Diferentes Formas de Multiplicar*

Filomena Baptista Soares

filomenasoares@eseig.ipp.pt

Equiparada a Prof. Adjunto Departamento de Matemática ESEIG - IPP

Maria Paula Sousa Nunes

paulanunes@eseig.ipp.pt

Equiparada a Prof. Adjunto Departamento de Matemática ESEIG - IPP

Resumo. A matemática é um edifício intelectual complexo, subtil, construído ao longo dos séculos sobre diversos princípios e regras lógicas. O tão "básico" algoritmo da multiplicação que "mecanicamente" utilizamos é o resultado de uma evolução histórica. Ao longo dos tempos, diferentes povos, em diferentes lugares, desenvolveram variadas técnicas para multiplicar e aqui serão recordadas algumas.

Desde o processo de duplicações sucessivas dos egípcios da Antiguidade, e de algumas variações a este, ao processo de multiplicação utilizando as mãos, dos camponeses franceses, passando pelo método da gelosia utilizado pelos árabes que, provavelmente, o aprenderam com os hindus, vários serão os métodos analisados à luz dos conhecimentos actuais.

Para terminar, não poderá deixar de se abordar o algoritmo usual da multiplicação, frequentemente "ensinado" como se de uma "receita" se tratasse, justificando todos os seus "porquês".

1. Um método Egípcio para multiplicar

Ao longo dos tempos, diferentes povos, em diferentes lugares, desenvolveram variadas técnicas para multiplicar. Os egípcios da Antiguidade, por exemplo, criaram um interessante processo usando duplicações sucessivas. Duplicar é dobrar, isto é, multiplicar por dois. Para expor o processo começaremos com alguns exemplos simples (embora conhecendo a numeração egípcia, nos exemplos apresentados utilizaremos o nosso sistema de numeração para facilitar a compreensão do método).

<u>Exemplos</u>:

- Multiplicar um número por quatro é dobrar o seu dobro, pois 4 = 2 x 2. Por exemplo, para obter 4 x 17 fazemos assim:

  dobro de 17 = 34

  dobro de 34 = 68

  Deste modo: 4 x 17 = 68
- Multiplicar um número por 8 é dobrar o dobro do seu dobro, uma vez que 8 = 2 x 2 x 2. Assim, para obter 8 x 21 fazemos:

* Apresentado no XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática, Caminha, Abril 17-19, 2005.

dobro de 21 = 42

dobro de 42 = 84

dobro de 84 = 168

Portanto: 8 x 21 = 168

- 32 x 13 = ?

  dobro de 13 = 2 x13 = 26

  dobro de 26 = 2 x 26 = 4 x 13 = 52

  dobro de 52 = 2 x 52 = 8 x 13 = 104

  dobro de 104 = 2 x 104 = 16 x 13 = 208

  dobro de 208 = 2 x 208 = 32 x 13 = 416

  Portanto: 32 x 13 = 416

Deste modo, através de duplicações sucessivas, é fácil multiplicar um número por 4, 8, 16, 32, 64, etc. (estes são os números que se obtêm multiplicando o 2 por ele mesmo sucessivas vezes). No entanto, este processo não permite obter, por exemplo, 14 x 23, uma vez que nenhum dos dois factores é 4, 8, 16, 32, 64, etc.

Há uma forma de superar esta aparente impossibilidade. Para compreendê-la devemos antes perceber o seguinte: os números naturais que não fazem parte da sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc., podem sempre ser escritos como soma de alguns dos números que fazem parte dela. Por exemplo: o 3, que não é da sequência, é a soma de 1 com 2, que são da sequência. Outros exemplos: 11 = 8 + 2 + 1; 36 = 32 + 4; 88 = 64 + 16 + 8

- No método egípcio, para multiplicarmos 14 por 23, primeiro escrevemos um dos dois factores (14, por exemplo) como soma de números da referida sequência:

  14 = 8 + 4 + 2

  Seguidamente, fazemos as duplicações sucessivas do 23:

  2 x 23 = 46

  4 x 23 = 2 x 46 = 92

  8 x 23 = 2 x 92 = 184

  Como 14 x 23 = (8 + 4 + 2) x 23 = 8 x 23 + 4 x 23 + 2 x 23,

  resulta que 14 x 23 = 184 + 92 + 46.

  Efectuando as adições teremos o resultado: 14 x 23 = 322.

- Seguindo o mesmo raciocínio, multipliquemos 37 por 45:

$37 \times 45 = ?, \quad 37 = 32 + 4 + 1$

$$\boxed{1 \times 45 = 45}$$
$$2 \times 45 = 90$$
$$\boxed{4 \times 45 = 180}$$
$$8 \times 45 = 360$$
$$16 \times 45 = 720$$
$$\boxed{32 \times 45 = 1440}$$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ 180 \\ +45 \\ \hline 1665 \end{array}$$

Logo: 37 x 45 = 1665

O carácter aditivo da numeração usada pelos egípcios, reflecte-se nos processos de cálculo que eles desenvolveram. Isto fica evidenciado no método que vimos: para multiplicar, depois das multiplicações sucessivas, faz-se uma adição.

Em qualquer sistema de numeração, as regras usadas para escrever os números influenciam as técnicas de cálculo.

O processo egípcio talvez explique a origem da palavra multiplicar na língua latina: ***multi*** quer dizer vários e ***plicare*** significa dobrar. Assim, multiplicar é dobrar várias vezes.

1. Um método Russo para multiplicar

Este método utilizado pelos russos que se vai apresentar de seguida, pode ser considerado uma variante do método apresentado anteriormente, desenvolvido pelos egípcios. Trata-se de uma forma peculiar de se efectuar as multiplicações, que mais parece um truque... importa, pois, numa fase posterior, reflectirmos sobre a veracidade do método e a razão pela qual ele funciona! Comecemos por observar um exemplo:

Um pequeno truque...

Este "*truque*" consiste num método para multiplicar dois números, através de uma técnica não mais difícil do que somar, multiplicar e dividir por **dois**. Esta técnica baseia-se no método de multiplicação egípcio.

Escrevem-se, um ao lado do outro, dois números, (na notação decimal). Em linhas consecutivas, multiplica-se o número da direita por **dois** e divide-se o da esquerda por **dois**, ignorando-se as fracções (metade de 11 deve ser considerado 5 e não 5,5). Então, riscam-se as linhas em que o número da esquerda é par e soma-se tudo o que sobrou na coluna da direita. O total será o produto procurado!

Vejamos um exemplo:

$$41 \times 13 = 533$$

41 ÷2	13 ×2
~~20~~	~~26~~
~~10~~	~~52~~
5	104
~~2~~	~~208~~
1	+ 416
	533

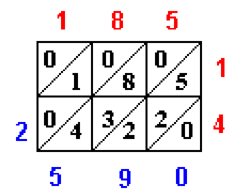
Este método "funciona", vejamos no caso deste exemplo, o porquê:

$$\begin{aligned}
41 \times 13 &= 41 \times 13 \times \frac{2}{2} = \\
&= \frac{41}{2} \times 13 \times 2 = \\
&= \left(20 + \frac{1}{2}\right) \times 13 \times 2 = \\
&= \left(20 \times 13 \times 2\right) + \frac{1}{2} \times 13 \times 2 = \\
&= \left(\frac{20}{2} \times 13 \times 4\right) + 13 = \\
&= \left(10 \times 13 \times 4\right) + 13 = \\
&= \left(\frac{10}{2} \times 13 \times 8\right) + 13 = \\
&= \left(5 \times 13 \times 8\right) + 13 = \\
&= \left(\frac{5}{2} \times 13 \times 16\right) + 13 = \\
&= \left[\left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 13 \times 16\right] + 13 = \\
&= \left[\left(2 \times 13 \times 16\right) + \left(\frac{1}{2} \times 13 \times 16\right)\right] + 13 = \\
&= \left(2 \times 13 \times 16\right) + 13 \times 8 + 13 = \\
&= 13 \times 32 + 13 \times 8 + 13 = \\
&= \mathbf{416} + \mathbf{104} + \mathbf{13} = 533
\end{aligned}$$

3. Um método para multiplicar usado pelos árabes

O algoritmo para multiplicar, que apresentaremos a seguir, era usado pelos árabes que, provavelmente, o aprenderam com os hindus. É fácil ver que ele é bastante parecido com o que usamos hoje. É chamado Gelosia ou método da grade:

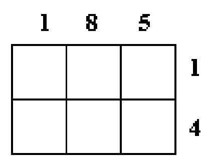
Aqui está a multiplicação de 185 por 14:



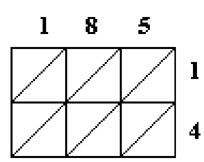
185 x 14 = 2590

Para compreender o processo vamos apresentá-lo passo a passo:

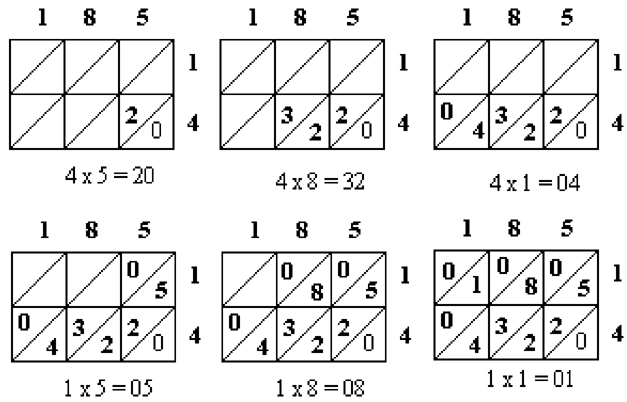
- Desenhamos um rectângulo dividido em rectângulos mais pequenos. No nosso exemplo temos 2 filas e 3 colunas de pequenos rectângulos porque 14 tem 2 algarismos e 185 tem 3 algarismos.



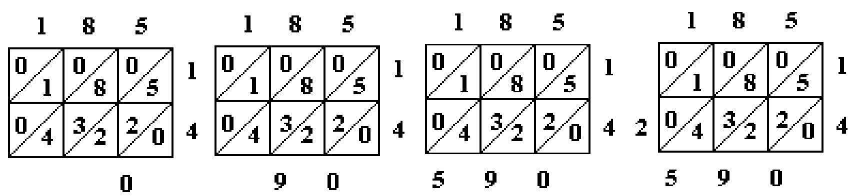
- Traçamos uma diagonal em todos os rectângulos pequenos, como mostra a figura, obtendo uma grelha:

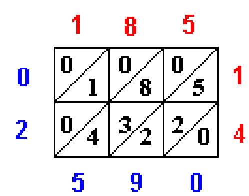


- Seguidamente, multiplicamos os algarismos de um factor pelos algarismos do outro factor e registamos os resultados na grelha. Observemos a forma de fazer o registo.



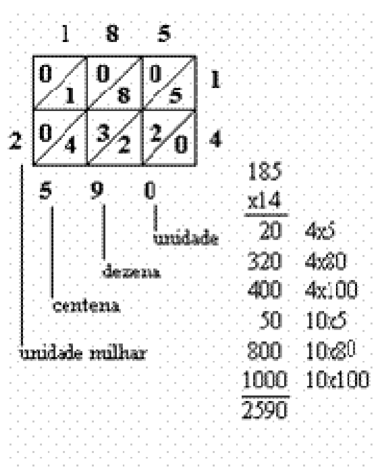
- Agora, neste último passo, somamos os algarismos que estão numa mesma faixa diagonal. É preciso observar o "e vai um".



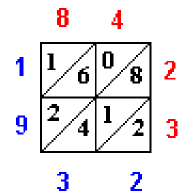


185 x 14 = 02590 = 2590

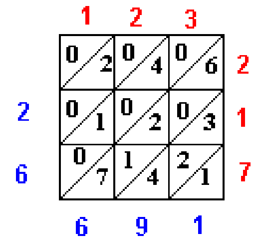
Para compreender o funcionamento desta técnica, vamos compará-la com o nosso modo de multiplicar.



Vejamos mais dois exemplos:



84 x 23 = 1932



123 x 217 = 26691

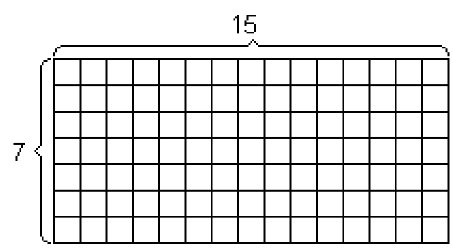
4. O “nosso” Algoritmo

Muitas pessoas que aprenderam o algoritmo habitual da multiplicação, embora saibam executá-lo, não o compreendem. Deste modo, a execução da operação é um acto mecânico, sem raciocínio matemático. Compreender uma técnica de cálculo não é apenas saber executá-la, é , fundamentalmente entender todos os seus “porquês”.

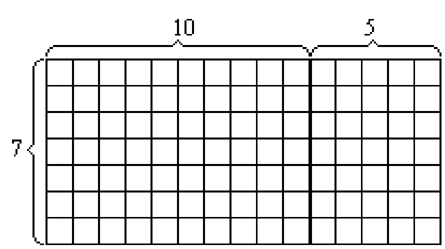
Para compreender o algoritmo da multiplicação, vamos analisar alguns exemplos.

Começaremos por um exemplo simples: 7 x 15.

O produto de 7 por 15 é o número de quadradinhos unitários contidos no rectângulo de lados 7 e 15.



Vamos decompor o rectângulo em outros dois. Isto significa usar a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição:



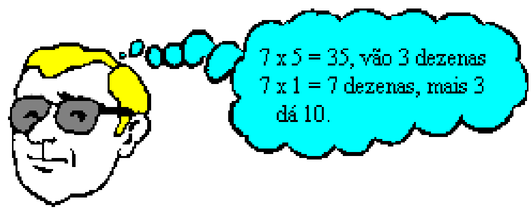
$$7 \times 15 = 7 \times (10 + 5) = 7 \times 10 + 7 \times 5 = 70 + 35$$

Estes cálculos podem ser organizados de outra maneira:

$$7 \times (10 + 5) = 7 \times 10 + 7 \times 5 \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times 7 \\ \hline 35 \\ +70 \\ \hline 105 \end{array}$$

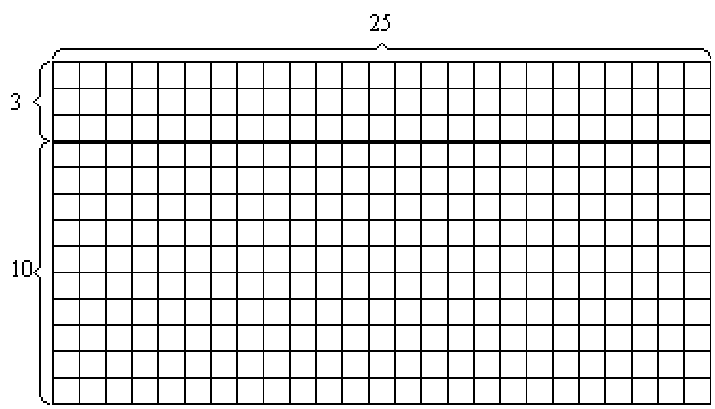
Temos assim a forma habitual do algoritmo:

$$\begin{array}{r} {}^{3} \\ 15 \\ \times 7 \\ \hline 105 \end{array}$$



Vejamos agora um exemplo um pouco mais complicado: 13 x 25.

Vamos representar esse produto com o rectângulo de lados 13 e 25, decompondo-o em outros dois rectângulos.



Para encontrar o total de quadradinhos (ou a área) do rectângulo, um caminho natural é encontrar o total de cada parte e, depois, somar esses resultados parciais.

Assim sendo, devemos efectuar 3 x 25 para a parte menor, 10 x 25 para a parte maior, e somar os resultados:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 25 \\ \times 3 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times 10 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ +250 \\ \hline 325 \end{array}$$

Esse processo pode ser resumido:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 13 \\ \hline 75 \\ +250 \\ \hline 325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times 13 \\ \hline 75 \\ +25 \\ \hline 325 \end{array}$$

Notemos, novamente, que o algoritmo está ligado à propriedade distributiva: ao multiplicarmos 13, multiplicamos por 3 e por 10, somando depois os resultados. O algoritmo também está ligado ao nosso sistema de numeração: quando multiplicamos 2 dezenas e 5 unidades (25) por 10, obtemos 2 centenas e 5 dezenas (250) e por isso, o 5 de 250 é escrito por baixo do 7 do 75.

Vejamos agora um terceiro exemplo:

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{x25} \\ 615 \\ \underline{246} \\ 3075 \end{array}$$

Analisemos as seguintes questões:

1. Como foi obtido o 615?
2. Porque ficou um espaço vazio sob o 5 de 615?
3. O 246 escrito por baixo de 615 é duzentos e quarenta e seis?

Para responder, é necessário compreender o algoritmo. Analisando-o passo a passo, chegamos às respostas:

1. Como 25 x 123 = (20 + 5) x 123, o 615 foi obtido multiplicando-se 5 por 123.
2. Ao multiplicar 20, isto é, 2 dezenas, por 123, obtemos 246 dezenas, ou seja, 2460 unidades. Isto significa que o espaço vazio sob o 5 do 615 pode ser visto como:
   - correspondendo a um zero, que pode ou não ser escrito;
   - a "casa" das unidades vazia, uma vez que o resultado é dado em "dezenas".
3. A terceira questão já está respondida: o 246 escrito por baixo de 615 pode ler-se duzentos e quarenta e seis **dezenas** ou duas mil, quatrocentas e sessenta **unidades**.

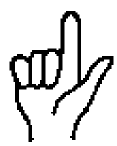
5. Multiplicações "curiosas"

5.1 Multiplicando com as mãos

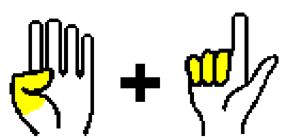
Existe um processo muito curioso para fazer multiplicações com os dedos das mãos. Este método era usado, até há pouco tempo, por camponeses de uma região de França. Eles sabiam de cor a tabuada até à dos 5 e, para multiplicar números compreendidos entre 5 e 10, como por exemplo, 6 x 9 ou 7 x 8, usavam os dedos. Vejamos como faziam para obter, por exemplo, 6 x 8.

Numas das mãos, baixamos tantos dedos quantas unidades o 6 passa de 5; portanto baixamos 1 dedo.

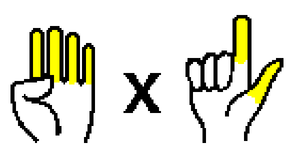
Na outra mão, baixamos tantos dedos quantas unidades o 8 passa de 5; portanto baixamos 3 dedos.



Somamos o número de dedos baixados, exprimindo a soma em dezenas. No nosso caso temos 1 + 3 = 4 dezenas, isto é, 40 unidades.



Seguidamente multiplicamos os números de dedos levantados: 4 x 2 = 8 unidades.



Para obter o resultado final, somamos os valores encontrados: 40 + 8 = 48

De facto: 6 x 8 = 48!

Embora, para nós, este procedimento possa não ser prático, ele é, sem dúvida, curioso.

Utilize-o para obter, por exemplo, 7 x 8, 6 x 7, 7 x 9 e 6 x 9. Verifique que o método também é válido para os factores 5 e 10, que são os extremos do intervalo em que o processo pode ser usado.

Apresentaremos, agora, uma proposta de explicação deste método:

Pretende-se multiplicar dois quaisquer números, X e Y, onde X e Y são naturais entre 5 e 10, sabendo unicamente a tabuada até à dos cinco.

Consideremos, então, $X = x + 5$ e $Y = y + 5$, onde x e y são os dedos que se baixam em cada mão. Deste modo, $5 - x$ e $5 - y$, são os dedos que ficam levantados em cada mão.

O método apresentado consiste em se multiplicar por 10, a soma dos dedos que estão para baixo e, posteriormente adicionar-se o produto dos que ficam levantados, ou seja:

$$\begin{aligned} 10(x+y)+(5-x)(5-y) &= 10x+10y+25-5y-5x+xy = \\ &= xy+5x+5y+25 \end{aligned}$$

Ora, o produto que se pretende efectuar é:

$$XY = (x+5)(y+5) = xy+5x+5y+25$$

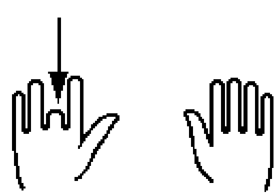
Daqui se pode concluir a veracidade do método e escrever-se:

$$XY = (x+5)(y+5) = 10(x+y)+(5-x)(5-y)$$

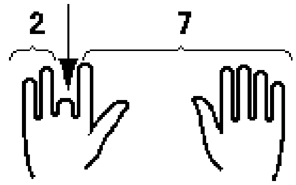
5.2 A tabuada dos nove e os dedos das mãos

Há um modo interessante para se obter a tabuada dos nove usando os dedos das mãos. Coloque as mãos abertas sobre a mesa.

Vamos obter, por exemplo, 3 x 9. Dobre o 3° dedo, a contar da esquerda para a direita.

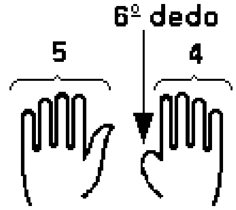


Veja que, à esquerda do dedo dobrado, ficaram dois dedos e, à sua direita, 7 dedos.



Eis o resultado: 3 x 9 = 27!

Veja como se obtém 6 x 9:



Não é curioso? Experimente obter as outras multiplicações da tabuada dos nove.

A justificação formal deste resultado é simples. O produto de nove por um qualquer número x entre 1 e 10, obtém-se baixando o "dedo x" e lendo como dezenas o número de dedos que lhe ficam à esquerda (($x - 1$) dezenas) e como unidades o número de dedos que lhe ficam à direita (($10 - x$) unidades). Temos, então o resultado "lido nas mãos": $(x-1)\times 10+(10-x)$, isto é, $9.x$, o produto procurado!

6. Considerações Finais

Os métodos aqui referidos estão longe de esgotar todas as "formas" de multiplicação existentes, mais ou menos similares, como, por exemplo, os "Ossos de Napier", a "Multiplicação Triangular", a "Multiplicação utilizando Logaritmos", entre outros, que se encontram referidos, de um modo acessível em [1] .

Para terminar, não podemos deixar de referir a importância do conhecimento basilar de qualquer questão matemática por muito simples que seja. O contacto recente com alguns professores do 1º Ciclo do Ensino Básico, foi o "motor" desta apresentação que, não tendo como objectivo "ensinar" métodos mas sim referir a sua existência, procura essencialmente evitar que existam professores a "não saber" justificar o comum algoritmo da multiplicação. Foi, para nós, "escandaloso" apercebermo-nos que existem hoje professores que se sentem confortáveis com justificações do tipo "… é assim porque… é assim".

Bibliografia e Referências

http://www.projects.ex.ac.uk/trol/trol/trolfg.pdf

http://educar.sc.usp.br/matematica

http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/

http://www.mathgoodies.com/lessons

http://www.scipione.com.br/sceduca/assessoria/pensar/index5.htm