



# Desenvolvimento de uma ferramenta informática em Matlab para análise de estruturas pelo Método de Elementos Finitos

JOSÉ RAMOS DA SILVA

julho de 2020

# DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA INFORMÁTICA EM MATLAB PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

José Ramos da Silva

1060568

**2020**

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica





# DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA INFORMÁTICA EM MATLAB PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

José Ramos da Silva

1060568

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação de Raul Duarte Salgueiral Gomes Campilho.

**2020**

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica





# JÚRI

## **Presidente**

Professor Doutor Jorge Américo De Oliveira Pinto Belinha

Professor Adjunto, ISEP

## **Orientador**

Professor Doutor Raul Duarte Salgueiral Gomes Campilho

Professor Adjunto, ISEP

## **Arguente**

Professor Doutor Renato Manuel Natal Jorge

Professor Catedrático, FEUP



## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao meu orientador professor doutor Raul Campilho por todo o apoio prestado no desenvolvimento deste trabalho, pela sua disponibilidade, paciência e sem dúvida alguma ao seu constante encorajamento ao longo destes anos que se revelou para mim o embasamento que permitiu o desfecho do trabalho aqui apresentado.

Quero ainda agradecer à minha esposa, aos meus queridos pais e irmãos por todo o apoio prestado, pelo tempo disponibilizado e alento demonstrado ao longo destes anos.

Em especial quero agradecer à minha irmã Mariana Silva pelas imagens vetoriais desenvolvidas para o programa FELP, ao engenheiro Alexandre Mendes pelo auxílio na compreensão da linguagem de programação Java e na definição de estilos com recurso a HTML e CSS. E ao meu cunhado João Pedro e irmã Carolina Silva por todas as revisões efetuadas ao presente trabalho.



## PALAVRAS CHAVE

Método de Elementos Finitos; Elementos unidimensionais; Elemento de barra; Elemento de viga; Elemento de estrutura; Formulação linear e quadrática; Funções de interpolação; Transformação de coordenadas; Matlab®; Matlab® GUIDE; Interface gráfica; Programa; FELP.

## RESUMO

No projeto de qualquer tipo de estrutura, independentemente qual a sua tipologia, a fase de análise estrutural é uma fase primordial que permite determinar os efeitos que os esforços provocam na estrutura, e antecede o processo de dimensionamento. O Método de Elementos Finitos (MEF) tem sido amplamente integrado em diversos programas de análise e dimensionamento estrutural e encontra-se atualmente acessível à generalidade dos projetistas de estruturas. Contudo, na maioria dos programas comercializados o projetista não tem acesso ao código fonte do programa que se encontra a utilizar e, diversas vezes, desconhece as características do modelo utilizado na análise. Igualmente, em determinadas circunstâncias e sem a formação devida, a definição do modelo de análise pode revelar-se complexa e tornar-se numa potencial fonte de erros.

A presente dissertação pretende criar um programa através do *software* Matlab® que permita ao utilizador analisar estruturas reticuladas bidimensionais com ligação contínua ou articulada, através do MEF. Portanto, inicialmente são desenvolvidas e modificadas as formulações matemáticas que permitem estudar os elementos unidimensionais de barra, viga e estrutura de dois nós e três nós. Após a realização destas formulações, procedeu-se à obtenção da solução com auxílio ao programa Matlab®, desenvolvendo-se para isso um programa de análise estrutural que permite ao utilizador estudar estruturas reticuladas bidimensionais. As rotinas desenvolvidas e modificadas no programa Matlab® foram compiladas numa interface gráfica através do programa Matlab® *Graphical User Interface Development Environment* (GUIDE). Desta forma, o utilizador consegue utilizar a ferramenta desenvolvida de forma mais autónoma e expedita. Adicionalmente, esta aplicação permite ao utilizador escolher qual o tipo de formulação, quadrática ou linear, que pretende utilizar na fase de processamento para obter a solução do problema. A validação do programa consistiu numa verificação de cada um dos elementos formulados, e confrontaram-se os resultados obtidos com os esperados pela Resistência dos Materiais e resultantes de *softwares* comumente utilizados no mercado. Após a modelação de três problemas modelo para cada uma das formulações realizadas, pode-se aferir o correto funcionamento do programa elaborado, que pode agora ser utilizado de forma fiável e intuitiva para o projeto de estruturas mecânicas.



## KEYWORDS

Finite Element Method; One-dimensional elements; Bar element; Beam element; Frame element; Linear and quadratic formulation; Interpolation functions; Coordinate transformation; Matlab®; Matlab® GUIDE; Graphic interface; Software; FELP.

## ABSTRACT

In the design of any type of structure, regardless of its typology, the structural analysis phase is a primary phase that allows determining the effects that the imposed loads cause on the structure, and precedes the design process. The Finite Element Method (FEM) has been widely integrated into several structural analysis and design programs and is currently accessible to most structural designers. However, in most commercial programs, the designer does not have access to the source code of the program he is using and, several times, he is unaware of the characteristics of the model used in the analysis. Likewise, in certain circumstances and without the necessary training, the definition of the analysis model can prove complex and become a potential source of errors.

This dissertation intends to create a program through the Matlab® software that allows the user to analyze two-dimensional reticulated structures with continuous or articulated connections, through the FEM. Therefore, the mathematical formulations that allow to study one-dimensional truss, beam and frame elements of two and three nodes are developed and modified. After performing these formulations, the solution was obtained with the aid of the Matlab® software, developing a structural analysis program that allows the user to study two-dimensional reticulated structures. The developed and modified routines in the Matlab® software were compiled in a graphical interface through the Matlab® GUIDE software. In this way, the user is able to use the developed tool in a more autonomous and expeditious manner. Additionally, this application allows the user to choose which type of formulation, quadratic or linear, he wants to use in the processing phase to obtain the solution to the problem. The program validation consisted of checking each of the formulated elements, and the results obtained were compared with those expected by the Strength of Materials and resulting from commonly used software in the market. After modeling three sample problems for each of the performed formulations, it is possible to assess the correct functioning of the elaborated program, which can now be used in a reliable and intuitive way for the design of mechanical structures.



## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### Lista de Abreviaturas

2D	Duas Dimensões
3D	Três Dimensões
A.C.	Antes de Cristo
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>
CAM	<i>Computer Aided Manufacturing</i>
CSS	<i>Cascading Style Sheet</i>
DXF	<i>Drawing Exchange Format</i>
FELP	<i>Finite Element Program</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
GUIDE	<i>Graphical User Interface Development Environment</i>
HTML	<i>HyperText Markup Language</i>
MEF	Método de Elementos Finitos
NA	Não Aplicável
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais
RSA	Regulamento de segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes

### Lista de Símbolos

$\partial U^e$	Energia de deformação virtual provocada pelas tensões internas
$\partial W^e$	Trabalho virtual realizado pelas forças externas
$\Delta$	Deslocamento do sistema isostático de base
$A$	Área
$\mathbf{a}_e$	Vetor de variáveis nodais no sistema de coordenadas local do elemento
$\mathbf{A}_e$	Vetor de variáveis nodais no sistema de coordenadas global do elemento

---

<b>B</b>	Matriz de deformação
<i>b</i>	Ordenada na origem
<b>b</b>	Largura da secção
<b>D</b>	Matriz de elasticidade
<i>E</i>	Módulo de Young
<i>f</i>	Força
<i>f<sub>1</sub></i>	Força no nó 1
<b>f<sub>e</sub></b>	Vetor de forças nodais no sistema de coordenadas local do elemento
<b>F<sub>e</sub></b>	Vetor de forças nodais no sistema de coordenadas global do elemento
<i>f<sub>i</sub></i>	Força no nó <i>i</i> no sistema de eixos local do elemento
<i>f<sub>j</sub></i>	Força no nó <i>j</i> no sistema de eixos local do elemento
<i>f<sub>k</sub></i>	Força no nó <i>k</i> no sistema de eixos local do elemento
<i>f<sub>n</sub></i>	Força no nó <i>n</i> no sistema de eixos local do elemento
<b>h</b>	Altura da secção
<i>I</i>	Momento estático de segunda ordem da secção reta
<i>K</i>	Posição de um ponto na reta na análise geométrica a variar entre 0 e 1, 0 implica posição inicial e 1 posição final da reta
<b>k<sub>e</sub></b>	Matriz de rigidez no sistema de coordenadas local do elemento
<b>K<sub>e</sub></b>	Matriz de rigidez no sistema de coordenadas global do elemento
<i>L</i>	Comprimento
<i>l</i>	Cosseno do ângulo
<i>m</i>	Seno do ângulo
<i>m</i>	declive
<i>M</i>	Momento em torno do eixo do <i>z</i>
<b>N</b>	Funções de Interpolação
<i>r</i>	Raio
<b>R</b>	Vetor das reações na estrutura de acordo com o sistema global de coordenadas
<b>r</b>	Vetor das reações na estrutura de acordo com o sistema local de coordenadas do apoio

---

---

$R_{ix}$	Valor da reação na direção $x$ do eixo global, no nó $i$ do elemento
$R_{iy}$	Valor da reação na direção $y$ do eixo global, no nó $i$ do elemento
$r_{ky}$	Valor da reação na direção $x$ do eixo local, no nó $k$ do elemento
<b>T</b>	Matriz de transformação
$t_a$	Espessura da alma
$t_b$	Espessura do banzo
$u_1$	Campos de deslocamentos do nó 1
$U_1$	Deslocamento do nó 1 na direção $x$ do eixo global
$U_{1i}$	Deslocamento do nó $i$ do elemento 1 na direção $x$ do eixo global
$U_2$	Deslocamento do nó 2 na direção $x$ do eixo global
$u_e$	Campos de deslocamentos do elemento
$u_i$	Campos de deslocamentos do nó $i$
$U_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $x$ do eixo global
$u_j$	Campos de deslocamentos do nó $j$
$U_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $x$ do eixo global
$u_k$	Campos de deslocamentos do nó $k$
$U_k$	Deslocamento do nó $k$ na direção $x$ do eixo global
$u_n$	Campos de deslocamentos do nó $n$
$V$	Volume
$V_1$	Deslocamento do nó 1 na direção $y$ do eixo global
$V_{1k}$	Deslocamento do nó $k$ do elemento 1 na direção $y$ do eixo global
$V_2$	Deslocamento do nó 2 na direção $y$ do eixo global
$V_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $y$ do eixo global
$V_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $y$ do eixo global
$V_k$	Deslocamento do nó $k$ na direção $y$ do eixo global
$w$	Carregamento distribuído
<b>X</b>	Multiplicador da carga unitária
$\alpha$	Coefficientes do polinómio

---

---

$\alpha_1$	Coeficientes do primeiro monónimo
$\alpha_2$	Coeficientes do segundo monónimo
$\alpha_3$	Coeficientes do terceiro monónimo
$\delta$	Deslocamento
$\varepsilon$	Vetor de deformações
$\varepsilon_x$	Deformação na direção $x$ do eixo local
$\theta$	Rotação em torno do eixo do $z$
$\theta_i$	Rotação em torno do eixo do $z$ no nó $i$
$\theta_j$	Rotação em torno do eixo do $z$ no nó $j$
$\theta_k$	Rotação em torno do eixo do $z$ no nó $k$
$\kappa_x$	Curvatura da viga
$\Pi$	Potencial total do sistema
$\sigma$	Vetor de tensões provocadas por momentos fletores
$\sigma_{axial}$	Vetor de tensões axiais
$\sigma_{eq}$	Vetor de tensões equivalentes de acordo com o critério de von Mises
$\sigma_{eq1j}$	Tensão equivalente no nó $j$ do elemento número 1
$\sigma_x$	Tensão normal segundo a direção do $x$ do eixo local
$\tau_{lk}$	Tensão de corte média no $k$ nó do elemento número 1
$\tau_{med}$	Tensão de corte média
$\phi$	Variável de campo
$\phi_1$	Variável de campo nó 1
$\phi_2$	Variável de campo nó 2
$\phi_3$	Variável de campo nó 3
$\phi_4$	Variável de campo nó 4
$\nu$	Deflexão vertical do eixo neutro
$\nu_i$	Deflexão vertical do eixo neutro no nó $i$
$\nu_j$	Deflexão vertical do eixo neutro no nó $j$
$\nu_k$	Deflexão vertical do eixo neutro no nó $k$

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Discretização [3] .....	9
Figura 2 - Papiro matemático de Rhind [5].....	10
Figura 3 - Arco Romano [8].....	11
Figura 4 – Representação de uma viga encastrada, livro de Galileu Galilei [4].....	11
Figura 5 - Exemplo de aproximação por funções contínuas [11] .....	13
Figura 6 - História do MEF [13].....	14
Figura 7 - Subdomínios finitos .....	15
Figura 8 - Aproximação da geometria por elementos [1] .....	16
Figura 9 - Convergência assintótica [1].....	16
Figura 10 - Zonas de refinamento da malha assinaladas a laranja [6] .....	17
Figura 11 – Exemplo de refinamento da malha apropriado [14] .....	17
Figura 12 – Comparação de elementos com diferentes rácios de aspeto [6] .....	18
Figura 13 – Análise não linear de um <i>stent</i> biomédico [15] .....	19
Figura 14 - Exemplo de análise não linear [16] .....	19
Figura 15 - Exemplo de análise estrutural [19].....	20
Figura 16 - <i>Crash test</i> [1] .....	21
Figura 17 - Projeto Flow Design [21] .....	21
Figura 18 - Exemplo do estudo de uma prótese dentária [22].....	22
Figura 19 - Método das Forças [23].....	23
Figura 20 - Elemento de barra linear à esquerda e quadrática à direita [14].....	27
Figura 21 - Carga distribuída [1] .....	28
Figura 22 - Aproximação ao campo de deslocamentos real, com diferentes tipos de elementos [26] .....	28
Figura 23 - Elementos Bidimensionais [14] .....	29
Figura 24 - Elementos Tridimensionais [14] .....	29
Figura 25 - Elementos axissimétricos [14] .....	30
Figura 26 - a) Elemento de Membrana b) Elemento de Casca c) Elemento de Placa [28] .....	30
Figura 27 - Estrutura passível de análise com o Autodesk Robot Structural Analysis [29].....	33
Figura 28 - Estrutura passível de analisar com o Tricalc [32] .....	34
Figura 29 - Estrutura passível de analisar com o Multiframe [33].....	35
Figura 30 – Simbologia do elemento de barra unidimensional de 2 nós [1] .....	42

Figura 31 – Representação gráfica das funções de interpolação [39].....	43
Figura 32 – Expressão fundamental do PTV [26].....	45
Figura 33 – Sistemas de coordenadas [1].....	46
Figura 34 – Projeções do deslocamento local [1].....	47
Figura 35 – Simbologia do elemento de barra unidimensional de 3 nós .....	49
Figura 36 – Representação gráfica das funções de interpolação [39].....	50
Figura 37 – Sistemas de coordenadas locais e globais .....	52
Figura 38 – Projeções do deslocamento local .....	52
Figura 39 – Modelo utilizado como exercício exemplo [39].....	55
Figura 40 – Primeiro modelo utilizado na reformulação da transformação de coordenadas.....	59
Figura 41 – Resultados obtidos com recurso ao FTOOL .....	62
Figura 42 – Segundo exercício modelo.....	62
Figura 43 – Primeiro estado de deformação analisado.....	65
Figura 44 – Segundo estado de deformação analisado.....	66
Figura 45 – Terceiro estado de deformação analisado .....	66
Figura 46 – Quarto estado de deformação analisado .....	67
Figura 47 – Quinto estado de deformação analisado.....	67
Figura 48 – Sexto estado de deformação analisado.....	68
Figura 49 – Sétimo estado de deformação analisado .....	69
Figura 50 – Utilização de elementos de barra lineares na aproximação da solução exata [26].....	74
Figura 51 – Problema modelo 1, elemento de barra.....	75
Figura 52 – Resultados obtidos no FTOOL - Esforço axial e reações nos apoios .....	76
Figura 53 – Resultados obtidos no FTOOL – Deslocamentos .....	77
Figura 54 – Modelo em robot do primeiro problema modelo .....	77
Figura 55 – Propriedades do elemento .....	77
Figura 56 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	78
Figura 57 – Forças axiais e tensões axiais no elemento .....	78
Figura 58 – Segundo modelo em robot do primeiro problema modelo .....	78
Figura 59 – Propriedades dos elementos .....	79
Figura 60 – Reações nos apoios e deslocamentos .....	79
Figura 61 – Força axial e tensão axial nos elementos .....	79
Figura 62 – Problema modelo 2 para o elemento de barra [1] .....	79

Figura 63 – Modelo em <i>robot</i> do segundo problema modelo .....	82
Figura 64 – Propriedades dos elementos .....	82
Figura 65 – Reações nos apoios e deslocamentos .....	83
Figura 66 – Força axial e tensão axial nos elementos .....	83
Figura 67 – Deslocamentos obtidos considerando elementos de 3 nós .....	83
Figura 68 – Deformação prevista para a estrutura com recurso a uma análise geométrica .....	84
Figura 69 – Segundo modelo em <i>robot</i> do segundo problema modelo .....	84
Figura 70 – Propriedades dos elementos .....	85
Figura 71 – Reações nos apoios e deslocamentos .....	85
Figura 72 – Força axial e tensão axial nos elementos .....	86
Figura 73 – Problema modelo 3, elemento de barra [1] .....	86
Figura 74 – Modelo em <i>robot</i> do terceiro problema modelo .....	88
Figura 75 – Propriedades dos elementos .....	89
Figura 76 – Reações nos apoios e Deslocamentos .....	89
Figura 77 – Força axial e tensão axial nos elementos .....	89
Figura 78 – Deslocamentos expectáveis para os nós centrais de cada elemento (escala x10000) .....	90
Figura 79 – Simbologia do elemento de viga de 2 nós [1] .....	91
Figura 80 – Representação gráfica das funções de interpolação [39] .....	93
Figura 81 – Convenção de sinais .....	94
Figura 82 – Simbologia do elemento de viga unidimensional de 3 nós .....	96
Figura 83 – Representação gráfica das funções de interpolação do elemento de viga quadrático .....	97
Figura 84 – 1º problema modelo para o elemento de viga [1] .....	100
Figura 85 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte e esforços atuantes .....	103
Figura 86 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios .....	103
Figura 87 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos .....	103
Figura 88 – Modelo em <i>robot</i> do primeiro problema modelo para o elemento de viga .....	104
Figura 89 – Propriedades dos elementos .....	104
Figura 90 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	104
Figura 91 – Tensões e esforços internos .....	104
Figura 92 – Convenção de sinais do <i>software</i> Robot Structural Analysis [42] .....	105
Figura 93 – 2º problema modelo para o elemento de viga [1] .....	105
Figura 94 – Resultados obtidos no FTOOL – esforços atuantes e esforço de corte .....	108

Figura 95 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios .....	109
Figura 96 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos .....	109
Figura 97 – Modelo em <i>robot</i> do segundo problema modelo do elemento de viga.....	109
Figura 98 – Propriedades dos elementos .....	109
Figura 99 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	110
Figura 100 – Tensões e esforços internos .....	110
Figura 101 – 3º problema modelo do elemento de viga.....	110
Figura 102 – Resultados obtidos no FTOOL – esforços atuantes e esforço corte .....	114
Figura 103 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios .....	114
Figura 104 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos .....	114
Figura 105 – Modelo em <i>robot</i> do terceiro problema modelo do elemento de viga.....	114
Figura 106 – Propriedades dos elementos .....	115
Figura 107 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	115
Figura 108 – Tensões e esforços internos .....	115
Figura 109 – 4º problema modelo para o elemento de viga [1] .....	116
Figura 110 – Resultados obtidos no FTOOL – esforços atuantes e esforço corte .....	118
Figura 111 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios .....	119
Figura 112 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos .....	119
Figura 113 – Modelo em <i>robot</i> do quarto problema modelo do elemento de viga .....	119
Figura 114 – Propriedades dos elementos .....	119
Figura 115 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	119
Figura 116 – Tensões e esforços internos .....	120
Figura 117 – Simbologia do elemento de estrutura de 2 nós [1] .....	121
Figura 118 – Sistemas de coordenadas para o elemento de estrutura [1] .....	122
Figura 119 – Projeções das variáveis de campo do elemento de estrutura [1] .....	123
Figura 120 – Simbologia do elemento de estrutura de 3 nós .....	124
Figura 121 – Sistemas de coordenadas para o elemento de estrutura quadrático [1] .....	126
Figura 122 – Exemplo utilizado para comparação dos resultados obtidos com recurso a elementos de estrutura lineares e quadráticos. (A) Problema Modelo; (B) Discretização com 3 elementos de estrutura lineares; (C) Discretização com 11 elementos de estrutura lineares; (D) Discretização com 2 elementos de estrutura quadráticos .....	129
Figura 123 – 1º problema modelo utilizado na análise do elemento de estrutura [1] .....	131
Figura 124 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço axiais, esforços atuantes e reações nos apoios ....	135

Figura 125 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte .....	136
Figura 126 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos .....	136
Figura 127 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos globais .....	136
Figura 128 – Modelo em robot do primeiro problema modelo utilizado na validação das formulações do elemento de estrutura .....	137
Figura 129 – Propriedades dos elementos .....	137
Figura 130 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	137
Figura 131 – Tensões e esforços internos .....	138
Figura 132 – 2º problema modelo utilizado na análise do elemento de estrutura [1] .....	138
Figura 133 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço axiais, esforços atuantes e reações nos apoios ....	143
Figura 134 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte .....	143
Figura 135 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos .....	143
Figura 136 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos globais .....	143
Figura 137 – Modelo em robot do segundo problema modelo utilizado na validação das formulações do elemento de estrutura .....	144
Figura 138 – Propriedades dos elementos .....	144
Figura 139 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	144
Figura 140 – Tensões e esforços internos .....	145
Figura 141 – 3º problema modelo utilizado na análise do elemento de estrutura .....	145
Figura 142 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço axiais, esforços atuantes e reações nos apoios ....	152
Figura 143 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte .....	152
Figura 144 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos .....	152
Figura 145 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos globais .....	153
Figura 146 – Modelo em robot do terceiro problema modelo utilizado na validação das formulações do elemento de estrutura .....	153
Figura 147 – Propriedades dos elementos .....	154
Figura 148 – Deslocamentos e reações nos apoios .....	154
Figura 149 – Tensões e esforços internos .....	154
Figura 150 – Estrutura do programa FELP .....	156
Figura 151 – <i>Layout</i> 1: arranque do programa .....	156
Figura 152 – <i>Layout</i> 2: créditos .....	157
Figura 153 – <i>Layout</i> 3: seleção do modelo .....	158
Figura 154 – <i>Layout</i> 4: janela de trabalho .....	160

Figura 155 – Função utilizada para estilizar a barra de menu .....	162
Figura 156 – Informação na base de dados para perfis do tipo UPN .....	163
Figura 157 – Posição do eixo local na secção .....	163
Figura 158 – Excerto do código que permite a leitura da base de dados e o respetivo armazenamento da informação na raiz .....	164
Figura 159 – Janela de início do programa .....	165
Figura 160 – a) janela fase dos créditos com idioma em português; b) janela fase dos créditos com idioma em inglês .....	166
Figura 161 – Janela de seleção do modelo de estrutura a analisar .....	166
Figura 162 – Janela de trabalho (modelo de barra) .....	167
Figura 163 – Barra lateral de ferramentas com botões definir/remover elemento, remover elemento e dividir elementos assinalados .....	167
Figura 164 – Submenu do menu geometria nos dois idiomas disponíveis .....	167
Figura 165 – Submenu do menu arquivo .....	168
Figura 166 – Barra de ferramentas superior .....	168
Figura 167 – Janela do explorador de ficheiros que permite importar um ficheiro do tipo .dxf .....	168
Figura 168 – Mensagem de erro na importação de extensões de ficheiro inválidas .....	169
Figura 169 – Excerto do código que realiza a verificação da extensão do ficheiro [autor] .....	169
Figura 170 – Janela definir grelha .....	170
Figura 171 – Exemplo de uma grelha de pontos ativa na área de trabalho .....	171
Figura 172 – Janela definir/remover elementos .....	172
Figura 173 – Mensagem de erro na inserção de elementos com a mesma numeração .....	174
Figura 174 – Janela dividir elementos .....	175
Figura 175 – Mensagem de erro que surge quando os elementos selecionados não se intersejam .....	176
Figura 176 – Janela da funcionalidade numerar elementos e nós .....	176
Figura 177 – Menu propriedades .....	178
Figura 178 – Barra de ferramentas lateral com botões de atalho do menu propriedades assinaladas .....	178
Figura 179 – Janela definir/remover secções, secção padrão .....	179
Figura 180 – Janela definir/remover secções, secção paramétrica .....	179
Figura 181 – Janela definir/remover secções, secção genérica .....	179
Figura 182 – Tipos de secções paramétricas .....	181
Figura 183 – Mensagem de erro que informa que as propriedades geométricas se encontram definidas .....	181

Figura 184 – Janela definir/remover material .....	181
Figura 185 - Opção elementos de barra linear ativa .....	182
Figura 186 – Menu condições.....	183
Figura 187 – Botões de atalho das funcionalidades definir apoios e definir carregamentos.....	183
Figura 188 – Janela definir apoios, modelo de barra .....	183
Figura 189 – Mensagem de erro para ângulos de apoios inválidos .....	184
Figura 190 – Tipos de apoios do programa: a) apoio simples; b) apoio duplo; c) encastramento.....	184
Figura 191 – Excerto do código do elemento de estrutura que lida com as rotações de apoios.....	185
Figura 192 – Janela definir carregamentos .....	186
Figura 193 – Modelo de estrutura, exemplo de um pórtico .....	187
Figura 194 – Menu vista .....	188
Figura 195 – Menu análise .....	188
Figura 196 - Mensagem de erro despoletada quando o modelo em análise é instável.....	189
Figura 197 – Menu e pop-up resultados .....	190
Figura 198 – Opções da funcionalidade ativas para o modelo de barra: a) diagramas; b) mapas de cores .....	191
Figura 199 - Exemplo de resultados apresentados sobre a forma de tabela .....	191
Figura 200 – a) diagrama da estrutura deformada; b) diagrama das forças axiais .....	192
Figura 201 – Mapas de cores da tensão normal (axial).....	192
Figura 202 – Primeiro problema modelo de barra definido no programa FELP.....	193
Figura 203 – Resultados do primeiro problema modelo (linear). a) estrutura deformada; b) esforços axiais .....	193
Figura 204 – Resultados do primeiro problema modelo (linear), tensão normal (axial) .....	193
Figura 205 – Resultados do primeiro problema modelo (linear). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças axiais; e) tensão normal axial.....	194
Figura 206 – Resultados do primeiro problema modelo (quadrático). a) estrutura deformada; b) esforços axiais .....	194
Figura 207 – Resultados do primeiro problema modelo (quadráticos), tensão normal (axial).....	194
Figura 208 – Resultados do primeiro problema modelo (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças axiais; e) tensão normal axial.....	195
Figura 209 – Terceiro problema modelo de barra definido no programa FELP .....	195
Figura 210 – Resultados do terceiro problema modelo (linear). a) estrutura deformada; b) esforços axiais .....	195
Figura 211 – Resultados do terceiro problema modelo (linear), tensão normal (axial).....	196

Figura 212 – Resultados do terceiro problema modelo (linear). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças axiais; e) tensão normal axial.....	196
Figura 213 – Resultados do terceiro problema modelo (quadrático). a) estrutura deformada; b) esforços axiais .....	196
Figura 214 – Resultados do terceiro problema modelo (quadrático), tensão normal (axial) .....	197
Figura 215 – Resultados do terceiro problema modelo (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças axiais; e) tensão normal axial.....	197
Figura 216 - Primeiro problema modelo de viga definido no programa FELP.....	198
Figura 217 – Resultados do primeiro problema modelo de viga (linear). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores .....	198
Figura 218 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores) .....	198
Figura 219 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão corte .....	199
Figura 220 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores) .....	199
Figura 221 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores).....	199
Figura 222 – Resultados do primeiro problema modelo de viga (linear). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões.....	200
Figura 223 – Resultados do primeiro problema modelo de viga (quadráticos). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores.....	200
Figura 224 – Resultados do primeiro problema modelo viga (quadráticos), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores).....	200
Figura 225 – Resultados do primeiro problema modelo viga (quadráticos), tensão corte .....	201
Figura 226 – Resultados do primeiro problema modelo viga (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras superiores e fibras inferiores).....	201
Figura 227 – Resultados do primeiro problema modelo de viga (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões .....	201
Figura 228 – Terceiro problema modelo de viga definido no programa FELP .....	202
Figura 229 – Resultados do terceiro problema modelo de viga (linear). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores .....	202
Figura 230 – Resultados do terceiro problema modelo viga (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores) .....	202
Figura 231 – Resultados do terceiro problema modelo viga (linear), tensão corte .....	203
Figura 232 – Resultados do terceiro problema modelo viga (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores e fibras inferiores) .....	203
Figura 233 – Resultados do terceiro problema modelo de viga (linear). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões.....	203

Figura 234 – Resultados do terceiro problema modelo de viga (quadrático). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores.....	204
Figura 235 – Resultados do terceiro problema modelo viga (quadrático), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores).....	204
Figura 236 – Resultados do terceiro problema modelo viga (quadrático), tensão corte.....	204
Figura 237 – Resultados do terceiro problema modelo viga (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras superiores e fibras inferiores).....	205
Figura 238 – Resultados do terceiro problema modelo de viga (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões .....	205
Figura 239 – Primeiro problema modelo de estrutura definido no programa FELP .....	206
Figura 240 – Resultados do primeiro problema modelo de estrutura (linear). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores .....	206
Figura 241 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (axial).....	207
Figura 242 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores).....	207
Figura 243 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão corte .....	208
Figura 244 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores).....	208
Figura 245 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores) .....	209
Figura 246 – Resultados do primeiro problema modelo de estrutura (linear). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões .....	209
Figura 247 – Resultados do primeiro problema modelo de estrutura (quadrático). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores.....	210
Figura 248 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (axial) .	210
Figura 249 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores).....	211
Figura 250 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão corte .....	211
Figura 251 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras superiores).....	212
Figura 252 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores) .....	212
Figura 253 – Resultados do primeiro problema modelo de estrutura (quadráticos). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões .....	213
Figura 254 – Terceiro problema modelo de estrutura definido no programa FELP.....	213
Figura 255 – Resultados do terceiro problema modelo de estrutura (linear). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores.....	214
Figura 256 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (axial).....	214

---

Figura 257 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores).....	215
Figura 258 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão corte .....	215
Figura 259 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores).....	216
Figura 260 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores) .....	216
Figura 261 – Resultados do terceiro problema modelo de estrutura (linear). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões .....	217
Figura 262 – Resultados do terceiro problema modelo de estrutura (quadrático). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores.....	217
Figura 263 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (axial) ..	218
Figura 264 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores).....	218
Figura 265 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão corte .....	219
Figura 266 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras superiores).....	219
Figura 267 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores) .....	220
Figura 268 – Resultados do terceiro problema modelo de estrutura (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões .....	220

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do exercício exemplo da referência [39].....	56
Tabela 2 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro exercício modelo.....	60
Tabela 3 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo exercício modelo.....	62
Tabela 4 – Formulação algébrica para o primeiro estado de deformação.....	65
Tabela 5 – Formulação algébrica para o segundo estado de deformação.....	66
Tabela 6 – Formulação algébrica para o terceiro estado de deformação.....	66
Tabela 7 – Formulação algébrica para o quarto estado de deformação.....	67
Tabela 8 – Formulação algébrica para o quinto estado de deformação.....	68
Tabela 9 – Formulação algébrica para o sexto estado de deformação.....	68
Tabela 10 – Formulação algébrica para o sétimo estado de deformação.....	69
Tabela 11 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro problema modelo. ..	75
Tabela 12 – Resultados obtidos na solução do primeiro problema modelo, através de diferentes métodos. ....	76
Tabela 13 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo problema modelo....	80
Tabela 14 – Resultados obtidos na solução do segundo problema modelo, através de diferentes métodos. ....	80
Tabela 15 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do terceiro problema modelo.....	86
Tabela 16 – Resultados obtidos na solução do terceiro problema modelo, através de diferentes métodos. ....	87
Tabela 17 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro problema modelo do elemento de viga. ....	101
Tabela 18 – Resultados obtidos na solução do primeiro problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.....	101
Tabela 19 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo problema modelo para o elemento de viga. ....	105
Tabela 20 – Resultados obtidos na solução do segundo problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.....	106
Tabela 21 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do terceiro problema modelo para o elemento de viga. ....	111
Tabela 22 – Resultados obtidos na solução do terceiro problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.....	111
Tabela 23 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do quarto problema modelo do elemento de viga. ....	116

---

Tabela 24 – Resultados obtidos na solução do quarto problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.....	117
Tabela 25 – Comparação dos resultados obtidos, para o esforço axial, entre cada modelo e a solução exata. ....	129
Tabela 26 – Comparação dos resultados obtidos, para o esforço de corte, entre cada modelo e a solução exata. ....	129
Tabela 27 – Comparação dos resultados obtidos, para o momento fletor, entre cada modelo e a solução exata. ....	130
Tabela 28 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro problema modelo do elemento de estrutura.....	131
Tabela 29 – Resultados obtidos para a solução do primeiro problema modelo (com elementos de estrutura) através de diferentes métodos.....	132
Tabela 30 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo problema modelo do elemento de estrutura.....	139
Tabela 31 – Resultados obtidos para a solução do segundo problema modelo (com elementos de estrutura) através de diferentes métodos.....	139
Tabela 32 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do terceiro problema modelo do elemento de estrutura.....	146
Tabela 33 – Resultados obtidos para a solução do terceiro problema modelo (com elementos de estrutura) através de diferentes métodos.....	146
Tabela 34 – Principais variáveis criadas na fase definir estrutura.....	178
Tabela 35 – Principais variáveis criadas na fase definir propriedades. ....	182
Tabela 36 – Principais variáveis criadas nas fases definir condições e análise.....	189

# ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO .....	3
1.1	Contextualização .....	3
1.2	Objetivos .....	3
1.3	Organização do relatório .....	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	9
2.1	O Método de Elementos Finitos.....	9
2.1.1	A evolução do método de elementos finitos .....	10
2.1.2	Princípios gerais do Método de Elementos Finitos .....	14
2.1.3	Potencialidades .....	18
2.1.4	Aplicações do método de elementos finitos .....	20
2.1.5	Técnica do método de elementos finitos .....	22
2.1.6	Tipos de Elementos Finitos para análise estrutural.....	27
2.1.7	<i>Softwares</i> disponíveis para análise estrutural.....	31
2.2	<i>Softwares</i> de computação e visualização gráfica .....	35
2.2.1	Características gerais dos <i>softwares</i> existentes no mercado .....	35
2.2.2	Funcionalidades pretendidas para o <i>software</i> a desenvolver.....	36
2.2.3	Seleção do <i>software</i> a utilizar no desenvolvimento deste trabalho .....	37
3	DESENVOLVIMENTO .....	41
3.1	Formulação dos elementos a implementar .....	41
3.1.1	Elementos de barra 2D.....	41
3.1.1.1	Formulação linear .....	41
3.1.1.1.1	Transformação de coordenadas .....	46
3.1.1.1.2	Estado de tensão.....	48
3.1.1.2	Formulação quadrática .....	49
3.1.1.2.1	Transformação de coordenadas .....	52
3.1.1.2.1.1	Análise crítica da formulação.....	53
3.1.1.2.1.2	Reformulações analisadas.....	59

3.1.1.2.1.3	Reformulação da transformação de coordenadas.....	70
3.1.1.2.2	Estado de tensão.....	71
3.1.1.3	Comparação das formulações linear e quadrática .....	73
3.1.1.4	Validação das formulações .....	74
3.1.2	Elemento de viga 2D.....	90
3.1.2.1	Formulação linear .....	91
3.1.2.1.1	Estado de tensão.....	95
3.1.2.2	Formulação quadrática .....	96
3.1.2.2.1	Estado de tensão.....	99
3.1.2.3	Comparação das formulações linear e quadrática .....	99
3.1.2.4	Validação das formulações .....	100
3.1.3	Elemento de estrutura 2D .....	120
3.1.3.1	Formulação linear .....	120
3.1.3.1.1	Transformação de coordenadas .....	122
3.1.3.1.2	Estado de tensão.....	124
3.1.3.2	Formulação quadrática .....	124
3.1.3.2.1	Transformação de coordenadas .....	126
3.1.3.2.2	Estado de tensão.....	127
3.1.3.3	Comparação das formulações linear e quadrática .....	128
3.1.3.4	Validação das formulações .....	131
<b>3.2</b>	<b>Desenvolvimento do <i>software</i> .....</b>	<b>155</b>
3.2.1	Estrutura.....	155
3.2.2	Métodos de programação .....	160
3.2.3	Bases de dados .....	163
3.2.4	Funcionamento do <i>software</i> .....	164
3.2.4.1	Arranque do programa .....	165
3.2.4.2	Seleção do modelo de estrutura a analisar .....	166
3.2.4.3	Definição da geometria a analisar .....	167
3.2.4.4	Introdução das propriedades dos elementos .....	178
3.2.4.5	Introdução das condições fronteira, carregamentos e análise do problema .....	183
3.2.4.6	Apresentação de resultados .....	190
3.2.5	Validação do <i>software</i> desenvolvido.....	192

---

3.2.5.1	Elementos de barra 2D .....	192
3.2.5.2	Elementos de viga 2D .....	198
3.2.5.3	Elementos de estrutura 2D .....	206
4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	225
5	BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO.....	231
6	ANEXOS.....	239
6.1	<b>ANEXO1: Código em Matlab® que permite a resolução do terceiro problema modelo do elemento de barra quadrático, através da análise geométrica .....</b>	<b>239</b>



# INTRODUÇÃO

- 1.1 Contextualização
- 1.2 Objetivos
- 1.3 Organização do relatório



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

No projeto de qualquer tipo de estrutura, seja esta um pavilhão ou uma simples treliça de cobertura, a fase de análise estrutural é uma fase primordial que permite determinar os efeitos que os esforços provocam na estrutura e antecipa qualquer fase de dimensionamento conforme a legislação em vigor. Simultaneamente, é cada vez mais relevante que o engenheiro consiga definir um modelo de cálculo que seja representativo da realidade e, portanto, cujos resultados obtidos retratem o comportamento aproximado da estrutura real. Consequentemente, nos últimos anos os modelos experimentais e gráficos têm de uma forma generalizada vindo a ser substituídos por modelos numéricos como o MEF, dada a sua versatilidade.

O MEF tem sido amplamente integrado em diversos programas de análise e dimensionamento estrutural e encontra-se atualmente acessível à generalidade dos projetistas de estruturas. Contudo, na maioria dos programas comercializados o projetista não tem acesso ao código fonte do programa que se encontra a utilizar e, diversas vezes, desconhece as características do modelo utilizado na análise. Igualmente, em determinadas circunstâncias e sem a formação devida, a definição do modelo de análise pode revelar-se complexa e tornar-se numa potencial fonte de erros.

Assim sendo, e com vista a reduzir a introdução de potenciais fontes de erro na modelação da estrutura, pretende-se desenvolver um programa que seja intuitivo e execute diversas verificações automáticas ao longo das diversas fases de modelação da estrutura. Paralelamente, o programa desenvolvido coloca à disposição do projetista diferentes tipos de modelo de análise e informa-o das limitações de cada método. Salienta-se ainda que o programa desenvolvido é um programa de acesso livre, o que não é equiparável com os *softwares* atualmente disponibilizados no mercado para a análise de estruturas.

## 1.2 Objetivos

Pretende-se com o trabalho desenvolvido nesta dissertação criar um programa através do *software* Matlab® que permita ao utilizador analisar estruturas reticuladas bidimensionais com ligação contínua ou articulada, através do MEF. A criação deste programa pressupõe a passagem pelas seguintes fases:

- Utilização de uma das técnicas do MEF, o Método dos Deslocamentos, para desenvolver as formulações lineares e quadráticas dos elementos unidimensionais de barra, viga e estrutura, e respetiva transformação de coordenadas para duas dimensões;
- Desenvolvimento das rotinas de cálculo no *software* Matlab® para as formulações lineares e quadráticas;
- Desenvolver uma interface gráfica que permita ao utilizador seleccionar o tipo de modelo de análise (modelo de barra, modelo de viga ou modelo de estrutura);
- Desenvolver uma interface gráfica intuitiva que permita ao utilizador definir a geometria da estrutura, através da introdução das coordenadas dos nós, através do desenho da estrutura ou através da importação de um ficheiro do tipo .dxf;
- Desenvolver todas as funcionalidades que permitam ao utilizador introduzir os parâmetros necessários à correta resolução do problema em análise (definir propriedades e condições);
- Integrar as rotinas de cálculo com a interface gráfica, e permitir que o utilizador opte pelo tipo de formulação na base do estudo;
- Obter a solução do problema em análise após o processamento pelo código desenvolvido. A solução deve conter e permitir visualizar as variáveis primárias e secundárias da estrutura sobre a forma de tabelas (esforços axiais, transversos e momentos flectores, deformações e tensões instaladas e ainda reacções nos apoios);
- O programa deve ainda permitir ao utilizador visualizar a solução das variáveis primárias e secundárias da estrutura sobre a forma gráfica de diagramas, ou mapas de cores.

### 1.3 Organização do relatório

A dissertação encontra-se subdividida em 4 capítulos, cada um destes com as suas respectivas subsecções necessárias à separação dos temas abordados da forma mais conveniente possível, com o intuito de manter o encadeamento natural das matérias descritas ao longo deste trabalho.

#### *Capítulo 1: Introdução*

Com o presente capítulo pretende-se *contextualizar* o tema abordado e expor os *objetivos* que se aspira alcançar. Por fim, aspira-se a que o leitor fique com uma visão geral da *organização* do presente documento.

## Capítulo 2: Revisão Bibliográfica

Pretende-se com este capítulo que o leitor obtenha uma visão geral sobre o MEF assim como do *software* utilizado no desenvolvimento da aplicação e propiciar uma ideia geral dos *softwares* disponíveis no mercado e das suas potencialidades. Este capítulo aborda assim um *enquadramento histórico* do MEF onde se pode consultar os *princípios gerais* do MEF assim como as suas *potencialidades* e diferentes campos de *aplicação*. Consideram-se análises lineares elásticas ou análises não lineares, sejam estas materiais ou geométricas, que são muito aplicadas por exemplo, na indústria automóvel, uma vez que permitem a realização de estudos de *crash tests* [1]. Ainda neste capítulo, realiza-se uma abordagem ao tema dos *elementos finitos* mais comumente utilizados e as *técnicas* utilizadas para obter as formulações destes elementos. A título de exemplo, neste capítulo podem-se encontrar referências ao Método dos Deslocamentos assim como ao Método das Forças, entre outros métodos referenciados no presente texto. Por fim, este capítulo contém uma descrição de *softwares* que permitem realizar os mais variados tipos de estudos em diferentes campos de aplicação desde a área da engenharia à área da medicina. Para este efeito, descrevem-se algumas das potencialidades dos *softwares* abordados e é realizada uma abordagem mais pormenorizada ao *software (Matlab®)* selecionado para o desenvolvimento da ferramenta informática.

## Capítulo 3: Desenvolvimento

### Capítulo 3.1: Formulação dos elementos a implementar

As formulações dos elementos que se pretendem estudar e necessárias à realização do programa em Matlab® são alvo de estudo neste capítulo. Este contém as formulações matemáticas e explicações necessárias à obtenção dos elementos de *barra*, *viga* e *estrutura* unidimensionais. Mais concretamente, são descritas as *formulações lineares* e *quadráticas* para cada um destes elementos, onde se demonstram por exemplo as considerações a ter na definição do polinómio a partir do qual se obtêm as funções de interpolação, entre outros passos que permitem por exemplo deduzir a matriz de rigidez para cada elemento. Posteriormente é apresentada uma *comparação*, para cada elemento, entre cada uma das formulações e explicadas as vantagens e desvantagens na utilização de cada uma das formulações (linear ou quadrática). Por último, procede-se à *validação* das formulações realizadas para cada elemento, aplicando-as na resolução de 3 problemas modelo encontrados na literatura, e comparam-se os resultados com os obtidos através da utilização de *softwares* comumente utilizados no mercado.

### Capítulo 3.2: Desenvolvimento do software

São aqui incluídos todos os passos necessários ao desenvolvimento do *software*, desde a *estrutura* do programa, o *método de programação* utilizado e as bases de dados necessárias ao correto funcionamento deste. Neste capítulo é ainda demonstrado de

forma detalhada e explicado passo a passo o funcionamento do programa, desde o *arranque* até à *apresentação dos resultados*. A título de exemplo, alguns dos passos intermédios que se podem consultar consistem na *seleção do modelo de estrutura a analisar* pelo utilizador, a *definição da geometria* que se pretende estudar, assim como a introdução das *condições fronteira e carregamentos* a que esta está sujeita, entre outros. Por último, ainda neste capítulo, podem ser consultadas todas as *validações* efetuadas ao *software* desenvolvido, desde comparações com a solução exata obtida pela mecânica dos materiais, assim como comparações com outros *softwares* comercializados.

### Capítulo 5: Conclusões

Este capítulo é destinado às conclusões retiradas ao longo do desenvolvimento deste documento, assim como feitas referências a futuros desenvolvimentos com base na dissertação elaborada.

Complementarmente, incluem-se no final desta dissertação todas as referências documentais utilizadas e anexos cujo conteúdo não foi introduzido no corpo principal por forma a não tornar o mesmo demasiado extenso e disperso.

# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

## **2.1 O Método de Elementos Finitos**

- 2.1.1 A evolução do método de elementos finitos
- 2.1.2 Princípios gerais do Método de Elementos Finitos
- 2.1.3 Potencialidades
- 2.1.4 Aplicações do método de elementos finitos
- 2.1.5 Técnica do método de elementos finitos
- 2.1.6 Tipos de Elementos Finitos para análise estrutural
- 2.1.7 *Softwares* disponíveis para análise estrutural

## **2.2 *Softwares* de computação e visualização gráfica**

- 2.2.1 Características gerais dos *softwares* existentes no mercado
- 2.2.2 Funcionalidades pretendidas para o *software* a desenvolver
- 2.2.3 Seleção do *software* a utilizar no desenvolvimento deste trabalho



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 O Método de Elementos Finitos

O MEF quando aplicado à análise de estruturas têm como principal objetivo determinar o estado de tensão e deformação de um determinado elemento, independentemente da sua geometria, quando sujeito a ações externas [2]. Antes do aparecimento deste método a resolução de problemas em meios contínuos era obtida através de sistemas de equações de derivadas parciais que regiam o fenómeno, tendo em consideração as condições fronteira. Dada a complexidade de aplicação desta técnica a problemas de difícil resolução recorria-se recorrentemente às séries de Fourier, assim como a outros métodos, especialmente ao método das diferenças finitas, este por consequência a determinada altura obrigava à resolução de grandes sistemas de equações lineares. Finalmente na década de 60 presenciou-se um grande avanço no MEF e este, coincidiu com a proliferação dos computadores. Como efeito, passou a ser uma prática corrente o seu uso na resolução de problemas de grande complexidade (por exemplo geometrias arbitrárias, que fogem ao comumente publicado em tabelas ou ábacos), o avanço foi de tal forma significativo que os outros métodos caíram em desuso [2].

O MEF consiste num método de análise de formulações matemáticas de problemas físicos em meios contínuos. Estas formulações são normalmente obtidas através da resolução de equações diferenciais ou integrais em função das suas respetivas condições fronteira [3]. Este método consiste na subdivisão de domínios, ou seja, em dividir um domínio num número finito de subdomínios (elementos finitos), convertendo-se o contínuo em discreto. É este processo que direciona a uma solução aproximada do problema em todo o seu domínio e que é obtida com recurso a funções de interpolação. Este processo de dividir os domínios de integração em domínios de menor dimensão (malhas ou *grid*) é denominado por discretização Figura 1 [1].

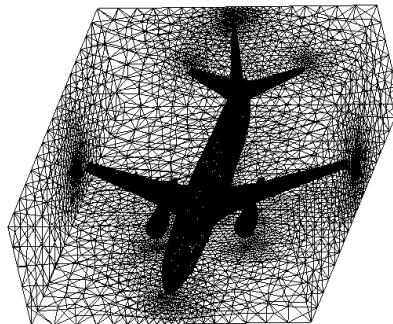


Figura 1 – Discretização [3]

Em conclusão a esta pequena introdução, refere-se que as formulações do MEF podem-se basear em várias técnicas, método dos deslocamentos, métodos híbridos e mistos ou modelos de equilíbrio, sendo que aquele que é de mais fácil interpretação e apresenta uma maior simplicidade na sua utilização é o método dos deslocamentos.

### 2.1.1 A evolução do método de elementos finitos

O estudo da resistência dos materiais já data desde as origens da civilização onde se podem encontrar registos dos esforços para entender e metodizar a construção de edifícios. Isto impulsiona o Homem num estudo cada vez mais aprofundado da resistência dos materiais como forma de superar os limites que lhe são impostos e otimizar os seus progressos. Pode-se encontrar os primeiros registos históricos de problemas de aritmética e geometria no papiro de Rhind (Figura 2), do qual existe uma cópia datada de 1650 A.C., atribuído ao arquiteto e físico Imhotep responsável pela construção de pirâmides em 2950 A.C. [4].



Figura 2 - Papiro matemático de Rhind [5]

É na Grécia Helenística que se destacam Thales de Mileno e Pitágoras na origem da matemática por volta do século VI A.C.. Thales desenvolveu o método dedutivo, enquanto Pitágoras, entre outras temáticas, estudou a vibração de cordas, que são elementos estruturais simples [4, 6].

Mais tarde em Alexandria, (século IV até 30 A.C.) pode-se destacar Euclides com a publicação de um dos textos mais influentes de sempre “Os Elementos”, entre variados temas que o compõem, pode-se encontrar o estudo entre ângulos e distâncias no espaço. Nesta mesma era destaca-se Arquimedes que, partindo de postulados, desenvolveu as regras da estática que podem ser encontradas no seu livro “Sobre o Equilíbrio de Planos”. Constata-se que o processo de discretizar utilizado pelo MEF é análogo ao processo utilizado por Arquimedes para calcular o perímetro de uma circunferência ao subdividir esta em polígonos [4, 7].

Posteriormente com a herança de conhecimento que os Romanos obtiveram da Grécia antiga, utilizaram em grande escala uma forma geométrica inovadora, que viria a ter grande impacto na arquitetura e engenharia: o Arco (Figura 3).

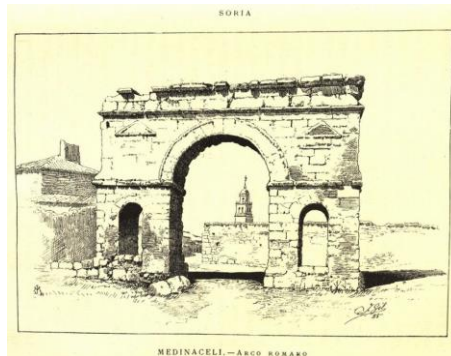


Figura 3 - Arco Romano [8]

Com a queda do Império Romano pode-se afirmar que poucos avanços da ciência existiram durante a idade média na Europa. No entanto, o desenvolvimento da ciência durante este período continuou na Índia e nos Países Árabes, onde se desenvolveram os números Hindu-Árabes e se introduziu o número zero. A Europa retomou o desenvolvimento da ciência moderna com o renascimento particularmente em Itália, onde Leonardo da Vinci (1452-1519) realizou o primeiro estudo ligado à resistência dos materiais, nomeadamente ensaios de tração a fios metálicos. Mas deve-se a Galileu Galilei (1564-1642) a verdadeira abordagem à ciência que se concebe atualmente, no seu livro “Diálogos sobre Duas Novas Ciências”, no qual se pode encontrar nos dois primeiros capítulos, entre outros assuntos, a discussão da mecânica de barras e vigas encastradas (Figura 4) [4].



Figura 4 – Representação de uma viga encastrada, livro de Galileu Galilei [4]

Mais tarde, durante a segunda metade do século XVII, assiste-se à criação das primeiras sociedades científicas modernas: a *Royal Society* em Londres e a *Académie des Sciences de Paris*. Robert Hooke (1653-1703) realizou estudos experimentais ao serviço da *Royal Society* e em 1676, publicou a Lei de Hooke, uma das maiores contribuições no estudo da mecânica dos materiais elásticos. Na mesma época, em Paris, Mariotte (1620-1684) também se dedicava ao estudo da resistência dos materiais, alcançando os mesmos

resultados de Hooke em 1680 de forma independente. Pouco tempo depois aparece um dos maiores nomes de sempre (Sir Isaac Newton) com a publicação do seu livro em 1687 "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" onde descreve as bases da mecânica, desenvolveu o cálculo diferencial e o seu estudo permite não só, o estudo da estática, mas também da dinâmica de estruturas [4, 9].

No século XVIII a mecânica dos materiais teve o seu maior avanço graças aos irmãos Bernoulli. Jacques (1654-1705) dedicou-se principalmente ao estudo do eixo de rotação de vigas e problemas da dinâmica, enquanto Johann (1667-1748) desenvolveu o princípio dos deslocamentos virtuais. Posteriormente Leonhard Euler (1707-1783) publicou vários livros e mais de 400 artigos científicos. Um dos desenvolvimentos mais importantes de Euler consistiu na formulação da teoria de vigas (Euler-Bernoulli) [4, 10].

Em 1759 Joseph Louis Lagrange (1736-1813), por recomendação de Euler, foi eleito membro da Academia de Berlim, onde em 1766 publicou vários trabalhos sobre cálculo variacional. Já no início do século XIX o estudo dos elementos estruturais de formas definidas mudou, e iniciou-se o estudo de elementos sólidos com geometrias tridimensionais e formas arbitrárias. Navier (1785-1836) em 1821 e Cauchy (1789-1857) em 1822 caracterizaram as equações do campo elástico. Ambos apresentaram formulações idênticas apesar de Cauchy afirmar que um material isotrópico era caracterizado por duas constantes enquanto Navier afirmava existir apenas uma. No mesmo período Fourier (1768-1830) desenvolveu a teoria do campo térmico de um corpo com forma genérica, entre outras teorias, como a famosa série de Fourier [4].

Após a formulação do campo elástico presenciou-se um veloz desenvolvimento no que concerne ao estudo de materiais no regime elástico e restava agora resolver os problemas relacionados com as condições fronteira. Dedicaram-se ao estudo deste problema cientistas como Lamé (1795-1870) e Clapeyron (1799-1864). Outros avanços de grande relevância que ocorreram ainda durante o século XIX são atribuídos a Thomas Young (1773-1829) e a Poisson (1781-1840), aos quais se devem os coeficientes essenciais no estudo da resistência dos materiais. É importante salientar que estes investigadores permitiram o término de uma polémica que já perdurava a algumas décadas, pois permitiram provar que um material isotrópico tem na realidade dois coeficientes que o definem [4].

Podem-se destacar outros grandes nomes ainda deste século que estiveram envolvidos no desenvolvimento de teorias relacionados com as energias e a teoria da conservação de energia, como George Green (1793-1841), Helmholtz (1821-1894) e Kelvin (1824-1907), mas sem dúvida que o maior pesquisador na teoria da elasticidade dos materiais foi Barré de Saint Venant (1797-1886). Distinguem-se ainda neste século cientistas de renome como Maxwell (1831-1879), pioneiro no método da fotoelasticidade, Voigt (1850-1919), Mohr (1835-1918) com grandes desenvolvimentos e inovações em métodos gráficos, Castigliano (1847-1884), Rayleigh (John William Strutt 1842-1919), Walter Ritz (1878-1909). O século termina com uma das publicações que mais impacto

provocou no século XX, de A.E.H. Love (1863-1940), intitulado “*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”. Na viragem do século e início do século XX foi Stephen P. Timoshenko (1878-1972) o responsável pela difusão dos métodos analíticos nos Estados Unidos da América. Atualmente os seus textos são mundialmente famosos e adotados por muitas universidades em todo o mundo [4].

No século XX, devido essencialmente ao desenvolvimento da engenharia aeronáutica e o que esta exigia (formas geométricas complexas, otimização peso, etc), foi necessário o desenvolvimento de métodos matriciais, sendo o método das forças e deslocamentos os mais utilizados [4, 11].

Foi em 1943 que o matemático Courant (1888-1972) propôs (modificando a ideia inicial de Gauss) que não se utilizasse uma única função para aproximar a solução de um domínio, mas que se analisasse pequenas partes do domínio com funções válidas para este pequeno domínio. O que Courant propõe é que, por exemplo no estudo de um gráfico de uma parábola, se a aproximação por uma reta à parábola for realizada por mais que uma reta a aproximação será muito mais exata quanto mais retas utilizadas (Figura 5). Contudo, deve-se garantir a continuidade entre cada reta utilizada para que não se obtenha um diferente valor para um mesmo ponto [11].

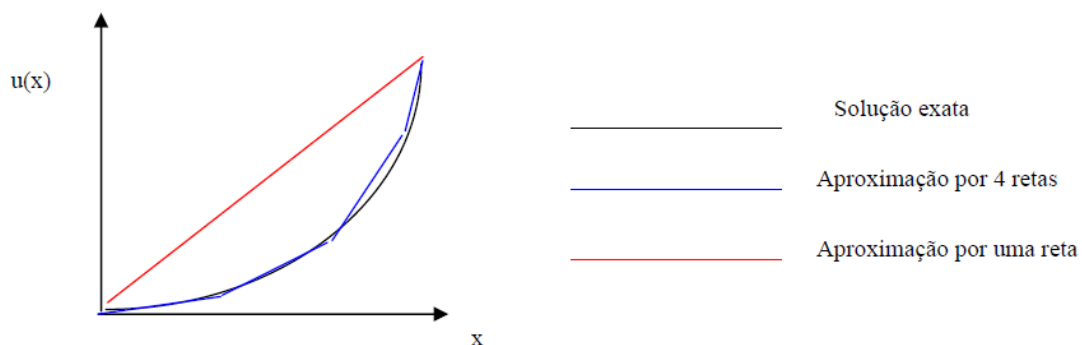


Figura 5 - Exemplo de aproximação por funções contínuas [11]

Apesar de a teoria de Courant fornecer bases sólidas para o MEF, este termo apenas foi introduzido na década de 60 por Ray Clough (1960), no âmbito de uma análise estrutural bidimensional. Todavia é de salientar que, entre a década de 40 a 60 Argyris e Mc Henry impulsionaram o cálculo matricial na análise de estruturas e Hrenikoff sugeriu metodologias para a análise de placas. Já Turner, Clough, Martin e Topp propuseram, com auxílio ao cálculo matricial, que os painéis de uma aeronave fossem modelados a partir de pequenos triângulos que cobrissem toda a área de superfície. O comportamento seria matematicamente descrito, aproximado localmente, e globalmente por compatibilização de cada um dos elementos. Ainda durante a década de 60 e 70, o MEF foi alargado a diferentes tipos de aplicações desde flexão de placas, problemas elásticos tridimensionais, reservatórios de pressão, transferências de calor, escoamentos de fluidos, análises dinâmicas, entre outras aplicações (Melosh, Grafton e Strome, Wilson, Gallagher, Wilson e Nickell, Martin, Turner et al., Archer). Após esta

década de 60 e 70 muitos trabalhos foram realizados no âmbito do MEF. São de salientar os trabalhos de Reddy, Zienkiewicz e Taylor, Huges, Oñate, entre outros. Pode ser consultada a obra de Noor (1991) para uma informação mais detalhada sobre a história do MEF (Figura 6) [1, 6, 11, 12].

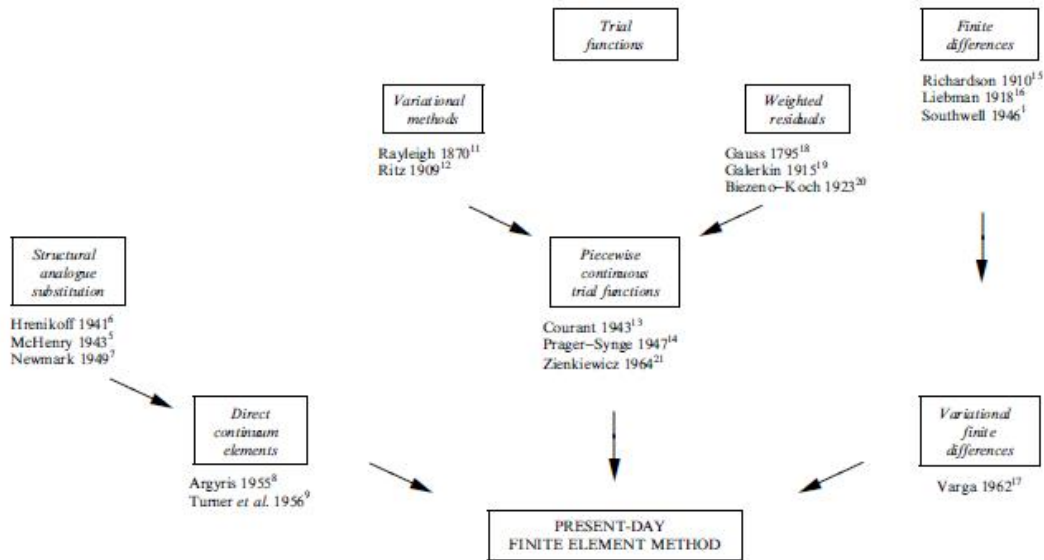


Figura 6 - História do MEF [13]

Nos primórdios do MEF os programas desenvolvidos por este método eram corridos em computadores *mainframe*, mas o primeiro código capaz de analisar centenas de milhares de graus de liberdade foi desenvolvido nos anos 60 (Nastran<sup>TM</sup>). Desde então foram desenvolvidos outros como o Ansys<sup>®</sup>, Abaqus<sup>®</sup> ou o Autodesk<sup>®</sup> Algor. Atualmente, com o desenvolvimento das capacidades de processamento dos computadores, estes códigos encontram-se acessíveis a qualquer utilizador que possua um computador pessoal, permitindo o mais diverso tipo de análises desde escoamento de fluidos, análises estáticas, dinâmicas entre outras possíveis [1]. Este avanço leva à reflexão dos potenciais riscos da disseminação destes códigos, uma vez que estes permitem que qualquer projetista, independentemente dos seus conhecimentos do MEF, utilize um qualquer *software* e seja tentado a aceitar os resultados obtidos sem um pensamento crítico e consciencialização das formulações que estão na base do código utilizado. “Os potenciais perigo de uma utilização nestas condições são a não percepção de eventuais erros na introdução dos dados, a ausência de correspondência entre o modelo selecionado e a estrutura que está a ser analisada...” [2]. Face à quantidade de programas computacionais disponíveis, o utilizador deve questionar-se se compreende os fundamentos que estão na origem do modelo utilizado e estudar com criticismo os resultados obtidos [6].

### 2.1.2 Princípios gerais do Método de Elementos Finitos

Considere-se um dado volume de material com propriedades físicas conhecidas, a formulação pelo MEF requer a existência de uma ou mais equações integrais que

permitam a substituição deste domínio complexo (volume), por um somatório de equações que se estendam aos subdomínios que o definem. Esta metodologia é representada na equação (1) e esta provém da aplicação do método dos resíduos ponderados ou de um princípio variacional [2]. Este processo permite tornar possível a solução de problemas de grande complexidade onde, no domínio em análise, a variável de campo  $\phi(x,y)$  a ser determinada em cada um dos pontos  $P(x,y)$  constituintes do domínio rege-se por leis constitutivas. Estas leis implicam soluções matemáticas exatas sob a forma de formulações algébricas que dependem apenas das variáveis independentes.

$$\int_V f \partial V = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f \partial V . \quad (1)$$

Recorre-se então a técnicas numéricas de forma a se obter uma solução aproximada do domínio em análise, para a correta análise de um domínio. Por isto, procede-se à subdivisão do mesmo em subdomínios contínuos, sendo que estes subdomínios podem ser, por exemplo, um número finito de retângulos (Figura 7).

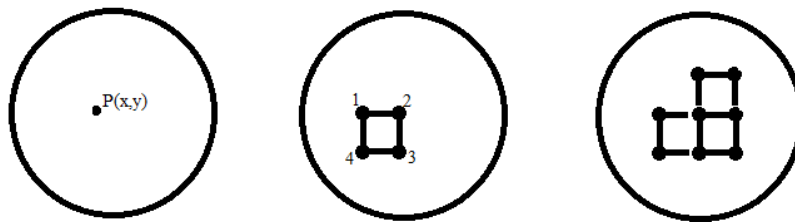


Figura 7 - Subdomínios finitos

Cada um destes subdomínios, como se pode observar na Figura 7, é constituído por quatro nós que definem a fronteira deste subdomínio e que podem ser ligados continuamente a outros subdomínios de forma a conseguir discretizar o domínio. Existem vários tipos de elementos, sendo que o elemento mais usado na discretização de domínios bidimensionais é o elemento triangular, pois permite obter um rigor aceitável na aproximação ao domínio em estudo (pequena distorção do elemento na aproximação do domínio e maior rigor na fronteira do domínio), aliado à simplicidade da formulação. É de igual modo importante salientar que, quanto maior for a aproximação à geometria em análise, mais próxima a solução obtida vai ser da solução exata.

Como resultado do sistema de equações obtido pelo MEF, são obtidas as variáveis de campo na globalidade dos nós da malha. Os valores das mesmas variáveis no interior de cada um dos subdomínios utilizados são obtidos através de funções de interpolação, que no estudo do elemento quadrangular  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$  (nós constituintes do elemento) são interpolados através de funções de interpolação (N) que normalmente são polinomiais e satisfazem as condições específicas nos nós exteriores do elemento

(equação (2)). Assim, quantos mais subdomínios forem utilizados, mais nós definem o domínio em estudo, o que implica maior rigor na aproximação. Contudo, o método de interpolação utilizado acarreta sempre um erro associado, que deve ser cuidadosamente estudado.

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 + N_4(x, y)\phi_4 . \quad (2)$$

O refinamento da malha do elemento finito também influencia o rigor da análise, pois quantos mais elementos forem utilizados no estudo do problema menor vai ser o erro de interpolação. Como exemplo, ao estudar a tração de um corpo que possui uma secção variável ao longo do seu comprimento (Figura 8), consegue-se comprovar pela resistência dos materiais que, quantas mais subsecções se utilizarem para aproximar a forma variável inicial em estudo, mais se aproxima da solução exata do problema. Isto deve-se ao facto de cada um desses elementos definir com maior rigor a área geométrica do sólido que estão a moldar. Pode-se constatar com a Figura 9 que o aumento do número de elementos permite obter uma convergência assintótica para a solução exata, ou seja, menor será o erro relacionado com a aproximação efetuada ao elemento, pois existe cada vez mais aproximação à geometria real. Caso se estude a aproximação de uma parábola por retas, pode-se constatar esta mesma convergência com o aumento do número de retas utilizadas.

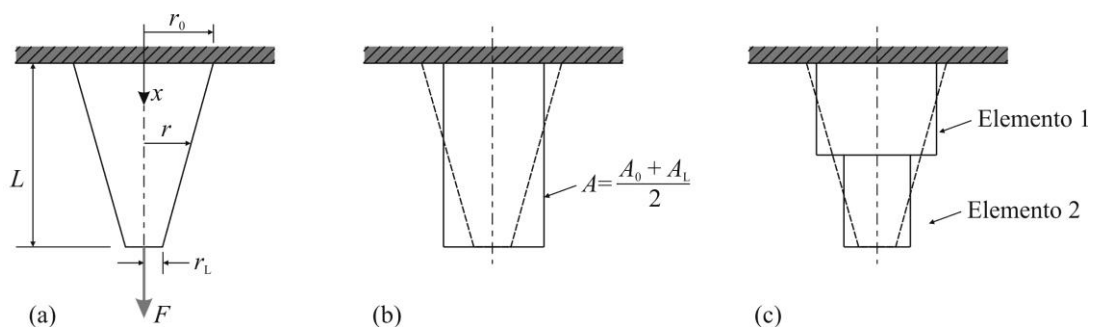


Figura 8 - Aproximação da geometria por elementos [1]

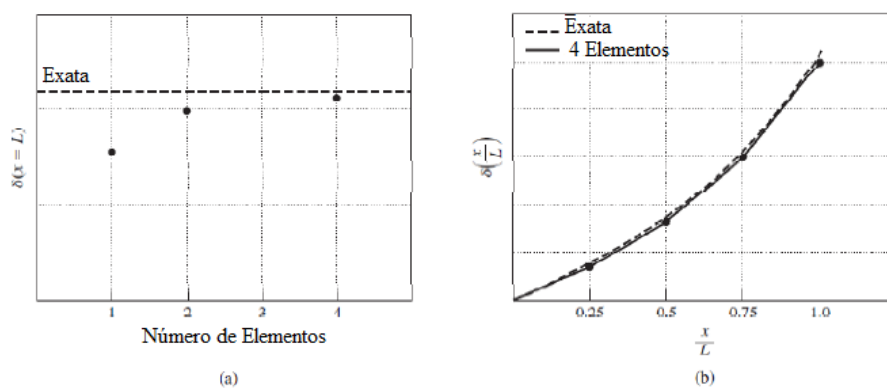


Figura 9 - Convergência assintótica [1]

É importante salientar que, quantos mais elementos forem utilizados, maior será o número de equações e a morosidade de resolução do problema. Desta forma, recorre-se ao cálculo computacional, mas deve-se realçar que o tempo computacional aumenta normalmente exponencialmente com o aumento do número de elementos e que este aumento pode ser redundante, dependendo do estudo em análise.

Com isto pretende-se dizer que é deveras importante o adequado refinamento da malha (Figura 11), ou seja, o número de elementos, a escolha do tipo de elemento e a introdução correta dos dados de entrada do problema, para que o estudo seja o mais próximo possível da solução exata. Alguns cuidados a ter no refinamento da malha são demonstrados na Figura 10.

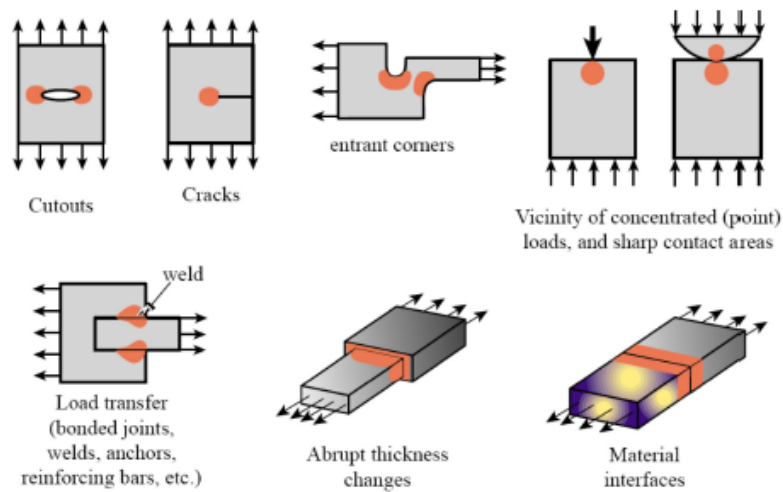


Figura 10 - Zonas de refinamento da malha assinaladas a laranja [6]

Deve-se ter presente que no refinamento da malha existe um comprometimento entre a interpolação e a distorção do elemento, conseqüentemente os elementos devem ser o mais regulares possível por forma a evitar a inserção de erros na interpolação [6]. A regularidade do elemento pode ser verificada através do rácio de aspeto ou *aspect ratio*, que traduz a relação entre as arestas de maior e menor dimensão, que deve ser o mais próximo possível de um.

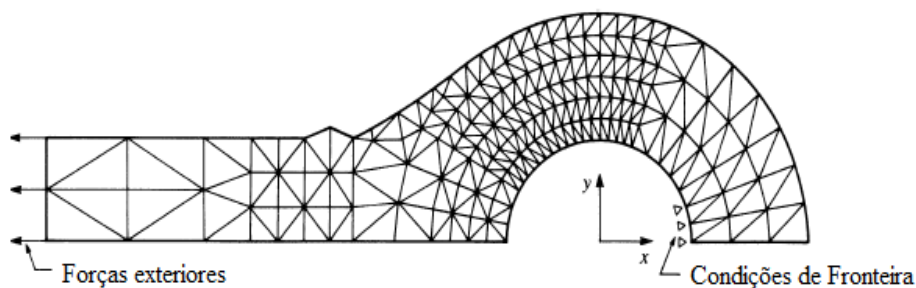


Figura 11 – Exemplo de refinamento da malha apropriado [14]

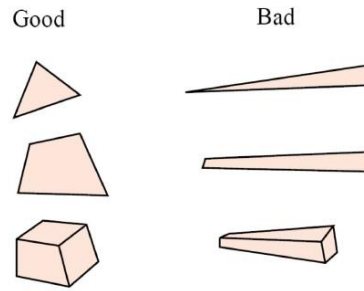


Figura 12 – Comparação de elementos com diferentes rácios de aspeto [6]

A não consideração destes aspetos pode acarretar erros aos resultados obtidos na solução do problema, já que estes podem ser muito díspares quando comparados com a solução exata (quando é possível efetuar esta comparação). Isto deve-se ao facto de o MEF ser usualmente utilizado na resolução de problemas de grande complexidade, para os quais não existe a solução exata. Quando assim for, o resultado obtido deve ser sempre verificado de acordo com [1]:

- *“Convergência numérica,*
- *Razoabilidade do resultado obtido,*
- *Consistência com as leis físicas do problema em causa (estrutural – a estrutura está em equilíbrio?; térmico – o balanço de fluxos de entrada e saída de calor é satisfeito?) e*
- *Descontinuidade razoável das variáveis derivadas nas fronteiras entre os elementos.”*

### 2.1.3 Potencialidades

O MEF, graças ao aumento das capacidades computacionais, veio revolucionar as possibilidades de resolução de problemas e a sua eficácia em diversas áreas, como sejam a engenharia e medicina. Através deste método, podem-se formular vários tipos de elementos que permitem ir de encontro a necessidades específicas. Os problemas em análise podem ser de variados tipos, desde análises estruturais lineares e não lineares, análises acústicas, eletromagnéticas, análises na área da mecânica de fluidos, análises térmicas, simulação de efeitos dinâmicos e até simulações de operações cirúrgicas [1, 6].

Na área da mecânica estrutural pode-se constatar que, com a implementação do MEF, é possível modelar com facilidade geometrias complexas (Figura 13) e estudar a distribuição de esforços e deformações deste tipo de geometrias sujeitas a variados tipos de carregamentos.

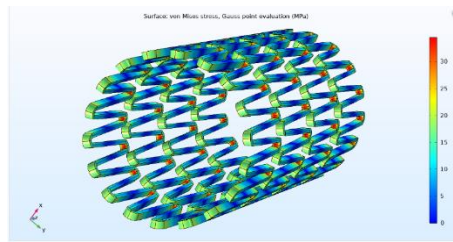


Figura 13 – Análise não linear de um *stent* biomédico [15]

O MEF permite ao utilizador manipular o refinamento da malha. Esta manipulação permite obter soluções mais precisas em zonas específicas da geometria em estudo ou diminuir a precisão da solução, por forma a se aumentar a velocidade de processamento e obter-se assim, uma solução ao problema mais rapidamente. O refinamento pode ser efetuado pelo utilizador ou com o auxílio de *softwares* que possuem algoritmos que constroem a malha com a introdução de dados como o tamanho médio dos elementos, e com a potencialidade de refinamento desta em zonas de potenciais concentrações de tensões, como furos, entalhes ou arestas vivas. Pode-se estudar ilimitados tipos de carregamentos, condições fronteira e diferentes tipos de materiais (a constituírem a mesma análise pois cada elemento é analisado independentemente). O MEF permite ainda efetuar estudos de análises não lineares (Figura 14) geométricas ou de materiais [14].

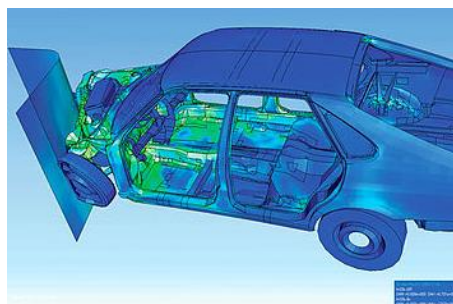


Figura 14 - Exemplo de análise não linear [16]

Com o avanço da tecnologia, o MEF cada vez mais foi incorporado em *softwares* que permitem a sua aplicação com maior eficácia e velocidade. Nota-se cada vez mais a existência de programas focados em determinados tipos de análises com potencialidades adicionais, específicas para os tipos de análises permitidas. Assim, cada vez menos se recorre ao uso de protótipos, ou estes são muito reduzidos, pois atualmente, recorrendo-se ao MEF e com a evolução do *software* juntamente com o *hardware*, é possível efetuar-se otimizações assim como diferentes estudos. Desta forma, pode-se ter diferentes estudos e soluções diferentes com mais rigor, o que permite um resultado com maior fiabilidade e qualidade. Esta etapa, no desenvolvimento de um dado produto é designada de CAE (*Computer Aided Engineering*) que, com a redução de protótipos e de ensaios, implica uma redução significativa no custo final de um determinado produto em desenvolvimento [14, 17].

Este tipo de análise é deveras vantajoso no estudo de estruturas metálicas, pois atualmente existem diversas formulações que permitem aos engenheiros realizar análises de estruturas hiperestáticas de forma rápida e eficaz. Recorre-se a elementos unidimensionais formulados através das equações constitutivas da mecânica dos materiais que, através do MEF, permitem obter o sistema de equações gerais de elementos como o de barra, viga ou de estrutura. Estes tipos de elementos permitem, de forma rápida para o utilizador, obter as reações, deslocamentos, tensões e deformações que uma dada estrutura vai sofrer de acordo com o carregamento em análise. Pode-se assim realizar uma otimização na fase de projeto de uma dada estrutura, sem que esta se traduza num aumento substancial do custo final da obra, pois não existe a necessidade de se recorrer a protótipos e outro tipo de estudos dispendiosos. Por exemplo, quando existe a necessidade de perceber o comportamento do escoamento de um fluido em torno de uma dada geometria, por norma recorre-se a túneis de vento, o que se traduz num custo dispendioso para o projeto. Com recurso ao MEF atualmente existem *softwares* com elevadas potencialidades neste tipo de análises.

Pode-se concluir que, com o auxílio do MEF e com os avanços computacionais, vai-se presenciar num futuro próximo um aumento da competitividade, pois os produtos do mercado apresentarão maior qualidade e menor custo decorrente essencialmente da fase de projeto. Com o decorrente recurso a técnicas computacionais desde o CAD (*Computer Aided Design*), CAE e o CAM (*Computer Aided Manufacturing*), menor será o erro humano associado ao fabrico e estudo de novos produtos. Atualmente, com a chegada da impressão três dimensões (3D) ao utilizador comum, menor será o custo derivado da fase de projeto e novas soluções podem ser estudadas e validadas a baixo custo, como por exemplo a construção de estruturas em favo de abelha, redução de material em estruturas de reforço, entre outras.

#### 2.1.4 Aplicações do método de elementos finitos

O MEF é usualmente utilizado em análises estruturais estáticas lineares ou não lineares (Figura 15), como análise de tensões e deformações em elementos de viga, barra ou estrutura e o estudo de concentração de tensões em torno de furos ou boleados, mas também em análises de vibrações e análises dinâmicas [13, 18].

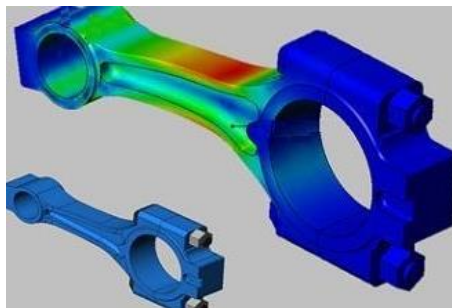


Figura 15 - Exemplo de análise estrutural [19]

Presentemente, este tipo de análises permite essencialmente uma redução dos custos relacionados com o fabrico de um produto, querendo-se com isto dizer que todo o custo em volta dos desenvolvimentos de protótipos e ensaios necessários fica reduzido ao mínimo. No estudo de um automóvel atualmente recorrem-se a variados tipos de análises, desde ensaios de *crash tests* (Figura 16) a análises de acústica, ergonomia, entre outras. Por exemplo, no caso de estudos como *crash tests* pode recorrer-se a análises computacionais de forma a garantir que o carro se encontra dentro de todas as normativas, o que pode significar uma redução substancial do custo final do produto.

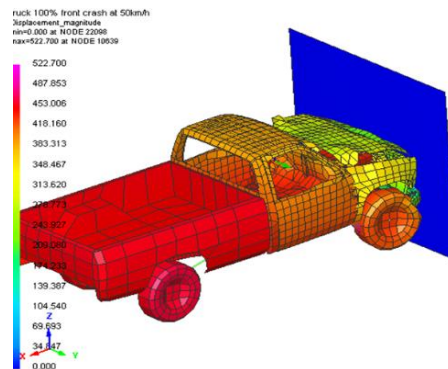


Figura 16 - Crash test [1]

O programa Flow Design [20] da empresa Autodesk® permite, através do MEF, simular um túnel de vento (Figura 17) aplicado a uma geometria concebida em CAD. Através desta ferramenta pode-se analisar o escoamento do vento em redor de diversas geometrias independentemente da sua complexidade. Este tipo de análise torna-se deveras vantajoso quando se pretende obter uma geometria o mais aerodinâmica possível e reduzir custos e tempo de projeto quando a estrutura em análise necessita de ser submetida a ensaios em túneis de vento.



Figura 17 - Projeto Flow Design [21]

As análises estruturais são utilizadas diversas vezes no estudo de estruturas metálicas, recorrentemente quando o grau das estruturas é hiperestático. Recorrem-se a técnicas diretas como por exemplo, o Método dos Deslocamentos, pois estas permitem obter de forma rápida e eficaz as reações, deslocamentos, tensões e deformações mesmo quando a estrutura apresenta um elevado número de elementos. Os estudos não estruturais associados ao MEF focam-se essencialmente em análises de transferências de calor, análises eletromagnéticas e análises de escoamento de fluídos. Na simulação de análise de tensões destacam-se simulações essencialmente na área da engenharia

biomecânica, que permitem o estudo de próteses para os joelhos, articulações da anca, implantes dentários (Figura 18) e modelos do coração humano focados no estudo das válvulas e sua substituição [1, 14, 18].

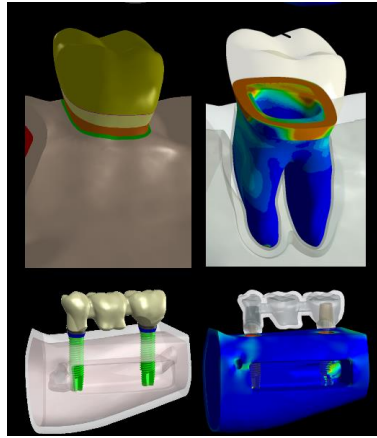


Figura 18 - Exemplo do estudo de uma prótese dentária [22]

### 2.1.5 Técnica do método de elementos finitos

De forma a obter as equações constitutivas de problemas, sejam estes estruturais ou não estruturais, existem diversas abordagens que permitem derivar as matrizes ou os vetores característicos de elementos finitos. Estas abordagens subdividem-se em três grandes grupos, designadamente os Métodos Diretos, Métodos Variacionais e Métodos de Resíduos Ponderados [13, 18].

O Método Direto é baseado no uso da mecânica tradicional para estabelecer as propriedades do elemento (ou seja, as matrizes e vetores característicos), em termos de variáveis pertinentes. Como este método se rege pelas leis básicas da engenharia, auxilia à compreensão do MEF. No entanto, este método só pode ser aplicado na solução de problemas simples, como barras unidimensionais. Quando se pretende aplicar este método a elementos bidimensionais ou tridimensionais normalmente surgem dificuldades intransponíveis, o que implica que este método não seja utilizado na maioria dos problemas práticos [18].

Existem dois tipos de métodos diretos que são tradicionalmente associados ao estudo de estruturas metálicas pelo MEF. O Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. No âmbito desta dissertação o Método dos Deslocamentos será aquele ao qual se vai recorrer para obter as formulações dos elementos de barra, viga e estrutura e, como tal, este será também o método mais abordado ao longo desta dissertação. O Método das Forças considera como incógnitas as forças internas do sistema, de forma a obter as equações globais que regem o problema em análise. Inicialmente obtêm-se as equações de equilíbrio do sistema, sendo que em seguida é necessário obter equações adicionais, obtidas através de equações de compatibilidade. De forma a se obter a solução de um sistema hiperestático, deve-se inicialmente calcular o grau de hiperestaticidade do sistema. Com base no grau de hiperestaticidade sabe-se qual o número de sistemas

isostáticos unitários que é necessário resolver, para se obter a solução do sistema hiperestático. Após isto, o resultado é obtido através de um conjunto de equações algébricas, que permitem obter as forças desconhecidas do sistema. Matematicamente o método das forças deve satisfazer a seguinte expressão,

$$\Delta = \sum_{i=1}^n X \delta . \quad (3)$$

onde  $\Delta$  é o deslocamento do sistema isostático de base,  $\delta$  representa o deslocamento provocado por uma carga unitária e  $X$  é o número de vezes que essa carga unitária é necessária para que o deslocamento seja 0 no ponto em análise, sendo esta a condição que se pretende satisfazer (Figura 19) [14].

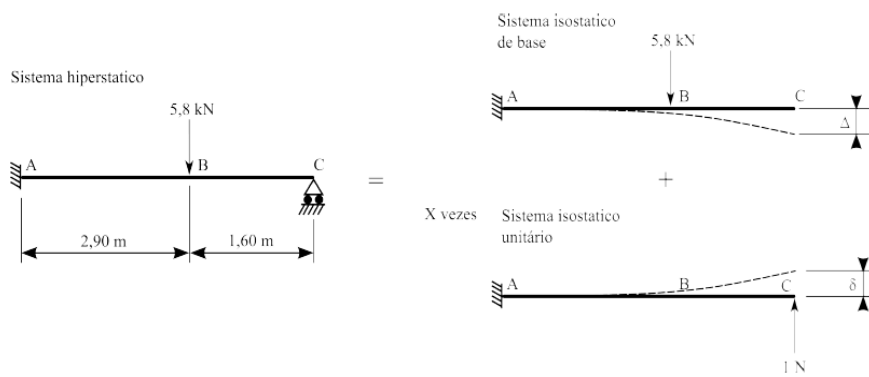


Figura 19 - Método das Forças [23]

No Método dos Deslocamentos, ao contrário do Método das Forças e como o nome indica, as incógnitas do problema são os deslocamentos (generalizados, incluindo translações e rotações). Este método consiste em exprimir uma condição de equilíbrio estático para todos os nós de uma dada estrutura, em função do deslocamento e carregamento exterior aplicado [14, 23].

No âmbito do estudo de problemas estruturais o método descrito anteriormente é o mais utilizado pois, apesar de implicar um sistema de equações muito maior de forma a se determinar as incógnitas, é de fácil sistematização pois possui um algoritmo de resolução único, enquanto no Método das Forças o caminho a percorrer é determinado pelo utilizador a partir do momento que este escolhe o sistema isostático inicial. O Método dos Deslocamentos apresenta ainda a vantagem de não necessitar que se calcule o grau de hiperstaticidade de um sistema. Por estes motivos este torna-se o método predileto para programas de cálculo de estruturas [23].

A abordagem de problemas por Métodos Variacionais consiste na minimização funcional, ou seja, em se obter a função que traduz a menor distancia a percorrer entre valores de fronteira. Os métodos que mais se destacam dentro dos Métodos Variacionais são o Teorema da Energia Potencial Mínima e o Princípio dos Trabalhos

Virtuais (PTV). O Teorema da Energia Potencial Mínima é normalmente aplicado a materiais que seguem um comportamento elástico, sendo que este teorema define que a energia potencial de um corpo elástico é obtida pela soma da energia de deformação com o potencial de trabalho, ou seja, baseia-se no cálculo do potencial total do sistema,  $\Pi$  (equação (4)) e respetiva minimização em relação às variáveis do problema [[1, 2].

$$\Pi = \text{energia de deformação} + \text{potencial de trabalho} . \quad (4)$$

O PTV ou Princípio dos Deslocamentos Virtuais é normalmente aplicado no estudo de materiais com um comportamento linear ou não linear em estudos da estática ou dinâmica. Este *“estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação”*. Recorrendo-se a este princípio ter-se-á então [[1, 2]:

$$\partial U^e = \partial W^e . \quad (5)$$

onde  $\partial U^e$  representa a energia de deformação virtual provocada pelas tensões internas,  $\partial W^e$  representa o trabalho virtual realizado pelas forças externas que hipoteticamente atuam no elemento [1].

Por fim, deve-se salientar que os Métodos Variacionais são amplamente utilizados embora apresentem uma grande desvantagem pois não podem ser aplicados a qualquer equação diferencial que contenha termos da primeira derivada [24].

No caso de problemas de elevada complexidade recorre-se ao Método dos Resíduos Ponderados, este método utiliza funções de tentativa para estimar a variável independente na equação diferencial que rege o problema. Podem-se destacar algumas variantes deste método como o Método de Galerkin, Método de Mínimos Quadrados, Método de Colocação e o Método do Subdomínio [12, 13].

Apresentam-se agora os passos determinantes na formulação do MEF e na obtenção da solução de um problema. A metodologia de formulação da análise do MEF é independente do tipo de problema abordado e rege-se por 3 fases: o Pré-Processamento, a Obtenção da Solução e o Pós-Processamento [1, 13].

Na primeira fase descrita anteriormente, deve-se proceder à correta escolha do tipo de elemento a utilizar na abordagem do problema, o tipo de elemento a utilizar pode influenciar substancialmente na solução do problema, devendo assim este ser escolhido de acordo com a análise pretendida. Também deve ser definido o refinamento da malha mais adequado, dependendo da geometria em análise e do tipo de carregamento da mesma, assim como a disposição deste na geometria em análise. Também ainda nesta fase deve ser tido em conta se a análise vai ser realizada a 1, 2 ou 3 dimensões. Em resumo pretende-se essencialmente nesta fase desenvolver uma malha apropriada, atribuir as propriedades dos materiais e aplicar as condições fronteira (carregamentos e restrições exteriores). É importante salientar que, nesta etapa, a correta definição de

todos os parâmetros enumerados anteriormente influencia diretamente na precisão dos resultados que se pretende obter, tornando-se assim uma etapa fundamental na modelação do problema. Para minimizar os erros induzidos pelo incorreto procedimento na fase do pré-processamento este é definido pelos seguintes passos [1, 25].

- “Definição do domínio geométrico do problema,
- Definição do tipo/tipos de elementos a utilizar > **formulação do elemento**,
- Definição das propriedades materiais dos elementos,
- Definição das propriedades geométricas dos elementos (comprimento, área),
- Definição das conectividades entre elementos (malha do modelo),
- Definição das restrições às variáveis de campo (condições fronteira) e
- Definição dos carregamentos (forças, fluxos de calor, etc...).”

A formulação do elemento finito é um passo fundamental na etapa do pré-processamento, e este é dividido em 6 sub-etapas [1];

Etapa 0 – consiste em definir quais são as variáveis de campo indispensáveis para a solução do problema.

Etapa 1 – definir os vetores que descrevem a forma do elemento (localização dos nós e das variáveis existentes em cada nó).

Etapa 2 – pretende-se nesta etapa definir o campo de deslocamentos no interior de um dado elemento ( $u_e$ ), relacionando-se este com as suas variáveis nodais ( $\mathbf{a}_e$ ) e funções de interpolação ( $\mathbf{N}$ ), que são usualmente obtidas através de polinómios ou através de series trigonométricas. Matematicamente um deslocamento segundo  $x$  rege-se pela seguinte expressão:

$$u_e = \mathbf{N}\mathbf{a}_e \quad (6)$$

Etapa 3 – esta etapa consiste na definição do vetor de deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Este rege-se matematicamente pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}\mathbf{a}_e \quad (7)$$

Etapa 4 – definir o vetor de tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ).

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e \quad (8)$$

Etapa 5 – esta última etapa permite definir a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{k}_e$  o vetor de forças nodais  $\mathbf{f}_e$  através das seguintes expressões:

$$\mathbf{k}_e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta v \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{a}_e \quad (10)$$

A etapa da Obtenção da Solução consiste na resolução do problema em análise onde se procede à montagem das equações algébricas em forma matricial ou num sistema de equações que definem o problema globalmente a partir das matrizes que definem cada elemento. A solução deste sistema permite obter como solução as variáveis de campo no sistema local ( $\mathbf{a}_e$ ) ou no sistema global ( $\mathbf{A}_e$ ) após se proceder à transformação de coordenadas.

O sistema de equações apresenta-se na seguinte forma genérica:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Este sistema pode ser representado na sua forma matricial em coordenadas locais,

$$\mathbf{k}_e \mathbf{a}_e = \mathbf{f}_e \quad (12)$$

ou em coordenadas globais,

$$\mathbf{K}_e \mathbf{A}_e = \mathbf{F}_e \quad (13)$$

Por fim o sistema global de equações que permite obter as reações toma a forma,

$$\mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (14)$$

Na expressão (14) observa-se que a matriz de rigidez global ( $\mathbf{K}$ ) multiplica pelo vetor de variáveis de campo globais ( $\mathbf{A}$ ), permitindo assim obter as reações na estrutura ( $\mathbf{R}$ ) mais a soma do vetor de forças nodais ( $\mathbf{F}$ ). O facto de se impor as condições fronteira permite obter uma solução do sistema de equações pois, como é possível comprovar, a matriz  $\mathbf{K}$  é singular, ou seja, o seu determinante é nulo. Quando o determinante de uma matriz é nulo, a dimensão em que se encontra o problema é reduzida quando sujeito à transformação imposta pela matriz. Ou seja, quando se analisa um problema bidimensional e o determinante é nulo significa que a dimensão do problema passou a ser unidimensional e, nestas circunstâncias, o problema pode ter múltiplas soluções nessa nova dimensão ou nenhuma solução possível. Assim, podemos deduzir antecipadamente que a solução da matriz é infinita ou não tem solução possível. Conclui-se então que, enquanto não se invocar determinadas condições fronteira que vão restringir a estrutura num determinado local, esta encontra-se livre como se de um corpo rígido se tratasse. Nesta mesma equação ainda se tem como problema o facto de tanto o vetor  $\mathbf{A}$  como o vetor  $\mathbf{R}$  possuírem incógnitas, o que obriga a condensar o sistema de forma a obter os valores de  $\mathbf{A}$  e posteriormente utilizar estes valores para

extrair as variáveis secundárias em  $\mathbf{R}$ . O processo de condensar o sistema matricial consiste em eliminar tanto as linhas como as colunas da matriz de rigidez e as linhas dos vetores que compõem o sistema de equações nas posições restringidas pelas condições fronteira. Paralelamente, é importante salientar que normalmente são utilizados métodos de eliminação gaussiana na resolução do sistema, pois a matriz  $\mathbf{K}$  é simétrica. Desta forma otimiza-se a resolução do sistema, o espaço de armazenamento e ainda o esforço computacional necessário à solução do mesmo [1, 13].

Por fim o Pós-Processamento é a fase em que o utilizador deve proceder à avaliação dos resultados obtidos de forma a observar se estes são fisicamente aceitáveis. Pois é nesta fase que são apresentados os resultados por exemplo das tensões dos elementos, as deformações, coeficientes de segurança, animações do modelo, visualizações gráficas das tensões na estrutura, normalmente em escala de cor, entre outros dados [1].

### 2.1.6 Tipos de Elementos Finitos para análise estrutural

Conforme foi referido na secção 2.1.5, na fase do pré-processamento deve ser escolhido o tipo de elemento mais apropriado à correta modelação do problema. Existem diversos tipos de elementos, e a escolha do tipo de elemento depende essencialmente das condições físicas do corpo em análise, dos esforços reais a que este está sujeito e qual a precisão que se pretende na solução do problema. Os elementos mais utilizados são os seguintes:

- Nos **elementos unidimensionais** constam os elementos de barra, viga e estrutura. Normalmente estes elementos são representados por uma linha, sendo que esta na realidade define uma secção bem delimitada que pode ser variável ao longo do comprimento do elemento. Este tipo de elemento é usualmente utilizado na modelação de estruturas reticuladas, contínuas (vigas) ou articuladas (barras), tendo-se como elemento mais simples o elemento de barra. Este assume apenas esforços axiais e normalmente é constituído por dois nós (sendo que nesta situação as funções de interpolação são lineares). Já o elemento de viga distingue-se do elemento de barra por assumir momentos fletores nas ligações rígidas, que são provocados por esforços transversos, ou seja, este elemento apresenta em cada nó uma rotação e um deslocamento perpendicular. O elemento de estrutura traduz-se no somatório do elemento de barra com o elemento de viga. Independente do tipo de elemento escolhido este pode ser representado por mais que dois nós (Figura 20), sendo que neste tipo de situação obtêm-se formulações com funções de interpolação de grau superior (quadráticas, cúbicas, etc.) [14, 18].

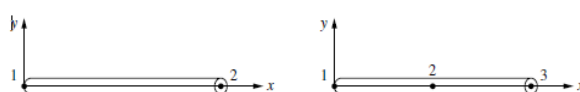


Figura 20 - Elemento de barra linear à esquerda e quadrática à direita [14].

Como exemplo, se no estudo de uma viga se utilizarem funções de interpolação lineares, quando esta é sujeita ao tipo de carregamento apresentado na Figura 21, como a deflexão ( $v$ ) é função de um polinómio de terceiro grau e o valor de  $w$  segue a expressão matemática (15), pode-se concluir que nesta situação é realizada uma aproximação de  $w$  a uma carga pontual, o que provocará um erro de aproximação na análise. Por exemplo, os momentos flectores passam a ser regidos por uma função linear quando deviam seguir uma função parabólica. Pode-se concluir que, ao serem utilizadas funções de interpolação de ordem superior, consegue-se uma maior aproximação à solução exata da mecânica dos materiais (Figura 22). Deve-se ter presente que as funções de forma devem, sempre que for possível, ter o mesmo grau do polinómio que define do campo de deslocamentos exato da estrutura. Deste modo, consegue-se garantir que a solução obtida nos nós do elemento e em todo o seu domínio é igual à solução exata.

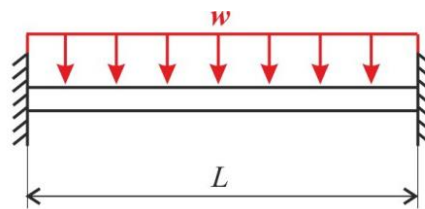


Figura 21 - Carga distribuída [1]

$$w(x) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (15)$$

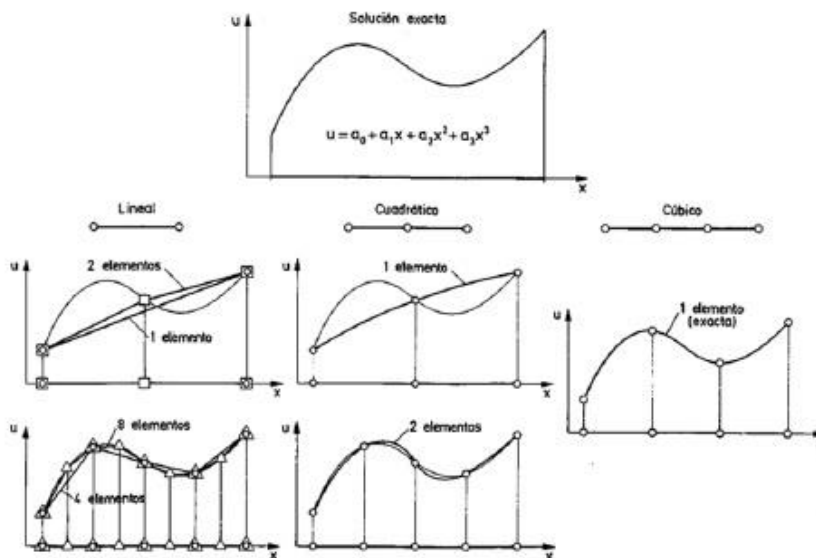


Figura 22 - Aproximação ao campo de deslocamentos real, com diferentes tipos de elementos [26]

- No caso dos **elementos bidimensionais** (Figura 23) o carregamento é realizado no plano em que estes se encontram, sendo que se encontram limitados por esta

condição de carregamento (estado plano de tensão ou deformação). Os elementos planos encontram-se na forma triangular, retangular ou um elemento construído por dois elementos triangulares. Estes elementos são constituídos normalmente por nós apenas nos vértices e por arestas planas. Quando o elemento se encontra nas condições descritas anteriormente origina que as funções de interpolação que descrevem as variáveis de campo são lineares mas, mais uma vez, estas podem assumir a forma quadrática ou superior, pois estes elementos podem apresentar mais nós nas arestas, como também arestas curvas e de espessura variável [18].

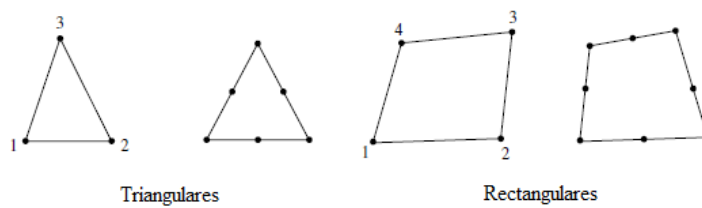


Figura 23 - Elementos Bidimensionais [14]

- Os **elementos tridimensionais** (Figura 24) são essencialmente usados no estudo de análises tridimensionais de tensões e apresentam mais comumente 4 (tetraedro) ou 6 (hexaedro) faces. Existem ainda elementos tridimensionais como o caso de um prisma retangular. No entanto, o elemento tridimensional mais comumente utilizado é o tetraedro. Na sua forma mais elementar este elemento apresenta nós nos seus vértices e arestas retilíneas, mas os elementos descritos anteriormente também permitem formulações de ordem superior, onde podem incluir mais nós, tanto nas arestas como no interior do elemento como também arestas curvilíneas [13, 14].

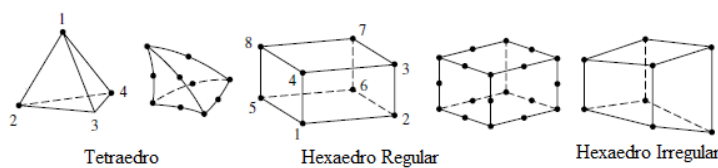


Figura 24 - Elementos Tridimensionais [14]

- **Elementos axissimétricos** (Figura 25) permitem o estudo de componentes cuja geometria, carregamento e condições fronteira são simétricos em relação ao eixo de rotação. Este tipo de elementos é formulado através de uma rotação de  $360^\circ$  em torno de um eixo fixo, por elementos triangulares ou quadrangulares bidimensionais. Este tipo de elementos normalmente é representado em coordenadas cilíndricas  $(r, z, \theta)$ . Neste tipo de elementos, os deslocamentos apenas são tratados em torno das coordenadas  $z$  e  $r$  pois não existe deslocamento circunferencial. Problemas como o estudo de pistões, válvulas e tanques de armazenamento incidem neste tipo de estudo [1, 27].

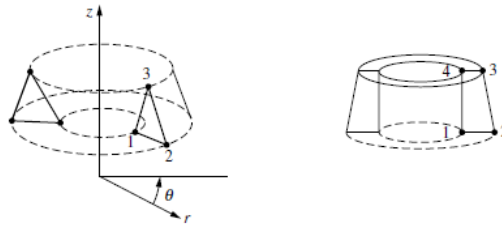


Figura 25 - Elementos axissimétricos [14]

- Por último pode-se destacar os **elementos de placa, de casca e de membrana** (Figura 26), que permitem a modelação de corpos de espessura fina. Considera-se um corpo de espessura fina aquele que apresenta uma espessura inferior a 10% do comprimento de menor dimensão que define o elemento. O elemento de placa destina-se essencialmente a modelar placas, onde o carregamento é efetuado fora do plano. Particularmente, este tipo de elemento é utilizado no estudo de telhados ou pisos com um carregamento transversal ao plano. Como este tipo de elemento assume apenas o carregamento transversal ao plano, cada nó apresenta um deslocamento e duas rotações como graus de liberdade. Já o elemento de casca é caracterizado pela sua espessura fina e representado por uma superfície curva no espaço. Este elemento suporta essencialmente esforços de membrana combinados com esforços de flexão. Por último, o elemento de membrana deve respeitar as seguintes condições [1, 28].
  - Todas as cargas aplicadas no elemento atuam no plano médio, e são simétricas em relação a este;
  - As condições de apoio são simétricas em torno do plano medio;
  - As deformações, tensões e deslocamentos podem ser tomadas como uniformes ao longo da espessura;
  - O material em análise deve ser homogéneo ao longo da espessura, ou seja, exclui-se por exemplo placas compósitas e alveolares.

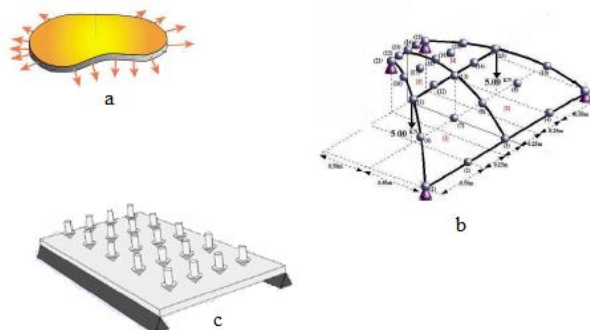


Figura 26 - a) Elemento de Membrana b) Elemento de Casca c) Elemento de Placa [28]

### 2.1.7 *Softwares disponíveis para análise estrutural*

O MEF é atualmente uma ferramenta bastante poderosa e versátil na solução de variados tipos de problemas de Engenharia. Assim sendo, um grande número de *softwares* foi e tem vindo a ser desenvolvido de forma a se obter a solução de diversos problemas estruturais, em diferentes áreas de aplicação. Podem ser encontradas aplicações genéricas (para diferentes tipos de estudos) com a possibilidade de correrem com facilidade em computadores pessoais, ou códigos desenvolvidos em linguagens de programação matemáticas onde se pretende obter soluções de problemas específicos. Ambos os tipos de *softwares* apresentam vantagens e desvantagens. Os *softwares* genéricos permitem que os utilizadores não necessitem de grandes conhecimentos de *hardware* nem de *software* ao nível de programação (*softwares* associados normalmente a uma interface bastante intuitiva). Este tipo de ferramentas permite ao utilizador resolver variados tipos de problemas e nalguns casos adquirir módulos complementares para obter a solução de problemas mais específicos. Como desvantagem pode-se salientar que este tipo de *software* exige um grande investimento no seu desenvolvimento e normalmente estas aplicações pertencem a grandes empresas que não permitem ao utilizador aceder ao código do *software*. Por fim, pode-se salientar que a principal vantagem dos programas com códigos específicos consiste no livre acesso ao código fonte, permitindo ao utilizador alterá-lo conforme as suas necessidades. A grande desvantagem deste tipo de *software* consiste na sua inadaptabilidade de resolver outro tipo de problemas diferentes daqueles para os quais foi inicialmente desenvolvido [14, 18].

Pode-se encontrar diversos representantes e/ou responsáveis pelo desenvolvimento de *softwares* que recorrem ao MEF para obter a solução de diversos tipos de problemas de engenharia. Podem ser destacados alguns vendedores como a Autodesk®, Dassault Systèmes, MSC Software®, Arktec, Ansys®, Adina, VisualFEA, Computers & Structures, Inc., Cubus AG, LUSAS, entre muitos outros que se podem encontrar disponíveis no mercado.

Cada um dos representantes enunciados supra apresenta diversos tipos de produtos que, quando associados ao MEF, apresentam de uma forma genérica as seguintes capacidades/potencialidades [1, 14]:

- Desenho das partes que integram o modelo a analisar, com possibilidade de parametrização das cotas;
- Montagem do modelo através das respetivas partes, permitindo a simulação cinemática e verificação de intersecção de elementos;
- Definição de diferentes tipos de materiais para cada sólido constituinte do modelo, assim como utilização de diferentes leis (elásticas ou dinâmicas);
- Atribuição das condições fronteira que definem o modelo (apoio simples, duplo, encastramento, etc);

- Definição do tipo de carregamento a que o modelo se encontra sujeito (cargas pontuais, distribuídas, esforços térmicos, etc);
- Permissão para gerar automaticamente uma malha de elementos finitos no modelo em análise;
- Definir o tipo de análise a executar (análise estática, dinâmica, fadiga, encurvadura, etc);
- Introdução de rotinas de processamento desenvolvidas pelo próprio utilizador;
- Obter-se a solução do modelo através da conversão deste num conjunto de equações matemáticas;
- Visualização dos resultados do modelo numa forma gráfica (visualizar as deformações, tensões, esforços atuantes, reações);
- Obter uma listagem dos esforços atuantes (momentos, forças e reações) em nós pré-definidos, assim como os valores máximos e mínimos existentes no modelo em análise.

Podem-se destacar os seguintes produtos da Autodesk® [20]:

- Autodesk® Nastran; o *software* desenvolvido permite ao utilizador realizar projetos mecânicos a 3D, incluindo a simulação e análise dos projetos desenvolvidos com recurso ao MEF. Podem ser realizadas, entre muitas outras, análises estáticas, dinâmicas, análises lineares e não lineares materiais e análises modais;
- Autodesk® Robot Structural Analysis Professional; permite ao utilizador gerar de forma automática as malhas de elementos finitos, manipular a malha através de pontos de controlo e resolver em minutos problemas que envolvam estruturas metálicas de grande complexidade (elevado número de elementos) constituídas por elementos esbeltos. Predispõem de uma biblioteca de perfis normalizados e algoritmos que seguem regulamentos específicos como Eurocódigos ou o Regulamento de segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA), dependendo do país. Assim o utilizador pode realizar o dimensionamento da estrutura de acordo com os regulamentos em vigor, tendo em consideração os critérios estabelecidos nestes. É de salientar que dispõe ainda de módulos integrados de betão e projeto de aço, que permitem por exemplo a análise de lajes, paredes ou, barragens. Por fim pode-se enaltecer a sua forte componente gráfica que é uma mais-valia em comparação com outros *softwares* que apresentam as mesmas características para efeitos de cálculo estrutural (Figura 27), assim como constatar a compatibilidade que apresenta por exemplo com o *software* Autodesk Revit Structure assim com o Autocad. Em resumo, as grandes potencialidades deste *software* assentam na possibilidade de realizar análises estáticas, modais, não linear / P-Delta, instabilidade e controlo de

deslocamentos, permitem utilizar elementos finitos de barra, viga, elementos bidimensionais (estados planos de tensão, deformação, cascas, membranas e axissimétricos) e elementos tridimensionais (utilizados por exemplo no estudo de barragens);

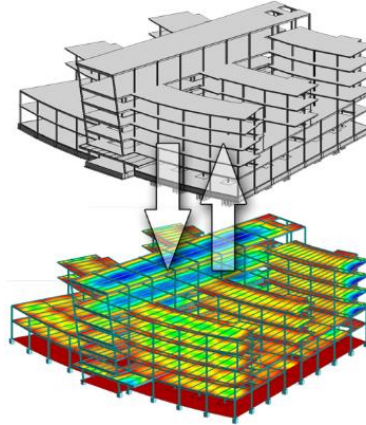


Figura 27 - Estrutura passível de análise com o Autodesk Robot Structural Analysis [29]

- Autodesk® Simulation CFD; é um *software* que permite gerar malhas de elementos finitos de forma automática, com o intuito de se estudar escoamentos de fluidos e transferências de calor.

Da empresa Dassault Systèmes podem ser destacados os seguintes *softwares* [30, 31]:

- DS Catia; este produto oferece um grande leque de ferramentas na fase de projeto, que se enquadram como exemplo no Mechanical Design, Shape Design & Styling e Analysis. O produto Mechanical Design permite ao utilizador utilizar diversas ferramentas de modelação (chapa quinada, etc) utilizadas em diversas áreas de Engenharia. Através do Analysis é possível realizar diversas simulações de comportamento mecânico de um produto, como análises estruturais, realizar simulações mecânicas e análises cinemáticas;
- DS Solidworks; consiste numa ferramenta de modelação paramétrica de sólidos, tornando assim possível alterar as características de um produto em qualquer fase do projeto. As fases que envolvem o projeto distinguem-se pela conceção das várias peças (*parts*), a montagem destas num novo ficheiro (*assembly*) e a criação das vistas (*drawing*). Este *software* permite ainda ao utilizador submeter o produto desenvolvido às condições mecânicas a que este vai estar sujeito, realizando-se com o auxílio do MEF análises estruturais, análises térmicas, análises de arrefecimento a componentes eletrónicos, análises de fadiga, análises de movimento e ainda otimizações ao produto desenvolvido;
- DS Simulia; dentro do grupo de programas do DS Simulia pode-se destacar o Abaqus Unified FEA. O Abaqus Unified FEA consiste numa ferramenta poderosa e muito completa sustentada no MEF, muito útil em simulações virtuais de situações reais que permite reduzir o tempo de desenvolvimento e os custos de

um produto. Este *software* atualmente é muito utilizado em diversas áreas da engenharia, das quais se pode destacar a indústria aeroespacial e automóvel. Este *software* permite realizar diversos tipos de análises, como por exemplo multifísicas, onde podem ser efetuadas análises de polímeros com viscoelasticidade não linear, análises de fluidos através de meios porosos, análises de fluidos não Newtonianos, análises de vibrações dinâmicas, análises de *crash test* e análises acústicas, entre outras possíveis de realizar. Este *software* permite uma grande diversidade e caracterização de materiais, mas exige também um elevado grau de conhecimentos de engenharia por parte do utilizador.

Da empresa Arktec pode-se apresentar o seguinte *software* [32]:

- Tricalc; é um programa muito utilizado no cálculo de estruturas metálicas e estruturas em betão, incluindo o estudo de estruturas construídas com ambos os materiais (Figura 28). Dispõe de uma ampla biblioteca de perfis normalizados e permite ao utilizador optar pelo tipo de regulamento que pretende utilizar no cálculo que se vai efetuar, assim como efetuar análises sísmicas por sobreposição modal com recurso aos espectros definidos pelo RSA, ou ser o utilizador a definir os espectros que pretende utilizar. Permite definir diversos tipos de carregamentos, assim como realizar pré-dimensionamentos automáticos. Os resultados são apresentados numa listagem onde podem ser consultados os esforços nos nós, os esforços nas secções, os deslocamentos e as reações nos apoios. Também podem ser consultados gráficos dos momentos a que cada elemento se encontra sujeito, assim como dos esforços transversos e axiais. É ainda possível observar a estrutura deformada para cada uma das hipóteses de ações que foram consideradas na análise ou para a envolvente mais desfavorável. O valor das tensões instaladas na estrutura em análise pode ser consultado num gráfico de cores e podem ser realizadas otimizações de acordo com os regulamentos utilizados.

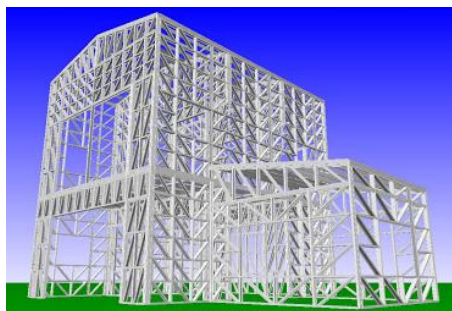


Figura 28 - Estrutura passível de analisar com o Tricalc [32]

Da empresa Bentley®, que adquiriu recentemente a Formsys, pode-se destacar o seguinte programa como de elevada relevância [33]:

- Multiframe; este *software* apresenta funcionalidades muito semelhantes ao Robot da Autodesk® e ao Tricalc da Arktec. Essencialmente a diferença destes *softwares* centra-se no ambiente gráfico (modelação duas dimensões (2D) ou 3D, forma de aplicação de esforços e definição dos mesmos, etc), na forma como os resultados finais são apresentados e como podem ser consultados. Resumidamente, o Multiframe permite realizar análises lineares ou não lineares, estáticas ou dinâmicas, como por exemplo o cálculo de encurvadura e análises modais. Este *software* também dispõe de uma diversidade de bibliotecas de perfis normalizados e apresenta os resultados dos esforços de cada elemento em forma de listagem, assim como em forma gráfica (Figura 29). Podem ser consultados os valores máximos e mínimos da estrutura deformada, os momentos fletores, esforços de corte, esforços normais, esforços de torção e as respetivas tensões.

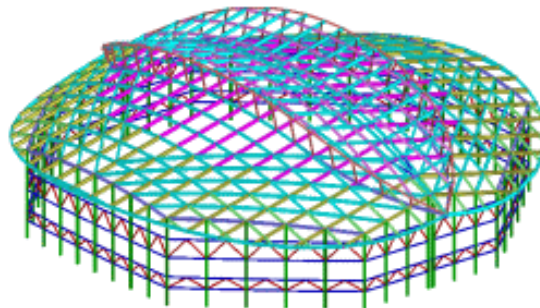


Figura 29 - Estrutura passível de analisar com o Multiframe [33]

Por fim pode-se ainda destacar o programa da empresa Computers & Structures, Inc., o SAP2000®, que apresenta uma grande semelhança com os programas Multiframe, Tricalc e o Robot.

## 2.2 *Softwares* de computação e visualização gráfica

### 2.2.1 Características gerais dos *softwares* existentes no mercado

Na vertente de *softwares* existente no mercado de computação matemática, que podem ser utilizados para a criação de códigos/aplicações de MEF, pode-se salientar o Fortran®, Matlab®, Maxima, Mathematica®, Maple™, GNU Octave e o Scilab. Estes *softwares* são particularmente usados na área da Engenharia, Física e Matemática, permitindo aos utilizadores realizar diversas atividades como cálculo matricial complexo, análises numéricas e rotinas cíclicas, e apresentam uma linguagem de programação avançada contendo funções pré-definidas. Esta linguagem de programação é designada de alto nível, pois põe ao dispor do utilizador uma linguagem de programação amigável, onde é utilizada simbologia com a qual o utilizador está familiarizado (por exemplo na execução de uma operação matemática como efetuar uma soma é utilizada a simbologia matemática corrente), sendo esta compilada

internamente na linguagem máquina (binária normalmente). No âmbito do MEF esta linguagem de programação é amplamente utilizada na resolução de problemas matriciais. No caso mais específico da análise estrutural é utilizada no cálculo das matrizes de rigidez, montagem da matriz de rigidez global de um determinado problema em análise e resolução dos respetivos sistemas de equações que regem o problema. Normalmente, estes programas recorrem à programação condicionada e cíclica, ao cálculo diferencial e integral assim como à utilização de variáveis simbólicas. Por outro lado, a entrada de dados normalmente não é muito intuitiva e a opção mais comum é discretizar o domínio do problema, em forma de vetores ou como opção através de ferramentas de desenho com introdução das coordenadas dos nós da estrutura. De uma forma global consegue-se obter como solução as reações nos apoios da estrutura, assim como as tensões e deformações de cada elemento que a constitui. Mais uma vez existem *softwares* que recorrem à construção gráfica e às potencialidades gráficas destes *softwares* de forma a permitir visualizar a estrutura deformada e analisar graficamente as tensões em cada elemento .[34]

Pode ser consultada muita literatura sobre estes *softwares* com exemplos de implementação de rotinas utilizando o MEF nas obras de “ Ferreira (2009), Kwon e Bang (2000) e Bhatti (2005), para o Matlab®, de Portela e Charafi (2006) para o Maple, de Nikishkov (2010) para o Java, de Smith e Griffiths (2004) para o Fortran ou Bhatti (2005) para o Mathematica” [1].

### 2.2.2 Funcionalidades pretendidas para o *software* a desenvolver

Pretende-se que a ferramenta a desenvolver permita ao utilizador analisar estruturas metálicas reticuladas bidimensionais, com recurso a uma interface gráfica desenvolvida no Matlab® GUIDE. Esta ferramenta deve conter todas as formulações necessárias e desenvolvidas para a análise das respetivas estruturas. Nesta interface o utilizador deve poder optar pelo tipo de modelo que vai utilizar na análise, que pode ser de barra, viga ou estrutura. Após a escolha do modelo, o utilizador deve poder definir a geometria através da inserção de coordenadas dos nós, realizar o desenho da estrutura ou importar a estrutura para a qual pretende obter a solução a partir de um ficheiro do tipo .dxf. No caso da importação da estrutura, o utilizador deve realizar o desenho da mesma num *software* como por exemplo o Autocad e guardar a informação do desenho em formato .dxf, e posteriormente deve abrir o ficheiro no *software* desenvolvido. Deste modo, a apresentação da estrutura é realizada de forma automática no *software*. De seguida, o utilizador deve atribuir todos os parâmetros necessários para obter a resolução do problema, como as condições fronteira, propriedades de cada elemento (área, inércia, massa) e forças exteriores a que a estrutura está sujeita (cargas pontuais, cargas distribuídas), entre outras. É de realçar que, apesar de estes elementos só aceitarem que lhes sejam aplicados carregamentos nos nós, o utilizador não necessita de ter este fator em consideração, pois o programa internamente irá atribuir o respetivo carregamento nodal equivalente. Por fim, o utilizador deve indicar qual o tipo de análise

pretendida, se linear ou quadrática, e após todas as definições necessárias o programa deve obter a solução do problema. Para isto, deve resolver as formulações realizadas recorrendo essencialmente ao cálculo matricial cíclico, cálculo diferencial e integral, envolvendo variáveis simbólicas e o armazenamento de dados intermédios da análise, como o caso da matriz de rigidez dos elementos.

Após o processamento, o *software* deve apresentar a solução do problema numa forma gráfica onde se possam observar a estrutura deformada e os deslocamentos que ocorreram, assim como as tensões que cada elemento constituinte da estrutura está sujeito, através de um código de cores. Deve ainda ser possível consultar todas as informações relativas a cada elemento sobre a forma de tabela, onde se poderão consultar todos os esforços aplicados (axiais, transversos e momentos), reações nos apoios, deslocamentos em cada nó, deformação de cada elemento e tensões instaladas.

### 2.2.3 Seleção do *software* a utilizar no desenvolvimento deste trabalho

O Matlab® foi o *software* escolhido para o desenvolvimento deste trabalho pois, como o nome em Inglês indica (laboratório de matrizes), foi inicialmente desenvolvido por Clever Moler, tendo como foco o cálculo matricial. Desde a primeira versão, lançada em 1984, que este *software* se tornou num sistema computacional muito útil na área da computação numérica e científica. Este *software* tem uma linguagem de programação amplamente estudada, que é intuitiva e de fácil utilização (designada de alto nível), permite ao utilizador manipular matrizes, utilizar variáveis simbólicas, manipular funções (obter zeros, máximos, mínimos, cálculo de derivadas e integrais), contém um ampliado conjunto de funções pré-definidas, programação condicionada e cíclica (*if-end*, *if-else-end*, *for*, *while*) e apresenta uma forte componente de geração gráfica (Matlab® GUIDE, que permite desenvolver aplicações com uma interface gráfica). Com base nestas principais funções que o *software* apresenta, pode-se concluir que este se enquadra perfeitamente nas necessidades e pré-requisitos existentes para o desenvolvimento do *software*, que vão desde:

- Permitir a resolução de diferentes tipos de operações matemáticas,
- Desenvolver algoritmos/rotinas,
- Visualizar os resultados numa forma gráfica e
- Desenvolver uma aplicação com interface gráfica.

É ainda de igual forma importante salientar que este *software* foi escolhido para a realização deste trabalho devido à elevada quantidade de bibliotecas auxiliares que permitem ao utilizador otimizar o tempo de desenvolvimento, pois estas dispõem de funções já previamente desenvolvidas, evitando assim o tempo de criá-las. Por outro lado, o *software* apresenta uma linguagem de programação clara, suporta diferentes tipos de sistemas computacionais (Linux, Windows e Macintosh) e apresenta a possibilidade de criar uma interface gráfica (Matlab® GUIDE) sofisticada, permitindo a

---

operadores inexperientes o acesso ao *software* através de uma interface gráfica intuitiva e de fácil compreensão e utilização. Existe ainda uma grande comunidade de utilizadores (*mathworks*), o que permite o acesso a informações sobre o *software* assim como a um diverso leque de aplicações já desenvolvidas e ao código das mesmas.

A principal desvantagem que este *software* apresenta prende-se na dificuldade inerente de correr as aplicações desenvolvidas num ambiente fora do Matlab® [35-38].

# DESENVOLVIMENTO

## **3.1** Formulação dos elementos a implementar

- 3.1.1 Elementos de barra 2D
- 3.1.2 Elemento de viga 2D
- 3.1.3 Elemento de estrutura 2D

## **3.2** Desenvolvimento do *software*

- 3.2.1 Estrutura
- 3.2.2 Métodos de programação
- 3.2.3 Bases de dados
- 3.2.4 Funcionamento do *software*
- 3.2.5 Validação do *software* desenvolvido



## 3 DESENVOLVIMENTO

### 3.1 Formulação dos elementos a implementar

No presente capítulo é apresentada a formulação dos elementos que compõem o *software* desenvolvido. A formulação descrita segue o procedimento de etapas referido no capítulo 2 da presente dissertação. Mais concretamente, descreve-se a formulação dos elementos unidimensionais de barra, de viga e de estrutura. Expõem-se para os vários elementos enunciados a formulação linear para elementos compostos por 2 nós e a formulação quadrática para elementos compostos por 3 nós. Habitualmente, estes elementos são utilizados no estudo de estruturas reticuladas que, dependendo do tipo de elemento escolhido na análise, podem simular o comportamento de uma estrutura reticulada articulada ou contínua [1]. As formulações apresentadas ao longo da dissertação respeitam e baseiam-se no procedimento apresentado na referência [1], pelo que não será feita novamente menção a esta ao longo deste subcapítulo.

#### 3.1.1 Elementos de barra 2D

Os elementos de barra são usualmente utilizados para descrever o comportamento de treliças, caracterizadas pelo comportamento que apresentam na ligação entre vários elementos, isto é, comportam-se como rótulas sem fricção. Assim, encontram-se sujeitas apenas a esforços de tração ou compressão pura (sofrem deformação apenas na direção do seu eixo axial). Na análise bidimensional, cada nó pode sofrer um deslocamento ao longo da barra (sistema de coordenadas local) ou deslocamentos nos eixos X e Y (sistemas de coordenadas global). No desenvolvimento do elemento referido, considera-se que a secção do elemento é constante ao longo do eixo axial e que apresenta um comportamento linear elástico [18].

##### 3.1.1.1 Formulação linear

Etapa 0 – O elemento é composto por dois graus de liberdade que compõem as variáveis de campo, isto é, um deslocamento em cada nó ( $u_e$ ) que se desenvolve na direção do eixo axial da barra.

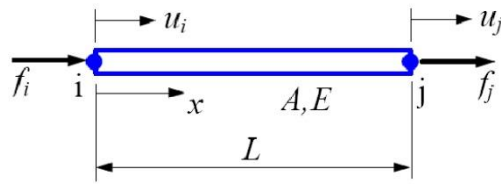


Figura 30 – Simbologia do elemento de barra unidimensional de 2 nós [1]

**Etapa 1** – Os vetores que descrevem as variáveis nodais e as forças nodais, em concordância com a simbologia ilustrada na Figura 30, tomam a forma de  $\mathbf{a}_e$  e  $\mathbf{f}_e$ , respetivamente,

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

**Etapa 2** – O campo de deslocamentos no interior de um dado elemento ( $u_e$ ), relaciona-se com  $\mathbf{a}_e$  e funções de interpolação ( $\mathbf{N}$ ), que são usualmente obtidas através de polinómios ou através de séries trigonométricas. Matematicamente um deslocamento segundo  $x$  rege-se pela seguinte expressão:

$$u_e = \mathbf{N}\mathbf{a}_e. \quad (17)$$

Os polinómios compostos pelos coeficientes ( $\alpha$ ) que servem de base à obtenção das funções de interpolação (funções de forma) de elementos unidimensionais são do tipo:

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \dots \quad (18)$$

A escolha do número de monómios que constituem o polinómio deve ser igual ao número de variáveis nodais disponíveis. De acordo com Campilho [1], no caso de elementos que possuam deslocamentos e rotações, deve-se contabilizar um deslocamento por nó e todas as rotações disponíveis.

Assim, para o elemento em estudo tem-se o seguinte polinómio como ponto de partida:

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (19)$$

A partir do polinómio consegue-se definir a expressão geral do campo de deslocamentos ( $u_e$ ),

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (20)$$

Substituindo na expressão (20) a posição de  $x$  nas extremidades da barra, definem-se as expressões matemáticas que descrevem o comportamento de  $u_i$  e  $u_j$ ,

$$\begin{aligned} u_i &= u(x=0) = \alpha_1 \\ u_j &= u(x=L) = \alpha_1 + \alpha_2 L. \end{aligned} \quad (21)$$

$L$  na expressão (21) representa o comprimento da barra e ao escrever a expressão (21) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Na equação matricial (22) identifica-se a presença do vetor  $\mathbf{a}_e$  previamente definido, podendo-se assim escrever a equação matricial na seguinte forma:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}. \quad (23)$$

Com base nas expressões (23) e (17), a expressão que define o campo de deslocamentos toma a seguinte forma:

$$u_e = \mathbf{N}\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}. \quad (24)$$

Com recurso à expressão (20) na forma matricial, a expressão que define o campo de deslocamentos toma a seguinte forma:

$$u_e = [\alpha_1 \quad \alpha_2] \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Assim, através das expressões (24) e (25) pode-se descrever a expressão que permite obter as funções de interpolação para o elemento de barra linear por intermédio da expressão seguinte:

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1}. \quad (26)$$

Como tal,

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \{1 \quad x\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \left[ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right]. \quad (27)$$

Pode-se atestar pela análise da Figura 31 que as funções de interpolação são iguais à unidade no nó a que se referem, e nulas nos restantes nós.

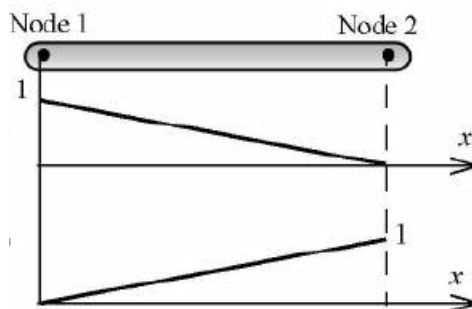


Figura 31 – Representação gráfica das funções de interpolação [39]

Portanto e recuperando a expressão (17), consegue-se escrever a função que permite determinar o deslocamento ( $u_e$ ) em qualquer ponto da barra para um valor de  $x$  entre 0 e  $L$ ,

$$u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2. \quad (28)$$

Na formulação do elemento até à etapa 2 fica claro que os deslocamentos são as variáveis de campo primárias do elemento. É importante lembrar nesta fase que um comportamento característico do MEF é que este apenas garante a continuidade das variáveis primárias entre elementos. Isto é, o valor das variáveis de campo primárias é igual para os diferentes elementos que partilham um nó comum. O mesmo comportamento já não é garantido para as designadas variáveis derivadas (deformações e tensões), que recorrentemente apresentam descontinuidades entre elementos.

Etapa 3 – Esta etapa consiste na definição do vetor de deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Tendo-se por base a relação deformação-deslocamento tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (29)$$

Substituindo o deslocamento na expressão mencionada supra tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dx} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Define-se então a designada matriz deformação  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{B} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Etapa 4 – Definir o vetor de tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) através do vetor de deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Com auxílio da lei de Hooke, pela relação tensão-deformação tem-se:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (32)$$

ou,

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}_e. \quad (33)$$

Etapa 5 – Esta última etapa permite definir a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{k}_e$  e o vetor de forças nodais  $\mathbf{f}_e$  através do PTV.

**Trabalho interno = Trabalho externo**

$$\int_V \delta \varepsilon^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta u^T \underline{p} dL$$

Figura 32 – Expressão fundamental do PTV [26]

Ao analisar a expressão apresentada na Figura 32 tem-se,

$$\begin{aligned} dV &= A dx \\ dL &= dx \\ \delta \varepsilon &= \mathbf{B} \delta \mathbf{a}_e \Leftrightarrow \delta \varepsilon^T = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{a}_e^T \\ \delta u &= \mathbf{N} \delta \mathbf{a}_e \Leftrightarrow \delta u^T = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{a}_e^T. \end{aligned} \quad (34)$$

Através das relações descritas em (33) e (34), a expressão da Figura 32 toma a forma:

$$\int_0^L \mathbf{B}^T \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} dx = \int_0^L \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{N}^T p dx. \quad (35)$$

Simplificando tem-se,

$$\int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A dx \cdot \mathbf{a} = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx. \quad (36)$$

A expressão (36) é idêntica à Lei de Hooke ao descrever o comportamento linear elástico de uma mola submetida a um dado carregamento. Em que, a deformação é diretamente proporcional ao esforço aplicado  $F$ ,

$$F = Kx. \quad (37)$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \int_0^L \mathbf{N}^T p dx \\ \mathbf{k}_e &= \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A dx, \end{aligned} \quad (38)$$

e,

$$x = \mathbf{a}. \quad (39)$$

Portanto,  $\mathbf{k}_e$  pode ser escrito sobre a forma de,

$$\mathbf{k}_e = AE \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx. \quad (40)$$

$AE$ , conforme descrito anteriormente, tem um comportamento constante ao longo do elemento, pelo que pode ser removido do interior do integral. Resolvendo a equação (40) com recurso à equação (31), a matriz de rigidez do elemento toma a forma de,

$$\mathbf{k}_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

e  $\mathbf{f}_e$  pode ser escrito sobre a forma de:

$$\mathbf{f}_e = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx. \quad (42)$$

### 3.1.1.1.1 Transformação de coordenadas

A matriz de rigidez que define o comportamento do elemento encontra-se formulada, como referido anteriormente, de acordo com o sistema de coordenadas local. Para que o elemento se torne verdadeiramente versátil (utilizado com qualquer orientação e combinado com outros elementos) é importante introduzir um novo sistema de coordenadas, designado como sistema de coordenadas global.

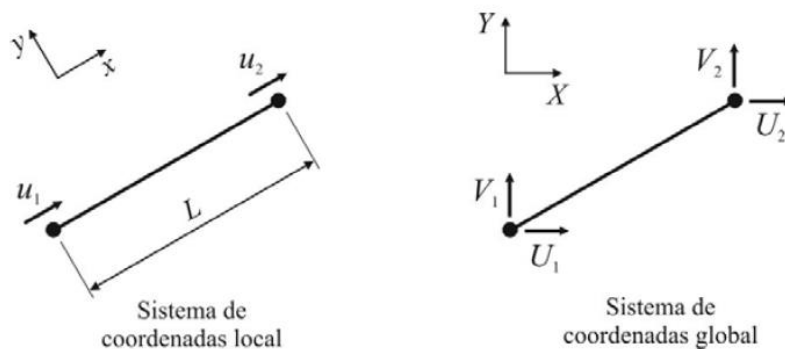


Figura 33 – Sistemas de coordenadas [1]

De acordo com a Figura 33 pode-se definir o vetor de variáveis nodais do sistema de coordenadas global (por uma questão de interpretação as variáveis locais são escritas em minúsculas e as variáveis globais escritas em maiúsculas),

$$\mathbf{A}_e = \{U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2\}^T. \quad (43)$$

As coordenadas dos deslocamentos globais são obtidas com recurso à projeção das coordenadas locais no novo sistema de coordenadas, conforme apresentado na Figura 34.

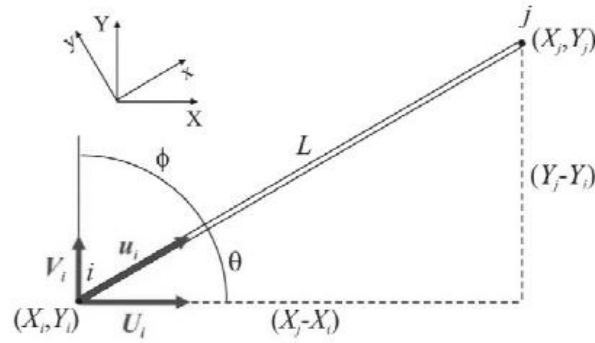


Figura 34 – Projeções do deslocamento local [1]

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \\ u_j &= U_j \cos \theta + V_j \sin \theta. \end{aligned} \quad (44)$$

Define-se ainda  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  e  $L$  como

$$l = \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \quad m = \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (45)$$

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}. \quad (46)$$

Habitualmente,  $l$  e  $m$  são denominados como cossenos diretores. Com base no definido supra e reescrevendo a expressão (44) na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{T} \mathbf{A}_e, \quad (47)$$

sendo assim  $\mathbf{T}$  designada como matriz de transformação. A obtenção da matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais,  $\mathbf{K}_e$ , é conseguida pela igualdade entre a energia de deformação de um elemento nas coordenadas locais,  $u_e$  e globais,  $U_e$ ,

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{a}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{a}_e \quad (48)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e. \quad (49)$$

Substituindo a expressão (47) na (48) obtém-se,

$$\mathbf{a}_e^T = \mathbf{A}_e^T \mathbf{T}^T \quad (50)$$

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{A}_e^T \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} \mathbf{A}_e. \quad (51)$$

Por igualdade das expressões (49) e (51) tem-se que,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}. \quad (52)$$

Logo

$$\mathbf{K}_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Por fim, o sistema global de equações que permite obter as reações é análogo ao apresentado em (14).

### 3.1.1.1.2 Estado de tensão

Dado que o elemento em estudo se encontra sujeito apenas a esforços axiais, recorrendo à expressão (32) define-se a expressão matricial que permite determinar a tensão axial do elemento  $\sigma_{axial}$ ,

$$\sigma_{axial} = E \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \mathbf{a}_e. \quad (54)$$

Recorrendo às expressões (33) e (47) pode-se escrever a equação matricial que permite obter o estado de tensões do elemento através das coordenadas globais,

$$\sigma_{axial} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \mathbf{T} \mathbf{A}_e = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}. \quad (55)$$

Assim pode-se escrever a tensão e a força axial  $F$  a que o elemento se encontra sujeito,

$$\sigma_{axial} = \frac{E}{L} [-l \quad -m \quad l \quad m] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (56)$$

$$F = \frac{AE}{L} [-l \quad -m \quad l \quad m] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}. \quad (57)$$

Os valores positivos indicam tração e os negativos compressão para  $\sigma$  e  $F$ .

### 3.1.1.2 Formulação quadrática

**Etapa 0** – O elemento é composto por três graus de liberdade que compõem as variáveis de campo, isto é, um deslocamento em cada nó ( $u_e$ ) que se desenvolve na direção do eixo axial da barra.

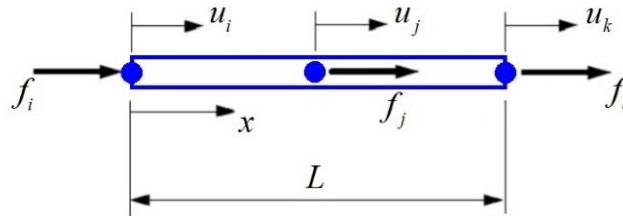


Figura 35 – Simbologia do elemento de barra unidimensional de 3 nós

**Etapa 1** – Os vetores que descrevem variáveis nodais e as forças nodais, em concordância com a simbologia ilustrada na Figura 35, tomam a forma de  $\mathbf{a}_e$  e  $\mathbf{f}_e$ , respetivamente,

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{Bmatrix}. \quad (58)$$

**Etapa 2** – O campo de deslocamentos no interior de um dado elemento ( $u_e$ ) relaciona-se com as suas variáveis nodais ( $\mathbf{a}_e$ ) e funções de interpolação ( $\mathbf{N}$ ), que são usualmente obtidas através de polinómios ou através de séries trigonométricas. Matematicamente um deslocamento segundo  $x$  rege-se pela seguinte expressão:

$$u_e = \mathbf{N}\mathbf{a}_e. \quad (59)$$

Com base no referido na formulação do elemento anterior, para o elemento em estudo tem-se o polinómio seguinte como ponto de partida,

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2. \quad (60)$$

A partir do polinómio consegue-se definir a expressão geral do campo de deslocamentos ( $u_e$ ),

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2. \quad (61)$$

Substituindo na expressão (61) a posição de  $x$  nas extremidades da barra, definem-se as expressões matemáticas que descrevem o comportamento de  $u_i$ ,  $u_j$  e  $u_k$ ,

$$\begin{aligned}
 u_i &= u(x=0) = \alpha_1 \\
 u_j &= u\left(x = \frac{L}{2}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{L}{2} + \alpha_3 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
 u_k &= u(x=L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 (L)^2.
 \end{aligned} \tag{62}$$

Ao escrever a expressão (62) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}. \tag{63}$$

Com base no procedimento mencionado no elemento anterior, as funções de interpolação do elemento de barra de 3 nós são:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \{1 \quad x \quad x^2\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\mathbf{N} = \left[ \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1 \quad \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right]. \tag{65}$$

Pode-se atestar pela análise da Figura 36, que as funções de interpolação são iguais à unidade no nó a que se referem, e nulas nos restantes nós.

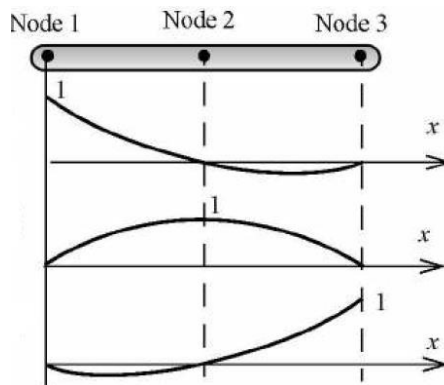


Figura 36 – Representação gráfica das funções de interpolação [39]

Portanto e recuperando a expressão (59) consegue-se escrever a função que permite determinar o deslocamento  $u_e$  em qualquer ponto da barra para um valor de  $x$  entre 0 e  $L$ ,

$$u = \begin{bmatrix} \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1 & \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} & \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (66)$$

$$u = \left( \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1 \right) u_i + \left( \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) u_j + \left( \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right) u_k.$$

**Etapa 3** – Esta etapa consiste na definição do vetor de deformações ( $\epsilon$ ). Tendo-se por base a relação deformação-deslocamento tem-se:

$$\epsilon = \epsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (67)$$

Define-se então a designada matriz deformação  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} & \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (68)$$

**Etapa 4** – Definir o vetor de tensões ( $\sigma$ ) através do vetor de deformações ( $\epsilon$ ). Com auxílio das leis constitutivas pela relação tensão-deformação tem-se,

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (69)$$

ou,

$$\sigma_e = \mathbf{DB}\mathbf{a}_e. \quad (70)$$

**Etapa 5** – Esta última etapa permite definir a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{k}_e$  e o vetor de forças nodais  $\mathbf{f}_e$  através do PTV.

Portanto  $\mathbf{k}_e$  pode ser escrito sobre a forma de,

$$\mathbf{k}_e = AE \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx. \quad (71)$$

Resolvendo a equação (71), e por substituição da equação (68), a matriz de rigidez do elemento toma a forma de

$$\mathbf{k}_e = \frac{AE}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

e  $\mathbf{f}_e$  pode ser escrito sobre a forma de

$$\mathbf{f}_e = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx. \quad (73)$$

### 3.1.1.2.1 Transformação de coordenadas

De modo análogo ao elemento de barra linear a matriz de rigidez que define o comportamento do elemento encontra-se de acordo com o sistema de coordenadas local. Como referido anteriormente, é importante introduzir um novo sistema de coordenadas designado como sistema de coordenadas global.

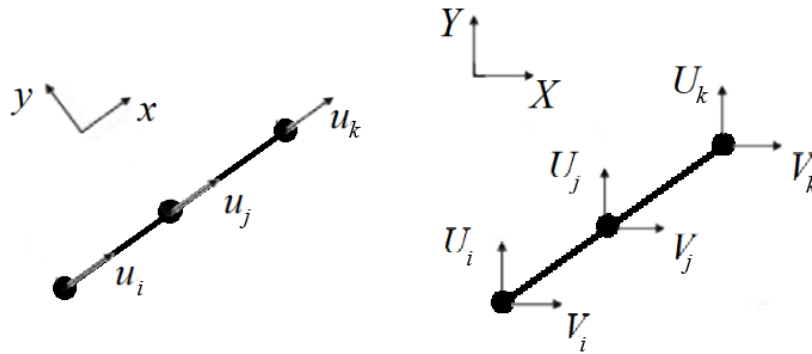


Figura 37 – Sistemas de coordenadas locais e globais

De acordo com a Figura 37 pode-se definir o vetor de variáveis nodais do sistema de coordenadas global,

$$\mathbf{A}_e = \{U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_k \quad V_k\}^T. \quad (74)$$

As coordenadas dos deslocamentos globais são obtidas com recurso à projeção das coordenadas locais no novo sistema de coordenadas, conforme se mostra na Figura 38,

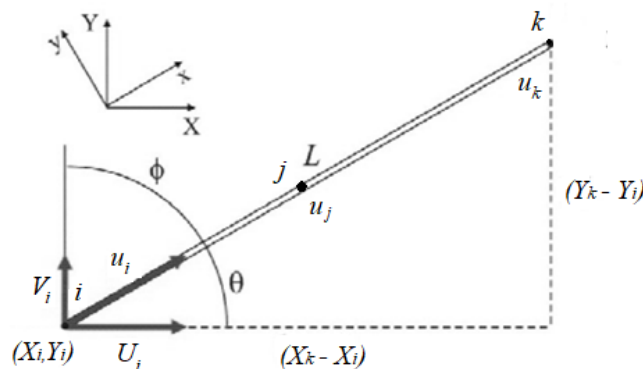


Figura 38 – Projeções do deslocamento local

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \\ u_j &= U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \\ u_k &= U_k \cos \theta + V_k \sin \theta. \end{aligned} \quad (75)$$

Definem-se ainda  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  e  $L$  como

$$l = \cos \theta = \frac{X_k - X_i}{L}, \quad m = \sin \theta = \frac{Y_k - Y_i}{L} \quad (76)$$

$$L = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}. \quad (77)$$

Habitualmente,  $l$  e  $m$  são denominados como cossenos diretores. Com base no definido supra e reescrevendo a expressão (44) na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{T}\mathbf{A}_e. \quad (79)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  é designada como matriz de transformação e a obtenção da matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais,  $\mathbf{K}_e$ , é obtida através do mesmo processo descrito na formulação anterior,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} \quad (80)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{AE}{3L} \begin{bmatrix} 7l^2 & 7ml & -8l^2 & -8ml & l^2 & ml \\ 7lm & 7m^2 & -8lm & -8m^2 & lm & m^2 \\ -8l^2 & -8ml & 16l^2 & 16ml & -8l^2 & -8ml \\ -8lm & -8m^2 & 16lm & 16m^2 & -8lm & -8m^2 \\ l^2 & ml & -8l^2 & -8ml & 7l^2 & 7ml \\ lm & m^2 & -8lm & -8m^2 & 7lm & 7m^2 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

### 3.1.1.2.1.1 Análise crítica da formulação

Considere-se a situação genérica de um elemento de barra quadrático de comprimento  $L$  disposto num plano cartesiano ortonormado com posição do nó  $i$  nas coordenadas  $0,0$  e do nó  $k$  nas coordenadas  $L \cos \theta, L \sin \theta$ . A barra está sujeita a um esforço  $F_5$  e com as condições fronteira no nó  $i$ , apoio duplo e nó  $k$  com movimento livre na direção  $x$ .

Ao se formular o problema descrito na sua forma matricial com recurso à expressão (14) tem-se,

$$\frac{AE}{3L} \begin{bmatrix} 7l^2 & 7ml & -8l^2 & -8ml & l^2 & ml \\ 7lm & 7m^2 & -8lm & -8m^2 & lm & m^2 \\ -8l^2 & -8ml & 16l^2 & 16ml & -8l^2 & -8ml \\ -8lm & -8m^2 & 16lm & 16m^2 & -8lm & -8m^2 \\ l^2 & ml & -8l^2 & -8ml & 7l^2 & 7ml \\ lm & m^2 & -8lm & -8m^2 & 7lm & 7m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_5 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_3 \end{Bmatrix}. \quad (82)$$

Ao analisar a expressão (82) de acordo com as condições do problema genérico condensando o sistema tem-se que

$$\frac{AE}{3L} \begin{bmatrix} 16l^2 & 16ml & -8l^2 \\ 16lm & 16m^2 & -8lm \\ -8l^2 & -8ml & 7l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \\ U_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_5 \end{Bmatrix}. \quad (83)$$

Ao escrever o sistema de equações tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{AE}{3L}(16l^2U_j) + \frac{AE}{3L}(16mlV_j) - \frac{AE}{3L}(8l^2U_k) &= 0 \\ \frac{AE}{3L}(16lmU_j) + \frac{AE}{3L}(16m^2V_j) - \frac{AE}{3L}(8lmU_k) &= 0 \\ -\frac{AE}{3L}(8l^2U_j) - \frac{AE}{3L}(8mlV_j) + \frac{AE}{3L}(7l^2U_k) &= F_5. \end{aligned} \quad (84)$$

Ao reescrever a segunda equação em ordem a  $V_j$  e a terceira equação do sistema em ordem a  $U_k$  substituindo  $V_j$  tem-se,

$$\begin{aligned} V_j &= \frac{-(16lmU_j) + (8lmU_k)}{16m^2} \\ U_k &= \frac{\left( \frac{F_5 3L}{AE} + (8l^2U_j) + \left( 8ml \frac{-(16lmU_j) + (8lmU_k)}{16m^2} \right) \right)}{7l^2} \\ U_k &= \frac{\left( \frac{F_5 3L}{AE} \right)}{3l^2}. \end{aligned} \quad (85)$$

Ao colocar  $V_j$  em ordem a  $U_j$  tem-se,

$$V_j = \frac{\left( -(16lmU_j) + \left( 8m \frac{\left( \frac{F_5 3L}{AE} \right)}{3l} \right) \right)}{16m^2} = \frac{-(lU_j)}{m} + \frac{\left( 8m \frac{\left( \frac{F_5 3L}{AE} \right)}{3l} \right)}{16m^2}. \quad (86)$$

Ao substituir  $V_j$  e  $U_k$  na primeira expressão em (84) tem-se,

$$\left(16l^2U_j\right) + \left(16ml \frac{-lU_j}{m} + \frac{8m \left(\frac{F_5 3L}{AE}\right)}{16m^2}\right) - \left(8l^2 \frac{\left(\frac{F_5 3L}{AE}\right)}{3l^2}\right) = 0$$

$$\left(16l^2U_j\right) - \left(16l^2U_j\right) + \frac{l}{m} \left(8m \frac{\left(\frac{F_5 3L}{AE}\right)}{3l}\right) - \left(8l^2 \frac{\left(\frac{F_5 3L}{AE}\right)}{3l^2}\right) = 0 \quad (87)$$

$$0 = 0.$$

Chega-se a uma proposição verdadeira, isto é, o sistema é possível, mas indeterminado. O número de equações que definem o problema não são suficientes para a sua resolução, já que existe um número de incógnitas superior.

Com o intuito de assegurar o comportamento incorreto da formulação com base em informação disponibilizada pela literatura, aplica-se de seguida a formulação na resolução de um exercício exemplo, já resolvido e documentado na referência [39]. Conforme referido serve o exemplo da Figura 39 para demonstrar o incoerente comportamento da formulação através da resolução de um exercício trivial da mecânica dos materiais.

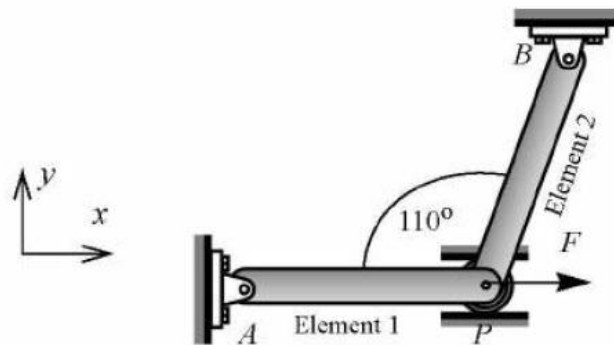


Figura 39 – Modelo utilizado como exercício exemplo [39]

Dados do modelo,

$$F = 20 \text{ kN} ; A_1 = A_2 = 100 \text{ mm}^2 ; E = 200 \text{ GPa}$$

$$L_{AP} = 200 \text{ mm} ; L_{BP} = 250 \text{ mm}$$

Primeiramente define-se a Tabela 1 auxiliar que simplifica a construção das matrizes de rigidez que definem cada elemento separadamente. As matrizes de rigidez de cada elemento em coordenadas globais são obtidas através da expressão (81).

Tabela 1 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do exercício exemplo da referência [39].

$EI$	Nó $i$	Nó $j$	Nó $k$	$AE/3L$	$l$	$m$	$l^2$	$lm$	$m^2$
1	A	C	P	33,3(3)e6	1	0	1	0	0
2	P	D	B	26,6(6)e6	0,342	0,9397	0,11698	0,3214	0,8830

$$\mathbf{K}_1 = 33,3(3) \times 10^6 \begin{bmatrix} 7 & 0 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 16 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\mathbf{K}_2 = 26,6(6) \times 10^6 \begin{bmatrix} 0,8187 & 2,2498 & -0,93584 & -2,5712 & 0,11698 & 0,3214 \\ 2,2498 & 6,181 & -2,5712 & -7,064 & 0,3214 & 0,8830 \\ -0,93584 & -2,5712 & 1,8717 & 5,1424 & -0,93584 & -2,5712 \\ -2,5712 & -7,064 & 5,1424 & 14,128 & -2,5712 & -7,064 \\ 0,11698 & 0,3214 & -0,93584 & -2,5712 & 0,8187 & 2,2498 \\ 0,3214 & 0,8830 & -2,5712 & -7,064 & 2,2498 & 6,181 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$  é assemblada através da relação entre os graus de liberdade considerando as substituições na expressão  $33,3(3) \times 10^6$  por  $f$  e  $26,6(6) \times 10^6$  por  $g$ , logo tem-se,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7f & 0 & -8f & 0 & 1f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8f & 0 & 16f & 0 & -8f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1f & 0 & -8f & 0 & 7f + 0,8187g & 2,2498g & -0,93584g & -2,5712g & 0,11698g & 0,3214g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2498g & 6,181g & -2,5712g & -7,064g & 0,3214g & 0,8830g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,93584g & -2,5712g & 1,8717g & 5,1424g & -0,93584g & -2,5712g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5712g & -7,064g & 5,1424g & 14,128g & -2,5712g & -7,064g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,11698g & 0,3214g & -0,93584g & -2,5712g & 0,8187g & 2,2498g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3214g & 0,8830g & -2,5712g & -7,064g & 2,2498g & 6,181g \end{bmatrix} \quad (89)$$

Formula-se o problema de acordo com o exposto na expressão (14), que permite resolver o problema em análise,

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \\ U_C \\ V_C \\ U_P \\ V_P \\ U_D \\ V_D \\ U_B \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{cy} \\ 0 \\ 0 \\ R_{Bx} \\ R_{By} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (90)$$

Por condensação do sistema tem-se,

$$\begin{bmatrix} f & 0 & -8f & 0 & 1f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8f & 0 & 16f & 0 & -8f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1f & 0 & -8f & 0 & 7f + 0,8187g & 2,2498g & -0,93584g & -2,5712g & 0,11698g & 0,3214g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2498g & 6,181g & -2,5712g & -7,064g & 0,3214g & 0,8830g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,93584g & -2,5712g & 1,8717g & 5,1424g & -0,93584g & -2,5712g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5712g & -7,064g & 5,1424g & 14,128g & -2,5712g & -7,064g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,11698g & 0,3214g & -0,93584g & -2,5712g & 0,8187g & 2,2498g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3214g & 0,8830g & -2,5712g & -7,064g & 2,2498g & 6,181g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ V_A \\ U_C \\ V_C \\ U_P \\ V_P \\ U_D \\ V_D \\ U_B \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{cy} \\ 0 \\ 0 \\ R_{Bx} \\ R_{By} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (91)$$

$$\begin{bmatrix} 16f & 0 & -8f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8f & 0 & 7f + 0,818g & -0,93584g & -2,5712g \\ 0 & 0 & -0,93584g & 1,8717g & 5,1424g \\ 0 & 0 & -2,5712g & 5,1424g & 14,128g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_C \\ V_C \\ U_P \\ U_D \\ V_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (92)$$

Ao analisar-se o sistema verifica-se que  $V_C$  é zero, como esperado. Escreve-se de seguida o sistema de equações,

$$\begin{aligned} 16fU_C - 8fU_P &= 0 \\ -8fU_C + (7f + 0,818g)U_P - 0,93584gU_D - 2,5712gV_D &= 20000 \\ -0,93584gU_P + 1,8717gU_D + 5,1424gV_D &= 0 \\ -2,5712gU_P + 5,1424gU_D + 14,128gV_D &= 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Procede-se à resolução do sistema, que toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 U_C &= \frac{1}{2}U_P \\
 U_P &= \frac{20000 + 2,5712gV_D + 0,93584gU_D}{-4f + 7f + 0,818g} \\
 U_D &= \frac{0,93584gU_P - 5,1424gV_D}{1,8717g} \\
 V_D &= \frac{+2,5712gU_P - 5,1424gU_D}{14,128g}.
 \end{aligned} \tag{94}$$

Procedendo à substituição de  $U_D$  na quarta equação da expressão (94) tem-se,

$$\begin{aligned}
 14,128gV_D &= +2,5712gU_P - \frac{5,1424g0,93584U_P}{1,8717} + \frac{5,1424g5,1424V_D}{1,8717} \\
 14,128gV_D - 14,128gV_D &= 2,5712gU_P - 2,5712gU_P
 \end{aligned} \tag{95}$$

$$0 = 0.$$

Novamente, o sistema é possível mas indeterminado para o nó central do segundo elemento que compõem o exercício exemplo. A matriz torna-se singular e poderá apresentar infinitas soluções possíveis ou nenhuma. Já no que diz respeito ao primeiro elemento, as transformações de coordenadas não impõem nenhuma limitação na resolução, uma vez que o eixo das abcissas do sistema de coordenadas global mantém a mesma direção do único eixo do sistema de coordenadas local do elemento.

A resolução do sistema de equações (94) permite obter os deslocamentos nodais de  $U_P$  previstos na bibliografia referida e conseqüentemente o deslocamento  $U_C$ ,

$$\begin{aligned}
 (3f + 0,818g)U_P - \frac{0,93584g0,93584U_P}{1,8717} &= 20000 \\
 U_P &= \frac{20000}{109\,335\,476,6595} = 0,0001829 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{96}$$

$$U_C = \frac{1}{2}U_P = 0,0000914 \text{ m.} \tag{97}$$

Confirma-se que o deslocamento  $U_C$  obtido é exato, uma vez que o deslocamento do primeiro elemento, de acordo com a mecânica dos materiais, apresenta um

comportamento linear ao longo do seu comprimento para o tipo de solicitação ao qual se encontra sujeito,

$$u_e = \frac{FL}{EA}. \quad (98)$$

Isto é, como  $F$  é constante e não varia ao longo de  $L$ , pode-se escrever a expressão da reta que descreve o deslocamento ao longo do elemento com base nos deslocamentos obtidos nos nós  $A$  e  $P$ . Assim, a expressão que descreve o deslocamento em ordem a  $L$  toma a seguinte forma,

$$y = \frac{u_p}{L} x. \quad (99)$$

Quando  $x = L/2$ , pela expressão (99)  $u_C$  é igual a,

$$u_C = \frac{u_p}{2}. \quad (100)$$

Confirma-se assim que a formulação quadrática apresentada para o elemento de barra, que permite obter a expressão (97), define corretamente o comportamento do deslocamento do nó  $C$  apenas quando a transformação de coordenadas mantém o eixo local da barra coincidente com o eixo global do sistema.

#### 3.1.1.2.1.2 Reformulações analisadas

Foram concretizadas diferentes abordagens ao comportamento impróprio que a transformação de coordenadas provoca quando empregue a elementos de barra quadráticos, com o intuito de resolver o comportamento impróprio da transformação.

Numa primeira abordagem recorre-se ao teorema de Pitágoras e a uma das duas expressões, que definem o comportamento do nó central de um elemento quadrático genérico, e aplica-se essa metodologia ao exercício modelo exposto na Figura 40.

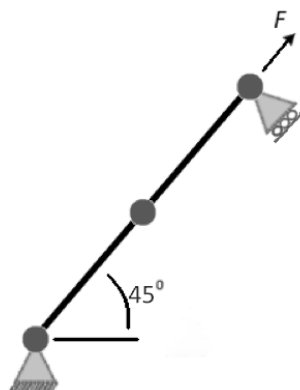


Figura 40 – Primeiro modelo utilizado na reformulação da transformação de coordenadas

Dados do primeiro modelo,

$$F = 10 \text{ kN} ; A = 100 \text{ mm}^2 ; E = 200 \text{ GPa} ; L = 2000 \text{ mm}$$

A Tabela 2 auxilia na construção das matrizes de rigidez que definem cada elemento separadamente.

Tabela 2 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro exercício modelo.

$EI$	$AE/3L$	$l$	$m$	$l^2$	$lm$	$m^2$
1	3,3(3)e6	0,7071	0,7071	0,5	0,5	0,5

A matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais toma a seguinte forma,

$$\mathbf{k}_1 = 3,3(3) \times 10^6 \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

A metodologia utilizada exige que se saiba o valor respeitante ao deslocamento do nó central do elemento, em coordenadas locais. Posto isto, e de forma a que a metodologia em análise seja o mais abrangente possível, verifica-se se uma nova matriz de transformação, que mantenha o nó central em coordenadas locais e os nós externos do elemento em coordenadas globais, se mantém válida na solução de problemas formulados com recurso a elementos de barra quadráticos. Portanto, a nova matriz  $\mathbf{T}$  em análise toma a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}. \quad (102)$$

Com recurso à expressão (80) tem-se a nova matriz de rigidez global que define o elemento,

$$\mathbf{K}_1 = 3,3(3) \times 10^6 \begin{bmatrix} 7l^2 & 7lm & -8l & l^2 & lm \\ 7lm & 7m^2 & -8m & lm & m^2 \\ -8l & -8m & 16 & -8l & -8m \\ l^2 & lm & -8l & 7l^2 & 7lm \\ lm & m^2 & -8m & 7lm & 7m^2 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Formula-se o problema de acordo com o exposto na expressão (14) e incluem-se as modificações impulsionadas pela rotação de apoio existente no nó  $k$ ,

$$r_{kx} = 0$$

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ u_j \\ -0m + u_k l \\ 0l + u_k m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ 0 \\ r_{kx}l - r_{ky}m \\ r_{ky}l + r_{kx}m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fl \\ Fm \end{Bmatrix}. \quad (104)$$

Procede-se ao processo de condensação do sistema de equações matricial e resolve-se este em ordem aos deslocamentos, obtendo-se

$$\begin{aligned} u_j &= 0,0004762 \text{ m} \\ u_k &= 0,0009524 \text{ m} \\ U_k &= 0,0009524l = 0,0006734 \text{ m} \\ V_k &= 0,0009524l = 0,0006734 \text{ m}. \end{aligned} \quad (105)$$

Na análise do deslocamento do nó central reconfirma-se a validade da equação (100) e valida-se a nova matriz  $\mathbf{T}$ , uma vez que esta mantém a continuidade das variáveis primárias entre elementos.

Com recurso ao teorema de Pitágoras, ao valor do deslocamento  $u_j$  e a uma das expressões que descreve o comportamento do nó central em coordenadas globais, pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} u_j &= \sqrt{U_j^2 + V_j^2} \\ \frac{AE}{3L} 16lmU_j + \frac{AE}{3L} 16m^2V_j - \frac{AE}{3L} 8lmU_k - \frac{AE}{3L} 8m^2V_k &= 0 \end{aligned} \quad (106)$$

e resolve-se o sistema de equações em ordem aos deslocamentos, para obter

$$\begin{aligned} U_j &= 0,0003367 \text{ m} \\ V_j &= 0,0003367 \text{ m}. \end{aligned} \quad (107)$$

Através de uma análise geométrica do problema com recurso aos deslocamentos dos nós extremos do problema ou com base no princípio de que o deslocamento ao longo do elemento é linear para o tipo de carregamento imposto, comprova-se que os deslocamentos globais recorrendo ao método proposto se encontram corretos. Como dupla verificação do afirmado anteriormente, formula-se o exercício modelo no *software* FTOOL e obtêm-se os resultados exibidos na Figura 41.

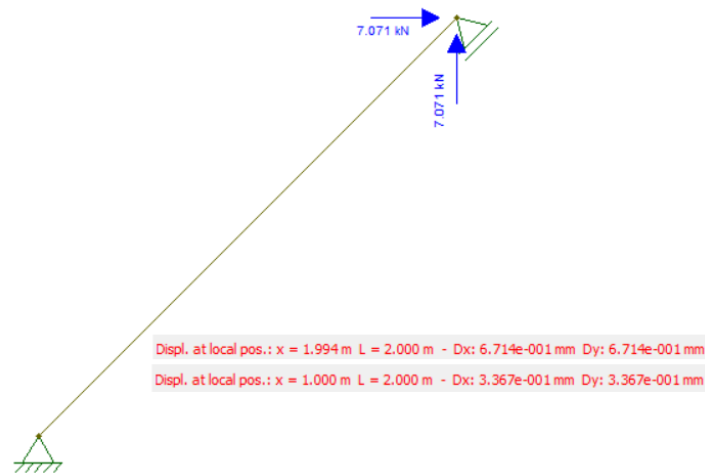


Figura 41 – Resultados obtidos com recurso ao FTOOL

Aparentemente, o método descrito permite obter os deslocamentos em coordenadas globais do nó central. Portanto, para se fundamentar o método aplica-se este a um novo exercício modelo, ilustrado na Figura 42.

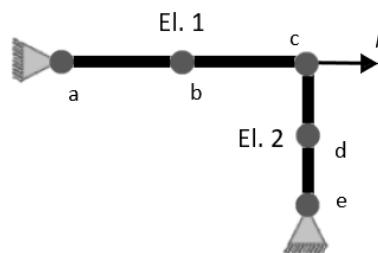


Figura 42 – Segundo exercício modelo

Dados de entrada apresentados no modelo,

$$F = 10 \text{ kN} ; A_1 = A_2 = 100 \text{ mm}^2 ; E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa}$$

$$L_1 = 2000 \text{ mm} ; L_2 = 1000 \text{ mm}$$

A Tabela 3 simplifica o processo de construção das matrizes de rigidez que definem cada elemento separadamente.

Tabela 3 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo exercício modelo.

$EI$	$AE/3L$	$l$	$m$	$l^2$	$lm$	$m^2$
1	3,3(3)e6	1	0	1	0	0
2	6,6(6)e6	0	1	0	0	1

A matriz de rigidez de cada elemento em coordenadas locais toma a seguinte forma, de acordo com (72),

$$\mathbf{k}_1 = 3,3(3) \times 10^6 \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = 6,6(6) \times 10^6 \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Escreve-se novamente a matriz de rigidez, agora em coordenadas globais, com recurso à nova matriz de transformação de acordo com a equação (102). Procede-se ainda à montagem da matriz de rigidez global do modelo 2, com base na relação dos graus de liberdade do modelo. Nesta nova matriz  $\mathbf{K}$  o valor  $3,3(3) \times 10^6$  é substituído pela letra  $r$  e o valor  $6,6(6) \times 10^6$  pela letra  $s$ . Na continuidade do referido, a matriz  $\mathbf{K}$  toma a seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7r & 0 & -8r & 1r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8r & 0 & 16r & -8r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1r & 0 & -8r & 7r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7s & -8s & 0 & 1s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8s & 16s & 0 & -8s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1s & -8s & 0 & 7s \end{bmatrix}. \quad (109)$$

Em concordância com a expressão (14) escreve-se a expressão matricial que descreve o comportamento do modelo 2 em consonância com as condições a que se encontra sujeito,

$$\begin{bmatrix} 7r & 0 & -8r & 1r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8r & 0 & 16r & -8r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1r & 0 & -8r & 7r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7s & -8s & 0 & 1s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8s & 16s & 0 & -8s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1s & -8s & 0 & 7s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_a \\ V_a \\ u_b \\ U_c \\ V_c \\ u_d \\ U_e \\ V_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{ex} \\ R_{ey} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (110)$$

Procede-se ao processo de condensação do sistema de equações matricial e resolve-se este em função dos deslocamentos,

$$16ru_b - 8rU_c = 0 \leftrightarrow U_c = \frac{16ru_b}{8r} = 1 \text{ mm}$$

$$-8ru_b + 7rU_c = F \leftrightarrow u_b = 0,5 \text{ mm}$$

(111)

$$7sV_c - 8su_d = 0 \leftrightarrow V_c = \frac{8su_d}{7s} = 0$$

$$-8sV_c + 16su_d = 0 \leftrightarrow u_d = 0.$$

Novamente, recorrendo ao teorema de Pitágoras, ao valor do deslocamento do nó central em coordenadas locais e ainda uma das expressões que descreve o comportamento do nó central em coordenadas globais para cada elemento, pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$u_b = \sqrt{U_b^2 + V_b^2}$$

$$\frac{AE}{3L} 16l^2 U_b + \frac{AE}{3L} 16ml V_b - \frac{AE}{3L} 8l^2 U_c - \frac{AE}{3L} 8ml V_c = 0$$

(112)

$$u_d = \sqrt{U_d^2 + V_d^2}$$

$$-\frac{AE}{3L} 8lm U_c - \frac{AE}{3L} 8m^2 V_c + \frac{AE}{3L} 16lm U_d + \frac{AE}{3L} 16m^2 V_d = 0.$$

Resolve-se o sistema de equações em ordem aos deslocamentos, obtendo-se

$$U_b = 0,5 \text{ mm}$$

$$V_b = 0$$

$$U_d = 0$$

$$V_d = 0.$$

(113)

O modelo em análise está sujeito a um carregamento que permite antecipar que o segundo elemento irá sofrer uma rotação em torno do nó  $e$  e é notória a incongruência dos resultados obtidos para o deslocamento face àquilo que seria o expectável. Evidentemente, o deslocamento  $U_d$  não pode ser zero com base no referido anteriormente. Portanto, realiza-se uma análise geométrica como a descrita no exercício exemplo do subcapítulo 3.1.1.2.1.1, que se baseia nos deslocamentos dos nós exteriores do elemento e considerando que o seu comportamento é linear elástico. Obtêm-se assim os deslocamentos de  $U_d=0,5 \text{ mm}$  e  $V_d$  aproximadamente 0, este último desprezado dada a sua dimensão face à ordem de grandeza dos restantes deslocamentos. Imediatamente, com este exemplo conclui-se que o método definido

anteriormente não consegue captar e traduzir os deslocamentos globais que um determinado nó central de um dado elemento está sujeito em concordância com o carregamento e condições fronteira definidos. Isto é, o teorema de Pitágoras, como é expectável, define as componentes globais do vetor deslocamento local, e não as componentes da nova posição do nó central em coordenadas globais. Em suma, quando um elemento não está sujeito a nenhuma rotação, o método funciona uma vez que as componentes globais do vetor deslocamento local são coincidentes com os vetores que definem as componentes da nova posição do nó central em coordenadas globais, situação que já não se verifica quando o elemento sofre uma rotação.

Posteriormente, envereda-se numa nova abordagem como tentativa de resolver o comportamento impróprio que a transformação de coordenadas impõe. Esta abordagem assenta num estudo do problema numa perspectiva geométrica, que é posteriormente definido de forma algébrica. Na tentativa de descrever a abordagem ao problema numa forma sucinta e clara, é apresentada cada uma das situações de deformação que um determinado elemento admite sobre a forma de figura (Figura 43 a Figura 49), e acrescenta-se uma tabela com as diferentes condições algébricas que descrevem o comportamento do elemento (Tabela 4 a Tabela 10). Para todas as situações analisadas, a informação referente ao estado inicial do elemento diferencia-se da do estado do elemento deformado através da adição de uma plica à denominação que identifica o estado deformado do elemento.

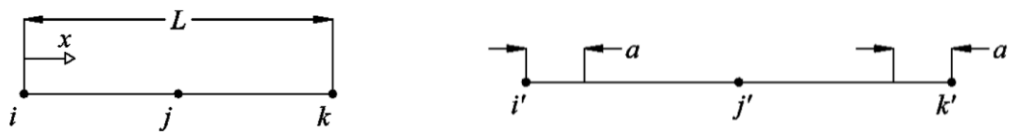


Figura 43 – Primeiro estado de deformação analisado

Tabela 4 – Formulação algébrica para o primeiro estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ e $k$ deslocam-se proporcionalmente	$u_k - u_i = 0$	$j'_x = i'_x + 0,5 \times \overline{i'k'}_x$ $j'_y = i'_y + 0,5 \times \overline{i'k'}_y$ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

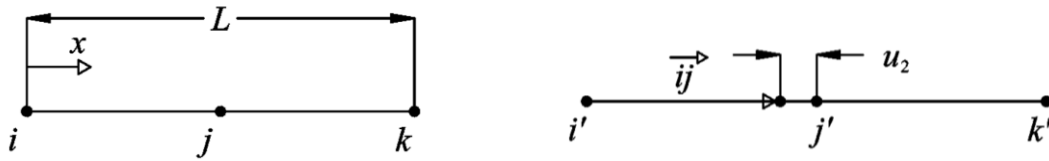


Figura 44 – Segundo estado de deformação analisado

Tabela 5 – Formulação algébrica para o segundo estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ não se desloca e o nó $j$ desloca-se na direção positiva do eixo do $x$	$u_i = 0 \wedge u_j > 0$	$j'_x = i'_x + K \times \bar{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \bar{ij}_y$ $K = \left( \ \bar{ij}\  + u_j \right) / \ \bar{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

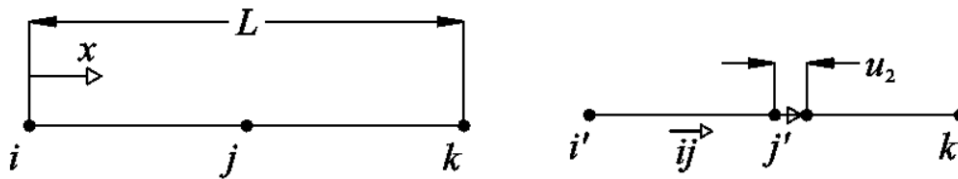


Figura 45 – Terceiro estado de deformação analisado

Tabela 6 – Formulação algébrica para o terceiro estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ não se desloca e o nó $j$ desloca-se na direção negativa do eixo do $x$	$u_i = 0 \wedge u_j < 0$	$j'_x = i'_x + K \times \bar{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \bar{ij}_y$ $K = \left( \ \bar{ij}\  -  u_j  \right) / \ \bar{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

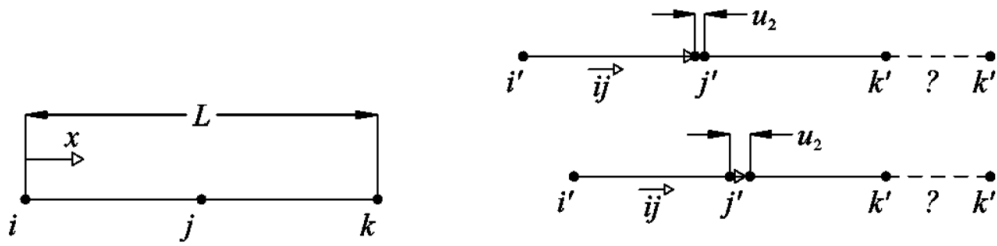


Figura 46 – Quarto estado de deformação analisado

Tabela 7 – Formulação algébrica para o quarto estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ e o nó $j$ deslocam-se na direção negativa do eixo do $x$ . A diferença do deslocamento dos nós é negativa.	$u_i < 0 \wedge u_j < 0$ $\wedge$ $u_i - u_j < 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = \left( \ \vec{ij}\  + u_j \right) / \ \vec{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$
Nó $i$ e o nó $j$ deslocam-se na direção negativa do eixo do $x$ . A diferença do deslocamento dos nós é nula.	$u_i < 0 \wedge u_j < 0$ $\wedge$ $u_i - u_j = 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = 1$ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$
Nó $i$ e o nó $j$ deslocam-se na direção negativa do eixo do $x$ . A diferença do deslocamento dos nós é positiva.	$u_i < 0 \wedge u_j < 0$ $\wedge$ $u_i - u_j > 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = \left( \ \vec{ij}\  -  u_j  \right) / \ \vec{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

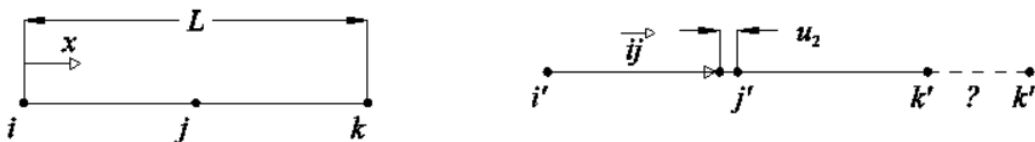


Figura 47 – Quinto estado de deformação analisado

Tabela 8 – Formulação algébrica para o quinto estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ desloca-se na direção negativa do eixo do $x$ e o nó $j$ desloca-se na direção positiva do eixo do $x$ .	$u_i < 0 \wedge u_j > 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = \left( \ \vec{ij}\  + u_j \right) / \ \vec{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

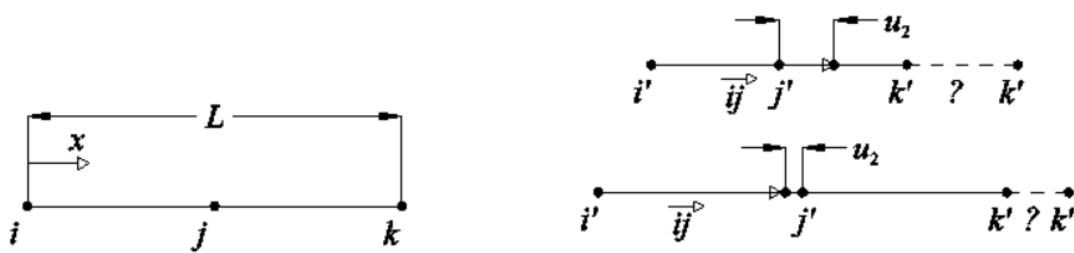


Figura 48 – Sexto estado de deformação analisado

Tabela 9 – Formulação algébrica para o sexto estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ e o nó $j$ deslocam-se na direção positiva do eixo do $x$ . A diferença do deslocamento dos nós é positiva.	$u_i > 0 \wedge u_j > 0$ $\wedge$ $u_i - u_j > 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = \left( \ \vec{ij}\  - u_j \right) / \ \vec{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$
Nó $i$ e o nó $j$ deslocam-se na direção positiva do eixo do $x$ . A diferença do deslocamento dos nós é nula.	$u_i > 0 \wedge u_j > 0$ $\wedge$ $u_i - u_j = 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = 1$ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

Nó  $i$  e o nó  $j$  deslocam-se na direção positiva do eixo do  $x$ . A diferença do deslocamento dos nós é negativa.

$$u_i > 0 \wedge u_j > 0$$

$$\wedge$$

$$u_i - u_j < 0$$

$$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$$

$$j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$$

$$K = \left( \|\vec{ij}\| + u_j \right) / \|\vec{ij}\|$$

$$U_j = j'_x - j_x$$

$$V_j = j'_y - j_y$$

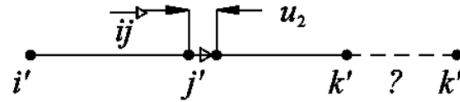
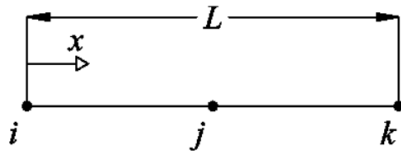


Figura 49 – Sétimo estado de deformação analisado

Tabela 10 – Formulação algébrica para o sétimo estado de deformação.

Descrição	Condição	Formulação algébrica
Nó $i$ desloca-se na direção positiva do eixo do $x$ e o nó $j$ desloca-se na direção negativa do eixo do $x$ .	$u_i > 0 \wedge u_j < 0$	$j'_x = i'_x + K \times \vec{ij}_x$ $j'_y = i'_y + K \times \vec{ij}_y$ $K = \left( \ \vec{ij}\  -  u_j  \right) / \ \vec{ij}\ $ $U_j = j'_x - j_x$ $V_j = j'_y - j_y$

Aplica-se esta abordagem a 3 problemas modelo adiante descritos em pormenor no subcapítulo 3.1.1.4. O procedimento demonstrou-se válido para os dois primeiros modelos, contudo, no terceiro modelo utilizado para validar a formulação obteve-se resultados incongruentes para o deslocamento do nó central do primeiro elemento. Ao analisar em detalhe o problema verifica-se que o valor do deslocamento do nó central em coordenadas locais é de  $-0,1 \times 10^{-3}$  mm, que o deslocamento do nó  $i$  é de  $0,27 \times 10^{-3}$  mm e que o nó  $k$  não sofre qualquer deslocamento.

Portanto, surge a questão *como é que o nó central se desloca na direção negativa do eixo dos  $x$  e o nó inicial se desloca na direção positiva quando o outro extremo do elemento se mantém imóvel?*. Na procura da resposta à questão levantada, percebe-se que o deslocamento local dos nós exteriores de determinados elementos perde o seu verdadeiro significado quando existe mais do que um elemento em análise e se obtêm primeiramente os deslocamentos em coordenadas globais nos nós exteriores. Ou seja, após se descobrir os deslocamentos globais dos nós exteriores do elemento, e recorrendo às expressões (102) e (79) para se obter os deslocamentos em coordenadas locais, os deslocamentos locais dos nós exteriores não se encontram verdadeiramente na direção do eixo local definido para o elemento. De facto, a formulação apresentada

retrata o vetor dos deslocamentos cujas componentes são a posição do respetivo nó em coordenadas globais e revela a direção desse deslocamento. Assim, no caso em análise, o valor que o nó  $i$  apresenta como deslocamento local não se coaduna com o método apresentado e coloca a análise numa condição que não retrata o verdadeiro comportamento do elemento.

O código que permite aplicar a formulação supra descrita encontra-se nos anexos da presente dissertação.

#### 3.1.1.2.1.3 Reformulação da transformação de coordenadas

Nesta fase, entende-se que, quando se procede à transformação de coordenadas do sistema local para global, umas das equações que define o comportamento global do nó central perde significado já que a matriz de rigidez se torna singular e é clara a necessidade de se encontrar uma nova expressão que defina o comportamento do nó central em coordenadas globais.

Com base na necessidade anteriormente referida, sabe-se que o elemento de barra após deformar, quer governado por um comportamento linear, quadrático, cúbico ou outro, pode ser traçado com recurso à equação da reta  $y = mx + b$ , e o declive e a ordenada na origem podem ser obtidos através das posições dos nós exteriores do elemento de barra deformado. Na continuidade do raciocínio descrito, é agora necessário definir a posição inicial do referencial global em que se encontram as coordenadas dos nós exteriores do elemento de barra que permitem descrever a equação da reta necessária. Evidentemente, para que esta nova expressão (equação da reta) e a expressão obtida com recurso à matriz de rigidez sejam compatíveis, e as incógnitas em análise sejam as mesmas em ambas as expressões, a posição do referencial deve ser a posição do nó central em coordenadas globais do elemento de barra inicial. Assim, as incógnitas  $x$  e  $y$  da equação da reta deformada estão em sobreposição com  $U_j$  e  $V_j$ . Portanto, pode-se substituir  $x$  e  $y$  por estas, o que permite reescrever o sistema de equações que viabiliza a obtenção das componentes que definem o deslocamento do nó central do elemento de barra em coordenadas globais.

Em suma, para que se consiga obter a solução que define o deslocamento do nó central em coordenadas globais deve-se:

1. Recorrer a uma das expressões que a matriz de rigidez permite definir para o nó central do elemento. De realçar que é necessário ter em atenção a posição do elemento. Se este se encontra numa posição vertical ou horizontal, apenas existe uma expressão passível de obter através da matriz de rigidez.
2. Escrever a equação da reta que define o elemento de barra na posição deformada.
3. Calcular o declive e a ordenada na origem com base nas posições dos nós exteriores do elemento, na posição deformada. Estas posições devem ser

definidas com base num novo referencial global posicionado sobre o nó central do elemento de barra inicial.

4. Escrever o novo sistema de equações que permite obter o deslocamento do nó central do elemento em coordenadas globais.

O método e seus resultados são amplamente explorados e validados no subcapítulo 3.1.1.4.

### 3.1.1.2.2 Estado de tensão

De forma análoga ao elemento de barra linear, recorrendo à expressão (32) define-se a expressão matricial que permite determinar o estado de tensão do elemento,

$$\sigma_{axial} = E \frac{u_k - u_i}{L} = E \left[ \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right] \mathbf{a}_e. \quad (114)$$

Recorrendo à expressão (70) e (78) pode-se escrever a equação matricial que permite obter a tensão axial do elemento através das coordenadas globais. Assim pode-se escrever a tensão e a força axial a que o elemento se encontra sujeito,

$$\sigma_{axial} = E \left[ \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (115)$$

$$F = EA \left[ \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}. \quad (116)$$

As expressões (115) e (116) podem ser escritas para cada nó do elemento. Portanto, para o nó  $i$  estas expressões tomam a seguinte forma:

$$\sigma_{axial} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -3l & -3m & 4l & 4m & -l & -m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (117)$$

$$F = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -3l & -3m & 4l & 4m & -l & -m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}, \quad (118)$$

no nó  $j$ ,

$$\sigma_{axial} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (119)$$

$$F = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}, \quad (120)$$

por fim no nó  $k$ ,

$$\sigma_{axial} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} l & m & -4l & -4m & 3l & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (121)$$

$$F = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l & m & -4l & -4m & 3l & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix}. \quad (122)$$

Mais uma vez valores positivos indicam tração enquanto valores negativos indicam compressão.

### 3.1.1.3 Comparação das formulações linear e quadrática

Quando se procede à formulação do elemento é notório que a distinção da formulação linear da quadrática recai sobre a escolha do número de monónimos que compõem o polinómio, que serve de ponto de partida no MEF e permite escrever as funções de forma, que passam a determinar o comportamento das variáveis de campo e das variáveis derivadas da variável de campo de um determinado elemento de barra. Portanto, ao comparar as funções de forma da formulação linear (expressão (27)) com as funções de forma da formulação quadrática (expressão (65)) é evidente que:

- Existe mais uma função de forma na formulação quadrática respeitante ao nó central do elemento quadrático, que permite obter a solução exata em mais um ponto do elemento comparativamente à formulação linear;
- O deslocamento que um elemento de barra admite é descrito linearmente na utilização da formulação linear, independentemente do comportamento real deste, ou seja, na situação em que um elemento se encontre sujeito a um esforço atuante que impõe um campo de deslocamento não linear, este efeito não será captado pela formulação linear. Nesta situação concreta, o comportamento do elemento só será exato nos nós. Por mais elementos que sejam utilizados para descrever o problema, a solução deste só será exata quando o número de elementos utilizados tender para infinito;
- Quando se obtém a matriz de deformação a partir da derivada das funções de forma, a escolha da deformação condiciona a solução das variáveis derivadas da variável de campo. Isto é, no caso da formulação linear independentemente do tipo de esforço atuante, o resultado obtido é sempre constante ao longo do elemento, quer se esteja a analisar o estado de tensão do elemento ou de deformação do elemento. Já na situação de se partir de uma formulação quadrática, consegue-se captar estados de tensão e de deformação que apresentam um comportamento linear ao longo do elemento;

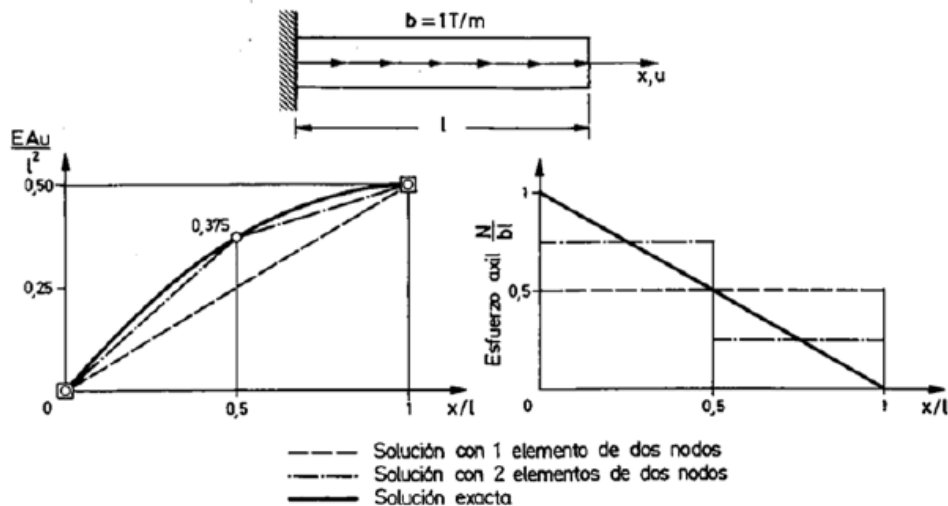


Figura 50 – Utilização de elementos de barra lineares na aproximação da solução exata [26]

- Com base no enunciado no ponto anterior, quando os esforços axiais atuantes no elemento são obtidos a partir das tensões previamente calculadas, o comportamento exposto para cada uma das formulações permanece, uma vez que os esforços axiais são obtidos através da multiplicação de uma constante (área) pela tensão atuante no elemento.

Na continuidade da comparação das formulações consegue-se ainda deduzir que, com recurso a um menor número de elementos quadráticos, consegue-se uma melhor aproximação à solução exata de um problema em análise, conforme pode ser observado na Figura 50. Contudo, é mais eficiente numericamente adotar um maior número de elementos de ordem inferior do que um número inferior de elementos de ordem superior que perfaçam o mesmo número de nós [26]. No entanto, no caso concreto do elemento de barra, essa utilização deve ser criteriosa, dado que os nós externos do elemento se comportam como rótulas e a definição errada das condições fronteira rapidamente colocam a estrutura em análise num estado de instabilidade estrutural.

Em suma, a seleção do tipo de elemento de barra a adotar na análise de uma estrutura deve levar em consideração as características da estrutura em análise [26].

#### 3.1.1.4 Validação das formulações

Com o propósito de se validar as formulações linear e quadrática aqui apresentadas, aplica-se cada uma delas na resolução de 3 problemas modelo e comparam-se os resultados obtidos (deslocamentos, reações, esforços axiais e tensões axiais) através do MEF para cada tipo de elemento com o exibido em literatura ou com os obtidos através de *softwares* amplamente utilizados no mercado.

## 1º Problema Modelo

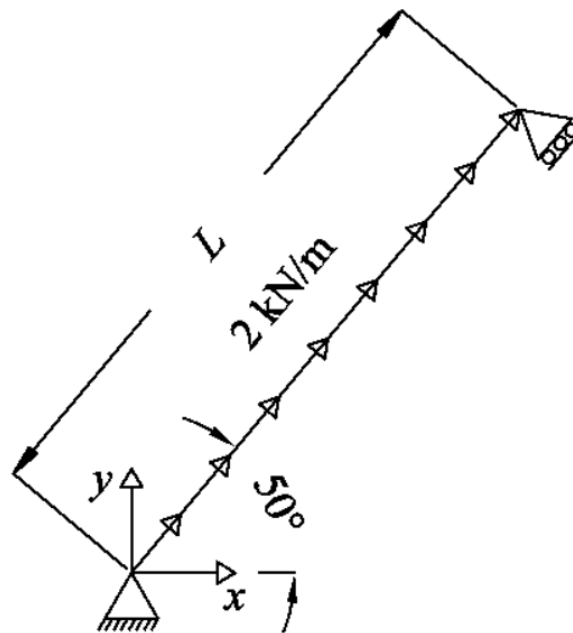


Figura 51 – Problema modelo 1, elemento de barra

Dados de entrada do modelo apresentado na Figura 51,

$$F = 2 \text{ kN/m} ; A_1 = 100 \text{ mm}^2 ; E_1 = 210 \text{ GPa} ; L_1 = 2000 \text{ mm}$$

A Tabela 11 permite simplificar o processo de construção da matriz de rigidez do elemento.

Tabela 11 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro problema modelo.

$EI$	$AE/L$	$AE/3L$	$I$	$m$	$I^2$	$Im$	$m^2$
1	10,5e6	3,5e6	0,64279	0,76604	0,41318	0,4924	0,58682

O nó  $i$  encontra-se prescrito tanto na direção do deslocamento  $U$  como na direção  $V$ , e ainda existe a particularidade do apoio no nó  $k$  se encontrar perpendicular ao elemento. Portanto, é necessário escrever as relações que existem entre as restrições que o apoio impõe no seu eixo de coordenadas local e o eixo de coordenadas global do modelo (situação idêntica a descrita no subcapítulo 3.1.1.2.1.2). A Tabela 12 reúne os resultados obtidos através das formulações descritas comparativamente com os resultados obtidos por diferentes *softwares* recorrentemente utilizados na análise de estruturas.

Tabela 12 – Resultados obtidos na solução do primeiro problema modelo, através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$U_i$ [mm]	0	0	0	0
$V_i$ [mm]	0	0	0	0
$U_j$ [mm]	NA	0,0918	0,0918	0,092
$V_j$ [mm]	NA	0,1094	0,1094	0,109
$U_k$ [mm]	0,1224	0,1224	0,1224	0,1224
$V_k$ [mm]	0,1459	0,1459	0,1459	0,1459
$R_{ix}$ [kN]	-2,5712	-2,5712	-2,571	-2,5710
$R_{iy}$ [kN]	-3,0642	-3,0642	-3,064	-3,0642
$r_{ky}$ [kN]	0	0	0	0
$\sigma_{axiali}$ [MPa]	20	40	NA	40
$\sigma_{axialj}$ [MPa]	NA	20	NA	20
$\sigma_{axialk}$ [MPa]	20	0	NA	0
$F_i$ [kN]	2	4	4	4
$F_j$ [kN]	NA	2	2	2
$F_k$ [kN]	2	0	0	0

Na Figura 52 e Figura 53 são apresentados os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL:

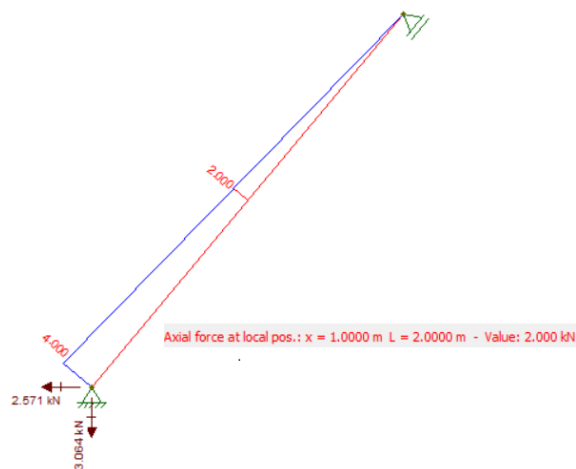


Figura 52 – Resultados obtidos no FTOOL - Esforço axial e reações nos apoios

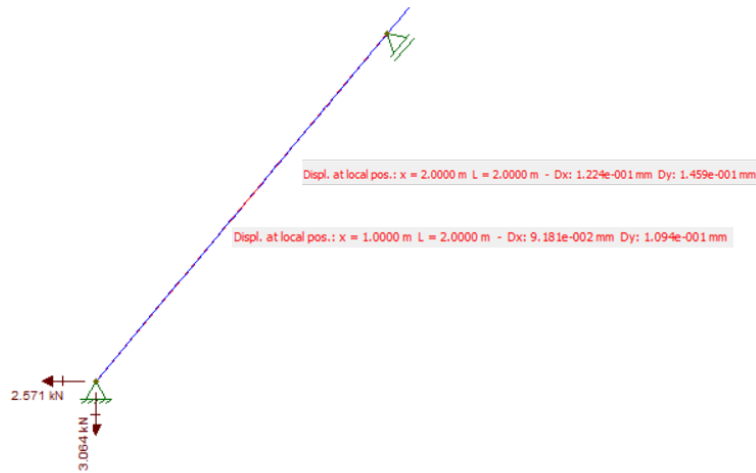


Figura 53 – Resultados obtidos no FTOOL – Deslocamentos

Na Figura 55 e Figura 56 pode ser consultado o modelo utilizado, assim como as propriedades e os esforços atuantes no elemento. Já na Figura 56 e Figura 57 são expostos os resultados obtidos para a simulação considerando elementos de barra com dois nós através do *software* Robot Structural Analysis:

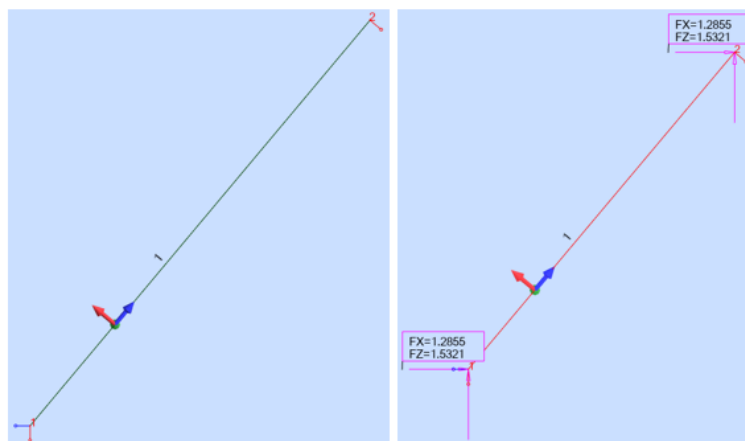
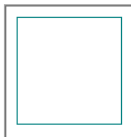


Figura 54 – Modelo em robot do primeiro problema modelo

Barra Nº.: 1      Seção: RECT\_1

Dimensões:

HY (mm)	HZ (mm)
10,00	10,00



Propriedades de seção:

AX (mm <sup>2</sup> )	IX (mm <sup>4</sup> )	IY (mm <sup>4</sup> )	IZ (mm <sup>4</sup> )
100,00	1405,83	833,33	833,33

Propriedades de material:

E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,0010	235,00

Figura 55 – Propriedades do elemento

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)
1/ 1	0,0	0,0	1/ 1	-2,5710	-3,0642
2/ 1	0,1224	0,1459	2/ 1	-0,0000	0,0000

Figura 56 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Nó/Caso	FX (kN)	Barra/Nó/Caso	S máx (MPa)
1/ 1/ 1	-1,9999	1/ 1/ 1	-19,9994
1/ 2/ 1	-1,9999	1/ 2/ 1	-19,9994

Figura 57 – Forças axiais e tensões axiais no elemento

Nota: no *software* Robot valores negativos significam tração enquanto valores positivos significam compressão.

Dado que os elementos de barra no *software* Robot não permitem a aplicação de esforços distribuídos ao longo do elemento, recorre-se aos elementos de estrutura como alternativa na simulação do problema modelo. Ainda, uma vez que se pretende simular um elemento de três nós, a estrutura é modelada com recurso a dois elementos e coloca-se um apoio no nó central com as mesmas características do apoio simples do problema modelo. Esta abordagem é praticável uma vez que o esforço aplicado ao elemento, conforme comprovado na resolução com elementos de barra de dois nós, impõe um deslocamento na direção longitudinal, do elemento não existindo qualquer rotação do elemento ou deslocamento deste na direção transversal. Portanto, o apoio utilizado não altera o comportamento esperado da estrutura quando a mesma se encontra sujeita aos esforços exteriores em análise.

Portanto, a Figura 58 e Figura 59 representam o modelo anteriormente idealizado, assim como as propriedades e os esforços atuantes no elemento. Já na Figura 60 e Figura 61 são expostos os resultados obtidos para a simulação equivalente àquela que seria expectável com recurso a elementos de barra com três nós, através do *software* Robot Structural Analysis.

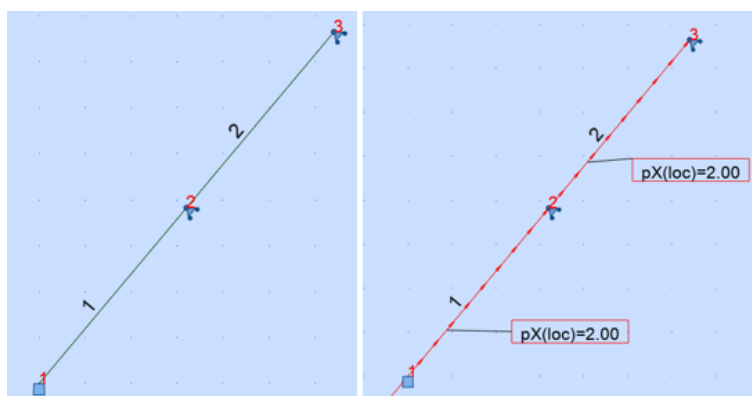


Figura 58 – Segundo modelo em robot do primeiro problema modelo



Barra Nº.: 1	Seção: RECT_1		Barra Nº.: 2	Seção: RECT_1	
Dimensões:			Dimensões:		
HY (mm)	HZ (mm)		HY (mm)	HZ (mm)	
10,0	10,0		10,0	10,0	
Propriedades de seção:			Propriedades de seção:		
AX (mm2)	IX (mm4)	IY (mm4)	IZ (mm4)	AX (mm2)	IX (mm4)
100,00	1405,83	833,33	833,33	100,00	1405,83
Propriedades de material:			Propriedades de material:		
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m3)	Re (MPa)
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,00	235,00

Figura 59 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1	-2,57	-3,06	-0,00
2/ 1	-0,00	0,00	0,00
3/ 1	-0,00	0,00	-0,00
Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 1	0,0	0,0	0,0
2/ 1	0,092	0,109	0,000
3/ 1	0,122	0,146	-0,000

Figura 60 – Reações nos apoios e deslocamentos

Barra/Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)	
1/ 1/ 1	-4,00	0,00	-0,00	
1/ 2/ 1	-2,00	-0,00	-0,00	
2/ 2/ 1	-2,00	0,00	-0,00	
2/ 3/ 1	-0,00	-0,00	0,00	
Barra/Nó/Caso	S máx (MPa)	S mín (MPa)	S máx(My) (MPa)	S mín(My) (MPa)
1/ 1/ 1	-40,00	-40,00	0,00	-0,00
1/ 2/ 1	-20,00	-20,00	0,00	-0,00
2/ 2/ 1	-20,00	-20,00	0,00	-0,00
2/ 3/ 1	-0,00	-0,00	0,00	-0,00

Figura 61 – Força axial e tensão axial nos elementos

Conclui-se com base na análise da Tabela 12 que as formulações do elemento de barra linear e quadrática apresentam resultados válidos, comparativamente com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados e validados pelo amplo número de utilizadores que nestes confiam. Como é expectável e comprovado nos resultados obtidos, a formulação linear não consegue captar a variação do esforço axial e subsequentemente a variação da tensão normal ao longo do elemento.

2º Problema Modelo

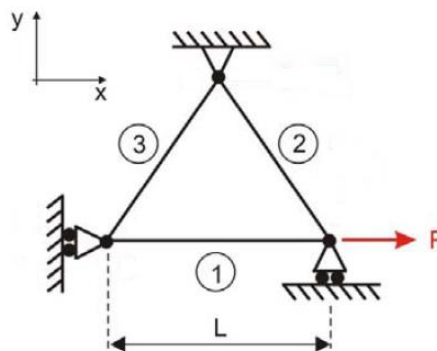


Figura 62 – Problema modelo 2 para o elemento de barra [1]

Dados de entrada do modelo apresentado na Figura 62,

$$P_1 = 3 \text{ kN}; A_1 = A_2 = A_3 = 100 \text{ mm}^2; L_1 = L_2 = L_3 = 2000 \text{ mm};$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}$$

A Tabela 13 simplifica o processo de estruturação das matrizes de rigidez de cada elemento.

Tabela 13 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo problema modelo.

$EI$	$AE/L$	$AE/3L$	$l$	$m$	$l^2$	$lm$	$m^2$
1	10,5e6	3,5e6	1	0	1	0	0
2	10,5e6	3,5e6	-0,5	0,866	0,25	-0,433	0,75
3	10,5e6	3,5e6	-0,5	-0,866	0,25	0,433	0,75

O nó  $i$  do elemento 1 encontra-se prescrito na direção do deslocamento local  $v$  e o nó  $k$  encontra-se prescrito na direção  $V$ . O nó  $i$  do elemento 3 encontra-se prescrito em ambas as direções do deslocamento local  $u$  e  $v$ .

Paralelamente, com base nas ligações existentes entre os nós dos elementos, é possível escrever as igualdades seguintes:

$$U_{1i} = U_{3k}; V_{1i} = V_{3k}; U_{1k} = U_{2i}; V_{1k} = V_{2i}; U_{2k} = U_{3i}; V_{2k} = V_{3i}$$

Posteriormente na Tabela 14 podem ser consultados os resultados obtidos com recurso às formulações discutidas anteriormente comparativamente com as descritas na literatura e às obtidas com recurso a um *software* de uso corrente.

Tabela 14 – Resultados obtidos na solução do segundo problema modelo, através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (Livro [1])	Resultados obtidos (Robot)
$U_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{1j}$ [mm]	NA	0,1143	NA	0,1143
$V_{1j}$ [mm]	NA	0	NA	0
$U_{1k}$ [mm]	0,2286	0,2286	0,2286	0,2286
$V_{1k}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{2j}$ [mm]	NA	0,1143	NA	0,1143
$V_{2j}$ [mm]	NA	0	NA	0

$U_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{3j}$ [mm]	NA	0	NA	NA
$V_{3j}$ [mm]	NA	0	NA	NA
$r_{1iy}$ [kN]	-2,4	-2,4	-2,4	-2,4
$R_{1ky}$ [kN]	-1,0392	-1,0392	-1,0392	-1,039
$r_{3ix}$ [kN]	0,6	0,6	0,6	0,6
$r_{3iy}$ [kN]	-1,0392	-1,0392	-1,0392	-1,039
$\sigma_{axial1i}$ [MPa]	24	24	24	24
$\sigma_{axial1j}$ [MPa]	NA	24	24	24
$\sigma_{axial1k}$ [MPa]	24	24	24	24
$\sigma_{axial2i}$ [MPa]	12	12	NA	12
$\sigma_{axial2j}$ [MPa]	NA	12	NA	12
$\sigma_{axial2k}$ [MPa]	12	12	NA	12
$\sigma_{axial3i}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\sigma_{axial3j}$ [MPa]	NA	0	NA	NA
$\sigma_{axial3k}$ [MPa]	0	0	NA	0
$F_{1i}$ [kN]	2,4	2,4	2,4	2,4
$F_{1j}$ [kN]	NA	2,4	2,4	2,4
$F_{1k}$ [kN]	2,4	2,4	2,4	2,4
$F_{2i}$ [kN]	1,2	1,2	NA	1,2
$F_{2j}$ [kN]	NA	1,2	NA	1,2
$F_{2k}$ [kN]	1,2	1,2	NA	1,2
$F_{3i}$ [kN]	0	0	NA	0
$F_{3j}$ [kN]	NA	0	NA	NA
$F_{3k}$ [kN]	0	0	NA	0

De seguida, são apresentados os resultados para uma simulação com elementos de barra de dois nós com recurso ao *software* Robot Structural Analysis sendo que, na

Figura 63 e Figura 64 pode ser consultado o modelo considerado e suas propriedades respetivamente.

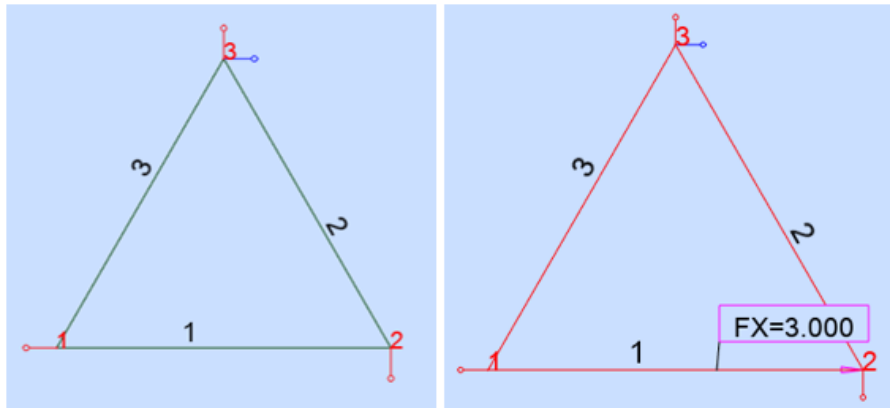


Figura 63 – Modelo em *robot* do segundo problema modelo

Barra Nº.: 1		Seção: RECT_1			
Dimensões:					
HY (mm)	HZ (mm)				
10,00	10,00				
Propriedades de seção:					
AX (mm <sup>2</sup> )	IX (mm <sup>4</sup> )	IY (mm <sup>4</sup> )	IZ (mm <sup>4</sup> )		
100,00	1405,83	833,33	833,33		
Propriedades de material:					
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00

Barra Nº.: 2		Seção: RECT_1			
Dimensões:					
HY (mm)	HZ (mm)				
10,00	10,00				
Propriedades de seção:					
AX (mm <sup>2</sup> )	IX (mm <sup>4</sup> )	IY (mm <sup>4</sup> )	IZ (mm <sup>4</sup> )		
100,00	1405,83	833,33	833,33		
Propriedades de material:					
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00

Barra Nº.: 3		Seção: RECT_1			
Dimensões:					
HY (mm)	HZ (mm)				
10,00	10,00				
Propriedades de seção:					
AX (mm <sup>2</sup> )	IX (mm <sup>4</sup> )	IY (mm <sup>4</sup> )	IZ (mm <sup>4</sup> )		
100,00	1405,83	833,33	833,33		
Propriedades de material:					
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00

Figura 64 – Propriedades dos elementos

Seguidamente, na Figura 65 e Figura 66 podem ser consultados os resultados obtidos nas reações dos apoios, deslocamentos, esforços axiais e tensões normais nos elementos.

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)
1/ 1	-2,400	0,000
2/ 1	0,0	-1,039
3/ 1	-0,600	1,039
Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)
1/ 1	-0,0000	-0,0000
2/ 1	0,2286	0,0
3/ 1	0,0	0,0

Figura 65 – Reações nos apoios e deslocamentos

As reações do nó 3 encontram-se em coordenadas globais apesar do apoio estar aplicado com uma rotação relativa ao eixo global. Por defeito, as reações apresentadas na Figura 65 são apresentadas em coordenadas globais.

Barra/Nó/Caso	FX (kN)	Barra/Nó/Caso	S máx (MPa)
1/ 1/ 1	-2,400	1/ 1/ 1	-24,000
1/ 2/ 1	-2,400	1/ 2/ 1	-24,000
2/ 2/ 1	-1,200	2/ 2/ 1	-12,000
2/ 3/ 1	-1,200	2/ 3/ 1	-12,000
3/ 3/ 1	-0,000	3/ 3/ 1	-0,000
3/ 1/ 1	-0,000	3/ 1/ 1	-0,000

Figura 66 – Força axial e tensão axial nos elementos

O *software* robot versão 2019 não permite obter, em análises de treliças, os deslocamentos dos nós centrais dado que, quando se insere um nó no elemento e não se divide a estrutura, este é assumido pelo *software* como um nó interno de cálculo. Devido a este facto, no tipo de elemento em análise ocorrem instabilidades do tipo 1 e tipo 3 nesses nós. Paralelamente, os resultados das reações e deslocamentos devolvem informação para esses nós. Como podem ser consultados na Figura 67, os nós 4 e 6 apresentam resultados descabidos para o problema em análise quando comparados com os deslocamentos dos nós externos. Contudo, o nó 2 devolve o valor do deslocamento esperado, como será demonstrado adiante.

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)
1/ 1	-0,0000	-0,0000
2/ 1	0,1143	-0,0000
3/ 1	0,2286	0,0
4/ 1	-2324,4856	-1342,1478
5/ 1	0,0	0,0
6/ 1	4649,1998	-2684,2955

Figura 67 – Deslocamentos obtidos considerando elementos de 3 nós

Consequentemente, para simular o problema de forma análoga a um modelo que utilize elementos de barra quadráticos é necessário, numa primeira fase, perceber através de uma análise geométrica qual o comportamento expectável dos nós centrais de cada

elemento que compõem o problema para que, posteriormente no modelo de cálculo, seja possível restringir esses nós de acordo com o comportamento esperado. Deste modo, permite-se a utilização de dois elementos de barra com dois nós como uma aproximação ao elemento de barra quadrático. Esta aproximação é possível, uma vez que o carregamento ao qual a estrutura se encontra sujeita é constante, e assim o comportamento de acordo com a mecânica dos materiais que rege o deslocamento da estrutura obedece a um comportamento linear. Como resultado, a posição do nó central do elemento após deformar mantém-se sobre o ponto médio do elemento deformado.

Com base na informação ilustrada na Figura 68, obtida através da análise da estrutura com elementos de barra de dois nós, consegue-se definir quais os apoios a utilizar no modelo análogo a uma simulação com elementos de barra de três nós que permita afirmar o correto funcionamento da nova formulação aqui descrita.

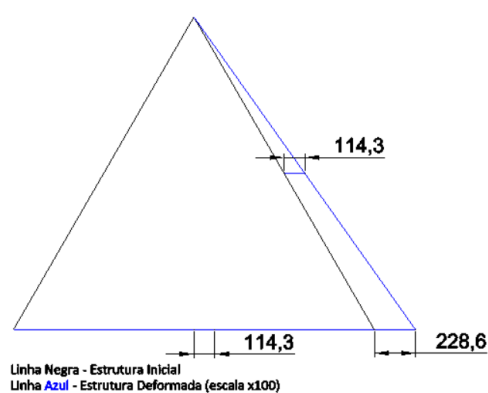


Figura 68 – Deformação prevista para a estrutura com recurso a uma análise geométrica

Com base na informação obtida anteriormente sabe-se que os nós centrais dos elementos 1 e 2 apenas sofrem deslocamento na direção do eixo das abscissas do referencial global. Assim, procede-se à análise da estrutura com base nos pressupostos definidos anteriormente através do *software* Robot Structural Analysis. Na Figura 69 e Figura 70 pode ser consultado o modelo utilizado e as propriedades de cada elemento, respetivamente.

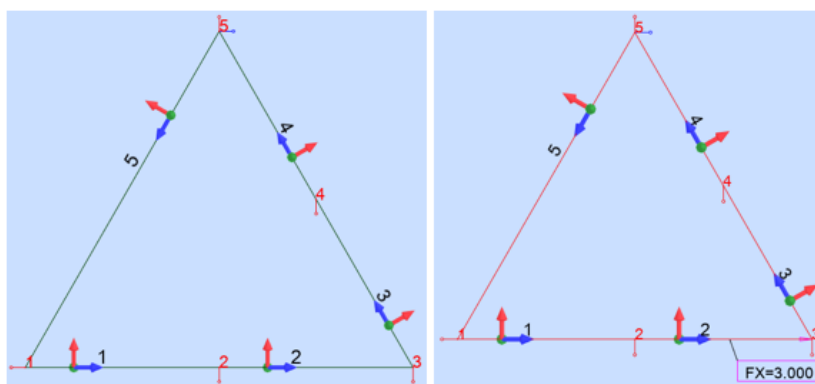


Figura 69 – Segundo modelo em robot do segundo problema modelo

<p>Barra Nº.: 1    Seção: RECT_1</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr> <td>HY (mm)</td> <td>HZ (mm)</td> </tr> <tr> <td>10,00</td> <td>10,00</td> </tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr> <td>AX (cm<sup>2</sup>)</td> <td>IX (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IY (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IZ (cm<sup>4</sup>)</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,14</td> <td>0,08</td> <td>0,08</td> </tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr> <td>E (MPa)</td> <td>G (MPa)</td> <td>NI</td> <td>LX (1/°C)</td> <td>RO (kN/m<sup>3</sup>)</td> <td>Re (MPa)</td> </tr> <tr> <td>210000,00</td> <td>80800,00</td> <td>0,30</td> <td>0,00</td> <td>0,000</td> <td>255,00</td> </tr> </table>	HY (mm)	HZ (mm)	10,00	10,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	1,00	0,14	0,08	0,08	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00	<p>Barra Nº.: 2    Seção: RECT_1</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr> <td>HY (mm)</td> <td>HZ (mm)</td> </tr> <tr> <td>10,00</td> <td>10,00</td> </tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr> <td>AX (cm<sup>2</sup>)</td> <td>IX (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IY (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IZ (cm<sup>4</sup>)</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,14</td> <td>0,08</td> <td>0,08</td> </tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr> <td>E (MPa)</td> <td>G (MPa)</td> <td>NI</td> <td>LX (1/°C)</td> <td>RO (kN/m<sup>3</sup>)</td> <td>Re (MPa)</td> </tr> <tr> <td>210000,00</td> <td>80800,00</td> <td>0,30</td> <td>0,00</td> <td>0,000</td> <td>255,00</td> </tr> </table>	HY (mm)	HZ (mm)	10,00	10,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	1,00	0,14	0,08	0,08	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00
HY (mm)	HZ (mm)																																																
10,00	10,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
1,00	0,14	0,08	0,08																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																																												
HY (mm)	HZ (mm)																																																
10,00	10,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
1,00	0,14	0,08	0,08																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																																												
<p>Barra Nº.: 3    Seção: RECT_1</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr> <td>HY (mm)</td> <td>HZ (mm)</td> </tr> <tr> <td>10,00</td> <td>10,00</td> </tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr> <td>AX (cm<sup>2</sup>)</td> <td>IX (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IY (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IZ (cm<sup>4</sup>)</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,14</td> <td>0,08</td> <td>0,08</td> </tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr> <td>E (MPa)</td> <td>G (MPa)</td> <td>NI</td> <td>LX (1/°C)</td> <td>RO (kN/m<sup>3</sup>)</td> <td>Re (MPa)</td> </tr> <tr> <td>210000,00</td> <td>81000,00</td> <td>0,30</td> <td>0,00</td> <td>0,001</td> <td>235,00</td> </tr> </table>	HY (mm)	HZ (mm)	10,00	10,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	1,00	0,14	0,08	0,08	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00	<p>Barra Nº.: 4    Seção: RECT_1</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr> <td>HY (mm)</td> <td>HZ (mm)</td> </tr> <tr> <td>10,00</td> <td>10,00</td> </tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr> <td>AX (cm<sup>2</sup>)</td> <td>IX (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IY (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IZ (cm<sup>4</sup>)</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,14</td> <td>0,08</td> <td>0,08</td> </tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr> <td>E (MPa)</td> <td>G (MPa)</td> <td>NI</td> <td>LX (1/°C)</td> <td>RO (kN/m<sup>3</sup>)</td> <td>Re (MPa)</td> </tr> <tr> <td>210000,00</td> <td>81000,00</td> <td>0,30</td> <td>0,00</td> <td>0,001</td> <td>235,00</td> </tr> </table>	HY (mm)	HZ (mm)	10,00	10,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	1,00	0,14	0,08	0,08	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00
HY (mm)	HZ (mm)																																																
10,00	10,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
1,00	0,14	0,08	0,08																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00																																												
HY (mm)	HZ (mm)																																																
10,00	10,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
1,00	0,14	0,08	0,08																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	81000,00	0,30	0,00	0,001	235,00																																												
<p>Barra Nº.: 5    Seção: RECT_1</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr> <td>HY (mm)</td> <td>HZ (mm)</td> </tr> <tr> <td>10,00</td> <td>10,00</td> </tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr> <td>AX (cm<sup>2</sup>)</td> <td>IX (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IY (cm<sup>4</sup>)</td> <td>IZ (cm<sup>4</sup>)</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,14</td> <td>0,08</td> <td>0,08</td> </tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr> <td>E (MPa)</td> <td>G (MPa)</td> <td>NI</td> <td>LX (1/°C)</td> <td>RO (kN/m<sup>3</sup>)</td> <td>Re (MPa)</td> </tr> <tr> <td>210000,00</td> <td>80800,00</td> <td>0,30</td> <td>0,00</td> <td>0,000</td> <td>255,00</td> </tr> </table>	HY (mm)	HZ (mm)	10,00	10,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	1,00	0,14	0,08	0,08	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																									
HY (mm)	HZ (mm)																																																
10,00	10,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
1,00	0,14	0,08	0,08																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																																												

Figura 70 – Propriedades dos elementos

De seguida, apresentam-se os resultados obtidos para as reações e deslocamentos na Figura 71, e na Figura 72 os resultados obtidos para os esforços axiais e tensões normais em cada elemento.

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)
1/ 1	-2,400	0,000
2/ 1	0,0	0,000
3/ 1	-0,000	-1,039
4/ 1	0,000	0,000
5/ 1	-0,600	1,039

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)
1/ 1	-0,0000	-0,0000
2/ 1	0,1143	0,0
3/ 1	0,2286	0,0
4/ 1	0,1143	0,0
5/ 1	0,0	0,0

Figura 71 – Reações nos apoios e deslocamentos

Como já mencionado anteriormente as reações encontram-se em coordenadas globais.

Barra/Nó/Caso	FX (kN)	Barra/Nó/Caso	S máx (MPa)
1/ 1/ 1	-2,400	1/ 1/ 1	-24,000
1/ 2/ 1	-2,400	1/ 2/ 1	-24,000
2/ 2/ 1	-2,400	2/ 2/ 1	-24,000
2/ 3/ 1	-2,400	2/ 3/ 1	-24,000
3/ 3/ 1	-1,200	3/ 3/ 1	-12,000
3/ 4/ 1	-1,200	3/ 4/ 1	-12,000
4/ 4/ 1	-1,200	4/ 4/ 1	-12,000
4/ 5/ 1	-1,200	4/ 5/ 1	-12,000
5/ 5/ 1	-0,000	5/ 5/ 1	-0,000
5/ 1/ 1	-0,000	5/ 1/ 1	-0,000

Figura 72 – Força axial e tensão axial nos elementos

Em suma, ao ser examinada a Tabela 13 verifica-se que as formulações aqui expostas se encontram novamente válidas, para o problema modelo em análise. Mais ainda, conclui-se que a formulação quadrática aqui apresentada consegue obter resultados válidos sem que ocorram instabilidades nos elementos, independentemente das rotações que estes apresentem.

### 3º Problema Modelo

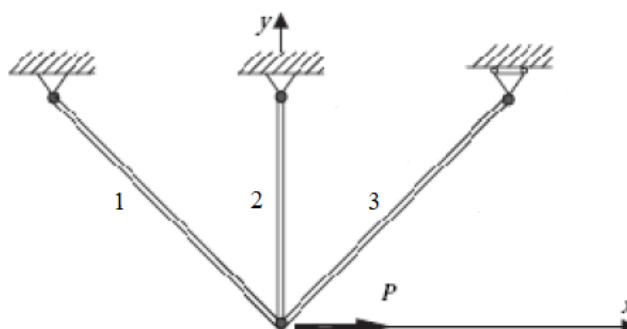


Figura 73 – Problema modelo 3, elemento de barra [1]

Dados de entrada do modelo apresentado na Figura 73,

$$P = 1 \text{ kN} ; A_1 = A_3 = 10000 \text{ mm}^2 ; A_2 = 20000 \text{ mm}^2 ;$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 100 \text{ GPa} ; L_2 = 1000 \text{ mm} ; L_1 = L_3 = 1414,2 \text{ mm}$$

A Tabela 15 agrupa dados que simplificam a construção das matrizes de rigidez de cada elemento.

Tabela 15 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do terceiro problema modelo.

$EI$	$AE/L$	$AE/3L$	$l$	$m$	$l^2$	$lm$	$m^2$
1	70,7e7	23,57e7	-0,7071	0,7071	0,5	-0,5	0,5
2	200e7	66,6(6)e7	0	1	0	0	1
3	70,7e7	23,57e7	0,7071	0,7071	0,5	0,5	0,5

O nó  $k$  do elemento 1 encontra-se prescrito tanto na direção do deslocamento local  $u$  como na direção  $v$  assim como o nó  $k$  do elemento 2. Já o nó  $k$  do elemento 3 só se encontra prescrito na direção do deslocamento local  $v$ .

Paralelamente, com base nas ligações existentes entre os nós dos elementos, é possível escrever as igualdades seguintes:

$$U_{1k} = U_{2i} = U_{3i}; V_{1k} = V_{2i} = V_{3i}$$

Na Tabela 16 podem ser consultados os resultados obtidos com recurso às formulações do elemento de barra linear e quadrática, e comparados com os resultados apresentados na literatura e os obtidos com recurso a um *software* de uso corrente.

Tabela 16 – Resultados obtidos na solução do terceiro problema modelo, através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados esperados (Livro [1])	Resultados esperados (Robot + análise geométrica)
$U_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{1j}$ [mm]	NA	0,0017	NA	0,0017
$V_{1j}$ [mm]	NA	0,0002	NA	0,0002
$U_{1k}$ [mm]	0,0033	0,0033	0,003328	0,0033
$V_{1k}$ [mm]	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
$U_{2j}$ [mm]	NA	0,0017	NA	0,0017
$V_{2j}$ [mm]	NA	0,0003	NA	0,0002
$U_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{3j}$ [mm]	NA	0,0036	NA	0,0036
$V_{3j}$ [mm]	NA	0,0003	NA	0,0002
$U_{3k}$ [mm]	0,0038	0,0038	0,003828	0,0038
$V_{3k}$ [mm]	0	0	0	0
$r_{1kx}$ [kN]	1	1	1	1
$r_{1ky}$ [kN]	-1	-1	-1	-1
$r_{2kx}$ [kN]	0	0	0	0
$r_{2ky}$ [kN]	1	1	1	1
$r_{3ky}$ [kN]	0	0	0	0
$\sigma_{axiali}$ [MPa]	0,1414	0,1414	0,1414	0,1414

$\sigma_{axial1j}$ [MPa]	NA	0,1414	NA	NA
$\sigma_{axial1k}$ [MPa]	0,1414	0,1414	0,1414	0,1414
$\sigma_{axial2i}$ [MPa]	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05
$\sigma_{axial2j}$ [MPa]	NA	-0,05	NA	NA
$\sigma_{axial2k}$ [MPa]	-0,05	-0,05	-0,05	-0,05
$\sigma_{axial3i}$ [MPa]	0	0	0	0
$\sigma_{axial3j}$ [MPa]	NA	0	NA	NA
$\sigma_{axial3k}$ [MPa]	0	0	0	0
$F_{1i}$ [kN]	1,4142	1,4142	NA	1,4142
$F_{1j}$ [kN]	NA	1,4142	NA	NA
$F_{1k}$ [kN]	1,4142	1,4142	NA	1,4142
$F_{2i}$ [kN]	-1	-1	NA	-1
$F_{2j}$ [kN]	NA	-1	NA	NA
$F_{2k}$ [kN]	-1	-1	NA	-1
$F_{3i}$ [kN]	0	0	NA	0
$F_{3j}$ [kN]	NA	0	NA	NA
$F_{3k}$ [kN]	0	0	NA	0

A Figura 76 e a Figura 77 apresentam os resultados obtidos com recurso ao *software* Robot Structural Analysis considerando uma simulação com elementos de barra de dois nós (o modelo utilizado e propriedades podem ser consultados nas Figura 74 e Figura 75).

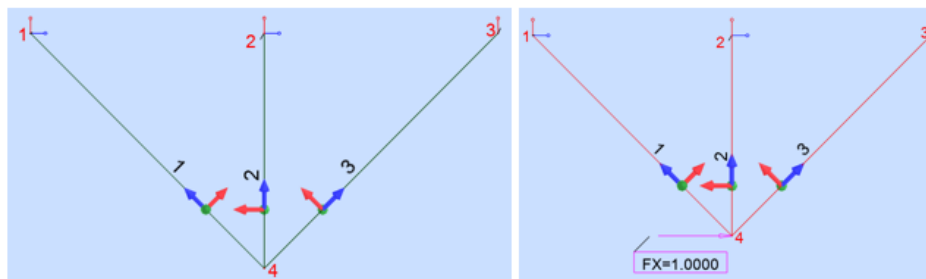


Figura 74 – Modelo em robot do terceiro problema modelo

Barra Nº.: 1    Seção: RECT_2		Barra Nº.: 2    Seção: RECT_3	
Dimensões:		Dimensões:	
HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)
10,00	10,00	14,14	14,14
Propriedades de seção:		Propriedades de seção:	
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )
100,00	1405,83	833,33	833,33
Propriedades de material:		Propriedades de material:	
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)
100000,00	80800,00	0,30	0,00
RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)		
0,0000	255,00		

Barra Nº.: 3    Seção: RECT_2	
Dimensões:	
HY (cm)	HZ (cm)
10,00	10,00
Propriedades de seção:	
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )
100,00	1405,83
Propriedades de material:	
E (MPa)	G (MPa)
100000,00	80800,00
NI	LX (1/°C)
0,30	0,00
RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
0,0000	255,00

Figura 75 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)
1/ 1	-1,0000	1,0000
2/ 1	0,0	-1,0000
3/ 1	-0,0000	0,0000

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)
1/ 1	0,0	0,0
2/ 1	0,0	0,0
3/ 1	0,0038	0,0000
4/ 1	0,0033	0,0005

Figura 76 – Reações nos apoios e Deslocamentos

Uma vez mais as reações dos nós 1 e 2 encontram-se em coordenadas globais.

Barra/Nó/Caso	FX (kN)	Barra/Nó/Caso	S máx (MPa)
1/ 4/ 1	-1,4142	1/ 4/ 1	-0,1414
1/ 1/ 1	-1,4142	1/ 1/ 1	-0,1414
2/ 4/ 1	1,0000	2/ 4/ 1	0,0500
2/ 2/ 1	1,0000	2/ 2/ 1	0,0500
3/ 4/ 1	0,0000	3/ 4/ 1	0,0000
3/ 3/ 1	0,0000	3/ 3/ 1	0,0000

Figura 77 – Força axial e tensão axial nos elementos

Tendo por base os princípios estabelecidos no problema modelo dois procede-se a uma análise puramente geométrica como forma de se obter os deslocamentos dos nós centrais de cada elemento que compõem a estrutura do terceiro problema modelo conforme ilustrado na Figura 78.

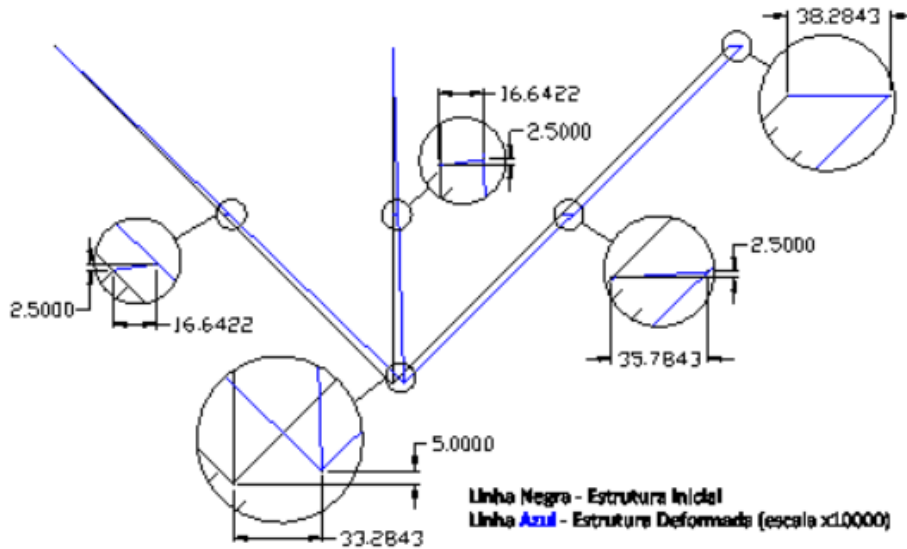


Figura 78 – Deslocamentos expectáveis para os nós centrais de cada elemento (escala x10000)

Deste modo, e com recurso à Tabela 16, afere-se que a formulação linear e quadrática se encontra válida, uma vez que devolve os resultados corretos quando comparados com a literatura e com os obtidos através do *software*. Novamente, a formulação quadrática consegue obter os deslocamentos dos nós centrais do elemento sem que exista a necessidade de usar artifícios como análises geométricas ou aplicação de apoios inexistentes nesses nós para que se possa dividir a estrutura em mais elementos de dois nós.

### 3.1.2 Elemento de viga 2D

Os elementos de viga distinguem-se por serem elementos prismáticos retos e longos, utilizados normalmente para suportarem esforços perpendiculares ao eixo da viga, como por exemplo em edifícios e pontes. Diferem do elemento de barra por apresentarem uma ligação rígida na continuidade dos seus nós e, conseqüentemente, devido ao esforço transversal e à continuidade dos nós, encontram-se sujeitos a esforços provocados por momentos fletores. Portanto, os elementos de viga encontram-se sujeitos apenas a dois tipos de esforços, momentos fletores e esforço transversal [1, 40].

Na análise bidimensional, cada nó pode sofrer um deslocamento perpendicular ao eixo da viga e uma rotação. No caso dos elementos de viga abordados ao longo deste subcapítulo, os sistemas de coordenadas local e global (X e Y) encontram-se sobrepostos, dado que este elemento é destinado ao estudo de elementos horizontais que não aceitam transformação de coordenadas. No desenvolvimento do elemento referido, considera-se que a secção do elemento é constante ao longo do eixo axial, que apresenta um comportamento linear elástico e que as secções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação (viga de Euler-Bernoulli) [1, 41].

No desenvolvimento das formulações linear e quadrática do elemento de viga é importante referir que, para ambas as situações, se considera que existem pequenas

deflexões e a relação entre a tensão normal  $\sigma$ , o momento fletor  $M$ , e o momento de inércia relativo ao eixo neutro da secção  $I$ , é dado pela expressão

$$\sigma = \pm \frac{M}{I} y, \quad (123)$$

Onde  $y$  localiza um ponto na secção da reta com referencial posicionado no centroide e é medido perpendicularmente ao eixo neutro representando a distância deste ao ponto.

Paralelamente, a deflexão  $v$  relaciona-se com o momento fletor interno  $M(x)$ , o esforço de corte  $F(x)$  e o carregamento distribuído  $w(x)$  através das seguintes expressões [1]:

$$\frac{dv}{dx} = \theta(x) \quad (124)$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \quad (125)$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = EI \frac{dM(x)}{dx} = F(x) \quad (126)$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = EI \frac{dF(x)}{dx} = w(x). \quad (127)$$

### 3.1.2.1 Formulação linear

**Etapa 0** – O elemento é composto por dois nós e 4 graus de liberdade que compõem as variáveis de campo, isto é, uma deflexão em cada nó ( $v_e$ ) que se desenvolve na direção perpendicular ao eixo axial da viga e uma rotação em cada nó ( $\theta_e$ ). Note-se que este elemento não aceita esforços na direção do eixo axial da viga, pelo que não existe deslocamento associado nesta direção.

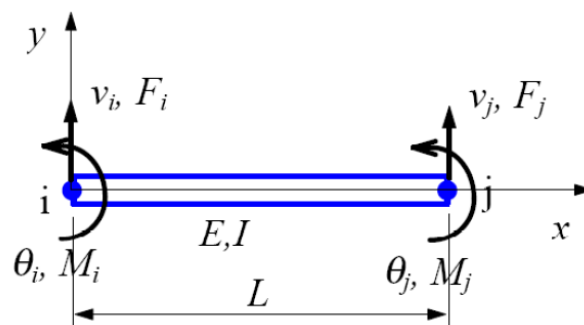


Figura 79 – Simbologia do elemento de viga de 2 nós [1]

**Etapa 1** – As variáveis nodais e as forças nodais podem ser descritas através dos vetores  $\mathbf{a}_e$  e  $\mathbf{f}_e$ , respetivamente. Em concordância com a simbologia ilustrada na Figura 79, estes tomam a forma de

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}. \quad (128)$$

Etapa 2 – De modo análogo ao elemento de barra, o campo de deslocamentos no interior de um dado elemento ( $v_e$ ) e o campo de rotações ( $\theta_e$ ) relaciona-se com  $\mathbf{a}_e$  e as funções de interpolação ( $\mathbf{N}$ ). Matematicamente, um deslocamento e uma rotação segundo  $x$  regem-se pelas seguintes expressões:

$$v_e = \mathbf{N}\mathbf{a}_e \quad (129)$$

$$\theta_e = \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\mathbf{N}\mathbf{a}_e. \quad (130)$$

Os polinómios que servem de base à obtenção das funções de interpolação seguem a mesma norma do elemento de barra e, no caso concreto do elemento de viga, deve ser considerada uma rotação por nó e uma deflexão por nó. Assim, para o elemento em estudo, tem-se o seguinte polinómio como ponto de partida:

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3. \quad (131)$$

As expressões gerais recorrendo a (129) e (130) tomam a forma de

$$\begin{aligned} v_e &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \\ \theta_e &= \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2. \end{aligned} \quad (132)$$

Substituindo nas expressões apresentadas em (132) a posição de  $x$  nas extremidades da viga, definem-se as expressões matemáticas que descrevem o comportamento de  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $\theta_i$  e  $\theta_j$ .

$$\begin{aligned} v_i &= v(x=0) = \alpha_1 \\ v_j &= v(x=L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 \\ \theta_i &= \theta(x=0) = \alpha_2 \\ \theta_j &= \theta(x=L) = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2. \end{aligned} \quad (133)$$

Seguindo a mesma metodologia apresentada na formulação do elemento de barra com recurso às expressões

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}; \quad \mathbf{N} = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1}; \quad \mathbf{p}^T = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\}, \quad (134)$$

podem ser escritas as funções de interpolação para o elemento de viga, que tomam a forma de

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & N_i' & N_j & N_j' \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (135)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}.$$

Pode-se atestar pela análise da Figura 80 que as funções de interpolação que descrevem a variação da deflexão e rotação ao longo do elemento são iguais à unidade no nó a que se referem, e nulas nos restantes nós.

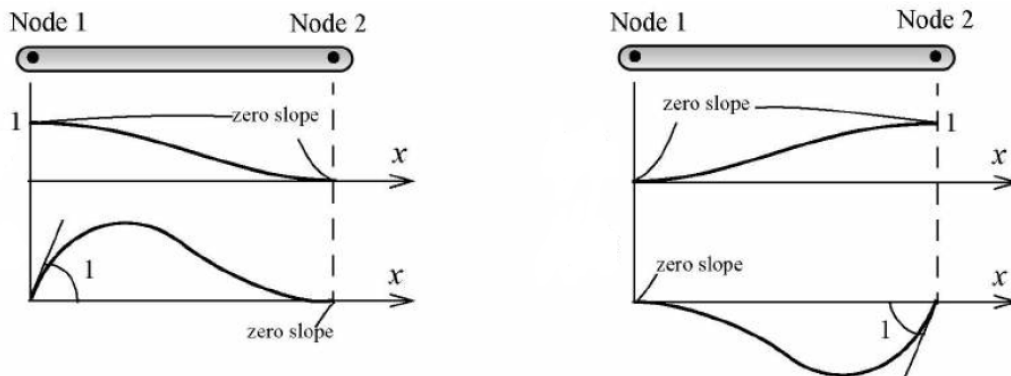


Figura 80 – Representação gráfica das funções de interpolação [39]

Recuperando a expressão (129), consegue-se escrever a função que descreve o deslocamento vertical ao longo do elemento para um valor de  $x$  entre 0 e  $L$ . Identicamente, recorrendo à expressão (130), consegue-se escrever a função que descreve a rotação para um valor de  $x$  entre 0 e  $L$ .

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)v_i + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_i + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)v_j + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_j \quad (136)$$

$$\theta(x) = \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}\right)v_i + \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\theta_i + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}\right)v_j + \left(-\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\theta_j.$$

É importante recordar que, para o elemento de viga, as deflexões e rotações são as variáveis de campo primárias do elemento.

**Etapa 3** – Esta etapa consiste na definição do vetor de deformações ( $\varepsilon$ )

$$\varepsilon = \kappa_x = -\frac{d^2v}{dx^2}. \quad (137)$$

$\kappa_x$  representa a curvatura da viga. Substituindo o deslocamento na expressão mencionada supra tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} \mathbf{a}_e = -\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} N_i & N_i' & N_j & N_j' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (138)$$

Define-se então a designada matriz deformação  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (139)$$

**Etapa 4** – Definir o vetor de tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) através do vetor de deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ). Pela teoria clássica das vigas, tem-se:

$$M = EI \kappa_x = -EI \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (140)$$

onde  $\mathbf{D}$  representa a relação entre  $M$  e  $\kappa_x$ . Assim tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{D} = EI. \quad (141)$$

Neste ponto, considerando a curvatura da viga negativa e a simbologia da Figura 79, pode ser definida a convenção de sinais ilustrada na Figura 81. Esta convenção é importante para a correta interpretação dos diagramas dos momentos fletores e esforços corte, assim como na interpretação do significado de valores positivos ou negativos.

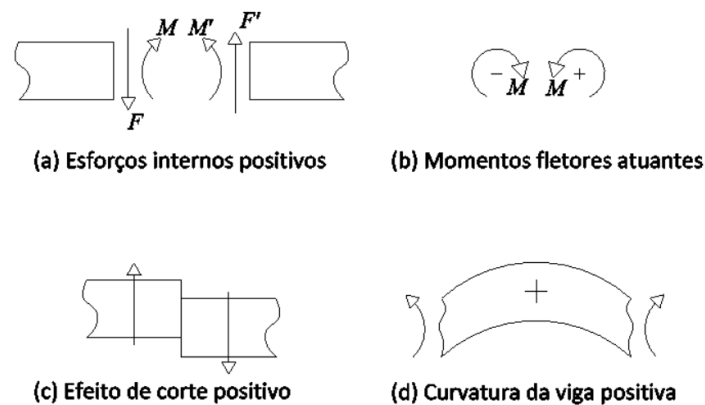


Figura 81 – Convenção de sinais

**Etapa 5** – Como nas formulações anteriores, recorre-se ao PTV para obter a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{k}_e$  e o vetor de forças nodais  $\mathbf{f}_e$ .

Ao analisar a expressão apresentada na Figura 32 juntamente com as relações descritas em (141) e (34), pode-se escrever a relação entre o trabalho interno e o trabalho externo. No entanto, no caso particular do elemento de viga, as tensões internas correspondem ao momento interno por unidade de comprimento  $M$ . Portanto, para determinar o trabalho virtual interno, o produto de  $M$  com a curvatura deve ser

integrado ao longo do comprimento do elemento. Assim, a expressão da Figura 32 toma a forma:

$$\mathbf{a} \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx. \quad (142)$$

Com recurso à expressão (142) tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= \int_0^L \mathbf{N}^T p dx \\ \mathbf{k}_e &= EI \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx. \end{aligned} \quad (143)$$

$EI$ , conforme descrito anteriormente, tem um comportamento constante ao longo do elemento, pelo que pode ser removido do interior do integral. Resolvendo a segunda equação de (143) com recurso à equação (139), a matriz de rigidez do elemento toma a forma

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Através da equação (143), obtida para  $\mathbf{f}_e$ , é possível obter os carregamentos equivalentes no elemento, uma vez que comumente este tipo de elementos está sujeito a carregamentos distribuídos, e no MEF apenas é possível aplicar carregamentos nodais nos nós externos do elemento.

### 3.1.2.1.1 Estado de tensão

O elemento em estudo encontra-se sujeito a esforços de corte e flexão. Portanto, a tensão normal imposta pela flexão é calculada com recurso à expressão (123) e a tensão de corte média  $\tau_{med}$  no elemento é calculada através da seguinte expressão

$$\tau_{med} = \frac{F}{A_e}. \quad (145)$$

Salienta-se ainda que valores de tensão normal positivos representam tração nas fibras do elemento em análise. O cálculo da tensão equivalente no elemento,  $\sigma_{eq}$ , é realizada com recurso ao critério de von Mises, de acordo com

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_{med}^2}. \quad (146)$$

### 3.1.2.2 Formulação quadrática

**Etapa 0** – O elemento é composto por três nós e 6 graus de liberdade que compõem as variáveis de campo em conformidade com o referido anteriormente para o elemento de viga linear. Novamente, este elemento não aceita esforços na direção do eixo axial da viga.

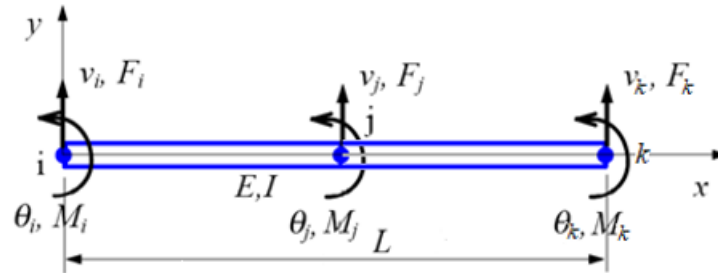


Figura 82 – Simbologia do elemento de viga unidimensional de 3 nós

**Etapa 1** – Em concordância com a simbologia ilustrada na Figura 82,  $\mathbf{a}_e$  e  $\mathbf{f}_e$  tomam a forma

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \\ v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \\ F_k \\ M_k \end{Bmatrix}. \quad (147)$$

**Etapa 2** – De modo idêntico ao elemento de viga linear, o campo de deslocamentos no interior de um dado elemento ( $v_e$ ) e o campo de rotações ( $\theta_e$ ), segundo  $x$ , regem-se pelas expressões (129) e (130). Os polinómios que servem de base à obtenção das funções de interpolação seguem a mesma norma do elemento viga linear só que, no caso do elemento de viga quadrático, são acrescentados dois monónimos respeitantes aos dois graus de liberdade que o nó central introduz no elemento. Assim, para o elemento em estudo tem-se o seguinte polinómio como ponto de partida:

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5. \quad (148)$$

As expressões gerais recorrendo a (129) e (130) tomam a forma de

$$\begin{aligned} v_e &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5 \\ \theta_e &= \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 + 4\alpha_5 x^3 + 5\alpha_6 x^4. \end{aligned} \quad (149)$$

Substituindo nas expressões apresentadas em (149) a posição de  $x$  pelas coordenadas dos nós da viga, definem-se as expressões matemáticas que descrevem o comportamento de  $v_i, v_j, v_k, \theta_i, \theta_j$  e  $\theta_k$ .

$$\begin{aligned}
 v_i &= v(x=0) = \alpha_1 \\
 v_j &= v(x=\frac{L}{2}) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{L}{2} + \alpha_3 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \alpha_4 \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \alpha_5 \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \alpha_6 \left(\frac{L}{2}\right)^5 \\
 v_k &= v(x=L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 + \alpha_5 L^4 + \alpha_6 L^5 \\
 \theta_i &= \theta(x=0) = \alpha_2 \\
 \theta_j &= \theta(x=\frac{L}{2}) = \alpha_2 + 2\alpha_3 \frac{L}{2} + 3\alpha_4 \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 4\alpha_5 \left(\frac{L}{2}\right)^3 + 5\alpha_6 \left(\frac{L}{2}\right)^4 \\
 \theta_k &= \theta(x=L) = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 + 4\alpha_5 L^3 + 5\alpha_6 L^4.
 \end{aligned} \tag{150}$$

Analogamente ao elemento de viga linear, com recurso às expressões

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{N} = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1}; \mathbf{p}^T = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5\}, \tag{151}$$

podem ser escritas as funções de interpolação para o elemento de viga quadrático, que tomam a forma de

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} = & \left[ \frac{66x^3}{L^3} - \frac{23x^2}{L^2} - \frac{68x^4}{L^4} + \frac{24x^5}{L^5} + 1 \quad x - \frac{6x^2}{L} + \frac{13x^3}{L^2} - \frac{12x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4} \quad \dots \right. \\
 & \dots \quad \frac{16x^2}{L^2} - \frac{32x^3}{L^3} + \frac{16x^4}{L^4} \quad \frac{32x^3}{L^2} - \frac{8x^2}{L} - \frac{40x^4}{L^3} + \frac{16x^5}{L^4} \quad \dots \\
 & \left. \dots \quad \frac{7x^2}{L^2} - \frac{34x^3}{L^3} + \frac{52x^4}{L^4} - \frac{24x^5}{L^5} \quad \frac{5x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4} \right].
 \end{aligned} \tag{152}$$

Pode-se atestar pela análise da Figura 83 que as funções de interpolação são iguais à unidade no nó a que se referem, e nulas nos restantes nós, de acordo com o referido anteriormente no elemento de viga linear.

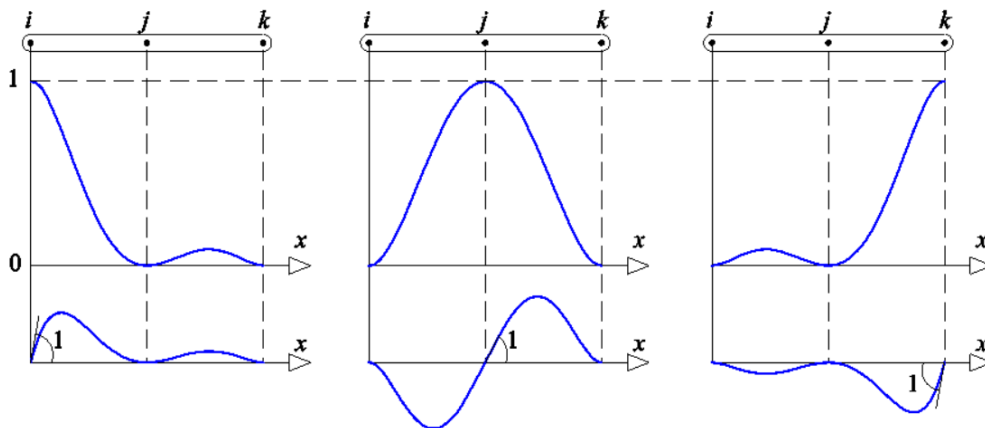


Figura 83 – Representação gráfica das funções de interpolação do elemento de viga quadrático

Novamente, em consonância com a metodologia empregue no elemento de viga linear, recuperando a expressão (129) e a expressão (130) consegue-se escrever a função que descreve o deslocamento vertical e a rotação ao longo do elemento para um valor de  $x$  entre 0 e  $L$ .

$$\begin{aligned}
v(x) &= \left( \frac{66x^3}{L^3} - \frac{23x^2}{L^2} - \frac{68x^4}{L^4} + \frac{24x^5}{L^5} + 1 \right) v_i + \left( x - \frac{6x^2}{L} + \frac{13x^3}{L^2} - \frac{12x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4} \right) \theta_i + \dots \\
&\dots \left( \frac{16x^2}{L^2} - \frac{32x^3}{L^3} + \frac{16x^4}{L^4} \right) v_j + \left( \frac{32x^3}{L^3} - \frac{8x^2}{L} - \frac{40x^4}{L^3} + \frac{16x^5}{L^4} \right) \theta_j + \dots \\
&\dots \left( \frac{7x^2}{L^2} - \frac{34x^3}{L^3} + \frac{52x^4}{L^4} - \frac{24x^5}{L^5} \right) v_k + \left( \frac{5x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4} \right) \theta_k \\
\theta(x) &= \left( \frac{198x^2}{L^3} - \frac{46x}{L^2} - \frac{272x^3}{L^4} + \frac{120x^4}{L^5} \right) v_i + \left( 1 - \frac{12x}{L} + \frac{39x^2}{L^2} - \frac{48x^3}{L^3} + \frac{20x^4}{L^4} \right) \theta_i + \dots \\
&\dots \left( \frac{32x}{L^2} - \frac{96x^2}{L^3} + \frac{64x^3}{L^4} \right) v_j + \left( \frac{96x^2}{L^2} - \frac{16x}{L} - \frac{160x^3}{L^3} + \frac{80x^4}{L^4} \right) \theta_j + \dots \\
&\dots \left( \frac{14x}{L^2} - \frac{102x^2}{L^3} + \frac{208x^3}{L^4} - \frac{120x^4}{L^5} \right) v_k + \left( \frac{15x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} - \frac{32x^3}{L^3} + \frac{20x^4}{L^4} \right) \theta_k
\end{aligned} \tag{153}$$

**Etapa 3** – Nesta etapa define-se o vetor de deformações ( $\epsilon$ ) através da equação (137), onde  $\kappa_x$  representa a curvatura da viga. Substituindo o deslocamento na expressão mencionada, define-se a matriz deformação **B**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{396x}{L^3} + \frac{46}{L^2} + \frac{816x^2}{L^4} - \frac{480x^3}{L^5} & -1 + \frac{12}{L} - \frac{78x}{L^2} + \frac{144x^2}{L^3} - \frac{80x^3}{L^4} & -\frac{32}{L^2} + \frac{192x}{L^3} - \frac{192x^2}{L^4} & \dots \\ \dots & -\frac{192x}{L^2} + \frac{16}{L} + \frac{480x^2}{L^3} - \frac{320x^3}{L^4} & -\frac{14}{L^2} + \frac{204x}{L^3} - \frac{624x^2}{L^4} + \frac{480x^3}{L^5} & -\frac{30x}{L^2} + \frac{2}{L} + \frac{96x^2}{L^3} - \frac{80x^3}{L^4} \end{bmatrix} \tag{154}$$

**Etapa 4** – O vetor de tensões ( $\sigma$ ) é definido através das expressões (137) e (141). A convenção de sinais definida e ilustrada na Figura 81 não sofre alteração na análise de estruturas com recurso ao elemento de viga quadrático.

**Etapa 5** – Em semelhança à formulação do elemento de viga linear, recorre-se ao PTV para obter a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{k}_e$  e o vetor de forças nodais  $\mathbf{f}_e$ , conforme expresso nas equações (142) e (143). Assim, com recurso à equação (154), a matriz de rigidez do elemento toma a forma de

$$\mathbf{k}_e = EI \begin{bmatrix} \frac{5092}{35L^3} & \frac{1138}{35L^2} & \frac{-512}{5L^3} & \frac{384}{7L^2} & \frac{-1508}{35L^3} & \frac{242}{35L^2} \\ \frac{1138}{35L^2} & \frac{332}{35L} & \frac{-128}{5L^2} & \frac{64}{7L} & \frac{-242}{35L^2} & \frac{38}{35L} \\ \frac{-512}{5L^3} & \frac{-128}{5L^2} & \frac{1024}{5L^3} & 0 & \frac{-512}{5L^3} & \frac{128}{5L^2} \\ \frac{384}{7L^2} & \frac{64}{7L} & 0 & \frac{256}{7L} & \frac{-384}{7L^2} & \frac{64}{7L} \\ \frac{-1508}{35L^3} & \frac{-242}{35L^2} & \frac{-512}{5L^3} & \frac{-384}{7L^2} & \frac{5092}{35L^3} & \frac{-1138}{35L^2} \\ \frac{242}{35L^2} & \frac{38}{35L} & \frac{128}{5L^2} & \frac{64}{7L} & \frac{-1138}{35L^2} & \frac{332}{35L} \end{bmatrix} \tag{155}$$

Similarmente ao elemento de viga linear, através da equação (143), é possível obter os carregamentos equivalentes no elemento de vigas.

#### 3.1.2.2.1 Estado de tensão

O estado de tensão do elemento de viga quadrática pode ser calculado com recursos às expressões e metodologia apresentada na formulação do elemento de viga linear, nomeadamente equações (123), (145) e (146).

#### 3.1.2.3 Comparação das formulações linear e quadrática

Novamente, confirma-se que a grande diferenciação entre a formulação linear e quadrática está assente no número de monónimos que compõem o polinómio que serve de ponto de partida, e permite obter as funções de forma do elemento de viga. Portanto, ao comparar as funções de forma da formulação linear (expressão (135)) e toda a formulação apresentada para este elemento com as funções de forma da formulação quadrática (expressão (152)), e restante formulação do elemento de viga quadrático, podem-se retirar as seguintes conclusões:

- A formulação quadrática apresenta mais duas funções de forma, respeitantes ao nó central, que permitem obter a solução exata das variáveis primárias em mais um ponto do elemento comparativamente à formulação linear;
- Os esforços de corte captados por um elemento de viga linear, sempre que existam, são constantes ao longo do elemento, independentemente do comportamento real destes. Ou seja, na situação em que um elemento se encontre sujeito a um esforço atuante que impõe esforços de corte internos não constantes ao longo do elemento, este efeito não será captado pela formulação linear. Nesta situação concreta, o valor dos esforços de corte nos nós também não será exato, de acordo com a mecânica dos materiais;
- De forma análoga ao processo descrito para o esforço de corte, um processo idêntico ocorre para os momentos fletores internos no elemento. Como se pode deduzir através da análise das equações (125) e (136), o momento fletor para um elemento de viga linear está limitado a uma variação linear, mesmo que a sua distribuição seja regida por uma variação de grau superior;
- Na continuidade dos dois pontos anteriores, a anomalia descrita já não ocorre para o elemento de viga quadrática já que este elemento, tanto para o esforço de corte como para os momentos fletores, consegue captar variações de grau superior, ou seja, variações por exemplo provocadas por esforços de corte constantes distribuídos ao longo do elemento com a mesma precisão da mecânica dos materiais;
- Quando se utiliza um único elemento de viga linear na aproximação de um problema de viga duplamente encastrada como uma viga que compõem um pórtico, é necessário estar ciente que as variáveis de campo secundárias estão dependentes das variáveis de campo primárias e que, nesta situação específica,

toda a matriz será condensada. Portanto, as variáveis primárias (deflexão e rotação) serão zero e conseqüentemente os momentos fletores, esforços de corte e tensões no elemento também o serão, se não forem considerados pelo menos dois elementos de viga lineares na aproximação ao problema. O mesmo cuidado já não é necessário para o elemento de viga quadrático, uma vez que apenas com um único elemento se consegue obter uma solução aproximada para o problema em questão.

Na continuidade da comparação das formulações é também possível concluir que, com recurso a um menor número de elementos quadráticos, consegue-se uma melhor aproximação à solução exata de um problema em análise, e também evitar erros provocados por uma errada discretização do problema por parte do utilizador. Estes erros podem levar à obtenção de soluções muito díspares daquelas a que realmente o elemento se encontra sujeito, nomeadamente das variáveis secundárias nos nós.

Em suma, a seleção do tipo de elemento de viga a adotar na análise de uma estrutura deve ser ponderada pelo utilizador, e levar em consideração as características da estrutura em análise, assim como o poder computacional que o utilizador tem à sua disposição.

#### 3.1.2.4 Validação das formulações

A fim de se validar as formulações de viga linear e quadrática expostas anteriormente, aplicam-se as mesmas na resolução de 4 problemas modelo e comparam-se os resultados obtidos (deslocamentos, rotações, reações nos apoios, esforços de corte, momentos fletores, tensões normais, tensões de corte e de von Mises) através do MEF para cada tipo de elemento com o exibido em literatura ou com os obtidos através de *softwares* amplamente utilizados no mercado.

##### 1º Problema Modelo

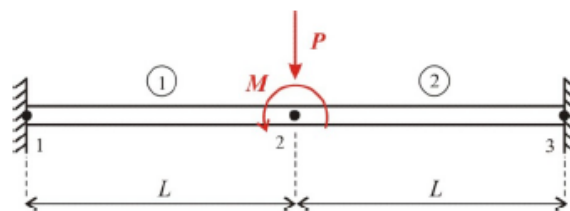


Figura 84 – 1º problema modelo para o elemento de viga [1]

Os dados de entrada do modelo apresentado na Figura 84 são

$$P = 4 \text{ kN} ; M = 2 \text{ kNm} ; A_1 = A_2 = 1060 \text{ mm}^2 ; E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa} ;$$

$$I_1 = I_2 = 1710000 \text{ mm}^4 ; L_1 = L_2 = 5000 \text{ mm}$$

A Tabela 17 permite simplificar o processo de construção da matriz de rigidez dos elementos.

Tabela 17 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro problema modelo do elemento de viga.

	$EI$	$EI$	$EI/L^3$	$Y$ [mm]
1	342000	2736	50	
2	342000	2736	50	

O nó  $i$  do elemento 1 que corresponde ao nó 1 na Figura 84 e o nó  $k$  do elemento 2 corresponde ao nó 3, encontram-se prescritos tanto na direção da deflexão  $v$  como da rotação  $\theta$ .

Paralelamente, com base nas ligações existentes entre os nós dos elementos, é possível escrever as igualdades seguintes:

$$v_{1k} = v_{2i}; \theta_{1k} = \theta_{2i}$$

A Tabela 18 reúne os resultados obtidos através das formulações descritas comparativamente com os resultados obtidos por diferentes *softwares* recorrentemente utilizados na análise de estruturas. Complementarmente, podem ser consultados os resultados para o modelo em análise no livro da referência [1].

Tabela 18 – Resultados obtidos na solução do primeiro problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$v_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$v_{1j}$ [mm]	NA	-32,742	-32,74	-32,74
$v_{1k}$ [mm]	-60,916	-60,916	-60,9	-60,916
$v_{2j}$ [mm]	NA	-28,174	-28,17	-28,17
$v_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$\theta_{1i}$ [rad]	0	0	NA	0
$\theta_{1j}$ [rad]	NA	-0,0192	NA	0,0192
$\theta_{1k}$ [rad]	0,0037	0,0037	NA	-0,0037
$\theta_{2j}$ [rad]	NA	0,0174	NA	-0,0174
$\theta_{2k}$ [rad]	0	0	NA	0
$R_{1iy}$ [kN]	2,3	2,3	2,3	2,3
$R_{1iM}$ [kN.m]	5,5	5,5	-5,5	-5,5

$R_{2k_y}$ [kN]	1,7	1,7	1,7	1,7
$R_{2k_M}$ [kN.m]	-4,5	-4,5	4,5	4,5
$\sigma_{1i}$ [MPa]	160,819	160,819	NA	-160,807
$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	-7,31	NA	7,31
$\sigma_{1k}$ [MPa]	-175,439	-175,439	NA	175,426
$\sigma_{2i}$ [MPa]	-116,959	-116,959	NA	116,951
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	7,31	NA	-7,31
$\sigma_{2k}$ [MPa]	131,579	131,579	NA	-131,57
$\tau_{1i}$ [MPa]	2,1698	2,1698	NA	2,17
$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	2,1698	NA	2,17
$\tau_{1k}$ [MPa]	2,1698	2,1698	NA	2,17
$\tau_{2i}$ [MPa]	-1,604	-1,604	NA	-1,604
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	-1,604	NA	-1,604
$\tau_{2k}$ [MPa]	-1,604	-1,604	NA	-1,604
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	160,863	160,863	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	8,219	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	175,479	175,479	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	116,992	116,992	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	7,82	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	131,608	131,608	NA	NA
$F_{1i}$ [kN]	2,3	2,3	2,3	2,3
$F_{1j}$ [kN]	NA	2,3	2,3	2,3
$F_{1k}$ [kN]	2,3	2,3	2,3	2,3
$F_{2i}$ [kN]	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
$F_{2j}$ [kN]	Na	-1,7	-1,7	-1,7
$F_{2k}$ [kN]	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7
$M_{1i}$ [kN.m]	5,5	5,5	-5,5	-5,5
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	-0,25	0,25	0,25

$M_{1k}$ [kN.m]	-6	-6	6	6
$M_{2i}$ [kN.m]	-4	-4	4	4
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	0,25	-0,25	-0,25
$M_{2k}$ [kN.m]	4,5	4,5	-4,5	-4,5

Na Figura 85, Figura 86 e Figura 87 são apresentados os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL:

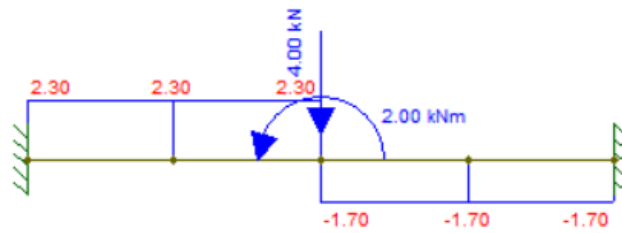


Figura 85 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte e esforços atuantes

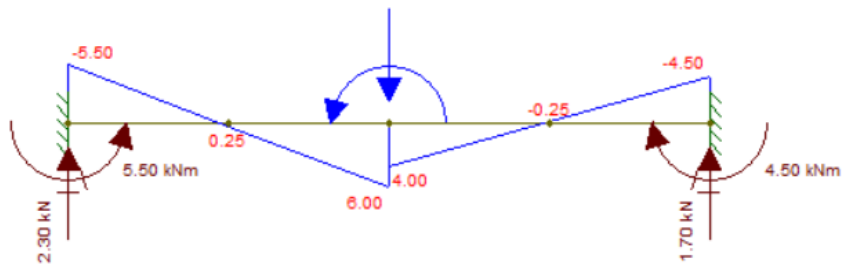


Figura 86 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios

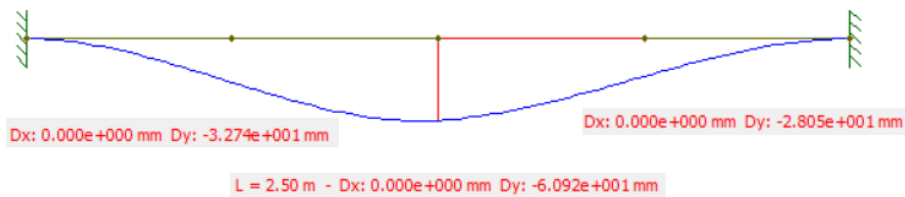


Figura 87 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos

Na Figura 88 e Figura 89 pode ser consultado o modelo utilizado, assim como as propriedades e os esforços atuantes dos elementos. Já na Figura 90 e Figura 91 são expostos os resultados obtidos para a simulação considerando elementos de viga com três nós através do *software* Robot Structural Analysis.

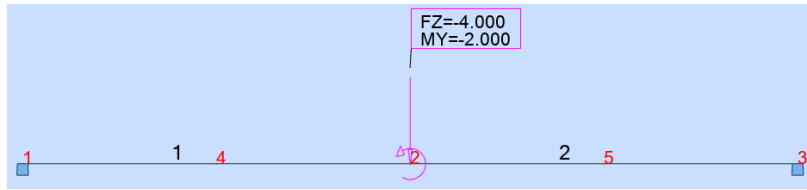


Figura 88 – Modelo em robot do primeiro problema modelo para o elemento de viga

Barra Nº.: 1		Seção: SecçãoGenéricaIF			
Dimensões:					
HY (cm)	HZ (cm)				
5,50	10,00				
Propriedades de seção:					
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )		
10,60	1,10	171,01	15,92		
Propriedades de material:					
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00

Barra Nº.: 2		Seção: SecçãoGenéricaIF			
Dimensões:					
HY (cm)	HZ (cm)				
5,50	10,00				
Propriedades de seção:					
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )		
10,60	1,10	171,01	15,92		
Propriedades de material:					
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00

Figura 89 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 2	0,0	0,0	0,0
2/ 2	0,0	-60,91	-0,0037
3/ 2	0,0	0,0	0,0
4/ 2	0,0	-32,74	0,0192
5/ 2	0,0	-28,17	-0,0174

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 2	0,0	2,300	-5,500
3/ 2	0,0	1,700	4,500

Figura 90 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx (MPa)	S mín (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 2	160,809	-160,809	2,170
1/ 2/3/ 2	7,310	-7,310	2,170
1/ 2/ 2	175,428	-175,428	2,170
2/ 2/ 2	116,952	-116,952	-1,604
2/ 2/3/ 2	7,310	-7,310	-1,604
2/ 3/ 2	131,571	-131,571	-1,604

Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1/ 2	0,0	2,300	-5,500
1/ 2/3/ 2	0,0	2,300	0,250
1/ 2/ 2	0,0	2,300	6,000
2/ 2/ 2	0,0	-1,700	4,000
2/ 2/3/ 2	0,0	-1,700	-0,250
2/ 3/ 2	0,0	-1,700	-4,500

Figura 91 – Tensões e esforços internos

Nota: no *software Robot* valores negativos significam tração enquanto valores positivos significam compressão.

Conclui-se com base na análise da Tabela 18 que as formulações do elemento de viga linear e quadrática apresentam resultados válidos, comparativamente com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados. As tensões equivalentes para os resultados obtidos através do *software Robot* podem ser obtidas com recurso à equação (146). Contudo, existem diferenças de sinais nos resultados dos momentos

fletores internos com recurso à formulação comparativamente aos obtidos com recurso aos *softwares*, que se deve às diferenças adotadas nas convenções de sinais. Portanto, a curvatura da viga, e conseqüentemente as fibras que se encontram à tração ou compressão, são as mesmas independentemente do procedimento de resolução utilizado, o que valida os resultados obtidos pela formulação exposta para o elemento de viga. O mesmo acontece nos resultados obtidos para a rotação e, mais uma vez, a diferença de sinais encontra-se na convenção de sinais estipulada. As convenções de sinais do *software* Robot podem ser consultadas na Figura 92 e nas referências [42] e [43], enquanto a convenção de sinais adotada pelo *software* FTOOL pode ser consultada na referência [44].

Positive directions of forces and moments:

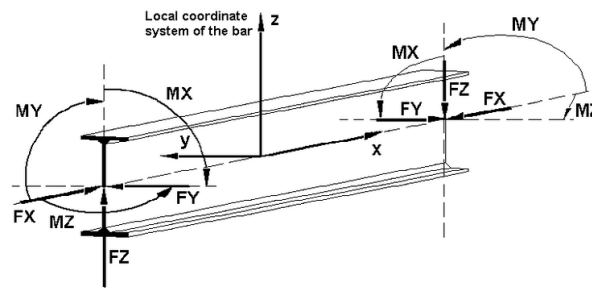


Figura 92 – Convenção de sinais do *software* Robot Structural Analysis [42]

## 2º Problema Modelo

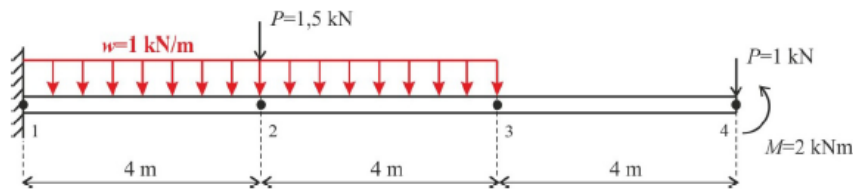


Figura 93 – 2º problema modelo para o elemento de viga [1]

Dados do modelo apresentado na Figura 93,

$$w = -1 \text{ kN/m} ; P_2 = -1,5 \text{ kN} ; P_4 = -1 \text{ kN} ; M_4 = 2 \text{ kNm} ; A_1 = A_2 = A_3 = 50 \text{ cm}^2 ;$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 200 \text{ GPa} ; I_1 = I_2 = I_3 = 5000 \text{ cm}^4 ; L_1 = L_2 = L_3 = 4000 \text{ mm}$$

Através da Tabela 19 simplifica-se o processo de construção da matriz de rigidez dos elementos.

Tabela 19 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo problema modelo para o elemento de viga.

$EI$	$EI$	$EI/L^3$	$Y$ [mm]
1	$10^7$	156250	200
2	$10^7$	156250	200
3	$10^7$	156250	200

O nó  $i$  do elemento 1, que corresponde ao nó 1 na Figura 93, encontra-se prescrito tanto na deflexão  $v$  como na rotação  $\theta$ .

Salienta-se ainda que, com base nas ligações existentes entre os nós dos elementos, podem-se escrever as igualdades seguintes:

$$v_{1k} = v_{2i}; \theta_{1k} = \theta_{2i}; v_{2k} = v_{3i}; \theta_{2k} = \theta_{3i}$$

Na Tabela 20 encontram-se reunidos os resultados obtidos para as formulações descritas para o elemento de viga comparativamente com os resultados obtidos por diferentes *softwares* utilizados na análise de estruturas. Também, podem ser consultados os resultados para o modelo em análise no livro da referência [1].

Tabela 20 – Resultados obtidos na solução do segundo problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$v_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$v_{1j}$ [mm]	NA	-8,267	-8,267	-8,27
$v_{1k}$ [mm]	-28,267	-28,267	-28,27	-28,27
$v_{2j}$ [mm]	NA	-54,2	-54,2	-54,2
$v_{2k}$ [mm]	-82,67	-82,67	-82,67	-82,67
$v_{3j}$ [mm]	NA	-112	-112,1	-112
$v_{3k}$ [mm]	-141,33	-141,33	-141,3	-141,33
$\theta_{1i}$ [rad]	0	0	NA	0
$\theta_{1j}$ [rad]	NA	-0,0076	NA	0,008
$\theta_{1k}$ [rad]	-0,0119	-0,0119	NA	0,012
$\theta_{2j}$ [rad]	NA	-0,0138	NA	0,014
$\theta_{2k}$ [rad]	-0,0145	-0,0145	NA	0,015
$\theta_{3j}$ [rad]	NA	-0,0147	NA	0,015
$\theta_{3k}$ [rad]	-0,0145	-0,0145	NA	0,015
$R_{1iy}$ [kN]	10,5	10,5	10,5	10,5
$R_{1iM}$ [kN.m]	48	48	-48	-48
$\sigma_{1i}$ [MPa]	186,67	192	NA	-192

$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	116	NA	-116
$\sigma_{1k}$ [MPa]	50,67	56	NA	-56
$\sigma_{2i}$ [MPa]	50,67	56	NA	-56
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	24	NA	-24
$\sigma_{2k}$ [MPa]	2,67	8	NA	-8
$\sigma_{3i}$ [MPa]	8	8	NA	-8
$\sigma_{3j}$ [MPa]	NA	0	NA	0
$\sigma_{3k}$ [MPa]	-8	-8	NA	8
$\tau_{1i}$ [MPa]	1,7	2,1	NA	2,1
$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	1,7	NA	1,7
$\tau_{1k}$ [MPa]	1,7	1,3	NA	1,3
$\tau_{2i}$ [MPa]	0,6	1	NA	1
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	0,6	NA	0,6
$\tau_{2k}$ [MPa]	0,6	0,2	NA	0,2
$\tau_{3i}$ [MPa]	0,2	0,2	NA	0,2
$\tau_{3j}$ [MPa]	NA	0,2	NA	0,2
$\tau_{3k}$ [MPa]	0,2	0,2	NA	0,2
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	186,69	192,034	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	116,037	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	50,752	56,045	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	50,677	56,027	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	24,022	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	2,862	8,0075	NA	NA
$\sigma_{eq3i}$ [MPa]	8,007	8,0075	NA	NA
$\sigma_{eq3j}$ [MPa]	NA	0,3464	NA	NA
$\sigma_{eq3k}$ [MPa]	8,007	8,0075	NA	NA
$F_{1i}$ [kN]	8,5	10,5	10,5	10,5
$F_{1j}$ [kN]	NA	8,5	8,5	8,5

$F_{1k}$ [kN]	8,5	6,5	6,5	6,5
$F_{2i}$ [kN]	3	5	5	5
$F_{2j}$ [kN]	Na	3	3	3
$F_{2k}$ [kN]	3	1	1	1
$F_{3i}$ [kN]	1	1	1	1
$F_{3j}$ [kN]	NA	1	1	1
$F_{3k}$ [kN]	1	1	1	1
$M_{1i}$ [kN.m]	46,67	48	-48	-48
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	29	-29	-29
$M_{1k}$ [kN.m]	12,67	14	-14	-14
$M_{2i}$ [kN.m]	12,67	14	-14	-14
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	6	-6	-6
$M_{2k}$ [kN.m]	0,667	2	-2	-2
$M_{3i}$ [kN.m]	2	2	-2	-2
$M_{3j}$ [kN.m]	NA	0	0	0
$M_{3k}$ [kN.m]	-2	-2	2	2

Na Figura 94, Figura 95 e Figura 96 são apresentados os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL:

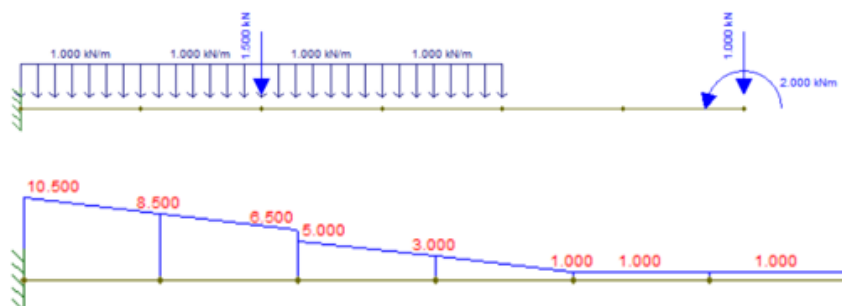


Figura 94 – Resultados obtidos no FTOOL – esforços atuantes e esforço de corte

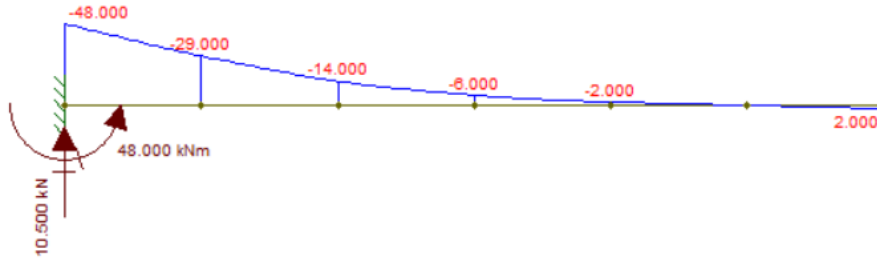


Figura 95 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios

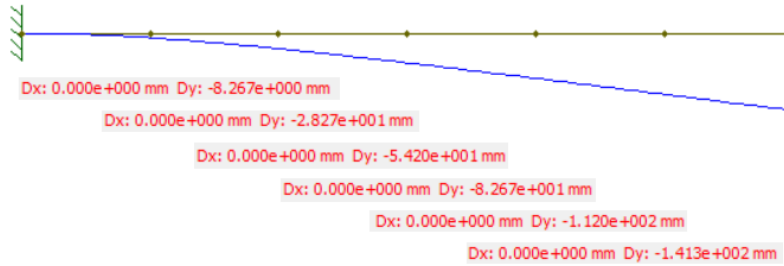


Figura 96 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos

Já na Figura 97 e Figura 98 pode ser consultado o modelo utilizado com os respectivos esforços atuantes, bem como as propriedades dos elementos. Ainda, na Figura 99 e Figura 100 são expostos os resultados obtidos com recurso a uma simulação por elementos de viga com três nós através do *software* Robot Structural Analysis:

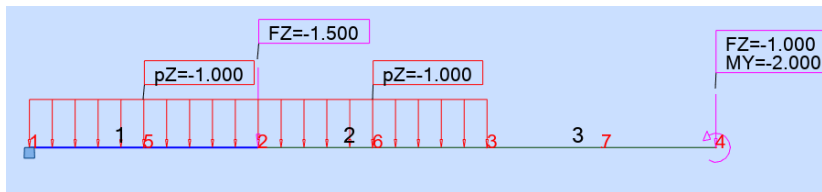


Figura 97 – Modelo em robot do segundo problema modelo do elemento de viga

Barra Nº.: 1		Seção: SecçãoGenérica		Barra Nº.: 2		Seção: SecçãoGenérica	
Dimensões:				Dimensões:			
HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)
2,00	40,00	2,00	40,00	2,00	40,00	2,00	40,00
Propriedades de seção:				Propriedades de seção:			
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )
50,00	1,00	5000,00	1,00	50,00	1,00	5000,00	1,00
Propriedades de material:				Propriedades de material:			
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	E (MPa)	G (MPa)
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00	200000,00	80800,00
		NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)		
		0,30	0,00	0,000	255,00		
Barra Nº.: 3		Seção: SecçãoGenérica					
Dimensões:							
HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)				
2,00	40,00	2,00	40,00				
Propriedades de seção:							
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )				
50,00	1,00	5000,00	1,00				
Propriedades de material:							
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)		
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00		
		NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)		
		0,30	0,00	0,000	255,00		

Figura 98 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 2	0,0	0,0	0,0
2/ 2	0,0	-28,27	0,012
3/ 2	0,0	-82,67	0,015
4/ 2	0,0	-141,33	0,015
5/ 2	0,0	-8,27	0,008
6/ 2	0,0	-54,20	0,014
7/ 2	0,0	-112,00	0,015

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1	0,0	0,000	-0,000
1/ 2	0,0	10,500	-48,000

Figura 99 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx (MPa)	S mín (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 2	192,000	-192,000	2,100
1/ 2/3/ 2	116,000	-116,000	1,700
1/ 2/ 2	56,000	-56,000	1,300
2/ 2/ 2	56,000	-56,000	1,000
2/ 2/3/ 2	24,000	-24,000	0,600
2/ 3/ 2	8,000	-8,000	0,200
3/ 3/ 2	8,000	-8,000	0,200
3/ 2/3/ 2	0,000	-0,000	0,200
3/ 4/ 2	8,000	-8,000	0,200

Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1/ 2	0,0	10,500	-48,000
1/ 2/3/ 2	0,0	8,500	-29,000
1/ 2/ 2	0,0	6,500	-14,000
2/ 2/ 2	0,0	5,000	-14,000
2/ 2/3/ 2	0,0	3,000	-6,000
2/ 3/ 2	0,0	1,000	-2,000
3/ 3/ 2	0,0	1,000	-2,000
3/ 2/3/ 2	0,0	1,000	0,000
3/ 4/ 2	0,0	1,000	2,000

Figura 100 – Tensões e esforços internos

Com base na análise da Tabela 20 conclui-se que as formulações do elemento de viga linear e quadrática apresentam resultados válidos, quando comparados com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados. No entanto, como esperado, a formulação linear não consegue captar a variação dos esforços de corte e momentos fletores internos, correta para a discretização utilizada. Portanto, os resultados obtidos para estes esforços nos nós do elemento não são exatos, assim como os resultados das variáveis que destes valores dependem. De modo análogo ao problema modelo apresentado anteriormente, as tensões equivalentes para os resultados obtidos através do *software Robot* podem ser conseguidas com recurso à equação (146). Em conformidade com o referido no problema modelo 1, as diferenças nos sinais dos resultados encontram-se justificadas nas convenções de sinais empregues.

### 3º Problema Modelo

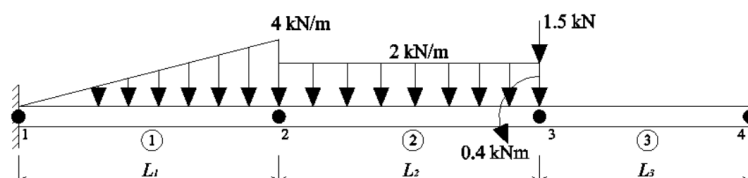


Figura 101 – 3º problema modelo do elemento de viga

Dados do modelo apresentado na Figura 101,

$$w_1 = -\frac{4}{L_1} x \text{ kN/m}; w_2 = -2 \text{ kN/m}; P_3 = -1,5 \text{ kN}; M_3 = 0,4 \text{ kNm}; A_1 = A_2 = A_3 = 15 \text{ cm}^2;$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}; I_1 = I_2 = I_3 = 600 \text{ cm}^4; L_1 = L_2 = 75 \text{ cm}; L_3 = 50 \text{ cm}$$

Elabora-se a Tabela 21 que permite simplificar o processo de construção da matriz de rigidez dos elementos.

Tabela 21 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do terceiro problema modelo para o elemento de viga.

$EI$	$EI$	$EI/L^3$	$Y$ [mm]
1	$126 \cdot 10^4$	$298,6(6) \cdot 10^4$	200
2	$126 \cdot 10^4$	$298,6(6) \cdot 10^4$	200
3	$126 \cdot 10^4$	$1008 \cdot 10^4$	200

O nó  $i$  do elemento 1 que corresponde ao nó 1 assim como o nó  $k$  do elemento 3 que corresponde ao nó 4 na Figura 101, encontram-se fixos na deflexão  $v$  e na rotação  $\theta$ .

Salienta-se ainda que, com base nas ligações existentes entre os nós dos elementos, podem-se escrever as igualdades seguintes:

$$v_{1k} = v_{2i}; \theta_{1k} = \theta_{2i}; v_{2k} = v_{3i}; \theta_{2k} = \theta_{3i}$$

Na Tabela 22 podem-se consultar os resultados obtidos para as formulações linear e quadrática para o elemento de viga e comparar os resultados com os resultados obtidos por diferentes *softwares* utilizados na análise de estruturas. Ainda, podem ser consultados os resultados para o modelo em análise no livro da [1].

Tabela 22 – Resultados obtidos na solução do terceiro problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$v_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$v_{1j}$ [mm]	NA	-0,0381	-0,0381	-0,038
$v_{1k}$ [mm]	-0,095	-0,095	-0,095	-0,095
$v_{2j}$ [mm]	NA	-0,1112	-0,112	-0,111
$v_{2k}$ [mm]	-0,067	-0,067	-0,0667	-0,067
$v_{3j}$ [mm]	NA	-0,0212	-0,02119	-0,021
$v_{3k}$ [mm]	0	0	0	0

$\theta_{1i}$ [rad]	0	0	NA	0
$\theta_{1j}$ [rad]	NA	-0,0002	NA	0,0002
$\theta_{1k}$ [rad]	-0,0001	-0,0001	NA	0,0001
$\theta_{2j}$ [rad]	NA	0	NA	0
$\theta_{2k}$ [rad]	0,0002	0,0002	NA	-0,0002
$\theta_{3j}$ [rad]	NA	0,0002	NA	-0,0002
$\theta_{3k}$ [rad]	0	0	NA	0
$R_{1iy}$ [kN]	2,323	2,323	2,323	2,323
$R_{1im}$ [kN.m]	0,969	0,969	-0,969	-0,969
$R_{3ky}$ [kN]	2,177	2,177	2,177	2,177
$R_{3km}$ [kN.m]	-1,036	-1,036	1,036	1,036
$\sigma_{1i}$ [MPa]	29,801	32,301	NA	-32,301
$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	4,827	NA	-4,827
$\sigma_{1k}$ [MPa]	-17,022	-13,2723	NA	13,272
$\sigma_{2i}$ [MPa]	-16,397	-13,2723	NA	13,272
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	-18,8717	NA	18,872
$\sigma_{2k}$ [MPa]	-18,221	-15,096	NA	15,096
$\sigma_{3i}$ [MPa]	-1,763	-1,7627	NA	1,763
$\sigma_{3j}$ [MPa]	NA	16,3794	NA	-16,379
$\sigma_{3k}$ [MPa]	34,521	34,5215	NA	-34,521
$\tau_{1i}$ [MPa]	1,249	1,5486	NA	1,549
$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	1,2986	NA	1,299
$\tau_{1k}$ [MPa]	1,249	0,5486	NA	0,549
$\tau_{2i}$ [MPa]	0,049	0,5486	NA	0,549
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	0,0486	NA	0,049
$\tau_{2k}$ [MPa]	0,049	-0,4514	NA	-0,451
$\tau_{3i}$ [MPa]	-1,451	-1,4514	NA	-1,451
$\tau_{3j}$ [MPa]	NA	-1,4514	NA	-1,451

$\tau_{3k}$ [MPa]	-1,451	-1,4514	NA	-1,451
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	29,88	32,4126	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	5,3254	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	17,16	13,3063	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	16,397	13,3063	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	18,8719	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	18,221	15,1163	NA	NA
$\sigma_{eq3i}$ [MPa]	3,07	3,0703	NA	NA
$\sigma_{eq3j}$ [MPa]	NA	15,5712	NA	NA
$\sigma_{eq3k}$ [MPa]	34,613	34,6129	NA	NA
$F_{1i}$ [kN]	1,873	2,3229	2,323	2,323
$F_{1j}$ [kN]	NA	1,9479	1,948	1,948
$F_{1k}$ [kN]	1,873	0,8229	0,823	0,823
$F_{2i}$ [kN]	0,073	0,8229	0,823	0,823
$F_{2j}$ [kN]	Na	0,0729	0,073	0,073
$F_{2k}$ [kN]	0,073	-0,6771	-0,677	-0,677
$F_{3i}$ [kN]	-2,177	-2,1771	-2,177	-2,177
$F_{3j}$ [kN]	NA	-2,1771	-2,177	-2,177
$F_{3k}$ [kN]	-2,177	-2,1771	-2,177	-2,177
$M_{1i}$ [kN.m]	0,894	0,969	-0,969	-0,969
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	0,1448	-0,145	-0,145
$M_{1k}$ [kN.m]	-0,511	-0,3982	0,398	0,398
$M_{2i}$ [kN.m]	-0,492	-0,3982	0,398	0,398
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	-0,5661	0,566	0,566
$M_{2k}$ [kN.m]	-0,547	-0,4529	0,453	0,453
$M_{3i}$ [kN.m]	-0,053	-0,0529	0,053	0,053
$M_{3j}$ [kN.m]	NA	0,4914	-0,491	-0,491
$M_{3k}$ [kN.m]	1,036	1,0356	-1,036	-1,036

Nas Figura 102, Figura 103 e Figura 104 são apresentados os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL:

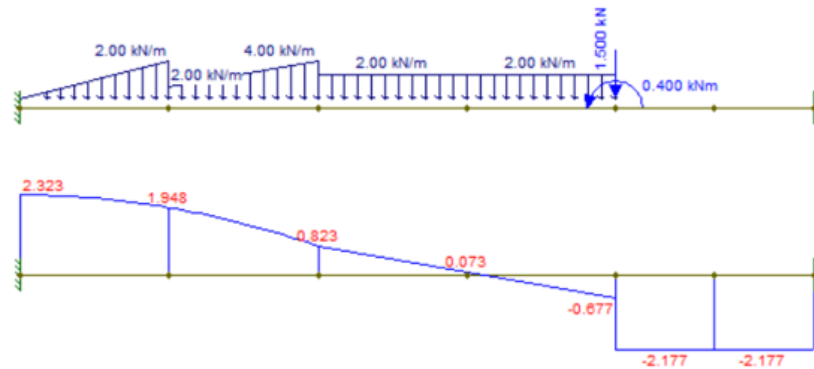


Figura 102 – Resultados obtidos no FTOOL – esforços atuantes e esforço corte

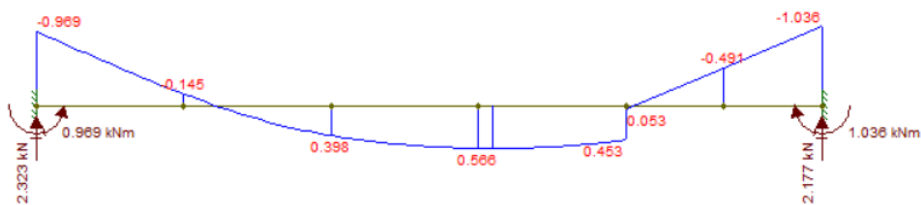


Figura 103 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios

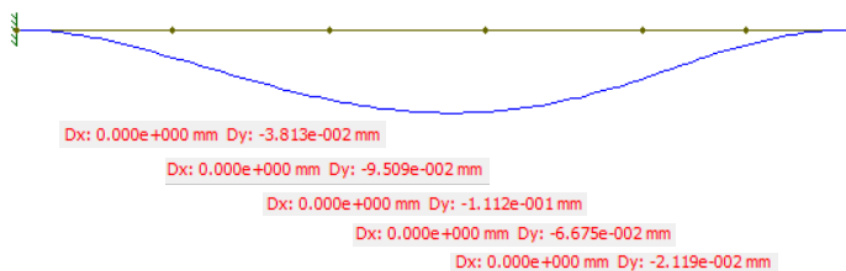


Figura 104 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos

Posteriormente, na Figura 105 e Figura 106 pode-se consultar o modelo utilizado com os respetivos esforços atuantes, bem como as propriedades dos elementos, respetivamente. Para além do referido anteriormente, na Figura 107 e Figura 108 apresentam-se os resultados obtidos para a simulação do modelo através do *software* Robot Structural Analysis.

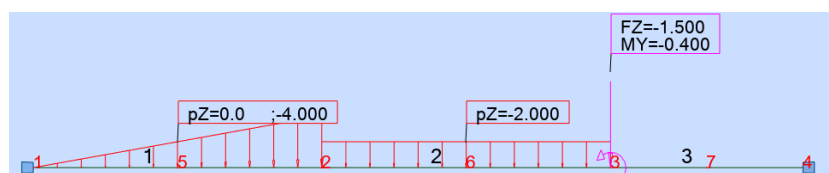


Figura 105 – Modelo em *robot* do terceiro problema modelo do elemento de viga

<p>Barra Nº.: 1    Seção:    SecçãoGenérica</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr><th>HY (cm)</th><th>HZ (cm)</th></tr> <tr><td>40,00</td><td>40,00</td></tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr><th>AX (cm<sup>2</sup>)</th><th>IX (cm<sup>4</sup>)</th><th>IY (cm<sup>4</sup>)</th><th>IZ (cm<sup>4</sup>)</th></tr> <tr><td>15,00</td><td>1,00</td><td>600,00</td><td>1,00</td></tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr><th>E (MPa)</th><th>G (MPa)</th><th>NI</th><th>LX (1/°C)</th><th>RO (kN/m<sup>3</sup>)</th><th>Re (MPa)</th></tr> <tr><td>210000,00</td><td>80800,00</td><td>0,30</td><td>0,00</td><td>0,000</td><td>255,00</td></tr> </table>	HY (cm)	HZ (cm)	40,00	40,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	15,00	1,00	600,00	1,00	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00	<p>Barra Nº.: 2    Seção:    SecçãoGenérica</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr><th>HY (cm)</th><th>HZ (cm)</th></tr> <tr><td>40,00</td><td>40,00</td></tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr><th>AX (cm<sup>2</sup>)</th><th>IX (cm<sup>4</sup>)</th><th>IY (cm<sup>4</sup>)</th><th>IZ (cm<sup>4</sup>)</th></tr> <tr><td>15,00</td><td>1,00</td><td>600,00</td><td>1,00</td></tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr><th>E (MPa)</th><th>G (MPa)</th><th>NI</th><th>LX (1/°C)</th><th>RO (kN/m<sup>3</sup>)</th><th>Re (MPa)</th></tr> <tr><td>210000,00</td><td>80800,00</td><td>0,30</td><td>0,00</td><td>0,000</td><td>255,00</td></tr> </table>	HY (cm)	HZ (cm)	40,00	40,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	15,00	1,00	600,00	1,00	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00
HY (cm)	HZ (cm)																																																
40,00	40,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
15,00	1,00	600,00	1,00																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																																												
HY (cm)	HZ (cm)																																																
40,00	40,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
15,00	1,00	600,00	1,00																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																																												
<p>Barra Nº.: 3    Seção:    SecçãoGenérica</p> <p>Dimensões:</p> <table border="1"> <tr><th>HY (cm)</th><th>HZ (cm)</th></tr> <tr><td>40,00</td><td>40,00</td></tr> </table> <p>Propriedades de seção:</p> <table border="1"> <tr><th>AX (cm<sup>2</sup>)</th><th>IX (cm<sup>4</sup>)</th><th>IY (cm<sup>4</sup>)</th><th>IZ (cm<sup>4</sup>)</th></tr> <tr><td>15,00</td><td>1,00</td><td>600,00</td><td>1,00</td></tr> </table> <p>Propriedades de material:</p> <table border="1"> <tr><th>E (MPa)</th><th>G (MPa)</th><th>NI</th><th>LX (1/°C)</th><th>RO (kN/m<sup>3</sup>)</th><th>Re (MPa)</th></tr> <tr><td>210000,00</td><td>80800,00</td><td>0,30</td><td>0,00</td><td>0,000</td><td>255,00</td></tr> </table>	HY (cm)	HZ (cm)	40,00	40,00	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	15,00	1,00	600,00	1,00	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																									
HY (cm)	HZ (cm)																																																
40,00	40,00																																																
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )																																														
15,00	1,00	600,00	1,00																																														
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)																																												
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00																																												

Figura 106 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 2	0,0	0,0	0,0
2/ 2	0,0	-0,095	0,0001
3/ 2	0,0	-0,067	-0,0002
4/ 2	0,0	0,0	0,0
5/ 2	0,0	-0,038	0,0002
6/ 2	0,0	-0,111	-0,0000
7/ 2	0,0	-0,021	-0,0002

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 2	0,0	2,323	-0,969
4/ 2	0,0	2,177	1,036

Figura 107 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx (MPa)	S mín (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 2	32,301	-32,301	1,549
1/ 2/3/ 2	4,827	-4,827	1,299
1/ 2/ 2	13,272	-13,272	0,549
2/ 2/ 2	13,272	-13,272	0,549
2/ 2/3/ 2	18,872	-18,872	0,049
2/ 3/ 2	15,096	-15,096	-0,451
3/ 3/ 2	1,763	-1,763	-1,451
3/ 2/3/ 2	16,379	-16,379	-1,451
3/ 4/ 2	34,521	-34,521	-1,451

Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1/ 2	0,0	2,323	-0,969
1/ 2/3/ 2	0,0	1,948	-0,145
1/ 2/ 2	0,0	0,823	0,398
2/ 2/ 2	0,0	0,823	0,398
2/ 2/3/ 2	0,0	0,073	0,566
2/ 3/ 2	0,0	-0,677	0,453
3/ 3/ 2	0,0	-2,177	0,053
3/ 2/3/ 2	0,0	-2,177	-0,491
3/ 4/ 2	0,0	-2,177	-1,036

Figura 108 – Tensões e esforços internos

Quando se analisa a Tabela 22, de modo análogo ao modelo apresentado anteriormente, verifica-se que a formulação linear não consegue captar a conveniente distribuição dos esforços de corte e momentos fletores internos quando os elementos se encontram sujeitos a carregamentos distribuídos. Novamente, os resultados obtidos para estas variáveis não são exatos nos nós dos elementos e, subsequentemente, os

resultados das variáveis obtidas com intermédio das variáveis secundárias, como as tensões a que o elemento se encontra sujeito, também não são exatos no nós. No entanto, com base na Tabela 22 pode-se concluir que as formulações do elemento de viga linear e quadrática apresentam resultados válidos, quando comparados com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados. Ainda, de modo análogo ao problema modelo apresentado anteriormente a tensão equivalente para os resultados obtidos através do *software* Robot podem ser obtidas com recurso à equação (146). Note-se ainda que, conforme o já referido nos problemas modelo anteriores, as diferenças nos sinais dos resultados encontram-se justificadas nas convenções de sinais utilizadas.

#### 4º Problema Modelo

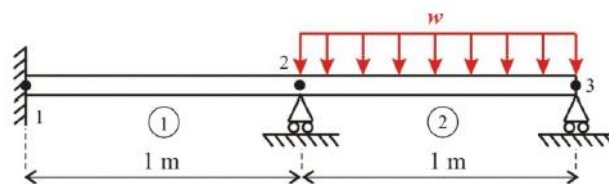


Figura 109 – 4º problema modelo para o elemento de viga [1]

Dados do modelo apresentado na Figura 109,

$$w_2 = -12 \text{ kN/m}; A_1 = A_2 = 20 \text{ cm}^2; E_1 = E_2 = 200 \text{ GPa};$$

$$I_1 = I_2 = 400 \text{ cm}^4; L_1 = L_2 = 100 \text{ cm}$$

A Tabela 23 simplifica o processo de construção da matriz de rigidez dos elementos.

Tabela 23 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do quarto problema modelo do elemento de viga.

$EI$	$EI$	$EI/L^3$	$Y$ [mm]
1	$800 \cdot 10^3$	$800 \cdot 10^3$	50
2	$800 \cdot 10^3$	$800 \cdot 10^3$	50

O nó  $i$  do elemento 1 que corresponde ao nó 1 na Figura 109, encontra-se prescrito tanto na deflexão  $v$  como na rotação  $\theta$ . Já o nó  $i$  e  $k$  do elemento 2 que correspondem ao nó 2 e 3, respetivamente, na Figura 109, encontram-se prescritos na deflexão  $v$ .

Ainda, com base nas ligações existentes entre os nós dos elementos, escrevem-se as seguintes igualdades:

$$v_{1k} = v_{2i}; \theta_{1k} = \theta_{2i}$$

Os resultados obtidos para as formulações linear e quadrática para o elemento de viga são apresentados na Tabela 24, e podem ser comparados com os resultados obtidos por diferentes *softwares* utilizados na análise de estruturas na mesma tabela. Ainda, podem ser consultados os resultados para o modelo em análise no livro da referência [1].

Tabela 24 – Resultados obtidos na solução do quarto problema modelo (elemento de viga) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$v_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$v_{1j}$ [mm]	NA	0,0335	0,0335	0,033
$v_{1k}$ [mm]	0	0	0	0
$v_{2j}$ [mm]	NA	-0,128	-0,128	-0,128
$v_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$\theta_{1i}$ [rad]	0	0	NA	0
$\theta_{1j}$ [rad]	NA	0,0001	NA	-0,0001
$\theta_{1k}$ [rad]	-0,0003	-0,0003	NA	0,0003
$\theta_{2j}$ [rad]	NA	0	NA	0
$\theta_{2k}$ [rad]	0,0004	0,0004	NA	-0,0004
$R_{1iy}$ [kN]	-1,2857	-1,286	-1,286	-1,286
$R_{1iM}$ [kN.m]	-0,4286	-0,429	0,429	0,429
$R_{2iy}$ [kN]	8,1429	8,143	8,143	8,143
$R_{2ky}$ [kN]	5,1429	5,143	5,143	5,143
$\sigma_{1i}$ [MPa]	-5,3571	-5,3571	NA	5,357
$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	2,6786	NA	-2,679
$\sigma_{1k}$ [MPa]	10,7143	10,7143	NA	-10,714
$\sigma_{2i}$ [MPa]	-1,7857	10,7143	NA	-10,714
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	-13,3929	NA	13,393
$\sigma_{2k}$ [MPa]	-12,5	0	NA	0
$\tau_{1i}$ [MPa]	-0,643	-0,6429	NA	-0,643
$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	-0,6429	NA	-0,643
$\tau_{1k}$ [MPa]	-0,643	-0,6429	NA	-0,643
$\tau_{2i}$ [MPa]	0,429	3,4286	NA	3,429
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	0,4286	NA	0,429

$\tau_{2k}$ [MPa]	0,429	-2,5714	NA	-2,571
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	5,472	5,4716	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	2,9008	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	10,772	10,772	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	1,9339	12,2499	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	13,4134	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	12,522	4,4538	NA	NA
$F_{1i}$ [kN]	-1,286	-1,2857	-1,286	-1,286
$F_{1j}$ [kN]	NA	-1,2857	-1,286	-1,286
$F_{1k}$ [kN]	-1,286	-1,2857	-1,286	-1,286
$F_{2i}$ [kN]	0,857	6,8571	6,857	6,857
$F_{2j}$ [kN]	Na	0,8571	0,857	0,857
$F_{2k}$ [kN]	0,857	-5,1429	-5,143	-5,143
$M_{1i}$ [kN.m]	-0,429	-0,4286	0,429	0,429
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	0,2143	-0,214	-0,214
$M_{1k}$ [kN.m]	0,857	0,8571	-0,857	-0,857
$M_{2i}$ [kN.m]	-0,143	0,8571	-0,857	-0,857
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	-1,0714	1,071	1,071
$M_{2k}$ [kN.m]	-1	0	0	0

Podem ser consultados os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL na Figura 110, Figura 111 e Figura 112:

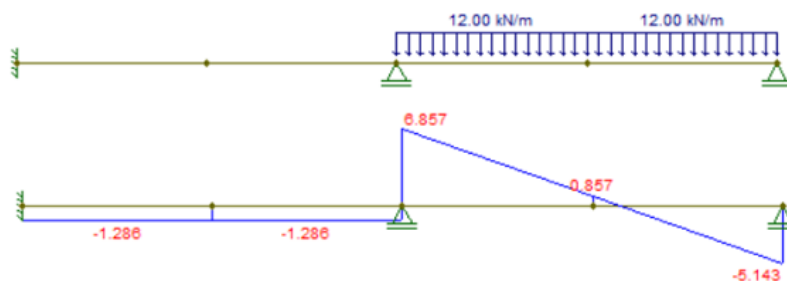


Figura 110 – Resultados obtidos no FTOOL – esforços atuantes e esforço corte



Figura 111 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos e reações nos apoios

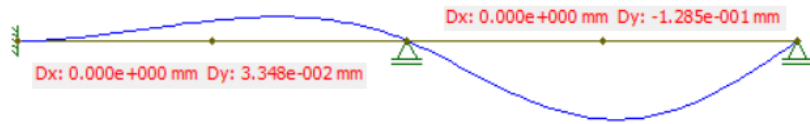


Figura 112 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos transversos

Similarmente, podem ser consultados na Figura 113 e Figura 114 o modelo utilizado com os respetivos esforços atuantes e as propriedades dos elementos respetivamente. Para além do referido anteriormente, nas Figura 115 e Figura 116 apresentam-se os resultados obtidos para a simulação do modelo através do *software* Robot Structural Analysis.

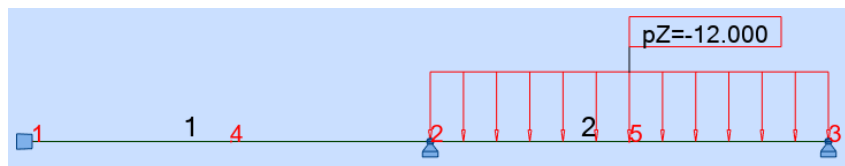


Figura 113 – Modelo em robot do quarto problema modelo do elemento de viga

Barra Nº.: 1		Seção: SecçãoGenérica		Barra Nº.: 2		Seção: SecçãoGenérica					
Dimensões:				Dimensões:							
HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)				
10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00				
Propriedades de seção:				Propriedades de seção:							
AX (cm2)	IX (cm4)	IY (cm4)	IZ (cm4)	AX (cm2)	IX (cm4)	IY (cm4)	IZ (cm4)				
20,00	1,00	400,00	1,00	20,00	1,00	400,00	1,00				
Propriedades de material:				Propriedades de material:							
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m3)	Re (MPa)	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m3)	Re (MPa)
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00	200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00

Figura 114 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 2	0,0	0,0	0,0
2/ 2	0,0	0,0	0,0003
3/ 2	0,0	0,0	-0,0004
4/ 2	0,0	0,033	-0,0001
5/ 2	0,0	-0,128	0,0000
Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 2	0,0	-1,286	0,429
2/ 2	0,0	8,143	-0,000
3/ 2	0,0	5,143	-0,000

Figura 115 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx (MPa)	S mín (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 2	5,357	-5,357	-0,643
1/ 2/3/ 2	2,679	-2,679	-0,643
1/ 2/ 2	10,714	-10,714	-0,643
2/ 2/ 2	10,714	-10,714	3,429
2/ 2/3/ 2	13,393	-13,393	0,429
2/ 3/ 2	0,000	-0,000	-2,571

Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1/ 2	0,0	-1,286	0,429
1/ 2/3/ 2	0,0	-1,286	-0,214
1/ 2/ 2	0,0	-1,286	-0,857
2/ 2/ 2	0,0	6,857	-0,857
2/ 2/3/ 2	0,0	0,857	1,071
2/ 3/ 2	0,0	-5,143	0,000

Figura 116 – Tensões e esforços internos

Uma vez mais, e com base nas observações referidas nos problemas modelo anteriormente apresentados para o elemento de viga, pode-se concluir, com base na Tabela 24, que as formulações se encontram corretas quando comparados com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados.

### 3.1.3 Elemento de estrutura 2D

O elemento de estrutura é utilizado na análise de estruturas reticuladas contínuas, como por exemplo na análise de pórticos. Este elemento é utilizado para descrever um modelo bidimensional com elementos orientados arbitrariamente no plano, e considera que os nós do elemento se encontram rigidamente conectados entre si. Por conseguinte, pode ser visto como o somatório do elemento de viga com o elemento de barra, uma vez que suporta esforços na direção do eixo longitudinal do elemento, assim como esforços transversos que, conseqüentemente, provocam momentos fletores no elemento. Portanto, os elementos de estrutura encontram-se sujeitos ao somatório dos esforços dos elementos de viga e de barra, ou seja, três tipos de esforços sendo estes o esforço axial, esforço de corte e momentos fletores [1, 14, 45].

Na análise bidimensional, cada nó pode sofrer uma rotação e dois deslocamentos, um na direção longitudinal do eixo da estrutura e outro perpendicular ao eixo. No caso dos elementos de estrutura abordados ao longo deste subcapítulo, de modo análogo ao elemento de barra, considera-se um sistema de eixos local para o elemento e um sistema de eixos global para o modelo. No desenvolvimento do elemento referido, estabelecem-se as mesmas condições definidas no elemento de barra e de viga.

#### 3.1.3.1 Formulação linear

Etapa 0 – O elemento de estrutura, conforme referido anteriormente, é composto por dois nós e 6 graus de liberdade que compõem as variáveis de campo, isto é, um deslocamento longitudinal em cada nó ( $u_e$ ), uma deflexão em cada nó ( $v_e$ ), que se desenvolve na direção perpendicular ao eixo axial, e uma rotação em cada nó ( $\theta_e$ ).

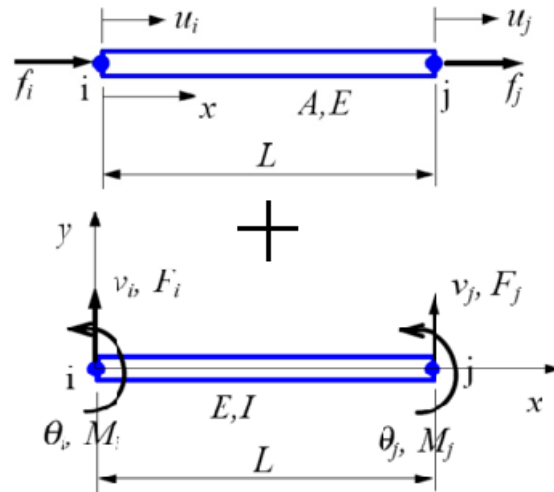


Figura 117 – Simbologia do elemento de estrutura de 2 nós [1]

**Etapa 1** –As variáveis nodais e as forças nodais encontram-se em concordância com a simbologia ilustrada na Figura 117, e tomam a forma de

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ F_i \\ M_i \\ f_j \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}. \quad (156)$$

Uma vez que este elemento corresponde ao somatório do elemento de barra com o elemento de viga, não será feita menção, neste subcapítulo, ao processo descrito nas etapas 2, 3, 4 e 5, que podem ser consultadas nos subcapítulos respectivos de cada elemento que a este dão origem. Portanto, a matriz de rigidez local para o elemento de estrutura pode ser escrita através da sobreposição das matrizes do elemento de barra e de viga em consonância com os respectivos graus de liberdade [1, 12].

$$\mathbf{k}_e = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} & 0 & -\frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 4I & 0 & -\frac{6I}{L} & 2I \\ A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} & 0 & \frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 2I & 0 & -\frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}. \quad (157)$$

As forças equivalentes às quais os elementos se encontram sujeitos devem ser obtidas com recurso às expressões

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{N}_{\text{barra}}^T p_{\text{long.}} dx \quad (158)$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{N}_{\text{viga}}^T p_{\text{transv.}} dx. \quad (159)$$

### 3.1.3.1.1 Transformação de coordenadas

A matriz de rigidez descrita pela expressão (157) encontra-se formulada em concordância com o sistema de coordenadas local. Com o propósito de se utilizar o elemento de estrutura com orientação arbitrária no espaço bidimensional é necessário proceder a uma transformação de coordenadas. Na Figura 118 são apresentadas as variáveis de campo do elemento em coordenadas locais (x,y) e globais (X,Y).

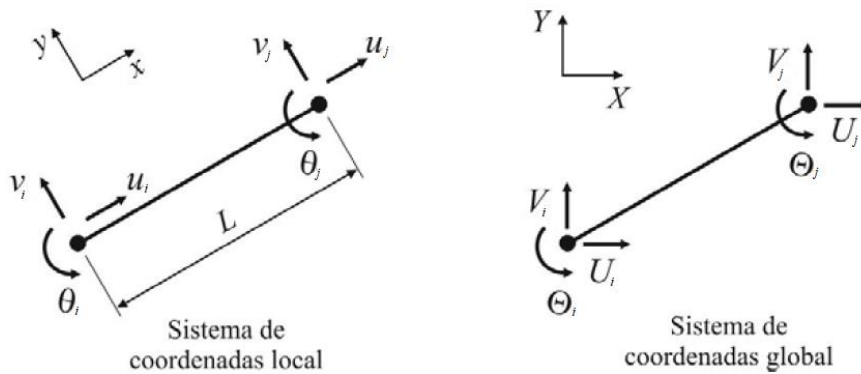


Figura 118 – Sistemas de coordenadas para o elemento de estrutura [1]

Define-se, assim, o vetor das variáveis nodais de acordo com o sistema de coordenadas global,

$$\mathbf{A}_e = \{U_i \quad V_i \quad \Theta_i \quad U_j \quad V_j \quad \Theta_j\}^T. \quad (160)$$

As coordenadas das variáveis de campo globais obtêm-se com recurso à projeção das coordenadas locais no novo sistema de coordenadas, conforme ilustrado na Figura 119 e expresso em (161).

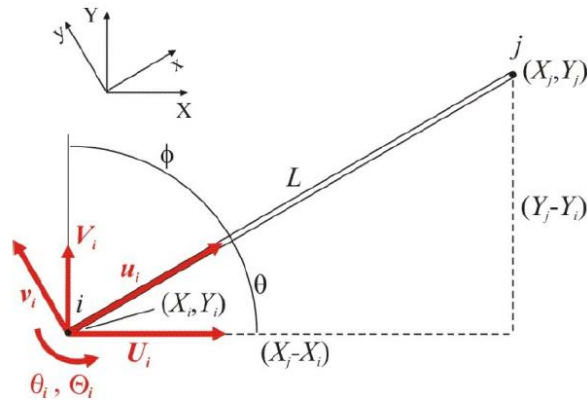


Figura 119 – Projeções das variáveis de campo do elemento de estrutura [1]

$$\begin{aligned}
 u_i &= U_i \cos \theta + V_i \sin \theta & u_j &= U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \\
 v_i &= -U_i \sin \theta + V_i \cos \theta & v_j &= -U_j \sin \theta + V_j \cos \theta \\
 \theta_i &= \Theta_i & \theta_j &= \Theta_j.
 \end{aligned} \tag{161}$$

Os valores de  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  e  $L$  são definidos de acordo com as expressões (45) e (46). De modo análogo ao elemento de barra podem-se escrever as expressões na forma matricial, o que permite escrever a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , que toma a forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{162}$$

A matriz de rigidez global para o elemento de estrutura é obtida com recurso à expressão (52) e, toma a forma

$$\mathbf{K}_e = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} Al^2 + \frac{12I}{L^2} m^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & -\frac{6I}{L} m & -\left(Al^2 + \frac{12I}{L^2} m^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & -\frac{6I}{L} m \\ \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & Am^2 + \frac{12I}{L^2} l^2 & \frac{6I}{L} l & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & -\left(Am^2 + \frac{12I}{L^2} l^2\right) & \frac{6I}{L} l \\ -\frac{6I}{L} m & \frac{6I}{L} l & 4I & \frac{6I}{L} m & -\frac{6I}{L} l & 2I \\ -\left(Al^2 + \frac{12I}{L^2} m^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & \frac{6I}{L} m & Al^2 + \frac{12I}{L^2} m^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & \frac{6I}{L} m \\ -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & -\left(Am^2 + \frac{12I}{L^2} l^2\right) & -\frac{6I}{L} l & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) lm & Am^2 + \frac{12I}{L^2} l^2 & -\frac{6I}{L} l \\ -\frac{6I}{L} m & \frac{6I}{L} l & 2I & \frac{6I}{L} m & -\frac{6I}{L} l & 4I \end{bmatrix}. \tag{163}$$

O sistema global de equações que permite obter as reações é semelhante ao apresentado na expressão (14).

### 3.1.3.1.2 Estado de tensão

Uma vez que o elemento de estrutura é a soma do elemento de barra linear com o elemento de viga linear, pode-se obter a tensão axial do elemento de estrutura linear com recurso à expressão (56). Já a tensão normal imposta pela flexão é calculada com recurso à expressão (123) e a tensão de corte média no elemento através da expressão (145).

Não esquecer que as convenções de sinais definidas para cada elemento, barra e viga linear, se mantêm inalteradas e são aplicadas em análises com elementos de estrutura lineares. O cálculo da tensão equivalente no elemento,  $\sigma_{eq}$ , é realizada com recurso ao critério de von Mises, de acordo com

$$\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma + \sigma_{axial})^2 + 3\tau_{med}^2}. \quad (164)$$

Note-se que a escolha da posição nas fibras da secção para a qual se calcula a tensão normal, imposta pela flexão no elemento, é preponderante no cálculo da tensão equivalente máxima na posição em estudo.

### 3.1.3.2 Formulação quadrática

**Etapa 0** – O elemento de estrutura quadrático é composto por três nós e 9 graus de liberdade que compõem as variáveis de campo, similarmente ao elemento referido anteriormente, com a exceção de apresentar mais um nó na sua constituição, que permite obter as soluções exatas para as variáveis de campo primárias em mais um ponto do elemento.

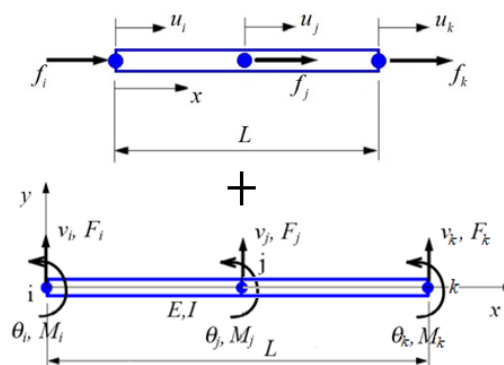


Figura 120 – Simbologia do elemento de estrutura de 3 nós

**Etapa 1** – As variáveis nodais e o vetor das forças nodais encontram-se de acordo com a Figura 120, e tomam a forma de

$$\mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ u_k \\ v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ F_i \\ M_i \\ f_j \\ F_j \\ M_j \\ f_k \\ F_k \\ M_k \end{Bmatrix}. \quad (165)$$

Analogamente ao procedimento descrito para o elemento de estrutura linear, não será feita neste subcapítulo menção ao processo descrito nas etapas 2, 3, 4 e 5. Portanto, a matriz de rigidez local para o elemento de estrutura quadrática toma a forma de

$$\mathbf{k}_e = E \begin{bmatrix} 7A/3L & 0 & 0 & -8A/3L & 0 & 0 & A/3L & 0 & 0 \\ 0 & 5092I/35L^3 & 1138I/35L^2 & 0 & -512I/5L^3 & 384I/7L^2 & 0 & -1508I/35L^3 & 242I/35L^2 \\ 0 & 1138I/35L^2 & 332I/35L & 0 & -128I/5L^2 & 64I/7L & 0 & -242I/35L^2 & 38I/35L \\ -8A/3L & 0 & 0 & 16A/3L & 0 & 0 & -8A/3L & 0 & 0 \\ 0 & -512I/5L^3 & -128I/5L^2 & 0 & 1024I/5L^3 & 0 & 0 & -512I/5L^3 & 128I/5L^2 \\ 0 & 384I/7L^2 & 64I/7L & 0 & 0 & 256I/7L & 0 & -384I/7L^2 & 64I/7L \\ A/3L & 0 & 0 & -8A/3L & 0 & 0 & 7A/3L & 0 & 0 \\ 0 & -1508I/35L^3 & -242I/35L^2 & 0 & -512I/5L^3 & -384I/7L^2 & 0 & 5092I/35L^3 & -1138I/35L^2 \\ 0 & 242I/35L^2 & 38I/35L & 0 & 128I/5L^2 & 64I/7L & 0 & -1138I/35L^2 & 332I/35L \end{bmatrix}. \quad (166)$$

As forças equivalentes, de modo análogo ao elemento de estrutura linear, devem ser obtidas com recurso às expressões

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{N}_{\text{barra}}^T p_{\text{long.}} dx \quad (167)$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \\ F_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{N}_{\text{viga}}^T p_{\text{transv.}} dx. \quad (168)$$

### 3.1.3.2.1 Transformação de coordenadas

A matriz de rigidez em (166) encontra-se formulada de acordo com o sistema de coordenadas local. De modo análogo ao elemento de estrutura linear, na Figura 121 são apresentadas as variáveis de campo do elemento em coordenadas locais e globais.

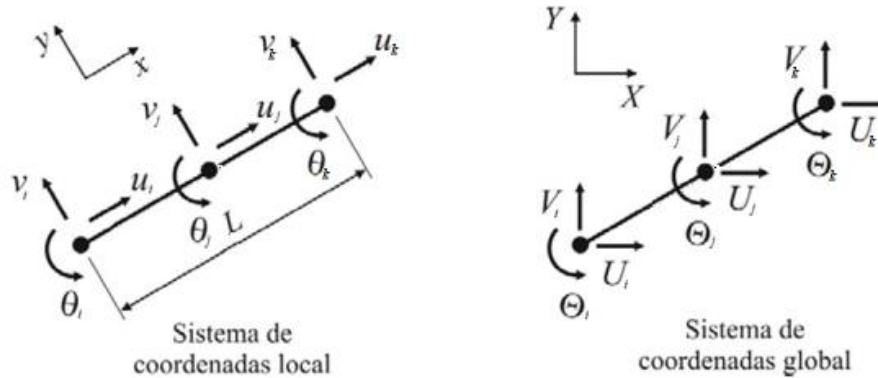


Figura 121 – Sistemas de coordenadas para o elemento de estrutura quadrático [1]

Define-se desta forma, o vetor das variáveis nodais de acordo com o sistema de coordenadas global,

$$\mathbf{A}_e = \{U_i \quad V_i \quad \Theta_i \quad U_j \quad V_j \quad \Theta_j \quad U_k \quad V_k \quad \Theta_k\}^T. \quad (169)$$

As coordenadas das variáveis de campo globais obtêm-se com recurso à projeção das coordenadas locais no novo sistema de coordenadas, de modo semelhante ao ilustrado na Figura 119, e podem ser consultadas na equação (170)

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \cos \theta + V_i \sin \theta & u_j &= U_j \cos \theta + V_j \sin \theta & u_k &= U_k \cos \theta + V_k \sin \theta \\ v_i &= -U_i \sin \theta + V_i \cos \theta & v_j &= -U_j \sin \theta + V_j \cos \theta & v_k &= -U_k \sin \theta + V_k \cos \theta \quad (170) \\ \theta_i &= \Theta_i & \theta_j &= \Theta_j & \theta_k &= \Theta_k. \end{aligned}$$

Pode-se definir a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  para o elemento de estrutura quadrático, como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (171)$$

A matriz de rigidez global para o elemento de estrutura quadrático é apresentada de seguida

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix}
 \frac{7AEI^2}{3L} + \frac{5092EI^2m}{35L^3} & \frac{7AEIm}{3L} - \frac{5092EIml}{35L^3} & -\frac{1138EI}{35L^2} & -\frac{8AEI^2}{3L} - \frac{512EI^2m}{5L^3} \\
 \frac{7AEIm}{3L} - \frac{5092EIml}{35L^3} & \frac{7AEI^2m}{3L} + \frac{5092EI^2}{35L^3} & \frac{1138EI}{35L^2} & -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} \\
 -\frac{1138EI}{35L^2} & \frac{1138EI}{35L^2} & \frac{332EI}{35L} & \frac{128EI}{5L^2} \\
 -\frac{8AEI^2}{3L} - \frac{512EI^2m}{5L^3} & -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} & \frac{128EI}{5L^2} & \frac{16AEI^2}{3L} + \frac{1024EI^2m}{5L^3} \\
 -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} & -\frac{8AEI^2m}{3L} - \frac{512EI^2}{5L^3} & -\frac{128EI}{5L^2} & \frac{16AEIm}{3L} - \frac{1024EIml}{5L^3} \dots \\
 -\frac{384EI}{7L^2} & \frac{384EI}{7L^2} & \frac{64EI}{7L} & 0 \\
 \frac{AEI^2}{3L} - \frac{1508EI^2m}{35L^3} & \frac{AEIm}{3L} + \frac{1508EIml}{35L^3} & \frac{242EI}{35L^2} & -\frac{8AEI^2}{3L} - \frac{512EI^2m}{5L^3} \\
 \frac{AEIm}{3L} + \frac{1508EIml}{35L^3} & \frac{AEI^2m}{3L} - \frac{1508EI^2}{35L^3} & -\frac{242EI}{35L^2} & -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} \\
 -\frac{242EI}{35L^2} & \frac{242EI}{35L^2} & \frac{38EI}{35L} & -\frac{128EI}{5L^2} \\
 -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} & -\frac{384EI}{7L^2} & \frac{AEI^2}{3L} - \frac{1508EI^2m}{35L^3} & \frac{AEIm}{3L} + \frac{1508EIml}{35L^3} & -\frac{242EI}{35L^2} \\
 -\frac{8AEI^2m}{3L} - \frac{512EI^2}{5L^3} & \frac{384EI}{7L^2} & \frac{AEIm}{3L} + \frac{1508EIml}{35L^3} & \frac{AEI^2m}{3L} - \frac{1508EI^2}{35L^3} & \frac{242EI}{35L^2} \\
 -\frac{128EI}{5L^2} & \frac{64EI}{7L} & \frac{242EI}{35L^2} & -\frac{242EI}{35L^2} & \frac{38EI}{35L} \\
 \frac{16AEIm}{3L} - \frac{1024EIml}{5L^3} & 0 & -\frac{8AEI^2}{3L} - \frac{512EI^2m}{5L^3} & -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} & -\frac{128EI}{5L^2} \\
 \dots \frac{16AEI^2m}{3L} + \frac{1024EI^2}{5L^3} & 0 & -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} & -\frac{8AEI^2m}{3L} - \frac{512EI^2}{5L^3} & \frac{128EI}{5L^2} \\
 0 & \frac{256EI}{7L} & \frac{384EI}{7L^2} & -\frac{384EI}{7L^2} & \frac{64EI}{7L} \\
 -\frac{8AEIm}{3L} + \frac{512EIml}{5L^3} & \frac{384EI}{7L^2} & \frac{7AEI^2}{3L} + \frac{5092EI^2m}{35L^3} & \frac{7AEIm}{3L} - \frac{5092EIml}{35L^3} & \frac{1138EI}{35L^2} \\
 -\frac{8AEI^2m}{3L} - \frac{512EI^2}{5L^3} & -\frac{384EI}{7L^2} & \frac{7AEIm}{3L} - \frac{5092EIml}{35L^3} & \frac{7AEI^2m}{3L} + \frac{5092EI^2}{35L^3} & -\frac{1138EI}{35L^2} \\
 \frac{128EI}{5L^2} & \frac{64EI}{7L} & \frac{1138EI}{35L^2} & -\frac{1138EI}{35L^2} & \frac{332EI}{35L}
 \end{bmatrix} \quad (172)$$

Uma vez mais, o sistema global de equações que permite obter as reações é semelhante ao apresentado na expressão (14).

### 3.1.3.2.2 Estado de tensão

O estado de tensão do elemento de estrutura quadrática pode ser calculado através da metodologia exposta na formulação do elemento de estrutura linear, nomeadamente através das equações (56), (123), (145) e (164).

### 3.1.3.3 Comparação das formulações linear e quadrática

A grande diferença entre as formulações do elemento de estrutura linear e quadrático recai na diferença notória que existe entre a dimensão das matrizes de rigidez obtidas para cada tipo de elemento. De facto, a matriz de rigidez do elemento de estrutura quadrático contém mais 3 graus de liberdade referentes ao nó central do elemento. Portanto, na aplicação de cada uma das formulações obtidas, podem-se retirar as seguintes conclusões:

- A formulação quadrática apresenta mais 3 grau de liberdade, respeitantes ao nó central, que permitem obter a solução exata das variáveis primárias em mais um ponto do elemento comparativamente à formulação linear;
- Os esforços de corte e esforços axiais captados por um elemento de estrutura linear, sempre que existam, são constantes ao longo do elemento, independentemente do comportamento real destes, de forma semelhante ao já descrito anteriormente para o elemento de viga. Portanto, para determinados carregamentos, o valor, nos nós do elemento, para os esforços de corte e esforços axiais, poderá não ser o exato de acordo com a mecânica dos materiais.
- De forma análoga, um processo idêntico ocorre para os momentos fletores internos no elemento como exposto na formulação do elemento de viga;
- Na continuidade dos dois pontos anteriores, o comportamento anómalo descrito já não ocorre para o elemento de estrutura quadrático. De facto, tanto para o esforço de corte, esforço axial e para os momentos fletores, o elemento consegue captar variações de ordem superior, ou seja, variações provocadas por exemplo por esforços de corte distribuídos constantemente ao longo do elemento com a mesma precisão da mecânica dos materiais nos nós do elemento;
- Identicamente ao descrito na comparação das formulações do elemento de viga, quando se utiliza um único elemento de estrutura linear na aproximação de um problema em que o elemento em análise se encontra duplamente encastrado, é necessário estar ciente que, nesta situação específica, toda a matriz será condensada. Portanto, as variáveis primárias (deflexão e rotação) serão zero e consequentemente o mesmo acontecerá para todas as variáveis secundárias. No entanto, recorrendo ao elemento de estrutura quadrático é possível com um único elemento uma solução aproximada para o problema em questão.

Na continuidade da comparação das formulações consegue-se aferir novamente que, através da utilização de elementos quadráticos, consegue-se uma melhor aproximação à solução exata com um menor número de elementos, e ainda evitar erros provocados por uma errada discretização do problema por parte do utilizador. Estes erros podem levar a soluções nos nós do elemento muito díspares daquelas a que realmente o elemento se encontra sujeito, como se pode aferir através da análise dos resultados, que podem ser consultados na Tabela 25, Tabela 26 e Tabela 27, do exemplo ilustrado na Figura 122.

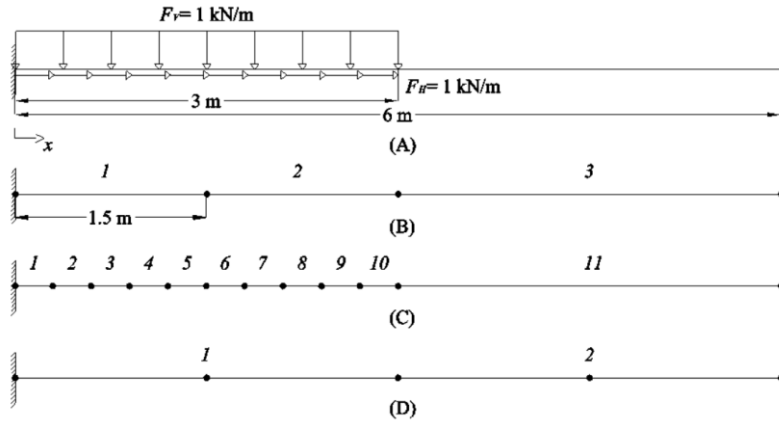


Figura 122 – Exemplo utilizado para comparação dos resultados obtidos com recurso a elementos de estrutura lineares e quadráticos. (A) Problema Modelo; (B) Discretização com 3 elementos de estrutura lineares; (C) Discretização com 11 elementos de estrutura lineares; (D) Discretização com 2 elementos de estrutura quadráticos

Tabela 25 – Comparação dos resultados obtidos, para o esforço axial, entre cada modelo e a solução exata.

Modelo	Solução exata [kN]	(B) [kN]	(C) [kN]	(D) [kN]
$f_i$ ( $x=0$ m)	2,25	1,5	2,1	2,25
Erro absoluto	NA	0,75	0,15	0
Erro relativo	NA	33,3(3)%	6,6(6)%	0%
$f_i$ ( $x=1,5$ m)	0,75	0	0,6	0,75
Erro absoluto	NA	0,75	0,15	0
Erro relativo	NA	100%	20%	0%
$f_i$ ( $x=3$ m)	-0,75	-0,75	-0,75	-0,75
Erro absoluto	NA	0	0	0
Erro relativo	NA	0%	0%	0%

Tabela 26 – Comparação dos resultados obtidos, para o esforço de corte, entre cada modelo e a solução exata.

Modelo	Solução exata [kN]	(B) [kN]	(C) [kN]	(D) [kN]
$F_i$ ( $x=0$ m)	2,438	1,688	2,288	2,438
Erro absoluto	NA	0,75	0,15	0

Erro relativo	NA	30,76%	6,15%	0%
$F_i$ ( $x=1,5$ m)	0,938	0,188	0,788	0,938
Erro absoluto	NA	0,75	0,15	0
Erro relativo	NA	79,96%	16%	0%
$F_i$ ( $x=3$ m)	-0,563	-0,563	-0,563	-0,563
Erro absoluto	NA	0	0	0
Erro relativo	NA	0%	0%	0%

Tabela 27 – Comparação dos resultados obtidos, para o momento fletor, entre cada modelo e a solução exata.

Modelo	Solução exata [kN.m]	(B) [kN.m]	(C) [kN.m]	(D) [kN.m]
$M_i$ ( $x=0$ m)	2,063	1,875	2,055	2,063
Erro absoluto	NA	0,188	0,008	0
Erro relativo	NA	9,11%	0,39%	0%
$M_i$ ( $x=1,5$ m)	-0,469	-0,656	-0,476	-0,469
Erro absoluto	NA	0,187	0,007	0
Erro relativo	NA	39,87%	1,49%	0%
$M_i$ ( $x=3$ m)	-0,75	-0,75	-0,75	-0,75
Erro absoluto	NA	0	0	0
Erro relativo	NA	0%	0%	0%

É importante salientar que o tempo de processamento para cada um dos modelos (B), (C) e (D) foi de 1,23 segundos, 2,26 segundos e 1,5 segundos, respetivamente. Portanto, como se pode depreender, a partir de determinada altura deixa de ser favorável a discretização do modelo com recurso a elementos de estrutura lineares, uma vez que o tempo de computação aumenta e os resultados obtidos nos nós continuam a conter um erro mensurável quando comparados com a solução exata. Em suma, a seleção do tipo

de elemento de estrutura a adotar na análise deve levar em linha de conta o já referido e exposto na formulação do elemento de viga.

Nota: os tempos de processamento foram obtidos com recurso a um processador Intel® Core™ i7-8750H CPU @ 2.20GHz com 16,0 GB de RAM.

### 3.1.3.4 Validação das formulações

Como método de validar as formulações, elaboradas para o elemento de estrutura linear e quadrático, expostas anteriormente, aplicam-se as mesmas na resolução de 3 problemas modelo e confrontam-se os resultados obtidos para cada tipo de elemento com os exibidos em literatura ou com os obtidos através de *softwares* amplamente utilizados no mercado.

#### 1º Problema Modelo

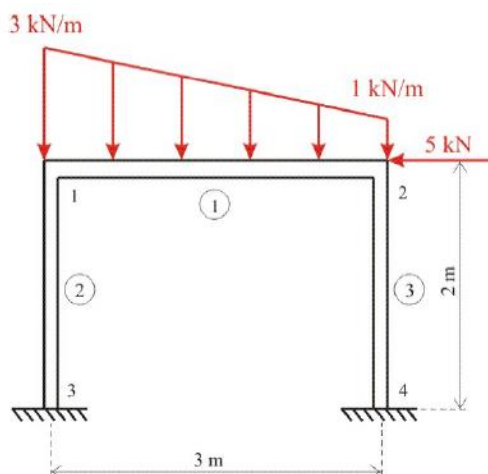


Figura 123 – 1º problema modelo utilizado na análise do elemento de estrutura [1]

Os dados de entrada do modelo apresentado na Figura 123 são

$$w_1 = \frac{2000}{3}x - 3000 \text{ kN/m}; P_{2x} = -5 \text{ kN}; A_1 = A_2 = A_3 = 1060 \text{ mm}^2; L_1 = 3000 \text{ mm};$$

$$L_2 = L_3 = 2000 \text{ mm}; I_1 = I_2 = I_3 = 1710000 \text{ mm}^4; E_1 = E_2 = E_3 = 200 \text{ GPa}$$

A Tabela 28 ajuda a simplificar o processo envolvido na construção da matriz de rigidez dos elementos.

Tabela 28 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do primeiro problema modelo do elemento de estrutura.

$EI$	$I$	$m$	$Im$	$I^2$	$m^2$
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	-1	0	0	1	0

O nó  $i$  do elemento 2 corresponde ao nó 3 na Figura 123 e o nó  $k$  do elemento 3 corresponde ao nó 4, encontram-se prescritos em todas as direções ( $u$ ,  $v$  e  $\theta$ ).

Ainda, com auxílio à Figura 123, é possível escrever as igualdades seguintes:

$$U_{1i} = U_{2k}; V_{1i} = V_{2k}; \Theta_{1i} = \Theta_{2k}; U_{1k} = U_{3i}; V_{1k} = V_{3i}; \Theta_{1k} = \Theta_{3i}.$$

A Tabela 29 agrupa os resultados obtidos para cada uma das formulações descritas relativamente aos resultados obtidos com recurso a diferentes *softwares* recorrentemente utilizados na análise de estruturas. De modo complementar, podem ser consultados os resultados para o modelo em análise na referência [1].

Tabela 29 – Resultados obtidos para a solução do primeiro problema modelo (com elementos de estrutura) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$U_{1i}$ [mm]	-7,608	-7,608	-7,608	-7,608
$U_{1j}$ [mm]	NA	-7,631	-7,631	-7,631
$U_{1k}$ [mm]	-7,655	-7,655	-7,655	-7,655
$U_{2i}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{2j}$ [mm]	NA	-3,529	-3,529	-3,529
$U_{3j}$ [mm]	NA	-2,723	-2,723	-2,723
$U_{3k}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1i}$ [mm]	-0,046	-0,046	-0,044	-0,046
$V_{1j}$ [mm]	NA	-2,505	-2,509	-2,505
$V_{1k}$ [mm]	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011
$V_{2i}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{2j}$ [mm]	NA	-0,0223	-0,0229	-0,0223
$V_{3j}$ [mm]	NA	-0,0054	-0,0054	-0,005
$V_{3k}$ [mm]	0	0	0	0
$\Theta_{1i}$ [rad]	0,0011	0,0011	NA	-0,0011
$\Theta_{1j}$ [rad]	NA	-0,0013	NA	0,0013
$\Theta_{1k}$ [rad]	0,0044	0,0044	NA	-0,0044
$\Theta_{2i}$ [rad]	0	0	NA	0

$\theta_{2j}$ [rad]	NA	0,0054	NA	-0,0054
$\theta_{3j}$ [rad]	NA	0,0046	NA	-0,0046
$\theta_{3k}$ [rad]	0	0	NA	0
$R_{2ix}$ [kN]	3,33	3,338	3,338	3,338
$R_{2iy}$ [kN]	4,852	4,852	4,852	4,852
$R_{2iM}$ [kN.m]	-3,526	-3,526	3,527	3,527
$R_{3kx}$ [kN]	1,662	1,662	1,662	1,662
$R_{3ky}$ [kN]	1,478	1,478	1,478	1,478
$R_{3kM}$ [kN.m]	-2,417	-2,417	2,417	2,417
$\sigma_{1i}$ [MPa]	43,871	92,116	NA	-92,116
$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	-32,983	NA	32,983
$\sigma_{1k}$ [MPa]	-65,978	-26,504	NA	26,504
$\sigma_{2i}$ [MPa]	-103,115	-103,115	NA	103,115
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	-5,5	NA	5,499
$\sigma_{2k}$ [MPa]	92,116	92,116	NA	-92,116
$\sigma_{3i}$ [MPa]	-26,504	-26,504	NA	26,504
$\sigma_{3j}$ [MPa]	NA	22,08	NA	-22,079
$\sigma_{3k}$ [MPa]	70,663	70,663	NA	-70,663
$\sigma_{axial1i}$ [MPa]	-3,15	-3,15	NA	3,149
$\sigma_{axial1j}$ [MPa]	NA	-3,15	NA	3,149
$\sigma_{axial1k}$ [MPa]	-3,15	-3,15	NA	3,149
$\sigma_{axial2i}$ [MPa]	-4,578	-4,578	NA	4,578
$\sigma_{axial2j}$ [MPa]	NA	-4,578	NA	4,578
$\sigma_{axial2k}$ [MPa]	-4,578	-4,578	NA	4,578
$\sigma_{axial3i}$ [MPa]	-1,083	-1,083	NA	1,083
$\sigma_{axial3j}$ [MPa]	NA	-1,083	NA	1,083
$\sigma_{axial3k}$ [MPa]	-1,083	-1,083	NA	1,083
$\tau_{1i}$ [MPa]	1,181	4,578	NA	4,578

$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	1,04	NA	1,04
$\tau_{1k}$ [MPa]	1,181	-1,083	NA	-1,083
$\tau_{2i}$ [MPa]	-3,15	-3,15	NA	-3,149
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	-3,15	NA	-3,149
$\tau_{2k}$ [MPa]	-3,15	-3,15	NA	-3,149
$\tau_{3i}$ [MPa]	-1,568	-1,568	NA	-1,568
$\tau_{3j}$ [MPa]	NA	-1,568	NA	-1,568
$\tau_{3k}$ [MPa]	-1,568	-1,568	NA	-1,568
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	40,773	89,319	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	36,178	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	69,157	29,713	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	107,83	107,83	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	11,459	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	87,709	87,709	NA	NA
$\sigma_{eq3i}$ [MPa]	27,72	27,72	NA	NA
$\sigma_{eq3j}$ [MPa]	NA	21,171	NA	NA
$\sigma_{eq3k}$ [MPa]	69,633	69,633	NA	NA
$f_{1i}$ [kN]	-3,338	-3,338	-3,338	3,338
$f_{1j}$ [kN]	NA	-3,338	-3,338	3,338
$f_{1k}$ [kN]	-3,338	-3,338	-3,338	3,338
$f_{2i}$ [kN]	-4,852	-4,852	-4,852	4,852
$f_{2j}$ [kN]	NA	-4,852	-4,852	4,852
$f_{2k}$ [kN]	-4,852	-4,852	-4,852	4,852
$f_{3i}$ [kN]	-1,148	-1,148	-1,148	1,148
$f_{3j}$ [kN]	NA	-1,148	-1,148	1,148
$f_{3k}$ [kN]	-1,148	-1,148	-1,148	1,148
$F_{1i}$ [kN]	1,252	4,852	4,852	4,852
$F_{1j}$ [kN]	NA	1,102	1,102	1,102

$F_{1k}$ [kN]	1,252	-1,148	-1,148	-1,148
$F_{2i}$ [kN]	-3,338	-3,338	-3,338	-3,338
$F_{2j}$ [kN]	NA	-3,338	-3,338	-3,338
$F_{2k}$ [kN]	-3,338	-3,338	-3,338	-3,338
$F_{3i}$ [kN]	-1,662	-1,662	-1,662	-1,662
$F_{3j}$ [kN]	NA	-1,662	-1,662	-1,662
$F_{3k}$ [kN]	-1,662	-1,662	-1,662	-1,662
$M_{1i}$ [kN.m]	1,5	3,15	-3,15	-3,15
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	-1,128	1,128	1,128
$M_{1k}$ [kN.m]	-2,256	-0,906	0,906	0,906
$M_{2i}$ [kN.m]	-3,527	-3,527	3,527	3,527
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	-0,188	0,188	0,188
$M_{2k}$ [kN.m]	3,15	3,15	-3,15	-3,15
$M_{3i}$ [kN.m]	-0,906	-0,906	-0,906	0,906
$M_{3j}$ [kN.m]	NA	0,755	0,755	-0,755
$M_{3k}$ [kN.m]	2,417	2,417	2,417	-2,417

Os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL podem ser consultados na Figura 124, Figura 125, Figura 126 e Figura 127:

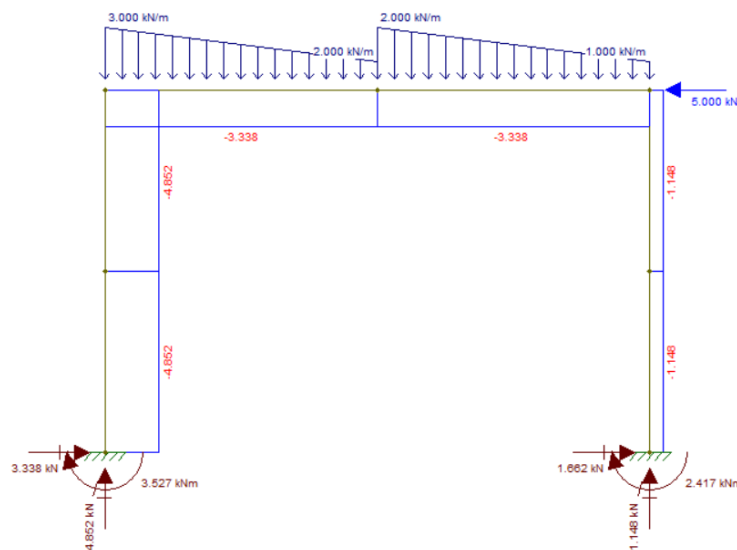


Figura 124 – Resultados obtidos no FTOOL - esforços axiais, esforços atuantes e reações nos apoios

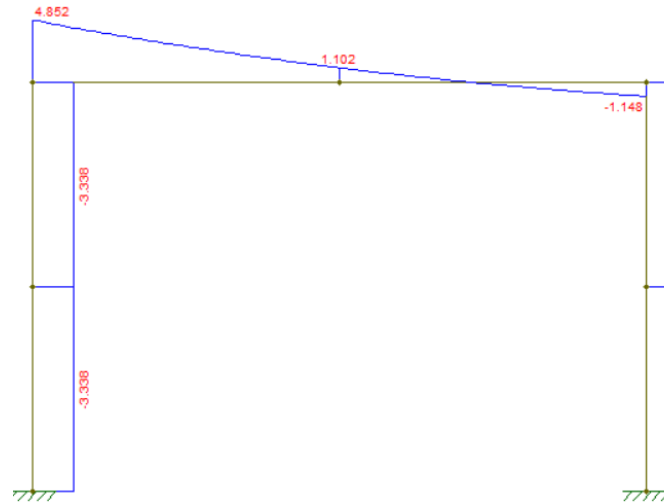


Figura 125 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte

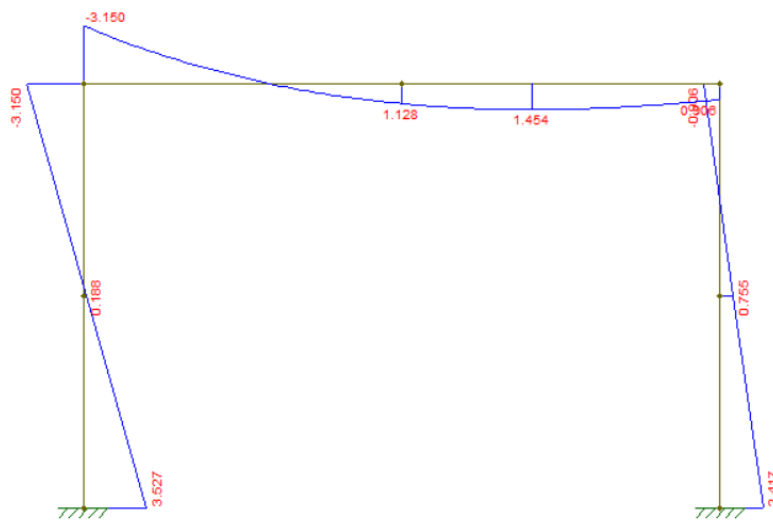


Figura 126 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos

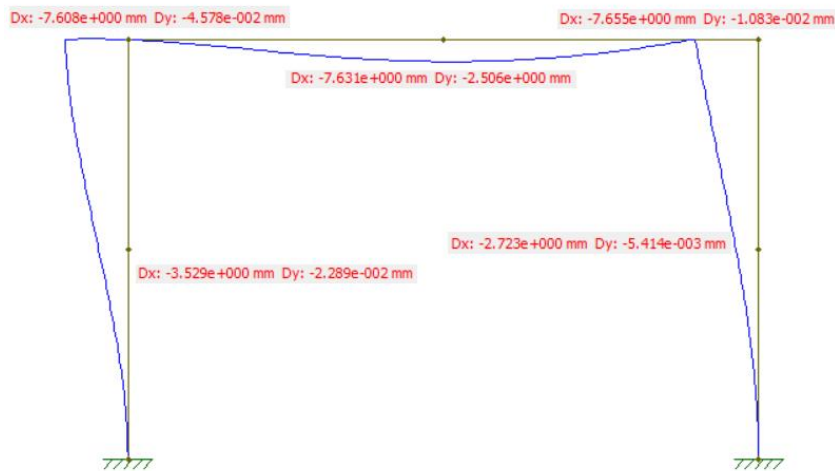


Figura 127 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos globais

O modelo utilizado com recurso ao *software* Robot Structural Analysis, assim como as propriedades e os esforços atuantes nos elementos, podem ser consultados na Figura 128 e Figura 129. Já na Figura 130 e Figura 131 são expostos os resultados obtidos para a simulação considerando elementos de estrutura com três nós.

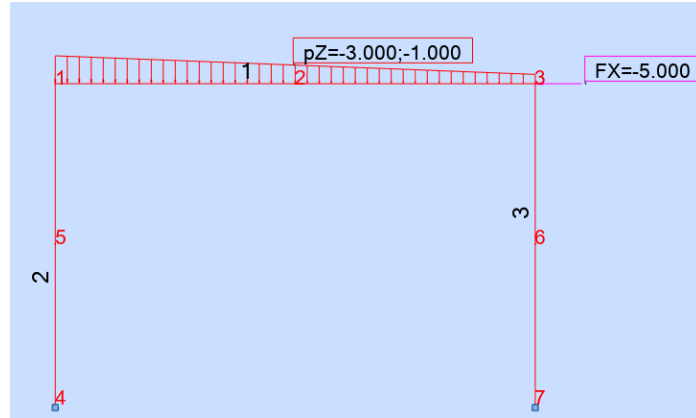


Figura 128 – Modelo em robot do primeiro problema modelo utilizado na validação das formulações do elemento de estrutura

Barra Nº.: 1 Seção: SecçãoGenérica							Barra Nº.: 2 Seção: SecçãoGenérica								
Dimensões:							Dimensões:								
HY (cm)		HZ (cm)					HY (cm)		HZ (cm)						
10,00		10,00					10,00		10,00						
Propriedades de seção:							Propriedades de seção:								
AX (cm <sup>2</sup> )		IX (cm <sup>4</sup> )		IY (cm <sup>4</sup> )		IZ (cm <sup>4</sup> )		AX (cm <sup>2</sup> )		IX (cm <sup>4</sup> )		IY (cm <sup>4</sup> )		IZ (cm <sup>4</sup> )	
10,60		1,00		171,00		1,00		10,60		1,00		171,00		1,00	
Propriedades de material:							Propriedades de material:								
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)		E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)			
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00		200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00			

Barra Nº.: 3 Seção: SecçãoGenérica							
Dimensões:							
HY (cm)		HZ (cm)					
10,00		10,00					
Propriedades de seção:							
AX (cm <sup>2</sup> )		IX (cm <sup>4</sup> )		IY (cm <sup>4</sup> )		IZ (cm <sup>4</sup> )	
10,60		1,00		171,00		1,00	
Propriedades de material:							
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)		
200000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00		

Figura 129 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 1	-7,61	-0,05	-0,001
2/ 1	-7,63	-2,51	0,001
3/ 1	-7,65	-0,01	-0,004
4/ 1	0,0	0,0	0,0
5/ 1	-3,53	-0,02	-0,005
6/ 1	-2,72	-0,01	-0,005
7/ 1	0,0	0,0	0,0

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
4/ 1	3,338	4,852	3,527
7/ 1	1,662	1,148	2,417

Figura 130 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx(My) (MPa)	S mín(My) (MPa)	Fx/Ax (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 1	92,116	-92,116	3,149	4,578
1/ 2/3/ 1	32,983	-32,983	3,149	1,040
1/ 3/ 1	26,504	-26,504	3,149	-1,083
2/ 4/ 1	103,115	-103,115	4,578	-3,149
2/ 2/3/ 1	5,499	-5,499	4,578	-3,149
2/ 1/ 1	92,116	-92,116	4,578	-3,149
3/ 3/ 1	26,504	-26,504	1,083	-1,568
3/ 2/3/ 1	22,079	-22,079	1,083	-1,568
3/ 7/ 1	70,663	-70,663	1,083	-1,568

Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1/ 1	3,338	4,852	-3,150
1/ 2/3/ 1	3,338	1,102	1,128
1/ 3/ 1	3,338	-1,148	0,906
2/ 4/ 1	4,852	-3,338	3,527
2/ 2/3/ 1	4,852	-3,338	0,188
2/ 1/ 1	4,852	-3,338	-3,150
3/ 3/ 1	1,148	-1,662	0,906
3/ 2/3/ 1	1,148	-1,662	-0,755
3/ 7/ 1	1,148	-1,662	-2,417

Figura 131 – Tensões e esforços internos

Com base na análise da Tabela 29, como esperado para a formulação linear, com base no carregamento a que a estrutura se encontra sujeita, nem todos os resultados encontrados para as variáveis secundárias são exatos nos nós. Portanto, pode-se concluir que a formulação desenvolvida para o elemento de estrutura linear e quadrática se encontra válida quando comparados os resultados alcançados com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados. É importante salientar que as diferenças de sinais encontradas já foram previamente abordadas e explicadas ao longo desta dissertação, nomeadamente nos elementos anteriormente formulados. As tensões equivalentes para os resultados obtidos através do *software* Robot podem ser obtidas com recurso à equação (164).

## 2º Problema Modelo

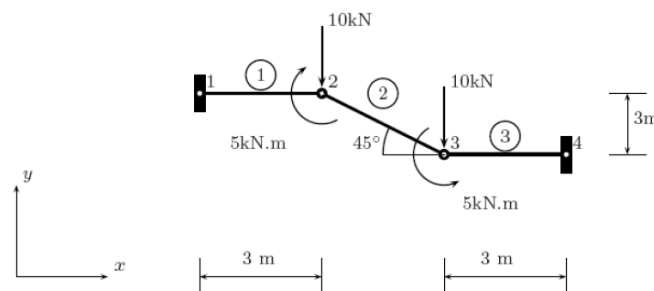


Figura 132 – 2º problema modelo utilizado na análise do elemento de estrutura [1]

Os dados de entrada do modelo apresentado na Figura 132 são

$$P_{2y} = P_{3y} = -10 \text{ kN} ; M_2 = -5 \text{ kN} ; M_3 = 5 \text{ kN} ; A_1 = A_2 = A_3 = 100 \text{ mm}^2 ; L_2 = \frac{3000}{\cos(45)} \text{ mm} ;$$

$$L_1 = L_3 = 3000 \text{ mm} ; I_1 = I_2 = I_3 = 2 \times 10^8 \text{ mm}^4 ; E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}$$

Reúne-se na Tabela 30 a informação necessária à construção da matriz de rigidez dos elementos que compõem o modelo.

Tabela 30 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do segundo problema modelo do elemento de estrutura.

$El$	$l$	$m$	$lm$	$l^2$	$m^2$
1	1	0	0	1	0
2	0,7071	-0,7071	-0,5	0,5	0,5
3	1	0	0	1	0

O nó  $i$  do elemento 1 corresponde ao nó 1 na Figura 132 e o nó  $k$  do elemento 3 corresponde ao nó 4. Ambos os nós dos elementos referidos anteriormente encontram-se prescritos em todas as direções ( $u$ ,  $v$  e  $\theta$ ).

Ao analisar a Figura 132 escrevem-se ainda as igualdades seguintes:

$$U_{1k} = U_{2i}; V_{1k} = V_{2i}; \Theta_{1k} = \Theta_{2i}; U_{2k} = U_{3i}; V_{2k} = V_{3i}; \Theta_{2k} = \Theta_{3i}.$$

Os resultados obtidos para cada formulação do elemento de estrutura são apresentados na Tabela 31 e comparados os resultados obtidos através de diferentes *softwares* recorrentemente utilizados na análise de estruturas. De modo complementar, podem ser consultados os resultados para o modelo em análise na referência [1].

Tabela 31 – Resultados obtidos para a solução do segundo problema modelo (com elementos de estrutura) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$U_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{1j}$ [mm]	NA	0	0	0
$U_{1k}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{2j}$ [mm]	NA	-0,444	-0,444	-0,444
$U_{2k}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{3j}$ [mm]	NA	0	0	0
$U_{3k}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1j}$ [mm]	NA	-0,490	-0,490	-0,490
$V_{1k}$ [mm]	-1,423	-1,423	-1,423	-1,423
$V_{2j}$ [mm]	NA	-1,867	-1,867	-1,867
$V_{2k}$ [mm]	-1,423	-1,423	-1,421	-1,423

$V_{3j}$ [mm]	NA	-0,490	-0,490	-0,490
$V_{3k}$ [mm]	0	0	0	0
$\theta_{1i}$ [rad]	0	0	NA	0
$\theta_{1j}$ [rad]	NA	-0,0006	NA	0,0006
$\theta_{1k}$ [rad]	-0,0006	-0,0006	NA	0,0006
$\theta_{2j}$ [rad]	NA	0	NA	0
$\theta_{2k}$ [rad]	0,0006	0,0006	NA	-0,0006
$\theta_{3j}$ [rad]	NA	0,0006	NA	-0,0006
$\theta_{3k}$ [rad]	0	0	NA	0
$R_{1ix}$ [kN]	0	0	0	0
$R_{1iy}$ [kN]	10	10	10	10
$R_{1iM}$ [kN.m]	23,284	23,284	-23,284	-23,284
$R_{3kx}$ [kN]	0	0	0	0
$R_{3ky}$ [kN]	10	10	10	10
$R_{3kM}$ [kN.m]	-23,284	-23,284	23,284	23,284
$\sigma_{1i}$ [MPa]	5,821	5,821	NA	-5,821
$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	2,071	NA	-2,071
$\sigma_{1k}$ [MPa]	-1,679	-1,679	NA	1,679
$\sigma_{2i}$ [MPa]	-2,929	-2,929	NA	2,929
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	-2,929	NA	2,929
$\sigma_{2k}$ [MPa]	-2,929	-2,929	NA	2,929
$\sigma_{3i}$ [MPa]	-1,679	-1,679	NA	1,679
$\sigma_{3j}$ [MPa]	NA	2,071	NA	-2,071
$\sigma_{3k}$ [MPa]	5,821	5,821	NA	-5,821
$\sigma_{axial1i}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\sigma_{axial1j}$ [MPa]	NA	0	NA	0
$\sigma_{axial1k}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\sigma_{axial2i}$ [MPa]	0	0	NA	0

$\sigma_{axial2j}$ [MPa]	NA	0	NA	0
$\sigma_{axial2k}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\sigma_{axial3i}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\sigma_{axial3j}$ [MPa]	NA	0	NA	0
$\sigma_{axial3k}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\tau_{1i}$ [MPa]	100	100	NA	100
$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	100	NA	100
$\tau_{1k}$ [MPa]	100	100	NA	100
$\tau_{2i}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	0	NA	0
$\tau_{2k}$ [MPa]	0	0	NA	0
$\tau_{3i}$ [MPa]	-100	-100	NA	-100
$\tau_{3j}$ [MPa]	NA	-100	NA	-100
$\tau_{3k}$ [MPa]	-100	-100	NA	-100
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	173,303	173,303	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	173,218	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	173,213	173,213	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	2,929	2,929	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	2,929	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	2,929	2,929	NA	NA
$\sigma_{eq3i}$ [MPa]	173,213	173,213	NA	NA
$\sigma_{eq3j}$ [MPa]	NA	173,218	NA	NA
$\sigma_{eq3k}$ [MPa]	173,303	173,303	NA	NA
$f_{1i}$ [kN]	0	0	0	0
$f_{1j}$ [kN]	NA	0	0	0
$f_{1k}$ [kN]	0	0	0	0
$f_{2i}$ [kN]	0	0	0	0
$f_{2j}$ [kN]	NA	0	0	0

$f_{2k}$ [kN]	0	0	0	0
$f_{3i}$ [kN]	0	0	0	0
$f_{3j}$ [kN]	NA	0	0	0
$f_{3k}$ [kN]	0	10	10	10
$F_{1i}$ [kN]	10	10	10	10
$F_{1j}$ [kN]	NA	10	10	10
$F_{1k}$ [kN]	10	0	0	0
$F_{2i}$ [kN]	0	0	0	0
$F_{2j}$ [kN]	NA	0	0	0
$F_{2k}$ [kN]	0	-10	-10	-10
$F_{3i}$ [kN]	-10	-10	-10	-10
$F_{3j}$ [kN]	NA	-10	-10	-10
$F_{3k}$ [kN]	-10	10	10	10
$M_{1i}$ [kN.m]	23,284	23,284	-23,284	-23,284
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	8,284	-8,284	-8,284
$M_{1k}$ [kN.m]	-6,716	-6,716	6,716	6,716
$M_{2i}$ [kN.m]	-11,716	-11,716	11,716	11,716
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	-11,716	11,716	11,716
$M_{2k}$ [kN.m]	-11,716	-11,716	11,716	11,716
$M_{3i}$ [kN.m]	-6,716	-6,716	6,716	6,716
$M_{3j}$ [kN.m]	NA	8,284	-8,284	-8,284
$M_{3k}$ [kN.m]	23,284	23,284	-23,284	-23,284

Na Figura 133, Figura 134, Figura 135 e Figura 136 podem-se consultar os resultados obtidos com recurso ao *software* FTOOL:

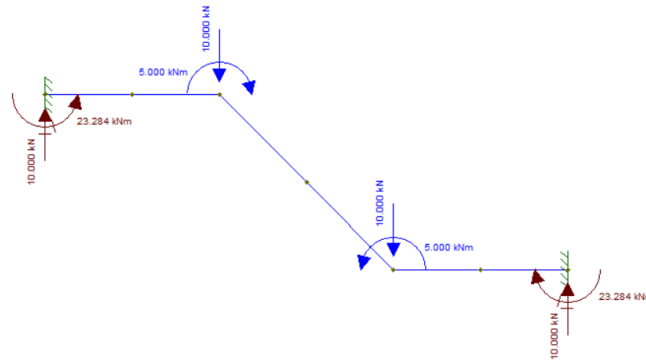


Figura 133 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço axial, esforços atuantes e reações nos apoios

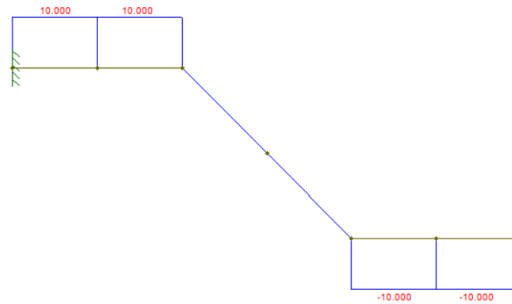


Figura 134 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte

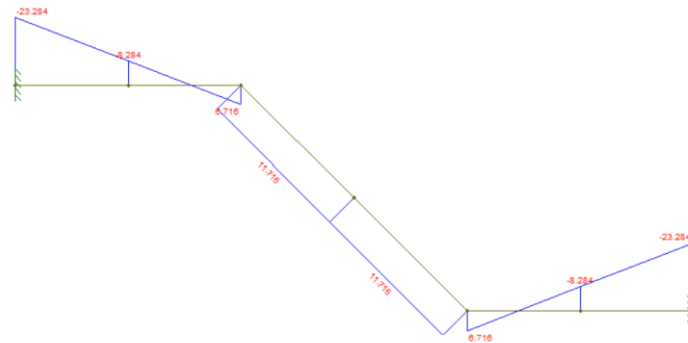


Figura 135 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos

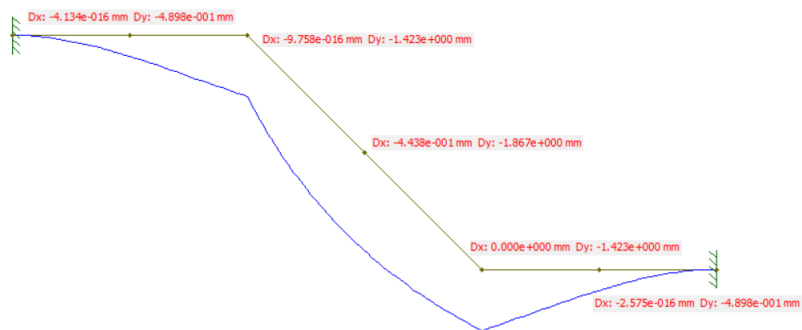


Figura 136 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos globais

Na Figura 137 e Figura 138 apresentam-se o modelo utilizado em *Robot*, assim como as propriedades e os esforços atuantes nos elementos. Já na Figura 139 e Figura 140 são apresentados os resultados obtidos para uma simulação considerando elementos de estrutura quadráticos através do *software* Robot Structural Analysis.

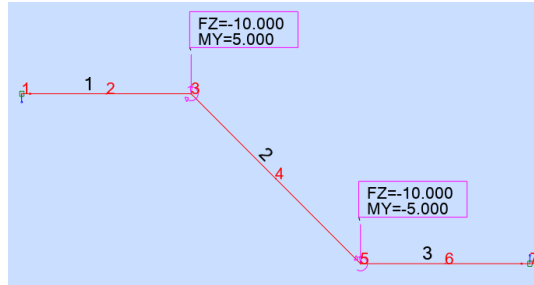


Figura 137 – Modelo em robot do segundo problema modelo utilizado na validação das formulações do elemento de estrutura

Barra Nº.: 1		Seção: SecçãoGenérica		Barra Nº.: 2		Seção: SecçãoGenérica					
Dimensões:				Dimensões:							
HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)				
10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00				
Propriedades de seção:				Propriedades de seção:							
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )	AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )				
1,00	1,00	20000,00	1,00	1,00	1,00	20000,00	1,00				
Propriedades de material:				Propriedades de material:							
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)	E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00	210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00

Barra Nº.: 3		Seção: SecçãoGenérica			
Dimensões:					
HY (cm)	HZ (cm)	HY (cm)	HZ (cm)		
10,00	10,00	10,00	10,00		
Propriedades de seção:					
AX (cm <sup>2</sup> )	IX (cm <sup>4</sup> )	IY (cm <sup>4</sup> )	IZ (cm <sup>4</sup> )		
1,00	1,00	20000,00	1,00		
Propriedades de material:					
E (MPa)	G (MPa)	NI	LX (1/°C)	RO (kN/m <sup>3</sup> )	Re (MPa)
210000,00	80800,00	0,30	0,00	0,000	255,00

Figura 138 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 1	0,0	0,0	0,0
2/ 1	0,00	-0,49	0,001
3/ 1	0,00	-1,42	0,001
4/ 1	-0,44	-1,87	0,000
5/ 1	0,00	-1,42	-0,001
6/ 1	0,00	-0,49	-0,001
7/ 1	0,0	0,0	0,0

Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1	-0,000	10,000	-23,284
7/ 1	-0,000	10,000	23,284

Figura 139 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx(My) (MPa)	S min(My) (MPa)	Fx/Ax (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 1	5,821	-5,821	-0,000	100,000
1/ 2/3/ 1	2,071	-2,071	-0,000	100,000
1/ 3/ 1	1,679	-1,679	-0,000	100,000
2/ 3/ 1	2,929	-2,929	-0,000	0,000
2/ 2/3/ 1	2,929	-2,929	0,000	-0,000
2/ 5/ 1	2,929	-2,929	0,000	-0,000
3/ 5/ 1	1,679	-1,679	0,000	-100,000
3/ 2/3/ 1	2,071	-2,071	0,000	-100,000
3/ 7/ 1	5,821	-5,821	0,000	-100,000

Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1/ 1	-0,000	10,000	-23,284
1/ 2/3/ 1	-0,000	10,000	-8,284
1/ 3/ 1	-0,000	10,000	6,716
2/ 3/ 1	-0,000	0,000	11,716
2/ 2/3/ 1	0,000	-0,000	11,716
2/ 5/ 1	0,000	-0,000	11,716
3/ 5/ 1	0,000	-10,000	6,716
3/ 2/3/ 1	0,000	-10,000	-8,284
3/ 7/ 1	0,000	-10,000	-23,284

Figura 140 – Tensões e esforços internos

Com base na análise da Tabela 31, como seria esperado a formulação linear consegue captar os resultados exatos para as variáveis secundárias nos nós. Novamente, pode-se concluir que a formulação desenvolvida para o elemento de estrutura linear e quadrática se encontra válida após se confrontar os resultados alcançados com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados. Com já referido, as tensões equivalentes podem ser obtidas com recurso à equação (164).

Relembra-se ainda que as diferenças nos sinais dos resultados encontram-se justificadas nas convenções de sinais utilizadas.

### 3º Problema Modelo

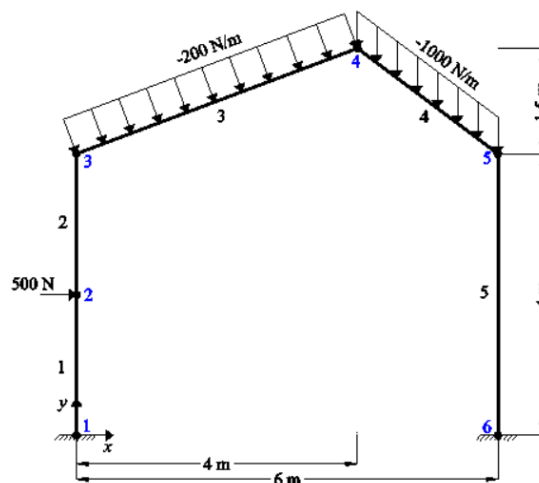


Figura 141 – 3º problema modelo utilizado na análise do elemento de estrutura

Os dados de entrada do problema modelo ilustrado na Figura 141 são

$$P_{2x} = 0,5 \text{ kN} ; w_{3local} = -0,2 \text{ kN/m} ; w_4 = -1 \text{ kN/m} ; A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1060 \text{ mm}^2 ;$$

$$L_1 = L_2 = 2000 \text{ mm} ; L_3 = \sqrt{4^2 + 1,5^2} \times 1000 \text{ mm} ; L_4 = \sqrt{2^2 + 1,5^2} \times 1000 \text{ mm} ;$$

$$L_5 = 4000 \text{ mm} ; E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 200 \text{ GPa} ; I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 1710000 \text{ mm}^4 .$$

De modo a simplificar a construção da matriz de rigidez dos elementos que compõem o modelo, agrupa-se na Tabela 32 a informação necessária ao processo.

Tabela 32 – Valores dos elementos que compõem a matriz de rigidez do terceiro problema modelo do elemento de estrutura.

$El$	$l$	$m$	$lm$	$l^2$	$m^2$
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0,9363	0,3511	0,3287	0,8767	0,1233
4	0,8	-0,6	-0,48	0,64	0,36
5	0	-1	0	0	1

O nó  $i$  do elemento 1 corresponde ao nó 1 na Figura 141 e o nó  $k$  do elemento 5 corresponde ao nó 6. Ambos os nós referidos anteriormente encontram-se prescritos em todas as direções ( $u$ ,  $v$  e  $\theta$ ).

Podem-se ainda escrever as seguintes igualdades:

$$U_{1k} = U_{2i}; V_{1k} = V_{2i}; \Theta_{1k} = \Theta_{2i}; U_{2k} = U_{3i}; V_{2k} = V_{3i}; \Theta_{2k} = \Theta_{3i};$$

$$U_{3k} = U_{4i}; V_{3k} = V_{4i}; \Theta_{3k} = \Theta_{4i}; U_{4k} = U_{5i}; V_{4k} = V_{5i}; \Theta_{4k} = \Theta_{5i}.$$

Na Tabela 33 são expostos os resultados obtidos para cada formulação do elemento de estrutura, e ainda comparados com os resultados obtidos através de diferentes *softwares* recorrentemente utilizados na análise de estruturas.

Tabela 33 – Resultados obtidos para a solução do terceiro problema modelo (com elementos de estrutura) através de diferentes métodos.

Variáveis	Resultados da formulação linear	Resultados da formulação quadrática	Resultados obtidos (FTOOL)	Resultados obtidos (Robot)
$U_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$U_{1j}$ [mm]	NA	0,335	0,335	0,335
$U_{1k}$ [mm]	0,946	0,946	0,946	0,946
$U_{2j}$ [mm]	NA	1,491	1,49	1,49
$U_{2k}$ [mm]	2,597	2,597	2,597	2,597
$U_{3j}$ [mm]	NA	4,135	4,135	4,135
$U_{3k}$ [mm]	4,201	4,201	4,201	4,201
$U_{4j}$ [mm]	NA	5,715	5,715	5,715
$U_{4k}$ [mm]	7,391	7,391	7,391	7,391

$U_{5j}$ [mm]	NA	4,182	4,182	4,182
$U_{5k}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1i}$ [mm]	0	0	0	0
$V_{1j}$ [mm]	NA	-0,004	-0,004	-0,004
$V_{1k}$ [mm]	-0,007	-0,007	-0,007	-0,007
$V_{2j}$ [mm]	NA	-0,011	-0,011	-0,011
$V_{2k}$ [mm]	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015
$V_{3j}$ [mm]	NA	-4,132	-4,132	-4,132
$V_{3k}$ [mm]	-4,324	-4,324	-4,324	-4,324
$V_{4j}$ [mm]	NA	-2,3	-2,297	-2,297
$V_{4k}$ [mm]	-0,048	-0,048	-0,048	-0,048
$V_{5j}$ [mm]	NA	-0,024	-0,024	-0,024
$V_{5k}$ [mm]	0	0	0	0
$\theta_{1i}$ [rad]	0	0	NA	0
$\theta_{1j}$ [rad]	NA	-0,0006	NA	0,0006
$\theta_{1k}$ [rad]	-0,0006	-0,0006	NA	0,0006
$\theta_{2j}$ [rad]	NA	-0,0007	NA	0,0007
$\theta_{2k}$ [rad]	-0,0017	-0,0017	NA	0,0017
$\theta_{3j}$ [rad]	NA	-0,0015	NA	0,0015
$\theta_{3k}$ [rad]	0,0013	0,0013	NA	-0,0013
$\theta_{4j}$ [rad]	NA	0,0026	NA	-0,0026
$\theta_{4k}$ [rad]	0,001	0,001	NA	-0,001
$\theta_{5j}$ [rad]	NA	-0,003	NA	0,003
$\theta_{5k}$ [rad]	0	0	NA	0
$R_{1ix}$ [kN]	-0,201	-0,201	-0,201	-0,201
$R_{1iy}$ [kN]	0,781	0,781	0,781	0,781
$R_{1im}$ [kN.m]	0,296	0,296	-0,296	-0,296
$R_{5kx}$ [kN]	-0,599	-0,599	-0,599	-0,599

$R_{5ky}$ [kN]	2,519	2,519	2,519	2,519
$R_{5kM}$ [kN.m]	1,114	1,114	-1,114	-1,114
$\sigma_{1i}$ [MPa]	8,654	8,654	NA	-8,654
$\sigma_{1j}$ [MPa]	NA	2,771	NA	-2,771
$\sigma_{1k}$ [MPa]	-3,113	-3,113	NA	3,113
$\sigma_{2i}$ [MPa]	-3,113	-3,113	NA	3,113
$\sigma_{2j}$ [MPa]	NA	5,624	NA	-5,624
$\sigma_{2k}$ [MPa]	14,361	14,361	NA	-14,361
$\sigma_{3i}$ [MPa]	5,467	14,361	NA	-14,361
$\sigma_{3j}$ [MPa]	NA	-11,412	NA	11,412
$\sigma_{3k}$ [MPa]	-19,397	-10,503	NA	10,503
$\sigma_{4i}$ [MPa]	-22,686	-10,503	NA	10,503
$\sigma_{4j}$ [MPa]	NA	-4,801	NA	4,801
$\sigma_{4k}$ [MPa]	25,268	37,452	NA	-37,451
$\sigma_{5i}$ [MPa]	37,452	37,452	NA	-37,451
$\sigma_{5j}$ [MPa]	NA	2,434	NA	-2,434
$\sigma_{5k}$ [MPa]	-32,583	-32,583	NA	32,583
$\sigma_{axial1i}$ [MPa]	-0,737	-0,737	NA	0,737
$\sigma_{axial1j}$ [MPa]	NA	-0,737	NA	0,737
$\sigma_{axial1k}$ [MPa]	-0,737	-0,737	NA	0,737
$\sigma_{axial2i}$ [MPa]	-0,737	-0,737	NA	0,737
$\sigma_{axial2j}$ [MPa]	NA	-0,737	NA	0,737
$\sigma_{axial2k}$ [MPa]	-0,737	-0,737	NA	0,737
$\sigma_{axial3i}$ [MPa]	-0,523	-0,523	NA	0,523
$\sigma_{axial3j}$ [MPa]	NA	-0,523	NA	0,523
$\sigma_{axial3k}$ [MPa]	-0,523	-0,523	NA	0,523
$\sigma_{axial4i}$ [MPa]	-1,17	-0,463	NA	0,463
$\sigma_{axial4j}$ [MPa]	NA	-1,17	NA	1,17

$\sigma_{axial4k}$ [MPa]	-1,17	-1,878	NA	1,878
$\sigma_{axial5i}$ [MPa]	-2,377	-2,377	NA	2,377
$\sigma_{axial5j}$ [MPa]	NA	-2,377	NA	2,377
$\sigma_{axial5k}$ [MPa]	-2,377	-2,377	NA	2,377
$\tau_{1i}$ [MPa]	0,19	0,19	NA	0,19
$\tau_{1j}$ [MPa]	NA	0,19	NA	0,19
$\tau_{1k}$ [MPa]	0,19	0,19	NA	0,19
$\tau_{2i}$ [MPa]	-0,282	-0,282	NA	-0,282
$\tau_{2j}$ [MPa]	NA	-0,282	NA	-0,282
$\tau_{2k}$ [MPa]	-0,282	-0,282	NA	-0,282
$\tau_{3i}$ [MPa]	0,188	0,591	NA	0,591
$\tau_{3j}$ [MPa]	NA	0,188	NA	0,188
$\tau_{3k}$ [MPa]	0,188	-0,215	NA	-0,215
$\tau_{4i}$ [MPa]	-0,619	0,325	NA	0,325
$\tau_{4j}$ [MPa]	NA	-0,619	NA	-0,619
$\tau_{4k}$ [MPa]	-0,619	-1,562	NA	-1,562
$\tau_{5i}$ [MPa]	0,565	0,565	NA	0,565
$\tau_{5j}$ [MPa]	NA	0,565	NA	0,565
$\tau_{5k}$ [MPa]	0,565	0,565	NA	0,565
$\sigma_{eq1i}$ [MPa]	7,924	7,924	NA	NA
$\sigma_{eq1j}$ [MPa]	NA	2,061	NA	NA
$\sigma_{eq1k}$ [MPa]	3,863	3,863	NA	NA
$\sigma_{eq2i}$ [MPa]	3,88	3,88	NA	NA
$\sigma_{eq2j}$ [MPa]	NA	4,912	NA	NA
$\sigma_{eq2k}$ [MPa]	13,633	13,633	NA	NA
$\sigma_{eq3i}$ [MPa]	4,955	13,876	NA	NA
$\sigma_{eq3j}$ [MPa]	NA	11,939	NA	NA
$\sigma_{eq3k}$ [MPa]	19,922	11,032	NA	NA

$\sigma_{eq4i}$ [MPa]	23,881	10,98	NA	NA
$\sigma_{eq4j}$ [MPa]	NA	6,066	NA	NA
$\sigma_{eq4k}$ [MPa]	24,122	35,676	NA	NA
$\sigma_{eq5i}$ [MPa]	35,089	35,089	NA	NA
$\sigma_{eq5j}$ [MPa]	NA	0,98	NA	NA
$\sigma_{eq5k}$ [MPa]	34,974	34,974	NA	NA
$f_{1i}$ [kN]	-0,781	-0,781	-0,781	0,781
$f_{1j}$ [kN]	NA	-0,781	-0,781	0,781
$f_{1k}$ [kN]	-0,781	-0,781	-0,781	0,781
$f_{2i}$ [kN]	-0,781	-0,781	-0,781	0,781
$f_{2j}$ [kN]	NA	-0,781	-0,781	0,781
$f_{2k}$ [kN]	-0,781	-0,781	-0,781	0,781
$f_{3i}$ [kN]	-0,554	-0,554	-0,554	0,554
$f_{3j}$ [kN]	NA	-0,554	-0,554	0,554
$f_{3k}$ [kN]	-0,554	-0,554	-0,554	0,554
$f_{4i}$ [kN]	-1,241	-0,491	-0,491	0,491
$f_{4j}$ [kN]	NA	-1,241	-1,241	1,241
$f_{4k}$ [kN]	-1,241	-1,991	-1,991	1,991
$f_{5i}$ [kN]	-2,519	-2,519	-2,519	2,519
$f_{5j}$ [kN]	NA	-2,519	-2,519	2,519
$f_{5k}$ [kN]	-2,519	-2,519	-2,519	2,519
$F_{1i}$ [kN]	0,201	0,201	0,201	0,201
$F_{1j}$ [kN]	NA	0,201	0,201	0,201
$F_{1k}$ [kN]	0,201	0,201	0,201	0,201
$F_{2i}$ [kN]	-0,299	-0,299	-0,299	-0,299
$F_{2j}$ [kN]	NA	-0,299	-0,299	-0,299
$F_{2k}$ [kN]	-0,299	-0,299	-0,299	-0,299
$F_{3i}$ [kN]	0,199	0,626	0,626	0,626

$F_{3j}$ [kN]	NA	0,199	0,199	0,199
$F_{3k}$ [kN]	0,199	-0,228	-0,228	-0,228
$F_{4i}$ [kN]	-0,656	0,344	0,344	0,344
$F_{4j}$ [kN]	NA	-0,656	-0,656	-0,656
$F_{4k}$ [kN]	-0,656	-1,656	-1,656	-1,656
$F_{5i}$ [kN]	0,599	0,599	0,599	0,599
$F_{5j}$ [kN]	NA	0,599	0,599	0,599
$F_{5k}$ [kN]	0,599	0,599	0,599	0,599
$M_{1i}$ [kN.m]	0,296	0,296	-0,296	-0,296
$M_{1j}$ [kN.m]	NA	0,095	-0,095	-0,095
$M_{1k}$ [kN.m]	-0,106	-0,106	0,106	0,106
$M_{2i}$ [kN.m]	-0,106	-0,106	0,106	0,106
$M_{2j}$ [kN.m]	NA	0,192	-0,192	-0,192
$M_{2k}$ [kN.m]	0,491	0,491	-0,491	-0,491
$M_{3i}$ [kN.m]	0,187	0,491	-0,491	-0,491
$M_{3j}$ [kN.m]	NA	-0,390	0,390	0,390
$M_{3k}$ [kN.m]	-0,663	-0,359	0,359	0,359
$M_{4i}$ [kN.m]	-0,776	-0,359	0,359	0,359
$M_{4j}$ [kN.m]	NA	-0,164	0,164	0,164
$M_{4k}$ [kN.m]	0,864	1,281	-1,281	-1,281
$M_{5i}$ [kN.m]	1,281	1,281	1,281	-1,281
$M_{5j}$ [kN.m]	NA	0,083	0,083	-0,083
$M_{5k}$ [kN.m]	-1,114	-1,114	-1,114	1,114

Podem-se consultar os resultados alcançados com recurso ao *software* FTOOL na Figura 142, Figura 143, Figura 144 e Figura 145:

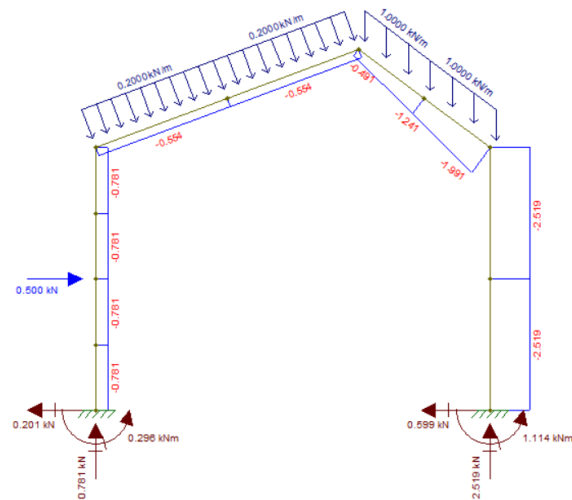


Figura 142 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço axial, esforços atuantes e reações nos apoios

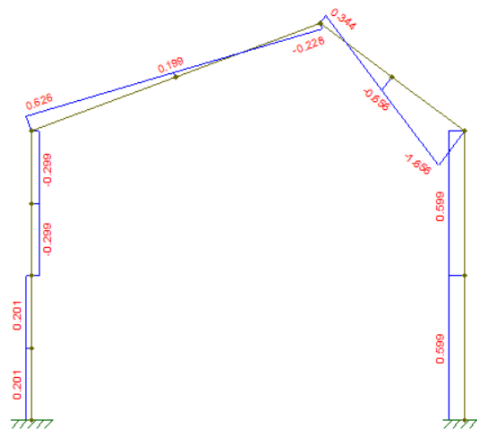


Figura 143 – Resultados obtidos no FTOOL - esforço corte

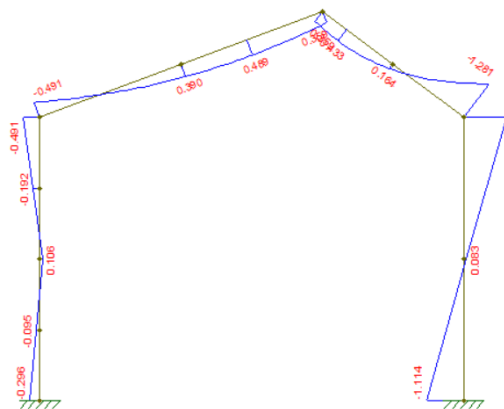


Figura 144 – Resultados obtidos no FTOOL – momentos fletores internos

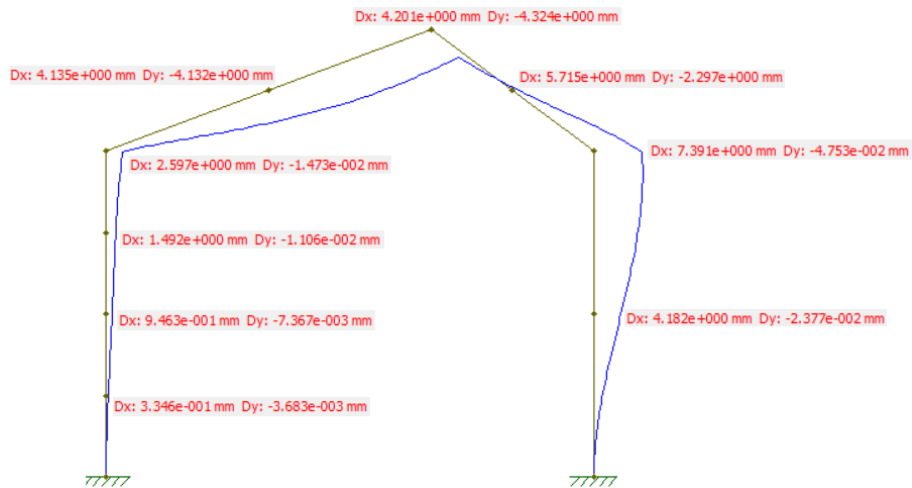


Figura 145 – Resultados obtidos no FTOOL – deslocamentos globais

O modelo utilizado através do *software* Robot Structural Analysis, as propriedades e os esforços atuantes nos elementos, podem ser consultados na Figura 146 e Figura 147. Paralelamente, na Figura 148 e Figura 149 expõem-se os resultados obtidos para uma simulação considerando elementos de estrutura quadráticos.

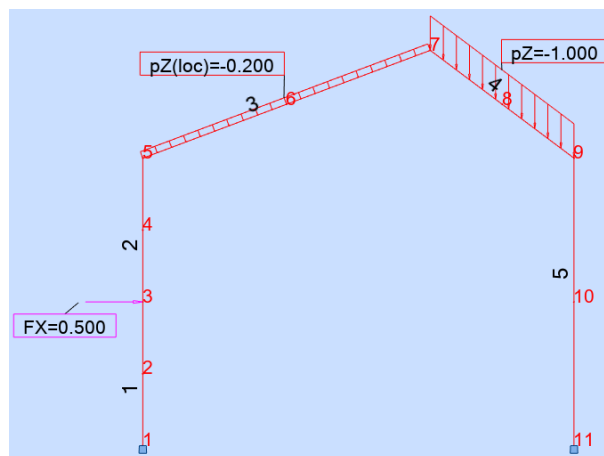


Figura 146 – Modelo em robot do terceiro problema modelo utilizado na validação das formulações do elemento de estrutura

Figura 147 – Propriedades dos elementos

Nó/Caso	UX (mm)	UZ (mm)	RY (Rad)
1/ 1	0,0	0,0	0,0
2/ 1	0,33	-0,00	0,001
3/ 1	0,95	-0,01	0,001
4/ 1	1,49	-0,01	0,001
5/ 1	2,60	-0,01	0,002
6/ 1	4,14	-4,13	0,002
7/ 1	4,20	-4,32	-0,001
8/ 1	5,72	-2,30	-0,003
9/ 1	7,39	-0,05	-0,001
10/ 1	4,18	-0,02	0,003
11/ 1	0,0	0,0	0,0
Nó/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)
1/ 1	-0,201	0,781	-0,296
11/ 1	-0,599	2,519	-1,114

Figura 148 – Deslocamentos e reações nos apoios

Barra/Ponto/Caso	S máx(My) (MPa)	S min(My) (MPa)	Fx/Ax (MPa)	TZ (MPa)
1/ 1/ 1	8,654	-8,654	0,737	0,190
1/ 2/3/ 1	2,771	-2,771	0,737	0,190
1/ 3/ 1	3,113	-3,113	0,737	0,190
2/ 3/ 1	3,113	-3,113	0,737	-0,282
2/ 2/3/ 1	5,624	-5,624	0,737	-0,282
2/ 5/ 1	14,361	-14,361	0,737	-0,282
3/ 5/ 1	14,361	-14,361	0,523	0,591
3/ 2/3/ 1	11,412	-11,412	0,523	0,188
3/ 7/ 1	10,503	-10,503	0,523	-0,215
4/ 7/ 1	10,503	-10,503	0,463	0,325
4/ 2/3/ 1	4,801	-4,801	1,170	-0,619
4/ 9/ 1	37,451	-37,451	1,878	-1,562
5/ 9/ 1	37,451	-37,451	2,377	0,565
5/ 2/3/ 1	2,434	-2,434	2,377	0,565
5/ 11/ 1	32,583	-32,583	2,377	0,565
Barra/Ponto/Caso	FX (kN)	FZ (kN)	MY (kNm)	
1/ 1/ 1	0,781	0,201	-0,296	
1/ 2/3/ 1	0,781	0,201	-0,095	
1/ 3/ 1	0,781	0,201	0,106	
2/ 3/ 1	0,781	-0,299	0,106	
2/ 2/3/ 1	0,781	-0,299	-0,192	
2/ 5/ 1	0,781	-0,299	-0,491	
3/ 5/ 1	0,554	0,626	-0,491	
3/ 2/3/ 1	0,554	0,199	0,390	
3/ 7/ 1	0,554	-0,228	0,369	
4/ 7/ 1	0,491	0,344	0,369	
4/ 2/3/ 1	1,241	-0,656	0,164	
4/ 9/ 1	1,991	-1,656	-1,281	
5/ 9/ 1	2,519	0,599	-1,281	
5/ 2/3/ 1	2,519	0,599	-0,083	
5/ 11/ 1	2,519	0,599	1,114	

Figura 149 – Tensões e esforços internos

Novamente, a formulação linear não consegue captar os resultados exatos para as variáveis secundárias nos nós, conforme pode ser consultado através da análise da informação apresentada na Tabela 33. Uma vez que este comportamento era o esperado para a formulação linear, pode-se concluir, que a formulação desenvolvida para o elemento de estrutura linear e quadrática é adequada ao estudo de estruturas bidimensionais após se confrontar os resultados alcançados com os resultados obtidos por *softwares* amplamente utilizados. Para o cálculo das tensões equivalentes deve-se recorrer à equação (164).

Por fim, recapitula-se que as diferenças nos sinais dos resultados encontram-se justificadas nas convenções de sinais utilizadas.

### 3.2 Desenvolvimento do *software*

No presente capítulo apresentam-se, de forma sucinta, as fases de desenvolvimento mais relevantes para o funcionamento do *software*. As fases de desenvolvimento assentam em modelos de desenvolvimento iterativo-incremental comumente utilizados no desenvolvimento de *software*, e estes métodos são aplicados recorrentemente ao longo do desenvolvimento deste programa. Estas fases passam pela idealização/conceção, pelo levantamento de requisitos, pela análise de requisitos, pelo projeto do programa, pela implementação (programação) e pela fase de testes (testes unitários, testes de integração e de sistema). Portanto, ao longo do capítulo são apresentadas as diversas funcionalidades que compõem o programa e as suas interfaces gráficas, e são enunciadas as principais variáveis de programação utilizadas e a sua tipologia, são também apresentados exemplos de funcionamento do *software* e ainda os testes de validação realizados.

#### 3.2.1 Estrutura

Com o propósito de desenvolver um *software* versátil e enquadrado com os *softwares* atualmente encontrados no mercado, primeiramente foi realizada uma análise criteriosa aos *softwares* Robot Structural Analysis e FTOOL. Assim, e tendo por base a estrutura e processo de funcionamento dos *softwares* referenciados, é idealizada a estrutura do programa denominado por *Finite Element Program* (FELP) e ilustrada na Figura 150.

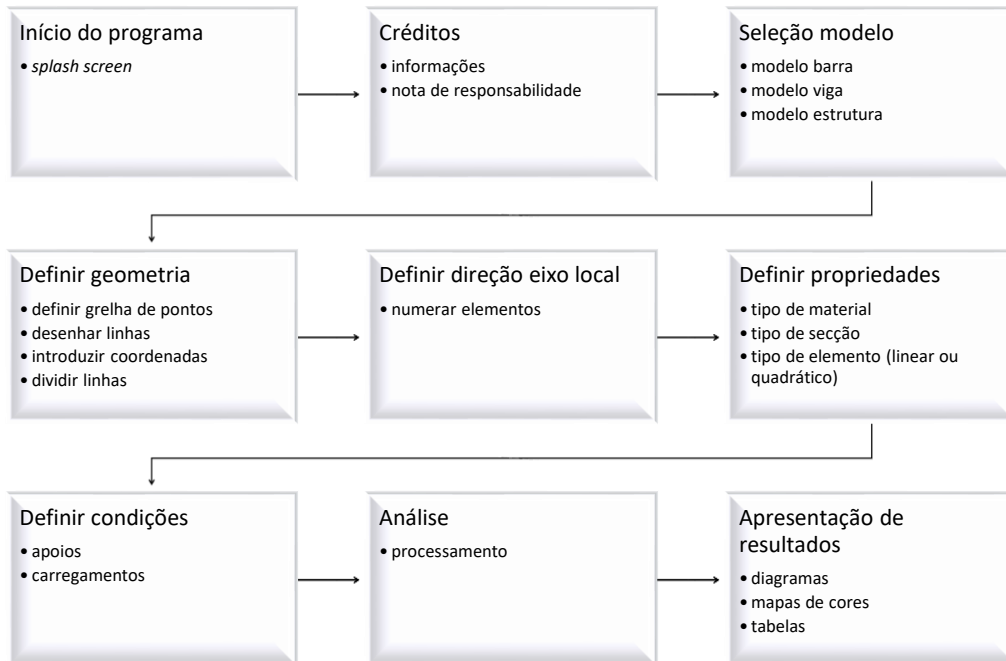
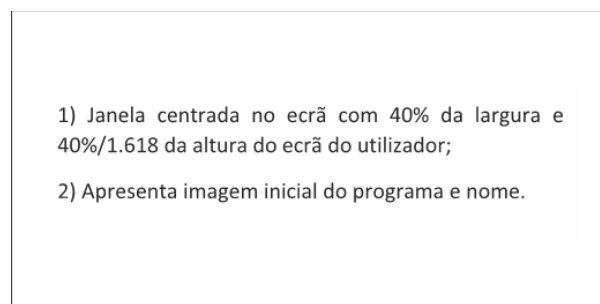


Figura 150 – Estrutura do programa FELP

Tendo por base a estrutura idealizada é possível esboçar os *layouts* que integram cada fase principal do programa e ainda listar os principais requisitos que se almejam para cada uma destas fases. Portanto, definem-se inicialmente 4 *layouts* principais descritos de seguida.

Na Figura 151, é possível consultar o primeiro *layout* referente ao arranque do programa. Os requisitos definidos para esta fase são os seguintes:

- 1) A janela deve ficar centrada no ecrã do utilizador independentemente do meio de visualização utilizado e apresentar uma largura de 40% da dimensão do ecrã e uma altura de 24,72% da altura do ecrã;
- 2) Deve ser possível visualizar uma imagem que ilustre a finalidade do *software*;
- 3) A imagem deve conter o logótipo desenvolvido para o programa e o nome definido;
- 4) Ao fim de aproximadamente 7 segundos a janela deve fechar automaticamente e iniciar a janela respeitante à fase dos créditos.

Figura 151 – *Layout* 1: arranque do programa

Na Figura 152 é possível visualizar o segundo *layout* que diz respeito à fase dos créditos do programa. Os principais requisitos estabelecidos para esta fase são os seguintes:

- 1) A janela deve ficar centrada no ecrã e apresentar uma largura de 24,72% e uma altura de 40% do ecrã que o utilizador utilize;
- 2) A janela pode ser minimizada e fechada, mas não deve ser possível maximizar a janela nesta fase do programa;
1. A janela apresenta a abreviatura do nome do *software* e a designação da janela na barra de título da janela;
- 3) O utilizador deve poder alterar o idioma entre português e inglês;
- 4) A janela deve apresentar um campo de texto com informação sobre quem projetou e concebeu o *software* e ainda informação sobre o âmbito do projeto;
- 5) A janela deve incluir uma nota de responsabilidade que só depois de aceite por parte do utilizador despoleta o encerramento da janela dos créditos e inicie a janela que permite selecionar o modelo a analisar;
- 6) A janela seguinte deve iniciar no idioma selecionado anteriormente.

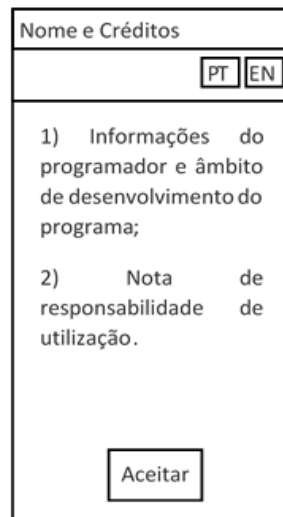


Figura 152 – *Layout* 2: créditos

O terceiro *layout* diz respeito à fase de seleção do modelo e pode ser consultado na Figura 153. Os requisitos principais para esta fase do programa são os seguintes:

- 1) A janela deve ficar centrada no ecrã e apresentar uma largura e altura de 60% do ecrã utilizado como meio de visualização;
- 2) A janela pode ser minimizada e fechada, mas não deve ser possível maximizar nesta fase do programa;
- 3) A barra de título da janela deve conter o nome do programa e a versão;
- 4) O utilizador pode optar por entre três tipos de modelo disponíveis: modelo de barra, modelo de viga e modelo de estrutura;
- 5) Os modelos devem ser apresentados numa forma ilustrativa;
- 6) O utilizador nesta fase deve poder iniciar um projeto anteriormente gravado;
- 7) O utilizador deve poder alterar o idioma entre português e inglês;

- 8) Ao selecionar o tipo de modelo deve ser encerrada a janela atual e iniciada a janela de trabalho com as funcionalidades ativas para o modelo selecionado e no idioma desejado.

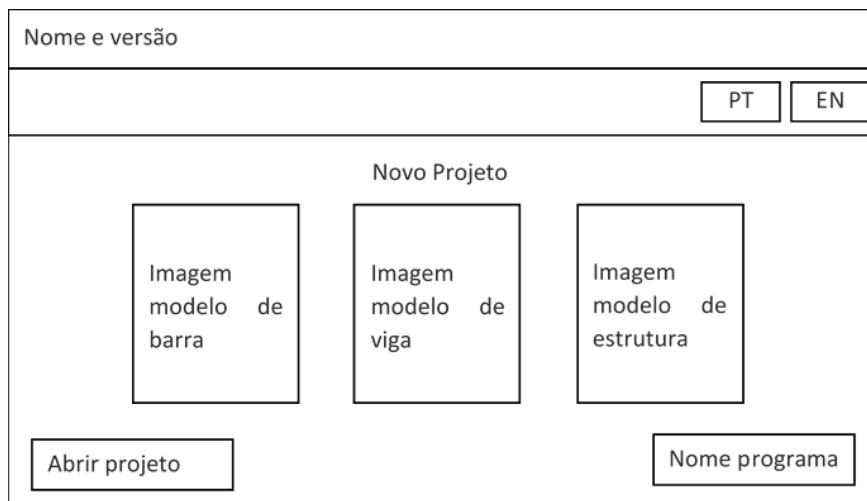


Figura 153 – Layout 3: seleção do modelo

O quarto e último *layout* idealizado numa fase inicial do programa diz respeito à janela de trabalho, que engloba as restantes fases da estrutura do programa (desde a fase de definir a geometria até à fase de apresentação de resultados). A idealização deste *layout* pode ser consultada na Figura 154, cujos requisitos são os seguintes:

1. A janela deve ser maximizada à dimensão do ecrã do utilizador e pode ser minimizada ou encerrada;
2. A barra de título da janela deve conter o nome do programa, a versão e tipo de modelo;
3. A janela deve apresentar uma barra de menus com os seguintes menus: arquivo, editar, vista, geometria, propriedades, condições, análise, resultados;
4. O menu resultados só deve ficar acessível após o processamento válido do modelo;
5. O menu arquivo deve conter os seguintes itens no submenu: sobre o FELP, convenção de sinais, novo projeto, salvar projeto, abrir projeto, importar DXF e sair;
6. O menu editar deve conter os seguintes itens: undo, redo, cortar, copiar, colar, mover, espelhar, rodar 2D e preferências;
7. O menu vista deve conter o seguinte submenu: *pan*, *zoom in*, *zoom out*, exibir numeração (elementos e nós), exibir apoios, exibir eixos locais (elementos) e exibir carregamentos;
8. O menu geometria deve ser composto pelos seguintes itens: definir grelha, remover grelha, definir/remover elementos, dividir elementos e numerar (elementos e nós);
9. O menu propriedades deve ser formado pelo seguinte submenu: definir/remover secção, definir/remover material, elemento de barra linear,

- elemento de barra quadrático, elemento de viga linear, elemento de viga quadrático, elemento de estrutura linear e elemento de estrutura quadrático;
10. No submenu das propriedades apenas devem estar ativos os tipos de elemento respeitantes ao modelo previamente selecionado;
  11. No menu condições devem existir as funcionalidades definir apoios, definir carregamentos e aplicar peso próprio;
  12. A funcionalidade aplicar peso próprio só deve ficar ativa após a atribuição das propriedades materiais a todos os elementos inseridos na área de trabalho. Para além disso, sempre que um novo elemento é adicionado na área de trabalho, o carregamento que foi automaticamente aplicado aos elementos existentes deve ser eliminado, e a funcionalidade aplicar peso próprio desativada até todos os elementos se encontrarem novamente definidos;
  13. No menu análise deve existir o submenu calcular;
  14. Sempre que o utilizador execute a funcionalidade calcular (processamento) devem se realizadas internamente as seguintes verificações:
    - a. Verificar se existem elementos na área de trabalho;
    - b. Verificar se todos os elementos têm propriedades materiais definidas;
    - c. Verificar se todos os elementos têm propriedades geométricas definidas;
    - d. Verificar se existe pelo menos um carregamento aplicado;
    - e. Verificar se existe pelo menos um tipo de apoio aplicado à estrutura;
    - f. Verificar se foi selecionado o tipo de análise pretendida (linear ou quadrática);
    - g. Verificar se existe algum tipo de instabilidade (matriz de rigidez é singular (o somatório das forças aplicadas e reações é nulo?).
  15. O menu resultados só deve ficar ativo caso existam resultados válidos e deve ser composto pelos seguintes itens: diagramas, mapas de cores e tabelas;
  16. A barra de ferramentas superior deve permitir o rápido acesso através de botões às seguintes funcionalidades: novo projeto, salvar projeto, abrir projeto, importar DXF, *zoom in*, *zoom out*, *pan*. Deve ainda, através de um *pop-up menu*, permitir o acesso ao submenu dos resultados e ficar ativo assim que estes existam;
  17. A barra de ferramentas lateral deve possibilitar ao utilizador o rápido acesso a funcionalidades de edição tais como as referenciadas a seguir. Definir/remover elementos, remover elementos, dividir elementos, definir/remover secção, definir/remover material, definir apoios, definir carregamentos, aplicar peso próprio e definir o tipo de elementos/análise (elemento de barra linear, elemento de barra quadrático, elemento de viga linear, elemento de viga quadrático, elemento de estrutura linear e elemento de estrutura quadrático);
  18. Na área de trabalho devem ser visíveis os eixos principais (globais), a escala e unidades de trabalho;
  19. Os eixos existentes na área de trabalho e a informação que os mesmos contêm devem alterar para o estado invisível quando o utilizador seleciona no submenu

resultados a opção de apresentação de tabelas. As tabelas devem alterar o seu estado para visível e ser apresentadas na área de trabalho. Na parte inferior da área de trabalho devem ser incluídas as diversas opções de consulta (reações coordenadas globais, reações coordenadas locais, deslocamentos, forças internas e tensões nos elementos);

20. Quando o utilizador seleciona um elemento, na lateral direita da janela deve ser apresentada uma tabela com as informações do elemento (propriedades geométricas e propriedades materiais).

Note-se que cada um dos itens que constitui os submenus referidos nos requisitos da janela de trabalho representa uma funcionalidade e, conseqüentemente uma nova série de requisitos a obedecer.

Portanto, opta-se por descrever os requisitos para cada uma das funcionalidades que se encontram à disposição do utilizador nesta fase do programa no subcapítulo Funcionamento do *software*. Inclusivamente, são apresentados os *layouts* finais para as funcionalidades enunciadas anteriormente, e apresentadas as restantes funcionalidades concebidas ao longo do desenvolvimento do *software*.

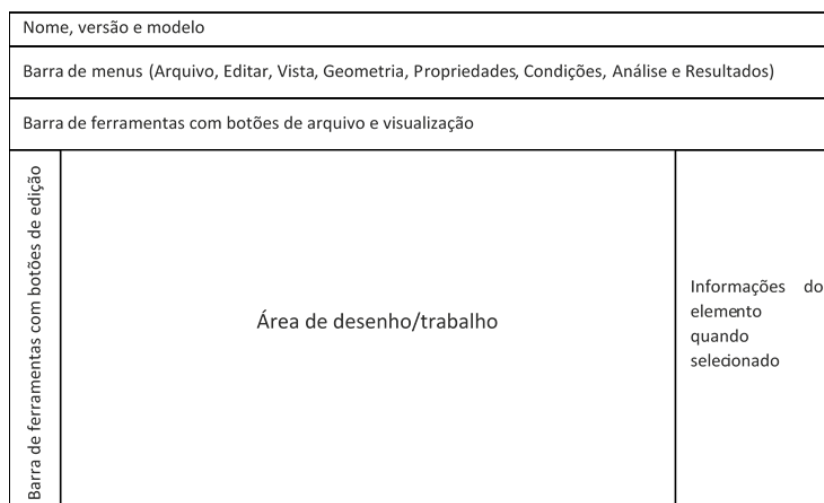


Figura 154 – Layout 4: janela de trabalho

### 3.2.2 Métodos de programação

O programa foi desenvolvido com recurso à linguagem de programação *Matlab*<sup>®</sup>. Inicialmente desenvolvem-se as janelas (*layouts*) necessárias com recurso à ferramenta de criação de *layouts* GUIDE. Esta ferramenta permite criar interfaces gráficas de forma rápida e intuitiva e o método de programação passa a estar direcionado a eventos. Os eventos são ações que os utilizadores podem realizar sobre os componentes inseridos no *layout* e, portanto, o fluxo de programação passa a ser guiado em função das ações externas (eventos) dos utilizadores. Cada evento está diretamente relacionado com uma função designada por *Callback* que corre após a ação do utilizador e define assim a reação do *software* à interação do utilizador [46]. Posteriormente, ao salvar o *layout*, é

gerado um ficheiro \*.fig e um ficheiro \*.m com o mesmo nome, que devem estar sempre no mesmo diretório. Os ficheiros do tipo .fig armazenam informações sobre as interfaces, suas propriedades e componentes num arquivo do tipo binário. Os ficheiros do tipo .m permitem ao programador escrever e arquivar todas as instruções e rotinas que definem o comportamento e propriedades de cada componente constituinte do *layout*.

Os ficheiros .fig apenas foram utilizados para inserir de forma prática e rápida os componentes que compõem a interface gráfica já que o posicionamento dos componentes e a definição das suas propriedades é feita através de código nos ficheiros do tipo .m. Além disso existem determinadas propriedades, como por exemplo a alteração da cor de fundo da barra de menu, a alteração da cor de fundo dos submenus e a inserção de símbolos em *uitables* que não se encontram acessíveis a não ser através de métodos não documentados na literatura oficial da *MathWorks*<sup>®</sup> e que foram necessários para obter a estilização ambicionada em determinados *layouts*. Estes métodos requerem a utilização da classe *JFrame* que pertence ao pacote *swing* da linguagem de programação java e que permite estabelecer/gerir interfaces gráficas, e ainda recorrer a *HyperText Markup Language* (HTML) e *Cascading Style Sheet* (CSS) para definir estruturas de texto e seus estilos. Os descritivos de utilização destes métodos de programação e exemplos podem ser consultados nas seguintes bibliografias [47-54], e na Figura 155 pode ser consultada a função utilizada para estilizar a barra de menus do programa FELP. Esta função primeiramente atualiza a área gráfica através da função *drawnow*, e logo de seguida armazena toda a informação que permite configurar a barra de menus na variável *jMenuBar*. São ainda criadas duas variáveis, do tipo célula, que contêm a informação das denominações a atribuir a cada botão que constitui a barra de menus nos respetivos idiomas, conforme o nome de cada variável indica. Posteriormente, através da programação cíclica e com recurso a HTML e CSS, é aplicado o estilo à denominação a atribuir a cada menu. Ainda dentro do ciclo, acede-se às propriedades da classe barra de menus e, com recurso às funcionalidades *get* e *set*, atribui-se a denominação e a cor a cada botão da barra de menus. Contudo, para que a cor seja devidamente atribuída é necessário alterar cada botão para opaco antes da atribuição da cor a cada botão. Por último, esta função altera o botão designado como *naousar* para que o restante espaço da barra de menus seja preenchido na cor atribuída aos restantes elementos que compõem a barra de menus.

```

function EstilizarMenu(handles, jFig)
%código para alterar o background do menu da ui e mudar o tipo de letra,
mas como o Yari fala nos comentários
%na página http://undocumentedmatlab.com/articles/customizing-menu-items-
part-3
% em versões mais recentes "the menu items' bgcolor is dynamically set by
% the system and cannot easily be overridden"

drawnow();
jMenuBar = jFig.fHG2Client.getMenuBar;
Menuupt={'Arquivo', 'Editar', 'Vista', 'Geometria', 'Propriedades',
'Condições', 'Análise', 'Resultados'};

Menuen={'File', 'Edit', 'View', 'Geometry', 'Properties', '
Conditions', 'Analysis', 'Results'};

% consegui alterar a cor do background dos botões que compõem a barra de
% ferramentas através do java e tornando o botão opaco
% Depois configuro com HTML e CSS a cor da letra e a fonte
Idioma = getappdata(0, 'Idioma');
if strcmp(Idioma, 'PT')
    for i=8:15
        label = ['<html><span style="color:white;font-weight:bold;font-family:
Arial, Helvetica, sans-serif;">' Menuupt{i-7} '</span></html> '];
        jMenuBar.getComponent(i).setText(label)
        jMenuBar.getComponent(i).setOpaque(1)
        jMenuBar.getComponent(i).setBackground(javax.swing.plaf.ColorUIResource(
.25,0.25,0.25))
        end
    elseif strcmp(Idioma, 'EN')
        for i=8:15
            label = ['<html><span style="color:white;font-weight:bold;font-family:
Arial, Helvetica, sans-serif;">' Menuen{i-7} '</span></html> '];
            jMenuBar.getComponent(i).setText(label)
            jMenuBar.getComponent(i).setOpaque(1)
            jMenuBar.getComponent(i).setBackground(javax.swing.plaf.ColorUIResource(
.25,0.25,0.25))
            end
        end
    end
%Preencher a restante barra de Menu na cor pretendida
set(handles.naousar, 'Enable', 'off')
% desligar interação do botão com o rato
set(jMenuBar.getComponent(16), 'rolloverEnabled', false)
espaco = [' &' repmat('&nbsp;', 1, 360)];
label = ['<html><span>' espaco '</html></span>'];
jMenuBar.getComponent(16).setText(label)
jMenuBar.getComponent(16).setOpaque(1)
jMenuBar.getComponent(16).setBackground(javax.swing.plaf.ColorUIResource(
0.25,0.25,0.25))
return

```

Figura 155 – Função utilizada para estilizar a barra de menu

Para o desenvolvimento do programa FELP foi ainda necessário criar uma série de funções auxiliares (ficheiros tipo \*.m) que são executadas internamente e permitem uma melhor organização e estruturação do código, evitando assim que este fique demasiado extenso e confuso.

### 3.2.3 Bases de dados

Com o propósito de cumprir alguns dos requisitos estabelecidos para a funcionalidade que permite definir/remover secções (requisitos descritos adiante no subcapítulo 3.2.4) do programa FELP, foi necessário elaborar uma base de dados de perfis que se encontra arquivada no ficheiro BDPerfis.xlsx. Este ficheiro contém as informações necessárias para o processo de cálculo e permite ao utilizador atribuir aos elementos perfis do tipo IPN, IPE, HEA, HEB, UPN, UPE, L de abas iguais ou desiguais, ou secções tubulares (tubo redondo, tubo quadrado e retangular), conforme ilustrado na Figura 156.

NA	b	h	ta	tb	A	Iz	Iy	y+	y-	z+	z-
UPN 80	0,045	0,08	0,006	0,008	0,001095	1,06E-06	1,94E-07	0,04	-0,04	0,030476	-0,01452
UPN 100	0,05	0,1	0,006	0,0085	0,001338	2,05E-06	2,92E-07	0,05	-0,05	0,034489	-0,01551
UPN 120	0,055	0,12	0,007	0,009	0,001688	3,64E-06	4,31E-07	0,06	-0,06	0,038936	-0,01606
UPN 140	0,06	0,14	0,007	0,01	0,002027	6,05E-06	6,25E-07	0,07	-0,07	0,042441	-0,01756
UPN 160	0,065	0,16	0,0075	0,0105	0,002389	9,25E-06	8,51E-07	0,08	-0,08	0,046599	-0,0184
UPN 180	0,07	0,18	0,008	0,011	0,002783	1,35E-05	1,14E-06	0,09	-0,09	0,050711	-0,01929
UPN 200	0,075	0,2	0,0085	0,0115	0,003202	1,91E-05	1,48E-06	0,1	-0,1	0,054849	-0,02015
UPN 220	0,08	0,22	0,009	0,0125	0,003727	2,69E-05	1,96E-06	0,11	-0,11	0,058546	-0,02145
UPN 240	0,085	0,24	0,0095	0,013	0,00421	3,6E-05	2,48E-06	0,12	-0,12	0,062633	-0,02237
UPN 260	0,09	0,26	0,01	0,014	0,004806	4,82E-05	3,17E-06	0,13	-0,13	0,066316	-0,02368
UPN 280	0,095	0,28	0,01	0,015	0,005321	6,27E-05	3,98E-06	0,14	-0,14	0,069668	-0,02533
UPN 300	0,1	0,3	0,01	0,016	0,005856	8,03E-05	4,93E-06	0,15	-0,15	0,072988	-0,02701

Figura 156 – Informação na base de dados para perfis do tipo UPN

Para o exemplo apresentado na Figura 156 pode-se aferir que a base dados contém informações sobre a largura (b), altura (h), espessura da alma (ta), espessura dos banzos (tb), área da secção (A), inércia em torno do eixo dos z (Iz), inércia em torno do eixo dos y (Iy), distância às fibras superiores direção y (y+), distância às fibras inferiores direção y (y-), distância às fibras superiores direção z (z+) e distância às fibras inferiores direção z (z-). Na Figura 157 pode ser consultada a posição em que se encontra o sistema de eixos local para o tipo de secção utilizada como exemplo.

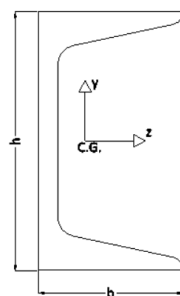


Figura 157 – Posição do eixo local na secção

A informação contida na base de dados é carregada e armazenada em variáveis ao longo das fases de início do programa até à fase em que é iniciada a janela de trabalho. Na Figura 158 pode ser consultado um excerto do código e funções utilizadas para a leitura da base de dados. Como a informação transita entre múltiplas interfaces gráficas e consequentemente entre diferentes ficheiros do tipo \*.m, uma forma de aceder à informação noutros ficheiros passa por primeiramente salvar a variável na raiz através

do comando *setappdata* e posteriormente carregar a informação numa variável através do comando *getappdata* num ficheiro em que a informação armazenada na raiz é necessária.

```
%carregar bases de dados
[num1,txt1]=xlsread('BDPerfis.xlsx',1);
[num2,txt2]=xlsread('BDPerfis.xlsx',2);
[num3,txt3]=xlsread('BDPerfis.xlsx',3);
setappdata(0,'bdn1',num1)
setappdata(0,'bdn2',num2)
setappdata(0,'bdn3',num3)
setappdata(0,'bdt1',txt1)
setappdata(0,'bdt2',txt2)
setappdata(0,'bdt3',txt3)
```

Figura 158 – Excerto do código que permite a leitura da base de dados e o respetivo armazenamento da informação na raiz

Já no que diz respeito ao armazenamento das propriedades dos componentes criados em cada *layout*, estas são armazenadas numa estrutura tipicamente designada de *handles* que contém toda a informação respeitante a um determinado componente introduzido no *layout*. Ao longo do desenvolvimento do programa diversas variáveis necessárias foram adicionadas à estrutura e a mesma atualizada através do comando *guidata(hObject,handles)*. No entanto, é necessário ter presente que, sempre que é criada uma *function handle* é necessário proceder à passagem das variáveis que se encontram na estrutura de *handles* para o interior da função, uma vez que as rotinas e instruções não reconhecem nem conseguem aceder às variáveis que se encontram na estrutura de *handles* do *layout*, e o programa retorna uma mensagem de erro do tipo “*undefined function or variable*”.

### 3.2.4 Funcionamento do *software*

Neste subcapítulo são apresentadas as diversas fases de funcionamento do programa FELP, assim como as ilustrações finais das diferentes janelas desenvolvidas para cada funcionalidade e fase do *software*.

É ainda efetuada a descrição dos requisitos das funcionalidades que constituem o *layout* da janela de trabalho que não foram descritas no subcapítulo 3.2.1. A estrutura da informação presente neste subcapítulo encontra-se organizada de forma a seguir o procedimento que um utilizador deve levar a cabo no projeto de análise de uma determinada estrutura aleatória. Independentemente do modelo selecionado, o processo para a obtenção de resultados válidos é idêntico para qualquer um dos diferentes tipos de modelos disponibilizados.

Sempre que necessário são incluídos excertos do código elaborado e explicado o seu funcionamento. No entanto, é importante salientar que o âmbito deste capítulo não se prende na explicação detalhada do código elaborado para o desenvolvimento do programa, uma vez que este já ultrapassa as 40 mil linhas de código. Pretende-se transmitir uma ideia geral do seu funcionamento, modo de utilização e estado de

desenvolvimento. Portanto, ao longo deste subcapítulo raramente são feitas menções à bibliografia consultada para o desenvolvimento do programa e preferiu-se enumerar as referências bibliográficas de seguida [55-95].

#### 3.2.4.1 Arranque do programa

Na versão 1.0 do FELP, atual do programa elaborada, o programa ainda não se encontra do tipo *stand alone*. Portanto, nesta versão é necessário inicialmente iniciar o Matlab® e posteriormente alterar o diretório para o local onde se encontram todos os ficheiros que dizem respeito ao programa desenvolvido.

De seguida, deve ser selecionado o ficheiro FELP.m e, na *tab* da barra de ferramentas do Matlab® “EDITOR”, selecionar a opção *run*. Estes passos iniciam o programa e a janela ilustrada na Figura 159 referente à fase de arranque do programa surgirá no ecrã do utilizador.

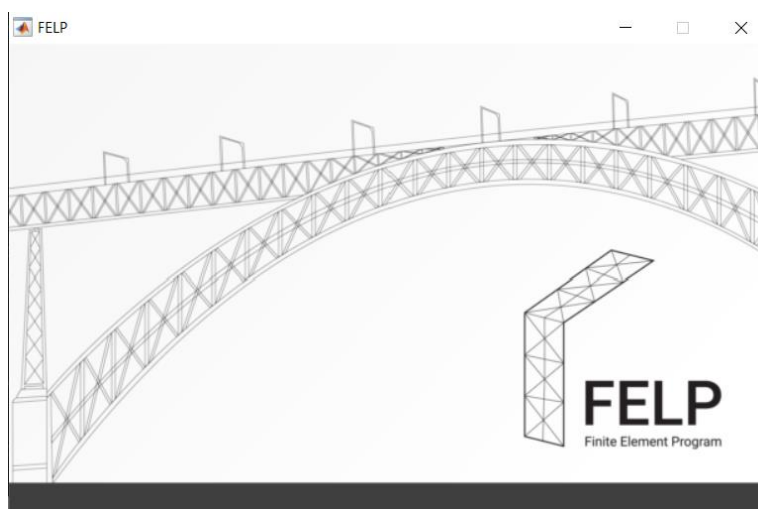


Figura 159 – Janela de início do programa

De acordo com os requisitos definidos para a fase de início do programa passados aproximadamente sete segundos a janela é encerrada e sem que exista qualquer interação por parte do utilizador surge no ecrã a janela respeitante à fase dos créditos conforme ilustra a Figura 160. Nesta janela o utilizador pode alterar o idioma entre português e inglês, e é exibida informação sobre o autor do programa, o âmbito de desenvolvimento e uma nota de responsabilidade que terá de ser aceite por parte do utilizador, para que o programa transite para a janela seguinte e o utilizador continue a utilizar o programa.

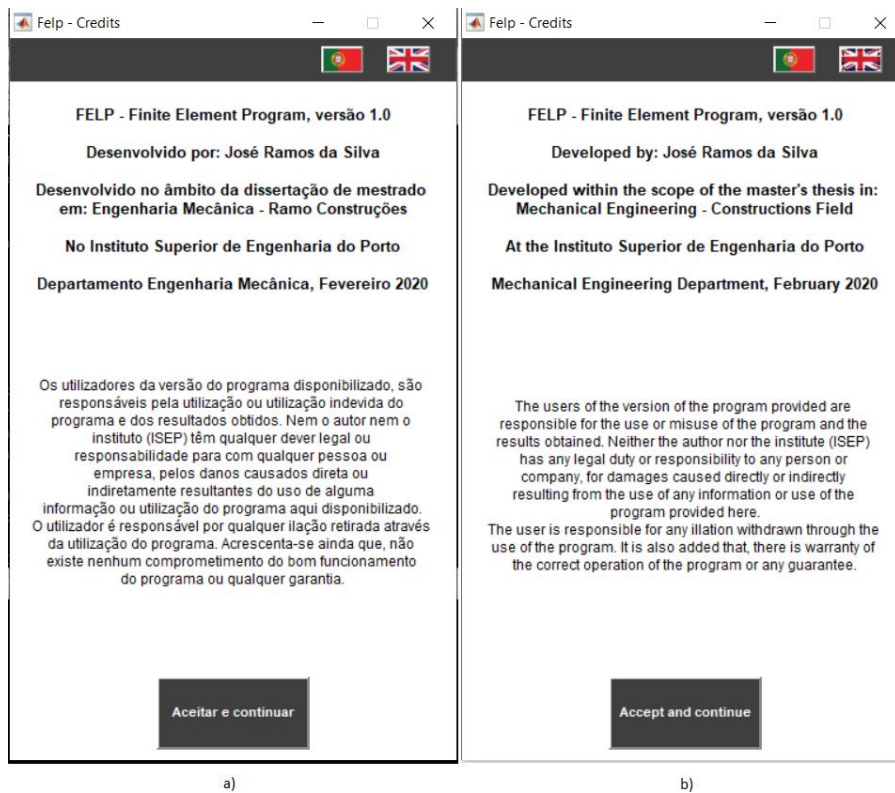


Figura 160 – a) janela fase dos créditos com idioma em português; b) janela fase dos créditos com idioma em inglês

### 3.2.4.2 Seleção do modelo de estrutura a analisar

Assim que o utilizador aceita as condições de utilização do programa é iniciada a janela respeitante à fase de seleção do modelo ilustrada na Figura 161. Nesta janela, o utilizador pode novamente proceder à alteração do idioma do programa. No entanto, deve estar ciente que essa alteração é inalterável na fase seguinte do programa.

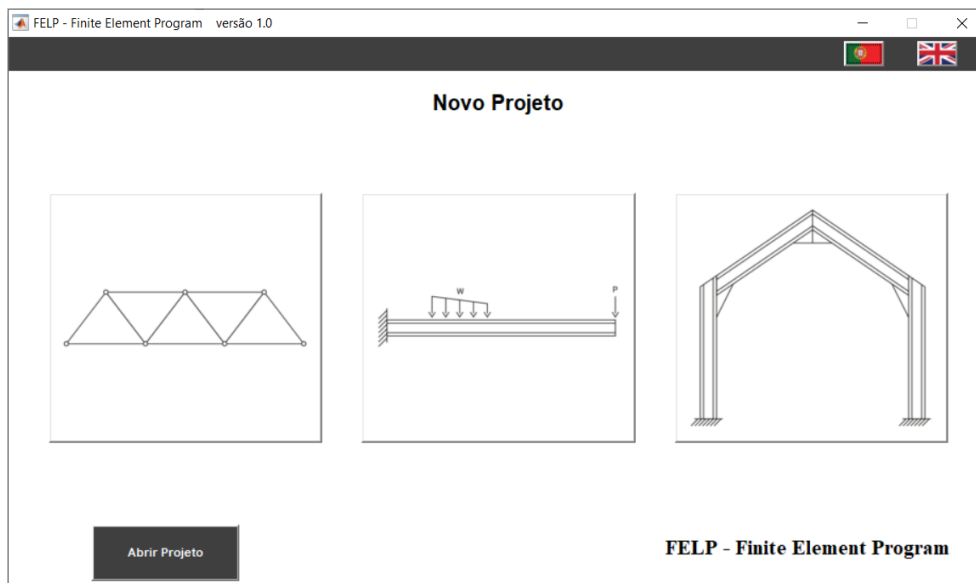


Figura 161 – Janela de seleção do modelo de estrutura a analisar

Nesta fase o utilizador opta pelo tipo de modelo de estrutura que pretende analisar ao clicar sobre o botão ilustrativo dos diferentes modelos de estrutura disponíveis (modelo de barra, modelo de viga e modelo de estrutura). Consequentemente, é inicializada a janela de trabalho com as respetivas restrições impostas na escolha do modelo. É ainda permitido ao utilizador abrir um projeto existente, embora esta funcionalidade ainda não se encontre implementada na versão 1.0 do programa.

### 3.2.4.3 Definição da geometria a analisar

Assim que o utilizador seleciona o tipo de modelo de análise, é iniciada a janela de trabalho ilustrada na Figura 162.

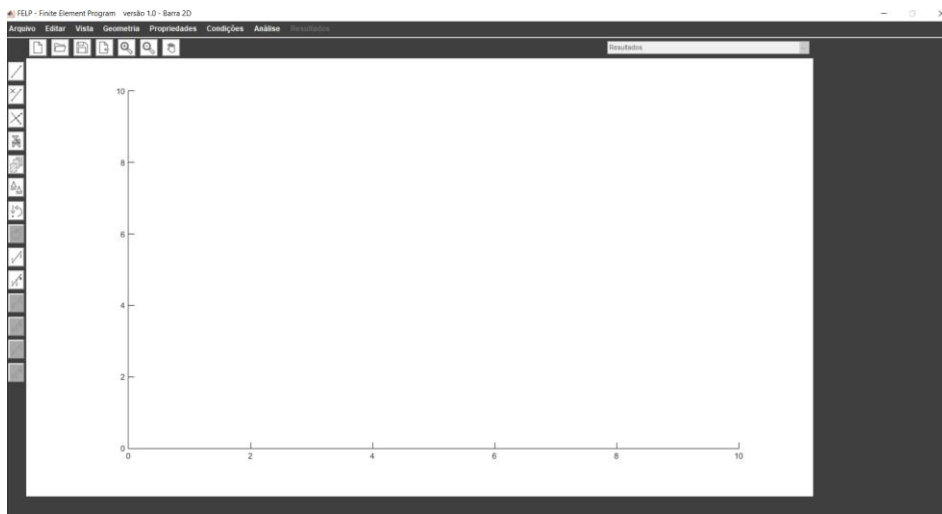


Figura 162 – Janela de trabalho (modelo de barra)

Imediatamente após o surgimento da janela de trabalho, o utilizador possui diversas funcionalidades que permitem a inserção da geometria pretendida para a análise. Estas funcionalidades podem ser acedidas através dos botões assinalados na Figura 163, que ilustra a barra lateral de ferramentas, ou através do submenu do menu geometria ilustrado na Figura 164.



Figura 163 – Barra lateral de ferramentas com botões definir/remover elemento, remover elemento e dividir elementos assinalados

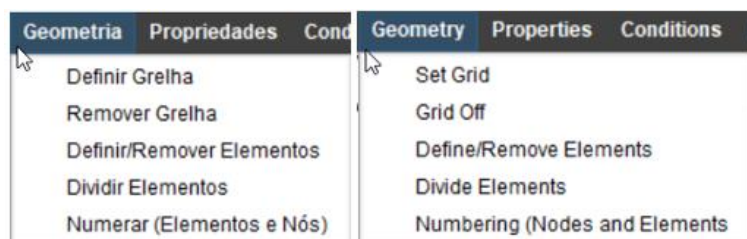


Figura 164 – Submenu do menu geometria nos dois idiomas disponíveis

O utilizador pode ainda introduzir a geometria através da funcionalidade de importação de ficheiros do tipo \*.dxf disponível no submenu do menu arquivo, conforme ilustra a Figura 165 ou através do botão disponível na barra de ferramentas, que contém botões de acesso rápido às funcionalidades de arquivo e visualização conforme ilustra a Figura 166.

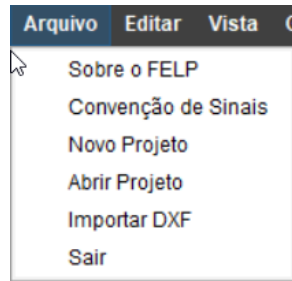


Figura 165 – Submenu do menu arquivo



Figura 166 –Barra de ferramentas superior

Caso o utilizador opte por importar um ficheiro do tipo \*.dxf, ao selecionar essa funcionalidade é iniciada a página de explorador de ficheiros no corrente diretório que permite ao utilizador selecionar um ficheiro do tipo .dxf conforme ilustra a Figura 167. Na *drop-down list* apenas existem as opções de importar ficheiros do tipo .dxf ou visualizar todos os ficheiros no diretório. Caso o utilizador selecione um tipo de ficheiro diferente do tipo \*.dxf, é despoletada uma mensagem de erro e o ficheiro selecionado não é importado. O código que realiza a verificação e despoleta a mensagem de erro ilustrada na Figura 168 pode ser consultado na Figura 169.

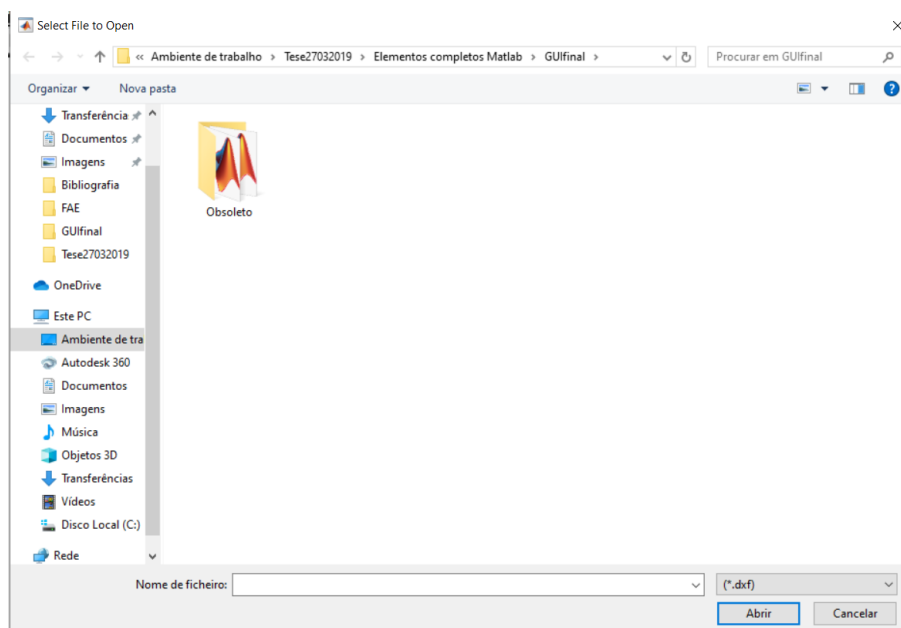


Figura 167 – Janela do explorador de ficheiros que permite importar um ficheiro do tipo .dxf

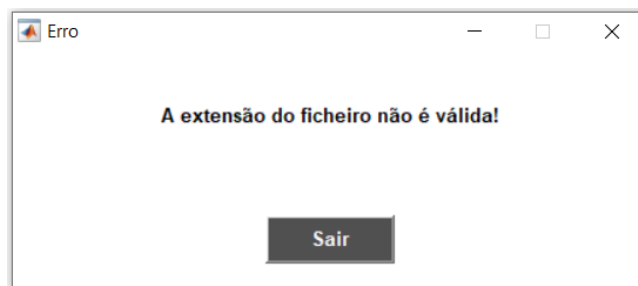


Figura 168 – Mensagem de erro na importação de extensões de ficheiro inválidas

```
%verificar a extensão do ficheiro
if strcmp(file(end-3:end),'.dxf')
    %concatenar o caminho com o nome do ficheiro a abrir
    ficheiro=[path file];
elseif strcmp(Idioma,'PT')
    erro=('A extensão do ficheiro não é válida!');
    x=0;
    y=0;
    unidades=[];
    return
elseif strcmp(Idioma,'EN')
    erro=('The file extension is not valid!');
    x=0;
    y=0;
    unidades=[];
    return
end
```

Figura 169 – Excerto do código que realiza a verificação da extensão do ficheiro [autor]

Os principais requisitos estipulados para a funcionalidade importar ficheiros do tipo *Drawing Exchange Format* (DXF), e que foram implementados no desenvolvimento do programa, são os seguintes:

1. O utilizador deve conseguir importar ficheiros do tipo .dxf elaborados com recurso aos *softwares* Autocad® e nanoCAD;
2. Devem ser realizados diferentes testes a diversos ficheiros \*.dxf gerados através dos dois *softwares* anteriormente referidos;
3. A funcionalidade deve verificar se foi selecionado algum ficheiro e se a extensão do ficheiro é válida;
21. A funcionalidade deve ler e guardar a informação das unidades de medida em que se encontra o ficheiro e converter nas unidades de medida definidas nas preferências do programa FELP;
4. As unidades de medida aceites e convertíveis devem ser as seguintes: milésimas de polegadas, polegadas, pés, jardas, milhas, milímetros, centímetros, metros e quilómetros;
5. Caso as unidades de medida no ficheiro sejam diferentes das que são aceites, deve ser gerada uma mensagem de erro e o ficheiro não deve ser importado;
6. Só devem ser aceites entidades do tipo “Line” e, caso existam dentro do ficheiro entidades diferentes daquelas que são aceites, deve ser despoletada uma mensagem de erro e o ficheiro não deve ser importado;

7. A funcionalidade deve verificar o plano em que se encontram as entidades e se as entidades que se encontram no ficheiro \*.dxf são bidimensionais. Caso as entidades se encontrem num plano diferente do *Top View* (xy) ou sejam tridimensionais (exista informação na direção z diferente de zero) a importação do ficheiro deve falhar e despoletar uma mensagem de erro;
8. Ao importar um ficheiro deve ser removida toda a informação da área de trabalho que exista e ainda nas respetivas variáveis em que essa informação se encontre armazenada;
9. A funcionalidade importar deve numerar automaticamente todos os elementos e os seus respetivos nós.

Caso o utilizador opte por desenhar a geometria através das funcionalidades disponíveis no submenu do menu geometria, numa fase inicial este pode optar por selecionar a funcionalidade definir grelha e, nessa situação, será iniciada uma janela conforme ilustra a Figura 170. Nesta janela, o utilizador pode definir os valores máximos e mínimos que pretende para as direções x e y dos eixos globais e, ainda, definir o espaçamento desejado para a construção da grelha. Em seguida, caso o utilizador pressione o botão ativar grelha e a informação inserida seja válida, surgirá a grelha de pontos na área de trabalho, conforme pode ser visualizado na Figura 171.

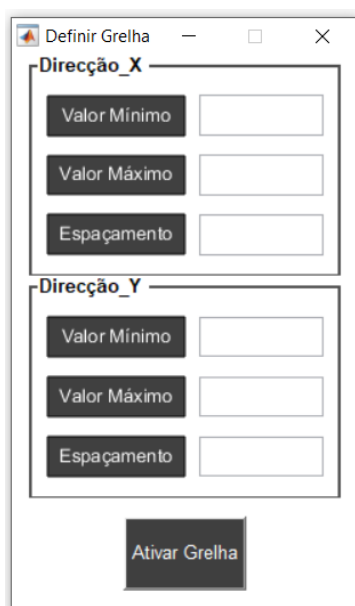


Figura 170 – Janela definir grelha

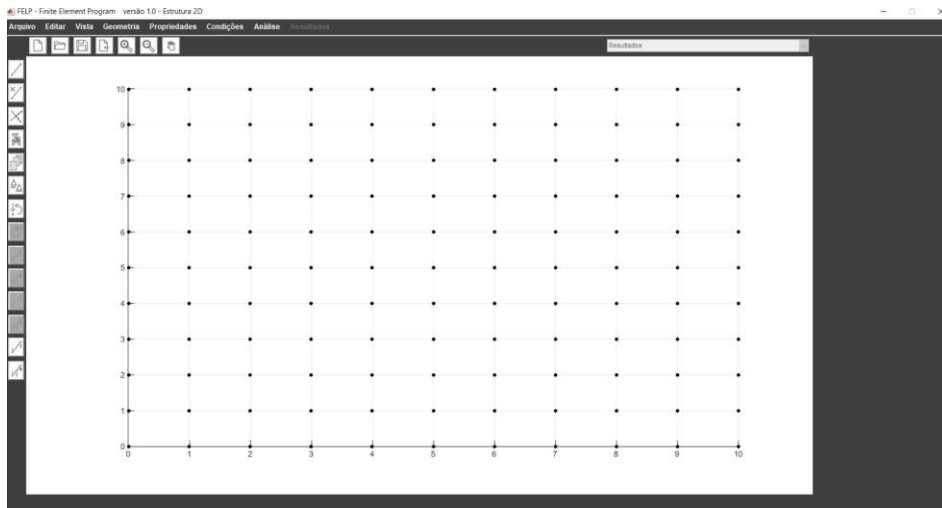


Figura 171 – Exemplo de uma grelha de pontos ativa na área de trabalho

Os principais requisitos definidos e implementados para a funcionalidade definir grelha são os seguintes:

1. O utilizador pode estabelecer um intervalo de valores para a grelha de pontos que deve ficar acessível na área de trabalho;
2. Deve ser possível definir o espaçamento da grelha de pontos para as direções globais x e y;
3. Ao ser pressionado o botão ativar grelha é executada uma verificação a todos os dados inseridos nos campos disponibilizados. Caso o utilizador não preencha todos os campos, deve ser despoletada uma mensagem de erro e a grelha não fica ativa;
4. Só são aceites valores numéricos reais nos campos de edição de texto, caso contrário deve surgir uma mensagem de erro no ecrã ao ativar a grelha;
5. Deve surgir uma mensagem de erro ao ativar a grelha se o valor mínimo for superior ou valor máximo, se o valor do espaçamento definido for igual a zero, ou ainda se o valor do espaçamento for igual ou superior à diferença do valor máximo com o valor mínimo;
6. Caso o utilizador defina um espaçamento demasiado pequeno (superior a 24 espaços) deve surgir uma mensagem de erro no ecrã e a grelha não fica ativa;
7. Ao ativar a grelha caso existam elementos na área de trabalho, estes devem-se manter inalterados e a grelha deve ficar ativa.

Numa fase posterior, caso o utilizador opte por seleccionar a opção do submenu remover grelha, esta será removida da área de trabalho. Na circunstância de não existir nenhuma grelha ativa na área de trabalho, o ato de executar esta funcionalidade não origina qualquer efeito, uma vez que não existe nenhuma grelha de pontos ativa para remover.

No cenário de o utilizador seleccionar a funcionalidade do submenu do menu geometria definir/remover elementos surgirá uma janela no ecrã, conforme se pode visualizar na Figura 172. Nesta funcionalidade o utilizador tem ao dispor dois métodos distintos que

permitem definir a geometria da estrutura na área de trabalho: através da inserção das coordenadas dos nós do elemento ou através da funcionalidade desenhar, que permite ao utilizador desenhar a estrutura de forma livre na área de trabalho. Caso o utilizador ative o modo contínuo, ao pressionar o botão adicionar implica que o nó inicial do elemento seguinte é preenchido automaticamente com a informação do nó final do elemento anterior. Para a funcionalidade desenhar, o utilizador ao inserir a primeira linha inicia automaticamente no nó final a linha seguinte. O clique seguinte do botão do lado esquerdo do rato marca a posição do nó final do novo elemento a inserir. Caso o clique seja no botão do lado direito do rato, é desativada a funcionalidade e ressurgue a janela definir/remover elementos novamente no ecrã. O botão remover, como o nome indica permite ao utilizador remover um elemento existente na área de trabalho quando é dado um clique sobre este.

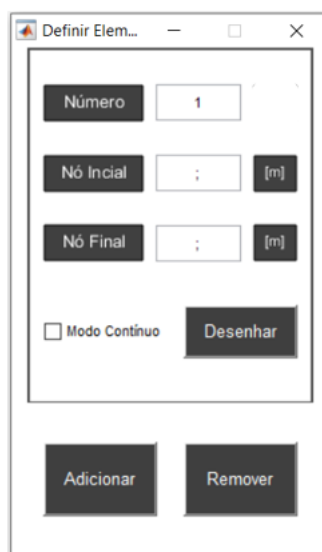


Figura 172 – Janela definir/remover elementos

Os principais requisitos definidos e implementados para esta funcionalidade são os seguintes:

1. O utilizador deve poder inserir elementos através da inserção das coordenadas dos nós ou desenhar os elementos de forma livre na área de trabalho;
2. Deve existir a possibilidade de o utilizador ativar um modo contínuo, que permite inserir ou desenhar elementos ligados entre si no nó final sem que exista a necessidade de repetir a inserção de dados ou repetir cliques, respetivamente;
3. A numeração dos elementos deve ser realizada automaticamente e atualizada no campo número da janela. Embora, o utilizador possa alterar a numeração para o elemento a inserir, se a numeração inserida for a mesma de um elemento existente na área de trabalho deve ser despoletada uma mensagem de erro, conforme pode ser visualizado na Figura 173;
4. O utilizador, ao inserir elementos através da funcionalidade adicionar, deve preencher os campos de edição para as coordenadas dos nós. O primeiro valor deve

- ser a coordenada respeitante à posição  $x$  e o segundo valor deve ser a posição  $y$ . As posições da coordenada devem ser inseridas separadas por ponto e vírgula conforme o exemplo  $x;y$ . Caso contrário, surge uma mensagem de erro no ecrã a informar o utilizador que as coordenadas não foram inseridas corretamente;
5. Ao pressionar o botão adicionar é feita uma verificação aos dados inseridos nos campos de edição e, caso o utilizador não tenha preenchido todos os campos com valores numéricos, surge uma mensagem de erro no ecrã;
  6. Se as coordenadas dos nós do elemento a adicionar pertencerem a uma secção interna de um elemento já existente na área de trabalho é despoletada uma mensagem de erro e o novo elemento não é inserido;
  7. Se as coordenadas dos nós provocarem a introdução de um elemento que é paralelamente coincidente a um elemento já existente na área de trabalho surge uma mensagem de erro e o novo elemento não é adicionado;
  8. Se as coordenadas dos nós do novo elemento inserido intersectarem um elemento já existente na área de trabalho num nó exterior desse elemento, provocando assim a sobreposição de um nó criado com uma secção interna do elemento inserido, deve ser despoletada uma mensagem de erro e este novo elemento não é adicionado à área de trabalho;
  9. Ao inserir o elemento, a numeração dos nós deve ser gerada de forma automática e sequencial do nó inicial para o nó final. No entanto, caso o elemento seja ligado a um nó inicial ou final de um elemento já existente na área de trabalho a funcionalidade deve atribuir a mesma numeração do nó existente ao nó do novo elemento;
  10. Ao adicionar um novo elemento na área de trabalho deve ser automaticamente gerado o eixo local do elemento. A direção do eixo do  $x$  é a mesma do desenvolvimento longitudinal do elemento e o sentido é representado do nó com menor numeração para o nó de maior numeração. A direção do eixo do  $y$  toma a direção perpendicular à de desenvolvimento do elemento;
  11. Ao selecionar a opção remover um elemento deve ser verificado se existem elementos a remover. Caso estes não existam na área de trabalho, deve ser despoletada uma mensagem de erro e a funcionalidade desativada;
  12. Ao selecionar a opção remover, o comportamento do rato deve alterar quando se encontra sobre um elemento e apresentar um novo ícone com o formato de um X [96];
  13. Ao remover um elemento devem ser removidas todas as propriedades desse elemento das variáveis e verificado se algumas propriedades pertencem a outro elemento de continuidade. Na circunstância de pertencerem estas não devem ser removidas como por exemplo: carregamentos nodais e apoios;
  14. Ao adicionar elementos através da funcionalidade desenhar, o ícone do rato deve alterar e apresentar o formato *crosshair* [97];
  15. Caso a grelha de pontos se encontre ativa, o modo de desenho fica limitado aos pontos da grelha e o rato só deve ficar visível nas áreas circundantes dos nós da

- grelha. Se o utilizador clicar fora desta área, o clique não é assumido. Se for no interior da área, a coordenada do clique (coordenado do nó) assume as posições  $x$  e  $y$  do nó da grelha;
16. No modo de desenho e com grelha ativa, se o utilizador clicar num nó da grelha que é coincidente com o nó interior de um elemento já inserido, deve surgir uma mensagem de erro e o clique não deve ser assumido. O mesmo procedimento deve ocorrer caso o novo elemento seja paralelo e coincidente com um elemento já existente, ou se o novo elemento inserido cruzar um elemento existente e o nó final ou inicial desse elemento se tornar um nó interior do elemento a adicionar;
  17. Se o utilizador clicar duas vezes num mesmo ponto ao desenhar, o segundo clique não é assumido;
  18. Na funcionalidade desenhar, com a grelha desativada, caso o utilizador clique na proximidade de um ponto exterior de um elemento existente na área de trabalho, deve ocorrer o *snap* a esse ponto e as coordenadas do clique passam a ser as coordenadas do ponto;
  19. Se o utilizador, ao desenhar com a grelha desativada, executar um clique na proximidade dos nós interiores de um elemento já existente na área de trabalho que se encontram contidos num polígono, é despoletado um erro e o elemento não é adicionado;
  20. Ao desenhar um novo elemento com a grelha desativa deve ser verificado se este elemento é coincidente a algum elemento já existente na área de trabalho. Caso seja, deve surgir um erro e o elemento é eliminado. O mesmo procedimento deve ocorrer caso os nós interiores do novo elemento intersectarem a área de proximidade dos nós exteriores dos elementos já inseridos na área de trabalho;
  21. O utilizador deve descativar o modo de desenho através de um clique no botão do lado direito do rato.

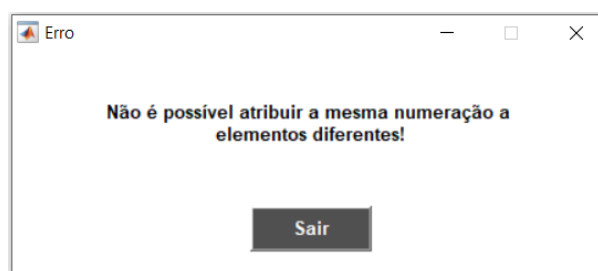


Figura 173 – Mensagem de erro na inserção de elementos com a mesma numeração

A partir do momento que existem elementos na área de trabalho o utilizador pode realizar alterações nestes a partir da funcionalidade dividir elementos que, como o nome indica, permite dividir os elementos seleccionados pelo utilizador de acordo com as opções disponibilizadas. As opções que a funcionalidade dividir coloca ao dispor do utilizador passam pela possibilidade de dividir os elementos em  $n$  segmentos ou em intersecções, conforme ilustra a janela que pode ser visualizada na Figura 174.

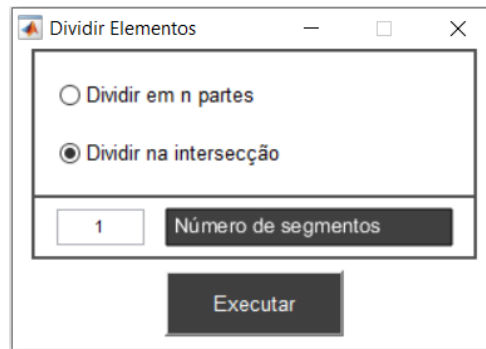


Figura 174 – Janela dividir elementos

Os principais requisitos definidos e implementados para esta funcionalidade são os seguintes:

1. O utilizador deve poder seleccionar e dividir um elemento num número de segmentos pretendido;
2. O número de divisões inserido por parte do utilizador é verificado e só são aceites números pertencentes ao conjunto dos números naturais;
3. A divisão por zero não é aceite e um elemento não pode ser dividido em mais que 20 segmentos, a cada execução da funcionalidade;
4. O utilizador selecciona o elemento com um clique do botão do rato do lado esquerdo e a funcionalidade é desativada automaticamente;
5. A qualquer momento da fase de seleção do elemento o utilizador pode desativar a funcionalidade através de um clique no botão do rato do lado direito;
6. Na fase de processamento da divisão de um elemento em  $n$  partes, a numeração dos elementos é gerada automaticamente, e é ainda atualizada a numeração dos nós de todos os elementos ligados aos nós externos do elemento inicialmente selecionado;
7. Caso o elemento selecionado possua propriedades geométricas ou propriedades materiais definidas, ao gerar os novos elementos devem ser definidas as suas propriedades com base nas do elemento inicial;
8. A criação dos eixos locais dos elementos a gerar deve ser feita automaticamente, e deve ser tido em conta que os eixos locais dos elementos ligados aos nós externos do elemento inicialmente selecionado podem alterar com base na alteração imposta pela numeração dos nós. Lembra-se que a direção do  $x$  do eixo local toma o sentido positivo sempre da menor numeração do nó para a maior;
9. Caso existam carregamentos aplicados no elemento selecionado, estes devem ser replicados ou atualizados. Na situação de existirem carregamentos uniformes ou trapezoidais, estes devem ser replicados nos novos elementos (atenção à direção do eixo local) e, na circunstância de existirem carregamentos nodais, deve ser atualizada automaticamente a informação na célula dos carregamentos referente à numeração do nó que contém o carregamento;

10. A célula que contem a informação dos nós com apoios também deve ser atualizada de acordo com as alterações na numeração dos nós que o processo de divisão produziu;
11. O utilizador deve poder seleccionar e dividir dois elementos na sua intersecção;
12. O utilizador selecciona o primeiro elemento com um clique no botão do lado esquerdo do rato e o elemento seleccionado deve ficar em destaque. De seguida, o utilizador selecciona o segundo elemento da mesma forma. O processamento é realizado e a funcionalidade desativa automaticamente;
13. O utilizador pode a qualquer momento desativar a funcionalidade com um clique no botão do lado direito do rato, mesmo depois de já ter seleccionado um elemento;
14. O código internamente verifica se os elementos seleccionados se intersectam, ou se a intersecção dos elementos acontece nos nós externos de ambos os elementos. Para a primeira situação é despoletada uma mensagem conforme ilustra a Figura 175;
15. Os requisitos previamente estipulados para a divisão em  $n$  partes que sejam análogos na aplicação da divisão dos elementos na intersecção também devem ser cumpridos, mais nomeadamente aqueles que dizem respeito às propriedades dos elementos.

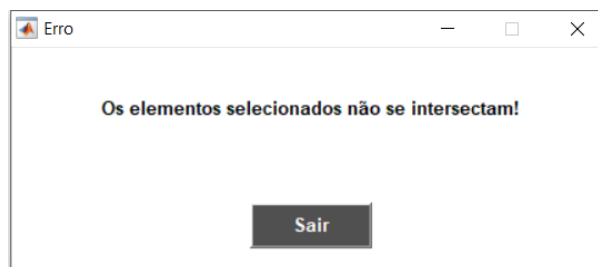


Figura 175 – Mensagem de erro que surge quando os elementos seleccionados não se intersectam

Por último, o utilizador tem à disposição no submenu do menu geometria a opção de numerar elementos e nós. Quando o utilizador selecciona esta opção e existem elementos na área de trabalho surge uma janela no ecrã conforme a representada na Figura 176.

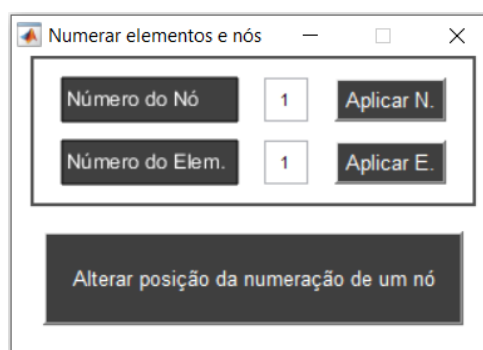


Figura 176 – Janela da funcionalidade numerar elementos e nós

Os principais requisitos definidos e implementados para esta funcionalidade são os seguintes:

1. O utilizador deve poder alterar manualmente, quer a numeração de um nó, quer a numeração de um elemento;
2. O utilizador pode alterar a posição em que se encontra a numeração de um nó na área de trabalho para uma nova desejada;
3. Ao selecionar a opção alterar posição, o cursor deve alterar a sua forma para o formato *fleur* quando se encontra sobre a numeração de um nó. Posteriormente, ao clicar sobre a numeração do nó, e enquanto o utilizador pressionar o botão do lado esquerdo do rato, o nó deve ser movimentado juntamente com o cursor até que o utilizador deixe de pressionar no botão. Nesta fase, a numeração passa a ser representada na nova localização. A funcionalidade é desativada com um clique no botão do lado direito do rato;
4. Quando o utilizador seleciona a opção aplicar nó ou aplicar elemento o formato do cursor altera para o formato *hand* quando se encontra sobre um nó ou sobre um elemento, respetivamente;
5. São só aceites numerações pertencentes ao conjunto de números reais maiores ou iguais a 1;
6. Caso o utilizador altere a numeração de um nó, é feita uma verificação automática para aferir se a numeração atribuída pertence a um nó existente na estrutura que se encontre na área de trabalho. Se se verificar que a numeração atribuída já pertence a um nó da estrutura, esse nó é renumerado e é-lhe atribuída a máxima numeração que se encontre na estrutura mais 1. O mesmo procedimento deve ocorrer na numeração de elementos;
7. As alterações de numeração, quer de nós, quer de elementos, devem-se repercutir em todas as variáveis que armazenem informação de funcionalidades afetadas por estas alterações, como por exemplo: propriedades geométricas, materiais e carregamentos.

Mediante o exposto, o utilizador fica conhecedor das funcionalidades disponibilizadas no menu geometria que compõem o programa FELP, e é então capaz de definir geometricamente uma estrutura que pretenda vir a analisar. Igualmente com recurso à informação disponibilizada na Tabela 34 consegue interpretar e compreender o código que compõe as funcionalidades descritas e identificar as principais variáveis nessas funções.

Tabela 34 – Principais variáveis criadas na fase definir estrutura.

Nome variável	Descrição	Tipo
coordenadasdosnosaux	informação das coordenadas dos nós	matriz
linha	informação das linhas ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
textelementnum	numeração elementos ( <i>graphic object</i> )	vetor coluna
textelementnos	numeração dos nós ( <i>graphic object</i> )	vetor coluna
numeros	numeração dos nós	vetor coluna
represeixolocal	representação do eixo local ( <i>graphic object</i> )	matriz

#### 3.2.4.4 Introdução das propriedades dos elementos

Logo após definir a geometria da estrutura na janela de trabalho, o utilizador pode definir as propriedades dos elementos. Nesse sentido, deve aceder ao menu propriedades, formado pelos seguintes itens, conforme Figura 177: definir/remover secção, definir/remover material, elemento de barra linear, elemento de barra quadrático, elemento de viga linear, elemento de viga quadrático, elemento de estrutura linear e elemento de viga quadrático.



Figura 177 – Menu propriedades

O utilizador pode ainda aceder a estas funcionalidades através dos botões assinalados a vermelho na barra de ferramentas lateral, conforme ilustra a Figura 178



Figura 178 – Barra de ferramentas lateral com botões de atalho do menu propriedades assinaladas

Quando o utilizador seleciona a opção de definir/remover secção surge no ecrã a janela ilustrada na Figura 179. Na janela encontra-se selecionado por defeito o tipo de secção

padrão, que permite ao utilizador aceder à informação das secções geométricas que se encontram na base de dados.



Figura 179 – Janela definir/remover secções, secção padrão

Caso a geometria pretendida não se encontre na base de dados disponibilizada, o utilizador pode optar por definir uma secção paramétrica ou uma secção genérica. Ao seleccionar o tipo de secção paramétrica, a informação na janela é alterada para o exemplo que pode ser visualizado na Figura 180 e, na opção genérica, a janela é alterada conforme ilustrado na Figura 181.



Figura 180 – Janela definir/remover secções, secção paramétrica

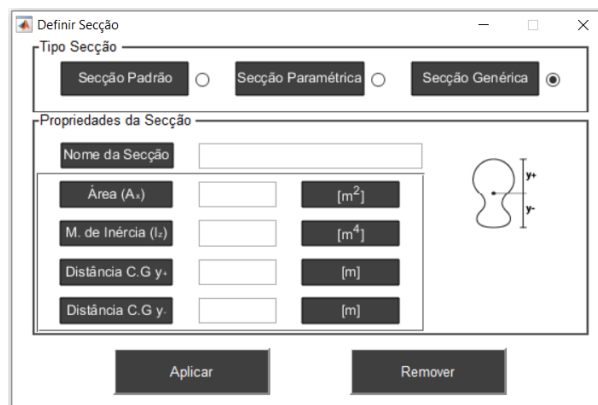


Figura 181 – Janela definir/remover secções, secção genérica

Os principais requisitos definidos e implementados para as diversas opções que permitem ao utilizador definir/remover uma secção são os seguintes:

1. O utilizador pode definir uma secção com recurso a uma base de dados, às dimensões gerais de uma secção, ou através da inserção das propriedades necessárias à fase de processamento;
2. Através da base de dados o utilizador apenas necessita de seleccionar a secção pretendida e aplicá-la ao elemento. Todas as propriedades devem ser automaticamente preenchidas na variável;
3. O utilizador pode rodar perfis do tipo U e do tipo L e aplicá-los em diferentes ângulos ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ );
4. Ao clicar no botão aplicar, depois de seleccionar uma secção, é verificada a existência de elementos na área de trabalho. Se não existirem elementos surge uma mensagem de erro no ecrã com essa informação;
5. Na opção de secções paramétricas o utilizador pode definir secções do tipo: tubo redondo, varão redondo, tubo quadrado e retangular, varão quadrado e retangular, e perfis com formato I, conforme pode ser visualizado na Figura 182;
6. O utilizador apenas necessita de inserir as dimensões gerais e todos os cálculos necessários para obter as propriedades necessárias à fase de processamento são efetuados automaticamente. Após a escolha do elemento, as propriedades são armazenadas na variável que contém a informação das secções dos elementos;
7. Caso o utilizador não preencha o campo de edição de texto referente ao nome da secção, ou se o número de caracteres for superior a 20, será despoletada uma mensagem de erro;
8. Para cada tipo de secção disponível na janela das secções paramétricas é realizada a verificação aos dados inseridos para que estes sejam considerados válidos, como por exemplo: se os dados são numéricos positivos e se a espessura não é superior às dimensões da secção;
9. Na circunstância de o utilizador optar por uma secção genérica devem ser preenchidas as informações referentes à área da secção, momento de inércia e distâncias do eixo neutro às fibras superior e inferior. As verificações enunciadas anteriormente também devem acontecer para esta opção;
10. Quando o utilizador pressiona o botão aplicar passa a ter acesso à área de trabalho e, ao passar o cursor do rato sobre um elemento, este deve ficar em destaque;
11. Quando o utilizador seleciona a opção aplicar, todos os elementos que já se encontrem com secção atribuída devem apresentar uma cor verde;
12. Caso o utilizador selecione um elemento já com as propriedades geométricas definidas, é despoletada a mensagem de erro da Figura 183 e a secção não é atribuída;
13. Ao remover as propriedades geométricas, os elementos que possuam estas definidas devem ser apresentados na cor verde na área de trabalho e, ao serem selecionados, devem voltar a apresentar a cor negra.

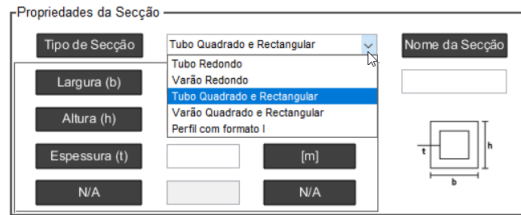


Figura 182 – Tipos de secções paramétricas

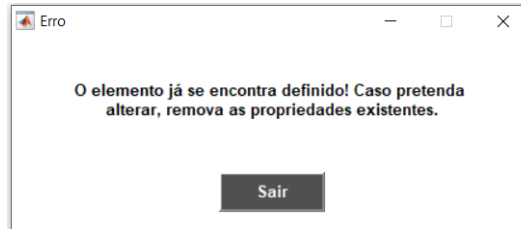


Figura 183 – Mensagem de erro que informa que as propriedades geométricas se encontram definidas

Posteriormente, o utilizador pode proceder à atribuição das propriedades materiais nos elementos existentes na área de trabalho e deve, para isso, seleccionar a opção definir/remover material. Esta interação provoca o surgimento na área de trabalho da janela ilustrada na Figura 184, que permite ao utilizador definir um nome para o material, o módulo de Young do material e o peso específico.

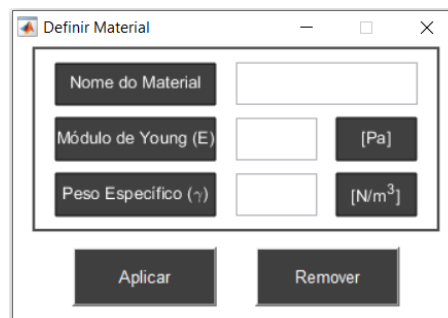


Figura 184 – Janela definir/remover material

Os requisitos implementados para esta funcionalidade são descritos de seguida:

1. O utilizador pode definir o módulo de Young e o peso específico do material;
2. Caso o utilizador não preencha o campo de edição de texto referente ao nome do material, ou se o número de caracteres for superior a 20, surge uma mensagem de erro no ecrã;
3. Os dados inseridos para o módulo de Young e peso específico são verificados internamente e só são aceites valores numéricos positivos;
4. Ao seleccionar a opção aplicar quando o cursor do rato se encontra sobre um elemento, este deve ficar em destaque;
5. Os elementos com propriedades materiais definidas quando a função aplicar é ativada devem ser apresentados na cor verde;
6. Caso o utilizador seleccione um elemento com propriedades definidas, deve surgir uma mensagem de erro e as propriedades não são aplicadas;

7. Ao remover as propriedades dos elementos, os que se encontram definidos devem ser apresentados na cor verde e e, ao ser seleccionados, passar para a cor negra;
8. Caso o utilizador pretenda remover as propriedades materiais de um elemento que não têm propriedades materiais definidas, deve surgir uma mensagem de erro no ecrã com essa informação.

De seguida, o utilizador deve proceder à seleção do tipo de elementos que se encontram na área de trabalho: elementos lineares (dois nós) ou quadráticos (três nós) conforme ilustra a Figura 185. Esta informação é relevante e utilizada posteriormente na fase de processamento uma vez que, dependendo do tipo de elemento, linear ou quadrático, varia a função utilizada na fase de processamento.

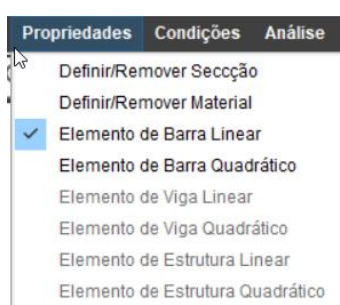


Figura 185 - Opção elementos de barra linear ativa

Note-se que as opções disponíveis variam consoante a escolha do modelo (barra, viga ou estrutura).

Por último, na Tabela 35 pode-se consultar a informação referente às principais variáveis utilizadas nesta fase do programa, assim como a sua tipologia e descrição.

Tabela 35 – Principais variáveis criadas na fase definir propriedades.

Nome variável	Descrição	Tipo
material	informação dos materiais aplicados na estrutura	célula
seccoes	informação das secções aplicadas na estrutura	célula
blvalue	informação opção de barra linear ativa/desativa	escalar
bqvalue	informação opção de barra quadrática ativa/desativa	escalar
vlvalue	informação opção de viga linear ativa/desativa	escalar
vqvalue	informação opção de viga quadrática ativa/desativa	escalar
elvalue	informação opção de estrutura linear ativa/desativa	escalar
eqvalue	informação opção de estrutura quadrática ativa/desativa	escalar

### 3.2.4.5 Introdução das condições fronteira, carregamentos e análise do problema

O utilizador procede nesta fase à definição das condições fronteira e aplica carregamentos, bastando para isso aceder ao submenu definir apoios ou definir carregamentos do menu condições conforme apresentado na Figura 186. Esta operação também pode ser realizada através dos botões de atalho da barra de ferramentas lateral assinalados a vermelho na Figura 187.



Figura 186 – Menu condições



Figura 187 – Botões de atalho das funcionalidades definir apoios e definir carregamentos

Ao selecionar a funcionalidade definir apoios surge no ecrã uma janela igual àquela que é apresentada na Figura 188. Nesta fase, o utilizador pode proceder à definição do tipo de apoios que pretende inserir numa estrutura que se encontre na área de trabalho.

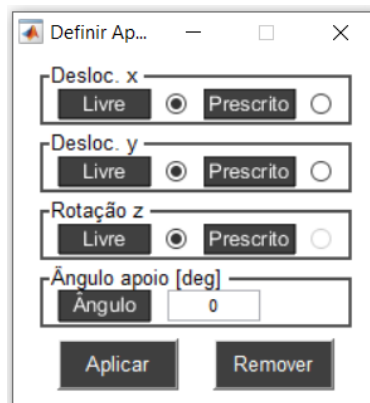


Figura 188 – Janela definir apoios, modelo de barra

Os principais requisitos definidos e implementados nesta funcionalidade podem ser consultados na listagem apresentada de seguida:

1. O utilizador pode definir apoios do tipo simples, duplo ou encastrado. Conforme o tipo de modelo em que se encontre, determinadas opções devem estar desativadas em consonância com as restrições imputadas pela formulação do modelo;

2. Para cada tipo de apoio o utilizador pode definir o ângulo de rotação com que este se encontra, tendo por base o eixo global. Um ângulo de rotação positivo é medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;
3. O ângulo inserido é sujeito a uma verificação interna aquando a seleção do botão aplicar e, caso não seja um valor numérico contido no intervalo fechado entre 0 e 359, é despoletada uma mensagem de erro conforme ilustra a Figura 189;
4. A combinação das opções disponíveis é alvo de uma verificação no momento de aplicação do apoio e, caso estas não se enquadrem no tipo de apoios permitidos, é despoletada uma mensagem de erro no ecrã;
5. Ao aplicar uma combinação de opções válida, o utilizador tem acesso à área de trabalho e, ao passar o cursor do rato na área envolvente de um nó, esta deve ficar circunscrita. Caso o utilizador clique no botão do lado esquerdo do rato com o cursor no interior da área do círculo, deve ser adicionado o apoio a esse nó, e a variável que armazena os dados referentes aos apoios na estrutura ser automaticamente preenchida;
6. Caso o utilizador seleccione um nó da estrutura que já se encontre definido surge uma mensagem de erro no ecrã a informar que esse nó já se encontra restringido, e a funcionalidade é desativada sem que ocorra a inserção do novo nó;
7. Ao seleccionar a opção remover o utilizador tem acesso à área de trabalho e, quando o cursor do rato se encontra sobre um apoio, este muda para o formato *hand*. Ao ser executado um clique no botão do lado esquerdo do rato, o apoio é removido da estrutura e da variável onde se encontra a sua informação armazenada;
8. Na eventualidade de não existirem apoios na estrutura e o utilizador seleccione a opção remover, é despoletada uma mensagem de erro a informar que não existem quaisquer apoios na estrutura;
9. A representação gráfica para os tipos de apoios disponíveis encontra-se definida na Figura 190.

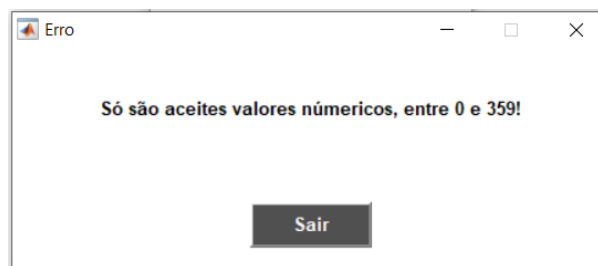


Figura 189 – Mensagem de erro para ângulos de apoios inválidos



Figura 190 – Tipos de apoios do programa: a) apoio simples; b) apoio duplo; c) encastramento

As rotações de apoio são refletidas na matriz de rigidez de acordo com o processo descrito na referência [98], conforme se pode analisar no excerto de código apresentado na Figura 191.

```
%MPC provocado pela rotação de apoio
%Por Katan temos que  $k_{GL}=TA*rigidez*TA'$ , TA é a matriz transformação em
função do ângulo do apoio e provoca a alteração da matriz global nas
posições dos nós afetados pela rotação do apoio em coordenadas locais

%Só a reação Horizontal e vertical é que sofre transformação as reações à
rotação mantêm-se iguais independentemente da rotação do
apoio, na decomposição das forças F e M não somam são forças
independentes
TA=eye(3*numerodenos,3*numerodenos);
i=1;
for e=1:numerodenos;
    if (ang(e)==0) &&(ang(e)==360)

elseif e==1
    TA(e*2-1,e*2-1)=cosd(ang(e));
    TA(e*2-1,e*2)=sind(ang(e));
    TA(e*2-1,e*2+1)=0;

    TA(e*2,e*2-1)=-sind(ang(e));
    TA(e*2,e*2)=cosd(ang(e));
    TA(e*2,e*2+1)=0;

    TA(e*2+1,e*2-1)=0;
    TA(e*2+1,e*2)=0;
    TA(e*2+1,e*2+1)=1;
else
    TA(e*2-1+i,e*2-1+i)=cosd(ang(e));
    TA(e*2-1+i,e*2+i)=sind(ang(e));
    TA(e*2-1+i,e*2+1+i)=0;

    TA(e*2+i,e*2-1+i)=-sind(ang(e));
    TA(e*2+i,e*2+i)=cosd(ang(e));
    TA(e*2+i,e*2+1+i)=0;

    TA(e*2+1+i,e*2-1+i)=0;
    TA(e*2+1+i,e*2+i)=0;
    TA(e*2+1+i,e*2+1+i)=1;
    i=i+1;
end
end
clear i
KGL= TA*rigidez*TA';
```

Figura 191 – Excerto do código do elemento de estrutura que lida com as rotações de apoios

Posteriormente, o utilizador pode proceder à aplicação de carregamentos na estrutura através da funcionalidade definir carregamentos. Quando esta funcionalidade é ativada surge no ecrã a janela representada na Figura 192, que coloca à disposição do utilizador diversas opções de carregamentos passíveis de serem aplicados à estrutura que se encontra na área de trabalho.

Figura 192 – Janela definir carregamentos

Os principais requisitos definidos e implementados para esta funcionalidade são os seguintes:

1. O utilizador deve poder optar entre três tipos diferentes de carregamentos: nodais, uniformes e trapezoidais definidos por dois pontos;
2. Para as opções de carregamentos uniformes e trapezoidais deve ser possível optar entre o sistema de eixos local e global;
3. Consoante o tipo de modelo do projeto determinadas opções de carregamento devem estar desativadas, como por exemplo: no modelo de barra não deve ser possível inserir esforços provocados por momentos nodais ou esforços ao longo do elemento perpendiculares ao eixo de desenvolvimento do elemento;
4. Quando o utilizador seleciona a funcionalidade aplicar é verificada a existência de elementos na área de trabalho e, caso estes não existam, é despoletada uma mensagem de erro no ecrã e a funcionalidade é desativada;
5. Ao aplicar o carregamento todos os dados inseridos são verificados e só são aceites valores numéricos. Na circunstância de a verificação falhar é despoletada uma mensagem de erro e a funcionalidade é desativada;
6. Quando o utilizador pretende aplicar um esforço nodal, depois de aceder à área de trabalho, ao aproximar o cursor de um nó de um elemento este é circunscrito. Caso o utilizador clique no botão do lado esquerdo do rato no interior desta área, o carregamento é aplicado ao nó graficamente, e a informação é armazenada na respetiva variável;
7. Na situação de o utilizador tentar aplicar um carregamento uniforme ou trapezoidal quando o cursor do rato se aproxima de um elemento, este deve ser destacado dos restantes. Ao ser pressionado o botão do lado esquerdo do rato

- sobre o elemento em destaque, a força é adicionada graficamente ao elemento e é armazenada na respetiva variável;
8. Sempre que é aplicada uma força, independentemente da opção escolhida, a funcionalidade é desativada automaticamente;
  9. O utilizador pode desativar a função aplicar a qualquer momento quando se encontra na área de trabalho, bastando para isso clicar no botão do lado direito do rato;
  10. O utilizador pode adicionar mais do que um carregamento uniforme ou trapezoidal a um mesmo elemento e a representação gráfica do carregamento seguinte é sempre escalada face à anterior, para se evitar sobreposições de carregamentos, o que tornaria confusa a sua leitura e interpretação na área de trabalho;
  11. A aplicação de carregamentos nodais diferencia-se do requisito anterior na aplicação de momentos nodais, uma vez que apenas é possível adicionar um esforço de momento por nó;
  12. Quando o utilizador ativa a funcionalidade remover, caso não existam carregamentos na estrutura, surge uma mensagem no ecrã a informar o utilizador e a funcionalidade remover é desativada;
  13. Para remover um carregamento o utilizador deve ter ativa a funcionalidade exibir carregamentos do menu vista e, quando o cursor do rato se encontrar sobre a informação do valor do carregamento, este altera para o formato *hand*. Caso seja dado um clique no botão do lado esquerdo do rato sobre esse elemento o carregamento é removido graficamente e da variável em que se encontra armazenado.

Na Figura 193 pode ser consultado um modelo de estrutura exemplo de um pórtico com diferentes tipos de carregamento aplicados e apoios. É ainda visível o sistema de eixos local de cada elemento, a numeração dos nós e dos elementos.

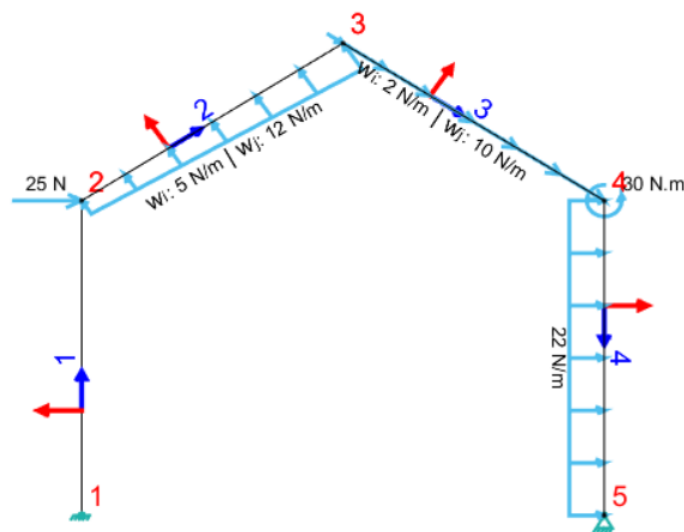


Figura 193 – Modelo de estrutura, exemplo de um pórtico

Conforme é evidente ao analisar a Figura 193, o utilizador predispõe de diversas opções de visualização gráfica que podem ser acedidas através do menu vista, conforme apresentado na Figura 194.

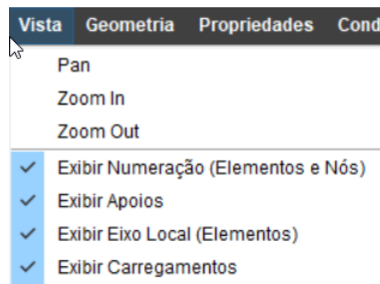


Figura 194 – Menu vista

Após os passos descritos anteriormente a estrutura encontra-se agora definida e apropriada ao processamento. Para iniciar o processamento, o utilizador deve aceder ao menu análise e seleccionar a opção calcular conforme representado na Figura 195.

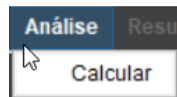


Figura 195 – Menu análise

Nesta fase é iniciado o processamento dos dados introduzidos por parte do utilizador e, antes de iniciar o processamento, são realizadas internamente diferentes verificações conforme enunciados na listagem seguinte:

1. Existem elementos na área de trabalho;
2. Todos os elementos existentes têm as propriedades geométricas definidas;
3. Todos os elementos possuem as propriedades materiais definidas;
4. Existe pelo menos um carregamento aplicado na estrutura;
5. Existe pelo menos um tipo de apoio aplicado na estrutura;
6. Os elementos estão assinalados como lineares ou quadráticos.

Se o programa falhar em alguma das verificações referidas anteriormente é despoletada uma mensagem de erro no ecrã a informar o utilizador do tipo de erro que ocorreu, e o processamento não é executado. Se todas as verificações iniciais se demonstrarem válidas, o processamento é iniciado e, caso ocorra algum tipo de instabilidade, é despoletada uma mensagem de erro conforme ilustra a Figura 196 e o processo de cálculo é interrompido.

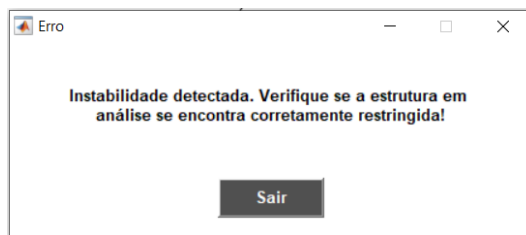


Figura 196 - Mensagem de erro despoletada quando o modelo em análise é instável

A detecção das instabilidades é feita de duas formas distintas. A primeira forma acontece na fase de obtenção da solução através da análise da matriz de rigidez e, caso esta seja singular, é despoletada a mensagem de erro na Figura 196. Na segunda fase, após a obtenção da solução, verifica-se se a estrutura em análise se encontra em equilíbrio estático. Após todas as verificações e conclusão do processo de cálculo, fica disponível o acesso ao menu resultados, que até ao momento se encontrava bloqueado.

Na Tabela 36 pode-se consultar a informação referente às principais variáveis utilizadas nesta fase do programa assim como a sua tipologia e descrição.

Tabela 36 – Principais variáveis criadas nas fases definir condições e análise.

Nome variável	Descrição	Tipo
carregamentos	informação dos carregamentos aplicados	célula
apoios	informação dos apoios aplicados	célula
deformada	informação da estrutura deformada ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
faxiais1 a 3	informação dos diagramas das forças axiais ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
forcacorte1 a 3	informação dos diagramas das forças de corte ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
momentofletor1 a 3	informação dos diagramas dos momentos fletores ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
tensoesnapol	informação dos mapas de cor das tensões normais (axiais; lineares) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
tensoesnaqpol	informação dos mapas de cor das tensões normais (axiais; quadráticos) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
MinsigmaA	menor valor da tensão normal (axial)	escalar
MaxsigmaA	maior valor da tensão normal (axial)	escalar
tensoesnmpol	informação dos mapas de cor das tensões normais (momentos; lineares) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
tensoesnmqpol	informação dos mapas de cor das tensões normais (momentos; quadr.) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
MinsigmaM	menor valor da tensão normal (momentos fletores)	escalar
MaxsigmaM	maior valor da tensão normal (momentos fletores)	escalar
tensoescpol	informação dos mapas de cor das tensões de corte média (lineares) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha

tensoescqpol	informação dos mapas de cor das tensões de corte média (quadráticos) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
MinTau	menor valor da tensão de corte	escalar
MaxTau	maior valor da tensão de corte	escalar
tensoesvmopol	informação dos mapas de cor das tensões de von Mises (superiores;lineares) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
tensoesvmsqpol	informação dos mapas de cor das tensões de von Mises (superiores;quadr.) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
MaxVonMises	maior valor da tensão de von Mises (fibras superiores)	escalar
MinVonMises	menor valor da tensão de von Mises (fibras superiores)	escalar
tensoesvmipol	informação dos mapas de cor das tensões de von Mises (inferiores;lineares) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
tensoesvmiqpol	informação dos mapas de cor das tensões de von Mises (inferiores;quadr.) ( <i>graphic object</i> )	vetor linha
MaxVonMisesi	maior valor da tensão de von Mises (fibras inferiores)	escalar
MinVonMisesi	menor valor da tensão de von Mises (fibras inferiores)	escalar
dadostabelargl	informação das reações globais na tabela de resultados	matriz
dadostabelarl	informação das reações locais na tabela de resultados	matriz
dadostabelad	informação dos deslocamentos e rotações na tabela de resultados	matriz
dadostabelaf	informação das forças na tabela de resultados	matriz
dadostabelat	informação das tensões na tabela de resultados	matriz

### 3.2.4.6 Apresentação de resultados

Nesta fase o menu resultados é desbloqueado, assim como a pop-up resultados que se encontra na barra de ferramentas superior. O utilizador pode consultar os resultados da análise de cálculo de três formas distintas, conforme ilustra a Figura 197.



Figura 197 – Menu e pop-up resultados

Dependendo do tipo de modelo de análise em que o utilizador se encontra existem opções do submenu diagramas e do submenu mapas de cores que não se encontram acessíveis, conforme se pode consultar na Figura 198 dado que, para o modelo em questão, os resultados são inexistentes.



Figura 198 – Opções da funcionalidade ativas para o modelo de barra: a) diagramas; b) mapas de cores

Caso o utilizador opte pela opção de consultar os resultados sobre a forma de tabelas a área de trabalho, que anteriormente apresentava a estrutura, passa a apresentar uma tabela, conforme visível na Figura 199. Na parte inferior pode-se alternar entre as cinco opções diferentes de consulta dos resultados existentes (reações em coordenadas globais, reações em coordenadas locais, deslocamentos, forças e tensões).

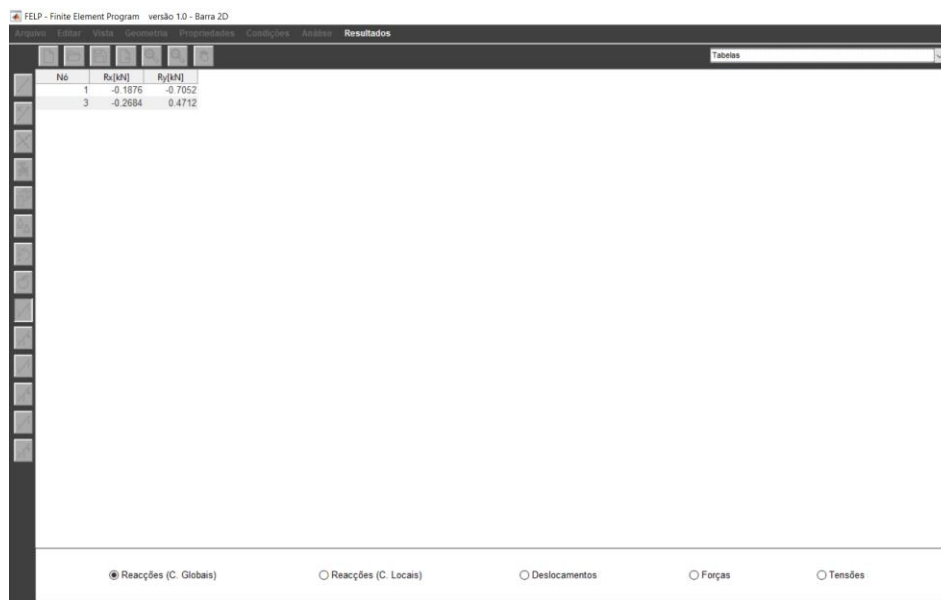


Figura 199 - Exemplo de resultados apresentados sobre a forma de tabela

Os diagramas seguem a convenção de sinais definida no subcapítulo 3.1, e deve ainda ter-se em consideração que esforços axiais e os esforços de corte positivos são apresentados no lado positivo da direção do eixo  $y$  local do elemento. Na Figura 200 e Figura 201 são apresentados os diagramas e mapas de cores obtidos na análise de uma estrutura exemplo num modelo de barra, com o intuito de elucidar e clarificar o leitor sobre a forma como os resultados são apresentados.

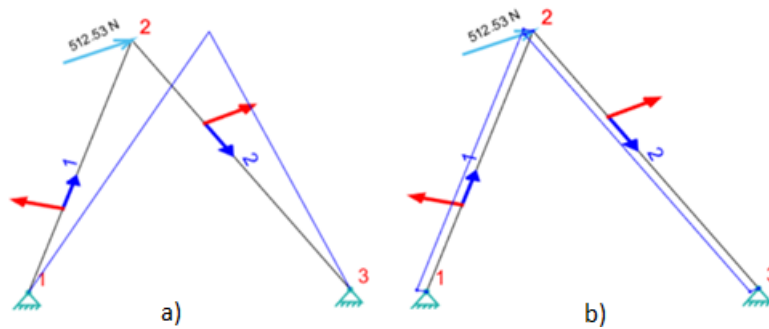


Figura 200 – a) diagrama da estrutura deformada; b) diagrama das forças axiais

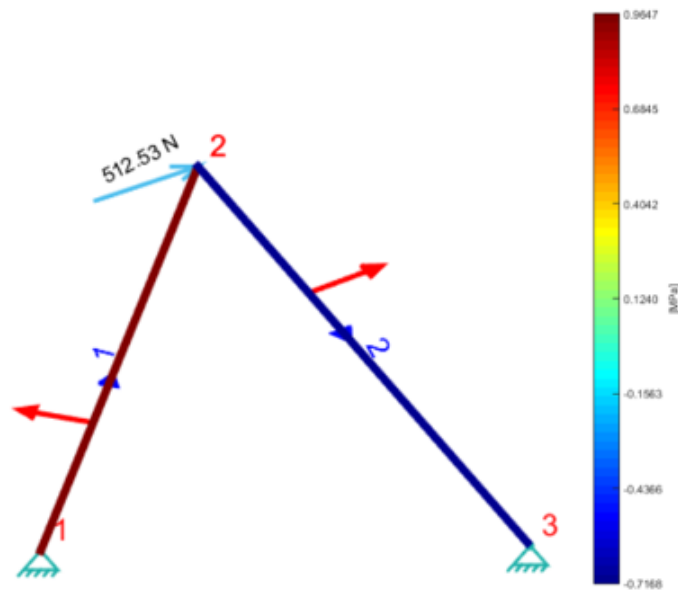


Figura 201 – Mapas de cores da tensão normal (axial)

### 3.2.5 Validação do *software* desenvolvido

Com o propósito de se validar o programa desenvolvido procede-se à resolução dos modelos de teste apresentados no subcapítulo 3.1, e os resultados obtidos são agora comparados com os esperados já apresentados também no subcapítulo 3.1. Nesta fase apenas se procede à análise de dois dos problemas modelos utilizados anteriormente, uma vez que o programa desenvolvido utiliza as formulações já previamente validadas.

#### 3.2.5.1 Elementos de barra 2D

##### 1º Problema modelo do subcapítulo 3.1.1.4

Primeiramente define-se a geometria, as propriedades e condições da estrutura apresentada na Figura 51 conforme pode ser consultado na Figura 202.

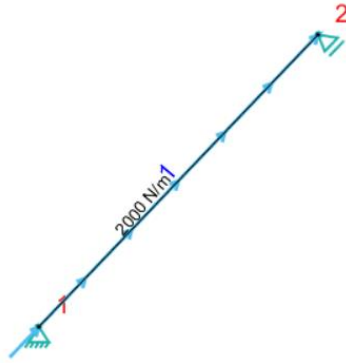


Figura 202 – Primeiro problema modelo de barra definido no programa FEA

De seguida, procede-se à fase de análise e obtêm-se os resultados apresentados de seguida considerando uma análise para elementos de barra lineares. Os resultados obtidos para as opções do submenu diagramas podem ser consultados na Figura 203, para as opções do submenu mapas de cores na Figura 204 e os resultados das tabelas podem ser consultados na Figura 205.

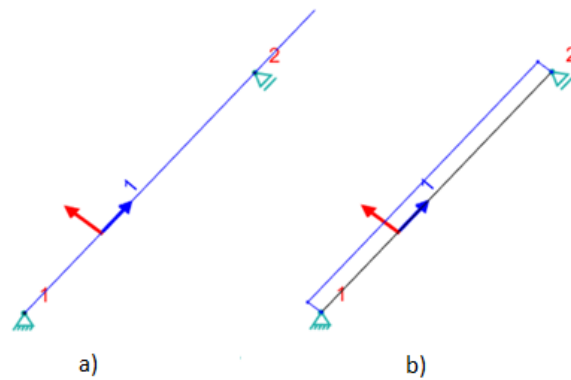


Figura 203 – Resultados do primeiro problema modelo (linear). a) estrutura deformada; b) esforços axiais

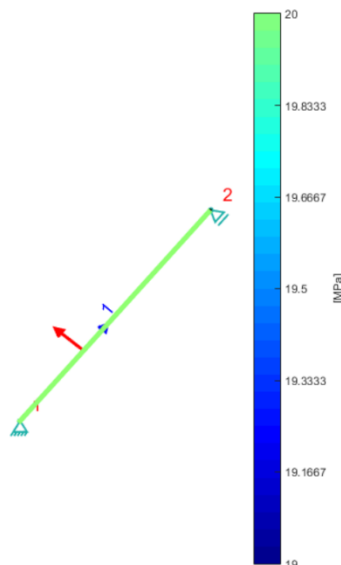


Figura 204 – Resultados do primeiro problema modelo (linear), tensão normal (axial)



Nó	R <sub>x</sub> [kN]	R <sub>y</sub> [kN]	Nó	r <sub>x</sub> [kN]	r <sub>y</sub> [kN]	Elemento	Nó	U1[mm]	U2[mm]
1	-2.5712	-3.0642	1	-2.5712	-3.0642	1	1	0	0
2	0	0	2	0	0	1-2 (L/2)		0.0918	0.1094
a)			b)			c)			

Número Elemento	f <sub>x</sub> (x=0) [kN]	f <sub>x</sub> (x=L/2) [kN]	f <sub>x</sub> (x=L) [kN]
1	4.0000	2.0000	0

d)

Número Elemento	f <sub>x</sub> /A <sub>x</sub> (x=0) [MPa]	f <sub>x</sub> /A <sub>x</sub> (x=L/2) [MPa]	f <sub>x</sub> /A <sub>x</sub> (x=L) [MPa]
1	39.9999	20.0000	0

e)

Figura 208 – Resultados do primeiro problema modelo (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças axiais; e) tensão normal axial

3º Problema modelo do subcapítulo 3.1.1.4

Inicialmente define-se a geometria, as propriedades e condições da estrutura apresentada na Figura 73 e pode ser consultado na Figura 209.

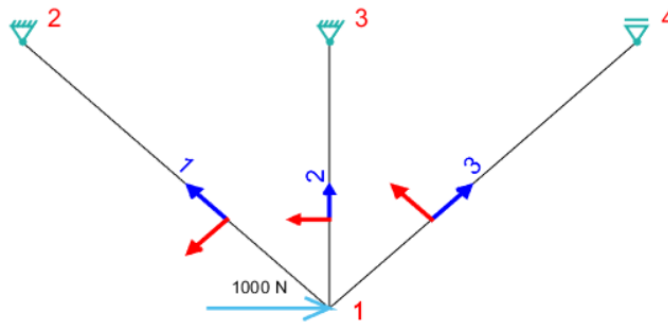


Figura 209 – Terceiro problema modelo de barra definido no programa FELP

Posteriormente, define-se que a estrutura é composta por elementos do tipo de barra linear e procede-se à fase de processamento. Os resultados obtidos para esta simulação são apresentados na Figura 210, Figura 211 e Figura 212.

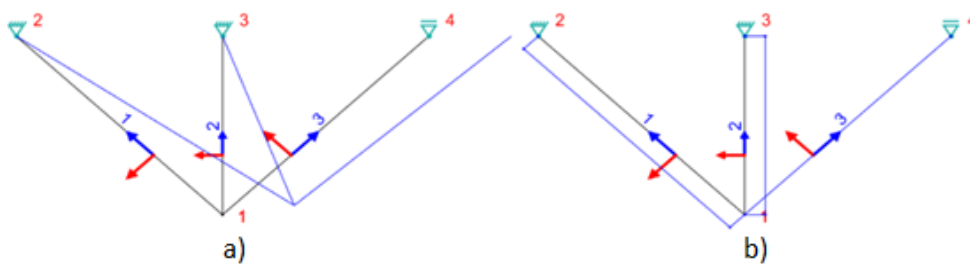


Figura 210 – Resultados do terceiro problema modelo (linear). a) estrutura deformada; b) esforços axiais



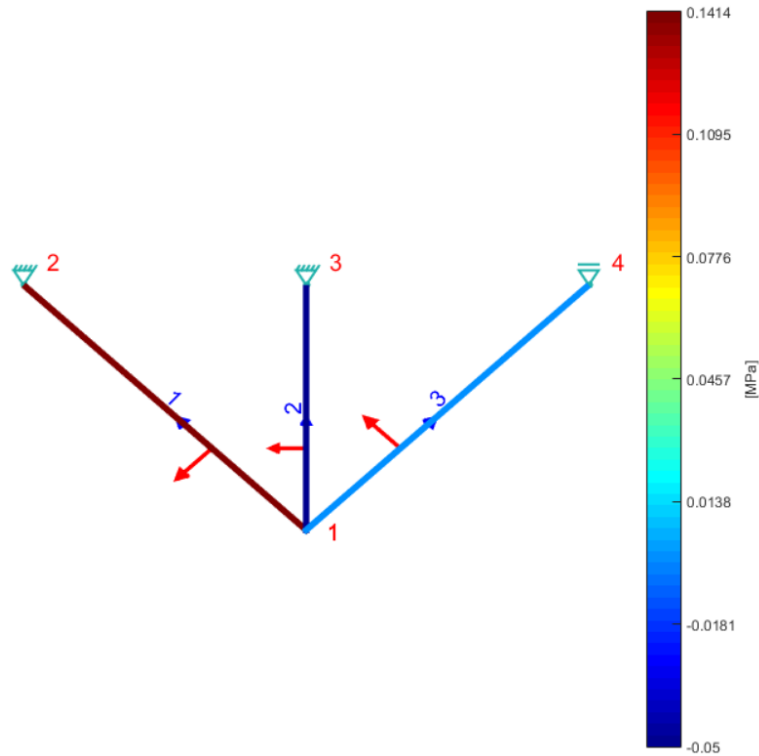


Figura 214 – Resultados do terceiro problema modelo (quadrático), tensão normal (axial)

Nó	Rx[kN]	Ry[kN]	Nó	rx[kN]	ry[kN]	Elemento	Nó	U1[mm]	U2[mm]
2	-1.0000	1.0000	2	1.0000	-1.0000	1	1	0.0033	5.0000e-04
3	0	-1.0000	3	0	1.0000	1-2 (L/2)	2	0.0017	2.5000e-04
4	0	0	4	0	0	2	2	0	0
a)			b)			c)			
Número Elemento	fx(x=0) [kN]	fx(x=L/2) [kN]	fx(x=L) [kN]						
1	1.4142	1.4142	1.4142						
2	-1	-1	-1						
3	0	0	0						
d)									
Número Elemento	fx/Ax(x=0) [MPa]	fx/Ax(x=L/2) [MPa]	fx/Ax(x=L) [MPa]						
1	0.1414	0.1414	0.1414						
2	-0.0500	-0.0500	-0.0500						
3	0	0	0						
e)									

Figura 215 – Resultados do terceiro problema modelo (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças axiais; e) tensão normal axial

Finalmente, pode-se afirmar que os resultados obtidos para ambos os problemas modelo analisados são corretos, e se encontram de acordo com o esperado. Esta afirmação é efetuada com base na comparação dos resultados apresentados anteriormente com aqueles apresentados nas tabelas e figuras do subcapítulo 3.1.1.4.

### 3.2.5.2 Elementos de viga 2D

#### 1º Problema modelo do subcapítulo 3.1.2.4

Numa fase inicial define-se a geometria, as propriedades e condições da estrutura apresentada na Figura 84 no programa FELP, conforme se pode visualizar na Figura 216.

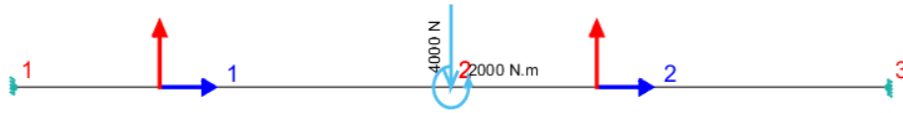


Figura 216 - Primeiro problema modelo de viga definido no programa FELP

Logo de seguida, define-se que a estrutura é composta por elementos do tipo viga linear e procede-se à fase de cálculo. Os resultados obtidos para esta simulação podem ser consultados da Figura 217 à Figura 222.

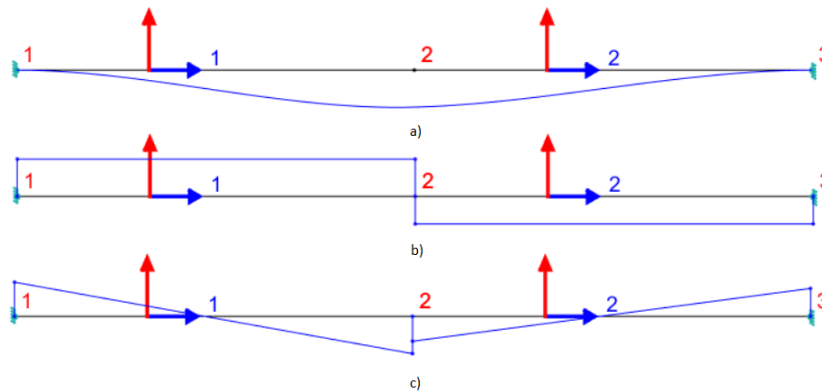


Figura 217 – Resultados do primeiro problema modelo de viga (linear). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores

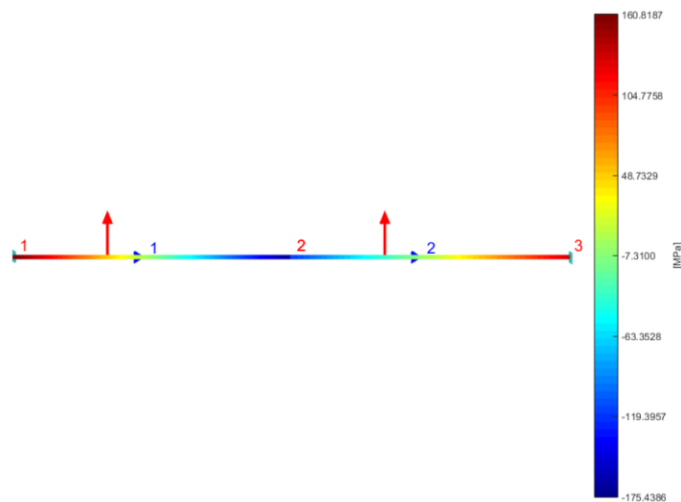


Figura 218 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)

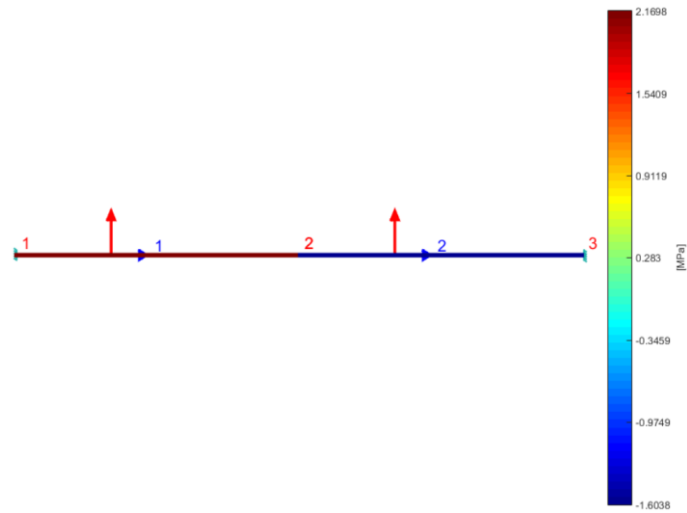


Figura 219 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão corte

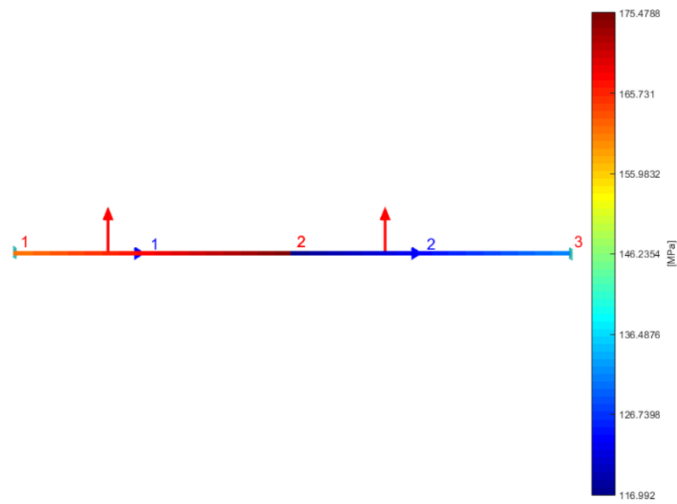


Figura 220 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores)

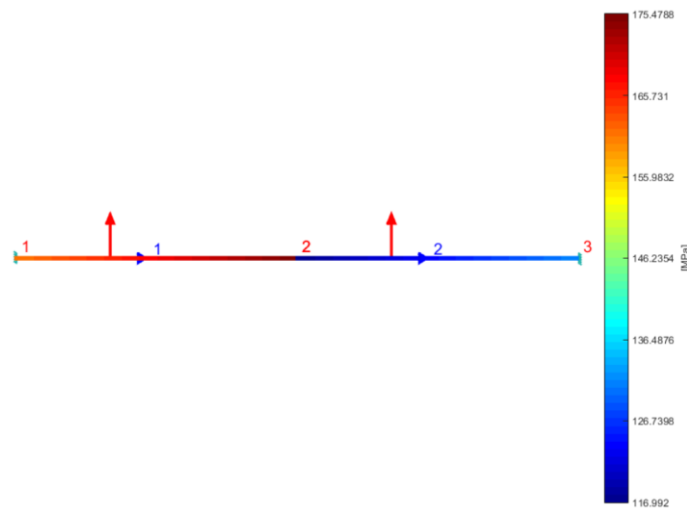


Figura 221 – Resultados do primeiro problema modelo viga (linear), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores)





## 3º Problema modelo do subcapítulo 3.1.2.4

Começa-se por definir a geometria, as propriedades e condições da estrutura apresentada na Figura 101 no programa FELP, conforme se pode visualizar na Figura 228.

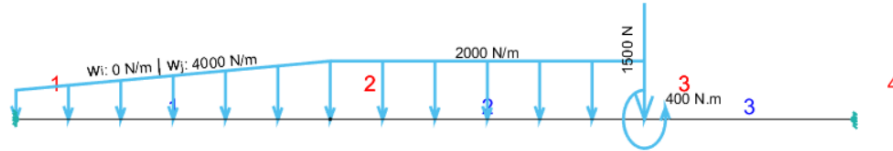


Figura 228 – Terceiro problema modelo de viga definido no programa FELP

De seguida define-se que a estrutura é composta por elementos do tipo viga linear e procede-se à fase de cálculo. Os resultados obtidos para esta simulação podem ser consultados da Figura 229 à Figura 233.

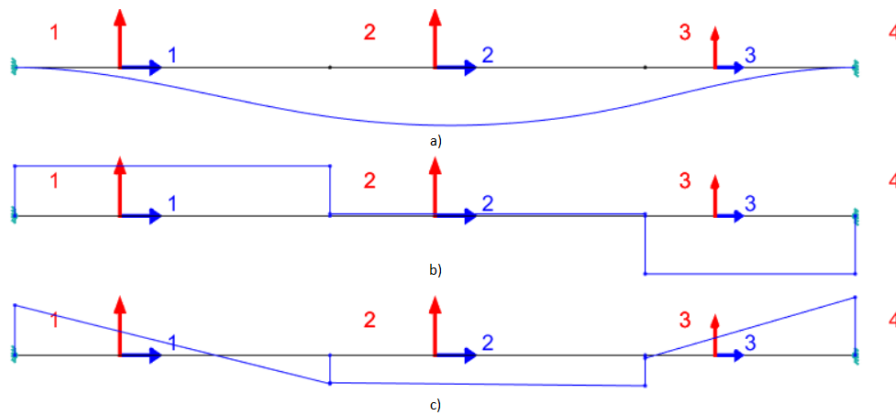


Figura 229 – Resultados do terceiro problema modelo de viga (linear). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores

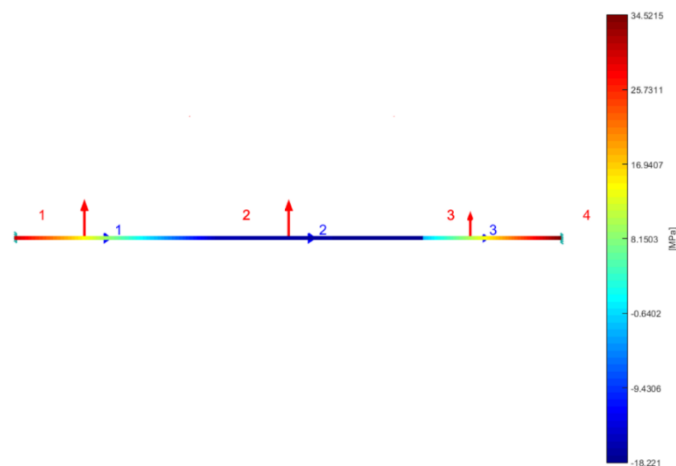


Figura 230 – Resultados do terceiro problema modelo viga (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)



Procede-se à realização de uma nova simulação, mas considerando para efeitos de cálculo elementos de viga quadráticos. Os resultados podem ser consultados da Figura 234 à Figura 238.

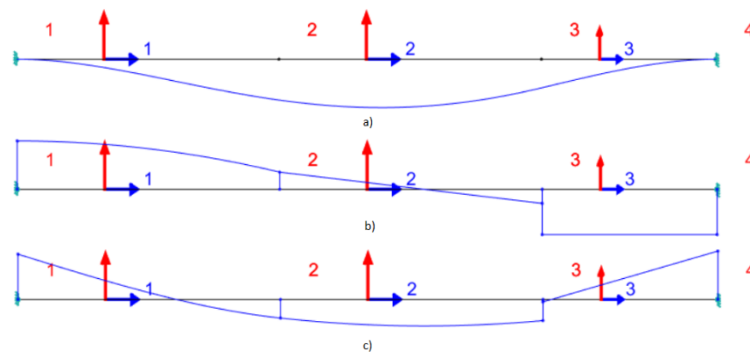


Figura 234 – Resultados do terceiro problema modelo de viga (quadrático). a) estrutura deformada; b) forças de corte; c) momentos fletores

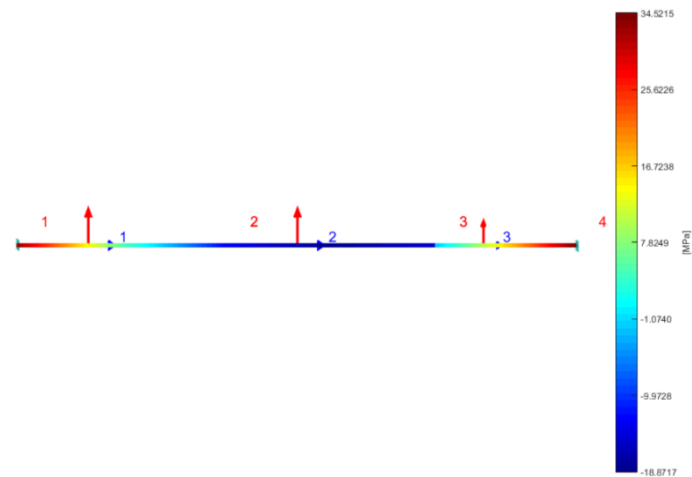


Figura 235 – Resultados do terceiro problema modelo viga (quadrático), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)

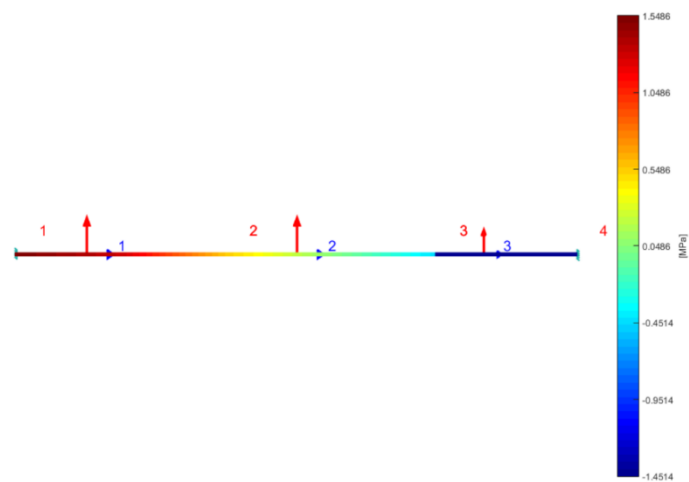


Figura 236 – Resultados do terceiro problema modelo viga (quadrático), tensão corte



### 3.2.5.3 Elementos de estrutura 2D

#### 1º Problema modelo do subcapítulo 3.1.3.4

Inicialmente define-se a geometria, as propriedades e condições da estrutura apresentada na Figura 123 no programa FELP, conforme se pode visualizar na Figura 239.

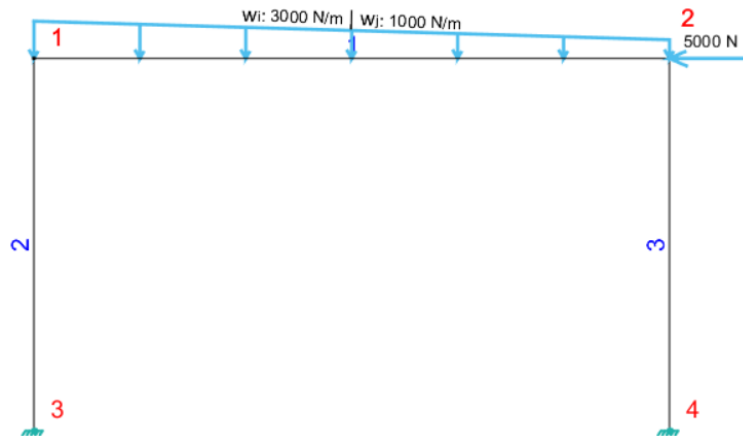


Figura 239 – Primeiro problema modelo de estrutura definido no programa FELP

Posteriormente, é realizada uma primeira simulação do modelo considerando elementos de estrutura lineares. Os resultados obtidos podem ser consultados da Figura 240 à Figura 246.

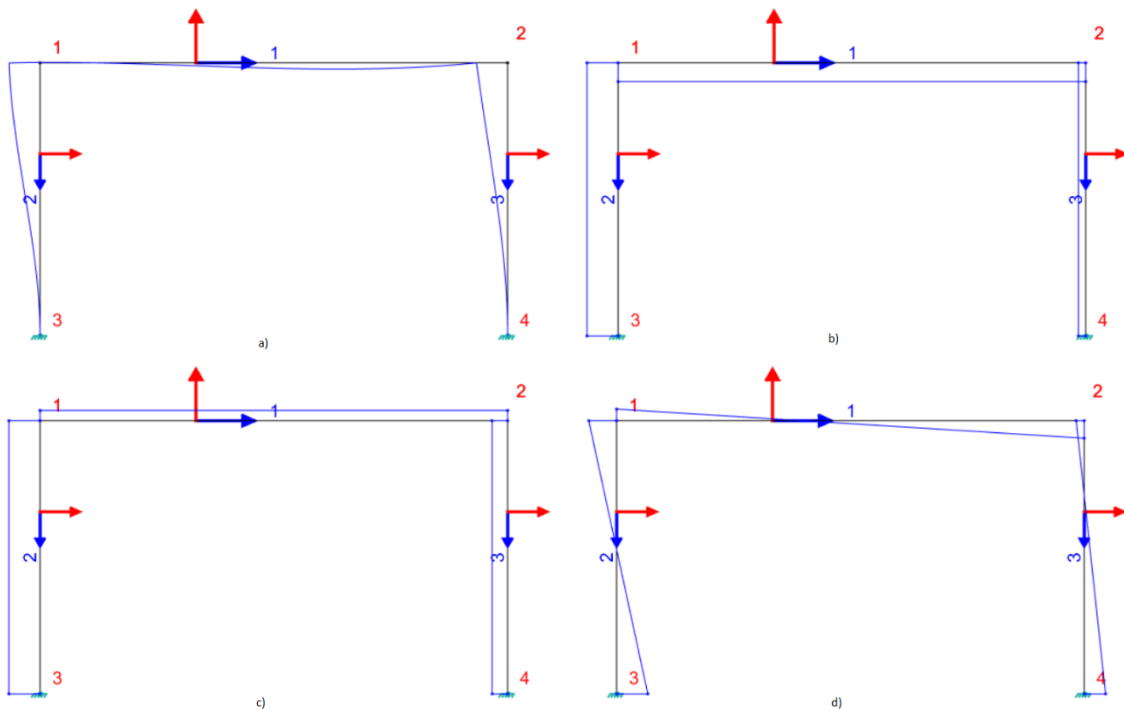


Figura 240 – Resultados do primeiro problema modelo de estrutura (linear). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores

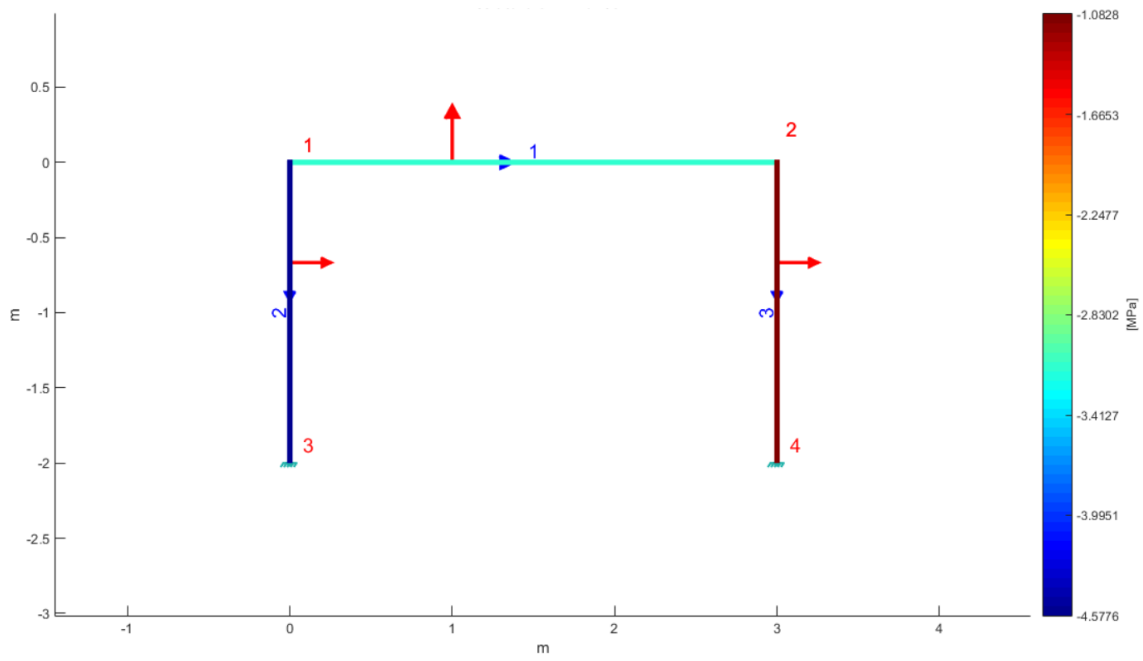


Figura 241 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (axial)

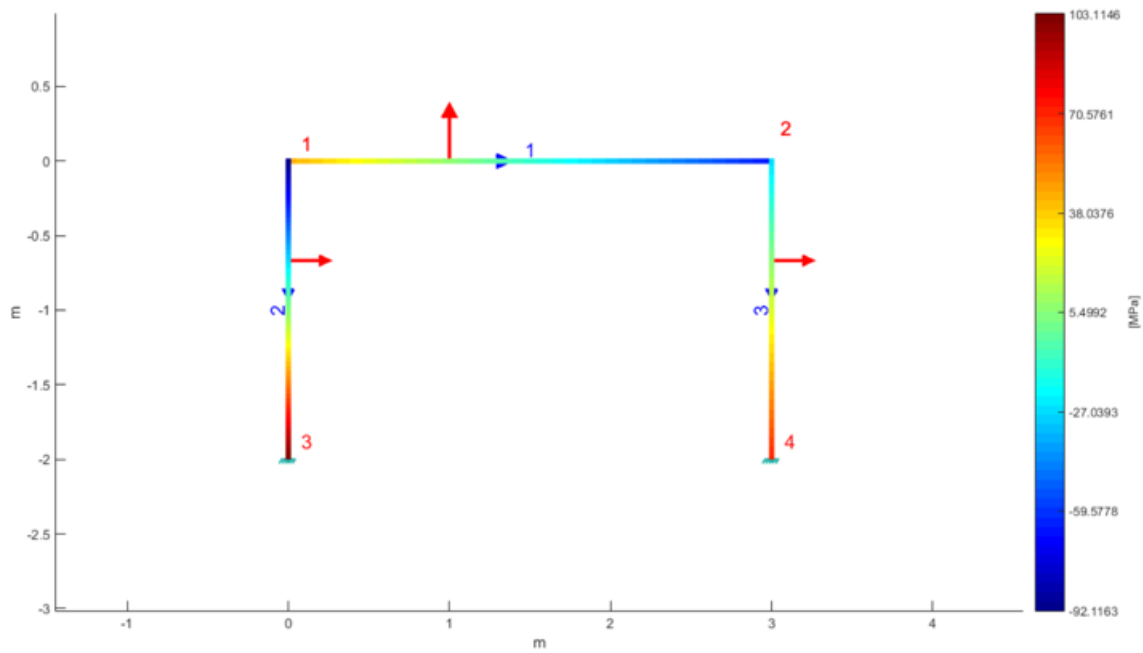


Figura 242 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)

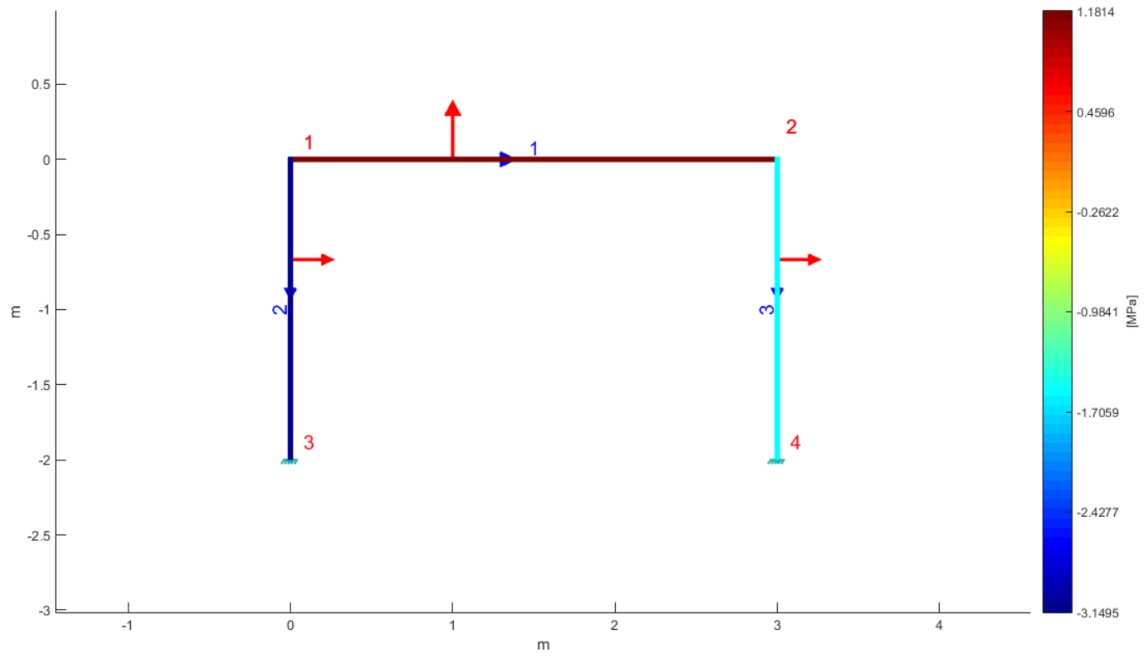


Figura 243 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão corte

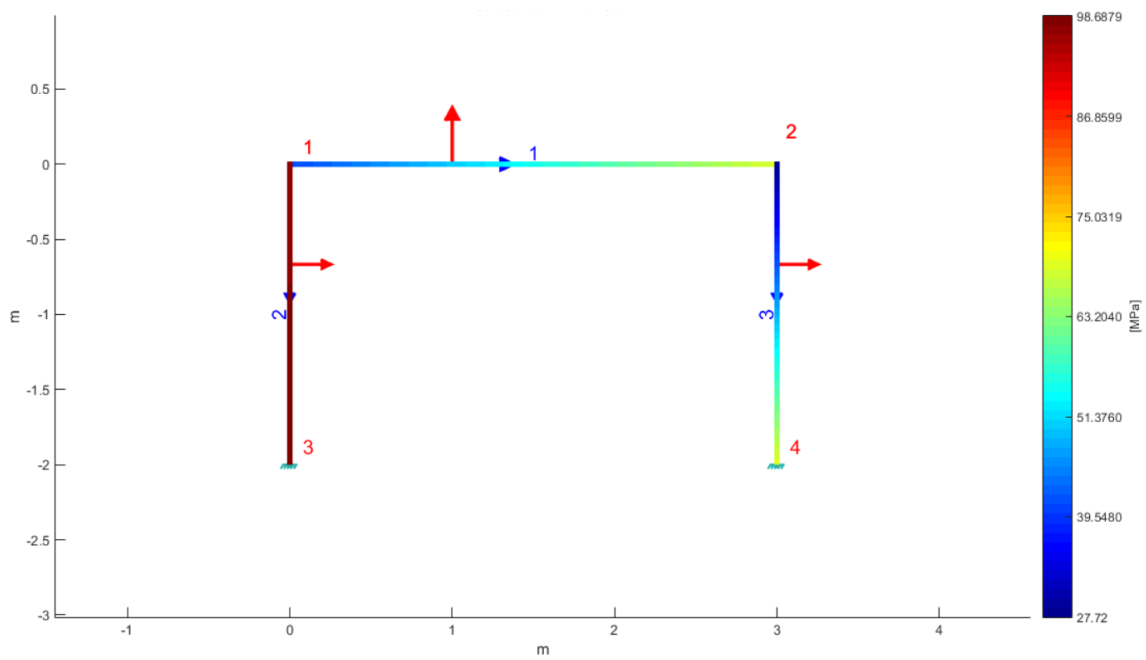


Figura 244 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores)



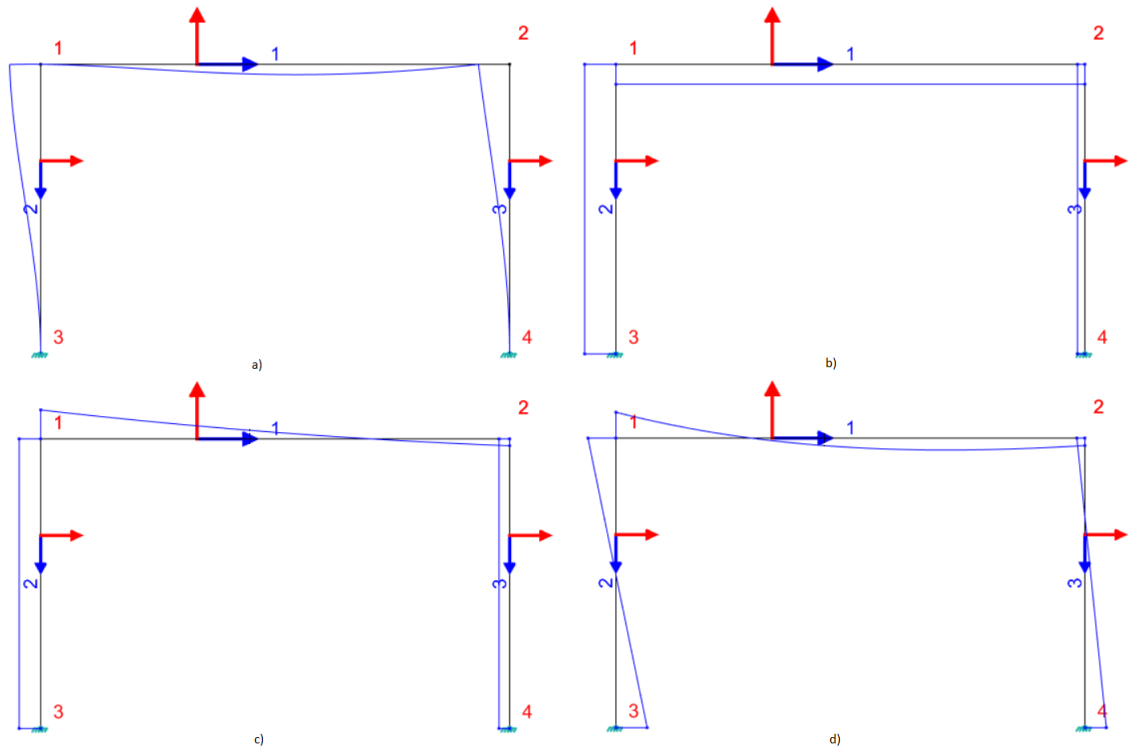


Figura 247 – Resultados do primeiro problema modelo de estrutura (quadrático). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores

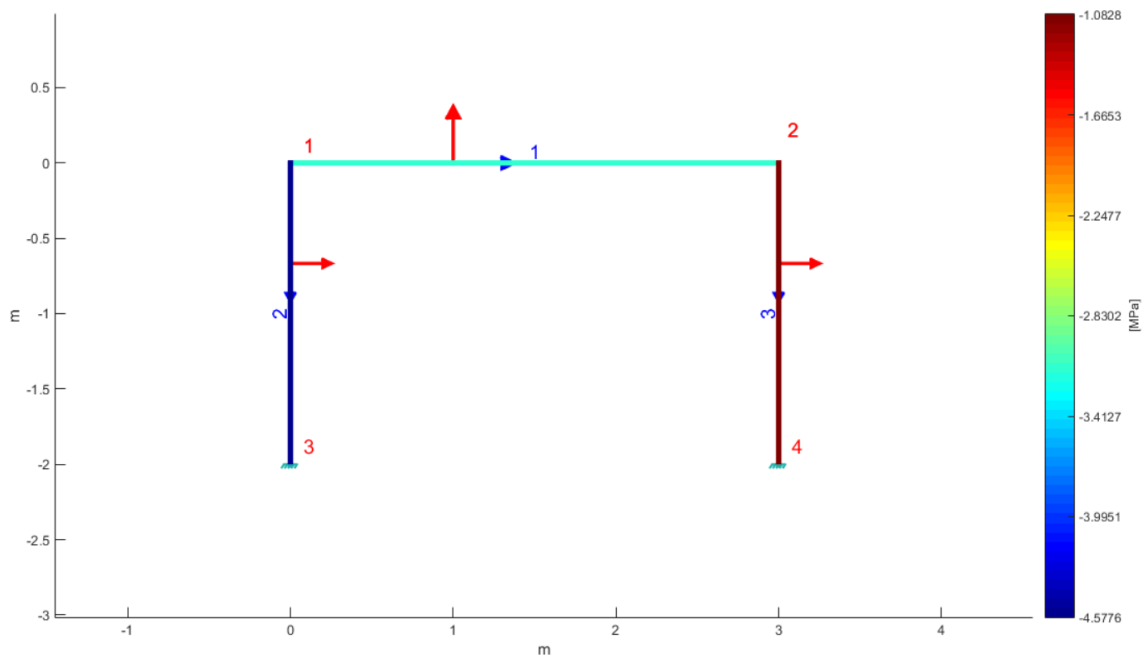


Figura 248 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (axial)

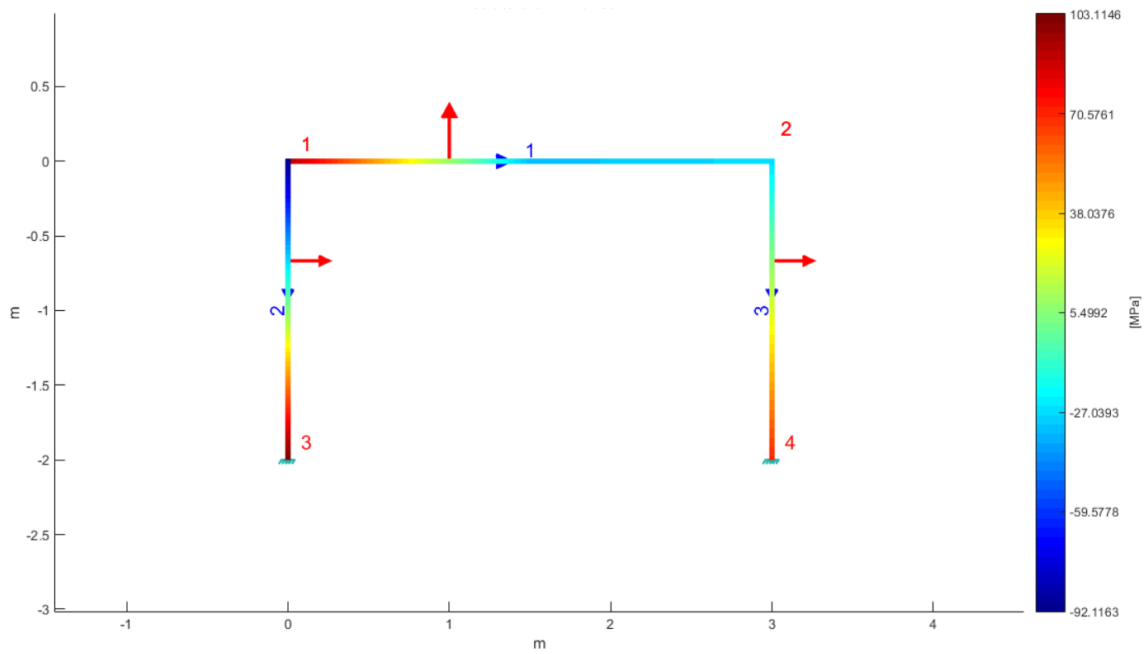


Figura 249 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)

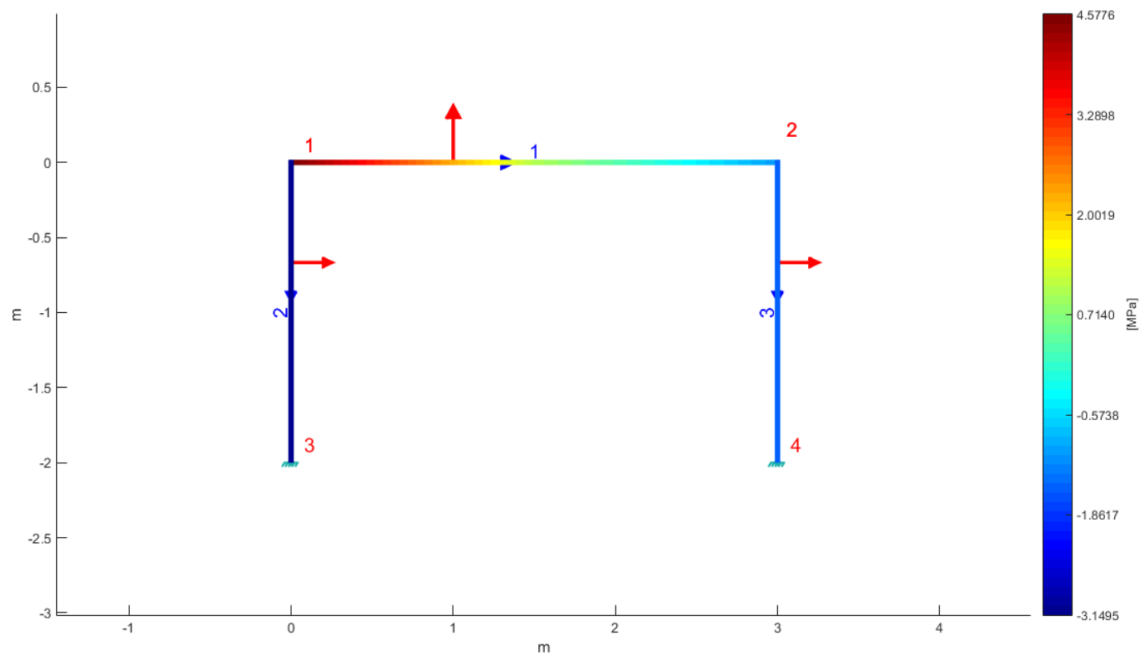


Figura 250 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão corte

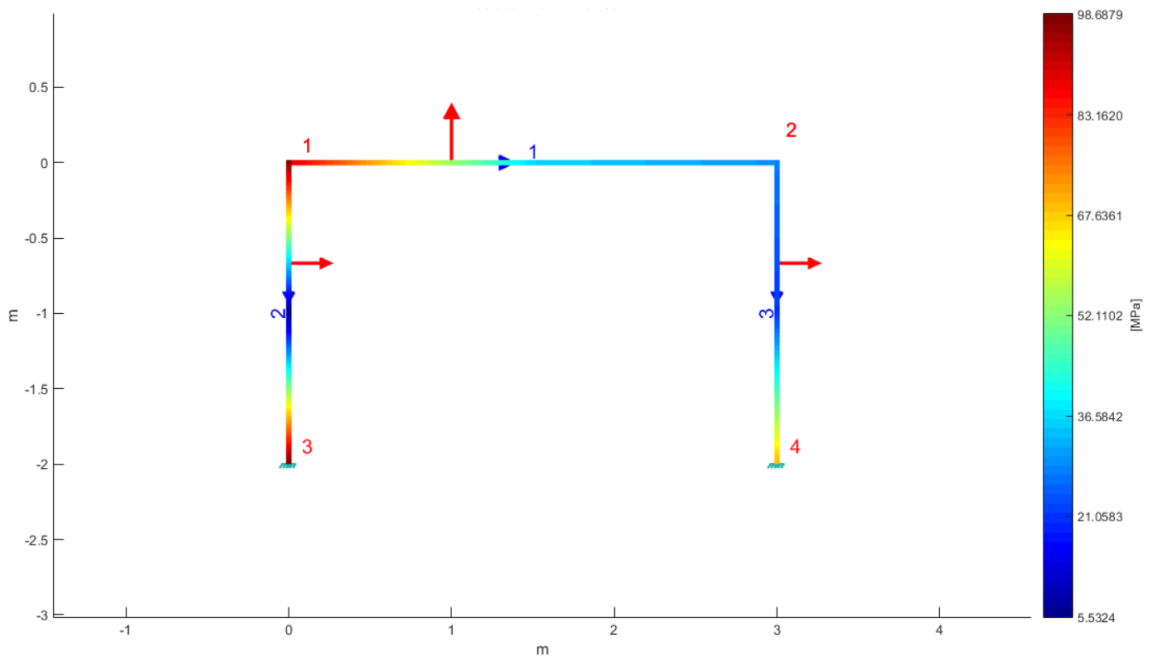


Figura 251 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras superiores)

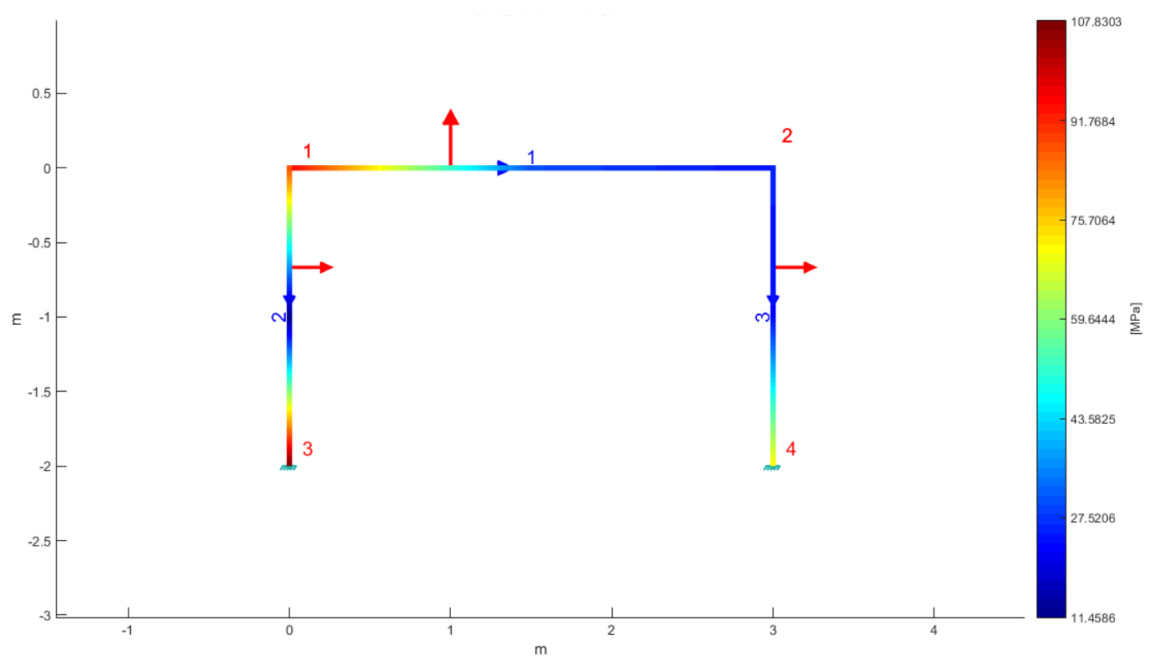


Figura 252 – Resultados do primeiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores)



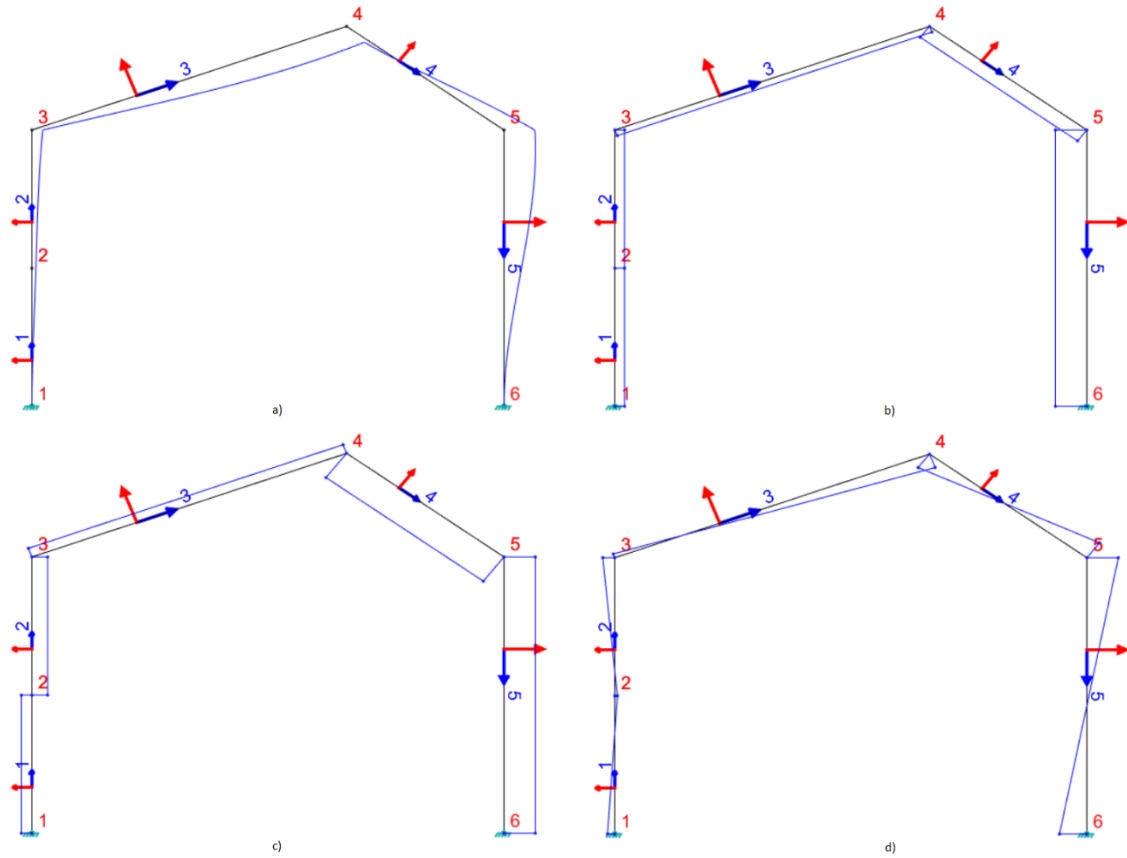


Figura 255 – Resultados do terceiro problema modelo de estrutura (linear). a) estrutura deformada; b) forças axiais; c) forças de corte; d) momentos fletores

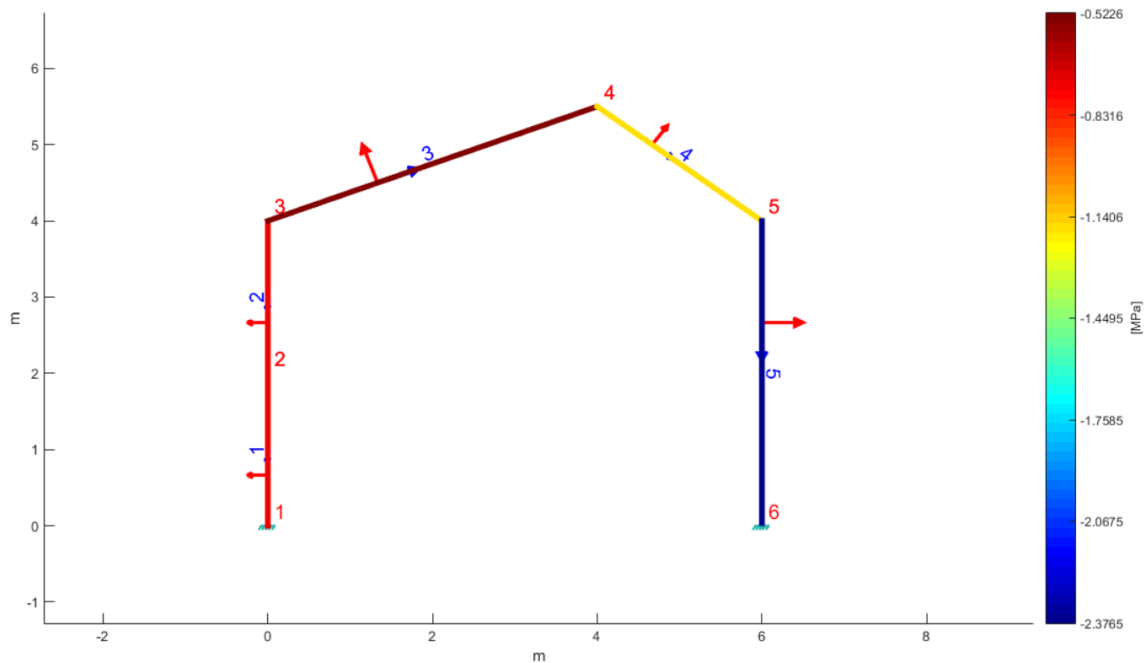


Figura 256 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (axial)

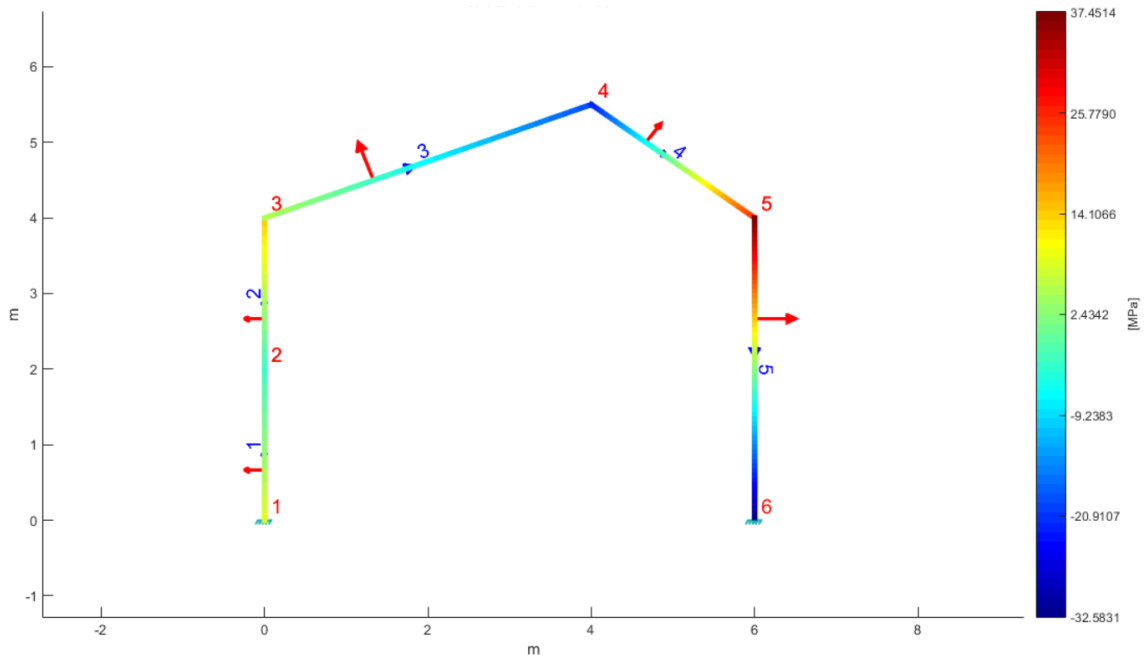


Figura 257 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)

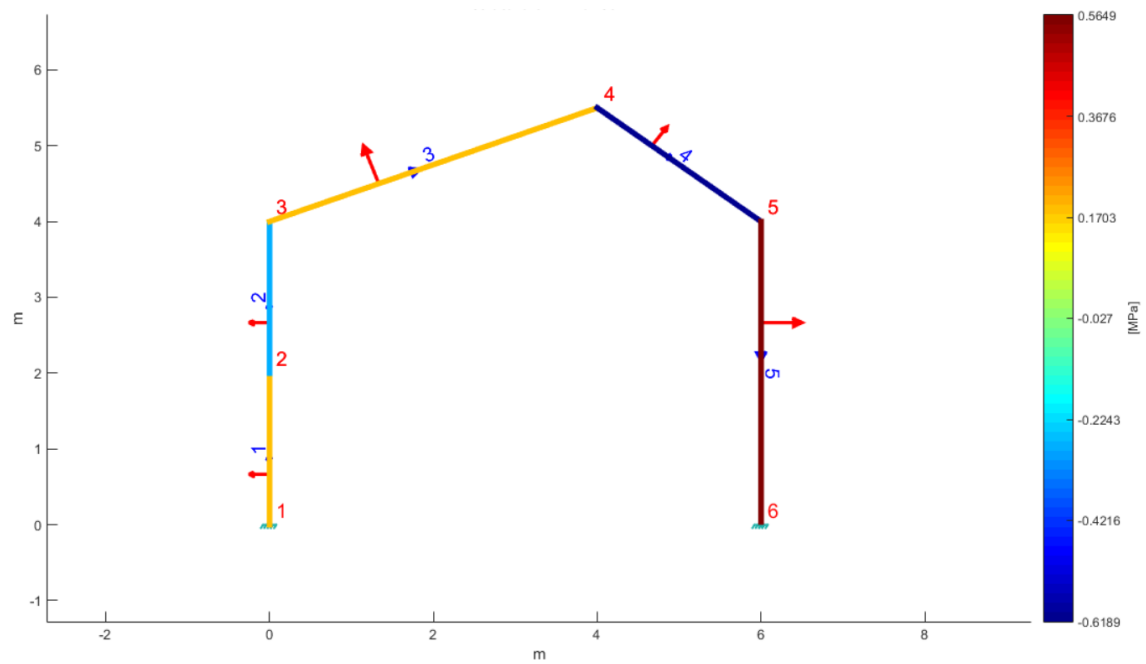


Figura 258 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão corte

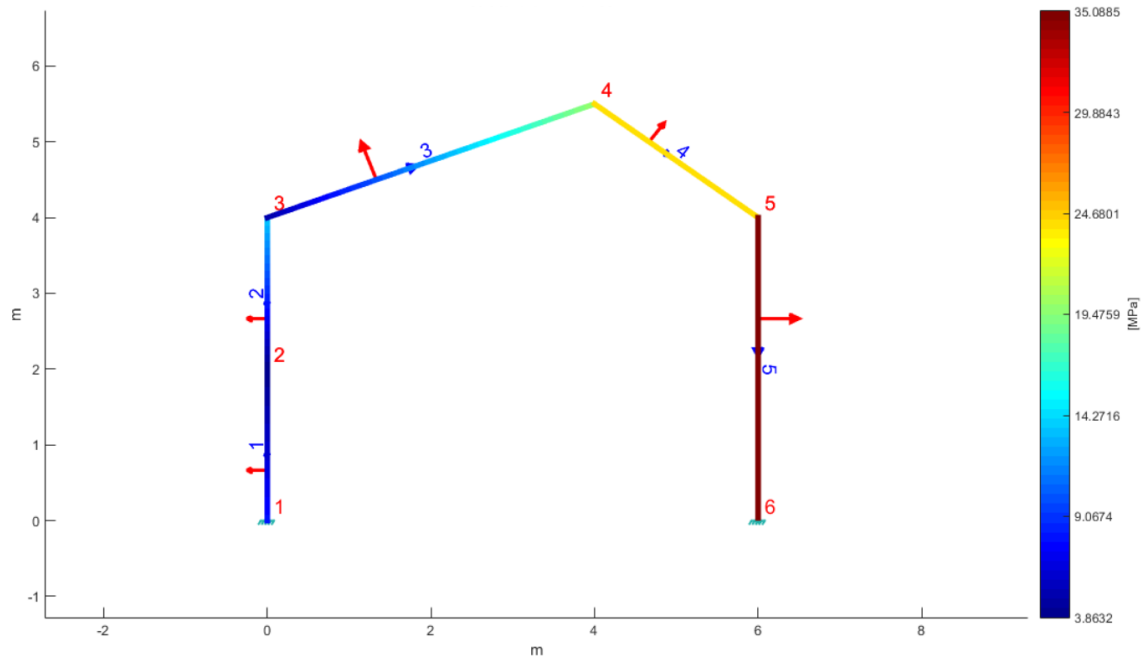


Figura 259 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras superiores)

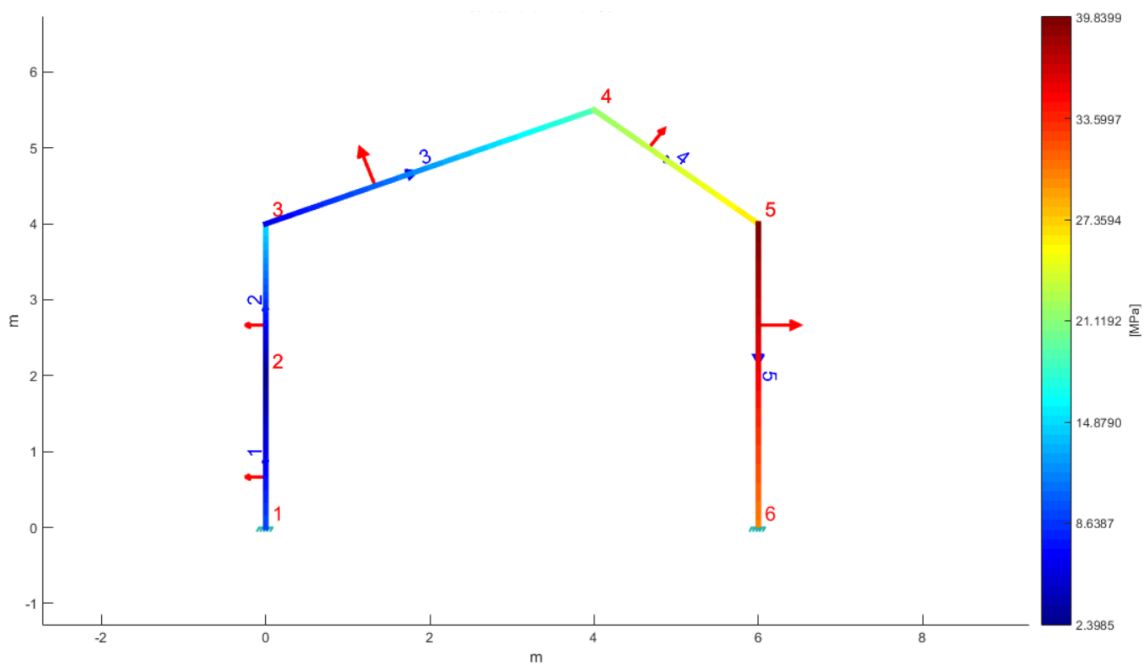


Figura 260 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (linear), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores)



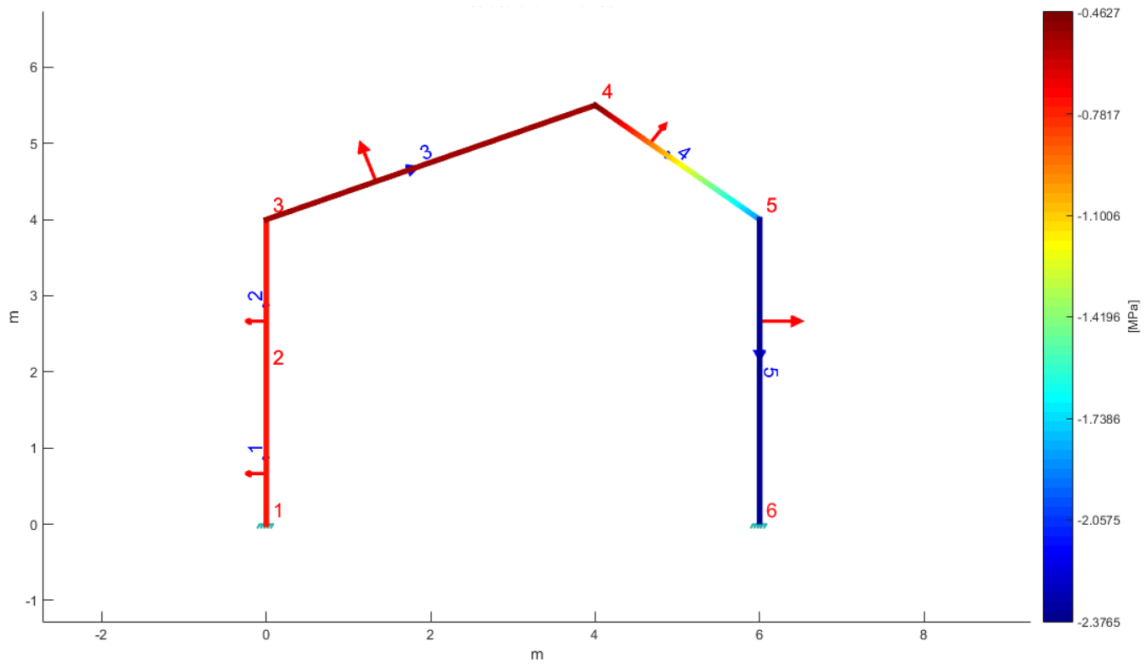


Figura 263 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (axial)

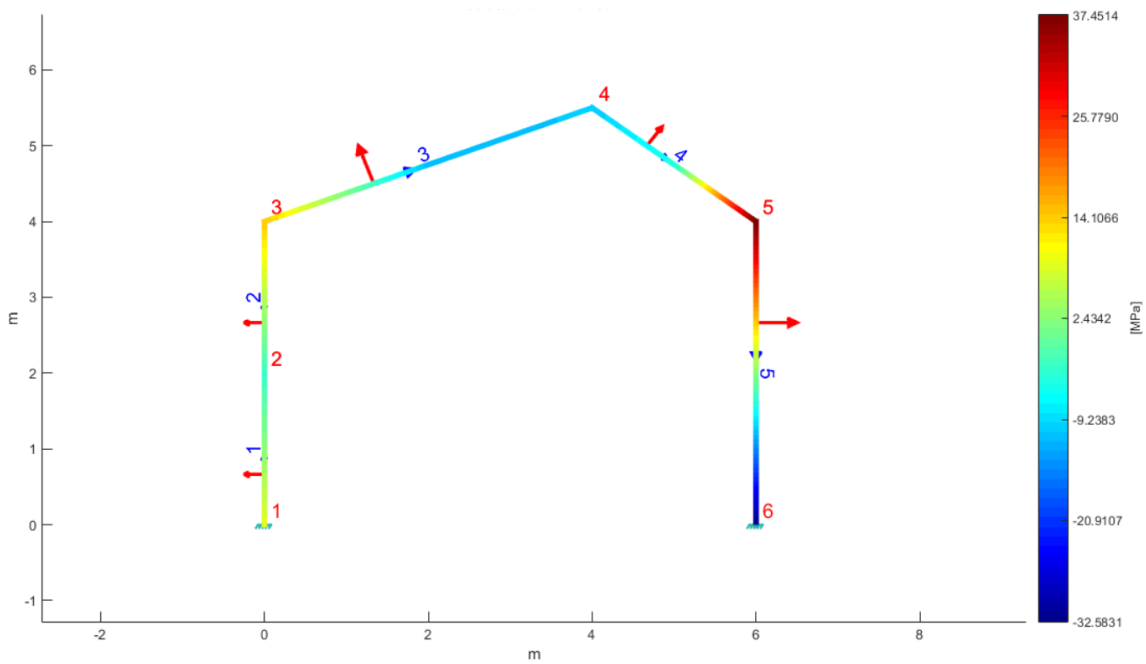


Figura 264 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão normal (momentos fletores, fibras superiores)

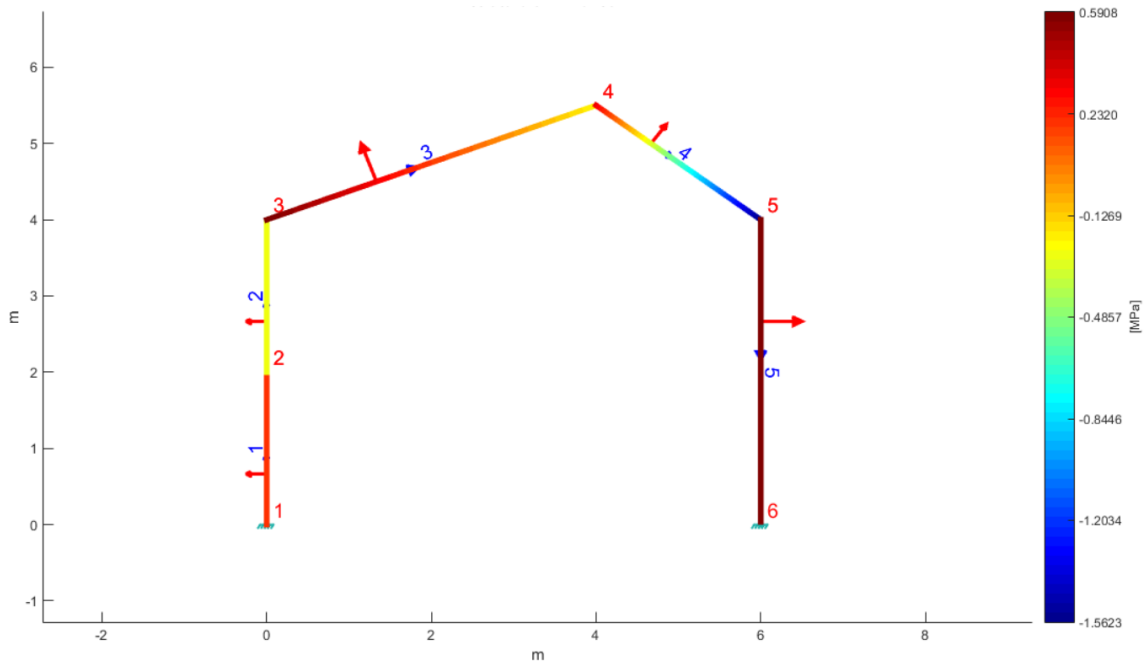


Figura 265 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão corte

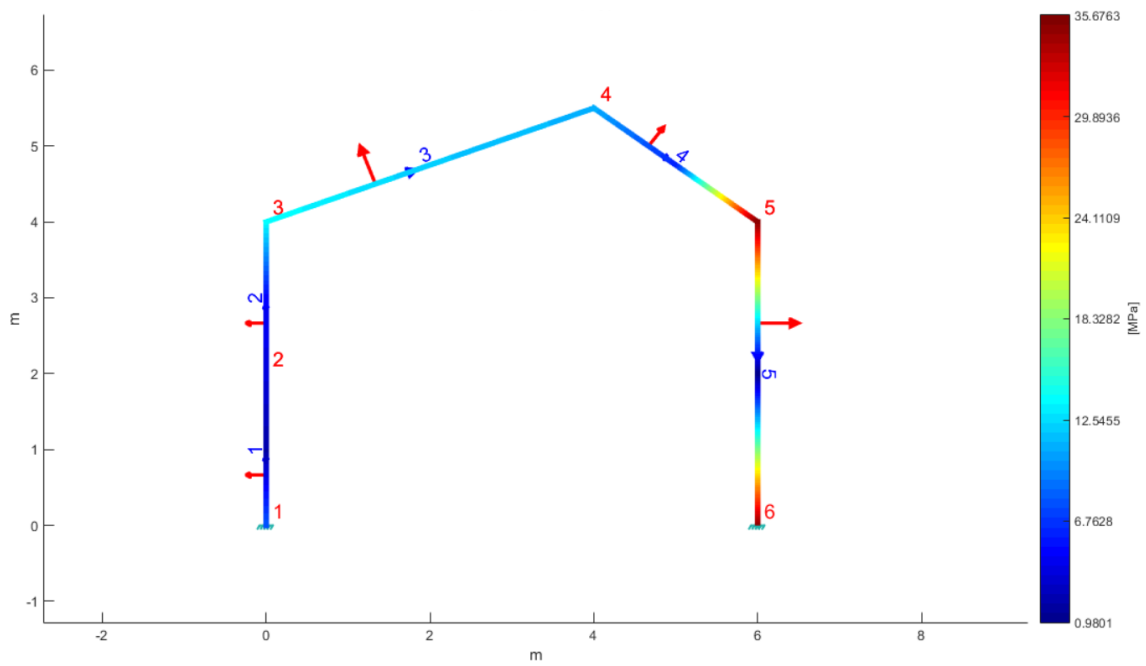


Figura 266 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras superiores)

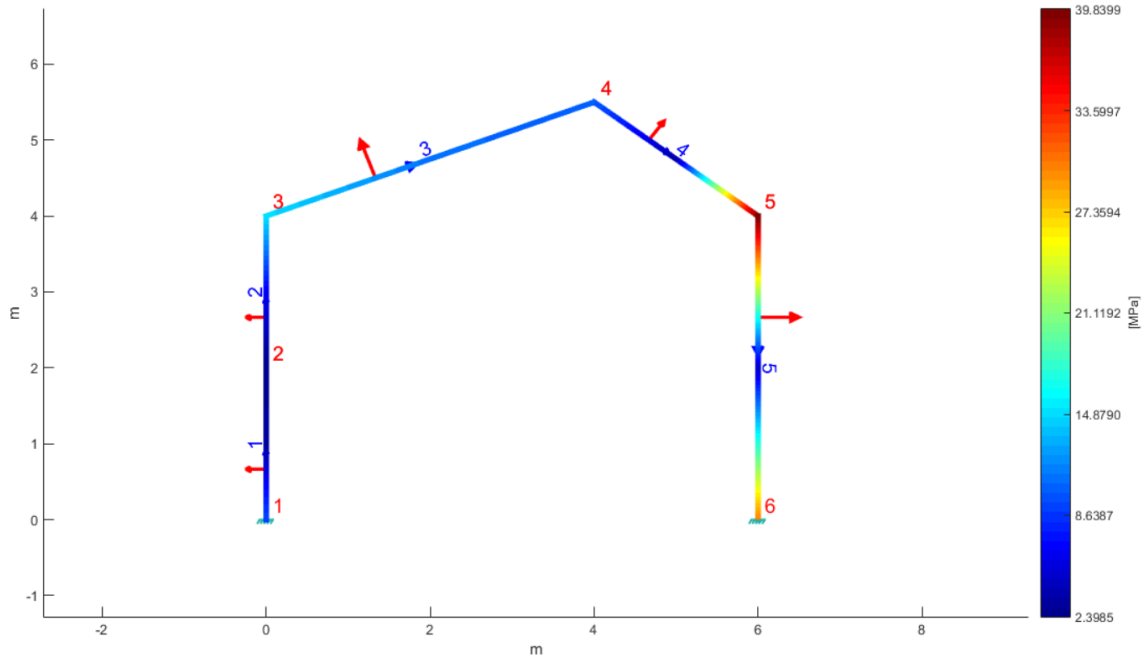


Figura 267 – Resultados do terceiro problema modelo estrutura (quadrático), tensão equivalente von Mises (fibras inferiores)

Nó	Rx[kN]	Ry[kN]	Mz[kNm]	Nó	rx[kN]	ry[kN]	Mz[kNm]	Elemento	Nó	U1[mm]	U2[mm]	$\theta$ [rad]
1	-0.2012	0.7809	0.2960	1	-0.2012	0.7809	0.2960	1	1	0	0	0
6	-0.5988	2.5191	1.1143	6	-0.5988	2.5191	1.1143	2	2	0.3346	-0.0037	-5.7123e-04

a) b)

Número Elemento	fx(x=0) [kN]	fx(x=L/2) [kN]	fx(x=L) [kN]	fy(x=0) [kN]	fy(x=L/2) [kN]	fy(x=L) [kN]	Mz(x=0) [kNm]	Mz(x=L/2) [kNm]	Mz(x=L) [kNm]
1	-0.7809	-0.7809	-0.7809	0.2012	0.2012	0.2012	0.2960	0.0948	-0.1064
2	-0.7809	-0.7809	-0.7809	-0.2988	-0.2988	-0.2988	-0.1064	0.1923	0.4911
3	-0.5540	-0.5540	-0.5540	0.6263	0.1991	-0.2281	0.4911	-0.3903	-0.3592
4	-0.4905	-1.2405	-1.9905	0.3440	-0.6560	-1.6560	-0.3592	-0.1642	1.2808
5	-2.5191	-2.5191	-2.5191	0.5988	0.5988	0.5988	1.2808	0.0832	-1.1143

d)

Número Elemento	$\sigma_{Mz(y)}(x=0)$ [MPa]	$\sigma_{Mz(y)}(x=L/2)$ [MPa]	$\sigma_{Mz(y)}(x=L)$ [MPa]	$\sigma_{My(x)}(x=0)$ [MPa]	$\sigma_{My(x)}(x=L/2)$ [MPa]	$\sigma_{My(x)}(x=L)$ [MPa]	$\sigma_{My(x)}(x=0)$ [MPa]	$\sigma_{My(x)}(x=L/2)$ [MPa]	$\sigma_{My(x)}(x=L)$ [MPa]
1	8.6539	2.7707	-3.1125	-8.6539	-2.7707	3.1125	-2.7707	3.1125	-0.7367
2	-3.1125	5.6242	14.3609	3.1125	-5.6242	-14.3609	-0.7367	-0.7367	-0.7367
3	14.3609	-11.4117	-10.5030	-14.3609	11.4117	10.5030	-0.5226	-0.5226	-0.5226
4	-10.5030	-4.8007	37.4514	10.5030	4.8007	-37.4514	-0.4627	-1.1703	-1.8778
5	37.4514	2.4341	-32.5831	-37.4514	-2.4341	32.5831	-2.3765	-2.3765	-2.3765

Número Elemento	fy/Ax(x=0) [MPa]	fy/Ax(x=L/2) [MPa]	fy/Ax(x=L) [MPa]	$\sigma_{\text{von Mises}(y)}(x=0)$ [MPa]	$\sigma_{\text{von Mises}(y)}(x=L/2)$ [MPa]	$\sigma_{\text{von Mises}(y)}(x=L)$ [MPa]
1	0.1898	0.1898	0.1898	7.9240	2.0604	3.8632
2	-0.2819	-0.2819	-0.2819	3.8800	4.9118	13.6330
3	0.5908	0.1878	-0.2152	13.8761	11.9387	11.0319
4	0.3245	-0.6189	-1.5623	10.9801	6.0664	35.6763
5	0.5649	0.5649	0.5649	35.0885	0.9801	34.9733

Número Elemento	$\sigma_{\text{von Mises}(y)}(x=0)$ [MPa]	$\sigma_{\text{von Mises}(y)}(x=L/2)$ [MPa]	$\sigma_{\text{von Mises}(y)}(x=L)$ [MPa]
1	9.3963	3.5227	2.3985
2	2.4255	6.3796	15.1055
3	14.9186	10.8939	9.9873
4	10.0560	3.7853	39.4222
5	39.8399	4.9091	30.2224

e)

Figura 268 – Resultados do terceiro problema modelo de estrutura (quadrático). a) reações c. globais; b) reações c. locais; c) deslocamentos; d) forças; e) tensões

Como se pode constatar, os resultados para ambos os modelos utilizados na validação do programa FELP encontram-se corretos e de acordo com o esperado conforme se comprova ao analisar a informação sobre a forma de tabelas e figuras apresentadas no

---

subcapítulo 3.1.3.4. Deve-se ter em atenção na comparação que no primeiro modelo de teste o segundo elemento da estrutura apresenta o eixo local rodado 180 graus face ao eixo local considerado para esse mesmo elemento no subcapítulo 3.1.3.4.



**CONCLUSÕES E TRABALHOS  
FUTUROS**



## 4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Conforme referido na *introdução* deste trabalho ambicionou-se, através do MEF, desenvolver e implementar as formulações lineares e quadráticas para os elementos unidimensionais de barra, viga e estrutura, num programa de análise estrutural bidimensional composto por uma interface gráfica intuitiva e simples de usar.

Pode-se afirmar que as formulações para os elementos unidimensionais referidos e utilizados na análise de estruturas bidimensionais foram corretamente desenvolvidas e validadas ao longo deste trabalho, incluindo o desenvolvimento das transformações de coordenadas para cada tipo de formulação e respetivo tipo de elemento. Apesar dos desafios encontrados, especialmente na formulação do elemento de barra quadrático conforme pode ser consultado no subcapítulo 3.1.1.2, conseguiu-se desenvolver uma metodologia capaz de lidar com a rotação deste tipo de elementos em ambientes de trabalho bidimensionais, que apresentem um sistema de eixos global não coincidente com o eixo local dos elementos utilizados na análise. Perfez-se assim o primeiro objetivo estabelecido para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao analisar em detalhe os objetivos estabelecidos para o desenvolvimento do programa, é possível afirmar que estes foram alcançados e superados ao longo do seu desenvolvimento. Conforme se demonstra ao longo do subcapítulo 3.2, foi possível desenvolver um programa capaz de analisar estruturas que se enquadrem em três modelos distintos, sejam estes do tipo barra, viga ou estrutura. Posteriormente, após a seleção do tipo de modelo, o utilizador tem acesso a uma janela de trabalho que apresenta uma interface gráfica intuitiva e coloca diversas funcionalidades à sua disposição. Nesta janela, este pode definir a geometria, as propriedades e as condições de análise, e também indicar o tipo de formulação que pretende utilizar na fase de processamento do projeto em análise. Como funcionalidades suplementares e não referidas nos objetivos definidos inicialmente para o programa, o utilizador pode alterar a numeração dos nós e dos elementos e, conseqüentemente, manipular a direção dos eixos locais de cada elemento. O utilizador pode adicionalmente proceder à divisão de elementos em  $n$  partes ou nas suas intersecções, e ainda recorrer a funcionalidades de visualização gráfica como por exemplo a visualização das condições que definem a estrutura. Por último, e incluído nos objetivos estabelecidos, após o processamento o utilizador pode optar por visualizar as soluções para as variáveis primárias e secundárias sobre a forma de tabelas, diagramas ou mapas de cores.

Com base no exposto, pode-se concluir que o programa FELP permite ao utilizador ter um maior controlo sobre o modelo de análise dado que, através da leitura deste

documento, este consegue compreender as limitações e o campo de aplicabilidade para cada modelo de análise. Para além disso, o programa executa diversas verificações internas automáticas que têm por objetivo minimizar a introdução de erros no modelo em análise. Finalmente, uma das grandes vantagens que o programa FELP apresenta face aos demais disponíveis no mercado, recai na sua capacidade de lidar com a transformação de coordenadas de elementos de barra quadráticos sem o aparecimento de instabilidades na estrutura, originados pela singularidade que surge na matriz de rigidez aquando a transformação de coordenadas.

No entanto, o programa desenvolvido pode e deve ser melhorado de acordo com a lista de melhorias apresentadas de seguida:

1. Criar uma versão *stand alone* do programa;
2. Concluir a programação das funcionalidades não desenvolvidas do menu arquivo (sobre o FELP, convenção de sinais, salvar projeto, abrir projeto e novo projeto);
3. Desenvolver todas as funcionalidades que compõem o menu editar;
4. Desenvolver e substituir as funcionalidades *pan*, *zoom in* e *zoom out* do menu vista, disponibilizadas por defeito na barra de menus pelo Matlab® GUIDE, uma vez que estas entram em conflito com funcionalidades desenvolvidas de raiz para o programa FELP, como por exemplo a grelha de pontos;
5. Desenvolver a funcionalidade aplicar peso próprio do menu condições;
6. Desenvolver uma funcionalidade que possibilite o cálculo dos modos próprios de vibração;
7. Introduzir no submenu diagramas do menu resultados a opção de visualizar o valor dos esforços e o respetivo sinal do diagrama;
8. Alterar a formulação utilizada no cálculo da tensão de corte usada nos elementos de viga e de estrutura por uma mais rigorosa que leve em linha de conta o momento estático e o centro de corte da secção, e que permita ao utilizador visualizar o fluxo de corte da secção em determinados pontos do elemento;
9. Desenvolver uma funcionalidade que permita ao utilizador importar os resultados apresentados sobre a forma de tabelas para um ficheiro do tipo .xlsx;
10. Corrigir o problema de distorções que ocorre na área de trabalho provocado pela diferença de espaçamento existente entre o eixo do  $x$  e o eixo do  $y$ ;
11. Desenvolver a funcionalidade preferências no sentido de permitir ao utilizador por exemplo alterar o sistema de unidades e a precisão de trabalho;
12. Desenvolver a formulação que permita a análise de elementos de cabo, elementos de secção variável e proceder à integração no programa FELP;
13. Permitir que o utilizador realize modelos com diferentes tipos de elementos, como por exemplo de viga e de barra combinados na análise de estruturas e permitir que o utilizador defina diferentes tipos de ligação entre os elementos;
14. Corrigir os bugs encontrados na representação gráfica de carregamentos e na funcionalidade definir apoios quando esta é desativada sobre um nó de um elemento inserido na área de trabalho;

15. Desenvolver o programa e as respetivas formulações de modo a ser possível proceder à análise de estruturas tridimensionais;
16. Desenvolver um módulo para o programa que permita a atribuição automática de carregamentos de acordo com o RSA e o Eurocódigo 1.



**BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES  
DE INFORMAÇÃO**



## 5 BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

1. Campilho, R.D.S.G., *Método de elementos finitos*. 2012, Porto, Portugal: Publindústria.
2. Azevedo, Á.F.M., *Método dos Elementos Finitos*, ed. Edição. 2003, Porto, Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
3. Cardoso, M.H.G.F. e P.A.M. Magalhães Júnior, *Análise estrutural dos esforços sofridos durante o voo de um avião boeing 737-400 usando o método dos elementos finitos*, in *CILAMCE 2016*. 2016: Brasília - Brasil.
4. Arruda, J.R.d.F., *Introdução histórica à mecânica dos sólido*. 2001: Campinas, Brasil.
5. *Algorithmes en égypte ancienne*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://docplayer.fr/81587347-1-algorithmes-en-egypte-ancienne.html>.
6. Rodrigues, C., *Fundamentos de Análise Estrutural - Método dos elementos finitos - Introdução*. 2016, Pós-graduação em cálculo assistido de estruturas, Instituto Superior de Engenharia do Porto: Porto, Portugal.
7. Cláudia, Elsa, e Sandra. *Os elementos de Euclides*. 2000 [Acedido em Junho de 2020]; Available from: <https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/euclides/elementoseuclides.htm>.
8. *Medinaceli: arco romano (1888.)* [Fevereiro 2020]; Available from: <http://bibliotecadigital.jcyl.es/i18n/consulta/registro.cmd?control=CYL20150016775>.
9. Forato, T.C.M. *Isaac Newton, Biografias*. [Acedido em Fevereiro 2020]; Available from: <http://www.ghc.usp.br/Biografias/Newton/Newton3.htm>.
10. Santos Simões, S., A.L.D. Gaudêncio, e C.A.C.d.A. Silva. *Leonhard Euler, bibliografia*. 1998/1999 [Acedido em Fevereiro 2020]; Available from: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm31/Euler.htm>.
11. Casas, E.B.d.l., *O Método dos Elementos Finitos*, in *Notas sobre o Método dos Elementos Finitos - Versão beta*. 2000: Brasil.
12. Ferreira, A.J., *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*. Vol. 157. 2008, Porto, Portugal: Springer Science & Business Media.
13. Zienkiewicz, O.C. e R.L. Taylor, *The Finite Element The Basis*. Vol. 1. 2000, Oxford, Inglaterra: Butterworth-Heinemann.
14. Logan, D.L., *A first course in the finite element method*. 2011, Stamford, USA: Cengage Learning.
15. COMSOL. *Biomedical stent*. [Acedido em Junho de 2020]; Available from: <https://www.comsol.pt/nonlinear-structural-materials-module>.
16. Wikiversity. *Nonlinear finite elements*. [Acedido em Junho de 2020]; Available from: [https://en.wikiversity.org/wiki/Nonlinear\\_finite\\_elements](https://en.wikiversity.org/wiki/Nonlinear_finite_elements).
17. Saxena, A. e B. Sahay, *Computer aided engineering design*. 2005, Nova Deli, India: Springer Science & Anamaya Publishers.
18. Rao, S.S., *The Finite Element Method in Engineering: Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies*. 2013, Inglaterra: Elsevier.
19. EADIC. *Teoría del Método de los Elementos Finitos* [Acedido em Junho de 2020]; Available from: <https://www.eadic.com/teoria-del-metodo-de-los-elementos-finitos/>.

20. AUTODESK. *Página oficial da Autodesk*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.autodesk.pt/>.
21. Sheppard, S. *Project Falcon*. [Acedido em Junho de 2020]; Available from: [https://labs.blogs.com/its\\_alive\\_in\\_the\\_lab/2012/12/project-falcon-for-inventor-now-available.html](https://labs.blogs.com/its_alive_in_the_lab/2012/12/project-falcon-for-inventor-now-available.html).
22. Vasco, M.A.A. *Biomecânica na Odontologia*. [Acedido em Fevereiro 2020]; Available from: <http://www.biomecanicanaodontologia.com.br/>.
23. Brandão, J.A.S.F., *Estruturas Reticuladas Hiperstáticas Planas*. 2011, Instituto Superior de Engenharia do Porto: Porto, Portugal.
24. Tavares, J.M.R.S. e A.J.M.N. Padilha, *Introdução ao método dos elementos finitos*, in *Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores*. 1998, Instituto de Engenharia Biomédica: Porto, Portugal.
25. Tavares, A.G.S., *Método dos Elementos Finitos*. 2005, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais: São José dos Campos, Brasil.
26. Rodrigues, C., *Fundamentos de Análise Estrutural - Método dos elementos finitos - Elementos de barra*. 2016, Pós-graduação em cálculo assistido de estruturas, Instituto Superior de Engenharia do Porto: Porto, Portugal.
27. Rodrigues, C.Y.C., *Análise de Estruturas Axissimétricas Aplicação a Reservatórios Circulares*. 2009, Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa: Lisboa, Portugal.
28. Boeraeve, D.I.P., *Introduction to the Finite Element Method (FEM)*. 2010, Institut Gramme - Liege: Bélgica.
29. Beam, B.a. *Edifício*. 2012 [Acedido em Junho de 2020]; Available from: [https://bimandbeam.typepad.com/bim\\_beam/2012/05/integrating-autodesk-revit-revit-structure-and-robot-structural-analysis-professional-white-paper-no.html](https://bimandbeam.typepad.com/bim_beam/2012/05/integrating-autodesk-revit-revit-structure-and-robot-structural-analysis-professional-white-paper-no.html).
30. 3DS. *Página oficial da Dassault Systèmes®*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.3ds.com/>.
31. SISTEMAS, D. *Página oficial da DISTRIM*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.distribim.pt/>.
32. ARKTEC, S.A. *Página oficial da Arktec*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <http://www.arktec.com/PT/Inicio/Inicio.aspx>.
33. MAXSURF. *Página oficial da MAXSURF*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.maxsurf.net/>.
34. Santana, P.D.C., *Apostila de Fortran*. Apontamentos da unidade curricular de Física, Universidade Estadual do Ceará - UECE: Fortaleza, Brasil.
35. Becker, A.J., D.M.I. da Silva, F.H.S. Dias, e L.K. Pinheiro, *Noções Básicas de Programação em MATLAB*. 2010, Universidade Federal de Santa Maria: Santa Maria, Brasil.
36. de Lima, P.M.J.D., *Aulas de Matemática no Matlab*, in *Campus Cornélio Procópio - Grupo de Matemática*. Universidade Tecnológica federal do Paraná - UTFPR: Brasil.
37. Inc., T.M., *Matlab Creating Graphical User Interfaces*. 2006, The Mathworks.
38. Franca, M.J., *Curso de introdução ao MATLAB - módulo 1*, in *Departamento de Engenharia Civil*. 2008, Universidade de Coimbra: Coimbra, Portugal.
39. Vable, M., *chapter 9: Finite Element Method in Intermediate Mechanics of Materials*. Expanding Educational Horizons LLC.
40. Beer, F.P., E.R. Johnston Jr, e J.T. DeWolf, *Resistência dos materiais. 4ª edição*. 2006: Mcgraw-Hill
41. Rodrigues, C., *Fundamentos de Análise Estrutural - Método de Elementos Finitos - Elementos de Viga*. 2016, Pós-graduação em cálculo assistido de estruturas, Instituto Superior de Engenharia do Porto: Porto, Portugal.
42. AUTODESK. *Sign Convention for bar elements*. [Acedido em Junho de 2020]; Available from: <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn->

- [explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2015/ENU/Robot/files/GUID-D1195F2E-6310-4DF6-BE1E-DCCD2A0D121E-htm.html](https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/robot_structural_analysis_products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2015/ENU/Robot/files/GUID-D1195F2E-6310-4DF6-BE1E-DCCD2A0D121E-htm.html).
43. AUTODESK. *Sign Convention*. [Acedido em Junho de 2020]; Available from: <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2015/ENU/Robot/files/GUID-9EC5861F-4E56-4AAF-B054-36A02C982C98-htm.html>.
  44. FTOOL. *Página oficial da FTOOL*. [Acedida em Junho de 2020]; Available from: <https://www.ftool.com.br/Ftool/>.
  45. Liu, Y., *Lecture Notes: Introduction to the Finit Element Method*. 2003, Ohio, USA: University of Cincinnati.
  46. Rangel, R.L. e L.F. Martha, *O Ambiente GUIDE do MATLAB*. 2019, Pontifícia Universidade Católica Rio de Janeiro, Brasil.
  47. Altman, Y.M., *Undocumented secrets of MATLAB-Java programming*. 2011, Boca Raton, Florida: CRC Press.
  48. MATLAB, U. *HTML support in Matlab uicomponents*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://undocumentedmatlab.com/articles/html-support-in-matlab-uicomponents>.
  49. MATLAB, U. *Figure window customizations*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <http://undocumentedmatlab.com/articles/figure-window-customizations>.
  50. MATLAB, U. *Customizing menu items part 1*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <http://undocumentedmatlab.com/articles/customizing-menu-items-part-1>.
  51. MATLAB, U. *Customizing menu items part 3*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <http://undocumentedmatlab.com/articles/customizing-menu-items-part-3>.
  52. MATLAB, U. *Figure toolbar customizations*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <http://undocumentedmatlab.com/articles/figure-toolbar-customizations>.
  53. MATLAB, U. *Images in Matlab uicontrols & labels*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <http://undocumentedmatlab.com/articles/images-in-matlab-uicontrols-and-labels/>.
  54. MATLAB, U. *Enabling user callbacks during zoom/pan*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://undocumentedmatlab.com/articles/enabling-user-callbacks-during-zoom-pan>.
  55. Center, M.-H. *Open file selection dialog box - MATLAB uigetfile*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/uigetfile.html>.
  56. Center, M.-H. *Intersection points for lines or polygon edges - MATLAB polyxpoly*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: [https://www.mathworks.com/help/map/ref/polyxpoly.html#mw\\_9953fe69-60f1-467a-948d-32a6b682a4cd](https://www.mathworks.com/help/map/ref/polyxpoly.html#mw_9953fe69-60f1-467a-948d-32a6b682a4cd).
  57. Center, M.-H. *Create circle - MATLAB viscircles*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/images/ref/viscircles.html#buhkdx-1>.
  58. Center, M.-H. *Changing Transparency of Images, Patches or Surfaces - MATLAB & Simulink Example*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: [https://www.mathworks.com/help/matlab/creating\\_plots/changing-transparency-of-images-patches-or-surfaces.html](https://www.mathworks.com/help/matlab/creating_plots/changing-transparency-of-images-patches-or-surfaces.html).
  59. Center, M.-H. *Number of nodes in graph - MATLAB numnodes*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/graph.numnodes.html>.
  60. Center, M.-H. *Label Graph Nodes and Edges - MATLAB & Simulink*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/label-graph-nodes-and-edges.html>.

61. Center, M.-H. *Axes text appearance and behavior - MATLAB*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: [https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/matlab.graphics.primitive.text-properties.html#budt\\_bq-1-Extent](https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/matlab.graphics.primitive.text-properties.html#budt_bq-1-Extent).
62. Center, M.-H. *Add text descriptions to data points - MATLAB text*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/text.html#busm58r-1>.
63. Center, M.-H. *Convert angle from radians to degrees - MATLAB rad2deg*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/rad2deg.html>.
64. Center, M.-H. *Convert strings to double precision values - MATLAB str2double*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/str2double.html>.
65. Center, M.-H. *Concatenate arrays vertically - MATLAB vertcat*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/vertcat.html>.
66. Center, M.-H. *Unique values in array - MATLAB unique*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/unique.html>.
67. MATHWORKS. *How do I display an image on a GUI component (eg. pushbutton)? - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/98593-how-do-i-display-an-image-on-a-gui-component-eg-pushbutton>.
68. MATHWORKS. *How do I pass variables from one GUI to another - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/105270-how-do-i-pass-variables-from-one-gui-to-another>.
69. MATHWORKS. *TEXT or ANNOTATION multiple Colors, Multiple Lines - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/446524-text-or-annotation-multiple-colors-multiple-lines>.
70. MATHWORKS. *GUI Save Data with Button - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/285161-gui-save-data-with-button>.
71. MATHWORKS. *Open file selection dialog box and load selected file into workspace - MATLAB uiopen*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/uiopen.html>.
72. MATHWORKS. *Matlab R2017b looses focus from figure window, when using WindowKeyPressFcn to activate zoom function - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/410690-matlab-r2017b-looses-focus-from-figure-window-when-using-windowkeypressfcn-to-activate-zoom-functio>.
73. MATHWORKS. *Help me about the Static text og GUIDE ? - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/111109-help-me-about-the-static-text-og-guide>.
74. MATHWORKS. *How do I get my text to center vertically in a uicontrol textbox? - MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/328604-how-do-i-get-my-text-to-center-vertically-in-a-uicontrol-textbox>.
75. MATHWORKS. *Axes text appearance and behavior - MATLAB*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/matlab.graphics.primitive.text-properties.html>.

76. MATHWORKS. *Change the mouse pointer while hovering above the axes.* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/327043-change-the-mouse-pointer-while-hovering-above-the-axes>.
77. MATHWORKS. *Store pointer behavior structure in graphics object* - MATLAB *iptSetPointerBehavior*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/images/ref/iptsetpointerbehavior.html>.
78. MATHWORKS. *Toggle button ForeGroundcolor not rendered properly after enable* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/308358-toggle-button-foregroundcolor-not-rendered-properly-after-enable>.
79. MATHWORKS. *Control appearance and behavior of figure window* - MATLAB. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/matlab.ui.figure-properties.html>.
80. MATHWORKS. *How can I programmatically control mouse motion and clicks with MATLAB?* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/100545-how-can-i-programmatically-control-mouse-motion-and-clicks-with-matlab>.
81. MATHWORKS. *True for valid graphics object handles* - MATLAB *isgraphics*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/isgraphics.html>.
82. MATHWORKS. *Points located inside or on edge of polygonal region* - MATLAB *inpolygon*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/inpolygon.html>.
83. MATHWORKS. *add more X and Y ticks (dynamically)* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/318378-add-more-x-and-y-ticks-dynamically>.
84. MATHWORKS. *How can I have ZOOM honor my formatted tick labels?* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/102156-how-can-i-have-zoom-honor-my-formatted-tick-labels>.
85. MATHWORKS. *How to use the mouse to select and identify a line on a plot* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/83231-how-to-use-the-mouse-to-select-and-identify-a-line-on-a-plot>.
86. MATHWORKS. *Insert image as a marker in plot* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/481183-insert-image-as-a-marker-in-plot>.
87. MATHWORKS. *which are the different markers?* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/21203-which-are-the-different-markers>.
88. MATHWORKS. *Why do text objects on plots move outside axes boundaries when using the pan functionality?* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/94127-why-do-text-objects-on-plots-move-outside-axes-boundaries-when-using-the-pan-functionality>.
89. MATHWORKS. *Mouseover highlighting of plotted line?* - MATLAB Answers - MATLAB Central. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/471389-mouseover-highlighting-of-plotted-line>.

90. MATHWORKS. *Display image in axes Matlab GUI*. - *MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/222578-display-image-in-axes-matlab-gui>.
91. MATHWORKS. *Create contents of popup menu dynamically* - *MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/42734-create-contents-of-popup-menu-dynamically>.
92. MATHWORKS. *Check if an element is enabled or not in GUI* - *MATLAB Answers - MATLAB Central*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/244444-check-if-an-element-is-enabled-or-not-in-gui>.
93. Webinars, M.-V.a. *Adding a Table to a GUI*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://www.mathworks.com/videos/adding-a-table-to-a-gui-97324.html>.
94. STACKOVERFLOW. *matlab: difference between KeyPressFcn and WindowKeyPressFcn* - *Stack Overflow*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: <https://stackoverflow.com/questions/25174400/matlab-difference-between-keypressfcn-and-windowkeypressfcn/25666638#25666638>.
95. W3SCHOOLS. *CSS Fonts*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: [https://www.w3schools.com/css/css\\_font.asp](https://www.w3schools.com/css/css_font.asp).
96. IZMIRAN, M. *Defining Custom Pointers :: Figure Properties (Graphics)*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: [http://matlab.izmiran.ru/help/techdoc/creating\\_plots/figure12.html](http://matlab.izmiran.ru/help/techdoc/creating_plots/figure12.html).
97. IZMIRAN, M. *Specifying the Figure Pointer :: Figure Properties (Graphics)*. [Acedido em Junho 2020]; Available from: [http://matlab.izmiran.ru/help/techdoc/creating\\_plots/figure11.html](http://matlab.izmiran.ru/help/techdoc/creating_plots/figure11.html).
98. Kattan, P.I., *MATLAB guide to finite elements: an interactive approach*. 2010: Springer Science & Business Media.

# ANEXOS

**6.1 ANEXO1: Código em Matlab® que permite a resolução do terceiro problema modelo do elemento de barra quadrático, através da análise geométrica**



## 6 ANEXOS

### 6.1 ANEXO1: Código em Matlab® que permite a resolução do terceiro problema modelo do elemento de barra quadrático, através da análise geométrica

```

clear all
% E: módulo de elasticidade
% A: área da secção
E=[10e11 10e11 10e11];
A=[0.01 0.02 0.01];
EA=E.*A;
%angelm - vector com indicação do ângulo em que se encontra
o elemento face ao eixo das abcissas do referencial Global
angelm = [135 90 45];
%entradas exteriores
numeroelementos=3;
numerosenos=7;
nosdoselementos=[3 2 1;3 4 5;3 6 7];
coordenadasdosnos=[-1 1;-0.5 0.5;0 0;0 0.5;0 1;0.5 0.5;1 1];
xx=coordenadasdosnos(:,1);
yy=coordenadasdosnos(:,2);
% deslocamentos: vector dos deslocamentos
% rigidez: matriz de rigidez em coordenadas globais
% GL: número total de graus de liberdade em coordenadas globais
GL=2*numerosenos;
%entradas exteriores
%forceeq:forças equivalentes nos nós pelo PTV, no referencial local
%force: representa as forças equivalentes nos nós do elemento em
coordenadas Globais
%forceT: representa as forças aplicadas nos nós mais as reacções e as
forças equivalentes
%nos nós do elemento em coordenadas Globais
%forceDis: vector que contém os carregamentos distribuídos
% ao longo do elemento
%forceGLlo: vector que contém as forças aplicadas nos
% nós exteriores do elemento em coordenadas Globais e em coordenadas
% locais nos nós centrais
force=zeros(GL,1);
forceeq=zeros(numerosenos,1);
forceDis=zeros(numeroelementos,1);

for e=1:numeroelementos;
% grauslibelemento: graus de liberdade do elemento
indice=nosdoselementos(e,:);
xa=xx(indice(3))-xx(indice(1));
ya=yy(indice(3))-yy(indice(1));
L=sqrt(xa*xa+ya*ya);
syms x y;
N=[ ((2*x^2)/(L*L)) - ((3*x)/L) + 1 ((4*x)/L) - ((4*x^2)/(L*L)) ...
((2*x^2)/(L*L)) - x/L]';
f=forceDis(e)*int(N,x,0,L);
forceeq(indice,1)=forceeq(indice,1)+f;
end
forceeq;
%Relacionar as forças locais nos nós com o referencial Global
for e=1:numeroelementos;
% grauslibelemento: graus de liberdade do elemento
indice=nosdoselementos(e,:);
grauslibelemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];

```

```

F=zeros (GL,1) ;
xa=xx (indice (3)) -xx (indice (1)) ;
ya=yy (indice (3)) -yy (indice (1)) ;
L=sqrt (xa*xa+ya*ya) ;
l=xa/L;
m=ya/L;
T=[1 m 0 0 0 0 ;0 0 1 m 0 0;0 0 0 0 1 m];
if (e==1)
F(grauslibelemento)=T'*forceeq(indice) ;
else
F(grauslibelemento (3))=forceeq(indice (2))*1;
F(grauslibelemento (4))=forceeq(indice (2))*m;
F(grauslibelemento (5))=forceeq(indice (3))*1;
F(grauslibelemento (6))=forceeq(indice (3))*m;
end
force (grauslibelemento,1) ;
force (grauslibelemento,1)=force (grauslibelemento,1)+F(grauslibelemento
,1) ;
end
% Ao vector forceT devem ser somadas as Reacções nos apoios e as
Forças
% Pontuais aplicadas nos nós exteriores do elemento
forcenos=zeros (GL,1) ;
forcenos (5)=1000;
ForceT=force+forcenos;
forceGLlo=zeros (GL-numerodeelementos,1) ;
% sistema para montar a matriz de rigidez global nos nós extremos e
local
% no nó central do elemento (rigidezGLlo), e matriz de rigidez global
%(rigidez)
rigidezGLlo=zeros (GL) ;
rigidez=zeros (GL) ;
for e=1:numerodeelementos;
% grauslibelemento: graus de liberdade do elemento
indice=nosdoselementos (e,:) ;
grauslibelemento=[indice (1)*2-1 indice (1)*2 indice (2)*2-1 indice (2)*2
indice (3)*2-1 indice (3)*2];
xa=xx (indice (3)) -xx (indice (1)) ;
ya=yy (indice (3)) -yy (indice (1)) ;
L=sqrt (xa*xa+ya*ya) ;
l=xa/L;
m=ya/L;
%KGLlo
KGLlo=obtenKGLlobarraquad (l,m,L,EA,e) ;
rigidezGLlo (grauslibelemento,grauslibelemento) ;
rigidezGLlo (grauslibelemento,grauslibelemento)=rigidezGLlo (grauslibele
mento,grauslibelemento)+KGLlo;
end
i=0;
for e=1:numerodeelementos;
indice=nosdoselementos (e,:) ;
switch e
case e==1

rigidezGLlo (indice (2)*2,:)=[] ;
rigidezGLlo (:,indice (2)*2)=[] ;
otherwise

```

```

rigidezGLlo(indice(2)*2-i,:)=[];
rigidezGLlo(:,indice(2)*2-i)=[];

    end
    i=i+1;

end
clear i
rigidezGLlo;

for e=1:numeroelementos;
% grauslibelemento: graus de liberdade do elemento
indice=nosdoselementos(e,:);
grauslibelemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
xa=xx(indice(3))-xx(indice(1));
ya=yy(indice(3))-yy(indice(1));
L=sqrt(xa*xa+ya*ya);
l=xa/L;
m=ya/L;
%Kglobal
Kgel=obtenKglobbarraquad(l,m,L,EA,e);
rigidez(grauslibelemento,grauslibelemento);
rigidez(grauslibelemento,grauslibelemento)=rigidez(grauslibelemento,gr
auslibelemento)+Kgel;
end

rigidez;
deslocamentos=zeros(GL,1);
deslocamentosGlo=zeros(GL-numeroelementos,1);
deslocamentosG=zeros(GL,1);
% condições de fronteira e solução

% grauslibprescritosGLlo: entradas exteriores, considero todas as
posições prescritas (coordenadas
% locais ou globais) do apoios, preencher vector por ordem de acordo
com os
% nós a posição 1 e 2 devem ser corretamente inseridas.
grauslibprescritosGLlo=[1 2 9 10 14]';
%grauslibprescritosGLlopr: vector com posições dos nós retificadas,
face a
%utilização do nó central em coordenadas locais, vector com 5 linhas
por
%elemento.

grauslibprescritosGLlopr=zeros(numel(grauslibprescritosGLlo),1);
e=grauslibprescritosGLlo(1);
j=1;

while e<=max(grauslibprescritosGLlo)

    if grauslibprescritosGLlo(j)<=3
        grauslibprescritosGLlopr(j)=grauslibprescritosGLlo(j);
    else
        h=e;

```

```

        m=0;
        n=6;
        while h>0
            h=h-n;
            m=m+1;
            h;
            n=4;
        end
        grauslibprescritosGLlopr(j)=grauslibprescritosGLlo(j)-m;
    end

    j=j+1;

    if e==max(grauslibprescritosGLlo)
        break
    end

    e=grauslibprescritosGLlo(j);

end

grauslibprescritosGLlopr;
clear i h m j n
% grauslibprescritosGl: entradas exteriores, considero todas as
posições prescritas (globais) do apoios
grauslibprescritosGl=[1 2 9 10 14]';
%ang: vector com indicação do ângulo entre o eixo das abcissas do
referencial global e o eixo das abcissas do referencial local de cada
apoio medido no sentido anti-horário, caso não exista apoio no nó deve
ser dado o input no vector de grau 0 para manter o correto
funcionamento do programa e as coordenadas Globais do nó

ang = [180 0 0 0 180 0 180];

%Por Katan temos que  $k_{GL}=TA*rigidez*TA'$ , TA é a matriz transformação
em função do ângulo do apoio e provoca a alteração da matriz global e
local no nó central nas posições dos nós afectados pela rotação do
apoio em coordenadas locais KGeLap rigidez global e apoios locais
TA=eye(GL, GL);
for e=1:numero denos;
if rem(e,2)==0
else
if (ang(e)==0) && (ang(e)==360)
else
    TA(e*2-1,e*2-1)=cosd(ang(e));
    TA(e*2-1,e*2)=sind(ang(e));
    TA(e*2,e*2-1)=-sind(ang(e));
    TA(e*2,e*2)=cosd(ang(e));
end
end
end

KGeLap= TA*rigidez*TA';
%MPC provocado pela rotação de apoio

```

```

%Por Katan temos que  $k_{GL}=TA*rigidez_{GLlo}*TA'$ , TA é a matriz
transformação em função do ângulo do apoio, e provoca a alteração da
matriz global e local no nó central em local nas posições dos nós
afectados
%pla rotação do apoio em coordenadas locais
TA=eye (GL-numerodeelementos) ;
for e=1:numero denos ;

if rem(e,2)==0
else
if (ang(e)==0) && (ang(e)==360)
else
if e==1
TA(e*2-1,e*2-1)=cosd(ang(e));
TA(e*2-1,e*2)=sind(ang(e));
TA(e*2,e*2-1)=-sind(ang(e));
TA(e*2,e*2)=cosd(ang(e));
else
h=e;
m=0;
n=2;
while h>0
h=h-n;
m=m+1;
h;
n=2;
end
TA(e*2-m,e*2-m)=cosd(ang(e));
TA(e*2-m,e*2-m+1)=sind(ang(e));
TA(e*2-m+1,e*2-m)=-sind(ang(e));
TA(e*2-m+1,e*2-m+1)=cosd(ang(e));
end
end
end
clear m n h
KGLLeapL= TA*rigidezGLlo*TA';
%KGLLeapL rigidez global e local (nós centrais) e apoios locais
% solução
% função para encontrar a solução dos deslocamentos
grauslibactivos=setdiff([1:GL]',[grauslibprescritosGLlo]);
grauslibactivosGLlo=setdiff([1:(GL-
numerodeelementos)]',[grauslibprescritosGLlopr]);
%obter o vector das forças totais atuantes nos elementos em
coordenadas
%locais nos apoios (coordenadas locais do apoio em questão) com
rotação e
%coordenadas Globais nos restantes

forceGLloap=zeros (GL,1) ;

for e=1:numero denos ;
if rem(e,2)==0
forceGLloap(e*2-1)=ForceT(e*2-1) ;
forceGLloap(e*2)=ForceT(e*2) ;
else

```

```

    if (ang(e)>=0) &&(ang(e)<=90) || (ang(e)==360)
        forceGLloap(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e)) sind(ang(e));-
sind(ang(e)) cosd(ang(e))]*ForceT(e*2-1:e*2);
        else if (ang(e)>90) &&(ang(e)<180)
            forceGLloap(e*2-1:e*2)=[-cosd(180-ang(e)) sind(180-
ang(e));-sind(180-ang(e)) -cosd(180-ang(e))]*ForceT(e*2-1:e*2);
            else if (ang(e)==180)
                forceGLloap(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e))
sind(ang(e));sind(ang(e)) cosd(ang(e))]*ForceT(e*2-1:e*2);
            else if (ang(e)>180) &&(ang(e)<270)
                forceGLloap(e*2-1:e*2)=[-sind(270-ang(e))
-cosd(270-ang(e));cosd(270-ang(e)) -sind(270-ang(e))]*ForceT(e*2-
1:e*2);

                else if(ang(e)==270)
                    forceGLloap(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e))
sind(ang(e));-sind(ang(e)) cosd(ang(e))]*ForceT(e*2-1:e*2);
                    else if (ang(e)>270) &&(ang(e)<360)
                        forceGLloap(e*2-1:e*2)=[cosd(360-
ang(e)) -sind(360-ang(e));sind(360-ang(e)) cosd(360-
ang(e))]*ForceT(e*2-1:e*2);

                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end

end
end
save forceGLloap;

%forceGLloappr: vector com posições dos nós retificadas, face a
%utilização do nó central em coordenadas locais, vector com 5 linhas
por
%elemento (eliminar posição número nó*2 por cada nó par do elemento)
forceGLloappr=zeros(GL,1);
for e=1:numero de elementos;
% grauslibe elemento: graus de liberdade do elemento
indice=nos do elemento(e,:);
if e==1
    grauslibe elemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
    forceGLloappr(forceGLloappr(grauslibe elemento(3)))=sqrt(forceGLloappr(grauslibe elemento(4)
))^2+forceGLloappr(grauslibe elemento(3))^2);
    forceGLloappr(grauslibe elemento(4))=0;
    forceGLloappr(grauslibe elemento(3))=0;
    forceGLloappr(grauslibe elemento)=forceGLloappr(grauslibe elemento)+forceG
Lloappr(grauslibe elemento);
else
    grauslibe elemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
    forceGLloappr(grauslibe elemento(3))=sqrt(forceGLloappr(grauslibe elemento(4)
))^2+forceGLloappr(grauslibe elemento(3))^2);
    forceGLloappr(grauslibe elemento(4))=0;

```

```

forceGLloap (grauslibelemento (3))=0;
forceGLloappr (indice (2) *2-1:indice (3) *2)=forceGLloappr (indice (2) *2-
1:indice (3) *2)+forceGLloap (indice (2) *2-1:indice (3) *2);
end
end
for e=1:numeroelementos;
    indice=nosdoselementos (e, :);
    switch e
        case e==1
forceGLloappr (indice (2) *2, :)=[];
            otherwise
forceGLloappr (indice (2) *2-e, :)=[];
            end
    end
end
forceGLloappr;
load forceGLloap
forceGLloappr (grauslibativosGLlo);
UGL=KGLLeapL (grauslibativosGLlo, grauslibativosGLlo) \forceGLloappr (gra
uslibativosGLlo);
deslocamentosGlllo (grauslibativosGLlo)=UGL;
%deslocamentosGllloauxiliar foi criado para que a dimensão do vetor
deslocamentosGlllo passe a ter a mesma dimensão de GL
deslocamentosGllloauxiliar=zeros (GL,1);
b=0;
h=0;
for e=1:numero denos;
    if rem (e,2)==0
        deslocamentosGllloauxiliar (e*2-1)=deslocamentosGlllo (e*2-1-h);
        deslocamentosGllloauxiliar (e*2)=0;
        h=h+1;
    elseif e==1
        deslocamentosGllloauxiliar (e*2-1)=deslocamentosGlllo (e*2-1);
        deslocamentosGllloauxiliar (e*2)=deslocamentosGlllo (e*2);
        b=b+1;
    else
        deslocamentosGllloauxiliar (e*2-1)=deslocamentosGlllo (e*2-1-b);
        deslocamentosGllloauxiliar (e*2)=deslocamentosGlllo (e*2-b);
        b=b+1;
    end
end
clear b h
deslocamentosGllloauxiliar;
deslocamentosGl=zeros (GL,1);
for e=1:numero denos;
    if rem (e,2)==0
        deslocamentosGl (e*2-1:e*2)= deslocamentosGllloauxiliar (e*2-
1:e*2);
    else
        if (ang (e)>=0) && (ang (e)<=90) || (ang (e)==360)
            deslocamentosGl (e*2-1:e*2)=[cosd (ang (e)) -
sind (ang (e));sind (ang (e)) cosd (ang (e))] *deslocamentosGllloauxiliar (e*2-
1:e*2);
        else if (ang (e)>90) && (ang (e)<180)
            deslocamentosGl (e*2-1:e*2)=[-cosd (180-ang (e)) -
sind (180-ang (e));sind (180-ang (e)) -cosd (180-
ang (e))] *deslocamentosGllloauxiliar (e*2-1:e*2);
        else if (ang (e)==180)

```

```

deslocamentosGl(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e)) sind(ang(e));sind(ang(e))
cosd(ang(e))]*deslocamentosGllauxiliar(e*2-1:e*2);
    else if (ang(e)>180)&&(ang(e)<270)
        deslocamentosGl(e*2-1:e*2)=[-sind(270-
ang(e)) cosd(270-ang(e));-cosd(270-ang(e)) -sind(270-
ang(e))]*deslocamentosGllauxiliar(e*2-1:e*2);
    else if(ang(e)==270)
        deslocamentosGl(e*2-
1:e*2)=[cosd(ang(e)) -sind(ang(e));sind(ang(e))
cosd(ang(e))]*deslocamentosGllauxiliar(e*2-1:e*2);
    else if (ang(e)>270)&&(ang(e)<360)
        deslocamentosGl(e*2-
1:e*2)=[cosd(360-ang(e)) sind(360-ang(e));-sind(360-ang(e)) cosd(360-
ang(e))]*deslocamentosGllauxiliar(e*2-1:e*2);
    end
end
end
end
end
end
end
deslocamentosGl;
%Ciclo que permite construir e resolver o sistema de equações que
%permite obter U2 e V2
%coordenadasdosnospd:vector com a posição dos nós iniciais e finais na
%posição da estrutura deformada
U=zeros(GL,1);
e=1;
while e<=numerodenos
    coordenadasdosnosauxiliar(e*2-1)= xx(e);
    coordenadasdosnosauxiliar(e*2)= yy(e);
    e=e+1;
end
clear e
e=1;
i=3;
while e<=numerodenos
    if e*2-1==i||e*2==i+1
        coordenadasdosnospd(e*2-1:1:e*2)=deslocamentosGl(e*2-1:1:e*2)';
        i=i+4
    else
        coordenadasdosnospd(e*2-1:1:e*2)=coordenadasdosnosauxiliar(e*2-
1:1:e*2)'+deslocamentosGl(e*2-1:1:e*2);
    end

e=e+1;
end
clear e i
coordenadasdosnospd;
%deslocamentos1: vector dos deslocamentos de cada elemento em
coordenadas
%locais
deslocamentos1=zeros(numerodenos,1);

```

```

for e=1:numeroelementos;
% grauslibelemento: graus de liberdade do elemento
indice=nosdoselementos(e,:);
grauslibelemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
xa=xx(indice(3))-xx(indice(1));
ya=yy(indice(3))-yy(indice(1));
L=sqrt(xa*xa+ya*ya);
l=xa/L;
m=ya/L;
deslocamentos1(indice)=[l m 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 1
m]*deslocamentosG1(grauslibelemento);
end
deslocamentos1;
%vrect: vector que define a recta que passa pelos 3 pontos que
constituem cada elemento
%vrectinicial: vector que define a recta inicial do sistema global
%sobrepota na recta que define a barra deformada a iniciar no nó final
ou
%inical consoante o valor de u2 e termina na posição média da recta
sem considerar a deformação
%posi: posição onde se pretende encontrar os valores de U2 e V2
vrect=zeros(numeroelementos,2);
vrectinicial=zeros(numeroelementos,2);
posi=zeros(numeroelementos,1);
for e=1:numeroelementos;
indice=nosdoselementos(e,:);
grauslibelemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
xa=xx(indice(3))-xx(indice(1));
ya=yy(indice(3))-yy(indice(1));
L=sqrt(xa*xa+ya*ya);
grausliactivoelement=intersect(grauslibelemento,grauslibactivos);
i=setdiff(grausliactivoelement,[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]);
vrect(e,1)=coordenadasdosnospd(indice(3)*2-1)-
coordenadasdosnospd(indice(1)*2-1);
vrect(e,2)=coordenadasdosnospd(indice(3)*2)-
coordenadasdosnospd(indice(1)*2);
vrectinicial(e,:)=(1/2)*(L/(sqrt(vrect(e,1)*vrect(e,1)+vrect(e,2)*vrec
t(e,2))))*vrect(e,:);

if round(deslocamentos1(indice(3))-deslocamentos1(indice(1)),14)==0

posi(e)=0.5;
c(1)=(coordenadasdosnospd(indice(1)*2-1)+posi(e)*vrect(e,1))-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-1);
c(2)=(coordenadasdosnospd(indice(1)*2)+posi(e)*vrect(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);

U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+round(c',14);
clear c
deslocamentosG(i)=U(i);
deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1 indice(3)*2])
=deslocamentosG1([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]);

```

```

elseif deslocamentos1(indice(1))==0 && deslocamentos1(indice(2))>0
posi(e)=((sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*v
rectinicial(e,2)))+deslocamentosG1(i(2)-
1))/(sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*vrecti
nicial(e,2)));
c(1)=(coordenadasdosnosspd(indice(1)*2-
1)+posi(e)*vrectinicial(e,1))-coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-
1);
c(2)=coordenadasdosnosspd(indice(1)*2)+posi(e)*vrectinicial(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);
U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+c';
deslocamentosG(i)=U(i);
deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]) = deslocamentosG1([indice(1)*2-1 indice(1)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2]);
clear c
elseif deslocamentos1(indice(1))==0 && deslocamentos1(indice(2))<0
posi(e)=((sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*v
rectinicial(e,2)))-(deslocamentosG1(i(2)-1))*-
1)/(sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*vrectin
icial(e,2)));
c(1)=(coordenadasdosnosspd(indice(1)*2-
1)+posi(e)*vrectinicial(e,1))-coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-
1);
c(2)=coordenadasdosnosspd(indice(1)*2)+posi(e)*vrectinicial(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);
U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+c';
deslocamentosG(i)=U(i);
deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]) = deslocamentosG1([indice(1)*2-1 indice(1)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2]);
clear c
elseif deslocamentos1(indice(1))<0&& deslocamentos1(indice(2))<0
posi(e)=((sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*v
rectinicial(e,2)))+(deslocamentosG1(i(2)-1))*-
1)/(sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*vrectin
icial(e,2)));
c(1)=(coordenadasdosnosspd(indice(1)*2-
1)+posi(e)*vrectinicial(e,1))-coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-
1);
c(2)=coordenadasdosnosspd(indice(1)*2)+posi(e)*vrectinicial(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);
U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+c';
deslocamentosG(i)=U(i);
deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]) = deslocamentosG1([indice(1)*2-1 indice(1)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2]);
clear c
elseif deslocamentos1(indice(1))<0&& deslocamentos1(indice(2))>0
posi(e)=((sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*v
rectinicial(e,2)))+deslocamentosG1(i(2)-
1))/(sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*vrecti
nicial(e,2)));
c(1)=(coordenadasdosnosspd(indice(1)*2-
1)+posi(e)*vrectinicial(e,1))-coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-
1);

```

```

c(2)=coordenadasdosnosspd(indice(1)*2)+posi(e)*vrectinicial(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);
    U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+c';
    deslocamentosG(i)=U(i);
    deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]) = deslocamentosGl([indice(1)*2-1 indice(1)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2]);
    clear c
    elseif deslocamentosl(indice(1))>0 && deslocamentosl(indice(2))>0

posi(e)=((sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*v
rectinicial(e,2)))-deslocamentosGl((i(2)-
1)))/(sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*vrect
inicial(e,2)));
    c(1)=(coordenadasdosnosspd(indice(1)*2-
1)+posi(e)*vrectinicial(e,1)-coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-
1);
    c(2)=coordenadasdosnosspd(indice(1)*2)+posi(e)*vrectinicial(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);
    U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+c';
    deslocamentosG(i)=U(i);
    deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]) = deslocamentosGl([indice(1)*2-1 indice(1)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2]);
    clear c
else

posi(e)=((sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*v
rectinicial(e,2)))-deslocamentosGl(i(2)-1))*-
1/(sqrt(vrectinicial(e,1)*vrectinicial(e,1)+vrectinicial(e,2)*vrectin
icial(e,2)));
    c(1)=(coordenadasdosnosspd(indice(1)*2-
1)+posi(e)*vrectinicial(e,1)-coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2-
1);
    c(2)=coordenadasdosnosspd(indice(1)*2)+posi(e)*vrectinicial(e,2)-
coordenadasdosnosauxiliar(indice(2)*2);
    U(e*4-1:e*4)=U(e*4-1:e*4)+c';
    deslocamentosG(i)=U(i);
    deslocamentosG([indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(3)*2-1
indice(3)*2]) = deslocamentosGl([indice(1)*2-1 indice(1)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2]);
    clear c

end
end
deslocamentosG;
%obter o vector deslocamento global e local nos apoios com rotaçao
for e=1:numero de elementos;
indice=nosdosedelementos(e,:);
grauslibelemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
deslocamentosGllloauxiliar(indice(2)*2-
1:indice(2)*2)=deslocamentosG(indice(2)*2-1:indice(2)*2);
end
% ciclo para desconsiderar resultados residuais, todos os
deslocamentos na casa dos nanômetros passam a 0

```

```

e=1;
while e<=size(deslocamentosG,1)

    if round(deslocamentosG(e),9)==0
        deslocamentosG(e)=0;
    else
        end
        e=e+1;

end

clear e

% reacções em coordenadas locais dos apoios, caso o ângulo do apoio
seja 0° ou 360°, as coordenadas locais são coincidentes com as Globais

R=KGeLap*deslocamentosG\loauxiliar-forceGL\loap;
R(grauslibprescritosGL\lo);

%Obter o vector RGl, reacções em variáveis Globais

RGl=zeros(GL,1);

for e=1:numero denos;
if rem(e,2)==0
else
    if (ang(e)>=0) && (ang(e)<=90) || (ang(e)==360)

        RGl(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e)) -sind(ang(e));sind(ang(e))
cosd(ang(e))]*R(e*2-1:e*2);

        else if (ang(e)>90) && (ang(e)<180)

            RGl(e*2-1:e*2)=[-cosd(180-ang(e)) -sind(180-
ang(e));sind(180-ang(e)) -cosd(180-ang(e))]*R(e*2-1:e*2);

        else if (ang(e)==180)

            RGl(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e))
sind(ang(e));sind(ang(e)) cosd(ang(e))]*R(e*2-1:e*2);

        else if (ang(e)>180) && (ang(e)<270)

            RGl(e*2-1:e*2)=[-sind(270-ang(e))
cosd(270-ang(e));-cosd(270-ang(e)) -sind(270-ang(e))]*R(e*2-1:e*2);

        else if (ang(e)==270)

            RGl(e*2-1:e*2)=[cosd(ang(e)) -
sind(ang(e));sind(ang(e)) cosd(ang(e))]*R(e*2-1:e*2);

        else if (ang(e)>270) && (ang(e)<360)

```

```

                                RG1(e*2-1:e*2)=[cosd(360-ang(e))
sind(360-ang(e));-sind(360-ang(e)) cosd(360-ang(e))]*R(e*2-1:e*2);

                                end
                                end
                                end
                                end
                                end
                                end

end
end
RG1(grauslibprescritosG1);
deslocamentosG;
% tensões nos elementos
for e=1:numeroelementos;
indice=nosdoselementos(e,:);
grauslibelemento=[indice(1)*2-1 indice(1)*2 indice(2)*2-1 indice(2)*2
indice(3)*2-1 indice(3)*2];
xa=xx(indice(3))-xx(indice(1));
ya=yy(indice(3))-yy(indice(1));
L=sqrt(xa*xa+ya*ya);
l=xa/L;
m=ya/L;
T=[l m 0 0 0 0;0 0 1 m 0 0;0 0 0 0 1 m];
syms x
B=diff([(2*x*x)/(L*L)-(3*x)/L+1,((4*x)/L)-(4*x*x)/(L*L),(2*x*x)/(L*L)-
x/L]);
Bf=subs(B,x,L);
Bc=subs(B,x,L/2);
Bi=subs(B,x,0);

sigmaf(e)=E(e)*double(Bf)*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
sigmac(e)=E(e)*double(Bc)*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
sigmai(e)=E(e)*double(Bi)*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
sigmaf(e)=round(sigmaf(e),8);
sigmac(e)=round(sigmac(e),8);
sigmai(e)=round(sigmai(e),8);
sigma(indice)=[sigmai(e) sigmac(e) sigmaf(e)];

FAxialf(e)=EA(e)*double(Bf)*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
FAxialc(e)=EA(e)*double(Bc)*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
FAxiali(e)=EA(e)*double(Bi)*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
FAxialf(e)=round(FAxialf(e),8);
FAxialc(e)=round(FAxialc(e),8);
FAxiali(e)=round(FAxiali(e),8);

FAxial(e)=EA(e)*B*T*deslocamentosG(grauslibelemento);
end
%Apresentação de Resultados
sigmaMPa=zeros(numeroelementos,1);
for e=1:numeroelementos;
indice=nosdoselementos(e,:);
sigmaMPa(e)=max(sigma(indice))*10e-7;
end

```

```
disp('Tensão Normal Máxima[MPa]')
elem=1:numeroelementos;
format short
[elem' sigmaMPa]

for e=1:numeroelementos;
indice=nosdoselementos(e,:);
sigmaMPa(e)=min(sigma(indice))*10e-7;
end

disp('Tensão Normal Mínima[MPa]')
elem=1:numeroelementos;
format short
[elem' sigmaMPa]

%Deslocamentos em coordenadas globais
deslocamentosmm=deslocamentosG*10e2;
disp('Deslocamentos[mm]')
jj=1:GL;
format short
[jj' deslocamentosmm]

% Reacções nos nós em coordenadas locais

Reaccoes=R(grauslibprescritosGLlo)*0.001;
disp('Reacções,coordenadas locais [kN]')
format short
[grauslibprescritosGLlo Reaccoes]

% Reacções nos nós em coordenadas Globais

ReaccoesGl=RGl*0.001;
disp('Reacções,coordenadas Globais [kN]')
format short
[jj' ReaccoesGl]
```