the classical tensile test. For this, six specimens were extracted from the plate and tested. The results showed that there is great proximity between the modulus of elasticity, E_1 and E_2 , and Poisson's ratio ν_{12} obtained by the two methods. It was proved that the inverse method can be assumed as a good alternative for the identification of the elastic properties of the laminate, with the additional advantage of being a non-destructive method.

KEYWORDS

Composite laminates, identification of elastic properties, metaheuristic methods, finite elements.

página propositadamente em branco

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE TABELAS	IX
LISTAS DE SIGLAS E SÍMBOLOS.....	XI
1. Introdução.....	15
1.1. Contextualização	15
1.2. Objetivos	17
1.3. Metodologia	17
1.4. Descrição dos capítulos.....	17
2. Revisão Bibliográfica	19
2.1. Métodos inversos para a identificação das propriedades elásticas em placas laminadas compósitas	19
2.1.1. Processo de otimização.....	20
2.1.2. Algoritmos de otimização	22
2.2. Mecânica dos sólidos e resistência dos materiais.....	25
2.2.1. Visão geral.....	25
2.2.2. Conceito de tensão-deformação.....	32
2.2.3. Materiais Compósitos Laminados.....	34
2.2.4. Teoria clássica dos laminados	37
2.2.5. Processos de Fabrico Materiais Compósitos.....	41
2.3. Metodologia de identificação das propriedades elásticas.....	44
2.3.1. Ferramentas numéricas usadas na implementação da metodologia.....	45
3. Implementação das metodologias.....	47
3.1. Fabrico da placa laminada.....	47
3.2. Medição das frequências naturais da placa laminada	49
3.3. Função objetivo e variáveis de projeto	52
3.4. Resolução do problema inverso.....	53
3.5. Implementação do método clássico	54
4. Identificação das propriedades elásticas e discussão de resultados	57
4.1. Estudo das propriedades obtidas pelos algoritmos PSO e GA	57
4.2. Estudo da influência do número de frequências naturais na obtenção das propriedades	59
4.3. Influência do número de agentes de pesquisa	62
4.4. Identificação das propriedades elásticas a partir do ensaio de tração.....	63
5. Conclusões e propostas de trabalhos futuros.....	67
5.1. Conclusões.....	67
5.2. Propostas de trabalhos futuros.....	68
Referências Bibliográficas	69

ANEXOS	73
--------------	----

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Formação de materiais compósitos a partir da combinação de dois materiais base [2].	15
Figura 2 - Corpo em equilíbrio [38]	26
Figura 3- Superfície em corte sob ação da parte II	26
Figura 4 - Decomposição do vetor Tensão	27
Figura 5- Tensões de Cauchy [37]	27
Figura 6 - Deslocamento do ponto P [38]	29
Figura 7 - Deformação linear [38]	29
Figura 8 - Deformação angular ou distorção [38]	30
Figura 9 – Laminado compósito com diferente orientação das fibras por camada [36]	35
Figura 10 - Transformação do sistema de coordenadas da camada para o sistema de coordenadas global [1]	35
Figura 11 – Teoria de placas de Kirchhoff, com as linhas normais ao plano médio do laminado permanecerem normais após deformação [39]	37
Figura 12 - Momentos fletores e torsor em uma placa laminada [39]	38
Figura 13- Esforços de membrana em uma placa laminada [39].....	38
Figura 14 - Espessuras das camadas do laminado [36]	39
Figura 15 - Moldação por compressão [39]	43
Figura 16 - Compressão a frio (a) e compressão a quente (b) [42].....	43
Figura 17 - Compressão em prensa de pratos quentes	44
Figura 18 - Metodologia usada na identificação das propriedades elásticas em placas laminadas	45
Figura 19 – Prensa de pratos quentes.....	48
Figura 20 - Ciclo de cura do pré-impregnado HS 160 REM [58].....	48
Figura 21 - Placa laminada retificada	49
Figura 22- Medição das frequências naturais da placa laminada com o acelerômetro	50
Figura 23 - Medição das frequências naturais da placa laminada com o microfone.....	50
Figura 24 – Representação das FRFs cuja resposta foi medida com o acelerômetro e com o microfone	51
Figura 25 - Frequências naturais medidas com o microfone	51
Figura 26 - Ensaio de tração para identificação das propriedades elásticas da placa compósita. ..	55
Figura 27 - Evolução da função objetivo com o número de iterações para os algoritmos PSO e GA	59
Figura 28 - Convergência do PSO para distinto número de frequências naturais	62
Figura 29 – Evolução do valor médio da função objetivo e respectivo desvio padrão com o número de agentes de pesquisa.....	63
Figura 30 – Curvas de tensão-deformação e deformação em duas direções ortogonais: a) provete 1, b) provete 4.....	64

página propositadamente em branco

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades das fibras comparadas aos materiais em bruto [1]	16
Tabela 2 - Elementos não nulos do tensor de rigidez C [1].....	34
Tabela 3 – Propriedades gerais do pré-impregnado.....	47
Tabela 4 - Propriedades mecânicas do pré-impregnado após a cura.....	47
Tabela 5 - Frequências naturais de vibração experimentais.....	52
Tabela 6 – Intervalos de valores admissíveis das propriedades elásticas para simulação	53
Tabela 7 - Dimensões médias dos provetes usados na identificação das propriedades elásticas através do ensaio de tração.....	54
Tabela 8 - Propriedades elásticas identificadas pelos algoritmos PSO e GA	57
Tabela 9 - Valor da função objetivo obtidos pelos algoritmos PSO e GA	58
Tabela 10 - O tempo de cálculo requerido pelos algoritmos PSO e GA.....	58
Tabela 11 - O valor da função objetivo calculado pelo algoritmo PSO, para diferentes frequências naturais	59
Tabela 12 - Comparação entre frequências naturais numéricas e experimentais e respetivo erro relativo.	60
Tabela 13 - O tempo de cálculo requerido pelos algoritmos PSO em função da seleção das frequências naturais de vibração.....	61
Tabela 14 - Propriedades elásticas identificadas pelo algoritmo PSO, considerando o número distinto de frequências naturais	61
Tabela 15 – Influência do número de agentes de pesquisa na função objetivo, número de iterações e tempo de cálculo.....	63
Tabela 16 - Propriedades elásticas identificadas a partir dos ensaios de tração.....	64
Tabela 17 - Comparação das propriedades elásticas obtidas numericamente e pelo ensaio de tração	65
Tabela 18 - Comparação das propriedades elásticas obtidas pelo método inverso, método clássico e Teoria Clássica dos laminados (TCL).....	66

página propositadamente em branco

LISTAS DE SIGLAS E SÍMBOLOS

Lista de Siglas

A	Área de separação
[A]	Matriz de rigidez de membrana
[B]	Matriz de acoplamento membrana-flexão
[C]	Tensor de rigidez
[C']	Tensor de rigidez no sistema de eixos 1,2,3
[D]	Matriz de rigidez de flexão
{k}	Vetor deformação de membrana
[K]	Matriz de rigidez
[M]	Matriz de massa
{M}	Vetor dos momentos fletores
{N}	Vetor dos esforços de membrana
[S]	Tensor de flexibilidade
[S']	Tensor de flexibilidade no sistema de eixos 1,2,3
{X}	Vetor deslocamento
{ \ddot{X} }	Vetor aceleração
x(t)	Resposta harmónica
1, 2, 3	Sistema de eixos de cada camada de um laminado compósito
Al	Alumínio
APDL	<i>ANSYS® Parametric Design Language</i>
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
BMC	<i>Bulk molding compound</i>
C	Constantes de rigidez
c	Fator de transformação de coordenadas
CSA	<i>Cuckoo Search Algorithm</i> ou Algoritmo Pesquisa Cuco
dr	Distância linear entre dois pontos em estudo
dx, dy, dz	Dimensões de um elemento infinitesimal nos eixos x, y e z
E	Módulo de <i>Young</i> / Módulo de Elasticidade
EPT	Estado plano de tensão
FA	<i>FireFly Algorithm</i> ou Algoritmo Pirilampo
FRFs	Funções de Resposta em Frequência
g	Medidas em gramas
G	Módulo de Corte
GA	<i>Genetic Algorithm</i> ou Algoritmo Genético
GMT	<i>Glass mat thermoplastic</i>
GPa	Medida em Giga Pascal

GWO	<i>Grey Wolf Algorithm</i> ou Algoritmo Lobo Cinzento
h	Espessura total do laminado
ISEP	Instituto Superior de Engenharia do Porto
k	Deformações de membrana
kHz	Medida em kilo Herz
Hz	Medida em herz
MAPDL	<i>Mechanical Parametric Design Language</i>
min	Medida em minutos
mm	Medida em milímetro
m ²	Medida em metro quadrado
mm ²	Medida em milímetro quadrado
MPa	Medida em Mega Pascal
n	Quantidade de camadas de um laminado
nf	Número total de frequências
Oxy	Plano XX e YY
Oz	Plano ZZ
P.Porto	Instituto Politécnico do Porto
PSO	<i>Particle Swarm Optimization Algorithm</i> ou Algoritmo do Enxame de Partículas
REM	Resina Epoxídica modificada
RIM	<i>Reaction Injection molding</i>
RRIM	<i>Reinforced reaction injection molding</i>
RTM	<i>Resin Transfer molding</i>
S	Constantes de flexibilidade
s	Fator de transformação de coordenadas
SMC	<i>Sheet molding compound</i>
SRIM	<i>Structural reaction injection molding</i>
TLC	Teoria Clássica dos laminados
tnf	Medida em toneladas
x, y, z	Sistema de eixos cartesianos
z	Distância do plano medio de uma placa compósita
z_k	Espessura de cada camada do laminado

Lista de Símbolos

ε_0	Estado inicial de deformação da placa
$[T_\varepsilon]$	Matriz transformação para as deformações
$[T_\sigma]$	Matriz transformação para as tensões
$[\tau]$	Tensor de tensões
$[\varepsilon]$	Tensor de deformações

$\{\varepsilon'\}$	Vetor deformação no sistema de eixos
$\{\sigma'\}$	Vetor tensão no sistema de eixos 1,2,3
$\{n\}$	Vetor direção unitário
$\{T\}$	Vetor tensão
$\{u\}$	Vetor deslocamento
ΔA	Área elementar
\vec{n}	Versor
\vec{F}	Forças Externas
$\Delta \vec{F}$	Vetor Força resultante
\vec{P}_n	Forças de Volume
$^{\circ}C$	Medida em Graus Celsius
Δ	Multiplicador para as constantes de rigidez
ν	Coefficiente de <i>Poisson</i>
ρ	Densidade
τ	Tensão de Corte
\vec{T}	Vetor tensão
γ	Distorção ou deformação angular
ε	Extensão ou deformação linear
θ	Ângulo das fibras de uma camada de laminado
ϕ	Função objetivo
ϕ_i	Modo natural de vibração
σ	Tensão normal
σ_u	Tensão de cedência
$\tilde{\omega}_i$	Frequências naturais experimentais
ω_i	Frequências naturais numéricas ou frequência natural associada ao modo de vibração i

1. INTRODUÇÃO

1.1. Contextualização

A incorporação dos materiais compósitos às indústrias aeronáutica e aeroespacial tem crescido de forma significativa nos últimos anos, motivada pela necessidade de redução de peso e consequente melhoria na eficiência dos veículos de transporte. Com efeito, os elementos estruturais fabricados em materiais metálicos têm sido progressivamente substituídos por materiais compósitos, os quais apresentam uma resistência e rigidez específica superior [1]. Por outro lado, o desenvolvimento de técnicas experimentais dedicadas à caracterização de materiais compósitos tem permitido, recentemente, um melhor controlo de parâmetros de fabrico, fazendo com que elementos estruturais de maior responsabilidade pudessem também ser fabricados neste tipo de materiais.

Um material é designado de compósito quando é obtido pela combinação de dois ou mais materiais distintos, com uma interface comum. Exemplos de compósitos são os que resultam da combinação de metais com cerâmicos, metais com polímeros ou, mesmo, cerâmicos com polímeros [2], como se pode ver no diagrama da Figura 1.

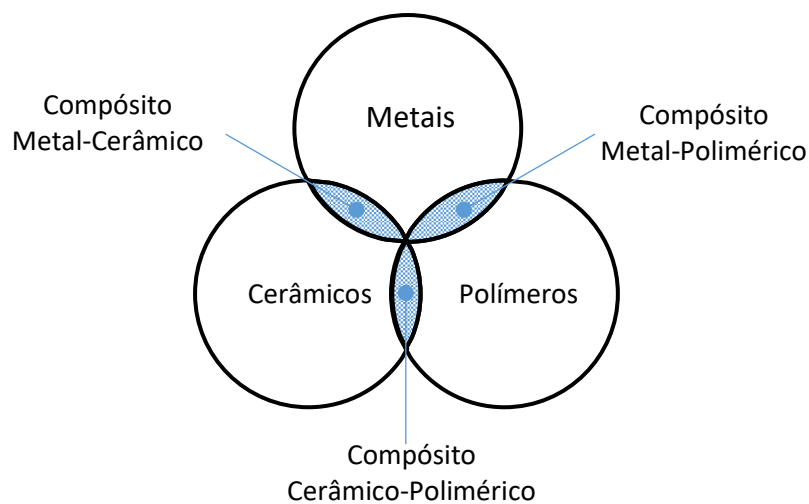


Figura 1 - Formação de materiais compósitos a partir da combinação de dois materiais base [2]

Este trabalho focar-se-á na utilização de reforços em forma de fibras, que podem ser de diferentes origens. Dentro dos compósitos reforçados por fibras, destacam-se os de matriz polimérica. Estes são constituídos por uma fase dispersa, designada de matriz, e por uma fase de reforço, em forma de fibras. A matriz possui a função de aglomerar as fibras, dar forma ao compósito, proteger as superfícies e transmitir os esforços que o compósito é sujeito, às fibras [1]. As fibras têm como principal função suportar as cargas, podendo ter origem sintética ou natural. Podem também ser fornecidas em diferentes formas, como por exemplo fibras curtas, longas ou contínuas. As fibras sintéticas utilizadas para o fabrico de compósitos são habitualmente de carbono, vidro ou aramídicas. Como exemplos de fibras naturais têm-se as fibras de juta, de sisal ou de linho, que têm vindo a ser mais utilizadas nos últimos anos devido à procura por soluções mais sustentáveis, redução da pegada de carbono, biodegradabilidade e reciclagem.

Uma das características interessantes do uso de fibras de reforço em estruturas, são as melhores propriedades mecânicas que estas apresentam quando comparadas com os mesmos materiais em bruto. A obtenção de materiais sob forma de filamento reduz significativamente a quantidade de defeitos, melhorando as propriedades mecânicas, ver Tabela 1 [1].

Tabela 1 - Propriedades das fibras comparadas aos materiais em bruto [1]

Material	Módulo de elasticidade, E (GPa)	Resistência à tração, σ_u (GPa)	Densidade, ρ	Módulo específico, E/ρ	Resistência específica, σ_u/ρ
Fibras:					
Vidro E	72	3.5	2.54	28.5	1.38
Vidro S	87	4.3	2.49	35.0	1.70
Carbono (Pitch CP-	690	2.2	2.15	321	1.00
Carbono (PAN C	345	2.3	1.85	186	1.24
Boro	393	3.1	2.70	146	1.15
Sílica	72.4	5.8	2.19	33	2.65
Tungstênio	414	4.2	19.3	21	0.22
Berílio	240	1.3	1.83	131	0.71
Kevlar® 49	131	3.6	1.45	90	2.48
Materiais convencionais:					
Aço	210	0.34 – 2.1	7.8	26.9	0.043 – 0.27
Ligas de Al	70	0.14 – 0.62	2.7	25.9	0.052 – 0.23
Vidro	70	0.7 – 2.1	2.5	28	0.28 – 0.84
Tungstênio	350	1.1 – 4.1	19.3	18.1	0.057 – 0.21
Berílio	300	0.7	1.83	164	0.38

A conjugação das interessantes propriedades mecânicas e menor densidade dos materiais compósitos permite desenvolver soluções estruturais mais leves, sem comprometer o seu desempenho e segurança estrutural. Na indústria aeroespacial, por exemplo, qualquer diminuição do peso leva à diminuição significativa no consumo de combustível. Já na indústria aeronáutica, a redução do peso da estrutura da aeronave permite um aumento da sua capacidade de carga, resultando numa maior rentabilidade para as empresas. Mais recentemente, os materiais compósitos têm sido incorporados no fabrico dos veículos automóveis de produção em massa, graças ao aumento das cadências de produção e à redução dos seus custos de fabrico [1]. Nos veículos de transporte, a incorporação de elementos estruturais fabricados em material compósito traz grandes vantagens na economia de combustível, pelo que se prevê, a curto prazo, o seu rápido crescimento. Todavia, este crescimento deve ser acompanhado pela identificação das propriedades mecânicas destes materiais, necessárias ao projeto estrutural, para garantir o seu correto uso sem comprometer a segurança da estrutura. Normalmente, algumas das principais propriedades elásticas dos compósitos são determinadas por via de realização de ensaios destrutivos, nomeadamente através de ensaios de tração e flexão, para identificação dos módulos de Elasticidade E_1 , E_2 e E_3 , coeficiente de *Poisson* ν_{12} e módulos de corte G_{12} e G_{13} . Os provetes a ensaiar devem ser retirados de diferentes zonas dentro do mesmo laminado, a fim de identificar as propriedades elásticas e a sua variabilidade. Por outro lado, estudos mais recentes propõem um método não destrutivo, que combina a determinação das frequências naturais experimentais com as obtidas através da simulação pelo método dos elementos finitos e a aplicação de técnicas de otimização, o qual apresenta inúmeras vantagens relativamente aos métodos clássicos de identificação das propriedades. Seguindo esta nova linha de investigação, é proposto no âmbito deste trabalho a identificação das propriedades elásticas de um laminado compósito em fibra de

carbono e matriz epóxida, a partir da determinação das suas frequências naturais de vibração e recorrendo a modelos de otimização meta-heurísticos.

1.2. Objetivos

Os materiais compósitos por natureza são heterogêneos e, por este motivo, torna-se necessário a determinação das suas propriedades elásticas através da aplicação de técnicas robustas. Assim, este trabalho tem como principal objetivo desenvolver uma metodologia capaz de identificar as propriedades elásticas de uma placa laminada compósita a partir da minimização da diferença das frequências naturais de vibração entre as calculadas pelo método dos elementos finitos e as medidas experimentalmente, por aplicação de métodos de otimização meta-heurísticos.

O processo envolve a medição das frequências naturais da placa, a construção de um modelo numérico da placa baseado no método dos elementos finitos para determinação das correspondentes frequências naturais e a implementação do processo de otimização baseado em diferentes métodos meta-heurísticos. Estes procuram minimizar a diferenças entre as frequências naturais de vibração experimentais e numéricas, seguindo diferentes estratégias de atualização das propriedades elásticas no modelo numérico. A metodologia será testada em uma placa laminada compósita fabricada pelo processo de compressão a quente. Também é objetivo analisar o desempenho dos diferentes algoritmos meta-heurísticos, com o propósito de selecionar o mais adequado para o processo de otimização e restantes estudos, sendo os algoritmos considerados para este estudo: Algoritmo Genético e Algoritmo do Enxame de Partículas. Por fim, será apresentada uma análise comparativa entre as propriedades elásticas identificadas pela metodologia proposta e as obtidas através da metodologia clássica.

1.3. Metodologia

A realização da presente dissertação seguiu a metodologia que se descreve seguidamente:

- Revisão bibliográfica sobre os métodos inversos aplicados à identificação das propriedades elásticas de laminados compósitos, métodos meta-heurísticos inspirados na natureza e teoria Clássica sobre Laminados.
- Implementação da metodologia selecionada, fabrico da placa laminada, medição das suas frequências naturais experimentais e implementação do método clássico.
- Identificação das propriedades elásticas e discussão de resultados quanto a influência dos diferentes algoritmos na identificação das propriedades, do número de frequências naturais e do número de agentes de pesquisa. Identificação das propriedades elásticas obtidas pelo método clássico. Comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos.

1.4. Descrição dos capítulos

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos.

O Capítulo 1 é composto pela contextualização, objetivos, metodologia e descrição da estrutura da dissertação.

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica, que agrupa os conceitos fundamentais e as metodologias utilizadas para a realização desta dissertação. Neste é possível encontrar:

- Métodos inversos para a identificação das propriedades em laminados compósitos, contexto histórico dos processos de otimização, como surgiram e evoluíram ao longo dos anos e, também, a descrição da filosofia em que assentam os quatro principais algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza;
- Os conceitos de tensão, deformação e tensão-deformação para aplicação das equações em materiais compósitos, bem como os conceitos teóricos sobre os materiais compósitos laminados, envolvendo a teoria clássica dos laminados, as constantes de engenharia utilizadas nos cálculos das propriedades e caracterização dos laminados. Por fim, a descrição dos principais processos de fabrico de estruturas em material compósito, com destaque para o processo de compressão a quente, o qual será usado no fabrico da placa laminada compósita;
- A descrição da metodologia de identificação das propriedades elásticas selecionada para o trabalho e as ferramentas numéricas usadas na implementação da mesma.

No Capítulo 3 é apresentada a implementação da metodologia utilizada e são descritas as suas principais etapas, começando pelo fabrico da placa laminada, seguido da medição das suas frequências naturais experimentais, definição da função objetivo, descrição do método inverso e definição das variáveis de projeto. Por fim, é feita uma descrição do método clássico para a identificação de algumas propriedades elásticas.

No Capítulo 4 é possível encontrar os resultados e a respetiva discussão para os estudos propostos. Primeiramente, uma comparação das propriedades elásticas obtidas pelos algoritmos Genético e Enxame de Partículas, posteriormente a análise da influência do número de frequências naturais e influência do número de agentes de pesquisa no desempenho do algoritmo Enxame de Partículas e na qualidade das propriedades elásticas identificadas. São igualmente apresentadas as propriedades elásticas identificadas através do ensaio de tração, bem como uma análise comparativa das propriedades identificadas pelos dois métodos.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais e as propostas de trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Métodos inversos para a identificação das propriedades elásticas em placas laminadas compósitas

O uso dos materiais compósitos em projetos estruturais, como por exemplo na indústria aeronáutica, automóvel e aeroespacial, exige que suas propriedades sejam devidamente identificadas. Apesar destas estruturas não serem homogêneas, podem ser tratadas como tal sob o ponto de vista macroscópico, em que as suas propriedades elásticas globais resultam da média ponderada da percentagem de resina e fibra. Na prática, na realização de ensaios mecânicos destrutivos, é normalmente obtido um número limitado de propriedades [1]. Estes ensaios tornam-se demorados e dispendiosos visto que são necessários vários testes até que seja possível identificar com precisão as propriedades dos materiais. É neste âmbito que os métodos inversos se destacam relativamente aos métodos convencionais, pois para além de serem métodos não destrutivos, permitem a determinação de um maior número de propriedades.

Os materiais compósitos são estruturas complexas e por este motivo apresentam dificuldades na determinação das suas propriedades elásticas. A fim de superar estas dificuldades, foram propostos por vários autores diferentes métodos de identificação das propriedades elásticas, dos quais se destacam os métodos inversos. Estes métodos assentam num modelo numérico, habitualmente baseado no método dos elementos finitos [3], em que as propriedades elásticas do laminado compósito são ajustadas de modo a minimizar a diferença entre a sua resposta e a obtida por via experimental. O problema inverso é resolvido de forma eficiente recorrendo a técnicas de otimização, das quais se destacam os algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza, pela sua simplicidade de implementação. No caso da identificação das propriedades elásticas de laminados compósitos, o problema inverso é habitualmente definido com base na diferença entre as frequências naturais numéricas e experimentais [4]–[6]. Os algoritmos meta-heurísticos mais conhecidos são o algoritmo Genético (*Genetic Algorithm*, GA), o algoritmo do Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO), o algoritmo Lobo Cinzento (*Grey Wolf*, GWO), o Algoritmo Pirlampo (*FireFly*, FA), o Pesquisa Cuco (*Cuckoo Search*, CSA) entre outros [6], [7].

Araújo et al. apresentou um dos primeiros e mais relevantes trabalhos baseados nos métodos inversos para a identificação das propriedades elásticas num laminado compósito [4]. O problema inverso é resolvido através de técnicas de otimização determinísticas, através da qual se procura a minimização do erro entre as frequências naturais obtidas pelo método dos elementos finitos e as medidas experimentalmente. O processo adotado de otimização envolve dois passos. No primeiro, correspondente às três primeiras iterações, é aplicado o método modificado das direções admissíveis. No segundo passo, é aplicado o método *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* [8]. A precisão da metodologia adotada é comprovada através da análise de três casos de estudo.

Os algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza têm surgido recentemente como alternativa aos algoritmos determinísticos, na identificação das propriedades em estruturas laminadas compósitas. Segundo Fister et al. existem setenta e quatro técnicas meta-heurísticas inspiradas na natureza [9]. Jalili et al. investigou o desempenho de diferentes algoritmos meta-heurísticos na otimização da sequência de sessenta e quatro camadas para maximizar a capacidade de carga de encurvadura de uma placa compósita para diferentes casos [10].

O estudo revelou que os algoritmos com melhor desempenho global foram *League Championship Algorithm (LCA)*, *Optics-Inspired Optimisation (OIO)* e *Particle Swarm Optimisation (PSO)*. Um estudo sobre a identificação das propriedades elásticas de placas laminadas compósitas com fibras naturais utilizando cinco diferentes algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza, foi recentemente apresentado [6].

Os autores concluíram que duas grandes vantagens destes algoritmos é o facto de não requererem a identificação das constantes elásticas iniciais e a determinação do gradiente da função objetivo. No entanto, estes algoritmos requerem um elevado número de agentes de pesquisa. Para os dois modelos de placa analisados, modelos com fibra sintética e modelos com fibra natural, verificaram que o desempenho dos algoritmos é semelhante. Também observaram que a precisão dos resultados é fortemente dependente do número de frequências naturais utilizadas.

2.1.1. Processo de otimização

A palavra otimizar na língua portuguesa é usada para definir o objetivo de alcançar o “ótimo” ou o emprego de determinadas técnicas para seleção das melhores alternativas para se alcançar determinado objetivo [11]. A otimização ou o ato de otimizar, pode envolver diversas esferas da vida humana, como resolver problemas de engenharia, melhorar o ambiente profissional, familiar ou social. No ambiente profissional, a otimização contribui para uma melhor relação tempo/lucro ou tempo/qualidade. Na engenharia, permite obter novas soluções e melhorar cálculos estruturais, que muitas vezes são difíceis de modelar ou compreender, podendo apresentar diversas soluções. Atualmente, a otimização é realizada recorrendo a ferramentas matemáticas de simulação e programação, em que são utilizados diferentes modelos dependendo da pesquisa pretendida [12].

Os métodos de otimização podem ser divididos em duas grandes categorias: determinísticos e estocásticos. Os determinísticos são mais rigorosos, em que o caminho para o valor ótimo e as funções são repetíveis. Os estocásticos possuem uma certa aleatoriedade e são usados quando a formulação do problema apresenta um nível elevado de complexidade ou é impossível de o descrever por funções matemáticas. O algoritmo baseado no gradiente de *Newton-Raphson* é um exemplo de algoritmo determinístico, já que utiliza funções e respetivas derivadas bem definidas [12]. Os algoritmos estocásticos podem ser divididos em dois subgrupos: heurísticos e meta-heurísticos.

Os algoritmos heurísticos têm como base a “tentativa e erro”, ou seja, baseiam-se na aleatoriedade sem método base e sem garantia de alcançar os valores ótimos do problema. Produzem soluções admissíveis dentro de um tempo razoável, mas sem que haja uma coerência nos valores obtidos.

A abordagem heurística é vista com mais frequência na história humana do que a abordagem meta-heurística. Como exemplo, tem-se o episódio Eureka de Arquimedes e até mesmo a aprendizagem diária adquirida pelas crianças [12]. O matemático Alan Turing foi, provavelmente, o primeiro a utilizar algoritmos heurísticos para desvendar o segredo da máquina Enigma usado pelos alemães nas comunicações militares durante a Segunda Guerra Mundial. Ele chamou heurístico ao seu método de pesquisa. Conseguiu decifrar o segredo da máquina, apesar do método não garantir a solução ótima.

Os algoritmos heurísticos foram relevantes na redução dos erros de aprendizagem e de previsão, como no caso dos algoritmos baseados em redes neuronais artificiais e máquinas vetoriais de

suporte [12]. No ano de 1943 W. McCulloch e W. Pitts propuseram processamento de informação por neurónios artificiais e em 1948, Alan Turing utilizou o conceito de rede neuronal pela primeira vez.

Por sua vez, os modelos meta-heurísticos, apresentam uma aleatoriedade definida de acordo com um método ou uma estratégia. Estes permitem alcançar mais rapidamente o valor ótimo que os métodos heurísticos. Envolvem a diversificação, através da geração de diversas combinações para explorar todo o domínio admissível de busca, e a intensificação, através da concentração da busca num domínio local [12].

A abordagem pelos modelos meta-heurísticos, é emergente e difícil de identificar o seu exato início. Estes utilizam múltiplos agentes ou partículas de pesquisa, os quais são inicialmente gerados de forma aleatória. No entanto, o caminho percorrido por estes agentes na procura da solução ótima segue uma dada metodologia, a qual é normalmente inspirada na observação da natureza. Ao modelo meta-heurístico de pesquisa é-lhe atribuído o mesmo nome dessa metodologia. Pelo fato da geração inicial dos agentes de pesquisa ser completamente aleatória, o caminho por estes percorridos não é repetível e não é garantida a mesma solução a cada corrida [12]. Um dos modelos meta-heurísticos de pesquisa mais conhecidos é designado de algoritmo genético. Este é inspirado na teoria de Darwin da evolução natural das espécies, em que só os mais fortes e mais resistente é que sobrevivem e passam os seus genes à geração seguinte. Este é materializado através da aplicação de operadores matemáticos aos múltiplos agentes, procurando minimizar a evolução genética que ocorre de geração em geração, através do cruzamento ou recombinação, mutação e seleção dos agentes mais aptos que passam os seus genes para a geração seguinte [12], [13].

O primeiro algoritmo meta-heurístico designado de pesquisa padrão (*Pattern Search*) foi publicado em 1961 por R. Hooke e T. A. Jeeves [14], [15]. A pesquisa é realizada de acordo com um movimento padrão a partir de um ponto base, sendo o fracasso ou sucesso da pesquisa determinantes para a definição dos novos pontos base [16]. Os movimentos são agora realizados para estes novos pontos, repetindo este processo sucessivamente. A explicação apresentada por Hooke e Jeeves para esta metodologia de pesquisa baseia-se em:

“A base intuitiva para este tipo de movimento é a presunção de que o que quer que tenha constituído um conjunto de movimentos bem-sucedidos no passado é suscetível de se revelar novamente bem-sucedido. O resultado do movimento padrão pode ser ou um sucesso ou um fracasso.” [14].

Em 1962 John Holland dedicou-se a estudar o sistema adaptativo e foi o primeiro a utilizar manipulação de cruzamento e recombinação para modelar este sistema. Publicou um livro em que explica o desenvolvimento dos algoritmos genéticos de forma resumida, publicado em 1975 [12].

L. J. Fogel, A. J. Owen e M. J. Walsh em 1966 desenvolveram a programação evolutiva, em que representavam soluções como máquinas de estado finito e depois mutavam de forma aleatória uma dessas máquinas. Estas ideias evoluíram e posteriormente foram nomeadas por algoritmos evolutivos e/ou computação evolutiva [12].

Glover em 1977 desenvolveu a ideia de *Scatter Search*, pesquisa de dispersão, que consiste em gerar soluções inicialmente coordenadas baseadas em um conjunto de pontos de referência de forma propositada, não aleatória [17], [18].

Os algoritmos meta-heurísticos tiveram um grande crescimento nos anos de 1980, com o modelo de *Simulated Annealing (SA)* de S. Kirkpatrick, C. D. Gellat e M. P. Vecchi em 1983, este tem como inspiração o processo de recozimento dos metais e no seu processo lento de arrefecimento a partir das altas temperaturas. O ponto inicial de pesquisa é selecionado aleatoriamente e corresponde à temperatura mais elevada do processo, este vai arrefecendo gradualmente segundo uma trajetória, a qual é representada pela direção de pesquisa do método [18], [19]. Quando a velocidade de arrefecimento é suficientemente lenta, isto é, é pequeno o gradiente da função, é encontrada a solução ótima. As palavras dos autores:

“Existe uma ligação profunda e útil entre a mecânica estatística (o comportamento de sistemas com muitos graus de liberdade em equilíbrio térmico a uma temperatura finita) e otimização de multivariáveis ou combinatória (encontrar o mínimo de uma dada função, dependendo de muitos parâmetros). Uma analogia detalhada com recozimento em sólidos proporciona um enquadramento para a otimização das propriedades de muitos sistemas grandes e complexos.” [19]

Os modelos mais modernos meta-heurísticos são baseados na memória da pesquisa, um destes modelos foi introduzido por Fred Glover em 1986 e que o designou por pesquisa *Tabu*. Este consiste em utilizar a memória de pesquisas passadas como base para realizar pesquisas futuras. A palavra “tabu” é empregue para indicar os movimentos proibidos, sugerindo que não há qualquer valor em realizar um mau movimento a não ser que os caminhos a evitar sejam registados numa ou mais listas Tabu [20].

Coloni, Dorigo e Maniezzo em 1992 apresentaram um método inspirado no comportamento natural das formigas o qual designou por otimização de Colônia de Formigas (*Optimization by ant colonies*) [18], [21], [22]. Apesar das formigas serem quase cegas, conseguem encontrar caminhos mais curtos entre o local onde vivem e o alimento. A explicação deste comportamento coletivo é o rasto de feromonas que marcam o caminho e que é seguido pelas restantes formigas. O processo é designado por “*loop de feedback*”, quantas mais formigas seguem um mesmo caminho mais atrativo ele se torna para continuar a ser seguido [23].

Em 1995, James Kennedy e Russel C. Eberhart desenvolveram um algoritmo com memória, com fortes evidências de ser melhor do que os algoritmos genéticos em muitos casos, este foi designado de Otimização do Enxame de Partículas, *Particle Swarm Optimization (PSO)* [24]–[26]. Fundamenta-se na ideia de que os agentes se tendem a aglomerar em torno da melhor solução a partir de uma pesquisa aleatória [27], [28].

Mais recentemente, Yang X. em 2008 propôs um método inspirado no comportamento dos pirilampos que designou por *FireFly (FA)*, ou Pirilampo, [12], [29], [30]. Xin-She Yang e Suash desenvolveram um modelo de pesquisa baseado no comportamento do cuco, o qual designou por *Cuckoo Search (CSA)* ou Pesquisa Cuco. Este revelou-se ser muito mais eficaz do que a maioria dos algoritmos de otimização meta-heurísticos, incluindo o PSO [12].

2.1.2. Algoritmos de otimização

Para a resolução de forma eficiente dos problemas inversos serão utilizados algoritmos meta-heurísticos inspirados na natureza. Estes são inspirados nos fenómenos da natureza para melhorar a eficácia na procura do valor ótimo. Os algoritmos meta-heurísticos possuem como vantagens não

necessitarem do cálculo das derivadas na função objetivo e poderem ser aplicados a qualquer tipo de função descontínua, visto que só avaliam o valor da função objetivo.

A metodologia em que se baseia o algoritmo têm forte influência na solução do problema de otimização. Os diferentes modelos de otimização são importantes quando se pretende levar em consideração a complexidade e diversidade dos problemas do mundo real. Estes apresentam comportamentos distintos que são função do tipo de problema a resolver. Tal significa que não há um modelo que supere todos os outros, mas que há modelos de otimização que são mais eficazes na resolução de um tipo de problema do que outros. Contudo, as suas variantes do problema podem afetar de forma drástica o desempenho do algoritmo de otimização. Por esse motivo, há a necessidade de se estudar diferentes modelos de otimização a fim de identificar o mais eficaz na resolução de um problema em particular. Para este estudo são apresentados os algoritmos meta-heurísticos designados por: Genético (GA), Enxame de Partículas (PSO), Pirlampo (FA) e Pesquisa Cuco (CSA). Todavia, só os algoritmos PSO e GA é que serão aplicados na resolução do problema inverso. Os algoritmos FA e CSA servirão de base para trabalhos futuros.

Algoritmo Genético

O algoritmo Genético (GA) é um dos mais famosos e mais utilizados dos últimos anos devido a sua robustez e simplicidade. Este foi introduzido por John Holland em 1975 e descrito em seu livro *Adaptation in Natural and Artificial Systems* [13]. É inspirado na teoria da seleção natural de Charles Darwin, utilizando recombinação, mutação e seleção no estudo de adaptação e sistemas artificiais [12]. Este possui a vantagem de conseguir lidar com problemas complexos. Contudo, a formulação da função objetivo, o tamanho da população, a taxa de mutação, a taxa de cruzamento e o critério de seleção para nova população, devem ser avaliados cuidadosamente. Pois uma escolha inapropriada pode dificultar a convergência do algoritmo e resultar em soluções distantes do valor ótimo do problema [12]. A metodologia começa com a geração aleatória de uma população dentro dos limites admissíveis para cada variável de projeto, sendo determinado o respetivo valor da função objetivo. A partir deste, são selecionados um conjunto de indivíduos que conduzem à melhor solução do problema e uma minoria dos indivíduos com pior desempenho. Esta última seleção tem como propósito evitar que indivíduos com código genético muito próximo restrinjam o domínio de pesquisa e conduzam a mínimos locais da solução. Os códigos genéticos destes indivíduos são combinados para produzir uma nova geração, através de aplicação de operadores de recombinação, mutação e seleção. A recombinação traduz-se na troca do código genético entre indivíduos, a mutação altera uma parte do código genético e a seleção determina quais os elementos que realizam a troca genética. Desta forma, o código genético que conduz à melhor solução é sempre transmitido para as gerações seguintes. Este processo repetir-se-á até que se atinja o número máximo de gerações ou que seja alcançado um critério de convergência da solução. Este algoritmo é descrito pelo fluxograma apresentado no Anexo A.1 deste documento [12].

Algoritmo do Enxame de Partículas

O algoritmo do enxame de partículas ou *Particle Swarm* (PSO) é considerado por alguns autores como possuindo um melhor desempenho que o algoritmo GA [27], [31], [32]. Este é inspirado no comportamento de bandos de aves ou insetos. No domínio global, cada indivíduo/partícula do enxame ou cada solução possui uma posição e velocidade, a qual será atualizada de acordo com a distância percorrida pela partícula até a próxima posição [15].

No algoritmo PSO são registadas as coordenadas associadas a melhor solução de cada partícula, valor designado de *pbest*, o melhor valor de todas as partículas designado de *gbest*, e a respetiva direção do seu presente deslocamento. As partículas iniciam a sua posição dentro do domínio admissível e os valores da função objetivo são avaliados. Nas iterações seguintes, cada partícula desloca-se uma distância de valor aleatório e numa direção definida por uma componente aleatória, pela direção do seu melhor resultado e pela direção do melhor resultado do grupo. As novas posições são atualizadas, os novos vetores velocidade são gerados e são calculadas os valores da função objetivo para as posições dentro do domínio admissível. O objetivo do PSO é acelerar o movimento das partículas nas direções do *pbest* e *gbest*. O algoritmo identifica a solução global a partir das melhores soluções de todas as partículas. O processo termina quando é alcançado o número máximo de iteração ou quando um dos critérios de convergência é cumprido [27], [28]. No Anexo A.2 é apresentado o fluxograma que descreve os diferentes passos do algoritmo PSO.

Algoritmo Pirlampo

Os pirlampos (Fireflies) são insetos capazes de emitir uma luz intermitente produzida por um processo químico para fins de cortejo entre macho e fêmea e aviso de possíveis perigos. O comportamento destes insetos inspirou o trabalho desenvolvido por Xin-She Yang em 2009 [29] e deu origem ao algoritmo de pesquisa designado por Pirlampo, *FireFly* (FA) [33].

O algoritmo baseia-se em três regras básicas: os pirlampos atraem-se independentemente do sexo; a atratividade é proporcional ao brilho, sendo que o brilho diminui com a distância; e os pirlampos de menor brilho deslocam-se na direção e no sentido dos pirlampos de maior brilho. A atratividade de cada pirlampo é determinada pelo seu brilho, sendo este definido pela função objetivo. O procedimento inicia com a geração de uma população dentro do domínio admissível do problema. Ao longo das iterações, as distâncias entre pirlampos vão sendo calculadas e os pirlampos com menor brilho deslocam-se no sentido dos mais brilhantes, percorrendo uma distância gerada por números aleatórios. Caso na nova posição o brilho do pirlampo seja superior (melhoria no valor da função objetivo), a posição do pirlampo será atualizada para esta posição [29]. O algoritmo termina quando o número de iterações for alcançado ou um dos critérios de convergência for cumprido. No Anexo A.3 apresenta-se o fluxograma com as etapas do algoritmo FA.

Algoritmo Pesquisa Cuco

Em 2009 Yang e Deb desenvolveram um novo algoritmo de pesquisa denominado de Pesquisa Cuco, *Cuckoo Search* (CSA) [34]. Este assenta no comportamento parasítico dos cucos no momento da reprodução, em que depositam os seus ovos nos ninhos de aves de outras espécies, e na utilização de *Lévy Flights*, voos retos intercalados por rotações súbitas de 90° na procura de novas posições. Este apresenta três regras básicas: cada cuco só deposita um ovo de cada vez num ninho aleatório; os melhores ninhos com os melhores ovos (melhores valores da função objetivo) passarão para as gerações seguintes; o número de ninhos disponíveis é fixo e é atribuída uma probabilidade entre 0 e 1 de uma ave anfitriã descobrir os ovos depositados pelo cuco, uma vez descoberto este pode ser deixado fora ou ave anfitriã pode abandonar o ninho e construir um novo [34], [35].

O CSA é classificado como algoritmo meta-heurístico de pesquisa, baseado numa busca/seleção elitista associada a uma geração aleatória de valores, o que o torna mais eficiente e capaz de se adaptar a uma classe mais ampla de problemas de otimização devido ao menor número de parâmetros a definir [34].

O algoritmo inicia com a geração de uma população de ninhos com ovos, nos quais são depositados aleatoriamente ovos dos cucos. Os ovos representam a combinação das variáveis de projeto do problema. No passo seguinte é comparada a aptidão (valor da função objetivo) dos ovos do anfitrião com o do cuco. Quando a aptidão do ovo do cuco é melhor que o do anfitrião, o ovo do anfitrião é substituído pelo ovo do cuco. No caso do anfitrião se aperceber que foi depositado um ovo no seu ninho, este pode remover o ovo ou abandonar o ninho e contruir um novo. Esta escolha é baseada na geração aleatória de valores com uma probabilidade que varia entre 0 e 1. A localização de um novo ninho é definida pela escolha aleatória da direção e a distância percorrida a partir do ninho abandonado, sendo este baseado no modelo *Lévy Flights*. O processo repete-se a cada iteração até o número máximo de iterações ser alcançado ou um dos critérios de convergência seja cumprido. O fluxograma apresentado no Anexo A.4 descreve as etapas necessárias para o funcionamento deste algoritmo.

2.2. Mecânica dos sólidos e resistência dos materiais

2.2.1. Visão geral

Os metais possuem habitualmente as mesmas propriedades elásticas independentemente da direção escolhida, sendo por isso designados materiais isotrópicos. Contrapondo, os compósitos reforçados por fibras, tendem a ter um comportamento anisotrópico, pelo facto de as propriedades de resistência e rigidez serem significativamente superiores na direção do reforço. Por exemplo, a rigidez na direção das fibras é em uma a duas ordens de grandeza superior à rigidez na direção transversal [1].

Um material é designado de perfeitamente elástico quando a relação entre o seu estado de tensão e de deformação é linear e após ser retirada a solicitação externa este recupera completamente a sua forma inicial [36]. No que se refere aos laminados compósitos, as suas camadas têm propensão a apresentarem comportamento linear elástico enquanto não é excedido o seu limite elástico, após isso, passa a um comportamento não-linear, devido à rotura de camadas presentes no compósito e outros efeitos como a delaminação ou aparecimento de fendas. Para efeitos de dimensionamento dos laminados compósitos, só deve ser considerado o seu comportamento linear e os respetivos limites [1].

As constantes elásticas dos materiais são a base da sua caracterização. A título de exemplo, são aqui descritas as principais constantes elásticas: o módulo de elasticidade ou módulo de *Young* (E) que relaciona a tensão aplicada e a deformação no regime elástico, o coeficiente de *Poisson* (ν) descreve a expansão ou contração de um material em direções perpendiculares à direção da força aplicada e o módulo de corte (G) estabelece a razão entre a tensão de corte e a respetiva deformação.

A tensão é um conceito usado para descrever as forças geradas internamente num corpo por unidade de área, quando submetido a solicitações externas. Esta não é uma grandeza mensurável tal como a força ou deslocamento. Contudo, é usada na Engenharia para descrever o estado interno de um sólido [37]. O estado de tensão num dado ponto de um sólido é definido pelo equilíbrio das forças externas e internas numa dada secção [37], [38].

Na análise a seguir apresentada considerar-se-á um sólido homogéneo e isotrópico. No modelo de sólido representado na Figura 2 no qual atuam forças externas $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, e forças de volume \vec{F} , geram-se numa dada secção forças internas, as quais resultam do equilíbrio das forças em cada parte do sólido, parte *I* e parte *II* [38].

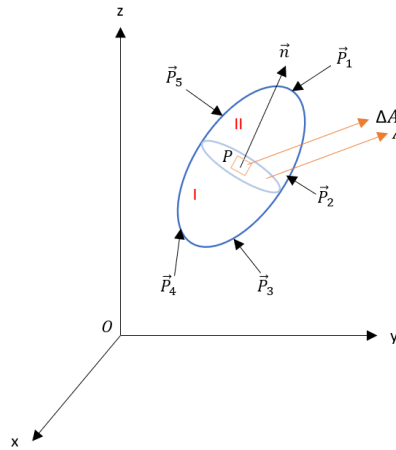


Figura 2 - Corpo em equilíbrio [38]

Como exemplo, considere-se que é isolado a parte *I* do sólido, através remoção da parte *II*, ver Figura 3. Para o equilíbrio das forças externas a atuar na parte *I*, irão surgir na secção de separação forças distribuídas, designadas de forças internas [38]. Estas forças internas também podem ser definidas como forças geradas pela parte *II* sobre a parte *I*. A área de separação *A*, caracterizada pelo versor \vec{n} normal à esta superfície, contém um ponto *P* de área elementar ΔA . A área ΔA está sob ação de forças internas provenientes da parte *II*, representadas pelo vetor resultante $\Delta \vec{F}$, e consequentemente, sob ação do vetor tensão resultante \vec{T} [37], [38].

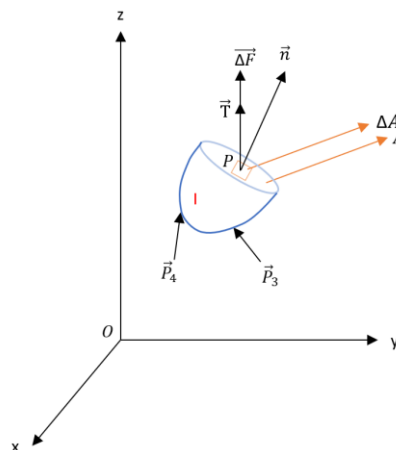


Figura 3- Superfície em corte sob ação da parte II

O vetor tensão média é obtido dividindo o vetor $\Delta \vec{F}$ pela área ΔA . O vetor tensão \vec{T} num dado ponto é calculado fazendo convergir a área ΔA para zero [37], [38]:

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad (2.2.1.1)$$

O vetor resultante das tensões \vec{T} pode apresentar uma direção distinta do versor normal à secção de separação \vec{n} . Por esse motivo, o vetor tensão resultante irá decompor-se em duas direções ortogonais: uma componente normal ao plano de corte, chamada de tensão normal e representada por σ , e uma componente paralela ao plano de corte, designada tensão de corte ou tensão tangencial e representada por τ , ambas representadas na Figura 4.

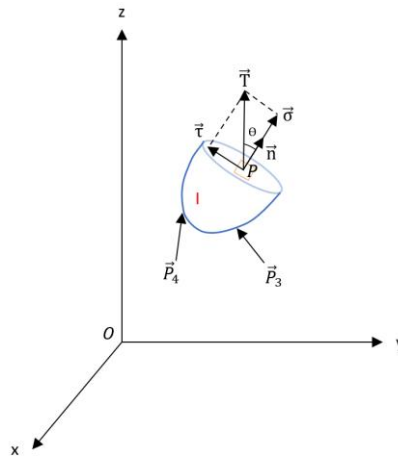


Figura 4 - Decomposição do vetor Tensão

O conceito de tensor de tensões foi introduzido por *Cauchy* para definir o estado de tensão num qualquer ponto segundo três direções ortogonais. Na Figura 5 são apresentadas as tensões que surgem num elemento de volume infinitesimal, com as dimensões dx , dy e dz , em que cada plano contém duma tensão normal σ , perpendicular ao plano, e duas tensões de corte τ , paralelas ao plano. As tensões atuantes em cada face do elemento garantem que este se encontra em equilíbrio estático. Os índices presentes em cada componente de tensão correspondem primeiramente ao plano e posteriormente à direção do eixo na qual a tensão é exercida. Por exemplo, a tensão de corte τ_{yz} está contida no plano YY e atua na direção do eixo ZZ [37], [38].

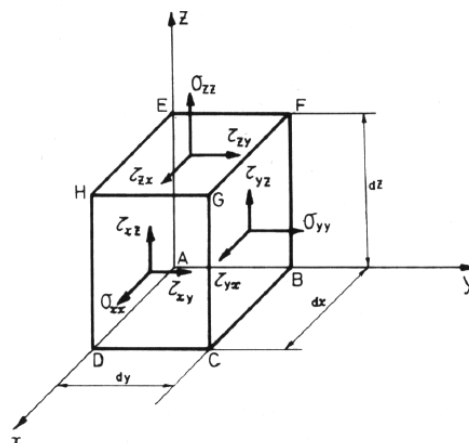


Figura 5- Tensões de Cauchy [37]

Habitualmente, o estado de tensão em cada ponto do sólido é definido pelas nove componentes de tensão que são agrupadas na forma matricial, a qual é designada de tensor das tensões de *Cauchy*, $[\tau]$.

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad [38] \quad (2.2.1.2)$$

A definição do estado de tensão num ponto envolve a determinação de nove incógnitas, três tensões normais σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , e seis tensões de corte τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{xy} , τ_{zy} , τ_{xz} e τ_{yz} . O teorema da reciprocidade de tensões de corte mostra que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, pelo que o número de incógnitas se reduz a três tensões normais e três tensões de corte [37], [38]. A reciprocidade de tensões de corte é deduzida através do equilíbrio de momentos das forças atuantes nas faces do elemento para as três direções ortogonais, sendo que, a título de exemplo, se apresenta a seguir o equilíbrio de momentos para o eixo ZZ:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} dy dz \frac{dy}{2} - \sigma_{xx} dy dz \frac{dy}{2} \right) + \left(\sigma_{yy} dx dz \frac{dx}{2} - \sigma_{yy} dx dz \frac{dx}{2} \right) \\ & + \left(\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dy dz dx \right) + \left(\tau_{zy} dy dx \frac{dx}{2} - \tau_{yz} dy dx \frac{dx}{2} \right) \\ & + \left(\tau_{zx} dy dz \frac{dy}{2} - \tau_{xz} dy dx \frac{dy}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.3)$$

Resolvendo:

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.2.1.4)$$

A partir do tensor das tensões pode ser determinado o vetor tensão para uma dada direção arbitrária \vec{n} , perpendicular à secção de corte:

$$\{T\} = [\tau] \times \{n\} \quad (2.2.1.5)$$

Considere-se que o vetor direção \vec{n} é unitário e que possui as componentes $\{l, m, n\}^T$. Estas correspondem aos cossenos diretores do plano pretendido. Assim, o vetor tensão \vec{T} será determinado através:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (2.2.1.6)$$

As forças aplicadas ao sólido produzem um estado de deformação ao qual está associado um campo de tensões. É considerado deformação quando um ponto $P = (x, y, z)$ passa a ocupar uma nova posição $P' = (x', y', z')$, ver Figura 6 - Deslocamento do ponto P [38]. O deslocamento do ponto P pode ser descrito pelo vetor deslocamento $\vec{u} = (u, v, w)$ [37], [38].

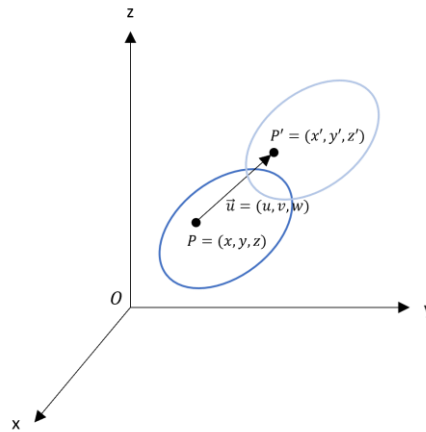


Figura 6 - Deslocamento do ponto P [38]

As novas coordenadas do ponto P, dadas pelo ponto P', serão obtidas a partir das seguintes relações [4, 5]:

$$x' = x + u(x, y, z) \quad (2.2.1.7)$$

$$y' = y + v(x, y, z) \quad (2.2.1.8)$$

$$z' = z + w(x, y, z) \quad (2.2.1.9)$$

O deslocamento pode ser linear e/ou angular. A variação da distância entre o ponto P e o ponto P' é chamada de extensão ou deformação linear ε , que pode ser de alongamento ou de encurtamento. A variação relativa angular entre duas retas que ligam o ponto em estudo a dois outros pontos próximos, é chamada de deformação angular ou distorção γ . Considerando a existência de um ponto S muito próximo de P, com coordenadas $S = (x + dx, y + dy, z + dz)$, este passará a ocupar uma nova posição $S' = (x' + dx', y' + dy', z' + dz')$ após a deformação. A distância $dr = \overline{PS}$, mostrada na Figura 7, irá variar e passará a $dr' = \overline{P'S'}$.

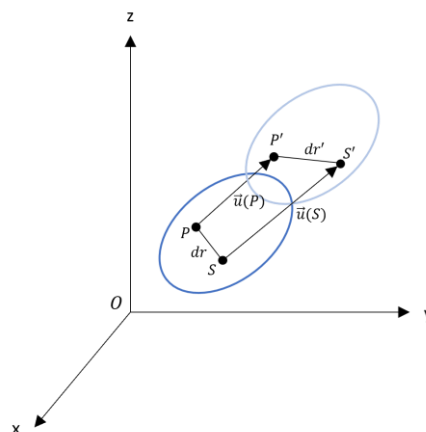


Figura 7 - Deformação linear [38]

A deformação linear ou extensão será a variação relativa do comprimento do segmento PS:

$$\varepsilon_{PS} = \frac{dr' - dr}{dr} \quad (2.2.1.10)$$

A extensão ou deformação linear no ponto P segundo a direção paralela ao vetor \overrightarrow{PS} é definida pelo versor $\vec{n} = (l, m, n)$ é dado por [38]:

$$\varepsilon(P, \vec{n}) = \lim_{dr \rightarrow 0} \frac{dr' - dr}{dr} \quad (2.2.1.11)$$

Pelo que no caso das três direções cartesianas, a deformação no ponto P será dada por [38]:

$$\varepsilon(P, \vec{i}) = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.1.12)$$

$$\varepsilon(P, \vec{j}) = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.2.1.13)$$

$$\varepsilon(P, \vec{k}) = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2.1.14)$$

Além da deformação linear o elemento também possui uma distorção ou deformação angular, conforme é mostrado na Figura 8. Esta traduz-se pelo escorregamento relativo entre planos paralelos e pode ser aproximada ao ângulo γ para valores muito pequenos [38]:

$$\frac{DB'}{DP'} = \tan \gamma \approx \gamma \quad (2.2.1.15)$$

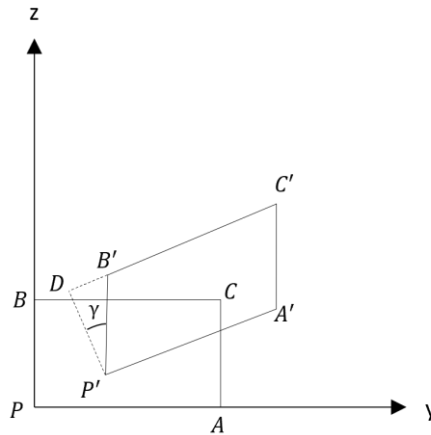


Figura 8 - Deformação angular ou distorção [38]

A distorção ocorrida entre os segmentos BP e PA, inicialmente ortogonais entre si, é descrita pela deformação angular $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$ [38]. No caso de um elemento tridimensional, a deformação angular é descrita pelas quantidades [38]:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} ; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} ; \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad (2.2.1.16)$$

Estas também podem ser descritas a partir das deformações lineares:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.1.17)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2.1.18)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2.1.19)$$

No caso de o segmento possuir apenas deformação pura, ou seja, somente linear e distorcional, podem ser estabelecidas as seguintes relações [37]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} ; \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2.1.20)$$

Pelo que as componentes da distorção passarão a ser definidas por:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2.2.1.21)$$

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\gamma_{yx}}{2} \quad (2.2.1.22)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (2.2.1.23)$$

$$\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \quad (2.2.1.24)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\gamma_{zx}}{2} \quad (2.2.1.25)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\gamma_{xz}}{2} \quad (2.2.1.26)$$

Assim, o estado de deformação num ponto será definido por seis componentes cartesianas: três lineares e três de distorção. Estas também podem ser agrupados numa matriz simétrica a qual é designada de matriz de deformação $[\varepsilon]$ [37], [38]:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.2.1.27)$$

O estado de deformação pode ser traduzido pelo tensor das deformações, a qual, à semelhança do tensor das tensões, este apresenta simetria nos elementos de distorção [1].

2.2.2. Conceito de tensão-deformação

Conforme mencionado, os laminados compósitos são fortemente anisotrópicos, por este motivo, possuem um comportamento distinto quando solicitados em diferentes direções. Os tensores das tensões e deformações estão relacionados através da Lei de *Hooke* generalizada. No caso mais geral, a relação entre as seis extensões e as seis tensões é definida por [1], [36]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.1)$$

Em que C_{ijkl} são as constantes de rigidez que estabelecem a relação entre as tensões e as deformações, em que $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. A matriz das constantes de rigidez é designada de tensor da rigidez [C]. A simetria do tensor das tensões implica a simetria do tensor de rigidez, pelo que se podem estabelecer as seguintes igualdades [1], [36]:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (2.2.2.2)$$

Um outro facto decorrente da simetria do tensor de rigidez, é a redução do número de componentes de rigidez independentes do material, o que permite reescrever as relações numa forma mais reduzida, sendo [1], [36] :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_1; \sigma_{22} = \sigma_2; \sigma_{33} = \sigma_3; \sigma_{23} = \sigma_4; \sigma_{13} = \sigma_5; \sigma_{12} = \sigma_6 \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_1; \varepsilon_{22} = \varepsilon_2; \varepsilon_{33} = \varepsilon_3; 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4; 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5; 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6 \end{aligned} \quad (2.2.2.3)$$

Esta nova notação é designada de Notação de Engenharia ou de *Voight-Kelvin*. Assim, a relação entre as deformações e as tensões definida pela equação (2.2.2.1) passa a reescrever-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.4)$$

Por inversão do tensor de rigidez [C], é possível obter o tensor de flexibilidade [S]. Pelo facto de o tensor de flexibilidade possuir as mesmas propriedades de simetria, a relação entre a deformação e a tensão também pode ser expressa em notação de Engenharia.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.5)$$

Quando o comportamento dos materiais apresenta três planos de simetria ortogonais entre si, estes materiais são designados de ortotrópicos. Na ortotropia, os tensores de rigidez [C] e flexibilidade [S] apresentam somente nove constantes independentes, sendo as restantes nulas.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.7)$$

Os tensores de rigidez e flexibilidade são habitualmente definidos a partir das constantes de Engenharia, pois estas podem ser mais facilmente determinados através de simples ensaios [36]. Apresenta-se na equação (2.2.2.8) a relação entre as deformações e as tensões, em que as constantes de flexibilidade foram substituídas pelas constantes de Engenharia,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.8)$$

em que E_i é o módulo de Young, ν_{ij} o coeficiente de Poisson e módulo de corte G_{ij} para as direções ortogonais 1,2 e 3. Recordando as propriedades de simetria podemos escrever:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (2.2.2.9)$$

Isto faz com que sejam apenas nove as constantes de Engenharia necessárias para caracterizar o comportamento de um material ortotrópico $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}$ e ν_{23} . O correspondente tensor de rigidez [C] é obtido por inversão do tensor de flexibilidade [S], em que os termos não nulos da matriz de rigidez podem ser definidos função das constantes de Engenharia, sendo estes apresentados na Tabela 2:

Tabela 2 - Elementos não nulos do tensor de rigidez C [1]

$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}$	$C_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}$	$C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}$
$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$	$C_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$	$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$
$C_{44} = G_{23}$	$C_{55} = G_{13}$	$C_{66} = G_{12}$

Em que o valor de Δ é [1]:

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_2 E_3} \quad (2.2.2.10)$$

Nos laminados compósitos, as camadas apresentam habitualmente diferentes orientações e consequentemente diferentes propriedades mecânicas. A definição das propriedades do laminado requer a translação da lei constitutiva de cada camada para um referencial global [1]. No caso das estruturas se aproximarem ao estado plano de tensão (EPT), alguns termos das equações (2.2.2.6) e (2.2.2.7) serão desprezáveis, pelo que estas passarão a ser descritas de uma forma mais compacta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.12)$$

2.2.3. Materiais Compósitos Laminados

Os compósitos laminados são formados por um conjunto de camadas de fibras e matriz, como se pode observar na Figura 9, com a possibilidade de se orientar as camadas numa direção que se possa obter propriedades mecânicas compatíveis com o pretendido. Por este motivo, as propriedades mecânicas por camada são determinadas segundo um sistema de coordenadas definido de acordo com a orientação das fibras.

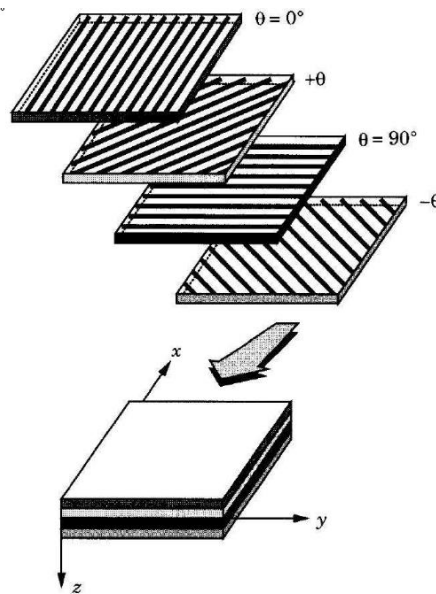


Figura 9 – Laminado composto com diferente orientação das fibras por camada [36]

As fibras contínuas podem apresentar três tipos de orientação, sendo estas designadas de fibras uniaxiais, quando estão dispostas numa única direção, fibras em manta, quando possuem uma orientação aleatória, e fibras em tecido, quando estão interlaçadas e dispostas em duas direções perpendiculares. A orientação das fibras, o número de camadas, a sequência de empilhamento e a percentagem de fibra e de resina permitem definir as propriedades elásticas do laminado composto. Este pode apresentar propriedades isotrópicas, ortotrópicas ou anisotrópicas, dependendo da orientação e tipos de fibras [1], [36].

A integração das propriedades de cada camada nas propriedades do laminado composto far-se-á através da conversão do sistema de coordenadas da camada 123 para o sistema de coordenadas global xyz , e que no exemplo apresentado na Figura 10 corresponde a uma rotação do ângulo θ em torno do eixo z .

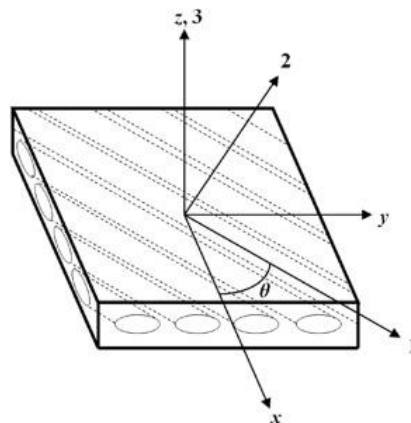


Figura 10 - Transformação do sistema de coordenadas da camada para o sistema de coordenadas global [1]

Os vetores tensão e deformação expressos no sistema de coordenadas global (xyz) podem ser transformados para os sistemas de coordenadas da camada (123) por aplicação das seguintes expressões [1], [36], [39]:

$$\sigma' = T_\sigma \sigma \leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.1)$$

$$\varepsilon' = T_\varepsilon \varepsilon \leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.2)$$

No caso do EPT esta transformação é definida por [40]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.4)$$

em que:

$$c = \cos \theta \quad e \quad s = \sin \theta \quad (2.2.3.5)$$

As relações entre as tensões e as deformações no sistema de coordenadas 123, serão dadas pelo tensor de rigidez C' e o tensor de flexibilidade S' expressos neste novo sistema de coordenadas [1], [36], [39]:

$$\sigma' = C' \varepsilon' \quad (2.2.3.6)$$

$$\varepsilon' = S' \sigma' \quad (2.2.3.7)$$

A transformação do tensor de rigidez C , expresso no sistema de coordenadas (xyz) , para o tensor de rigidez C' , expresso no sistema (123) , é dada por:

$$C' = T_\sigma^{-1} C T_\sigma \quad (2.2.3.8)$$

A correspondente transformação do tensor de flexibilidade entre sistemas de coordenadas (xyz) e (123) , será obtida através:

$$S' = T_\varepsilon^{-1} S T_\varepsilon \quad (2.2.3.9)$$

No caso do EPT, as relações entre as tensões e as deformações expressas no novo sistema de coordenadas 123 são obtidas através de [1], [40]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.11)$$

2.2.4. Teoria clássica dos laminados

A Teoria Clássica dos laminados (TCL) foi desenvolvida com base na teoria das placas finas para materiais isotrópicos, a qual é designada teoria de placas de *Kirchhoff*. Esta teoria define que a placa deve possuir uma espessura constante e muito inferior às restantes dimensões e, nestas condições, verifica-se que a normal à superfície média antes da deformação permanece normal após deformação, conforme é exemplificado na Figura 11 [36], [40].

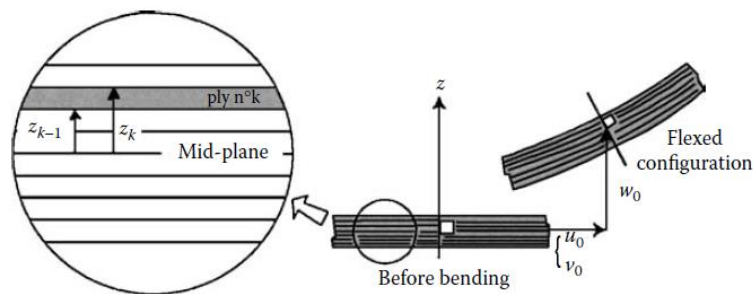


Figura 11 – Teoria de placas de Kirchhoff, com as linhas normais ao plano médio do laminado permanecerem normais após deformação [39]

A teoria de placas de *Kirchhoff* admite que as tensões fora do plano (Oz) são desprezáveis quando comparadas às tensões no plano (Oxy), ou seja, as tensões σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são desprezáveis quando comparadas com σ_x , σ_y e τ_{xy} . De igual forma, as deformações normais e de corte segundo a direção perpendicular ao plano, também são desprezáveis, ε_z , γ_{xz} e γ_{yz} . Com base nesta teoria, são estabelecidas as relações entre os esforços e as cargas aplicadas, sendo apresentados os momentos fletor e torsor na Figura 12 [1], [36], [40].

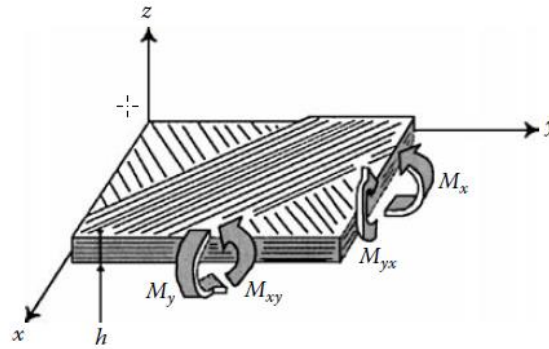


Figura 12 - Momentos fletores e torsião em uma placa laminada [39]

Além dos momentos fletor e torsião, a placa laminada também pode apresentar esforços de membrana, paralelos ao plano médio, os quais são apresentados na Figura 13.

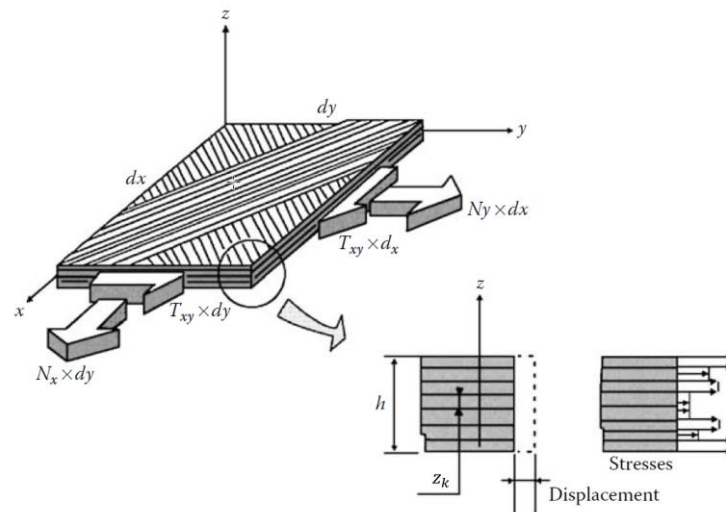


Figura 13- Esforços de membrana em uma placa laminada [39]

Os esforços aplicados à placa resultam num estado de deformação no plano de deformação definido pelo vetor $\vec{\epsilon}$ [1], [36], [40].

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.4.1)$$

Estas deformações serão definidas de acordo com a Teoria Clássica dos Laminados por [1], [36], [40]:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_0\} + z\{k\} \quad (2.2.4.2)$$

em que z corresponde à distância ao plano médio da placa, o vetor ϵ_0 ao estado inicial de deformação da placa,

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.2.4.3)$$

e o vetor k corresponde às deformações de membrana.

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.4.4)$$

Considerando um laminado compósito, apresentado na Figura 14, constituído por n camadas e espessura total h , em que cada camada possui uma espessura z_k , sendo designadas as camadas superior por z_{k+1} , e inferior por z_{k-1} [1], [36], [40].

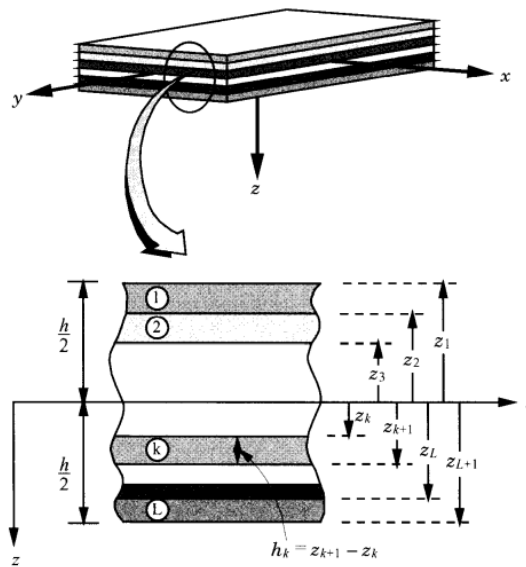


Figura 14 - Espessuras das camadas do laminado [36]

As espessuras das diferentes camadas serão inseridas nas leis constitutivas de cada camada [1]:

$$\sigma_k = C_k \{\varepsilon_0 + z_k\} \quad (2.2.4.5)$$

A contribuição dos esforços de membrana e dos momentos fletores são definidas pelas equações (2.2.4.6) e (2.2.4.7). Os esforços de membrana são representados pelo vetor \vec{N} e os momentos fletores pelo vetor \vec{M} [1], [36], [39], [40].

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.2.4.6)$$

$$\begin{aligned}
\{M\} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [C]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz
\end{aligned} \tag{2.2.4.7}$$

Ao resolver os integrais, resultará em [1], [39]:

$$N = \left\{ \sum_{k=1}^n C_k (z_k - z_{k-1}) \right\} \varepsilon_0 + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right\} k \tag{2.2.4.8}$$

$$M = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right\} \varepsilon_0 + \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n C_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right\} k \tag{2.2.4.9}$$

Estas equações também podem ser escritas na forma matricial, tendo em vista que a matriz composta por A, B, C e D será uma matriz quadrada 6x6 [1], [36], [40]:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{Bmatrix} \tag{2.2.4.10}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.2.4.11}$$

ou ainda na forma,

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n C_k (z_k - z_{k-1}) & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) & \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n C_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{Bmatrix} \tag{2.2.4.12}$$

$$\{M\} = [B] \times \{\varepsilon_0\} + [D] \times \{k\} \tag{2.2.4.13}$$

$$\{N\} = [A] \times \{\varepsilon_0\} + [B] \times \{k\} \tag{2.2.4.14}$$

A matriz [A] corresponde à rigidez de membrana do laminado, a matriz [B] ao acoplamento membrana-flexão do laminado e a matriz [D] à rigidez de flexão do laminado [1], [36], [40].

2.2.5. Processos de Fabrico Materiais Compósitos

Os materiais compósitos de matriz polimérica distinguem-se, de forma geral, pela natureza da matriz, podendo ser de origem termoplástica ou termoendurecível. Os polímeros termoplásticos, como as poliamidas, polipropileno e policarbonato, caracterizam-se por apresentarem uma diminuição da sua viscosidade e amolecerem quando submetidos a elevadas temperaturas, o que permite que sejam reciclados e reprocessados. Já os polímeros termoendurecíveis, têm o seu ciclo de cura realizado por um processo químico irreversível, e como consequência não podem ser reprocessados. Como exemplos de termoendurecíveis temos as resinas de poliéster, epóxido e fenólica [1], [39], [41].

Os termoplásticos possuem maior viscosidade durante o processamento, necessitam de ser sujeitos a temperatura e pressão elevadas para garantir o processamento, além de necessitarem do uso de pré-impregnados. A resina termoendurecível tem uma elevada fluidez e requer pressões mais baixas para ser processada, mas tem um maior tempo de processamento [1], [39].

Há diversos processos de fabrico para processamento de materiais compósitos. Cada processo possui vantagens e desvantagens no que se refere às propriedades mecânicas, forma da peça pretendida, volume de produção e complexidade de geométrica da peça.

Em seguida descrevem-se alguns dos principais processos de fabrico com destaque para o processo de moldação por compressão a quente, o qual será usado no fabrico da placa laminada a ensaiar.

- Moldação por contacto

A moldação por contacto pode ser realizada de três formas distintas: manual, por projeção ou por vácuo.

Na moldação manual as camadas de fibras são colocadas no molde e impregnadas manualmente com resina. Por este processo é possível obter peças de dimensões relativamente grandes, com geometrias mais complexas, aliado a um baixo custo de investimento [42]. No entanto, é um processo que requer trabalhadores com qualificação e experiência adequada para que o produto final apresente uma qualidade de fabrico aceitável. O processo deverá ser realizado em local bem ventilado devido à forte libertação de gases [1], [39], [43].

A moldação por projeção assemelha-se à moldação manual, contudo a resina e as fibras são pulverizadas sobre o molde aberto com uma pistola. Este processo permite obter ciclos de produção menores, com um custo mais baixo e é adequado para pequenas séries. As peças produzidas por este processo possuem propriedades mecânicas inferiores do que àquelas produzidas por moldação manual pois a percentagem de fibras incorporadas é mais baixa e o comprimento das fibras é inferior [1], [39], [42].

A moldação por vácuo pode ser realizada em molde aberto ou fechado. Em molde aberto, os reforços impregnados são colocados sobre este, e uma folha fina de plástico é utilizada para cobrir e criar vácuo no seu interior [42]. Em molde fechado, os reforços são colocados no seu interior e a resina é injetada posteriormente ao fecho do mesmo, ou ambos são colocados no interior do molde antes do seu fecho. O ar é removido do interior por uma bomba de vácuo, o que permite fabricar peças com bom acabamento em ambas as superfícies. A moldação em vácuo reduz a emissão de gases, reduz a quantidade de vazios na peça, aumenta o teor de fibras e, conseqüentemente, melhora as propriedades mecânicas do compósito. Este processo é usado na produção de séries

limitadas, de peças com geometria complexa e em que são requeridos baixos tempos de produção [1], [39], [42].

- **Moldação por Injeção de Resina ou por transferência de resina**

O processo de injeção de resina ou processo por transferência de resina (RTM) [44], consiste no reforço em fibras colocado sobre o molde macho-fêmea e a resina já previamente catalisada é injetada à baixa pressão no interior do molde já fechado [42]. É um processo que permite a produção de grandes séries, peças de geometria complexa, espessura constante e com elevado teor de fibras. No entanto, o custo envolvido no fabrico do molde é relativamente maior do que os processos anteriores, requer o estudo do enchimento da cavidade de moldação e a taxa de rejeição das peças é mais elevada devido à mobilidade do reforço dentro do molde [1], [39], [42], [45], [46].

- **Moldação por injeção com reação**

O processo de moldação por injeção com reação tem três variantes: RIM, SRIM e RRIM. O processo determinado por RIM é similar ao RTM, contudo consiste em injetar uma mistura de duas resinas reativas de baixa viscosidade, como por exemplo polioli e isocianato, com o objetivo de produzir poliuretano. As resinas são misturadas antes de serem injetadas no interior do molde. O RIM é um processo de elevada produtividade e possui duas variantes, o SRIM e o RRIM, que diferem somente na forma de aplicação do reforço [1], [45], [47]. No SRIM, a resina é injetada sobre a pré-forma do reforço colocada no molde, geralmente em fibras contínuas, sendo o processo de cura mais rápido devido a mistura de resinas e o tempo de ciclo mais curto. Produz peças leves, de boa resistência ao choque e podendo apresentar grandes dimensões. Contudo, possui custos de produção mais elevados devido à necessidade de maior quantidade de mão-de-obra [1], [45], [47], [48]. No RRIM, as fibras são curtas ou trituradas e são misturadas com as resinas antes de estas reagirem entre si. O reforço impregnado com resina é injetado no interior do molde o que proporciona uma rápida cura da peça. Em termos de custo, este processo é relativamente vantajoso e permite obter propriedades mecânicas adequadas [1], [45], [47], [49], [50].

- **Moldação em Contínuo ou Laminagem**

O processo de moldação em contínuo tem por objetivo produzir compósitos em forma de lâminas, como placas, chapas nervuradas, painéis sanduíche, painéis corrugados ou lisos, opacos e translúcidos, os quais são usados no revestimento de fachadas, telhados, estufas para produção agrícola, etc [42]. O processo é automático e contínuo, possui uma elevada taxa de produção e a colocação de um filme antiaderente possibilita um bom acabamento superficial. Como desvantagens, podem-se enunciar o elevado investimento e requer áreas generosas de ocupação da máquina [1].

- **Moldação por Compressão**

Na moldação por compressão, o pré-impregnado é colocado entre o molde e contra-molde, e a prensa irá aplicar pressão sobre o material a processar, como exemplificado na Figura 15. É um processo que pode ser realizado a frio ou a quente, e atualmente está em disseminação nas indústrias aeroespacial, automóvel e de fabrico de equipamentos eletrônicos [1], [39], [45], [47].

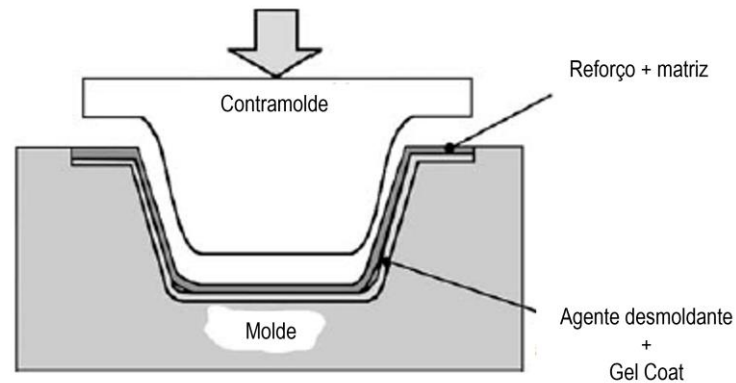


Figura 15 - Moldagem por compressão [39]

No caso da compressão a frio, a resina é depositada sobre as fibras e ao conjunto é aplicada a compressão. O molde pode atingir temperaturas de 50°C a 70°C e serem aplicadas pressões de compressão até 5 bar. Este processo é utilizado para médias cadências de produção, entre 4 e 12 peças por hora. No entanto, este processo não é aconselhado para a produção de peças nervuradas, com ângulos vivos e/ou com elementos na vertical [1], [45], [47].

A compressão a quente distingue-se da compressão a frio pois o molde é aquecido previamente ao processo, como mostrado na Figura 16. A temperatura e a pressão são mais elevadas, com temperaturas que podem ir de 80°C até aos 200°C para alguns termoplásticos de alto desempenho, e pressões de compressão a variar entre 5 Bar a 150 Bar, o que requer o uso de moldes mais robustos, habitualmente metálicos. A compressão a quente permite produzir peças com maior percentagem de fibras e por isso superiores propriedades mecânicas. A cadência de produção é também superior. Como exemplos de matérias-primas que podem ser usadas no processo de compressão a quente, têm-se o GMT, SMC e BMC [1], [45], [47], [51].

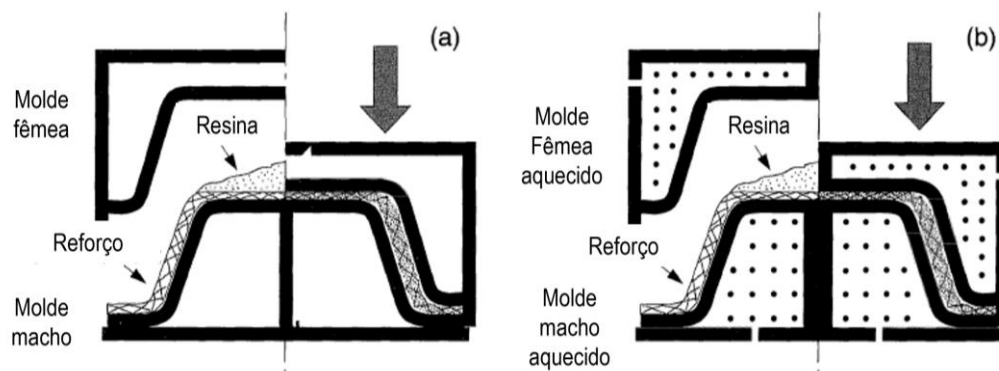


Figura 16 - Compressão a frio (a) e compressão a quente (b) [42]

O processo de compressão também pode ser realizado em prensa de pratos quentes, em que o laminado é inserido entre os pratos da prensa que aquecem e comprimem o material a fabricar durante o processo, garantindo uma cura mais eficiente e aumentando a fração de fibras no compósito final, ver Figura 17 [52], [53]. O processo é simples, automático e o tempo de fabrico varia entre 1 e 10 minutos, sendo recomendado para o fabrico entre 1000 e 100 000 laminados [46], [54]. Este processo será usado no fabrico da placa laminada de fibra de carbono, a qual será analisada para identificação das suas propriedades elásticas.

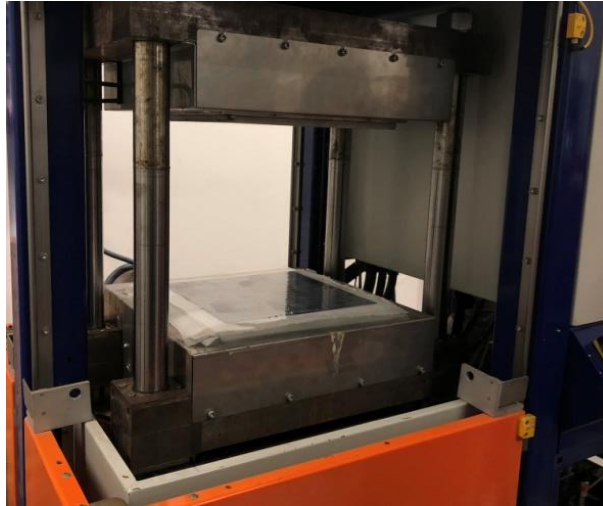


Figura 17 - Compressão em prensa de pratos quentes

2.3. Metodologia de identificação das propriedades elásticas

A metodologia assenta na resolução de um problema inverso, em que se procura identificar as propriedades elásticas da placa laminada compósita a partir da medição da sua resposta vibratória. Para a resolução deste problema de forma eficiente é necessário recorrer a algoritmos de otimização e identificar experimentalmente as frequências naturais de vibração da placa laminada, sendo por isso um método não destrutivo. A implementação desta metodologia requer o desenvolvimento de um modelo numérico da placa laminada compósita, baseado no programa comercial de elementos finitos ANSYS®, e a criação de um programa em MATLAB® que irá integrar as frequências naturais de vibração calculadas numericamente e as obtidas experimentalmente. Através da aplicação de algoritmos meta-heurísticos, citados no capítulo anterior, vão sendo ajustadas as propriedades elásticas no modelo numérico de forma a minimizar o erro entre as frequências naturais de vibração. A Figura 18 descreve as principais etapas da metodologia usada na identificação das propriedades elásticas de uma placa laminada compósita.

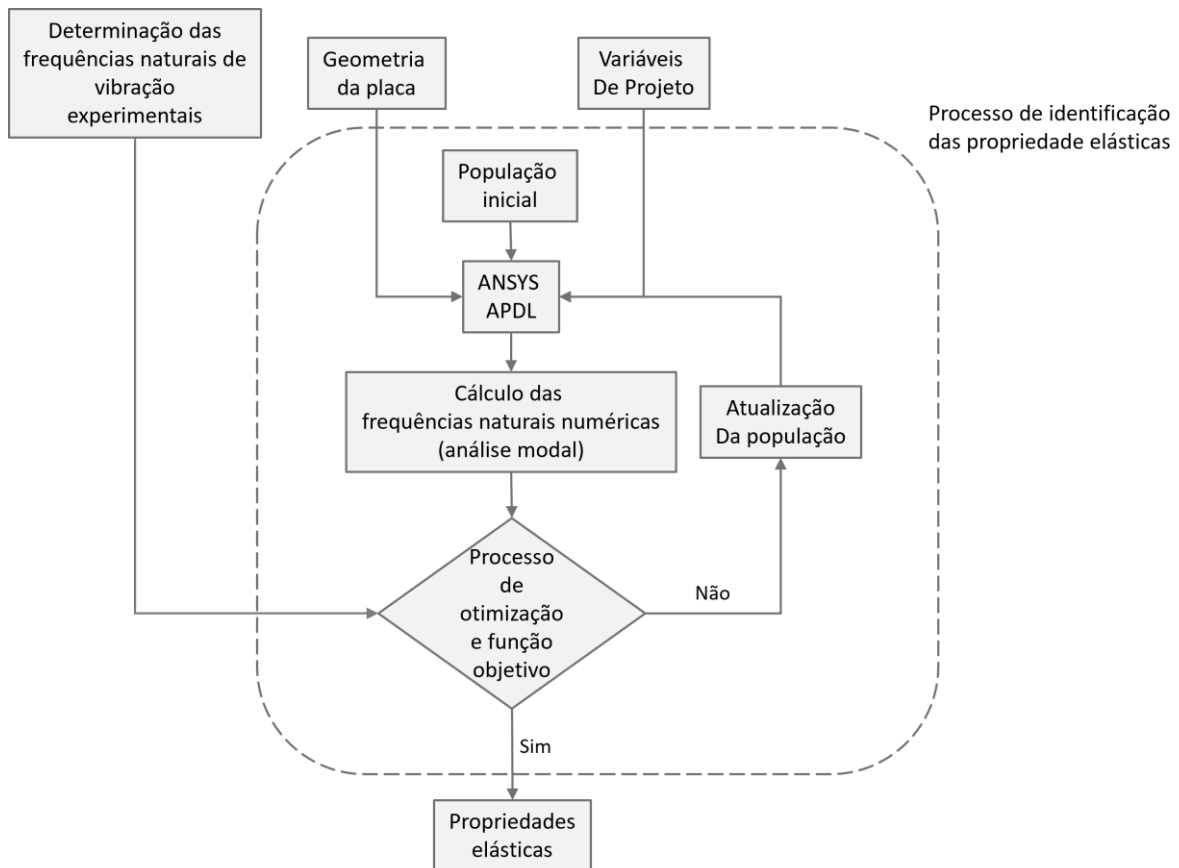


Figura 18 - Metodologia usada na identificação das propriedades elásticas em placas laminadas

2.3.1. Ferramentas numéricas usadas na implementação da metodologia

O MATLAB é um programa interativo de elevado desempenho que foi criado em 1970 por Cleve Moler [55]. Este é principalmente utilizado no cálculo numérico, no processamento de sinais, na realização de operações matemáticas com matrizes, na construção de gráficos, na criação de aplicações, no processamento de imagem, visão computacional e robótica. O MATLAB permite a implementação de soluções de forma rápida e intuitiva, através da utilização de uma linguagem de alto-nível e recorrendo a ferramentas desenvolvidas, ao contrário de outras linguagens populares de programação como C e Basic. Além disso, as soluções finais são expressas na forma matemática como são escritas manualmente, o que facilita a compreensão e visualização [55], [56].

A linguagem Mechanical Parametric Design Language (MAPDL) foi criada na década de 1980 por John Swanson [57] para facilitar a interface com o programa ANSYS e, assim, agilizar a construção e a resolução de modelos numéricos, principalmente na análise de problemas de elevada complexidade. Este usa uma sintaxe própria relacionada com as diferentes rotinas do método dos elementos finitos, a qual permite criar as mais diversas geometrias, gerar malha, resolver os problemas e extrair os resultados. Apesar da interface gráfica do ANSYS facilitar a sua utilização, há funções específicas que só poderão ser realizadas através desta linguagem. Na realização de simulações sistemáticas é preferível gerar o programa, com a extensão mac, através desta linguagem, uma vez que o tempo requerido para a construção sistemática do modelo é elevado. Além disso, este permite ser corrido em segundo plano sem a necessidade da interface gráfica, libertando recursos do computador para a realização da simulação [57].

3. IMPLEMENTAÇÃO DAS METODOLOGIAS

Neste capítulo será apresentado o trabalho de caráter experimental desenvolvido nesta dissertação. É descrito o método e parâmetros de fabrico do laminado compósito, assim como o ensaio experimental para a medição das frequências naturais de vibração na condição livre-livre. De seguida será apresentada a metodologia proposta para a identificação das propriedades elásticas do compósito, a partir da resolução de um problema inverso. Finalmente, é apresentado o procedimento experimental de realização de ensaios mecânicos destrutivos para a identificação de algumas das propriedades elásticas.

3.1. Fabrico da placa laminada

O laminado compósito foi fabricado realizando um empilhamento do pré-impregnado de referência HS 160 REM da marca *CIT*[®]. Este é constituído por fibras de carbono de alta resistência (HS T700), de gramagem 160g/m², e impregnado com uma resina epóxida modificada (REM). As propriedades gerais do pré-impregnado são apresentadas na Tabela 3. Algumas das propriedades servirão para definir a curva de cura da placa.

Tabela 3 – Propriedades gerais do pré-impregnado

Propriedades Gerais Pré-impregnado HS 160 T700 REM		
Reforço	Fibras de carbono, unidirecionais, de alta resistência (T700)	
Gramagem	g/m ²	160
Temperatura de cura	°C	125
Tempo de gel	100 °C / 155 min	
	120 °C / 40 min	
	130 °C / 20 min	
	140 °C / 7 min	
Fração mássica de fibras	%	36

De acordo com as informações técnicas do fabricante, as propriedades elásticas do pré-impregnado após cura, são as apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 - Propriedades mecânicas do pré-impregnado após a cura

Propriedades Mecânicas Pré-impregnado HS 160 T700 REM após cura			
Propriedade	Unidade	Valor	Norma
Módulo de Elasticidade	GPa	123	(ASTM D3039-00)
Tensão de Rotura	GPa	2,294	(ASTM D3039-00)
Módulo à Flexão 0°	GPa	134	(ASTM D790-03)
Resistência à Flexão 0°	GPa	1,857	(ASTM D790-03)
Resistência ao Corte Interlaminar	MPa	81,5	(ASTM D2344-00)
Espessura da camada curada	mm	0,164	(ASTM D5528-01)

Para o fabrico da placa laminada foram empilhadas 12 camadas de pré-impregnado, com as fibras orientadas de acordo com a sequência [0\90\+45\−45\0\90]_s. Para garantir a correta direção das

fibras foram definidas linhas de orientação adjacentes à montagem. Seguidamente, o empilhamento foi processado na prensa de pratos quentes da marca Gislotica, existente no laboratório de materiais compósitos do ISEP, visível na Figura 19. Esta permite o fabrico de placas com uma dimensão de até 315x315 mm², a aplicar forças de compressão de até 30 toneladas e atingir temperaturas até 450°C.



Figura 19 – Prensa de pratos quentes

Como já foi referido, o processo de cura do compósito envolve a aplicação de um ciclo térmico e de compressão, os quais são definidos na ficha técnica do pré-impregnado fornecida pelo fabricante [58], e que se apresentam na Figura 20. Para garantir a desmoldagem da placa após o ciclo de cura é aplicado um filme desmoldante à base de silicone entre a placa e os pratos da prensa. Este filme apresenta uma espessura reduzida de 0,1mm e é capaz de resistir até 260°C de temperatura.

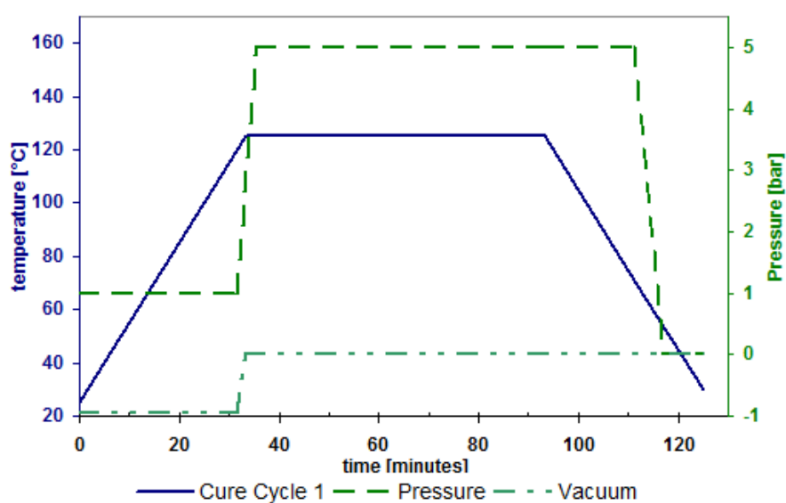


Figura 20 - Ciclo de cura do pré-impregnado HS 160 REM [58]

O ciclo de cura apresenta na sua fase inicial um incremento gradual da temperatura e uma pressão de compactação mais reduzida de 1 Bar para evitar a expulsão em excesso da resina, o que tornaria o laminado muito fino. Após 30 minutos, é aplicada uma temperatura constante de 120 °C durante cerca de 70 minutos e uma pressão superior de 5 Bar até o final do ciclo. Após o estágio a 120 °C, os pratos da prensa são arrefecidos até a temperatura ambiente.

Após o processo de cura, segue-se a retificação das extremidades da placa através do corte por disco arrefecido a água. Desta forma, pretende-se eliminar as irregularidades geométricas da placa sem provocar delaminação na zona de corte. A Figura 21 apresenta a imagem da placa após este processo, com dimensões médias de 276,5mm de comprimento, 199mm de largura, 1,85mm de espessura e com massa de 157,7g.

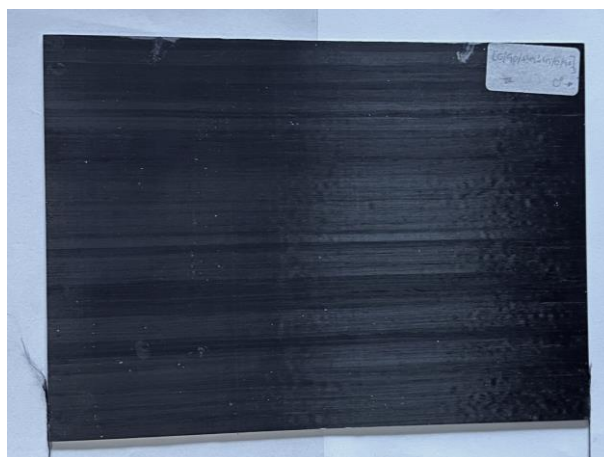


Figura 21 - Placa laminada retificada

3.2. Medição das frequências naturais da placa laminada

O processo de identificação das propriedades elásticas da placa laminada requer a identificação das suas frequências naturais de vibração experimentais através da medição das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) da placa. Estas foram medidas para placa livre-livre no espaço, sendo as frequências identificadas através dos máximos locais das amplitudes das FRFs.

Assim, a placa foi suspensa por dois fios finos e flexíveis e de modo a criar a condição próxima de livre-livre, ver Figura 22. Para a medição das FRFs, a placa foi excitada através de um martelo de impacto modelo 086C01 da marca PCB-Piezotronics®, produzindo uma excitação do tipo transiente, e a resposta do tipo exponencial negativa foi medida através de um acelerómetro de massa reduzida (0,8 g), modelo 352A24/NC da marca PCB-Piezotronics®. Os dois sinais no tempo foram amostrados e digitalizados por uma placa de aquisição de sinal modelo USB-4431 da marca *National Instruments*® e posteriormente processados para a determinação das FRFs.

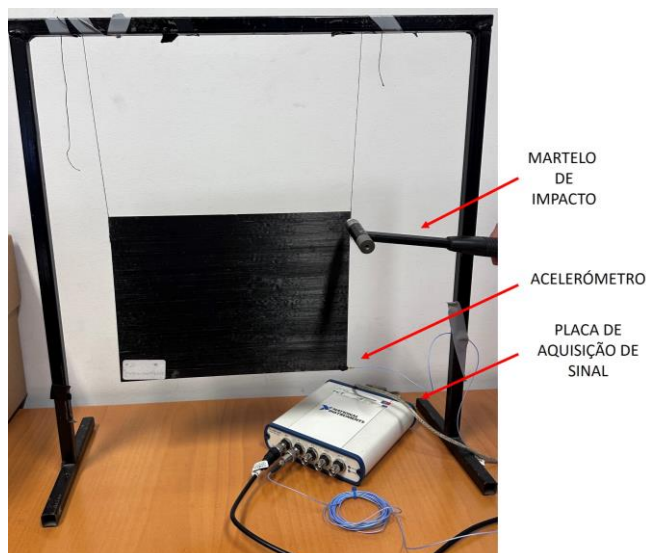


Figura 22- Medição das frequências naturais da placa laminada com o acelerômetro

A partir da análise dos valores máximos das FRFs e para a banda de 0Hz a 800Hz foram identificadas as primeiras 12 frequências naturais da placa. Este número foi considerado insuficiente para uma determinação precisa das propriedades elásticas da placa, sendo habitualmente recomendado o triplo do número de parâmetros (neste caso são 6) para que a solução do problema seja única. Portanto, optou-se por alargar a banda de frequências da medição até 1,6kHz, o que permitiu identificar as primeiras 20 frequências naturais da placa. Na fase inicial, foram medidas várias FRFs para a excitação e resposta realizada em diferentes posições da placa, com o objetivo de identificar todas as frequências naturais da placa na banda selecionada. A partir da identificação das frequências naturais de vibração verificou-se que a massa do acelerômetro influenciava de modo significativo algumas das frequências naturais. Por esse motivo, optou-se por repetir a medição das FRFs usando um microfone modelo 46AE ½" da marca G.R.A.S. para medir a resposta, ver Figura 23.



Figura 23 - Medição das frequências naturais da placa laminada com o microfone

A influência da massa do acelerômetro é evidente através da comparação das FRFs medidas com acelerômetro e com microfone, ver gráfico da Figura 24. No primeiro caso, verifica-se que a massa

do acelerómetro conduz à redução de algumas das frequências naturais da placa. Refira-se que a influência da massa na frequência natural é função do quadrado da amplitude do respetivo modo natural de vibração.

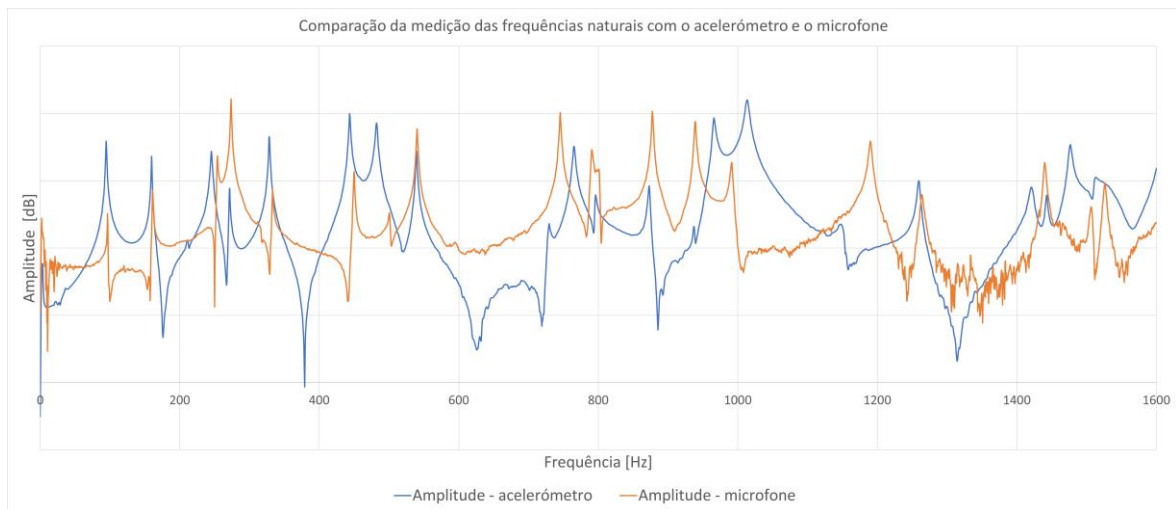


Figura 24 – Representação das FRFs cuja resposta foi medida com o acelerómetro e com o microfone

As FRFs foram novamente medidas para diferentes pares de pontos, para identificar todas as frequências naturais da placa até à frequência 1600Hz. Na Figura 25 pode visualizar-se cinco das FRFs medidas, para diferentes pontos de excitação e posições de medição do microfone.

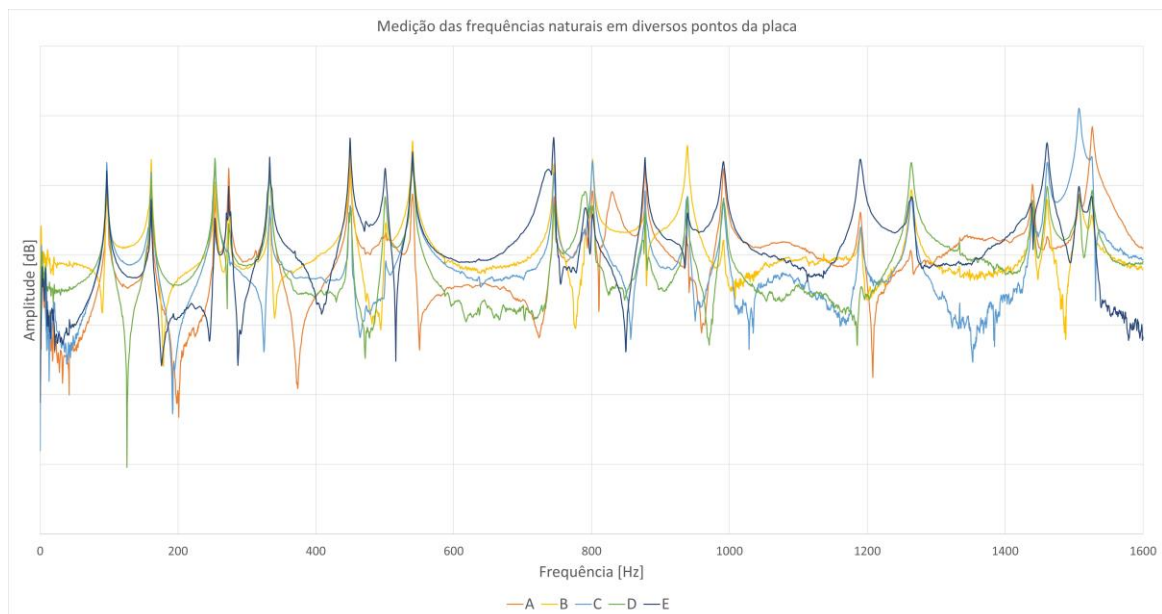


Figura 25 - Frequências naturais medidas com o microfone

A partir da análise das amplitudes máximas das cinco FRFs medidas é possível identificar as 20 primeiras frequências naturais de vibração da placa para uma resolução de 0,5Hz, cujo valor médio se representa na Tabela 5.

Tabela 5 - Frequências naturais de vibração experimentais

Ordem	Frequência natural [Hz]
1ª	96,5
2ª	161,0
3ª	253,5
4ª	273,5
5ª	333,0
6ª	449,5
7ª	501,0
8ª	540,5
9ª	744,5
10ª	790,0
11ª	801,5
12ª	877,5
13ª	939,0
14ª	991,5
15ª	1191,0
16ª	1265,0
17ª	1440,0
18ª	1461,5
19ª	1507,5
20ª	1527,0

3.3. Função objetivo e variáveis de projeto

Neste capítulo são descritas a função objetivo, as variáveis de projeto e os constrangimentos, os quais são necessários à definição do problema de otimização. A função objetivo selecionada para a resolução do problema inverso procura minimizar a diferença relativa entre as frequências naturais de vibração numéricas e experimentais [4],

$$\Phi = \sum_{i=1}^{nf} \left(\frac{\tilde{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2} \right)^2 \quad (3.3.1)$$

sendo nf o número total de frequências naturais numéricas $\tilde{\omega}_i$ e experimentais ω_i selecionadas para o problema de otimização. Quanto às variáveis de projeto, foram selecionadas as seis propriedades elásticas apresentadas na Tabela 6 e que têm como referência o estudo apresentado por Araújo et al. [4]. Nesta são igualmente apresentados a gama de valores admissíveis para cada variável, através da definição dos limites inferior e superior.

Tabela 6 – Intervalos de valores admissíveis das propriedades elásticas para simulação

Valores limite às variáveis de projeto		
Propriedade	Limite inferior	Limite Superior
E_1	10 GPa	150 GPa
E_2	10 GPa	150 GPa
G_{12}	1 GPa	80 GPa
G_{13}	0,1 GPa	80 GPa
G_{23}	0,1 GPa	80 GPa
ν_{12}	0,05	0,8

3.4. Resolução do problema inverso

A determinação das propriedades elásticas através da resolução de um problema inverso assenta no cálculo sistemático das frequências naturais de vibração de uma placa. A sua implementação envolve a combinação dos programas criados em MATLAB® e ANSYS®. O programa criado em MATLAB é responsável por coordenar todo o processo de otimização e pela geração das propriedades elásticas, sendo estas usadas como entrada no programa criado em ANSYS MAPDL. Por sua vez, este retorna as frequências naturais para o conjunto de combinações de propriedades elásticas, as quais são lidas pelo programa em MATLAB e comparadas com as respectivas frequências experimentais, de acordo com definição da função objetivo. A cada iteração é gerado um novo conjunto de combinações de propriedades seguindo a filosofia do algoritmo meta-heurístico.

O processo de otimização termina quando é alcançado o número máximo de iterações ou quando um dos critérios de convergência é cumprido. Um dos critérios de convergência mais importante é a tolerância, esta garante que o processo termina quando a diferença relativa dos valores sucessivos da função objetivo alcançar valores inferiores à tolerância. A tolerância considerada neste estudo é de 10^{-6} e o número máximo de iterações 1000. Isto significa que o processo termina ao final de 1000 iterações se não for cumprido o critério de tolerância.

Na Figura 18 é apresentado o fluxograma que descreve as etapas mais importantes do processo de otimização que conduz à determinação das propriedades elásticas da placa. Este inicia-se com a criação de um programa em ANSYS MAPDL, cujo exemplo se apresenta no ANEXO B o qual é responsável pela geração do modelo em elementos finitos da placa a partir da sua geometria. A malha de 56x40 elementos foi selecionada para que a dimensão de cada elemento apresente uma geometria aproximadamente quadrada e, assim, evitar erros associados à distorção do elemento. Foi escolhido o elemento SHELL 181 de primeira ordem, com quatro nós e seis graus de liberdade por nó, três translações e três rotações, o qual é adequado para análise de placas finas e de espessura moderada. A partir do modelo de elementos finitos são calculadas as frequências naturais de vibração numéricas para cada combinação de propriedades elásticas geradas pelo algoritmo meta-heurístico. Estas frequências são lidas pelo programa em MATLAB e comparadas com as frequências naturais experimentais de acordo com a função objetivo. Refira-se que na primeira iteração as propriedades elásticas são geradas de forma completamente aleatória dentro dos limites admissíveis para cada variável. Nas iterações seguintes o conjunto de propriedades com

melhor valor da função objetivo é priorizado e a área que circunda ao valor de cada variável é dado maior ênfase, sendo a estratégia seguida definida pelo algoritmo meta-heurístico. O critério de convergência é avaliado a cada iteração até que se atinja o número máximo de iterações.

A determinação das frequências naturais numéricas resulta da resolução de um problema de valores e vetores próprios do tipo [59]

$$([K] - \lambda_i[M])\{\phi_i\} = 0 \quad (3.4.1)$$

em que $[M]$ corresponde a matriz de massa, $[K]$ a matriz de rigidez, λ_i são os valores próprios e estão diretamente relacionados com as frequências naturais de vibração da placa ω_i , sendo $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, e $\{\phi_i\}$ correspondem aos vetores próprios ou modos naturais de vibração da placa para a frequência de ordem i . O método selecionado no ANSYS para a extração das frequências e modos naturais de vibração foi o *Block Lanczos*.

3.5. Implementação do método clássico

Um dos meios de averiguar o desempenho dos algoritmos meta-heurísticos na identificação das propriedades elásticas da placa laminada é comparar os seus valores com os obtidos através de ensaios mecânicos clássicos. O ensaio de tração é um dos mais utilizados na caracterização do comportamento dos materiais, sejam estes metálicos, compósitos, polímeros e outros. Neste ensaio é registada a curva tensão deformação e, a partir desta, são identificados o módulo de elasticidade e as tensões de cedência e rutura do material. Através do uso de dois extensómetros axiais é ainda possível obter o coeficiente de *Poisson*. O ensaio normalizado estabelece as dimensões do provete e a velocidade de incremento no tempo da força de tração aplicada.

Para este ensaio, foram retirados seis provetes da placa laminada, sendo que três na direção longitudinal da placa, direção 1, e três na direção transversal da placa, direção 2. As dimensões médias dos provetes são apresentadas na Tabela 7,

Tabela 7 - Dimensões médias dos provetes usados na identificação das propriedades elásticas através do ensaio de tração

Provete	w [mm]	t [mm]	Direção
1	22,53	1,83	1
2	20,52	1,82	1
3	21,72	1,85	1
4	22,25	1,85	2
5	22,44	1,85	2
6	21,15	1,86	2

sendo w a largura média e t a espessura média de cada provete. Estes valores médios foram obtidos a partir de três medições. Os ensaios foram realizados numa máquina de ensaios mecânicos modelo Shimadzu AG-I, com célula de carga de 100kN. Além disso, foram executados de acordo com a

norma ISO 527-1 para ensaios de tração em materiais compósitos reforçados com fibras contínuas, a uma velocidade de separação entre amarras de 2 mm/min. A distância entre amarras (l_0) foi de 160mm, a distância entre pinças do extensômetro longitudinal (l_{ext}) foi de 50mm e a distância entre roletes do extensômetro transversal foi considerada igual à largura média do provete (w). Os ensaios tiveram por objetivo identificar as propriedades elásticas E_1 , E_2 e ν_{12} . Dois extensômetros axiais foram usados simultaneamente, um na direção longitudinal e outro na direção transversal, para medição simultânea das deformações nas duas direções ortogonais. Na Figura 26 apresenta-se uma imagem do provete montado na máquina de ensaios mecânicos juntamente com os dois extensômetros.



Figura 26 - Ensaio de tração para identificação das propriedades elásticas da placa compósita.

4. IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo inicia-se com apresentação dos resultados obtidos pela metodologia proposta, na qual se compara a qualidade da identificação das propriedades elásticas da placa através dos algoritmos PSO e GA. Segue-se um estudo sobre a influência dos diferentes parâmetros no desempenho do algoritmo PSO, sendo analisados o número de agentes, o número de frequências naturais, o tempo de cálculo, o valor da função objetivo, o número de iterações e a qualidade da identificação das propriedades elásticas. Algumas das principais propriedades elásticas obtidas através do método clássico, nomeadamente através de ensaios de tração, são igualmente apresentadas. O capítulo termina com a análise comparativa das propriedades identificadas pelo método proposto e pelo método clássico.

4.1. Estudo das propriedades obtidas pelos algoritmos PSO e GA

A determinação das propriedades elásticas é realizada através da resolução de um problema inverso em que são fornecidas as frequências naturais. Neste trabalho são usados métodos meta-heurísticos para resolver de modo mais eficiente este problema. Contudo, estes métodos conduzem a soluções distintas a cada corrida devido ao ponto de partida que, recorde-se, ser gerada de modo aleatório, e devido ao princípio de pesquisa dos próprios métodos. Por estes motivos, foram realizadas cinco corridas com 100 agentes de pesquisa e usando os 12 primeiros modos naturais de vibração da placa. Na Tabela 8 são apresentadas para o menor valor da função objetivo as propriedades elásticas identificadas através dos algoritmos PSO e GA. Nesta é possível verificar que a propriedade E_1 apresenta valores muito próximos, sendo seguido pelas propriedades G_{12} e E_2 , respetivamente. As propriedades G_{13} e G_{23} são as que apresentam maiores discrepâncias. Tal facto poderá ser justificado pelas variações da espessura observadas na placa fabricada, o que se traduz na dificuldade de convergência do método numérico. Relativamente ao coeficiente de *Poisson*, ν_{12} , observa-se que o valor identificado pelo GA é cerca de 24% inferior ao obtido pelo PSO.

Tabela 8 - Propriedades elásticas identificadas pelos algoritmos PSO e GA

	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ϕ
PSO	65,7200	49,3140	11,5240	3,8696	1,1475	0,1461	0,0015381
GA	65,6440	48,9620	11,3730	40,6760	46,5520	0,1112	0,0016717

Na Tabela 9 são apresentados os valores da função objetivo para as cinco corridas e o respetivo valor médio e desvio padrão. Os valores da função objetivo para o algoritmo PSO mantiveram-se constantes ao longo das cinco iterações, com valores próximos de $1,58 \times 10^{-3}$. Já o GA apresentou bastante variabilidade, evidenciada pelo valor do desvio padrão de $2,1236 \times 10^{-3}$. Pelo contrário, o PSO apresenta um desvio padrão mais baixo de $6,3017 \times 10^{-5}$, o que atesta a robustez deste algoritmo e que o erro relativo entre as frequências naturais e experimentais ao longo das iterações manteve-

se praticamente constante. Refira-se que o número de iterações foi o critério de paragem do processo iterativo em todas as corridas.

Tabela 9 - Valor da função objetivo obtidos pelos algoritmos PSO e GA

Função objetivo ϕ							
	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4	Corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
PSO	$1,538 \times 10^{-3}$	$1,538 \times 10^{-3}$	$1,655 \times 10^{-3}$	$1,538 \times 10^{-3}$	$1,676 \times 10^{-3}$	$1,589 \times 10^{-3}$	$6,3017 \times 10^{-5}$
GA	$2,194 \times 10^{-3}$	$7,096 \times 10^{-3}$	$5,572 \times 10^{-3}$	$1,672 \times 10^{-3}$	$2,600 \times 10^{-3}$	$3,827 \times 10^{-3}$	$2,1236 \times 10^{-3}$

Conforme já referido, os algoritmos meta-heurísticos conduzem a diferentes soluções e seguem diferentes percursos a cada corrida. Isto significa que o tempo de corrida não está diretamente relacionado com a qualidade dos resultados obtidos. Por esse motivo, a análise da eficácia de cada algoritmo deverá ser realizada com base no tempo médio por iteração. A Tabela 10 apresenta para as cinco corridas dos algoritmos PSO e GA o tempo de cada corrida, o número de iterações e o tempo médio por iteração, sendo igualmente apresentados os respetivos valores médios e desvio padrão. Os valores mostram que o PSO requer maior tempo por corrida e maior número de iterações para alcançar a convergência, sendo, também, o que apresenta maiores flutuações nestes valores. Como tal, é o algoritmo PSO que apresenta maior tempo médio por iteração. Estes resultados revelam que este método é mais lento a convergir, requer maior esforço computacional e que o domínio de pesquisa é mais amplo. Este último é evidenciado pela superior variabilidade no número de iterações relativamente ao GA.

Tabela 10 - O tempo de cálculo requerido pelos algoritmos PSO e GA

T = Tempo de cálculo [s]							
	corrida 1	corrida 2	corrida 3	corrida 4	corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
PSO	7407,1	8235,9	7811,3	5596,8	8513,7	7513,0	1029,2
GA	5501,9	5100,6	5044,5	5063,7	5049,8	5152,1	176,0
N = Número de iterações							
	corrida 1	corrida 2	corrida 3	corrida 4	corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
PSO	137	129	149	104	164	136,6	20,2
GA	102	102	102	102	102	102,0	0,0
Tempo médio por iteração = T/N							
	corrida 1	corrida 2	corrida 3	corrida 4	corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
PSO	54,1	63,8	52,4	53,8	51,9	55,2	4,4
GA	53,9	50,0	49,5	49,6	49,5	50,5	1,7

Na Figura 27 apresenta-se a evolução da função objetivo com o número de iterações para o PSO e GA. O PSO apresenta um valor inicial superior e é mais lento a convergir. Esta menor velocidade de convergência está relacionada com o domínio de pesquisa do PSO ser superior ao do GA, mas que conduz a melhor valor da função objetivo.

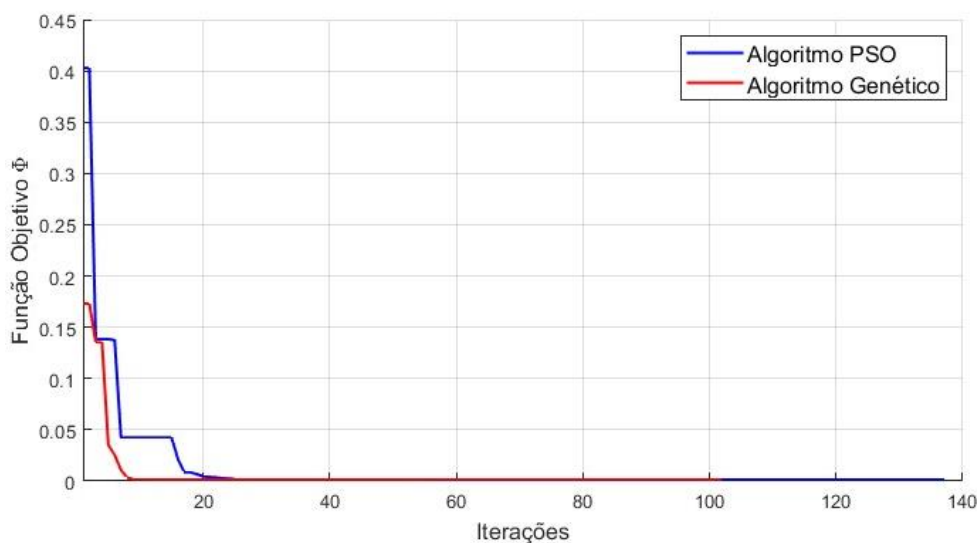


Figura 27 - Evolução da função objetivo com o número de iterações para os algoritmos PSO e GA

Pelos resultados apresentados, o PSO mostra-se ser mais eficaz na resolução do problema inverso e, por este motivo, será apresentada a seguir a análise do seu desempenho em função da seleção do número de frequências naturais e número de agentes de pesquisa.

4.2. Estudo da influência do número de frequências naturais na obtenção das propriedades

Neste estudo serão comparados os resultados quando selecionadas as primeiras 4, 8, 12, 16 e 20 frequências naturais de vibração da placa, fixando a tolerância de convergência em 10^{-6} , o número máximo de iterações em 1000 e o número de agentes de pesquisa em 100. Recorde-se que a gama de valores admissível para as variáveis de projeto são as apresentadas na Tabela 6 e mantidas constantes para as cinco corridas. Na Tabela 11 são apresentados os valores da função objetivo obtidos, bem como o valor médio e o desvio padrão das cinco corridas. Conforme seria espetável, o valor da função aumenta com o número de frequências, pois esta é definida pela soma das diferenças relativas entre as frequências naturais experimentais e numéricas. Quanto ao desvio padrão, observa-se uma redução do seu valor, diminui para 8 frequências e aumenta progressivamente para 12, 16 e 20.

Tabela 11 - O valor da função objetivo calculado pelo algoritmo PSO, para diferentes frequências naturais

Função objetivo ϕ							
Frequências naturais	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4	Corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
4	$2,458 \times 10^{-11}$	$3,065 \times 10^{-9}$	$2,938 \times 10^{-9}$	$1,064 \times 10^{-2}$	$6,007 \times 10^{-10}$	$2,129 \times 10^{-3}$	$4,258 \times 10^{-3}$
8	$1,312 \times 10^{-3}$	$1,311 \times 10^{-3}$	$1,311 \times 10^{-3}$	$1,311 \times 10^{-3}$	$1,311 \times 10^{-3}$	$1,311 \times 10^{-3}$	$4,000 \times 10^{-8}$
12	$1,538 \times 10^{-3}$	$1,538 \times 10^{-3}$	$1,656 \times 10^{-3}$	$1,538 \times 10^{-3}$	$1,676 \times 10^{-3}$	$1,589 \times 10^{-3}$	$6,301 \times 10^{-5}$
16	$3,473 \times 10^{-3}$	$3,457 \times 10^{-3}$	$5,485 \times 10^{-2}$	$3,457 \times 10^{-3}$	$3,457 \times 10^{-3}$	$1,374 \times 10^{-2}$	$2,055 \times 10^{-2}$
20	$3,728 \times 10^{-3}$	$4,061 \times 10^{-3}$	$3,728 \times 10^{-3}$	$7,336 \times 10^{-2}$	$7,336 \times 10^{-2}$	$3,164 \times 10^{-2}$	$3,405 \times 10^{-2}$

Na Tabela 12 são apresentadas as frequências naturais numéricas identificadas para a melhor corrida e o seu erro relativamente às frequências naturais experimentais. A análise global revela que os menores valores do erro são observados para o estudo baseado nas primeiras 4 frequências naturais, sendo que nos restantes casos há alguma variabilidade. No que se refere à ordem da frequência, verifica-se que a sétima, oitava, décima quinta e décima sexta frequência apresentam de modo consistente um erro relativo superior às restantes frequências. Este pode ser justificado porque no modelo numérico é assumido que a placa apresenta uma espessura constante, enquanto a placa apresenta variações linear de espessura ao longo do seu comprimento e largura entre uma 1 a 2 décimas. Recorde-se que foi assumido para o modelo numérico uma espessura constante igual ao valor médio da espessura da placa. O desvio positivo é observado para a sétima e décima quinta frequência natural numérica, o que significa que a espessura da placa é menor ao valor médio assumido no modelo numérico para as regiões onde os respetivos modos apresentam maior curvatura modal. Pelo contrário, o desvio é negativo para a oitava e décima sexta frequência numérica, sendo a espessura da placa superior nas regiões onde os respetivos modos apresentam maior curvatura modal.

Tabela 12 - Comparação entre frequências naturais numéricas e experimentais e respetivo erro relativo.

nf	Frequência Experimental [Hz]	n=4		n=8		n=12		n=16		n=20	
		Frequência Numérica [Hz]	Erro Relativo [%]	Frequência Numérica [Hz]	Erro Relativo [%]	Frequência Numérica [Hz]	Erro Relativo [%]	Frequência Numérica [Hz]	Erro Relativo [%]	Frequência Numérica [Hz]	Erro Relativo [%]
1	96,5	96,50	-0,0001	96,33	-0,17	96,55	0,06	96,34	-0,17	96,57	0,07
2	161,0	161,00	0,0002	162,28	0,79	161,88	0,55	161,53	0,33	161,22	0,13
3	253,5	253,50	-0,00001	253,62	0,05	253,59	0,04	254,17	0,27	253,88	0,15
4	273,5	273,50	0,0001	272,68	-0,30	272,58	-0,34	272,39	-0,41	272,96	-0,20
5	333,0			333,22	0,06	332,40	-0,18	330,93	-0,62	331,40	-0,48
6	449,5			449,44	-0,01	449,94	0,10	450,32	0,18	450,77	0,28
7	501,0			505,23	0,84	505,44	0,89	506,72	1,14	507,05	1,21
8	540,5			533,21	-1,35	532,20	-1,54	532,39	-1,50	531,87	-1,60
9	744,5					746,84	0,31	749,72	0,70	747,22	0,37
10	790,0					788,83	-0,21	792,98	0,31	792,38	0,24
11	801,5					800,60	-0,11	804,48	0,37	802,16	0,08
12	877,5					880,48	0,34	876,43	-0,12	879,05	0,18
13	939,0							938,66	-0,04	937,87	-0,12
14	991,5							986,03	-0,55	985,89	-0,57
15	1191,0							1 205,59	1,23	1 205,39	1,21
16	1265,0							1 248,16	-1,33	1 244,21	-1,64
17	1440,0									1 443,74	0,26
18	1461,5									1 463,11	0,11
19	1507,5									1 512,35	0,32
20	1527,0									1 523,20	-0,25

Na Tabela 13 são apresentados o tempo de cálculo e número de iterações das cinco corridas em função da seleção das frequências naturais. A partir do seu valor médio é possível identificar que o máximo ocorre para a seleção das 12 primeiras frequências naturais de vibração, o que evidencia a maior dificuldade do método em convergir para a solução ótima.

Tabela 13 - O tempo de cálculo requerido pelos algoritmos PSO em função da seleção das frequências naturais de vibração

T = Tempo de cálculo [s]							
Frequências naturais	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4	Corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
4	2821,80	2734,00	2391,40	2606,40	2762,00	2663,12	152,9899
8	4900,40	2787,20	3728,60	3593,40	2785,10	3558,94	777,6758
12	7407,10	8235,90	7811,30	5596,80	8513,70	7512,96	1029,1749
16	7646,70	6224,60	6131,80	5205,30	5734,20	6188,52	812,8882
20	7020,10	5350,60	7851,00	4173,80	5730,60	6025,22	1287,8609
N = Número de iterações							
Frequências naturais	Corrida 1	Corrida 2	Corrida 3	Corrida 4	Corrida 5	Valor médio	Desvio Padrão
4	68	65	57	61	67	63,60	4,0792
8	112	63	86	79	57	79,40	19,3763
12	137	129	149	104	164	136,60	20,1256
16	131	108	103	90	101	106,60	13,5440
20	119	91	133	71	98	102,40	21,6666

As propriedades elásticas apresentadas na Tabela 14 foram identificadas a partir da corrida com a melhor função objetivo para cada seleção das frequências naturais de vibração, sendo também apresentadas o respetivo valor médio e desvio padrão. As constantes elásticas E_1 , E_2 e G_{12} apresentam valores muito próximos que são independentes do número selecionado de frequências naturais. O coeficiente de *Poisson* ν_{12} mostra alguma variabilidade que vai desde 0,09 para 8 frequências a 0,19 para 20 frequências. Os módulos de rigidez transversal ao corte G_{13} e G_{23} são as constantes que apresentam maior variabilidade com o número de frequências naturais, traduzida pelo valor superior do desvio padrão. Mais uma vez, esta poderá ser justificada pela variabilidade na espessura da placa, resultando na dificuldade de se obter um bom ajuste no modelo numérico.

Tabela 14 - Propriedades elásticas identificadas pelo algoritmo PSO, considerando o número distinto de frequências naturais

Frequências naturais	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}
4	65,14	49,44	11,53	1,19	15,23	0,14
8	65,93	49,56	11,35	34,31	34,72	0,09
12	65,72	49,31	11,52	3,87	1,15	0,14
16	65,64	49,50	11,46	1,24	79,99	0,19
20	65,33	48,76	11,55	1,95	1,40	0,19
Valor Médio	65,55	49,31	11,48	8,513	26,49	0,15
Desvio Padrão	0,28	0,29	0,07	12,93	29,42	0,03

Na Figura 28 está representada a evolução da função objetivo para a melhor corrida dentro de cada conjunto de frequências naturais. Estas apresentam um andamento muito semelhante, sendo a

convergência ligeiramente mais rápida para 4 frequências e ligeiramente mais lenta para 16 frequências.

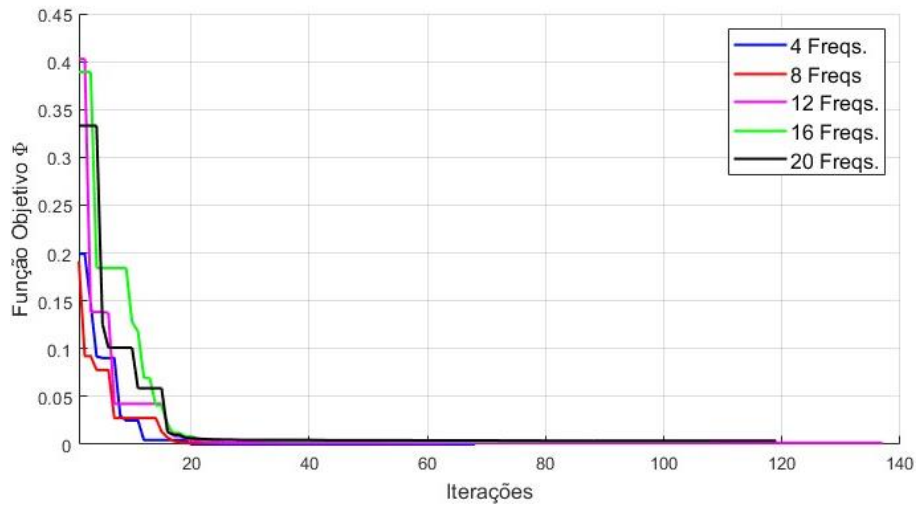


Figura 28 - Convergência do PSO para distinto número de frequências naturais

A resolução de problema inverso com seis variáveis já é, por si só, complexa, os desvios na geometria e os erros na medição nas frequências tornam o processo de determinação das propriedades elásticas ainda mais difícil. Por isso, é natural que face a estes fatores algumas das propriedades elásticas apresentem grande variabilidade nos seus valores. Certo é que o problema inverso é melhor definido através das primeiras 20 frequências naturais, pelo que se deve tomar como mais precisas as propriedades elásticas identificadas a partir destas frequências.

4.3. Influência do número de agentes de pesquisa

A seleção do número de agentes de pesquisa tem influência direta na velocidade de convergência do método e no tempo de cálculo. Encontrar o balanço entre estes parâmetros é importante para alcançar a solução ótima no menor tempo. Assim, apresenta-se um estudo da função objetivo a partir da seleção incremental de agentes de pesquisa, começando em 10 agentes e com incrementos de 10 em 10 até alcançar 100 agentes. Neste, foram fixados o número de frequências em 12, mantidos os critérios de convergência definidos anteriormente e realizadas cinco corridas para o mesmo número de agentes de pesquisa. Na Tabela 15 são apresentados para o conjunto das cinco corridas o valor médio e o desvio padrão da função objetivo, o número médio de iterações e o tempo médio de cálculo. Nesta é possível observar que o valor médio da função objetivo diminui com o aumento do número de agentes de pesquisa, o que é esperado devido à procura mais abrangente do mínimo da função. Também se regista uma tendência de redução do desvio padrão e do número de iterações com o número de agentes, se bem que esta não é uniforme. Tal facto poderá ser justificado pelo escasso número de corridas usado no seu cálculo. Conforme já seria de esperado, verifica-se que o tempo médio de cálculo aumenta exponencialmente com o número de agentes.

Tabela 15 – Influência do número de agentes de pesquisa na função objetivo, número de iterações e tempo de cálculo

Nº agentes	Valor médio da Função objetivo	Desvio Padrão	Nº médio de iterações	Tempo Médio de Cálculo [s]
10	0,0595	0,0714	185,2	1185,9
20	0,0891	0,0895	134,0	1356,2
30	0,0323	0,0174	165,0	2283,9
40	0,0561	0,0729	131,0	2316,3
50	0,0301	0,0233	120,8	2560,9
60	0,0015	$9,0200 \times 10^{-6}$	147,4	3919,0
70	0,0785	0,0587	85,6	2292,3
80	0,0264	0,0214	96,2	2885,5
90	0,0074	0,0116	112,0	3753,5
100	0,0016	$6,3000 \times 10^{-5}$	136,6	7513,0

Na Figura 29 observa-se que o valor médio da função objetivo e o respetivo desvio padrão apresentam um andamento oscilatório semelhante e uma tendência decrescente com o número de agentes de pesquisa. Comparado os valores da função entre 10 e 100 agentes, verifica-se que o valor para 100 é de 2,6% do valor para 10 agentes, se bem que o tempo de cálculo do primeiro é cerca de sete vezes superior ao do segundo, ver Tabela 15.

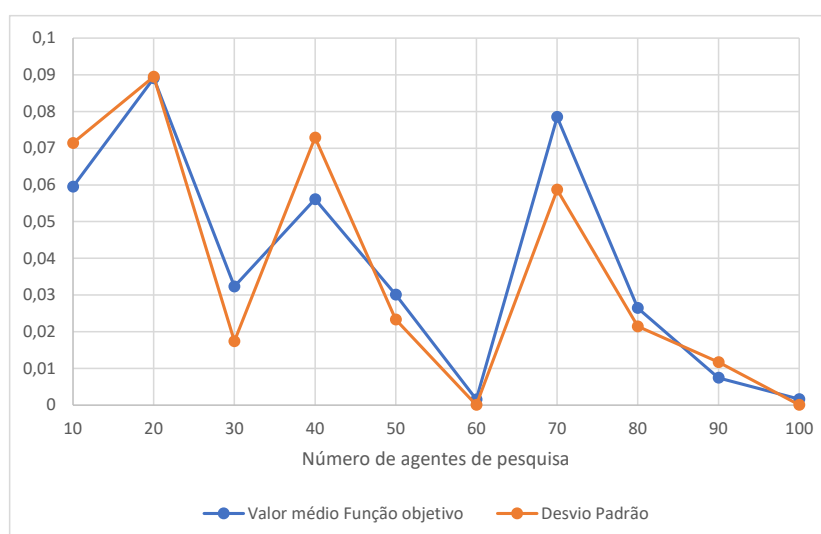


Figura 29 – Evolução do valor médio da função objetivo e respetivo desvio padrão com o número de agentes de pesquisa.

4.4. Identificação das propriedades elásticas a partir do ensaio de tração

A partir dos dados obtidos pelo ensaio de tração foram extraídas as principais propriedades elásticas da placa laminada, as quais são agora apresentadas para os seis provetes na Tabela 16. Nesta observa-se que o módulo de elasticidade E_2 , obtido através do ensaio com provetes extraídos na direção 2, apresentam valores muito próximos. Pelo contrário, o módulo de elasticidade E_1 , obtidos através do ensaio com provetes extraídos na direção 1, apresenta para o provete 2 valor

muito distinto dos outros dois provetes. Este valor anômalo pode ser explicado por um possível escorregamento do extensômetro na superfície do provete durante o ensaio.

Tabela 16 - Propriedades elásticas identificadas a partir dos ensaios de tração

Direção 1		
Provete	E_1 [GPa]	ν_{12}
1	53,98	0,19
2	25,82	0,06
3	53,13	0,11
Valor médio	44,31	0,12
Desvio Padrão	13,08	0,05
Direção 2		
Provete	E_2 [Gpa]	ν_{12}
4	57,03	0,18
5	55,57	0,09
6	55,92	0,14
Valor médio	56,17	0,14
Desvio Padrão	0,62	0,04

Na Figura 30 apresentam-se as curvas de tensão-deformação e as respectivas curvas de deformações nas duas direções ortogonais para os provetes 1 e 4. A partir da regressão linear das curvas da primeira coluna são identificados os módulos de elasticidade nas duas direções e nas curvas da segunda coluna os valores do coeficiente de *Poisson*.

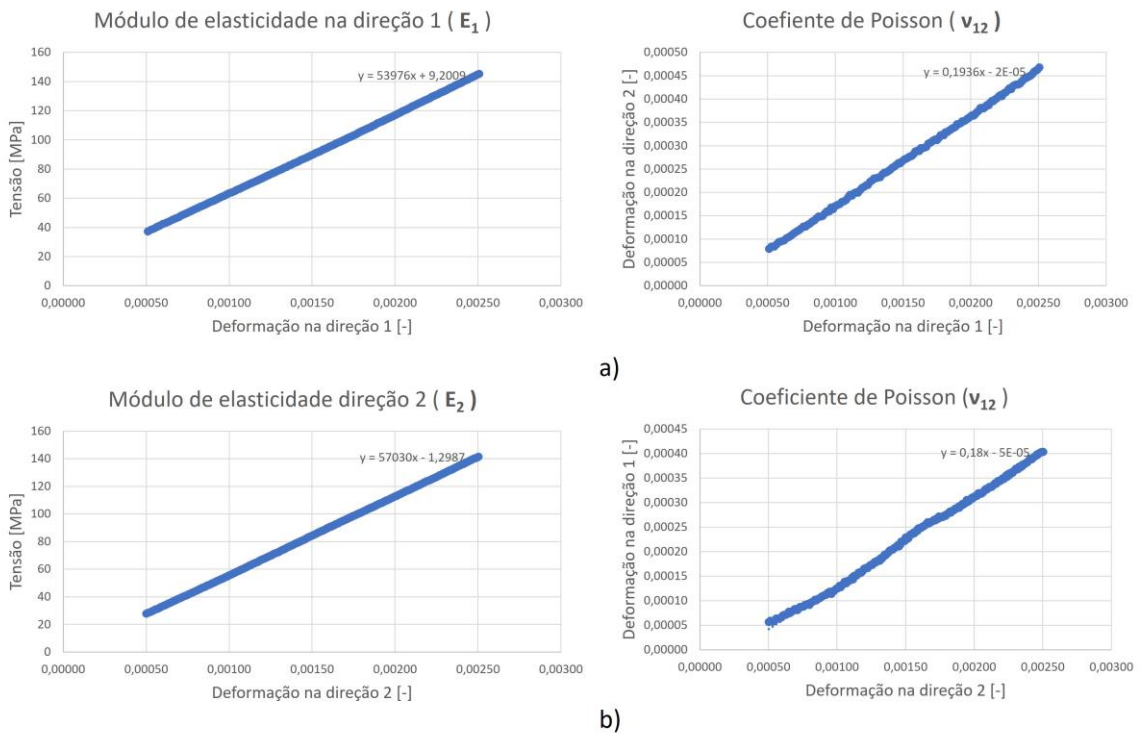


Figura 30 – Curvas de tensão-deformação e deformação em duas direções ortogonais: a) provete 1, b) provete 4

Os valores identificados a partir destes dois ensaios estão em linha com os estimados numericamente. A Tabela 17 apresenta a comparação das propriedades identificadas através do ensaio de tração e pelo método inverso, sendo utilizados os valores numéricos para 20 frequências naturais e 100 agentes de pesquisa, e apresentado o respetivo erro relativo. Esta revela que os módulos de elasticidade E_1 e E_2 identificados pelo método inverso são respetivamente 21,03% e -14,5% relativamente aos valores encontrados através do ensaio de tração. Quanto ao coeficiente de *Poisson*, este apresenta um erro relativo baixo quando comparado com as outras propriedades.

Tabela 17 - Comparação das propriedades elásticas obtidas numericamente e pelo ensaio de tração

Propriedade	Método inverso	Método Clássico Provete 1	Método Clássico Provete 4	Erro [%]
E1 [GPa]	65,33	53,98	-	21,0%
E2 [GPa]	48,76	-	57,03	14,5%
ν_{12}	0,19	0,19	0,18	2,7%

Para além, é também possível estimar teoricamente as propriedades elásticas do laminado pela aplicação das equações da macromecânica, encontradas no capítulo 2.2.4. As propriedades foram calculadas utilizando os valores fornecidos pelo fabricante dos materiais e aplicando a Teoria Clássica dos Laminados (TCL). A matriz de rigidez de membrana do laminado $[A]$ apresenta-se na equação (4.4.1),

$$[A] = \begin{bmatrix} 98,89 & 19,18 & 0 \\ 19,18 & 98,89 & 0 \\ 0 & 0 & 21,78 \end{bmatrix} [GPa \cdot mm] \quad (4.4.1)$$

a matriz inversa $[a]$ de $[A]$, será

$$[a] = \begin{bmatrix} 0,0105 & -0,0020 & 0 \\ -0,0020 & 0,0105 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0459 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{GPa \cdot mm} \right] \quad (4.4.2)$$

calculando, sendo h a espessura do laminado, as propriedades elásticas serão

$$E_1 = \frac{1}{a_{11}h} = \frac{1}{0,0105 \cdot 1,85} = 51,48 \text{ GPa} \quad (4.4.3)$$

$$E_2 = \frac{1}{a_{22}h} = \frac{1}{0,0105 \cdot 1,85} = 51,48 \text{ GPa} \quad (4.4.4)$$

$$G_{12} = \frac{1}{a_{66}h} = \frac{1}{0,0459 \cdot 1,85} = 11,77 \text{ GPa} \quad (4.4.5)$$

$$\nu_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{-(0,0020)}{0,0105} = 0,19 \quad (4.4.6)$$

Na tabela 18 está expressa uma comparação entre os métodos inverso, clássico e TCL, através do cálculo do erro relativo entre eles. Observa-se que entre o método inverso e TCL o maior erro permanece para a propriedade E_1 com 26,9%, mas para ν_{12} o erro é nulo. Entre o método clássico de tração e TCL, o maior erro apresenta-se para a propriedade E_2 com 10,8%, seguindo com 4,9% para E_1 e permanecendo com um valor baixo para o coeficiente de *Poisson* com 2,6%.

Tabela 18 - Comparação das propriedades elásticas obtidas pelo método inverso, método clássico e Teoria Clássica dos laminados (TCL)

Propriedade	Método Inverso	Método Clássico - Provete 1	Método Clássico - Provete 4	Teoria Clássica de Laminados	Erro entre os Métodos Inverso e Clássico [%]	Erro entre Método Inverso e TCL [%]	Erro entre a TCL e Método Clássico [%]
E1 [GPa]	65,33	53,98	-	51,48	21,0%	26,9%	4,9%
E2 [GPa]	48,76	-	57,03	51,48	14,5%	5,3%	10,8%
ν_{12}	0,19	0,19	0,18	0,19	2,7%	0,0%	2,6%

Estes resultados atestam que o método inverso apresenta resultados promissores na identificação das propriedades elásticas da placa laminada, além do mais, trata-se de um método global e não destrutivo, ao contrário do método clássico de tração. Os resultados obtidos pelas equações da macromecânica são compatíveis com os obtidos experimentalmente pelos ensaios de tração, e também pelo método inverso proposto.

5. CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

5.1. Conclusões

Na fase inicial deste trabalho foram descritos os principais métodos inversos dedicados à identificação das propriedades de laminados compósitos. Dentro dos trabalhos analisados, foi identificada a metodologia mais robusta na identificação das propriedades, a qual é baseada na combinação do modelo de elementos finitos com a resolução de um problema inverso de minimização da diferença entre as frequências naturais numéricas e experimentais, sendo este resolvido de forma eficiente recorrendo a algoritmos de otimização meta-heurísticos inspirados na natureza.

Neste trabalho foram descritos o princípio de funcionamento de quatro dos principais algoritmos meta-heurísticos: algoritmo Genético (GA), Enxame de Partículas (PSO), o Algoritmo Pirilampo (FA), e o Pesquisa Cuco (CSA). Por serem os mais usados, só foram aplicados na resolução do problema inverso o GA e PSO.

A implementação da metodologia selecionada envolveu a combinação de programas desenvolvidos em MATLAB e ANSYS. O MATLAB é responsável pelo processo de otimização e geração de propriedades que serão usadas como dados de entrada no ANSYS. Este calculará as respectivas frequências naturais a partir do modelo de elementos finitos as quais serão lidas pelo MATLAB e comparadas com as frequências experimentais de acordo com a função objetivo escolhida. Novos conjuntos de propriedades são gerados a cada iteração com base na metodologia de cada algoritmo meta-heurístico.

A identificação das propriedades elásticas através do método inverso envolveu diferentes análises. Na primeira, foi realizada a comparação do desempenho dos algoritmos PSO e GA, a fim de selecionar o mais eficaz na identificação das propriedades elásticas da placa. O algoritmo PSO apresentou-se mais lento a convergir devido a um maior domínio de pesquisa. Contudo, apresentou menor valor da função objetivo e permitiu obter valores mais consistentes para as propriedades. A este seguiram-se outros estudos em que se procurou identificar a influência do número de frequências naturais e o número de agentes de pesquisa no desempenho do algoritmo PSO. Os estudos envolveram a análise do valor da função objetivo, tempo de cálculo, número de iterações e a qualidade das propriedades identificadas. Verificou-se que o incremento do número de frequências conduzia a um tempo de cálculo superior e a uma melhor identificação das propriedades elásticas. De forma semelhante, o incremento do número de agentes de pesquisa conduz ao aumento do domínio de pesquisa e, por isso, ao incremento do tempo de cálculo, a menores valores da função objetivo, com menor disparidade do valor ótimo entre corridas.

A partir do estudo realizado, o ponto de equilíbrio para a identificação das propriedades está na seleção entre 8 a 12 frequências naturais, na escolha de 100 agentes de pesquisa e na aplicação do algoritmo PSO.

A fim de validar a eficácia do método proposto, foram identificadas através do ensaio clássico de tração as propriedades E_1 , E_2 e ν_{12} . Para tal, foram extraídos da placa 6 provetes, três com a orientação na direção longitudinal e três com orientação na direção transversal da placa. Os valores mais coerentes com os estimados numericamente foram obtidos para os provetes 1 e 4, para as

direções longitudinal e transversal, respetivamente. Verificou-se que as propriedades elásticas identificadas através do método inverso estão muito próximas das obtidas através do método clássico, com a vantagem deste se basear num ensaio não destrutivo. Todavia, o método proposto requer um esforço e tempo de cálculo significativo.

Em resumo, o método proposto mostrou-se eficaz na identificação das propriedades elásticas da placa laminada a partir da medição das suas frequências naturais dentro de um limite admissível, desde que estas sejam medidas com algum rigor.

5.2. Propostas de trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, em primeiro lugar, repetir os estudos efetuados com novas placas de material compósito utilizando a mesma sequência de empilhamento para confirmar resultados. É proposto também a realização de um estudo comparativo das propriedades identificadas pelos quatro métodos meta-heurísticos apresentados, o qual requer a implementação dos algoritmos Pirilampo e Pesquisa Cuco. Por outro lado, deve-se melhorar os programas de cálculo já implementados para reduzir o tempo de cálculo em cada simulação. Adicionalmente seria interessante avaliar a robustez desta metodologia através da identificação das propriedades em placas laminadas com diferentes empilhamentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Marcelo F.S.F. de Moura, Alfredo B. de Moraes, and António G. de Magalhães, *Materiais Compósitos Materiais, Fabrico e Comportamento Mecânico*, 2ª Edição. 2010.
- [2] J. Rodrigues and P. Martins., *Tecnologia Mecânica: Fundamentos Teóricos*, vol. Vol. I. 2010.
- [3] R. D. Mindlin, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates," *Journal of Applied Mechanics*, pp. 31–38, 1951.
- [4] A. L. Araújo, C. M. Mota Soares, and M. J. Moreira De Freitas, "Characterization of material parameters of composite plate specimens using optimization and experimental vibrational data," *Compos B Eng*, vol. 27, no. 2 PART B, pp. 185–191, 1996, doi: 10.1016/1359-8368(95)00050-X.
- [5] C. M. M. Soares, M. M. de Freitas, A. L. Araújo, and P. Pedersen, "Identification of material properties of composite plate specimens," *Compos Struct*, vol. 25, no. 1–4, pp. 277–285, 1993, doi: 10.1016/0263-8223(93)90174-O.
- [6] A. F. F. Rodrigues, J. V. Araújo dos Santos, and H. Lopes, "Identification of material properties of green laminate composite plates using bio-inspired optimization algorithms," in *Procedia Structural Integrity*, Elsevier B.V., 2021, pp. 684–691. doi: 10.1016/j.prostr.2022.01.138.
- [7] H. Lopes, J. V. Araújo Dos Santos, and A. Katunin, "Identification of material properties of a laminated plate from measurements of natural frequencies and modal rotations," in *Procedia Structural Integrity*, Elsevier B.V., 2019, pp. 971–978. doi: 10.1016/j.prostr.2019.08.129.
- [8] M. F. Møller, "A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning," *Neural Networks*, vol. 6, no. 4, pp. 525–533, 1993, doi: 10.1016/S0893-6080(05)80056-5.
- [9] I. Fister, X. S. Yang, J. Brest, and D. Fister, "A brief review of nature-inspired algorithms for optimization," *Elektrotehniski Vestnik/Electrotechnical Review*, vol. 80, no. 3. pp. 116–122, 2013.
- [10] S. Jalili, R. Khani, A. Maheri, and Y. Hosseinzadeh, "Performance assessment of meta-heuristics for composite layup optimisation," *Neural Comput Appl*, vol. 34, no. 3, pp. 2031–2054, Feb. 2022, doi: 10.1007/s00521-021-06519-0.
- [11] "Significado de Otimização." <https://www.significados.com.br/otimizacao/> (accessed Oct. 25, 2022).
- [12] X.-S. S. Yang and M. Karamanoglu, *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms Second Edition*, vol. 4, no. C. 2013. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780124051638000016>
- [13] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. University of Michigan Press, 1975.
- [14] R. Hooke and T. A. Jeeves, "'Direct Search' Solution of Numerical and Statistical Problems," *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 8, no. 2, pp. 212–229, Apr. 1961, doi: 10.1145/321062.321069.
- [15] A. R. Yildiz, "A novel particle swarm optimization approach for product design and manufacturing," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 40, no. 5–6, pp. 617–628, Jan. 2009, doi: 10.1007/s00170-008-1453-1.
- [16] M. C. Chen and D. M. Tsai, "A simulated annealing approach for optimization of multi-pass turning operations," *Int J Prod Res*, vol. 34, no. 10, pp. 2803–2825, 1996, doi: 10.1080/00207549608905060.
- [17] F. Glover, "HEURISTICS FOR INTEGER PROGRAMMING USING SURROGATE CONSTRAINTS," *Decision Sciences*, vol. 8, no. 1, pp. 156–166, 1977, doi: 10.1111/j.1540-5915.1977.tb01074.x.

- [18] E. G. Talbi, *Metaheuristics: From Design to Implementation*. John Wiley and Sons, 2009. doi: 10.1002/9780470496916.
- [19] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing," *Science (1979)*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, 1983, doi: 10.1126/science.220.4598.671.
- [20] F. Glover, "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence," *Comput Oper Res*, vol. 13, no. 5, pp. 533–549, 1986, doi: 10.1016/0305-0548(86)90048-1.
- [21] M. Dorigo, G. Di Caro, and L. M. Gambardella, "Ant algorithms for discrete optimization," *Artif Life*, vol. 5, no. 2, pp. 137–172, 1999, doi: 10.1162/106454699568728.
- [22] M. Dorigo and L. M. Gambardella, "Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 53–66, 1997, doi: 10.1109/4235.585892.
- [23] A. Colorni, M. Dorigo, and V. Maniezzo, "Distributed Optimization by ant colonies," in *Proceedings of the First European Conference on Artificial Life*, Paris, France, 1991, pp. 134–142.
- [24] R. Eberhart and J. Kennedy, "New optimizer using particle swarm theory," in *Proceedings of the International Symposium on Micro Machine and Human Science*, IEEE, 1995, pp. 39–43. doi: 10.1109/mhs.1995.494215.
- [25] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle swarm optimization," in *IEEE International Conference on Neural Networks - Conference Proceedings*, IEEE, 1995, pp. 1942–1948. doi: 10.4018/ijmfmp.2015010104.
- [26] X. S. Yang, *Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications*. John Wiley and Sons, 2010. doi: 10.1002/9780470640425.
- [27] R. Eberhart and J. Kennedy, "New optimizer using particle swarm theory," in *Proceedings of the International Symposium on Micro Machine and Human Science*, IEEE, 1995, pp. 39–43. doi: 10.1109/mhs.1995.494215.
- [28] M. Clerc and J. Kennedy, "The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, no. 1, pp. 58–73, Feb. 2002, doi: 10.1109/4235.985692.
- [29] X. S. Yang, "Firefly algorithms for multimodal optimization," in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2009, pp. 169–178. doi: 10.1007/978-3-642-04944-6_14.
- [30] X. S. Yang, "Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimization," *International Journal of Bio-Inspired Computation*, vol. 2, no. 2, pp. 78–84, 2010, doi: 10.1504/IJBIC.2010.032124.
- [31] G. J. Klir, "Handbook of Genetic Algorithms, edited by Lawrence Davis, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991. xii + 385 pages," *Int J Gen Syst*, vol. 20, no. 2, 1992, doi: 10.1080/03081079208945028.
- [32] W. T. Reeves, "Particle Systems—a Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 2, no. 2, pp. 91–108, Apr. 1983, doi: 10.1145/357318.357320.
- [33] I. Fister, X. S. Yang, and J. Brest, "A comprehensive review of firefly algorithms," *Swarm Evol Comput*, vol. 13, pp. 34–46, Dec. 2013, doi: 10.1016/j.swevo.2013.06.001.
- [34] X.-S. Yang and S. Deb, "Cuckoo Search via Levy Flights," *2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (nabic 2009)*, pp. 210–+, 2009.
- [35] X. S. Yang and S. Deb, "Engineering optimisation by cuckoo search," *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, vol. 1, no. 4, 2010, doi: 10.1504/IJMMNO.2010.035430.
- [36] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, vol. 2ª Edição. CRC Press, 2003. doi: 10.1201/b12409.
- [37] C. A. G. de M. Branco, *Mecânica dos Materiais*, 3ª., ISBN 972-31-0825-9. Lisboa.
- [38] J. F. S. Gomes, "Mecânica dos sólidos e resistência dos materiais," ISSN 9728826060, 2004.

- [39] D. Gay and V. S. Hoa, "Composite Materials - Design and Applications, Second Edition," 2007.
- [40] J. Francisco and M. Gomes Da Silva, "MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA - TCL, MATERIAIS COMPÓSITOS - ISEP, Porto." 2015.
- [41] A. Torres Marques, "Materiais Compósitos: Conceber e Fabricar para Durar - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP)," 2015.
- [42] Jean-Marie Berthelot and J.M. Cole, "Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis," 1999.
- [43] S. V. (Suong V.) Hoa, *Principles of the manufacturing of composite materials*. DEStech Publications, 2009.
- [44] F. H. Gojny, M. H. G. Wichmann, B. Fiedler, W. Bauhofer, and K. Schulte, "Influence of nano-modification on the mechanical and electrical properties of conventional fibre-reinforced composites," *Compos Part A Appl Sci Manuf*, vol. 36, no. 11, pp. 1525–1535, Nov. 2005, doi: 10.1016/j.compositesa.2005.02.007.
- [45] MDC, "Processamento de Compósitos - Materiais não-metálicos - ISEP."
- [46] O. Faruk, A. K. Bledzki, H. P. Fink, and M. Sain, "Biocomposites reinforced with natural fibers: 2000-2010," *Progress in Polymer Science*, vol. 37, no. 11. pp. 1552–1596, Nov. 2012. doi: 10.1016/j.progpolymsci.2012.04.003.
- [47] MDC, "Processamento de Compósitos, Matriz Polimérica - Materiais não-metálicos, ISEP," 2020.
- [48] M. V. Brusckke and S. G. Advani, "A finite element/control volume approach to mold filling in anisotropic porous media," *Polym Compos*, vol. 11, no. 6, pp. 398–405, 1990, doi: 10.1002/pc.750110613.
- [49] H. R. Van Der Wal, "New Chemical Recycling Process for Polyurethanes," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 13, no. 1, pp. 87–96, 1994, doi: 10.1177/073168449401300106.
- [50] J. U. Otaigbe, "Effect of coupling agent and absorbed moisture on the tensile properties of a thermoplastic RRIM composite," *J Appl Polym Sci*, vol. 45, no. 7, pp. 1213–1221, 1992, doi: 10.1002/app.1992.070450710.
- [51] A. K. Bledzki and J. Gassan, "Composites reinforced with cellulose based fibres," *Progress in Polymer Science (Oxford)*, vol. 24, no. 2. Elsevier Science Ltd, pp. 221–274, 1999. doi: 10.1016/S0079-6700(98)00018-5.
- [52] R. Abedinzadeh, S. M. Safavi, and F. Karimzadeh, "Finite Element modeling of Microwave-Assisted Hot Press process in a multimode furnace," *Appl Math Model*, vol. 39, no. 23–24, pp. 7452–7468, Sep. 2013, doi: 10.1016/j.apm.2015.03.007.
- [53] S. R. White and H. T. Hahn, "Process Modeling of Composite Materials: Residual Stress Development during Cure. Part II. Experimental Validation," *J Compos Mater*, vol. 26, no. 16, pp. 2423–2453, 1992, doi: 10.1177/002199839202601605.
- [54] J. F. M. G. Da Silva, "Estudo da resistência à pressão interior após impacto de tubagem produzida por enrolamento filamentar - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto," 1996.
- [55] C. Moler, "MATLAB - A MATHEMATICAL VISUALIZATION LABORATORY.," 1988. doi: 10.1109/cmpcon.1988.4915.
- [56] S. C. Johnson and C. Moler, "Compiling MATLAB," in *USENIX 1994 Very High Level Languages Symposium Proceedings*, 1994.
- [57] M. K. Thompson and J. M. Thompson, *ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis*. 2017.
- [58] "REM epoxy matrix | technical data REM EPOXY MATRIX."
- [59] M. Petyt, *Introduction to finite element vibration analysis, second edition*, vol. 9780521191609. 2010. doi: 10.1017/CBO9780511761195.

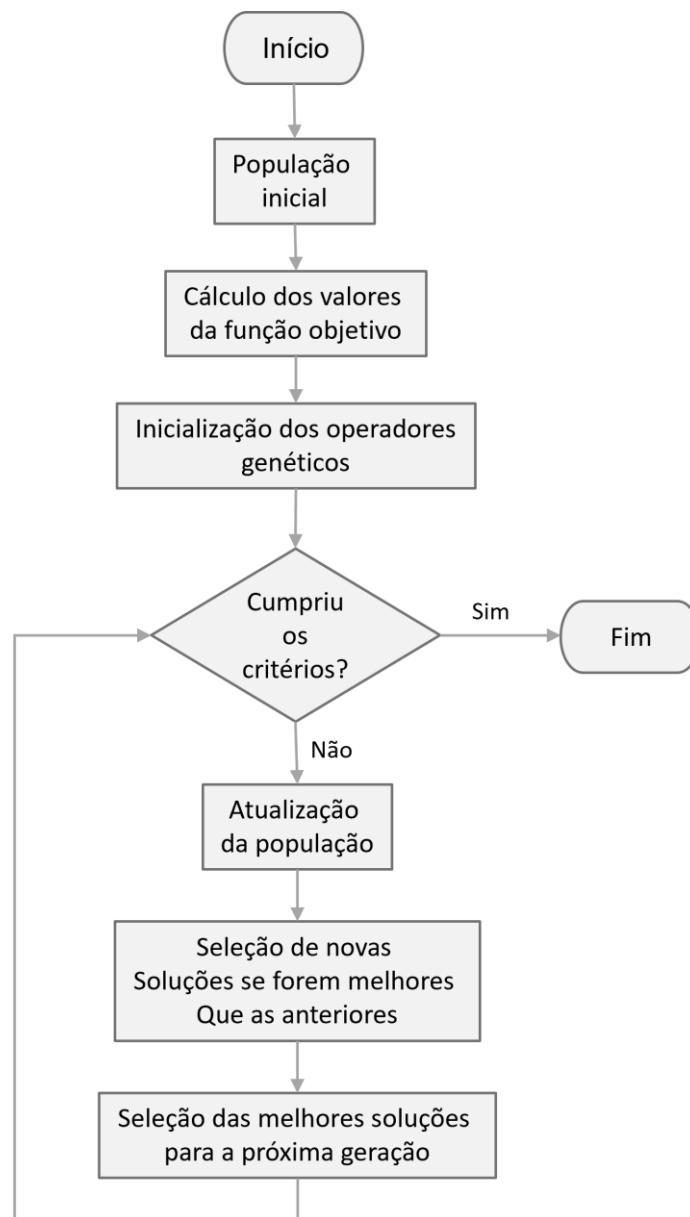
ANEXOS

ANEXO A

Fluxogramas dos algoritmos meta-heurísticos

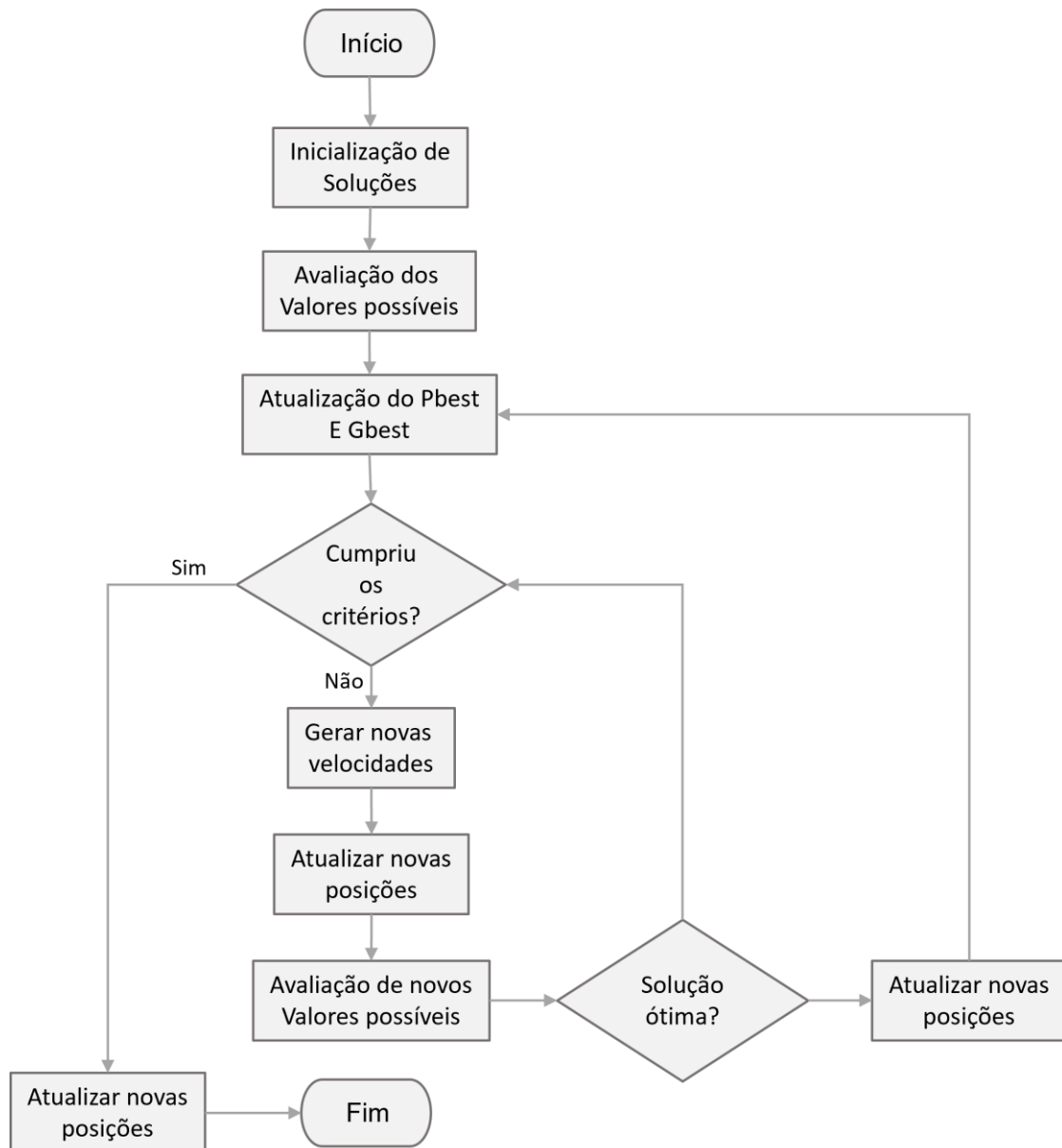
Anexo A.1

Fluxograma Algoritmo Genético (GA)



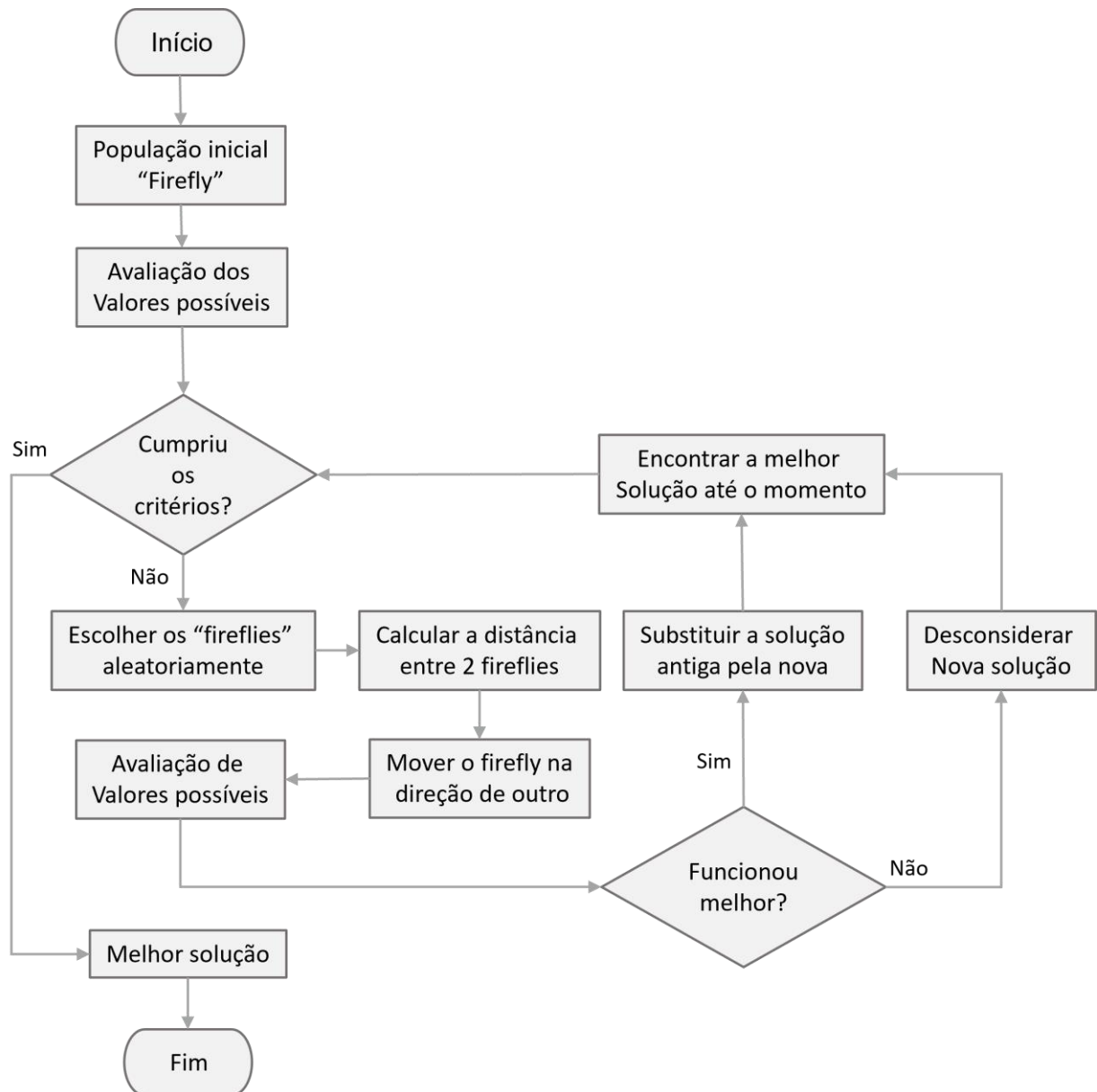
Anexo A.2

Fluxograma Algoritmo do Enxame de Partículas (PSO)



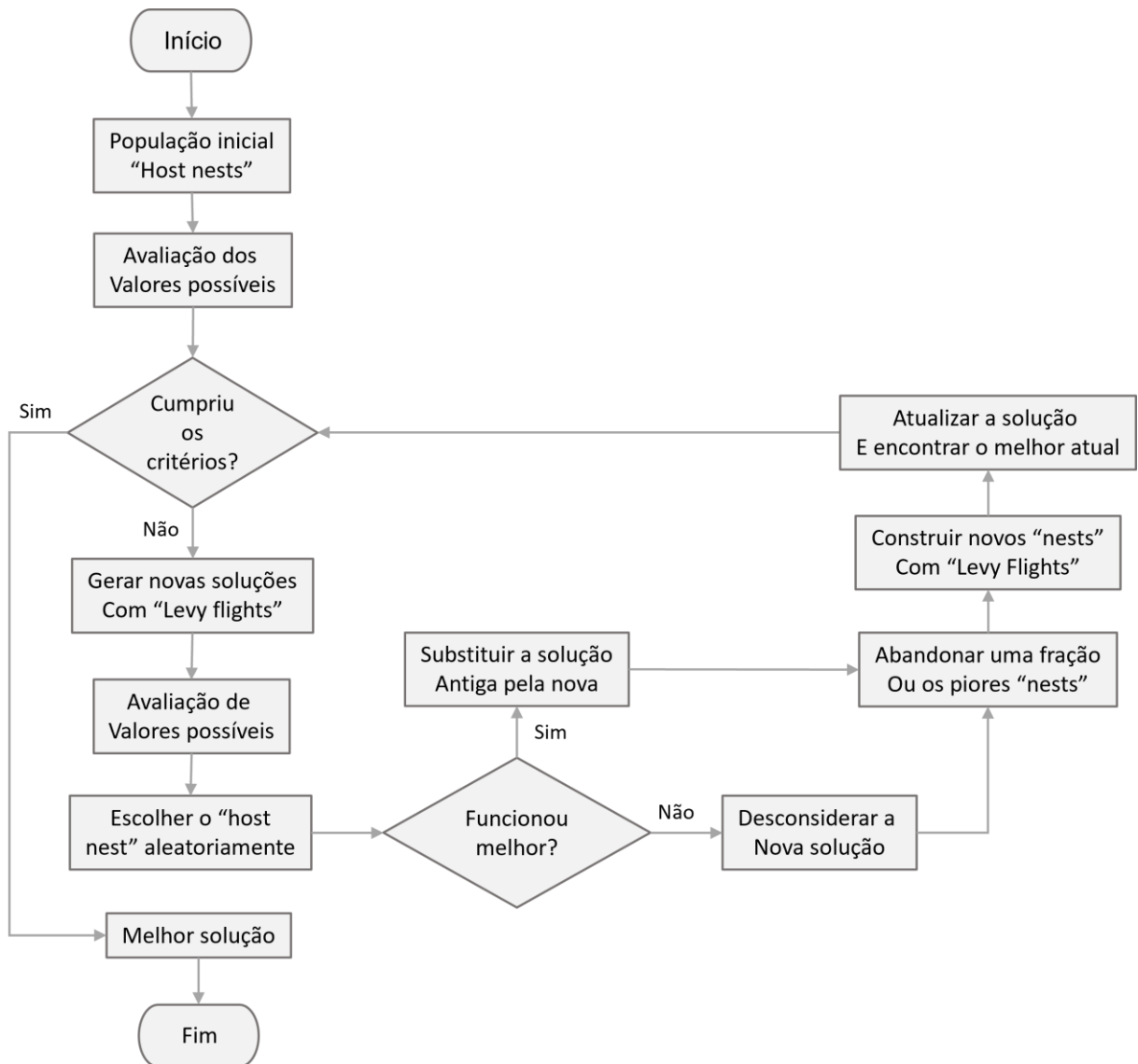
Anexo A.3

Fluxograma Algoritmo Pirlampo (FA)



Anexo A.4

Fluxograma Algoritmo Pesquisa Cuco (CSA)



ANEXO B

Programa em ANSYS MAPDL responsável pela geração do modelo em elementos finitos da placa a partir da sua geometria

```
/PREP7
ET,1,shell181
SECTYPE,1,SHELL
/inp,Layer_stack,inp ! vai usar os Layer escritos pelo matlab
/inp,Parameters,inp ! vai usar as propriedades do material escritos pelo matlab
MPTEMP,1,0 ! vai atualizar as propriedades
MP,EX,1,E1(1)
MP,EY,1,E2(1)
MP,EZ,1,E3(1)
MP,GXY,1,G12(1)
MP,GYZ,1,G23(1)
MP,GXZ,1,G13(1)
MP,PRXY,1,PR12(1)
MP,PRXZ,1,PR13(1)
MP,PRYZ,1,PR23(1)
MP,DENS,1,1.54922e+03
RECTNG,0,2.76500e-01,0,1.99000e-01,
FLST,5,2,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,3
CM,_Y,LINE
LSEL,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,,, 56,,,,,1
FLST,5,2,4,ORDE,2
FITEM,5,2
FITEM,5,4
CM,_Y,LINE
LSEL,,,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,,, 40,,,,,1
MSHKEY,0
CM,_Y,AREA
ASEL,,,1
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
AMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
/inp,Boundary,inp ! condições fronteira escritas pelo Matlab
FINISH
```

```

/SOL
ANTYPE,2
MODOPT,LANB, 12,3,4000, ,OFF
/STATUS,SOLU
SOLVE
/POST1
*DIM,freq_natural,ARRAY, 12,DIMENS+1
*VFILL,freq_natural(1,1),RAMP,1,1
set,1,1
*DO,s,1, 12
*GET,freq_natural(s,2),MODE,s,FREQ
set,next
*ENDDO
FINISH
*IF,DIMENS,NE,1,THEN
*DO,jj,2,DIMENS
/SOL
MPDE,NUXY,1
MPDE,NUXZ,1
MPDE,NUYZ,1
MP,EX,1,E1(jj)
MP,EY,1,E2(jj)
MP,EZ,1,E3(jj)
MP,GXY,1,G12(jj)
MP,GYZ,1,G23(jj)
MP,GXZ,1,G13(jj)
MP,PRXY,1,PR12(jj)
MP,PRXZ,1,PR13(jj)
MP,PRYZ,1,PR23(jj)
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
/POST1
set,1,1
*DO,s,1, 12
*GET,freq_natural(s,jj+1),MODE,s,FREQ
set,next
*ENDDO
*ENDDO
FINISH
*ENDIF
*MWRITE,freq_natural,Frequencies,txt, ,JK, 12, ! Abrir o ficheiro de escrita Frequencias.txt
(400F15.8)

```