



# DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA DE APOIO AO PLANEAMENTO AGREGADO DA PRODUÇÃO

**CAROLINA SOFIA ALVARENGA LOPES**

Setembro de 2023

# DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA DE APOIO AO PLANEAMENTO AGREGADO DA PRODUÇÃO

Carolina Sofia Alvarenga Lopes

**2022/2023**

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

isen

P.PORTO

# DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA DE APOIO AO PLANEAMENTO AGREGADO DA PRODUÇÃO

Carolina Sofia Alvarenga Lopes

1181001

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação do Doutor André Borges Guimarães Serra e Santos.

**2023**

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

isen

P.PORTO

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, desejo expressar a minha sincera gratidão ao meu orientador, Dr. André Borges Guimarães Serra e Santos, pela sua constante disponibilidade, incentivo e valiosas recomendações ao longo do desenvolvimento desta dissertação. Sem a sua orientação e apoio, a conclusão deste trabalho não teria sido possível.

À minha mãe, quero agradecer pelo apoio constante e pela motivação que me deu ao longo deste projeto.

Também não posso deixar de mencionar os meus colegas de curso e amigos, Beatriz Silva e Hugo Derriça, que estiveram ao meu lado durante todo o meu percurso acadêmico, incentivando-me a chegar até aqui.

E aos meus colegas de trabalho, obrigado por sempre me apoiarem nesta fase desafiadora.

A todos vocês, o meu sincero agradecimento por fazerem parte desta jornada e por terem contribuído para o meu sucesso neste trabalho.

página propositadamente em branco

## RESUMO

A otimização dos processos numa empresa torna-se cada vez mais essencial no crescimento de uma empresa. Para enfrentar a concorrência, é indispensável fazer um planeamento dos processos que a empresa realiza.

Este trabalho incidiu no estudo do Planeamento Agregado da Produção com o objetivo de otimizar o sistema produtivo de uma empresa. O princípio do (PAP) é ajustar a capacidade de produção à previsão da procura. Este método permite determinar: níveis de produção e stock, contratações e demissões de funcionários, número de horas extras, atrasos e satisfação da procura de modo a atingir os menores custos possíveis.

Para o decorrer deste trabalho, é pretendido apresentar e desenvolver um modelo matemático que consiga atender a todas as necessidades do processo produtivo, considerando todos os aspetos desde a produtividade do pessoal até ao produto ou serviço. Foi desenvolvido um protótipo de PAP que permite obter a melhor solução de produção considerando as condições impostas.

Posteriormente, o protótipo desenvolvido de PAP foi testado e comparado com outros métodos de planeamento como o Nivelamento pela média, o Excesso e capacidade e a Adaptação á procura, de modo a determinar qual o método apresenta os melhores resultados. Todos os métodos foram testados através com valores aleatórios. Dos testes efetuados, conclui-se que o modelo matemático desenvolvido apresenta a melhor solução, no entanto, uma ótima alternativa a este método é o Nivelamento pela Média que apresentou bons resultados. Para confirmar os resultados foram realizados testes estáticos, que permitiram concluir que existe uma diferença significativa entre as médias dos grupos uma vez que o valor  $p$  ( $<,001$ ) é muito inferior ao valor de  $\alpha$  de 0,05. Dos testes realizados, destaca-se o protótipo PAP que para além de ter um  $p$ -value muito inferior a 0,05 apresenta a melhor média entre os grupos.

## PALAVRAS-CHAVE

Planeamento Agregado da Produção (PAP); *Mixed Integer Linear Programming*; Otimização; Excel; ANOVA.

página propositadamente em branco

## ABSTRACT

Optimizing a company's processes is becoming increasingly essential for its growth. In order to face up to the competition, it is essential to plan the processes that the company carries out.

This work focused on the study of Aggregate Production Planning with the aim of optimizing a company's production system. The principle of PAP is to adjust production capacity to forecast demand. This method makes it possible to determine: production and stock levels, hiring and firing of employees, number of overtime hours, delays and meeting demand in order to achieve the lowest possible costs.

The aim of this work is to present and develop a mathematical model that can meet all the needs of the production process, considering all aspects from staff productivity to the product or service. A PAP prototype has been developed that allows the best production solution to be obtained considering the conditions imposed.

Subsequently, the developed PAP prototype was tested and compared with other planning methods such as Average Leveling, Excess Capacity and Adaptation to Demand, in order to determine which method gives the best results. All the methods were tested using random values.

From the tests carried out, it can be concluded that the mathematical model developed presents the best solution; however, an excellent alternative to this method is Leveling by Average, which showed good results. To confirm the results, static tests were carried out, which concluded that there is a significant difference between the means of the groups since the p-value ( $<.001$ ) is much lower than the  $\alpha$ -value of 0.05. Of the tests carried out, the PAP prototype stands out as having a p-value much lower than 0.05 and the best average between the groups.

## KEYWORDS

Aggregate Production Planning (APP); Mixed Integer Linear Programming; Optimization; Excel; ANOVA.

página propositadamente em branco

# ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS .....	IX
ÍNDICE DE TABELAS .....	XI
LISTAS DE SIGLAS E SÍMBOLOS.....	XIII
1. INTRODUÇÃO .....	15
1.1. Enquadramento.....	15
1.2. Objetivos .....	15
1.3. Metodologia .....	16
1.4. Estrutura.....	16
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
2.1. A Investigação Operacional.....	18
2.1.1. Modelação Matemática .....	21
2.1.2. Programação Linear .....	21
2.1.3. Método Simplex.....	22
2.1.4. Programação Não Linear.....	23
2.1.5. Ferramenta Solver do Microsoft Excel.....	24
2.2. Planeamento e Programação da Produção.....	24
2.2.1. Planeamento Agregado da Produção .....	25
2.3. Modelos de Programação Linear .....	26
2.3.1. Modelo de (Yalcin, 2019) .....	26
2.3.2. Modelo de (Techawiboonwong & Yenradee, 2003) .....	27
2.3.3. Modelo de (Ur Rehman et al., 2021) .....	33
2.4. Modelos de Programação Não Linear .....	36
2.4.1. Modelo de (Tirkolaei et al., 2022).....	36
2.5. Análise Crítica e Outros Modelos.....	40
3. MÉTODOS E APLICAÇÃO .....	45
3.1. Formulação matemática .....	45
3.1.1. Modelo 1 .....	45
3.1.2. Modelo 2 .....	48
3.1.3. Modelo Final .....	50
3.2. Protótipo de Otimização .....	53
3.2.1. Inserir os Dados (Botão “Insert Data”) .....	54
3.2.2. Otimização (Botão “Solve”).....	55
3.2.3. Resultados (Botão “Show Results”).....	56
3.2.4. Outras Opções (Botão “Clean”).....	58
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	59
4.1. Apresentação de resultados.....	60
4.2. Discussão de Resultados .....	62

---

4.2.1. Teste ANOVA.....	62
4.2.2. Teste Post-Hoc .....	63
5. CONCLUSÃO .....	67
5.1. Conclusões finais .....	67
5.2. Limitações e trabalhos futuros.....	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	71
APÊNDICE A .....	75
APÊNDICE B .....	76

página propositadamente em branco



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Interface do Protótipo PAP .....	53
Figura 2 - Instruções para a correr a ferramenta .....	54
Figura 3 – Folha Excel Output .....	55
Figura 4 - Caixa de Texto do Resultado .....	56
Figura 5 - Gráfico de resultados: Nível de produção (a) .....	57
Figura 6 - Gráfico de resultados: Nível de stock (b) .....	57
Figura 7 - Gráfico de resultados: Número de trabalhadores (c) .....	58

página propositadamente em branco

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Informação sobre as variáveis do modelo.....	26
Tabela 2 - Valores de preço, custo e lucro unitário dos produtos .....	26
Tabela 3 - Quantidade de leite utilizada por unidade.....	26
Tabela 4 – Dias de trabalho e procura por período .....	32
Tabela 5 – Parâmetros dos tipos de produto .....	32
Tabela 6 - Dados e parâmetros necessários para o Protótipo PAP.....	54
Tabela 7 - Resultados: Tabela de variáveis de decisão .....	56
Tabela 8 - Dados de produção.....	60
Tabela 9 - Resultados do Protótipo PAP.....	60
Tabela 10 - Resultados obtidos através de outros métodos de planeamento de produção.....	61
Tabela 11 – ANOVA da Média dos Desvios Relativos .....	62
Tabela 12 - Teste de <i>Scheffe</i> da média dos desvios relativos .....	63
Tabela 13 - Tabela descritiva da média dos desvios relativos .....	64

página propositadamente em branco

## LISTAS DE SIGLAS E SÍMBOLOS

### Lista de Siglas

---

ISEP	Instituto Superior de Engenharia do Porto
P.Porto	Instituto Politécnico do Porto
PAP	Planeamento Agregado da Produção
IO	Investigação Operacional
PL	Programação Linear
PNL	Programação Não Linear
VBA	Visual Basic
ANOVA	Analysis Of Variance (Análise de Variância)

---

página propositadamente em branco

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Enquadramento

Atualmente a otimização de processos é fundamental para o sucesso de uma empresa. O processo até obter o produto ou serviço, começando na produtividade dos colaboradores que é diretamente influenciada pela qualidade do seu ambiente de trabalho, é passível de ser otimizado. Para isso, é imperativo fazer um bom planeamento das operações a serem realizadas.

O Planeamento e Programação da Produção permite melhorar as condições de trabalho dos colaboradores e minimizar os custos associados à atividade da organização, atendendo, da melhor forma possível, as expectativas do cliente no que diz respeito à qualidade, custo, prazos de entrega, etc. (Diogo & Soares Mateus, n.d.).

Desde a Revolução Industrial que presenciamos o aumento da especialização das organizações. Apesar dos bons resultados, a crescente complexidade torna cada vez mais difícil para uma empresa a alocação dos recursos disponíveis às suas atividades com eficiência. Para este tipo de problemas, surgiu a necessidade de simplificar os métodos para encontrar soluções, o que levou à utilização da Investigação Operacional (IO) nestes contextos (Hillier & Lieberman, 2006).

Nas empresas da área industrial, a gestão da produção é uma componente bastante importante do seu funcionamento, sem ela pode-se originar desorganização a nível da produção que pode criar situações críticas e pôr em causa toda a fiabilidade que deve ser transmitida a um cliente. Como sistema intrínseco a esta gestão existe o planeamento, programação e controlo da produção, o qual é fundamental para coordenar todas as atividades inerentes à satisfação da procura do mercado (Carvalho Da Fonseca, 2009)

O aumento da competitividade tornou a IO mais importante em sistemas programação da produção, gestão de qualidade Seis-Sigma, técnicas de inventário Just-in-time (JIT). O crescimento dos mercados e o conseqüente aumento da concorrência destacaram a necessidade da IO. Para serem competitivas, as empresas devem enfrentar os desafios presentes no mercado, oferecendo produtos e serviços de valor aos seus clientes. (Ramaiyer Subramanian et al., 2010)

## 1.2. Objetivos

O propósito deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta de apoio do planeamento da produção em VBA. Nomeadamente, uma ferramenta que permita otimizar o PAP (Planeamento Agregado da Produção) e assim reduzir os custos de produção.

Estão ainda definidos como objetivos secundários, os seguintes pontos:

- Identificar e apresentar os fatores influentes para o sistema produtivo de uma empresa;
- Estudo do método mais adequado para o desenvolvimento de uma ferramenta de apoio ao planeamento da produção;

- Validar a ferramenta para que seja capaz de se ajustar a outros contextos e organizações através de casos de estudo relevantes.

### 1.3. Metodologia

A palavra Metodologia vem do grego composta pelos vocábulos: meta que significa para além de; odòs, caminho; logos, discurso ou estudo. Metodologia pode ser definida como o estudo de um conjunto de procedimentos que contribuem para a obtenção do conhecimento através dos vários caminhos disponíveis. (Manuel Da et al., 2020)

A investigação científica inicia-se com a identificação de uma pergunta para a qual ainda não tem resposta ou para a qual o conhecimento existente é insuficiente ou inadequado. Para isso, é necessário construir uma resposta, oferecendo provas de segurança e confiança que a justifiquem (de preferência, que seja correta). (Köche, 2011)

Para a elaboração de um processo de investigação é necessário em definir os objetivos do mesmo e efetuar uma pesquisa baseada em fundamentos científicos que abordem temas ou questões semelhantes. Para o trabalho proposto são necessários conhecimentos técnicos e científicos sobre a área da Investigação Operacional que irão permitir formular uma possível solução para o problema estudado.

A metodologia utilizada para este trabalho foi a investigação teórica. Para o desenvolvimento deste trabalho, recorreu-se, essencialmente, à pesquisa bibliográfica e casos de estudo sobre os temas em que a proposta do trabalho se enquadra.

De maneira a validar a ferramenta proposta, a mesma, vai ser analisada num extenso estudo computacional, onde será comparada com outras técnicas de otimização em problemas académicos.

### 1.4. Estrutura

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo é dedicado ao enquadramento do trabalho.

O segundo capítulo contém a fundamentação teórica para o desenvolvimento do trabalho. É abordada a contextualização da investigação operacional assim como as suas aplicações e modelos matemáticos. É também feita uma abordagem sobre o Planeamento e Programação da Produção e como a IO pode ser vantajosa para esta área. Posteriormente são apresentados casos de estudo sobre como foram aplicados modelos matemáticos para a resolução de problemas de programação de produção.

Os seguintes capítulos, 3 e 4, são dedicados ao desenvolvimento da ferramenta e apresentação de resultados. No terceiro capítulo é descrita a formulação matemática e o funcionamento da ferramenta e no quarto capítulo são apresentados os resultados de problemas académicos obtidos com a ferramenta desenvolvida.

O último e quinto capítulo desenvolve as conclusões e limitações finais sobre a realização desta dissertação.



## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O presente capítulo desenvolve a revisão literária que serviu de fundamento teórico para o desenvolvimento do trabalho. É feita uma apresentação da Investigação Operacional e das suas aplicações assim como os métodos para a resolução de problemas. Para abordar problemas de programação linear será focado o Algoritmo Simplex (que serviu de base para o caso de estudo).

### 2.1. A Investigação Operacional

A Investigação Operacional (IO) é um ramo da matemática aplicada que utiliza modelos matemáticos e estatísticos para auxiliar no processo de decisão.

A Investigação Operacional utiliza uma ampla série de técnicas e métodos para a resolução de problemas de decisão. Uma das suas principais técnicas (que é abordada ao longo deste trabalho) para modelar problemas de decisão é a Programação Linear.

A implementação da IO numa empresa produtiva pode trazer benefícios a nível competitivo. Segundo (Ferreira Garcia & Pinheiro Bueno, 2020), estas são as principais:

- Tomada de decisões acertadas;
- Redução de erros e falhas operacionais;
- Maximização de resultados e desempenho;
- Melhoria do controlo de processos;
- Resolução de problemas de forma precisa;
- Melhoria no potencial competitivo da empresa;
- Soluções adequadas ao objetivo organizacional;
- Redução de custos e aumento da economia empresarial;
- Melhoria da produtividade.

Historicamente, a investigação operacional surgiu no início da 2ª Guerra Mundial, quando os serviços militares sentiram a necessidade urgente de alocar os seus escassos recursos para várias operações militares de forma eficaz. Para isso, a administração britânica, e mais tarde a Americana, criou uma equipa de investigação operacional para aplicarem uma abordagem científica de modo a ser possível lidar com este e outros problemas estratégicos.

No final da guerra, e no seguimento do sucesso da IO, começou a surgir o interesse em aplicar a IO em outras áreas nomeadamente no ramo industrial (despoletado pelo crescimento industrial por volta da década de 1950) (Hillier & Lieberman, 2010). Os cientistas, após o conhecimento dos resultados obtidos durante a guerra, foram motivados a desenvolver modelos relevantes para o crescimento desta área. Um exemplo foi George Dantzig, conhecido por contribuir na redução de custos militares, que desenvolveu em 1947 um método para a resolução de problemas de programação linear, o método Simplex (Ferreira Garcia & Pinheiro Bueno, 2020).

Um outro grande fator que impulsionou a IO, foi a revolução do computador, o desenvolvimento dos computadores com uma capacidade em realizar cálculos aritméticos milhões de vezes mais rápido que o ser humano, permitiu um enorme crescimento na área da investigação operacional. (Hillier & Lieberman, 2010)

Na aplicação do método da IO, identificam-se tipicamente as seguintes fases:

1. Definir o problema de interesse e coletar dados;
2. Formular um modelo matemático para representar o problema;
3. Desenvolver um procedimento computacional a fim de derivar soluções para o problema a partir do modelo;
4. Testar o modelo e adaptá-lo conforme necessário;
5. Preparar-se para a aplicação contínua do modelo;
6. Implementar (Hillier & Lieberman, 2006).

### **1. Definir o problema - A análise do problema**

A análise de decisão/problema adiciona clareza na resolução do problema. Ela fornece uma estrutura aos dados do problema permitindo dividi-los em partes mais pequenas e mais fáceis para que possam ser analisadas individualmente. Esta análise identifica os inputs mais importantes e, que por isso, merecem mais atenção.

A modelação matemática inicia-se apenas quando as ideias do “tomador de decisão” sobre o problema estão totalmente desenvolvidas.

Uma grande vantagem desta análise, é a capacidade de reduzir a complexidade do problema. Apesar do problema ser analisado isoladamente, no fim é realizada uma análise da estatura geral do problema eliminando o risco de esquecer relações importantes entre os dados fornecidos (Clemen & Reilly, 2013).

### **2. Formular o modelo matemático**

Um modelo matemático é uma representação de um problema real através de fórmulas matemáticas. Ele pode ser utilizado para tomar decisões ou simplesmente para estruturar o problema para uma melhor compreensão (Winston, 2004).

Os modelos matemáticos apresentam muitas vantagens em relação a uma descrição verbal do problema pois descrevem o problema de forma muito mais concisa. A modelação matemática torna mais compreensível a estrutura geral do problema e ajuda a revelar importantes relacionamentos causa-efeito e assim indicar quais os dados que são relevantes para a análise (Hillier & Lieberman, 2006).

Ao desenvolver o modelo, um método eficiente é iniciar com uma versão mais simples e, progressivamente, ir avançando para modelos mais elaborados que reflitam de forma mais próxima a complexidade do problema na realidade.

### **3. Desenvolvimento computacional**

Após a formulação de um modelo matemático para o problema em questão, a próxima fase num estudo de IO é o desenvolvimento de um procedimento para determinar soluções viáveis para o problema desse modelo. (Hillier & Lieberman, 2006)

O melhor meio para validar os modelos matemáticos, atualmente, é com recurso a softwares desenvolvidos para correrem os algoritmos de tomada de decisão, como por exemplo, a utilização o Solver do EXCEL.

### **4. Testar o modelo**

Ao desenvolver um modelo matemático de grandes dimensões, inevitavelmente a primeira versão terá alguns erros que necessitam de correção. Após uma longa sucessão de correções, o programador ou equipa de programação, concluíra o modelo e obtém resultados válidos.

Esse processo de teste e aperfeiçoamento de um modelo para aumentar sua validade é comumente referido como validação de modelos (Hillier & Lieberman, 2006).

A qualidade e aplicabilidade do modelo são determinados através da validação do modelo matemático. Esta validação produz informação para auxiliar a equipa de tomada de decisão a aceitar ou rejeitar o modelo proposto, avaliando se o modelo tem potencial para justificar os meios (Landry et al., 1983).

### **5. Aplicação do modelo**

Após um procedimento de validação do modelo e solução, pode se iniciar a aplicação do modelo. Um sistema interativo desenvolvido em computador denominado sistema de apoio à decisão é aplicado para ajudar os gerentes a utilizar dados e modelos para dar suporte (e não substituir) às suas decisões, conforme necessário. Nesta fase, à medida que as condições mudam ao longo do tempo, este processo deve ser modificado de acordo o sistema computacional (inclusive o modelo). Na maioria destes estudos, podem ser necessários vários meses (ou mais) para desenvolver, testar e instalar o sistema computacional (Hillier & Lieberman, 2006).

### **6. Implementação**

Após o sistema estar completamente desenvolvido para aplicação de um modelo, a última fase é a implementação do sistema.

A fase de implementação pode envolver várias etapas. Primeiro, fornecer uma explicação sobre o novo sistema a ser adotado e como ele se relaciona com as realidades operacionais. De seguida, todas as partes envolvidas compartilham a responsabilidade pelo desenvolvimento de procedimentos necessários para colocar esse sistema em operação. Se for bem-sucedido, o novo sistema poderá ser usado por anos.

O sucesso da fase de implementação depende muito do suporte e da boa comunicação entre a equipa de IO pois ajuda a garantir que o estudo realizado é de encontro com o aquilo que é desejado (Hillier & Lieberman, 2006).

### 2.1.1. Modelação Matemática

A abordagem científica para a tomada de decisão envolve normalmente o uso de um ou mais modelos matemáticos.

A modelação matemática é a representação de uma situação real através de formulações matemáticas e pode ser utilizado para tomar a melhor decisão ou simplesmente para análise e otimização da situação atual. (Winston, 2004)

O processo de modelação deve ser repetido várias vezes até que o modelo que adequa a situação que se pretende estudar (Azevedo Costa, 2021). O conceito de otimização está bem enraizado na modelação matemática, concentrando a sua atenção num objetivo projetado para quantificar o desempenho a medir (G. Luenberger, 2008).

Os modelos de Programação Matemática incluem os modelos de Programação Linear, e os modelos de Programação Não Linear. (Magalhães Hill & Marques dos Santos, 2015)

### 2.1.2. Programação Linear

A Programação Linear (PL) é das áreas mais estudadas na IO e consiste num modelo matemático composto por apenas funções lineares (Alves Verga, 2021).

A popularidade da Programação Linear deve-se principalmente à sua fase de formulação e não à sua fase de solução, a matemática é mais acessível e por isso não é tão difícil de definir. A teoria é mais rica e a computação é mais simples para problemas lineares do que para problemas não lineares. A PL, muitas vezes é selecionada como a solução mais fácil ou quando se procura generalizar, mesmo que a sua função objetivo não seja puramente linear, torna-se mais fácil defini-la como um problema de programação linear. (G. Luenberger, 2008)

O modelo matemático pretende transcrever os dados fornecidos do problema a otimizar. Para isso, os componentes de um modelo de programação linear incluem:

- **Variáveis de decisão** - corresponde ao número de variáveis que se pretende determinar de modo a otimizar o objetivo definido para a função objetivo,  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )
- **Função(ões) objetivo(s)** – função linear das variáveis de decisão que se pretende maximizar ou minimizar

$$\text{Maximizar ou Minimizar } Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \quad \text{Equação 1}$$

$Z$  – Função Objetivo

$c_j$  – Coeficientes da função objetivo

- **Restrições** - limitações impostas aos valores da variável de decisão, expressa por equações ou inequações

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \quad \text{Equação 2}$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \quad \text{Equação 3}$$

...

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \quad \text{Equação 4}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{Equação 5}$$

$a_{ij}$  – Coeficientes tecnológicos

$b_i$  – Termos independentes

O modelo procura encontrar valores das variáveis de decisão que otimizem (por maximização ou minimização) da função objetivo, tendo em conta todo o conjunto de dados fornecidos e cumprindo as restrições. (Winston, 2004)

Atualmente, existem variados algoritmos matemáticos para resolver estes modelos de forma eficiente, no entanto, este trabalho será focado o método Simplex, pois é o método mais “popular”.

#### Métodos de resolução para Otimização Linear:

- **Fourier (1827):** Método para resolver sistemas de inequações lineares, considerado como o primeiro estudo de programação linear.
- **Dantzig (1947):** Método prático para solução de modelos lineares (Programming in a Linear Structure).
- **George B. Dantzig (1949):** Publicou “Simplex Method”.
- **Koopmans (1957):** formulação de problemas de programação linear em economia.
- **Karmachar (1984):** Método dos pontos interiores

### 2.1.3. Método Simplex

O algoritmo Simplex é um método amplamente utilizado para obter o melhor resultado de uma equação máxima ou mínima com restrições lineares. Esta técnica de melhoria da programação linear, originalmente proposto por Dantzig, é um processo iterativo que permite obter a melhor solução viável alterando o valor das variáveis. Em problemas de maximização, o valor é alterado até se obter o valor máximo da função objetivo, caso se se tratar de um problema de minimização, a cada iteração o valor da função objetivo vai diminuindo até encontrar a solução com o valor mais baixo. (Fearnley & Savani, 2015)

Em 1965, (Nelder & Meadf, 2011) introduziu uma adaptação do algoritmo Simplex onde adaptava um conjunto de pontos a curvaturas de funções. O método consiste na realização de uma iteração

a partir de  $n+1$  vértices como posição inicial do Simplex, de modo a alterar a forma Simplex através da reflexão, expansão, contração e redução. Estas operações levam à evolução do Simplex no espaço de decisão, que eventualmente deve convergir para a solução ótima.

De acordo com (Nelder & Mead, 2011), o Simplex adapta-se ao espaço de pesquisa e contrai-se ao mínimo final. O método se mostra eficaz e computacionalmente compacto. (Niegodajew et al., 2020)

### **Algoritmo Simplex - Metodologia**

1. **Início:** Identificar uma solução básica viável inicial.
2. **Iteração:** Procurar uma solução básica viável melhor através de um processo iterativo.
3. **Paragem:** A iteração termina quando não existe nenhuma solução básica viável melhor que a solução atual (Oliveira & Carravilla, 1998)

#### **2.1.4. Programação Não Linear**

A Programação Não Linear (PNL) é utilizada em processos de tomada de decisão em que, devido à complexidade da realidade, a função objetivo e as restrições contêm funções não lineares nas variáveis.

Em caso de problemas mais complexos ou com mais variáveis em constante mudança, a função objetivo pode ser não suave (uma função diz-se suave quando é continuamente diferenciável até à segunda ordem), não linear, descontínua, não convexa e com muitos mínimos locais. Nestes casos, os métodos da programação linear não são os mais apropriados pois podem gerar uma solução desadequada da realidade, pelo que se desenvolveu métodos iterativos da programação não linear que permita a modelação deste tipo de problemas. (Correia, 2010)

#### **Métodos de resolução para Otimização Não Linear:**

- Método de Programação Quadrática Sequencial (SQP - Sequential Quadratic Programming)
- Método de Penalidade e Barreira (Penalty and Barrier Methods)
- Método de Lagrangeana Aumentada (ALM - Augmented Lagrangian Methods)
- Método de Gradiente Reduzido (GRG - Reduced-gradient Methods)
- Método de Programação Quadrática Sequencial Admissível (FSQP – Feasible Sequential Quadratic Programming)
- Método dos Filtros (Filter Methods) (Correia, 2010)

### 2.1.5. Ferramenta Solver do Microsoft Excel

O Solver é um suplemento do Microsoft Excel para realizar análise de hipóteses que permite resolver problemas de otimização (de los Ríos & Belmonte, 2022).

Ele funciona com um grupo de células, denominadas variáveis de decisão que são utilizadas no cálculo de fórmulas nas células de objetivo e de restrição. O Solver ajusta os valores das células de variáveis de decisão de modo a satisfazer os limites das células de restrição e produzir o resultado pretendido na célula da função objetivo. Por outras palavras, o Solver pode ser utilizado para determinar o valor máximo ou mínimo de uma célula ao alterar o valor de outras células focando-se na obtenção de uma região ótima e não um ótimo absoluto (Microsoft Office, 2021).

O solver permite a escolha de um de três algoritmos para a resolução do problema:

- **GRG (Generalized Reduced Gradient) Não linear:** Utilização para problemas não lineares uniformes.
- **LP Simplex:** Utilização para problemas que são lineares.
- **Evolutionary:** Utilização para problemas difíceis.

## 2.2. Planeamento e Programação da Produção

O Planeamento e Controlo da Produção é aplicado de várias formas e por isso deve ser sempre adaptável ao contexto em que se enquadra. Para isso, existem vários métodos para o planeamento que destacam diferentes aspetos do planeamento da produção, como por exemplo: matéria-prima, procura, número de unidades produzidas, número de horas de trabalho, mão-de-obra, stock, etc. Desta forma, é de grande importância que cada empresa utilize o método mais adequado que corresponda às suas necessidades. (Ramos Cruz, 2018)

Podemos caracterizar uma operação como um trabalho contínuo com uma gestão de custos cíclica e parcial realizado por pessoas, preferencialmente, alocadas ao projeto (Frisanco & Anglberger, 2008)

O Planeamento e Controlo da Produção é importante para um bom desempenho de um sistema produtivo. Ele permite definir no tempo:

- Os produtos e respetivas quantidades a produzir;
- As correções necessárias introduzir no sistema produtivo quando se verificam desvios significativos do que foi planeado em relação ao que foi efetivamente produzido;
- A gestão eficiente do fluxo de materiais, pessoas e recursos;
- A coordenação de atividades internas (Gabriel, 2005).

Quando o planeamento da produção é elaborado a médio/longo prazo, este é designado de Planeamento da produção. Se este for elaborado a curto prazo, este é denominado de Programação da Produção (Margarida et al., 2017)

### 2.2.1. Planeamento Agregado da Produção

O Planeamento Agregado da Produção (PAP) começou a surgir há cerca de 50 anos. Apesar de não ter sido valorizado inicialmente, foi conquistando importância quando se começou a verificar as vantagens na utilização deste tipo de planeamento.

No seu estudo sobre o planeamento de horas anuais, (Lusa et al., 2008) propõe e desenvolve uma ferramenta que permite adaptar as horas de trabalho semanais dos colaboradores à procura, de forma a reduzir as horas extras, os custos de stock e custos em trabalhadores temporários.

A função objetivo do Planeamento Agregado da Produção (PAP) é a adaptação da capacidade de produção à procura prevista. O pretendido é reduzir situações de desfasamento entre a capacidade de produção e a procura. Este método procura determinar: níveis produção e de stock, contratação e demissão de colaboradores, número de horas extras, encomendas em atraso e satisfação da procura obtendo o menor custo e máximo lucro. Para tal, é necessário calcular os custos associados, tal como: custos de mão de obra e subcontratação, custos de manutenção de stock e rutura de stock, custos de material e custos de admissão e despedimento.

O plano que resulta do PAP funciona como ponto de partida para outros métodos como o Plano Diretor de Produção (PDP), que transforma o PAP na sua desagregação em produtos específicos ou módulos de produtos e define os períodos para a sua conclusão, e o MRP (*Materials Requirement Planning*) concebido para a gestão de fluxos de materiais. (Türkay et al., 2016)

(Türkay et al., 2016), apresenta no seu trabalho três contribuições do PAP: a introdução da sustentabilidade “através da triple *bottom line*”, o uso da Curva de Aprendizagem (*Learning Curve*) que representa o aumento de capacidade dos colaboradores e o Limite de Suavização (*Smoothing Limit*) que diminui a contratação e demissão de funcionários.

No seu estudo em 1991, Adler e Clark concluíram que a capacidade total da produção é influenciada pela experiência dos colaboradores. De acordo com as suas conclusões, um colaborador recém-contratado trabalha a 70% do seu desempenho máximo nos três primeiros meses, cerca de 80% entre o terceiro e sexto mês, e nos restantes seis meses trabalham a 90% do seu nível de desempenho. Esta linha de aprendizagem ajuda a tornar os custos de admissão mais realísticos em vez de considerar que um recém-contratado irá produzir com o seu máximo de desempenho quando é admitido. <

A demissão de colaboradores, provoca descontentamento e diminuição na motivação dos restantes assim como a contratação de um número significativo de colaboradores diminui a coordenação entre funcionários. O Limite de Suavização (*Smoothing Limit*) é um método que pretende diminuir este efeito da contratação e demissão de funcionários com base no seu número inicial.

## 2.3. Modelos de Programação Linear

### 2.3.1. Modelo de (Yalcin, 2019)

O objetivo deste estudo, consiste na construção de um modelo de equações lineares que permitam a otimização do planeamento de produção para uma empresa de produtos laticínios.

O estudo foi desenvolvido numa empresa situada na Turquia constituída por 10 trabalhadores. As variáveis,  $x_1, x_2, \dots, x_5$  representam os produtos produzidos. As tabelas Tabela 1, Tabela 2 e Tabela 3, mostram os dados iniciais da empresa.

Tabela 1 - Informação sobre as variáveis do modelo

Símbolo do Produto	Nome do produto	Procura (unid.)	Capacidade de produção	Quantidade produzida
$x_1$	Manteiga	50-150	135	65
$x_2$	logurte	1000-2000	1676	1200
$x_3$	Queijo Feta	150-300	270	198
$x_4$	Queijo Kashar	150-300	275.4	210
$x_5$	Ayran	500-150	1224	1150

Tabela 2 - Valores de preço, custo e lucro unitário dos produtos

Símbolo do Produto	Nome do produto	Preço unitário	Custo unitário	Lucro unitário
$x_1$	Manteiga	13	11.5	1.50
$x_2$	logurte	3.1	3	0.1
$x_3$	Queijo Feta	7.5	7.25	0.25
$x_4$	Queijo Kashar	13	12	1
$x_5$	Ayran	0.5	0.49	0.01

Tabela 3 - Quantidade de leite utilizada por unidade

	Manteiga	logurte	Queijo Feta	Queijo Kashar	Ayran
Quantidade de leite processado necessário (litros)	1	1.4	6.2	9.5	0.2

Foi proposto o seguinte modelo:

$$\text{Maximizar } 1.5x_1 + 0.1x_2 + 0.25x_3 + x_4 + 0.01x_5 = z \text{ (ax)} \quad \text{Equação 6}$$

$x_1 + 1.4x_2 + 6.2x_3 + 9.5x_4 + 0.2x_5 \leq 7000$	Equação 7
$50 \leq x_1 \leq 150$	Equação 8
$1000 \leq x_2 \leq 1000$	Equação 9
$150 \leq x_3 \leq 300$	Equação 10
$150 \leq x_4 \leq 300$	Equação 11
$500 \leq x_5 \leq 1500$	Equação 12
$x_1 \leq 135$	Equação 13
$x_2 \leq 1676$	Equação 14
$x_3 \leq 270$	Equação 15
$x_4 \leq 275.4$	Equação 16
$x_5 \leq 1224$	Equação 17
Onde:	
$x_j, 1 < j < 5$	Equação 18

Este modelo estudou os lucros da produção dos laticínios considerando que a quantidade de leite fornecida à empresa pode variar entre os 6000 e os 7000 litros.

A função objetivo deste modelo é maximizar os lucros da empresa aumentando a quantidade de produção e é representada pela Equação 6.

Uma vez que o estudo considera que a quantidade máxima de leite fornecida à empresa é 7000 litros, a Equação 7 garante que a quantidade produzida de laticínios não ultrapassa a quantidade de leite disponível. As restrições (Equação 8), (Equação 9), (Equação 10), (Equação 11) e (Equação 12) asseguram que a quantidade produzida é suficiente para satisfazer a procura. As restantes equações (Equação 13, Equação 14, Equação 15, Equação 16, Equação 17), restringem a capacidade máxima de produção de cada produto.

### 2.3.2. Modelo de (Techawiboonwong & Yenradee, 2003)

Este estudo, apresenta o planeamento de produção agregado para vários tipos de produtos onde o recurso “trabalhador” pode ser transferido entre as linhas de produção.

A maioria das indústrias usa um período de planeamento mensal para seus planos mestres de produção (PDP). Portanto, o Plano Agregado de Produção também deve adotar o mesmo período de planeamento mensal para facilitar a desagregação do plano agregado no plano mestre de produção. A extensão do horizonte de planeamento depende da capacidade de prever a procura futura (Techawiboonwong & Yenradee, 2003).

Para o desenvolvimento do modelo matemático, foram considerados os seguintes parâmetros e variáveis de decisão:

#### Parâmetros

$m$  – Número de períodos no horizonte de planeamento

$n(t)$  – Número de dias de horário de trabalho normal por cada período  $t$

$x$  – Tipo de produto ( $x = 1, 2$ )

$h(t)$  – Número de dias de horário de feriado/folga por período  $t$

$RH$  – Número de horas de trabalho diário em horário normal

$AON$  – Número de horas extras por dia em horário normal

$AOH$  – Número de horas extras por dia em horário de feriado

$MIN W_x$  – Número mínimo de trabalhadores por cada linha de produção

$MAX W_x$  – Número máximo de trabalhadores por cada linha de produção

$K_x$  – Taxa média de produção

$D_x(t)$  – Procura do produto  $x$  para o período  $t$

$SS_x(t)$  – Stock de segurança do produto  $x$  no período  $t$

$MAX ON_x(t)$  – Tempo máximo de horas extras diárias para a produção do produto  $x$  em horário normal no período  $t$

$MAX OH_x(t)$  – Tempo máximo de horas extras diárias para a produção do produto  $x$  em horário de feriado no período  $t$

$MAX I_x$  – Quantidade máxima de nível de stock do produto  $x$

$MAX Sub_x(t)$  – Número máximo de unidades produzidas por subcontratação para o produto  $x$

$CW$  – Salário médio mensal por trabalhador

$CH$  – Custos de contratação

$CL$  – Custos de despedimento

$CI_x$  – Custo médio de manutenção de stock para o produto  $x$

$CON$  – Custo de horas extras por trabalhador em horário normal

$COH$  – Custo de horas extras por trabalhador em horário de feriado

$CSub_x$  – Custo de subcontratação por cada unidade de produto  $x$

$CT_{ab}$  – Custo de transferência de trabalhadores entre linhas de produção

### **Variáveis de decisão**

$W_x$  – Número de trabalhadores para a produção do produto  $x$  no período  $t$

$WT_{ab}(t)$  – Número de trabalhadores a serem transferidos da linha de produção  $a$  para a linha de produção  $b$  no período  $t$

$H_x(t)$  – Número de trabalhadores contratados para a linha de produção do produto  $x$  no início do período  $t$

$L_x(t)$  – Número de trabalhadores despedidos da linha de produção do produto  $x$  no início do período  $t$

$ON_x(t)$  – Número de horas extras para a produção do produto  $x$  em horário normal no período  $t$

$OH_x(t)$  – Número de horas extras para a produção do produto  $x$  em horário de feriado no período  $t$

$U_x(t)$  – Número de horas de pessoal inativo na linha de produção do produto  $x$  no período  $t$

$P_x(t)$  – Quantidade total produzida do produto  $x$  no período  $t$

$I_x(t)$  – Nível de stock de produto  $x$  no final de cada período  $t$

$Sub_x(t)$  – Número de unidades subcontratadas de produto  $x$  no período  $t$

### Função objetivo

O objetivo do modelo matemático (Equação 19), é minimizar a soma do salário dos trabalhadores, custo de horas extras, custo de subcontratação, custo de manutenção de stock e custo de transferência dos trabalhadores entre cada linha de produção.

Neste modelo, o custo de transferência pode ser diferente entre cada linha de produção. Assim, a função objetivo mostrada na equação abaixo deve ter isso em consideração:

*Min. Total Custos*

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{x=1}^q \sum_{t=1}^m [CW \cdot W_x(t) + CON \cdot ON_x(t) + COH \cdot OH_x(t) + CH \\
 &\cdot H_x(t) + CL \cdot L_x(t) + CSub_x \cdot CSub_x(t) + CI_x \cdot I_x(t)] \quad \text{Equação 19} \\
 &+ \sum_{a=1}^q \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^q CT_{ab} \sum_{t=1}^m WT_{ab}(t)
 \end{aligned}$$

### Restrições:

- **Trabalhadores**

Neste estudo, o número de trabalhadores para cada período é igual ao número de trabalhadores do período anterior mais o número de trabalhadores contratados no início desse período, mais o número de trabalhadores transferidos das outras linhas de produção, menos o número de trabalhadores despedidos no final do período anterior e menos o número de trabalhadores transferidos para as outras linhas de produção (Equação 20).

Outras restrições a ter em consideração são o número de trabalhadores necessários para operar cada linha de produção. Este valor não deve ser inferior ao limite mínimo, caso contrário, a linha de produção não pode funcionar, e não deve ultrapassar o limite máximo; pois alguns trabalhadores ficarão parados/de fora (Equação 21).

$$W_x(t) = W_x(t-1) + H_x(t) + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq x}}^q WT_{ax}(t) - L_x(t-1) - \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq x}}^q WT_{xb}(t) \quad \text{Equação 20}$$

$$\text{Min}W_x \leq W_x(t) \leq \text{Max}W_x \quad \text{Equação 21}$$

$$t = 1, 2, \dots, m; x = 1, 2, \dots, q \quad \text{Equação 22}$$

- **Stock**

O nível de stock de cada tipo de produto no final de cada período, é igual ao stock final do período anterior mais a quantidade de produtos que foram produzidos naquele período menos a procura (Equação 23).

Todas as procuras devem ser atendidas e o nível de stock não pode ser inferior ao stock de segurança especificado (Equação 24). O nível de stock não pode exceder o limite máximo permitido (Equação 25), pois os espaços são limitados.

$$I_x(t) = I_x(t-1) + P_x(t) - D_x(t) \quad \text{Equação 23}$$

$$I_x(t) \geq SS_x(t) \quad \text{Equação 24}$$

$$I_x(t) \leq \text{Max}I_x \quad \text{Equação 25}$$

$$t = 1, 2, \dots, m; x = 1, 2, \dots, q \quad \text{Equação 26}$$

- **Produção**

A quantidade de produção para cada tipo de produto em cada período (Equação 27) é igual à soma das quantidades produzidas durante o horário normal, horas extras (tanto em dias úteis quanto em feriados), e mais as quantidades subcontratadas, menos uma perda de produção devido a tempo de inatividade daquela linha de produção naquele período.

$$P_x(t) = W_x(t) \cdot K_x \cdot n(t) + (ON_x(t) + OH_x(t)) \cdot K_x / RH + Sub_x(t) - U_x(t) \quad \text{Equação 27}$$

$$\cdot K_x / RH$$

$$t = 1, 2, \dots, m; x = 1, 2, \dots, q \quad \text{Equação 28}$$

- **Horas Extras**

O total de tempo de horas extras por trabalhador não deve exceder o limite máximo permitido (Equação 29 e Equação 30). O limite (Equação 31 e Equação 32) é calculado com base no número total de trabalhadores, número de dias úteis e número de horas permitidas em cada dia em que as horas extras podem ser aplicadas

$$ON_x(t) \leq \text{Max}ON_x(t) \quad \text{Equação 29}$$

$$OH_x(t) \leq \text{Max}OH_x(t) \quad \text{Equação 30}$$

Onde:

$$\text{Max}ON_x(t) = AON \cdot n(t) \cdot W_x(t) \quad \text{Equação 31}$$

$$MaxOH_x(t) = AOH \cdot h(t) \cdot W_x(t) \quad \text{Equação 32}$$

$$t = 1, 2, \dots, m; x = 1, 2, \dots, q \quad \text{Equação 33}$$

- **Subcontratação**

A subcontratação é uma outra opção para ajudar no aumento da capacidade de produção. O número de unidades para subcontratação para cada linha de produção não pode exceder o limite máximo permitido definido pela entidade de subcontratação (Equação 34), devido à sua capacidade produtiva.

$$Sub_x(t) \leq MaxSub_x \quad \text{Equação 34}$$

$$t = 1, 2, \dots, m; x = 1, 2, \dots, q \quad \text{Equação 35}$$

- **Não-negatividade**

Terminando com as restrições gerais para as variáveis de decisão:

- Todas variáveis de decisão são positivas (igual ou superior a zero);
- Algumas variáveis de decisão, por exemplo o número de trabalhadores e quantidade de peças produzidas são valores inteiros.

## CASO DE ESTUDO

Para a analisar a formulação proposta, a mesma, é aplicado a uma empresa de equipamentos eletrônicos de médio porte. Os dados iniciais para a modelação do problema são:

1. O horizonte de planeamento é de 3 meses;
2. A empresa produz 2 tipos de produto em linhas de produção separadas;
3. O custo de contratação é 1200 Baht e o custo de demissão é 5000 baht (1 dólar americano é cerca de 45 baht);
4. O custo médio de transferência entre linhas de produção por trabalhador é 350 baht;
5. O número de dias de trabalho e de feriado é apresentado na Tabela 4;
6. O horário de trabalho normal é de 9 horas diárias;
7. O número de horas extras permitidas por trabalhador para cada dia de trabalho e feriado são respetivamente 1,5 horas e 9 horas;
8. O número atual de trabalhadores e o número máximo e mínimo de trabalhadores em cada linha de produção são apresentados na Tabela 5;
9. As taxas médias de produção, stock de segurança, nível máximo de stock permitido e quantidade máxima de unidades produzidas por subcontratação são também apresentados na Tabela 5;
10. O salário médio mensal de cada trabalhador é 5500 baht;

11. Os custos de horas extras por trabalhador em período de trabalho normal e em feriado são respetivamente, 34,38baht e 45,83 baht;
12. O custo médio de manutenção de stock e o custo de subcontratação por unidade produzida são também apresentados na Tabela 5;
13. A quantidade de stock inicial para o primeiro período e a quantidade de stock necessária para o stock final do último período para cada tipo de produto é apresentado na Tabela 5

Tabela 4 – Dias de trabalho e procura por período

<b>Período</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
Número de dias em horário normal	21	22	19
Número de feriados que podem ter horas extras	8	8	8
Procura do produto do tipo 1	550 078	326 934	478 711
Procura do produto do tipo 2	205 828	260 115	269 862

Tabela 5 – Parâmetros dos tipos de produto

<b>Tipo de produto</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
Número de pessoal inicial	360	150
Número mínimo de pessoal	288	120
Número máximo de pessoal	414	173
Stock inicial	47851	101904
Stock final	45191	24527
Stock de segurança	22595	12263
Taxa de produção	54	105
Custo de manutenção de stock	6	1
Custo de subcontratação por unidade	36,18	13,75

Reunidos todos os dados necessários, o modelo matemático desenvolvido para este problema considera os parâmetros e variáveis de decisão descritos anteriormente resultando na função objetivo e restrições seguintes:

### Função objetivo

*Min. Total Custos*

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t=1}^3 [5500 \cdot (W_1(t) + W_2(t)) + 34.38 \cdot (ON_1(t) + ON_2(t)) \\
 &+ 45.83 \cdot (OH_1(t) + OH_2(t)) + 350 (WT_{12}(t) + WT_{21}(t)) \\
 &+ 1200 \cdot (H_1(t) + H_2(t)) + 5000 \cdot (L_1(t) + L_2(t)) + 36.18 \\
 &\cdot Sub_1(t) + 13.75 \cdot Sub_2(t) + 6 \cdot I_1(t) + I_2(t)]
 \end{aligned}$$

Equação 36

### Restrições:

#### 1. Pessoal

$$288 \leq W_1(t) \leq 414$$

Equação 37

$$120 \leq W_2(t) \leq 173 \quad \text{Equação 38}$$

$$t = 1, 2, 3 \quad \text{Equação 39}$$

## 2. Stock

$$I_x(t) = I_x(t-1) + P_x(t) - D_x(t) \quad \text{Equação 40}$$

$$t = 1, 2, 3; x = 1, 2 \quad \text{Equação 41}$$

$$I_1(t) \geq 22\,595 \quad \text{Equação 42}$$

$$I_2(t) \geq 12\,263 \quad \text{Equação 43}$$

## 3. Produção

$$P(t) = [54 \cdot W_x(t) + 105 \cdot W_2(t)] \cdot m(t) + 6 \cdot (ON_1(t) + OH_1(t)) \\ + 11.67(ON_2(t) + OH_2(t)) + Sub_1(t) + Sub_2(t) - 6 \cdot U_1(t) - 11.67 \cdot U_2(t) \quad \text{Equação 44}$$

$$t = 1, 2, 3 \quad \text{Equação 45}$$

## 4. Horas extras

$$ON_x(t) \geq \text{Max } ON_x(t) \quad \text{Equação 46}$$

$$OH_x(t) \leq \text{Max } OH_x(t) \quad \text{Equação 47}$$

$$t = 1, 2, 3; x = 1, 2 \quad \text{Equação 48}$$

$$\text{Max } ON_x(t) = 1.5 \cdot m(t) \cdot W_x(t) \quad \text{Equação 49}$$

$$\text{Max } OH_x(t) = 9 \cdot h(t) \cdot W_x(t) \quad \text{Equação 50}$$

### 2.3.3. Modelo de (Ur Rehman et al., 2021)

O PAP determina o stock, produção e mão-de-obra, com base nas previsões de procura. Este estudo pretende verificar o impacto da perda de produtividade no plano de produção tradicional, assim, são discutidas duas variações do modelo do problema de PAP com e sem perda de produtividade: Modelo A) Mão-de-obra fixa e Modelo B) Mão-de-obra variável. Os resultados obtidos indicaram que a perda de produtividade tem impacto direto na contratação e demissão da mão-de-obra.

Para os modelos abordados neste estudo, foram assumidos os seguintes pressupostos:

**Modelo A:** É assumido que não são permitidas contratações ou demissões de pessoal. Os pedidos pendentes também não são permitidos neste modelo.

**Modelo B:** Neste modelo já é permitida a contratação e demissão de pessoal. Os pedidos pendentes são considerados.

Ambos os modelos são tratados sem e com perda de produtividade de modo a verificar o seu impacto no custo no final.

**Parâmetros:**

$c_t$  – Custo de produção por unidade no período t

$h_t$  – Custo de manutenção de stock por unidade

$\pi_t$  – Custo de pedidos pendentes por unidade no período t

$r_t$  – Custo de mão de obra por hora no período laboral t

$o_t$  – Custo de mão-de-obra por hora no período de horas extras t

$d_t$  – Procura prevista para o período t

$hi_t$  – Custo de contratação no período t

$f_t$  – Custo de despedimento no período t

$m$  – tempo de mão-de-obra necessário para produzir 1 unidade

$\bar{R}_t$  – Tempo total disponível de horas de trabalho no período laboral t

$\bar{O}_t$  – Tempo total disponível de horas de trabalho no período de horas extras t

$I_0$  – Stock inicial

$P$  – Fração de horas regulares permitidas como horas extras

$T$  – Horizonte temporal em períodos

$\alpha$  – Perda de produtividade

**Modelo A: Mão-de-obra Fixa**

- Não são permitidas contratações nem demissões de pessoal

- Não são permitidos pedidos pendentes

**Variáveis de decisão:**

$X_t$  – Quantidade produzida no período t

$I_t$  – Stock no período t

$R_t$  – Horas de mão-de-obra utilizadas no período laboral t

$O_t$  – Horas de mão-de-obra utilizadas no período de horas extras t

**Função objetivo:**

A função objetivo do primeiro modelo (Equação 51) é minimizar os custos de produção, manutenção de stock e de mão-de-obra (seja em horário normal como em horas extras).

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T [c_t \cdot X_t + h_t \cdot I_t + r_t \cdot R_t + o_t \cdot O_t] \quad \text{Equação 51}$$

**Restrições:**

- **Stock**

A Equação 52 representa a restrição de balanceamento do stock e garante que a quantidade produzida mais o stock existente conseguem satisfazer a procura do período  $t$ .

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t, \forall t. \quad \text{Equação 52}$$

- **Produção**

A restrição de produção (Equação 53) garante que o tempo total de produção é igual à capacidade de mão-de-obra (seja em horário normal como em horas extras).

$$m \cdot X_t - (R_t + O_t) = 0, \forall t. \quad \text{Equação 53}$$

As restrições (Equação 54) e (Equação 55) expressam os limites permitidos de horas de trabalho em horário normal e horas extras por trabalhador.

$$0 \leq R_t \leq \bar{R}_t, \forall t. \quad \text{Equação 54}$$

$$0 \leq O_t \leq \bar{O}_t, \forall t. \quad \text{Equação 55}$$

**Modelo B: Mão-de-obra Variável**

- São permitidas contratações e demissões de pessoal

- São permitidos pedidos pendentes

**Variáveis de decisão:**

$X_t$  – Quantidade produzida no período  $t$

$I_t^+$  – Stock no final do período  $t$

$I_t^-$  – Pedidos pendentes no período  $t$

$I_t$  – Stock no período  $t$

$R_t$  – Horas de mão-de-obra utilizadas no período laboral  $t$

$O_t$  – Horas de mão-de-obra utilizadas no período de horas extras  $t$

$H_t$  – Mão-de-obra contratada no período  $t$  (em horas)

$F_t$  – Mão-de-obra despedida no período  $t$  (em horas)

**Função objetivo:**

A função objetivo é minimizar a produção total, manutenção de stock, pedidos pendentes, mão-de-obra (seja em horário normal ou em horas extras) e os custos de contratação e despedimento.

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T [c_t \cdot X_t + h_t \cdot I_t^+ + \pi_t \cdot I_t^- + r_t \cdot R_t + o_t \cdot O_t + hi_t \cdot H_t + f_t \cdot F_t] \quad \text{Equação 56}$$

**Restrições:**

- **Inventário**

A restrição de stock (Equação 57) garante que a procura do período  $t$  seja satisfeita considerando os pedidos pendentes do período anterior.

$$X_{it} + I_{i^+,t-1} - I_{it^+} - I_{i^-,t-1} + I_{it^-} = d_{it}, \forall i, t. \quad \text{Equação 57}$$

- **Produção**

A restrição de produção do Modelo B (Equação 58) é igual à restrição de produção para Modelo A (Equação 53).

$$m \cdot X_t - (R_t + O_t) = 0, \forall t. \quad \text{Equação 58}$$

A Equação 59 garante que a capacidade de mão-de-obra em horário normal é a necessária para produzir o produto e a Equação 60 restringe o tempo de produção em horas extras.

$$R_t - R_{t-1} - H_t + F_t = 0, \forall t. \quad \text{Equação 59}$$

$$O_t - pR_t \leq 0, \forall t. \quad \text{Equação 60}$$

Considerando a perda de produtividade, a alteração aos modelos é feita na restrição de Produção, onde se altera o tempo necessário para produzir:

$$m \cdot X_t - (1 - \alpha) \cdot (R_t + O_t) = 0, \forall t. \quad \text{Equação 61}$$

Considerando uma perda de 10%, então  $(1 - \alpha) = 0,90$ .

## 2.4. Modelos de Programação Não Linear

### 2.4.1. Modelo de (Tirkolae et al., 2022)

Este estudo aborda o problema de PAP considerando a subcontratação e os níveis de habilidade da mão-de-obra, adotando uma abordagem do processo de Markov para o nível de stock. Foi então desenvolvido um modelo de programação não linear inteiro misto apresentando uma cadeia de

Markov de tempo contínuo para acomodar o processo de decisão de stock. Os principais objetivos deste modelo são minimizar o custo total e a poluição ambiental total (emissões de GHG – Gases de efeito de estufa).

### Parâmetros

$p$  – Índice de produtos ( $p = 1, 2, \dots, P$ )

$c$  – Índice de subcontratados ( $c = 1, 2, \dots, C$ )

$s$  – Índice de níveis de habilidade ( $l = 1, 2, \dots, L$ )

$D_p$  – Procura do produto  $p$

$CI_p$  – Custo de produção interna por cada unidade de produto  $p$

$CA_{pc}$  – Custo de produção por cada unidade de produto  $p$  do subcontratado  $c$

$CB_l$  – Custo por hora de mão-de-obra com níveis de habilidade  $l$  para trabalho em horário normal

$CC_l$  – Custo por hora de mão-de-obra com níveis de habilidade  $l$  para trabalho em horário de horas extras

$CD_l$  – Custo de contratação de mão-de-obra com níveis de habilidade  $l$

$CE_l$  – Custo de despedimento por mão-de-obra com níveis de habilidade  $l$

$CF_l$  – Custo de falta de stock por unidade de produto  $p$

$CG_l$  – Custo de manutenção de stock de produto  $p$

$R_l$  – Capacidade normal em horas por trabalhador com níveis de habilidade  $l$

$O_l$  – Capacidade de horas extras por trabalhador com níveis de habilidade  $l$

$WL_l$  – Número inicial de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$

$WL_l$  – Número mínimo de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$

$WU_l$  – Número máximo de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$

$RM_{lp}$  – Número de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$  necessários para produzir cada unidade de produto  $p$

$MP_p$  – Produção máxima de produto  $p$  disponível para subcontratação

$PC_p$  – Capacidade de armazém para produto  $p$

$GA_p$  – Emissões GHG por cada unidade produzida de produto  $p$

$GH_{pc}$  – Emissões GHG por cada unidade produzida de produto  $p$  pelo subcontratado  $c$

$GB_p$  – Emissões GHG por cada unidade de produto  $p$  em stock

### Variáveis de decisão

$x_p$  – Quantidade de produto  $p$  entregue aos clientes

$YA_p$  – Quantidade de produção em horário normal de produto  $p$

$YB_p$  – Quantidade de produção em horário de horas extras de produto  $p$

$YC_{pc}$  – Quantidade de produção de produto  $p$  por subcontratação do subcontratado

$MN_l$  – Número de horas por trabalhador com níveis de habilidade  $l$  em horário normal

$MO_l$  – Número de horas por trabalhador com níveis de habilidade  $l$  em horário de horas extras

$NN_l$  – Número de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$  em horário normal

$NO_l$  – Número de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$  em horário de horas extras

$HM_l$  – Quantidade de horas de trabalho de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$

$HN_l$  – Número de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$

$FM_l$  – Quantidade de horas de trabalho de trabalhadores com níveis de habilidade  $l$  despedidos

$FN_l$  – Número de trabalhadores despedidos com níveis de habilidade  $l$

### Funções objetivo

A minimização do custo total é a primeira função objetivo (Equação 62), que relacionada as variáveis de produção normal, extra e subcontratada, pedidos em atraso, bem como mão-de-obra interna e subcontratada. Os primeiro e o segundo termos mostram os custos de produção interna e os custos de subcontratação, respetivamente. Os custos do trabalho em horário normal e de horas extras são dados pelos dois seguintes termos. Segue-se a representação dos custos de manutenção, e dos custos por falta de stock, contratação e despedimento, respetivamente.

A Equação 63 representa a segunda função objetivo, a minimização da emissão total de GHG.

*Minimizar Custo Total*

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=1}^P CI_p \cdot (YA_p + YB_p) + \sum_{p=1}^P \sum_{c=1}^C CA_{pc} \cdot YC_{pc} + \sum_{l=1}^L CB_l \cdot MN_l \\
 &+ \sum_{l=1}^L CC_l \cdot MO_l + \sum_{p=1}^P CG_p \\
 &\cdot \left[ \frac{\mu \cdot \left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^{Sp} \cdot \left(1 - \frac{\lambda p}{\mu}\right) \cdot (\lambda p^{Sp+1} - \lambda p \cdot \mu^{Sp} - \lambda p \cdot Sp \cdot \mu^{Sp} + Sp \cdot \mu^{Sp+1})}{\lambda p^{Sp} \cdot (\lambda p - \mu)^2} \right] \\
 &+ \sum_{p=1}^P CF_p \cdot \lambda p \cdot \left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^{Sp} + \sum_{l=1}^L CD_l \cdot HM_l + \sum_{l=1}^L CE_l \cdot FM_l
 \end{aligned}
 \tag{Equação 62}$$

*Minimizar Emissões GHG*

$$= \sum_{p=1}^P \left( GB_p \cdot \left[ \frac{\mu \cdot \left(\frac{\lambda p}{\mu}\right)^{Sp} \cdot \left(1 - \frac{\lambda p}{\mu}\right) \cdot (\lambda p^{Sp+1} - \lambda p \cdot \mu^{Sp} - \lambda p \cdot Sp \cdot \mu^{Sp} + Sp \cdot \mu^{Sp+1})}{\lambda p^{Sp} \cdot (\lambda p - \mu)^2} \right] + GA_p \cdot (YA_p + YB_p) + \sum_{c=1}^C GH_{pc} \cdot YC_{pc} \right) \quad \text{Equação 63}$$

### Restrições

As restrições (Equação 64), (Equação 63) e (Equação 65) estabelecem a ligação entre a mão-de-obra necessária em cada período de acordo com a quantidade de produção. A restrição (Equação 66) especifica o número mínimo e máximo necessário de força de trabalho, respetivamente. A Equação 67 indica as limitações de capacidade de armazenamento específicas do produto. Os valores de mão-de-obra em horário normal e em extras necessários são calculados pelas equações (Equação 68) e (Equação 69). A restrição representada pela Equação 70 assegura que a quantidade de produtos subcontratados não viola o limite superior especificado em cada período.

A Equação 71 limita a capacidade de horas de mão-de-obra por trabalhador e a Equação 72 expressa um argumento semelhante, mas para a mão-de-obra desempregada.

A Equação 73 calcula a quantidade de produtos vendidos, de acordo com o nível de stock e a quantidade produzida em cada período. A Equação 74 restringe a quantidade vendida pois não pode ser superior à capacidade máxima de produção (tanto para a produção interna como para a subcontratada) e a Equação 75 representa o sistema de stock do produto pois se a procura for superior ao stock existente, o sistema irá sofrer uma falta de permanente de stock.

$$\sum_{p=1}^P YA_p \cdot RM_{lp} \leq MN_l, \quad \forall l \quad \text{Equação 64}$$

$$\sum_{p=1}^P YB_p \cdot RM_{lp} \leq MO_l, \quad \forall l \quad \text{Equação 65}$$

$$WL_l \leq NN_l \leq WU_l, \quad \forall l \quad \text{Equação 66}$$

$$S_p \leq PC_p, \quad \forall p \quad \text{Equação 67}$$

$$MN_l \leq R_l \cdot NN_l, \quad \forall l \quad \text{Equação 68}$$

$$MO_l \leq O_l \cdot NO_s, \quad \forall l \quad \text{Equação 69}$$

$$\sum_{c=1}^c YC_{pc} \leq MP_p, \quad \forall p \quad \text{Equação 70}$$

$$HM_l \leq HN_l \cdot (O_l + R_l), \quad \forall l \quad \text{Equação 71}$$

$$FM_l \leq FN_l \cdot (O_l + R_l), \quad \forall l \quad \text{Equação 72}$$

$$x_p + \lambda_p \left( \frac{\lambda_p}{\mu} \right)^{Sp} = D_p, \quad \forall p \quad \text{Equação 73}$$

$$x_p \leq YA_p + YB_p + \sum_{c=1}^c YC_{pc}, \quad \forall p \quad \text{Equação 74}$$

$$\lambda_p \leq \mu, \quad \forall p \quad \text{Equação 75}$$

A (Equação 76) e (Equação 77) restringem as variáveis não negativas e inteiras do modelo.

$$x_p, YA_p, YB_p, YC_{pc}, I_p, MN_l, MO_l, HM_l, FM_l, \lambda_p, S_p \geq 0, \quad \forall l, p, c \quad \text{Equação 76}$$

$$NN_l, NO_s, HN_l, FN_l \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{Equação 77}$$

## 2.5. Análise Crítica e Outros Modelos

### Programação Linear

Análise do Modelo de (Yalcin, 2019) Este modelo permitiu aproveitar ao máximo todo o leite disponível para a produção dos laticínios, enquanto conseguiu maximizar as quantidades produzidas. Apesar dos resultados obtidos serem positivos, este modelo é muito simplista do processo produtivo, considerando apenas as capacidades de produção e a procura dos produtos.

Análise do Modelo de (Techawiboonwong & Yenradee, 2003) Este estudo apresenta um modelo matemático mais detalhado e considera o trabalho da mão-de-obra. Neste modelo a mão-de-obra pode ser interna ou subcontratada e pode trabalhar não só em horário normal, mas também em horas extras. Adicionalmente, neste estudo é tido em consideração o trabalho em linhas de produção assim como a transferência de mão-de obra entre as linhas de produção, o que se trona muito vantajoso na gestão de pessoal, evitando a constante contratação e demissão de trabalhadores.

Análise do Modelo de (Ur Rehman et al., 2021) Este modelo sobressai pelo seu estudo na perda de produtividade. Este estudo conclui que o custo de contratação começa a aumentar à medida que aumenta a perda de produtividade uma vez que a perda de produtividade tem um impacto direto na capacidade de produção.

---

Modelo de **(Leung & Wu, 2004)** Neste estudo, foi desenvolvido um modelo de otimização para resolver os problemas de planeamento da produção agregada em um ambiente de incerteza em que a produção, custo de mão-de-obra, custo de manutenção de stock e custo de contratação e demissão são minimizados. Ao ajustar os parâmetros de penalidade, o modelo pode determinar uma estratégia de produção ideal a médio prazo incluindo o plano de carga de produção e o nível de força de trabalho considerando diferentes cenários de crescimento econômico. O modelo proposto é realista para lidar com condições econômicas incertas e os seus resultados demonstram a sua eficácia.

---

Modelo de **(Sutthibutr & Chiadamrong, 2020)** Este estudo propõe uma abordagem para otimizar o Planeamento Agregado da Produção (PAP) em ambientes incertos. O modelo matemático proposto permite manipular o nível de imprecisão dos dados, e o seu objetivo é minimizar o os custos totais considerando custos operacionais, procura do cliente, nível de mão-de-obra e capacidade de produção. A abordagem também ajuda a perceber os resultados em situações de negócios otimistas e pessimistas e quais as ações necessárias a tomar.

---

#### Programação Não Linear

---

Análise do Modelo de **(Tirkolaee et al., 2022)** Este estudo desenvolveu uma metodologia baseada na aplicação da propriedade da cadeia de Markov para formular um PAP sustentável. Os objetivos eram minimizar o custo total e a emissão total de GHG considerando diferentes tipos de produtos, níveis de habilidade dos trabalhadores e subcontratados. Os resultados obtidos revelaram um desempenho aceitável da metodologia. No entanto, as principais limitações deste estudo

---

Modelo de **(Ibrahim & Kaml, 2021)** Neste estudo é desenvolvido um modelo matemático que visa maximizar o lucro líquido e reduzir todos os custos que incluem custos de produção, mão-de-obra, matérias-primas, armazenamento, transporte e escassez de produtos.

Este modelo destaca-se uma vez que considerada uma cadeia de abastecimento com múltiplos fornecedores de matérias-primas, locais de produção, centros de venda de produtos para clientes e instabilidade da procura. A nível de custos são considerados os custos de retenção de stock, custos de contratação e demissão e custos de formação da mão-de-obra.

---

Modelo de **(Darvishi et al., 2020)** Neste trabalho foram estudadas as decisões integradas de logística e do planeamento agregado da produção (PAP). No

---

modelo desenvolvido, são considerados a seleção de fornecedores, a alocação dos pedidos, a logística de transporte com múltiplos períodos, produtos e modos de transporte. Para a tomada de decisões de aquisição e produção, foi utilizado uma programação não linear inteira. A aplicação do modelo e foi testada para a indústria de vestuário e conclui-se que o procedimento beneficia o intervalo estudado e o nível de satisfação para alcançar a solução ótima.

---





### 3. MÉTODOS E APLICAÇÃO

O Planeamento Agregado da Produção (PAP) é realizado para períodos de meses ou anos, sendo usualmente atualizado mensalmente. É o PAP que vai determinar os níveis de produção por família de produtos para prever como essa produção afetará os níveis de stock, utilização de mão-de-obra, entre outros. Ao realizar este tipo de plano, é crucial que a estratégia adotada seja adequada ao mercado em que a empresa está inserida.

Neste capítulo serão abordadas duas formulações matemáticas para o PAP utilizando uma força de trabalho variável, horas extraordinárias e subcontratação. O primeiro modelo não permite pedidos pendentes nem rutura de stock, o segundo modelo considera a perda de produtividade na produção e são permitidos pedidos pendentes.

#### 3.1. Formulação matemática

É pretendido desenvolver uma formulação que permita obter a quantidade a produzir de modo e minimizar os custos totais de todo o processo de produção. Assim, é necessário definir quais as variáveis que influenciam diretamente a solução do problema.

##### 3.1.1. Modelo 1

Este modelo utiliza uma força de trabalho variável, horas extraordinárias e subcontratação. Não são permitidos pedidos pendentes nem rutura de stock.

##### Parâmetros

$t$	Nº de períodos de trabalho
$n(t)$	Nº de dias por cada período $t$
$U_{d_{max}}$	Nº máximo de unidades produzidas em horas extras por dia
$MinW(t)$	Nº mínimo de trabalhadores
$MaxW(t)$	Nº máximo de trabalhadores
$MaxSub$	Nº máximo de unidades produzidas por subcontratação por período
$K$	Taxa média de produção (unid/hora)
$h_0$	Nº de horas de trabalho diário, em horário normal
$W_0$	Nº de trabalhadores iniciais, no período $t$
$I_0$	Stock inicial
$I_{max}$	Stock máximo
$SS$	Stock de segurança, por período $t$
$C_C$	Custo de contratação por trabalhador
$C_D$	Custo de demissão por trabalhador

$C_{Sub}$	Custo por unidade produzida por subcontratação
$C_W$	Custo de salário médio
$C_{We}$	Custo por unidade produzidas em horas extras
$C_I$	Custo de posse/manutenção de stock, por período t
$D(t)$	Previsão da procura para o período t
$C_M$	Custo de matéria-prima, por período t

### **Variáveis auxiliares**

$W(t)$	Nº de trabalhadores, no período t
$P(t)$	Nº de unidades produzidas, no período t
$I(t)$	Nível de stock no final do período t
$U_{max}(t)$	Nº máximo de unidades produzidas em horas extras, por período t

### **Variáveis de decisão**

$U(t)$	Nº de unidades produzidas em horas extras, no período t
$CW(t)$	Nº de trabalhadores contratados, no período t
$DW(t)$	Nº de trabalhadores demitidos, no período t
$Sub(t)$	Nº de unidades produzidas por subcontratação

### **Função Objetivo**

Para a formulação do problema apresentado, a função objetivo é minimizar os custos totais da produção (Equação 78).

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{i=1}^t C_W \cdot W(t) + C_C \cdot CW(t) + C_D \cdot DW(t) + C_{Sub} \cdot Sub(t) + C_{We} \cdot U(t) \\ + C_I \cdot I(t) + P(t) \cdot C_M \end{aligned} \quad \text{Equação 78}$$

### **Restrições**

- **Trabalhadores**

Neste modelo, a mão de obra é variável, permitindo a contratação e demissão de pessoal. Assim, a Equação 79 limita a quantidade de mão de obra (mínima e máxima) por período e a Equação 80 é o cálculo do número de trabalhadores para o período atual, somando ao número de trabalhadores do período anterior o número de contratação e subtraindo as demissões.

$$\text{Min}W(t) \leq W(t) \leq \text{Max}W(t) \quad \text{Equação 79}$$

$$W(t) = W(t - 1) + CW(t) - DW(t) \quad \text{Equação 80}$$

- **Unidades produzidas em Horas extras**

A Equação 81 limita o número de unidades produzidas em horas extras durante o período  $t$ , considerando que o limite seja o número máximo diário de unidades produzidas multiplicado pelo número de dias uteis do período  $t$ .

$$U(t) \leq U_{max}(t) \quad \text{Equação 81}$$

- **Stock**

As equações 82, 83 e 84 definem o nível de inventário. A Equação 82 calcula o nível de stock para o período  $t$ , somando o nível de produção e subtraindo a procura do período atual ao nível de stock do período anterior.

A Equação 83 e Equação 84 garantem que o nível de stock não seja inferior ao nível de stock de segurança, nem ultrapasse o máximo de armazenamento.

$$I(t) = I(t - 1) + P(t) - D(t) \quad \text{Equação 82}$$

$$I(t) \geq SS \quad \text{Equação 83}$$

$$I(t) \leq I_{max} \quad \text{Equação 84}$$

- **Produção**

A Equação 85 define o nível de produção. O nível de produção é calculado através da multiplicação da taxa de produção por hora pela quantidade de trabalhadores e número de horas de trabalho em horário normal e horas extras, considerando a fator de perda de produtividade. A esta quantidade, é somada a número de unidades produzidas por subcontratação.

$$P(t) = K \cdot W(t) \cdot n(t) + U(t) + Sub(t) \quad \text{Equação 85}$$

- **Subcontratação**

A Equação 86 garante que a quantidade de unidades produzidas por subcontratação não ultrapassa o valor máximo permitido.

$$Sub(t) \leq MaxSub \quad \text{Equação 86}$$

- **Não negatividade**

As equações 87 e 88 definem as variáveis com valores inteiros não negativos.

$$CW(t), DW(t), Sub(t), U(t) \geq 0 \quad \text{Equação 87}$$

$$CW(t), DW(t), Sub(t), U(t) \in Z^+ \quad \text{Equação 88}$$

### 3.1.2. Modelo 2

Este modelo vai utilizar uma força de trabalho variável, horas extras e subcontratação, permitindo pedidos pendentes. Os parâmetros e variáveis são semelhantes às utilizadas para o modelo 1.

#### Parâmetros

t	Nº de períodos de trabalho
n(t)	Nº de dias por cada período t
Ud <sub>max</sub>	Nº máximo de unidades produzidas em horas extras por dia
MinW(t)	Nº mínimo de trabalhadores
MaxW(t)	Nº máximo de trabalhadores
MaxSub	Nº máximo de unidades produzidas por subcontratação por período
K	Taxa média de produção (unid/hora)
h <sub>0</sub>	Nº de horas de trabalho diário, em horário normal
W <sub>0</sub>	Nº de trabalhadores iniciais, no período t
I <sub>0</sub>	Stock inicial
I <sub>max</sub>	Stock máximo
SS	Stock de segurança, por período t
C <sub>C</sub>	Custo de contratação por trabalhador
C <sub>D</sub>	Custo de demissão por trabalhador
C <sub>Sub</sub>	Custo por unidade produzida por subcontratação
C <sub>W</sub>	Custo de salário médio
C <sub>We</sub>	Custo por unidade produzidas em horas extras
C <sub>I</sub>	Custo de posse/manutenção de stock, por período t
D(t)	Previsão da procura para o período t
C <sub>M</sub>	Custo de matéria-prima, por período t
C <sub>R</sub>	Custo de ruptura

#### Variáveis auxiliares

W(t)	Nº de trabalhadores, no período t
------	-----------------------------------

$P(t)$  Nº de unidades produzidas, no período  $t$

$I(t)$  Nível de stock no final do período  $t$

$U_{\max}(t)$  Nº máximo de unidades produzidas em horas extras, por período  $t$

#### Variáveis de decisão

$U(t)$  Nº de unidades produzidas em horas extras, no período  $t$

$CW(t)$  Nº de trabalhadores contratados, no período  $t$

$DW(t)$  Nº de trabalhadores demitidos, no período  $t$

$Sub(t)$  Nº de unidades produzidas por subcontratação

$I_R(t)$  Nº de pedidos pendentes, no período  $t$

#### Função Objetivo

Para esta formulação do problema, a função objetivo é também minimizar os custos totais da produção (Equação 89).

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{i=1}^t C_W \cdot W(t) + C_C \cdot CW(t) + C_D \cdot DW(t) + C_{Sub} \cdot Sub(t) + C_{We} \cdot U(t) \\ + C_I \cdot I(t) + P(t) \cdot C_M + C_R \cdot I_R(t) \end{aligned} \quad \text{Equação 89}$$

#### Restrições:

- **Trabalhadores**

Também neste modelo, a mão de obra é variável, o que permite a contratação e demissão de pessoal. Assim, tal como no modelo 1, a Equação 90 limita a quantidade de mão de obra (mínima e máxima) por período e a Equação 91 é o cálculo do número de trabalhadores para o período atual.

$$\text{Min}W(t) \leq W(t) \leq \text{Max}W(t) \quad \text{Equação 90}$$

$$W(t) = W(t - 1) + CW(t) - DW(t) \quad \text{Equação 91}$$

- **Unidades produzidas em horas extras**

A Equação 92 limita o número de unidades produzidas em horas extras no período  $t$ , considerando que o limite seja o número máximo diário de unidades produzidas multiplicado pelo número de dias uteis no período  $t$ .

$$U(t) \leq U_{\max}(t) \quad \text{Equação 92}$$

- **Stock**

As equações 93, 94 e 95 definem o nível de stock considerando pedidos pendentes. O nível de stock para o período  $t$  (Equação 93) é igual à soma do stock do período anterior e do nível de produção do período atual, a subtrair pela procura e pelos pedidos pendentes do período anterior e do atual.

A Equação 94 e Equação 95 garantem que o nível de stock é inferior ao nível de stock de segurança, nem ultrapasse o limite máximo de armazenamento.

$$I(t) = I(t - 1) + P(t) - D(t) \quad \text{Equação 93}$$

$$I(t) \geq SS \quad \text{Equação 94}$$

$$I(t) \leq I_{max} \quad \text{Equação 95}$$

- **Produção**

A Equação 96 define o nível de produção. O nível de produção neste modelo é calculado da mesma forma que no modelo 1 (Equação 85).

$$P(t) = K \cdot W(t) \cdot n(t) + U(t) + Sub(t) - I_R(t) - I_R(t - 1) \quad \text{Equação 96}$$

- **Subcontratação**

Tal como no primeiro modelo, a Equação 97 garante que a quantidade de unidades produzidas por subcontratação não ultrapassa o valor máximo permitido.

$$Sub(t) \leq MaxSub \quad \text{Equação 97}$$

- **Não negatividade**

As equações 98 e 99 definem as variáveis como valores inteiros não negativos.

$$I_R(t), CW(t), DW(t), Sub(t), U(t) \geq 0 \quad \text{Equação 98}$$

$$I_R(t), CW(t), DW(t), Sub(t), U(t) \in Z^+ \quad \text{Equação 99}$$

### 3.1.3. Modelo Final

Este modelo é uma combinação e evolução dos modelos anteriormente descritos. Esta formulação matemática considera uma mão-de-obra variável com recurso de horas extras e produção por subcontratação. Este modelo também permite pedidos pendentes e explora a perda de produtividade de produção.

No que diz respeito a parâmetros e variáveis de decisão, assemelham-se aos já conhecidos nos modelos 1 e 2.

Parâmetros

$t$	Nº de períodos de trabalho
$n(t)$	Nº de dias por cada período $t$
$Ud_{max}$	Nº máximo de unidades produzidas em horas extras por dia
$MinW(t)$	Nº mínimo de trabalhadores
$MaxW(t)$	Nº máximo de trabalhadores
$MaxSub$	Nº máximo de unidades produzidas por subcontratação por período $t$
$K$	Taxa média de produção (unid/hora)
$h_0$	Nº de horas de trabalho diário, em horário normal
$W_0$	Nº de trabalhadores iniciais, no período $t$
$I_0$	Stock inicial
$I_{max}$	Stock máximo
$SS$	Stock de segurança, por período $t$
$C_C$	Custo de contratação por trabalhador
$C_D$	Custo de demissão por trabalhador
$C_{Sub}$	Custo por unidade produzida por subcontratação
$C_W$	Custo de salário médio
$C_{We}$	Custo por unidade produzida em horas extras
$C_I$	Custo de posse/manutenção de stock, por período $t$
$D(t)$	Previsão da procura para o período $t$
$C_M$	Custo de matéria-prima, por período $t$
$C_R$	Custo extra por pedido pendente ( <i>Back Order</i> )
$\alpha$	Perda de produtividade

Variáveis de decisão

$W(t)$	Nº de trabalhadores, no período $t$
$Sub(t)$	Nº de unidades produzidas por subcontratação, no período $t$
$P_{int}(t)$	Nº de unidades de produção interna, no período $t$
$I(t)$	Nível de stock no final do período $t$
$U(t)$	Nº de unidades produzidas em horas extras, no período $t$
$CW(t)$	Nº de trabalhadores contratados, no período $t$
$DW(t)$	Nº de trabalhadores demitidos, no período $t$
$I_R(t)$	Nº de pedidos pendentes ( <i>Back Orders</i> ), no período $t$

### Função Objetivo

Para esta formulação do problema, a função objetivo é também minimizar os custos totais da produção (Equação 100).

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{i=1}^t C_W \cdot W(t) + C_C \cdot CW(t) + C_D \cdot DW(t) + C_{Sub} \cdot Sub(t) + C_{We} \cdot U(t) & \text{Equação 100} \\ + C_I \cdot I(t) + P(t) \cdot C_M + C_R \cdot I_R(t) & \end{aligned}$$

### Restrições:

- **Trabalhadores**

Neste modelo, a mão de obra é variável, o que permite a contratação e demissão de pessoal. Assim, a Equação 101 limita a quantidade de mão de obra (mínima e máxima) por período e a Equação 102 é o cálculo do número de trabalhadores para o período atual.

$$\text{Min}W(t) \leq W(t) \leq \text{Max}W(t) \quad \text{Equação 101}$$

$$W(t) = W(t - 1) + CW(t) - DW(t) \quad \text{Equação 102}$$

- **Unidades produzidas em horas extras**

Tal como nos modelos anteriormente apresentados, a Equação 103 limita o número de unidades produzidas em horas extras no período  $t$ , considerando que o limite seja o número máximo diário de unidades produzidas multiplicado pelo número de dias uteis no período  $t$ .

$$U_{max}(t) - U(t) \geq 0 \quad \text{Equação 103}$$

- **Stock**

As equações 104 e 105 definem o nível de stock. O nível de stock para o período  $t$  (Equação 104) é igual à soma do stock do período anterior e do nível de produção do período atual, a subtrair pela procura e pelos pedidos pendentes do período anterior e do atual.

A Equação 105 garante que o nível de stock é inferior ao limite máximo de armazenamento.

$$I(t - 1) + P_{int}(t) + U(t) + Sub(t) - I_R(t - 1) + I_R(t) - I(t) = D(t) \quad \text{Equação 104}$$

$$I(t) \leq I_{max} \quad \text{Equação 105}$$

- **Produção**

O nível de produção (Equação 106) é calculado através da soma da produção interna (Equação 106) ao número de unidades produzidas em horas extras e subcontratadas considerando o número de pedidos pendentes. A produção interna é limitada pela capacidade máxima de produção (Equação 106).

$$K \cdot W(t) \cdot n(t) \cdot (1 - \alpha) - P_{int}(t) \geq 0 \quad \text{Equação 106}$$

- **Subcontratação**

A Equação 107 garante que a quantidade de unidades produzidas por subcontratação não ultrapassa o valor máximo permitido.

$$Sub(t) \leq MaxSub \quad \text{Equação 107}$$

- **Não negatividade**

As Equações 110 e 111 definem as variáveis como valores inteiros não negativos.

$$IRt, CWt, DWt, Subt, U(t) \geq 0 \quad \text{Equação 108}$$

$$IRt, CWt, DWt, Subt, U(t) \in Z^+ \quad \text{Equação 109}$$

### 3.2. Protótipo de Otimização

Para obter uma solução viável ao problema apresentado, foi desenvolvida um protótipo de aplicação em VBA para otimizar o Planeamento Agregado de Produção (PAP). O PAP é uma etapa crítica na gestão da produção, onde as decisões estratégicas são tomadas para alcançar o equilíbrio entre a procura, os recursos disponíveis e os custos. Com este protótipo, todo esse processo complexo é simplificado pela sua acessível interface que permite ao utilizador satisfazer a procura prevista ao menor custo possível.

Na interface do protótipo, o utilizador encontra quatro botões diferentes (Figura 1):

- Botão “Insert Data”
- Botão “Solve”
- Botão “Show Results”
- Botão “Clean”

The interface displays the following data:

Nr. Periods	12											
Days p/ Period	22	20	21	22	21	21	22	22	22	21	22	21
Demand	1771	1373	1651	907	1994	974	1339	1862	1710	1165	1174	1632

Cost per unit	
Overtime	10,00 €
Subcontracted	50,00 €
Inventory	2,00 €
Back Orders	100,00 €
Raw Material	0,70 €

Data	
Production Rate (unit/worker/day)	0,146
Productivity Loss	0,2
Initial Stock	500
Working Hours	8
Initial Workforce	300

Constraints	
Max. Subcontracted	800
Max. Overtime units	60
Minimum Stock	0
Maximum Stock	900
Maximum Workforce	800
Minimum Workforce	80

Workforce	
Salary	800,00 €
Hiring Cost	1 000,00 €
Layoff Cost	2 500,00 €

Minimum Cost: 3 128 066,40 €

Figura 1 - Interface do Protótipo PAP

### 3.2.1. Inserir os Dados (Botão “Insert Data”)

Ao carregar neste botão, o utilizador define o número de períodos a serem considerados, permitindo que a ferramenta se adapte a diferentes horizontes de planeamento, e apresentadas as instruções utilizar a ferramenta (Figura 2).

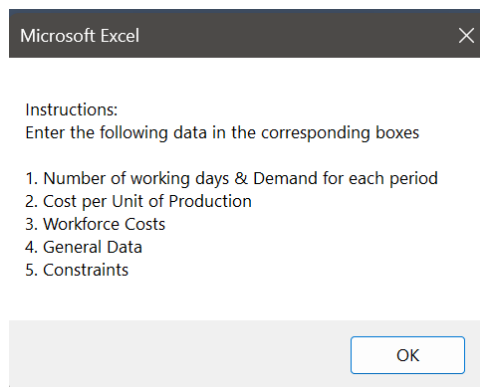


Figura 2 - Instruções para a correr a ferramenta

Primeiro, o utilizador deve começar por inserir os dados para a resolução do problema. Estes dados são os parâmetros que foram descritos na formulação matemática do problema:

Tabela 6 - Dados e parâmetros necessários para o Protótipo PAP

<b>Dados Gerais</b>			
Número de períodos de trabalho			
Número de dias por cada período $t$			
Previsão da procura para o período $t$			
<b>Custos por unidade produzida</b>	<b>Custos de pessoal</b>	<b>Parâmetros da produção</b>	<b>Restrições de produção</b>
Custo por unidade produzida por subcontratação	Custo de contratação por trabalhador	Taxa média de produção (unid/hora)	Nº máximo de unidades produzidas em horas extras por dia
Custo por unidade produzida em horas extras	Custo de demissão por trabalhador	Nº de horas de trabalho diário, em horário normal	Nº mínimo de trabalhadores
Custo de posse de stock, por período $t$	Custo de salário médio	Nº de trabalhadores iniciais, período $t=0$	Nº máximo de trabalhadores
Custo de matéria-prima		Stock inicial	Nº máximo de unidades subcontratadas por período $t$
Custo por pedido pendente ( <b>Back Order</b> )		Perda de produtividade	Stock máximo
			Stock de segurança

Após a inserção de dados estar concluída, o utilizador deverá pressionar o botão “Solve” para fazer a otimização e de seguida o botão “Show Results” para ver os resultados do problema.

### 3.2.2. Otimização (Botão “Solve”)

Este botão, tal como o nome revela, corre a macro que resolve o problema de PAP considerando os dados introduzidos pelo utilizador. Esta macro corre o Solver numa folha de Excel oculta conforme mostra a Figura 3. Posteriormente é apresentada uma caixa de texto com a solução ótima, o menor custo (Figura 3).

Input										Output											
Período	Nº dias	capacidade Laboral	Horas Procura	Custos por unidade produzida	Horário	Horas Extras	Subcontratação	Período	Interna	Horas Extras	Subcontratada	Stock Final	Back Orders	Contratações	Demissões	Nº trabalhadores	Restrições	= 0	= Procura	>=0	>=0
1	22	176	1000	Horário	10	0	0	1	561	0	0	81	0	0	0	300	= 0	1000	60	382,6	
2	21	168	1000	Subcontratação	50	0	0	2	519	0	0	0	0	0	0	300	= Procura	0	60	0	0,8
3	0	0	0	Posse de stock	-2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	Stock	300	0	60	0
4	0	0	0	Back Orders	100	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	Horas Extras	0	0	60	0
5	0	0	0	Materia-prima	0,7	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	Interna	0	0	60	0
6	0	0	0					6	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
7	0	0	0					7	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
8	0	0	0					8	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
9	0	0	0					9	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
10	0	0	0					10	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
11	0	0	0					11	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
12	0	0	0					12	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	60	0
				<b>Custos de pessoal</b>																	
				Salários	800																
				Contratação	1000																
				Demissão	2500																
				<b>Parâmetros</b>																	
				Taxa de produção (unidade/trabalhador/dia)	0,346																
				Stock inicial	300																
				Horas extras	0																
				Pessoal inicial	300																
				<b>Restrições</b>																	
				Max. Subcontratação	800																
				Max. Unit. Horas Extras	60																
				Stock_max	1000																
				Max. trabalhadores	600																
				Min. trabalhadores	300																
				Capacidade de produção	1000																
				<b>Custos</b>																	
				Contratação	0	24000	0	0	162	406,7	0										
				Demissão	0	24000	0	0	0	643,3	0										
				Subcontratação	0	0	0	0	0	0											
				Horas Extras	0	0	0	0	0	0											
				Posse de stock	1000	0															
				Materia-prima	0	0															
				Back Orders	0	0															
				<b>F.O.</b>	722.212,001																

Figura 3 – Folha Excel Output

#### 1. Configuração do Solver:

O Solver é ativado através da função `SolverOK`. Neste ponto, são definidos os parâmetros básicos para a otimização, como a célula da Função Objetivo (FO) e as células variáveis de decisão que podem ser alteradas para atingir esse objetivo.

#### 2. Definição das Restrições:

O método `SolverAdd` é usado para adicionar restrições ao problema de otimização. As restrições estão no formato de igualdades ou desigualdades lineares envolvendo as células que a otimizar.

#### 3. Execução do Solver:

A função `SolverSolve` é usada para iniciar o processo de otimização. O Solver tenta encontrar os valores das células de variáveis que otimizam a função objetivo, respeitando as restrições definidas.

O método Simplex é o algoritmo utilizado pelo Solver para resolver problemas de programação linear inteira mista (MILP). Através do *Branch & Bound*, o Solver vai fazer progressivas iterações do Simplex, dividindo-se em subproblemas e ajustando os valores das variáveis para encontrar a solução ótima. Antes de enumerar as soluções possíveis de um subproblema, estas são verificadas em relação às restrições impostas pela solução ótima e são descartadas se não conseguirem produzir uma solução melhor do que a melhor encontrada até agora pelo algoritmo. Em cada iteração, uma variável é escolhida para entrar na solução, enquanto outra variável sai da solução. O algoritmo escolhe as variáveis com base na melhoria da função objetivo e nas restrições existentes.

O algoritmo continua a iteração até que não seja possível encontrar uma melhoria adicional na função objetivo dentro das restrições. Neste ponto, a solução é considerada ótima, e o algoritmo é termina.

#### 4. Exibição dos Resultados:

Após a otimização ser concluída, os resultados são exibidos. A função `SolverFinish` é usada para mostrar os valores finais das células de variáveis que otimizaram a célula objetivo.

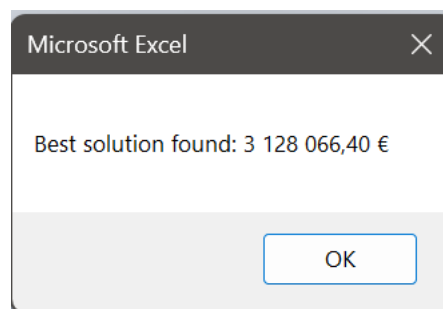


Figura 4 - Caixa de Texto do Resultado

### 3.2.3. Resultados (Botão “Show Results”)

Este botão mostra os resultados obtidos na resolução do problema em forma de tabela e gráficos.

Na Tabela 7, são devolvidos os valores das variáveis de decisão após o correr da macro de otimização. Na coluna *Production* são apresentadas a unidades a produzir em horário normal (*Regular Time*) em horas extras (*Overtime*) e por subcontratação (*Subcontracted*). A coluna seguinte, destinada ao inventário (*Inventory*), mostra para cada período o stock final (*Final Stock*) e os respetivos pedidos pendentes (*Back Orders*). Por último, é evidenciado a variação do número de trabalhadores para cada período (*Nr. Workers*) assim como o número de contratações (*Hire*) e o número de demissões (*Layoff*) para cada período.

Tabela 7 - Resultados: Tabela de variáveis de decisão

Period	Production			Inventory		Workforce		Nr. Workers
	Regular Time	Overtime	Subcontracted	Final Stock	Back Orders	Hire	Layoff	
0	0	0	0	500	0	0	0	300
1	758	60	800	347	0	0	5	295
2	509	60	800	343	0	0	77	218
3	534	60	800	86	0	0	0	218
4	560	60	800	599	0	0	0	218
5	534	60	800	0	1	0	0	218
6	534	60	800	419	0	0	0	218
7	560	60	800	500	0	0	0	218
8	560	60	800	58	0	0	0	218
9	560	60	800	0	232	0	0	218
10	534	60	800	0	3	0	0	218
11	560	60	795	238	0	0	0	218
12	534	60	800	0	0	0	0	218

Juntamente com a tabela de dados, os resultados são apresentados através de 3 diferentes gráficos:

Figura 5 - Gráfico de resultados: Nível de produção (a)

Figura 6 - Gráfico de resultados: Nível de stock (b)

Figura 7 - Gráfico de resultados: Número de trabalhadores (c)

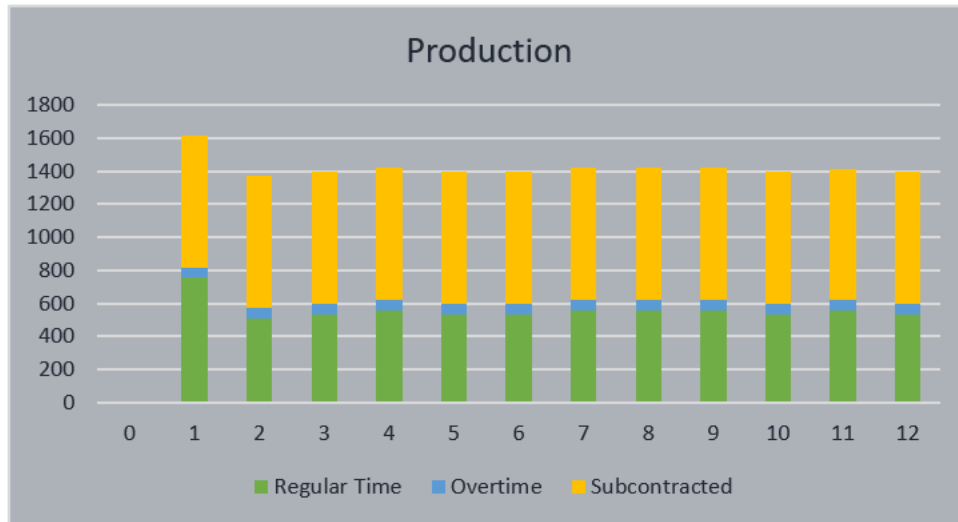


Figura 5 - Gráfico de resultados: Nível de produção (a)

O gráfico de resultados (a) representa o nível da produção total para cada período. Através deste gráfico de barras podemos verificar o número de unidades produzidas internamente em horário normal e em horas extras assim como o número de unidades produzidas por subcontratação considerando o número total produzido.



Figura 6 - Gráfico de resultados: Nível de stock (b)

O gráfico de resultados (b) mostra o nível de stock. Neste gráfico é possível analisar a variação do stock assim como a dos pedidos pendentes. Quanto mais picos forem apresentados neste gráfico, significa que mais custos associados a posse de stock e *back orders*.



Figura 7 - Gráfico de resultados: Número de trabalhadores (c)

O gráfico de resultados (c) mostra através de barras verticais o número de trabalhadores contratados e demitidos para cada período. O número total de trabalhadores é apresentado através de uma linha azul que varia conforme os trabalhadores que são admitidos e demitidos.

#### 3.2.4. Outras Opções (Botão “Clean”)

Além dos botões descritos anteriormente, existe ainda um botão “Clean”. Este botão limpa qualquer dado que tenha sido introduzido nas caixas de entrada da interface.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através do protótipo e comparados com os resultados obtidos através de outros métodos teóricos de planeamento de produção.

Para teste o protótipo, foram gerados dados de forma aleatória, uma amostra de dados seguindo uma distribuição normal e outra seguindo uma distribuição uniforme. Todos os dados foram gerados através de uma folha de Excel utilizando a seguinte formulação:

Para a distribuição normal:

- Nº de dias por período

Média: 22

Desvio Padrão: 1

=ARRED.PARA.BAIXO(INV.NORMAL(ALEATÓRIO());MÉDIA;DESV.PADRÃO);0)

- Procura

Média: 1200

Desvio Padrão: 300

=ARRED.PARA.BAIXO(INV.NORMAL(ALEATÓRIO());MÉDIA;DESV.PADRÃO);0)

Para a distribuição uniforme:

- Nº de dias por período

Entre 21-23

=ALEATÓRIOENTRE(início\_intervalo, fim\_intervalo)

- Procura

Entre 900-2000

=ALEATÓRIOENTRE(início\_intervalo, fim\_intervalo)

Os dados foram gerados considerando uma análise temporal de 12 períodos e podem ser encontrados nos Apêndices A e B.

De forma a ser possível analisar a contribuição deste método, os mesmos dados foram corridos para diferentes métodos de planeamento. Deste modo foi possível comparar os resultados obtidos e verificar qual método permite obter a melhor solução.

No que diz respeito aos parâmetros e custos de produção, os valores usados foram retirados de problemas académicos e adaptados para o protótipo e os respetivos métodos de planeamento testados. Os valores utilizados encontram-se na Tabela 8.

Tabela 8 - Dados de produção

Custos por unidade produzida		Parâmetros da produção	
<b>Custo por unidade produzida em horas extras</b>	10€	Taxa média de produção (unid/hora/trabalhador)	0,146
Custo por unidade produzida por subcontratação	50€	Perda de produtividade	0,2
Custo de posse de stock, por período $t$	2€	Stock Inicial	500
Custo por pedido pendente ( <b>Back Order</b> )	100€	Nº de horas de trabalho diário, em horário normal	8
Custo de Matéria-prima	0,70€	Nº de trabalhadores iniciais, período $t = 0$	300
Custos de pessoal		Restrições de produção	
<b>Salário</b>	800€	Nº máximo de unidades subcontratadas por período $t$	800
Custo de contratação	1000€	Nº máximo de unidades produzidas em horas extras	60
Custo de demissão	2500€	Stock de segurança	0
		Stock Máximo	900
		Nº máximo de trabalhadores	800
		Nº mínimo de trabalhadores	80

#### 4.1. Apresentação de resultados

Neste capítulo são apresentados os dados obtidos através dos cálculos do protótipo de PAP e outros métodos seguindo-se uma comparação entre os dados do PAP e os respetivos outros métodos analisados.

Na Tabela 9 seguem os resultados do protótipo do PAP que foram obtidos através dos valores aleatórios gerados no Excel.

Tabela 9 - Resultados do Protótipo PAP

Resultados Protótipo PAP			
Instância 1	2 588 862,90 €	Instância 16	2 457 238,10 €
Instância 2	2 582 175,70 €	Instância 17	2 972 046,30 €
Instância 3	2 389 192,30 €	Instância 18	3 379 400,30 €
Instância 4	2 355 485,30 €	Instância 19	2 893 555,10 €
Instância 5	2 519 791,80 €	Instância 20	2 855 275,50 €
Instância 6	2 356 879,40 €	Instância 21	3 042 942,30 €
Instância 7	2 252 450,00 €	Instância 22	3 467 336,30 €
Instância 8	2 499 053,80 €	Instância 23	2 942 103,10 €
Instância 9	2 713 885,10 €	Instância 24	3 195 406,60 €
Instância 10	2 600 383,50 €	Instância 25	2 937 713,40 €
Instância 11	2 358 804,30 €	Instância 26	3 243 069,30 €
Instância 12	2 740 206,70 €	Instância 27	3 434 719,50 €
Instância 13	2 521 858,50 €	Instância 28	2 718 860,30 €

Instância 14	2 563 517,70 €	Instância 29	3 421 534,70 €
Instância 15	3 137 091,40 €	Instância 30	3 061 305,30 €

Na Tabela 10 são apresentados os resultados obtidos através dos seguintes métodos de planeamento:

- Nivelamento pela Média
- Excesso de Capacidade
- Adaptação à Procura

Tabela 10 - Resultados obtidos através de outros métodos de planeamento de produção

	Resultados de outros métodos		
	Nivelamento pela Média	Excesso de Capacidade	Adaptação á Procura
Instância 1	4 784 011,70 €	6 349 991,70 €	6 693 061,70 €
Instância 2	5 340 048,90 €	5 813 308,90 €	5 928 778,90 €
Instância 3	5 667 403,80 €	6 809 263,80 €	7 204 633,80 €
Instância 4	4 313 129,80 €	7 568 265,80 €	7 060 835,80 €
Instância 5	3 856 750,30 €	6 244 112,30 €	6 987 182,30 €
Instância 6	5 249 256,70 €	6 049 216,70 €	6 047 986,70 €
Instância 7	4 471 911,80 €	5 707 785,80 €	6 740 055,80 €
Instância 8	5 247 344,30 €	7 307 004,30 €	7 660 974,30 €
Instância 9	4 237 912,70 €	5 523 662,70 €	6 552 232,70 €
Instância 10	4 240 961,40 €	8 302 515,40 €	8 245 385,40 €
Instância 11	4 873 382,70 €	6 140 692,70 €	6 742 662,70 €
Instância 12	4 762 560,50 €	6 899 970,50 €	6 176 440,50 €
Instância 13	3 648 424,20 €	7 620 030,20 €	6 954 400,20 €
Instância 14	4 507 095,20 €	7 567 735,20 €	7 314 105,20 €
Instância 15	3 876 182,40 €	4 776 242,40 €	5 580 212,40 €
Instância 16	6 483 768,30 €	6 994 012,70 €	7 632 298,30 €
Instância 17	7 388 135,00 €	6 797 995,00 €	6 936 865,00 €
Instância 18	6 723 188,20 €	7 937 048,20 €	7 527 418,20 €
Instância 19	5 725 517,50 €	6 363 577,50 €	6 495 147,50 €
Instância 20	6 628 601,50 €	7 046 261,50 €	7 560 731,50 €
Instância 21	5 463 891,80 €	9 076 501,80 €	9 698 671,80 €
Instância 22	6 533 103,10 €	9 090 063,10 €	9 352 233,10 €
Instância 23	6 006 897,10 €	9 247 235,10 €	8 413 405,10 €
Instância 24	4 878 567,40 €	7 215 327,40 €	7 834 597,40 €
Instância 25	6 618 409,30 €	6 809 869,30 €	7 233 639,30 €
Instância 26	6 320 438,60 €	8 055 698,60 €	8 475 868,60 €
Instância 27	5 947 090,10 €	9 404 050,10 €	8 567 120,10 €
Instância 28	6 839 770,00 €	8 435 530,00 €	9 381 188,90 €
Instância 29	5 603 071,10 €	8 749 435,10 €	7 981 905,10 €
Instância 30	4 912 253,60 €	8 630 005,60 €	7 971 275,60 €

## 4.2. Discussão de Resultados

### 4.2.1. Teste ANOVA

Para ser possível avaliar o desempenho do protótipo de PAP quando comparado com os outros métodos de planeamento foi usada o teste de ANOVA (Analysis of Variance) de 1 fator. O teste ANOVA unidirecional é um teste hipóteses paramétrico no qual uma variável dependente é comparada em três ou mais grupos (Silva et al., 2022).

Sendo  $\mu_{PAP}$  a média do desvio relativo da solução do protótipo PAP e  $\mu_{PMedia}$ ,  $\mu_{PMax}$ ,  $\mu_{AdP}$  as médias do desvio relativo entre a solução do protótipo PAP e a solução obtidas através dos outros métodos de planeamento, respetivamente Nivelamento pela Média (Niv. Média), Excesso de Capacidade (Exc. Capacidade), e Adaptação á Procura (Adap. Procura), as hipóteses analisadas pelo ANOVA são:

$$H_0: \mu_{PAP} = \mu_{PMedia} = \mu_{PMax} = \mu_{AdP}$$

$H_1$ : Pelo menos uma das médias é diferente das demais

O resultado da ANOVA é com base na estatística do *p-value*. Esta razão mostra a diferença entre a variância dentro do grupo e a variância entre os grupos, o que acaba por produzir um valor que permite concluir que a hipótese nula é suportada ou rejeitada. Se houver uma diferença significativa entre os grupos, o valor de *p* é superior ao valor de  $\alpha$  e a hipótese nula é rejeitada.

$$p_{value} \leq \alpha \rightarrow \text{Rejeitamos } H_0$$

O resultado do teste ANOVA para um nível de confiança de 95% ( $\alpha = 5\% = 0,05$ ) é apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 – ANOVA da Média dos Desvios Relativos

#### ANOVA

	Soma dos Quadrados	df	Quadrado Médio	Z	Sig.
Entre Grupos	54,441	3	18,147	183,864	<,001
Nos grupos	11,449	116	,099		
Total	65,890	119			

Como se pode analisar na Tabela 11, o valor *p* (<,001) é muito inferior ao valor de  $\alpha$  de 0,05, desta forma é possível concluir-se que existe uma diferença significativa entre as médias dos grupos e por isso rejeitamos a hipótese nula,  $H_0$ .

### 4.2.2. Teste *Post-Hoc*

Embora o teste ANOVA seja utilizado para testar a hipótese nula de que toda a população investigada tem as mesmas médias ou a hipótese alternativa de que pelo menos duas populações têm médias diferentes, ele não informa qual o par tem média diferente quando a hipótese nula é rejeitada. Para isso, são realizados os testes de comparação múltipla *post-hoc* para verificar qual o par da população tem uma média diferente. Entre os vários testes *post-hoc* que existem na literatura, o teste de *Bonferroni* e o teste de *Scheffe* são muito populares e os mais comuns para o teste de pares da média populacional (Aslam & Albassam, 2020).

Para o desenvolvimento deste trabalho, o teste de *post-hoc* utilizado foi o teste de *Scheffe* (Tabela 12). Este teste executa comparações simultâneas para todas as combinações entre pares possíveis de médias (Herzog & Aaronclarke, 2019). Este teste utiliza a distribuição de amostragem e pode ser utilizado para examinar todas as combinações lineares possíveis das médias de grupo não apenas comparações em pares.

Tabela 12 - Teste de *Scheffe* da média dos desvios relativos

#### Comparações múltiplas

(I) Método	(J) Método	Diferença média (I-J)	Erro Padrão	Sig.	Intervalo de Confiança 95%	
					Limite inferior	Limite superior
PAP	Niv. Média	-,9260*	,08112	<,001	-1,1561	-,6959
	Excesso de Capacidade	-1,6093*	,08112	<,001	-1,8395	-1,3792
	Adaptação á procura	-1,6697*	,08112	<,001	-1,8998	-1,4395
Niv. Média	PAP	,9260*	,08112	<,001	,6959	1,1561
	Excesso de Capacidade	-,6833*	,08112	<,001	-,9135	-,4532
	Adaptação á procura	-,7437*	,08112	<,001	-,9738	-,5135
Excesso de Capacidade	PAP	1,6093*	,08112	<,001	1,3792	1,8395
	Niv. Média	,6833*	,08112	<,001	,4532	,9135
	Adaptação á procura	-,0603	,08112	,90682	-,2905	,1698
Adaptação á procura	PAP	1,6697*	,08112	<,001	1,4395	1,8998
	Niv. Média	,7437*	,08112	<,001	,5135	,9738
	Excesso de Capacidade	,0603	,08112	,90682	-,1698	,2905

\*. A diferença média é significativa no nível 0.05.

Os resultados demonstram que existem diferenças significativas entre as médias dos métodos ( $\text{sig} < 0,05$ ) com exceção dos métodos Excesso de capacidade e Adaptação á procura que apresentam o mesmo valor de significância e que é muito superior a 0,05. Uma vez que entre os métodos PAP e Nivelamento pela média, o PAP é aquela que apresenta uma média mais baixa (Tabela 13), podemos concluir que este é método com melhor solução.

Tabela 13 - Tabela descritiva da média dos desvios relativos

<b>Descritivas</b>			
	<b>N</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio padrão</b>
PAP	30	,0000	,00000
Nivelamento pela Média	30	,9260	,34144
Excesso de Capacidade	30	1,6093	,38035
Adaptação á procura	30	1,6697	,36543
<b>Total</b>	<b>120</b>	<b>1,0513</b>	<b>,74411</b>

É, ainda assim, importante salientar que para valores aleatórios, o método do Nivelamento pela Média apresenta os melhores resultados a seguir aos resultados obtidos através do protótipo PAP.





## 5. CONCLUSÃO

Este capítulo sintetiza a pesquisa realizada ao longo do trabalho e apresenta as conclusões relevantes. Além disso, são expostas as limitações do trabalho realizado e possíveis sugestões para desenvolvimento futuro.

### 5.1. Conclusões finais

Este trabalho incidiu no estudo do planeamento agregado da produção através de modelos de otimização. Foram abordados modelos matemáticos de programação linear que formularam o PAP de diversos modos e salientaram diferenças no planeamento da produção.

Um bom planeamento e uma melhoria contínua são essenciais para o sucesso de uma organização. Desta forma torna-se fundamental a utilização de ferramentas que possibilitem planear o processo produtivo de forma eficiente e de acordo com o panorama atual da empresa.

Os modelos de otimização oferecem benefícios e aumentam a produtividade. O Microsoft Excel é das abordagens mais populares na programação da IO e o método Simplex é o método mais acessível e mais utilizado na resolução de modelos de programação linear.

O Planeamento Agregado da Produção, permite posicionar estrategicamente a organização em função da procura esperada. Este método permite a alocação dos recursos e estabelece o impacto nos níveis de stock.

A aplicação de modelos matemáticos na área produtiva revela bons resultados de produtividade e nos custos da organização. Analisando os casos de estudo descritos ao longo deste trabalho, percebe-se que a aplicação destes modelos a casos práticos obtêm boas soluções.

Os resultados obtidos pelo protótipo de PAP quando comparados com outros métodos de planeamento, como o Nivelamento pela Média, Excesso de Capacidade e Adaptação à Procura, por meio de testes estatísticos, como o teste ANOVA e o teste de *Scheffe*, demonstraram que o PAP apresentou um desempenho significativamente melhor em comparação com os outros métodos.

No entanto, é importante notar que, para valores aleatórios, o método do Nivelamento pela Média produziu os resultados mais próximos aos do protótipo PAP. Isso sugere que, em determinados cenários, o Nivelamento pela Média pode ser uma alternativa viável ao PAP.

Este estudo demonstrou a eficácia dos modelos de otimização, em particular do PAP, na melhoria do planeamento da produção e na redução de custos para as organizações. No entanto, a escolha entre métodos específicos deve ser baseada nas necessidades e características individuais de cada empresa. O conhecimento adquirido neste trabalho pode ser uma valiosa contribuição para a área de planeamento da produção e para a melhoria contínua das operações empresariais.

## **5.2. Limitações e trabalhos futuros**

Uma limitação deste protótipo é que é muito geral e pode não ser o mais adequado às circunstâncias da empresa, o que significa que as suas soluções não são necessariamente ideais. No caso de uma implementação, será necessário primeiro realizar um estudo das necessidades da organização e fazer uma modificação nos parâmetros do protótipo ou no tipo de planeamento para atender às necessidades da organização.

O trabalho desenvolvido assenta essencialmente na otimização do planeamento agregado da produção. Para trabalhos futuros, seria de interesse aprofundar numa ferramenta que realizasse não só o planeamento prévio, mas também o Plano Diretor da Produção.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves Verga, M. (2021). *O Controlo de Gestão e a Otimização da Performance: Modelo de Otimização Aplicado ao Planeamento da Produção*.
- Aslam, M., & Albassam, M. (2020). Presenting post hoc multiple comparison tests under neutrosophic statistics. *Journal of King Saud University - Science*, 32(6), 2728–2732. <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2020.06.008>
- Azevedo Costa, D. (2021). *DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA DE PLANEAMENTO E DISTRIBUIÇÃO DE CARGA AÉREA*.
- Carvalho Da Fonseca, N. M. (2009). *Melhoria do Planeamento e Programação da Produção da Empresa AGM*.
- Clemen, R. T., & Reilly, T. (2013). *Making hard decisions with DecisionTools*. Cengage Learning.
- Correia, A. I. de A. (2010). *UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO*.
- Darvishi, F., Ghasemy Yaghin, R., & Sadeghi, A. (2020). Integrated fabric procurement and multi-site apparel production planning with cross-docking: A hybrid fuzzy-robust stochastic programming approach. *Applied Soft Computing Journal*, 92. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106267>
- de los Ríos, M. D., & Belmonte, R. M. (2022). Extending Microsoft excel and Hansen solubility parameters relationship to double Hansen's sphere calculation. *SN Applied Sciences*, 4(6). <https://doi.org/10.1007/s42452-022-04959-4>
- Diogo, F., & Soares Mateus, A. (n.d.). *DESENVOLVIMENTO DE PROTÓTIPO DE CONSOLIDAÇÃO BIDIMENSIONAL DE CARGA*.
- Fearnley, J., & Savani, R. (2015). The complexity of the simplex method. *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 14-17-June-2015*, 201–208. <https://doi.org/10.1145/2746539.2746558>
- Ferreira Garcia, B., & Pinheiro Bueno, M. (2020). *PESQUISA OPERACIONAL APLICADA À ADMINISTRAÇÃO NA TOMADA DE DECISÃO OPERATIONAL RESEARCH APPLIED TO ADMINISTRATION IN DECISION-MAKING ÁREA TEMÁTICA: 1. Administração da Informação c. Processo Decisório e Sistemas de Apoio à Decisão*.
- Frisanco, T., & Anglberger, N. (2008). *The 4th IEEE International Conference on Management of Innovation & Technology : 21-24 Sep 2008, Bangkok, Thailand*. IEEE Xplore.
- G. Luenberger, D. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*.
- Gabriel, V. (2005). *Gestão da Produção*. [www.estg.ipg.pt](http://www.estg.ipg.pt)
- Herzog, M., & Aaronclarke, G. (2019). *Understanding Statistics and Experimental Design How to Not Lie with Statistics*. <http://www.springer.com/series/15430>
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2006). *Introdução à pesquisa operacional*. McGraw-Hill.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introduction to Ninth Edition*. [www.mhhe.com/hillier](http://www.mhhe.com/hillier)
- Ibrahim, M. S., & Kaml, B. S. (2021). Supply chain with fuzzy analytic hierarchy process (Ahp): A case study. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 12(2), 1699–1717. <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.5310>
- Köche, J. C. (2011). *Fundamentos de Metodologia Científica*.
- Landry, M., Malouin, J.-L., & Oral, M. (1983). Model validation in operations research. *European Journal of Operational Research*, 14(3), 207–220. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0377-2217\(83\)90257-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0377-2217(83)90257-6)
- Leung, S. C. H., & Wu, Y. (2004). A robust optimization model for stochastic aggregate production planning. *Production Planning and Control*, 15(5), 502–514. <https://doi.org/10.1080/09537280410001724287>
- Lusa, A., Pastor, R., & Corominas, A. (2008). Determining the most appropriate set of weekly working hours for planning annualised working time. *International Journal of Production Economics*, 111(2), 697–706. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2007.03.022>

- Magalhães Hill, M., & Marques dos Santos, M. (2015). Afecção e Optimização em redes-- INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL. In *Exercícios de Programação Linear* (Vol. 1).
- Manuel Da, J., Vilelas, S., Vermelha, C., & Diretor, P. (2020). *Investigação O Processo de Construção do Conhecimento*.
- Margarida, A., Ramos, O., & Silva, D. A. (2017). *Melhoria do Planeamento e Controlo da Produção de um Sistema Produtivo*.
- Microsoft Office. (2021). *Definir e resolver um problema usando o Solver*.  
<https://support.microsoft.com/pt-pt/office/definir-e-resolver-um-problema-utilizando-o-solver-5d1a388f-079d-43ac-a7eb-f63e45925040>
- Nelder, J. A., & Mead, R. (2011). *A simplex method for function minimization*.
- Niegodajew, P., Marek, M., Elsner, W., & Kowalczyk, Ł. (2020). Power plant optimisation-effective use of the nelder-mead approach. *Processes*, 8(3). <https://doi.org/10.3390/PR8030357>
- Oliveira, J. F., & Carravilla, M. A. (1998). *Programação Linear e Método Simplex*.
- Ramaiyer Subramanian, K., Agrawal, S., & Subramanian, K. (2010). OPERATIONS RESEARCH- CONTEMPORARY ROLE IN MANAGERIAL DECISION MAKING Characteristic of Cold-Standby Redundant System 200 OPERATIONS RESEARCH-CONTEMPORARY ROLE IN MANAGERIAL DECISION MAKING. <https://www.researchgate.net/publication/44176282>
- Ramos Cruz, H. (2018). *Planeamento e Programação da Produção Sistemas Integrados de Gestão de Informação na base da Tomada de Decisão Estudo de caso numa empresa do ramo alimentar Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia e Gestão Industrial*.
- Silva, J. P. Da, Santos, Y. R. P. dos, & Bello, M. I. M. da C. (2022). Aplicação da ANOVA e dos testes de Fisher e Tukey em dados de recalque de edifícios de múltiplos pavimentos. *Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica Do IFPB*, 59(3), 829.  
<https://doi.org/10.18265/1517-0306a2021id5388>
- Sutthibutr, N., & Chiadamrong, N. (2020). Integrated Possibilistic Linear Programming with Beta-Skewness Degree for a Fuzzy Multi-Objective Aggregate Production Planning Problem Under Uncertain Environments. *Fuzzy Information and Engineering*, 12(3), 355–380.  
<https://doi.org/10.1080/16168658.2021.1893493>
- Techawiboonwong, A., & Yenradee, P. (2003). Aggregate production planning with workforce transferring plan for multiple product types. *Production Planning and Control*, 14(5), 447–458. <https://doi.org/10.1080/09537280310001597343>
- Tirkolae, E. B., Aydin, N. S., & Mahdavi, I. (2022). A Hybrid Biobjective Markov Chain Based Optimization Model for Sustainable Aggregate Production Planning. *IEEE Transactions on Engineering Management*. <https://doi.org/10.1109/TEM.2022.3210879>
- Türkay, M., Saraçoğlu, Ö., & Arslan, M. C. (2016). Sustainability in supply chain management: Aggregate planning from sustainability perspective. In *PLoS ONE* (Vol. 11, Issue 1). Public Library of Science. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0147502>
- Ur Rehman, H., Ahmad, A., Ali, Z., Baig, S. A., & Manzoor, U. (2021). Optimization of Aggregate Production Planning Problems with and without Productivity Loss using Python Pulp Package. *Management and Production Engineering Review*, 12(4), 38–44.  
<https://doi.org/10.24425/mper.2021.139993>
- Winston, W. L. (2004). *Operations Research APPLICATIONS AND ALGORITHMS*.  
[www.duxbury.com](http://www.duxbury.com)
- Yalcin, F. (2019). Linear programming approaches and production planning for investments in the dairy industry. *AIP Conference Proceedings*, 2116. <https://doi.org/10.1063/1.5114086>





## APÊNDICE A

Dados usados para correr o protótipo e realizar os testes estatísticos.

### Número de dias de trabalho para cada período.

Período	Nº dias / período
1	22
2	20
3	21
4	22
5	21
6	21
7	22
8	22
9	22
10	21
11	22
12	21

## APÊNDICE B

Dados usados para correr o protótipo e realizar os testes estatísticos.

### Distribuição Normal

	<b>Instância 1</b>	<b>Instância 2</b>	<b>Instância 3</b>	<b>Instância 4</b>	<b>Instância 5</b>
<b>Período</b>	Procura	Procura	Procura	Procura	Procura
1	1073	1315	1866	1201	1064
2	1187	1065	1700	1311	1407
3	1363	1477	1181	763	1171
4	1275	1589	1018	1092	959
5	1467	1601	1076	1623	998
6	1320	1296	1836	1291	1513
7	1488	1151	1168	1144	629
8	1390	1324	979	1074	934
9	808	1260	1236	1252	941
10	1377	1589	1335	1451	1704
11	1154	1299	1700	1378	1229
12	1229	761	1139	1514	1040

	<b>Instância 6</b>	<b>Instância 7</b>	<b>Instância 8</b>	<b>Instância 9</b>	<b>Instância 10</b>
<b>Período</b>	Procura	Procura	Procura	Procura	Procura
1	1756	870	1387	695	1211
2	759	1322	1252	1207	1249
3	1077	1004	1611	1387	547
4	1574	1280	1214	1416	1515
5	1277	1347	929	1390	909
6	1657	1417	1594	1534	791
7	1225	1526	1685	1272	1437
8	1380	1115	833	490	1838
9	1528	1654	1441	1090	1576
10	1374	1124	1594	1256	1822
11	1453	1039	1158	1021	1441
12	821	996	1451	903	1686

	<b>Instância 11</b>	<b>Instância 12</b>	<b>Instância 13</b>	<b>Instância 14</b>	<b>Instância 15</b>
<b>Período</b>	Procura	Procura	Procura	Procura	Procura
1	938	1238	1008	1053	1597
2	1364	1193	1068	1161	852
3	946	1208	923	1536	1154

4	1500	1171	1376	1224	1309
5	1186	1856	770	1375	1086
6	1485	1167	1385	1196	701
7	1759	1144	1101	925	1364
8	1528	1277	957	870	783
9	1305	1191	1308	1375	1039
10	1317	1011	1317	2012	1084
11	1274	1412	1447	1013	804
12	959	947	1526	596	859

### Distribuição Uniforme

	<b>Instância 16</b>	<b>Instância 17</b>	<b>Instância 18</b>	<b>Instância 19</b>	<b>Instância 20</b>
<b>Período</b>	Procura	Procura	Procura	Procura	Procura
1	1905	1874	1287	1310	1963
2	940	1248	1998	1490	1275
3	1214	1789	1599	1732	1394
4	1478	1918	1468	1586	1194
5	1712	1536	1667	1327	1698
6	1760	1456	1798	1246	1541
7	1967	1789	1130	1426	1882
8	1286	1914	1490	1082	1389
9	1934	1883	1515	1365	1979
10	1493	1075	1489	1226	1357
11	1413	1443	1365	909	1091
12	1367	925	1120	1126	1182

	<b>Instância 21</b>	<b>Instância 22</b>	<b>Instância 23</b>	<b>Instância 24</b>	<b>Instância 25</b>
<b>Período</b>	Procura	Procura	Procura	Procura	Procura
1	988	1816	1252	1013	1768
2	1348	1400	1195	1262	1749
3	1953	1746	1736	1425	1156
4	1054	1038	1978	1081	1638
5	1277	1980	1166	1211	1798
6	1934	1320	1702	1868	1693
7	904	1800	1061	1047	1590
8	937	1233	1505	1074	1071
9	1940	942	1477	1814	931
10	1993	1702	1535	1686	1349
11	1382	1388	1681	1272	1270
12	1864	1868	1905	1429	1086

---

	<b>Instância 26</b>	<b>Instância 27</b>	<b>Instância 28</b>	<b>Instância 29</b>	<b>Instância 30</b>
<b>Período</b>	Procura	Procura	Procura	Procura	Procura
<b>1</b>	1294	1592	1465	1215	964
2	1313	1866	1898	968	970
3	1857	1013	1998	1841	1899
4	1253	1296	1307	1252	1837
5	1797	1247	1038	1143	944
6	1488	1821	1977	1456	964
7	1215	1257	1068	1728	1602
8	1779	1186	1848	1501	1163
9	1527	1573	1365	1912	1173
10	1962	1558	1677	1839	1223
11	1888	1292	1544	1550	1507
12	1625	1942	1715	1788	1762

---

