

Modelização Cinemática de um Robot Industrial

A maioria dos manipuladores robóticos industriais possui uma configuração estrutural em cadeia cinemática aberta, i.e., são constituídos por um conjunto de elos ligados em série através de juntas. Ao contrário da cinemática directa, o modelo cinemático inverso é, em muitos casos, difícil ou mesmo impossível de obter analiticamente. Por outro lado, o seu peso computacional deve ser reduzido ao mínimo, de modo a possibilitar o comando do *robot* em tempo real. Neste artigo apresentam-se dois métodos para a determinação do modelo cinemático inverso do manipulador TI ER 6000: o Método Geométrico e o Método Diferencial. O Método geométrico possibilita a determinação das 8 soluções que o modelo apresenta, mas o tempo de cálculo necessário é significativamente elevado. Pelo contrário o Método Diferencial permite a determinação de apenas uma solução, sendo o seu peso computacional bastante reduzido.

1. INTRODUÇÃO

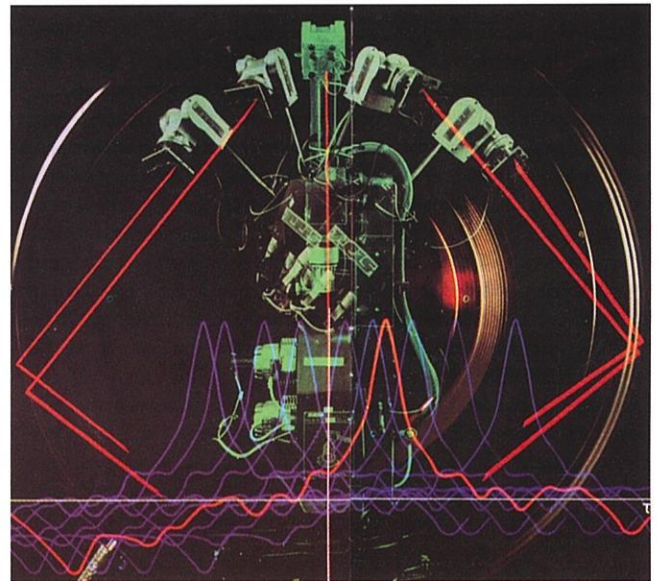
A maioria dos manipuladores robóticos industriais possui uma configuração estrutural em cadeia cinemática aberta semelhante à do braço humano, isto é, são constituídos por um conjunto de elos rígidos ligados em série através de juntas rotativas ou prismáticas. No caso geral, o seu modelo cinemático pode ser representado por uma equação do tipo 8:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q}); \quad \mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{x}) \quad (\text{Eq. 1})$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ representa um vector de coordenadas no espaço operacional, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ representa um vector de coordenadas no espaço das juntas e f é uma aplicação não linear de $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, n indica o número de graus de liberdade (gdl) do manipulador e m é a dimensão do espaço operacional. Deste modo, ao contrário do modelo cinemático directo, o modelo cinemático inverso é, em muitos casos, difícil ou mesmo impossível de obter analiticamente.

As transformações de coordenadas entre o espaço das juntas e o espaço operacional, e *vice-versa*, fazem uso do modelo cinemático e revestem-se de uma importância fundamental no controlo de manipuladores. De facto, na maioria dos casos, os *robots* são controlados no espaço das juntas, enquanto que o planeamento e a definição das trajectórias são, normalmente, efectuados no espaço operacional.

Neste artigo apresentam-se dois métodos para determinar a cinemática inversa do manipulador TI ER 6000 (manipulador do tipo 6R): o Método Geométrico e o Método Diferencial. Assim, na secção 2 estabelece-se [de acordo com o algoritmo de Denavit-Hartenberg (D-H)] a matriz, \mathbf{T} , do manipu-



lador. Na secção 3 apresenta-se o Método Geométrico e, de seguida, na secção 4 discutem-se algumas dificuldades que lhe estão associadas. Na secção 5 apresenta-se o Método Diferencial e, na secção 6, abordam-se algumas limitações inerentes a este método. Por último, na secção 7 faz-se uma comparação dos dois métodos e, na secção 8, apontam-se as conclusões principais.

2. NOTAÇÃO DE DENAVIT-HARTENBERG

O *robot* industrial TI ER 6000 apresenta uma estrutura mecânica composta por sete elos (rígidos) ligados em série por seis juntas rotativas. Assim, este manipulador possui seis gdl,

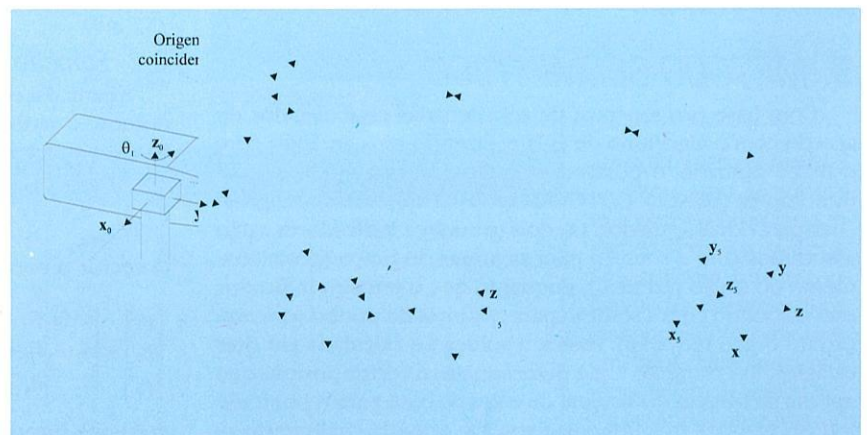


Fig. 1 - Sistema de referenciais e notação de D-H para o robot industrial TI ER 6000

que são suficientes para posicionar e orientar o órgão terminal em qualquer ponto do espaço. A modelização cinemática deste manipulador (Fig. 1) faz-se com base no algoritmo de D-H [2, 3, 5], o que conduz às matrizes ${}^{i-1}A_i$, $i = 1, \dots, 6$, representadas pelas equações (Eq. 2) e (Eq. 3) [1].

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 2})$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 3})$$

Deste modo, a matriz, T , do manipulador é:

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 4})$$

$$n_x = C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \quad (\text{Eq. 5})$$

$$n_y = S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \quad (\text{Eq. 6})$$

$$n_z = -S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_{23}S_5C_6 \quad (\text{Eq. 7})$$

$$s_x = C_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - S_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \quad (\text{Eq. 8})$$

$$s_y = S_1[-C_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \quad (\text{Eq. 9})$$

$$s_z = S_{23}(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6 \quad (\text{Eq. 10})$$

$$a_x = C_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) - S_1S_4S_5 \quad (\text{Eq. 11})$$

$$a_y = S_1(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + C_1S_4S_5 \quad (\text{Eq. 12})$$

$$a_z = -S_{23}C_4S_5 + C_{23}C_5 \quad (\text{Eq. 13})$$

$$p_x = C_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_2C_2] - S_1(d_6S_4S_5 + d_2) \quad (\text{Eq. 14})$$

$$p_y = S_1[d_6(C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5) + S_{23}d_4 + a_2C_2] + C_1(d_6S_4S_5 + d_2) \quad (\text{Eq. 15})$$

$$p_z = d_6(C_{23}C_5 - S_{23}C_4S_5) + S_{23}d_4 - a_2S_2 \quad (\text{Eq. 16})$$

3. MÉTODO GEOMÉTRICO

Com base nos sistemas de coordenadas estabelecidos de acordo com o algoritmo de D-H e, fazendo uma analogia com o braço humano, é possível identificar, com a ajuda de três indicadores (BRAÇO, COTOVELO e PUNHO), várias configurações para o manipulador. Os dois primeiros indicadores estão associados com a solução para as juntas do braço (posicionamento do órgão terminal), enquanto que o terceiro indicador está associado com a solução para as juntas do punho (orientação do órgão terminal). Assim, a solução é calculada em dois estágios. Em primeiro lugar determina-se o vector posição que aponta da origem do sistema de eixos da base para o ponto de intersecção dos três últimos eixos. De seguida analisam-se as projecções deste vector no plano $x_{i-1}y_{i-1}$ e determinam-se as soluções para as juntas do braço. Por último, as soluções para

as juntas do punho são determinadas a partir das soluções encontradas para o braço, com base nas submatrizes que representam a orientação ${}^0T_i e {}^{i-1}A_i$ ($i = 4, 5, 6$) e na projecção dos sistemas de eixos dos elos no plano $x_{i-1}y_{i-1}$ [1, 4].

3.1 Definição das Configurações do Manipulador

Para o robot TI ER 6000 podem ser identificadas as seguintes configurações:

- BRAÇO (ombro) À DIREITA: um θ_2 positivo faz com que o punho se mova segundo z_0 no sentido *positivo*, enquanto que a junta 3 não é activada.
- BRAÇO (ombro) À ESQUERDA: um θ_2 positivo faz com que o punho se mova segundo z_0 no sentido *negativo*, enquanto que a junta 3 não é activada.

• BRAÇO PARA CIMA (cotovelo acima do punho): a posição do punho no BRAÇO À DIREITA (À ESQUERDA) em relação ao sistema de eixos da base tem valor negativo (positivo) segundo o eixo y_2 .

• BRAÇO PARA BAIXO (cotovelo abaixo do punho): a posição do punho no BRAÇO À DIREITA (À ESQUERDA) em relação ao sistema de eixos da base tem valor positivo (negativo) segundo o eixo y_2 .

• PUNHO EM BAIXO: o produto interno do vector unitário s , do sistema de eixos do órgão terminal, pelo vector unitário y_5 , do sistema de eixos (x_5, y_5, z_5), é positivo.

• PUNHO EM CIMA: o produto interno do vector unitário s , do sistema de eixos do órgão terminal, pelo vector unitário y_5 , do sistema de eixos (x_5, y_5, z_5), é negativo.

Tendo em conta estas configurações, são introduzidos dois indicadores: BRAÇO e COTOVELO que combinados permitem obter uma das quatro soluções possíveis para as três primeiras juntas. O terceiro indicador (PUNHO) dá origem a uma das duas soluções possíveis para as três últimas juntas. Estes indicadores são definidos do seguinte modo:

$$\text{BRAÇO} = \begin{cases} +1 & \text{BRAÇO À DIREITA} \\ -1 & \text{BRAÇO À ESQUERDA} \end{cases} \quad (\text{Eq. 17})$$

$$\text{COTOVELO} = \begin{cases} +1 & \text{PARA CIMA} \\ -1 & \text{PARA BAIXO} \end{cases} \quad (\text{Eq. 18})$$

$$\text{PUNHO} = \begin{cases} +1 & \text{EM BAIXO} \\ -1 & \text{EM CIMA} \end{cases} \quad (\text{Eq. 19})$$

3.2. Solução para as Juntas do Braço

A partir das equações da cinemática do manipulador TI ER 6000, define-se o vector p que aponta da origem do sistema de eixos da base (x_0, y_0, z_0) para o ponto de intersecção dos três últimos eixos:

$$p = p_6 - d_6 a = (p_x, p_y, p_z)^T \quad (\text{Eq. 20})$$

O vector p corresponde ao vector posição na matriz 0T_4 :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + d_4S_{23}) - d_2S_1 \\ S_1(a_2C_2 + d_4S_{23}) + d_2C_1 \\ d_4C_{23} - a_2S_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 21})$$

Solução para a junta 1

Projectando o vector p no plano x_0y_0 (Figura 2), obtêm-se as seguintes equações:

$$\theta_1^L = \phi - \alpha; \quad \theta_1^R = \pi + \phi + \alpha \tag{Eq. 22}$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}; \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \tag{Eq. 23}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{p_y}{R}; \quad \text{cos } \phi = \frac{p_x}{R}; \quad \text{sen } \alpha = \frac{d_2}{R}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{r}{R} \tag{Eq. 24}$$

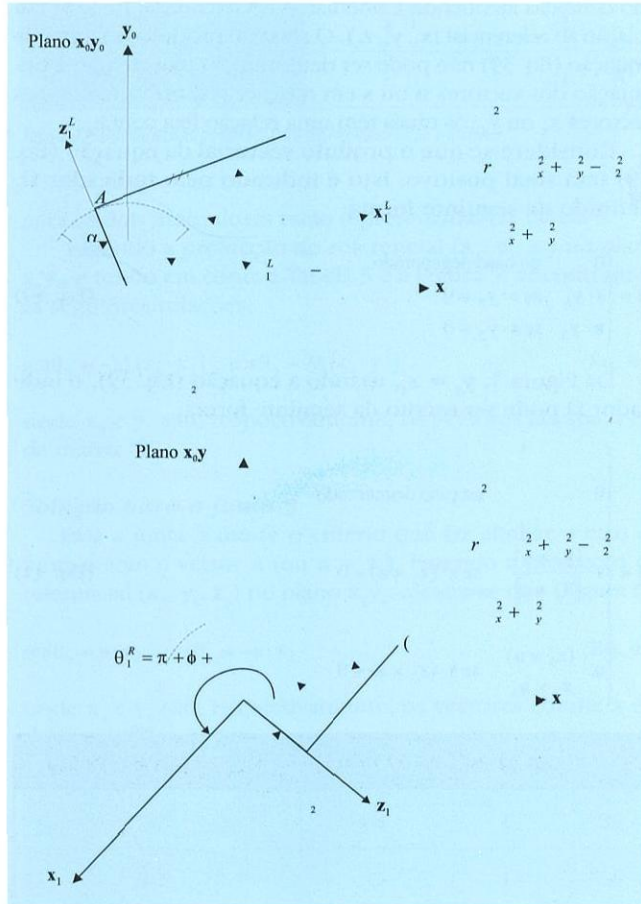


Fig. 2 - Solução para a junta 1

onde, os índices *L* e *R* indicam, respectivamente, as configurações BRAÇO À ESQUERDA e BRAÇO À DIREITA. Das equações (Eq. 22) a (Eq. 24), obtêm-se as funções seno e co-seno de θ_1 :

$$\text{sen } \theta_1^L = \text{sen}(\phi - \alpha) = \text{sen } \phi \text{cos } \alpha - \text{cos } \phi \text{sen } \alpha = \frac{p_y r - p_x d_2}{R^2} \tag{Eq. 25}$$

$$\text{cos } \theta_1^L = \text{cos}(\phi - \alpha) = \text{cos } \phi \text{cos } \alpha + \text{sen } \phi \text{sen } \alpha = \frac{p_x r + p_y d_2}{R^2} \tag{Eq. 26}$$

$$\text{sen } \theta_1^R = \text{sen}(\pi + \phi + \alpha) = -\frac{p_y r - p_x d_2}{R^2} \tag{Eq. 27}$$

$$\text{cos } \theta_1^R = \text{cos}(\pi + \phi + \alpha) = -\frac{p_x r + p_y d_2}{R^2} \tag{Eq. 28}$$

Combinando as equações (Eq. 25) a (Eq. 28) e usando o indicador BRAÇO para indicar a configuração BRAÇO À ESQUERDA/BRAÇO À DIREITA, tem-se:

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{-\text{BRAÇO } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2}; \tag{Eq. 29}$$

$$\text{cos } \theta_1 = \frac{-\text{BRAÇO } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

Solução para a junta 2

Para encontrar a solução para a junta 2, faz-se a projecção do vector *p* no plano *x1y1* (Figura 3). Desta figura pode concluir-se que existem quatro configurações diferentes. Cada configuração corresponde a um valor diferente para a junta 2 (tal como se pode ver na Tabela 1) onde $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ e $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$.

Da Tabela 1, usando os indicadores BRAÇO e COTOVELO, pode determinar-se θ_2 com apenas uma equação:

$$\theta_2 = \alpha + (\text{BRAÇO} \cdot \text{COTOVELO})\beta = \alpha + K \cdot \beta \tag{Eq. 30}$$

onde $K = \text{BRAÇO} \cdot \text{COTOVELO}$. Da Figura 3 obtém-se:

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}; \quad r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} \tag{Eq. 31}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{-p_z}{R} = -\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}};$$

$$\text{cos } \alpha = -\frac{\text{BRAÇO} \cdot r}{R} = -\frac{\text{BRAÇO} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \tag{Eq. 32}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - d_4^2}{2a_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}; \quad \text{sen } \beta = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \beta} \tag{Eq. 33}$$

$$\text{sen } \theta_2 = \text{sen}(\alpha + K \cdot \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + (\text{BRAÇO} \cdot \text{COTOVELO}) \text{cos } \alpha \text{sen } \beta \tag{Eq. 34}$$

$$\text{cos } \theta_2 = \text{cos}(\alpha + K \cdot \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta - (\text{BRAÇO} \cdot \text{COTOVELO}) \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \tag{Eq. 35}$$

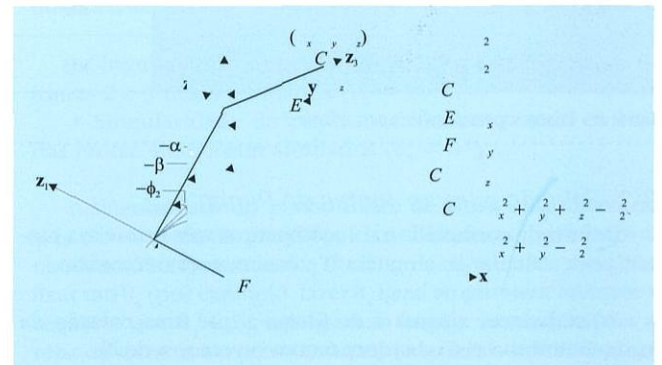


Fig. 3 - Solução para a junta 2

Configurações	θ_2	BRAÇO	COTOVELO	BRAÇO.COTOVELO
BRAÇO À ESQUERDA e PARA CIMA	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
BRAÇO À ESQUERDA e PARA BAIXO	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
BRAÇO À DIREITA e PARA CIMA	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
BRAÇO À DIREITA e PARA BAIXO	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1

Tabela 1 - Configurações possíveis para a junta 2

Solução para a junta 3

Para a junta 3, projecta-se o vector *p* no plano *x2y2* (Fig. 4). Verifica-se que existem, também, quatro configurações diferentes, correspondendo a cada uma um valor diferente para a junta 3 (Tab. 2) onde (p_y) é a componente segundo *y* do vector posição que aponta da origem do sis-

tema de eixos (x_2, y_2, z_2) para o ponto de intersecção dos três últimos eixos. Da Fig. 4 obtêm-se as seguintes equações:

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2} \quad (\text{Eq. 36})$$

$$\cos \phi = \frac{a_2^2 + d_4^2 - R^2}{2a_2 d_4}; \quad \text{sen } \phi = \text{BRAÇO} \cdot \text{COTOVELO} \cdot 1 - \cos^2 \phi \quad (\text{Eq. 37})$$

$$\text{sen } \theta_3 = -\cos \phi; \quad \cos \theta_3 = \text{sen } \phi \quad (\text{Eq. 38})$$

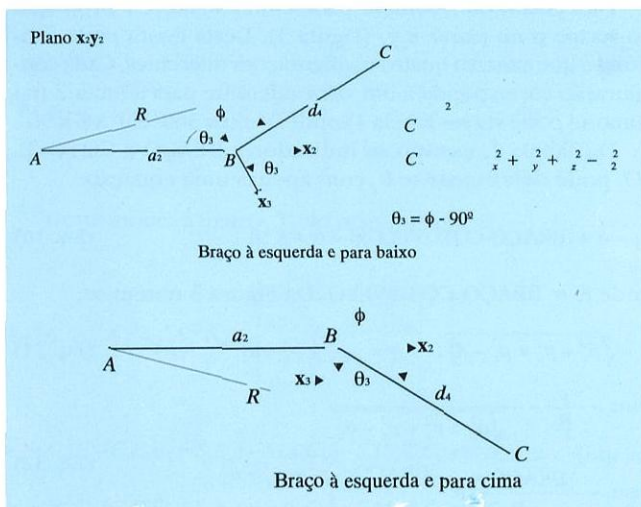


Fig. 4 - Solução para a junta 3

Configurações	$(\hat{p}_4)_y$	θ_3	BRAÇO	COTOVELO	BRAÇO.COTOVELO
BRAÇO À ESQUERDA e PARA CIMA	≥ 0	$\phi - 90^\circ$	-1	+1	1
BRAÇO À ESQUERDA e PARA BAIXO	≤ 0	$\phi - 90^\circ$	-1	-1	+1
BRAÇO À DIREITA e PARA CIMA	≤ 0	$\phi - 90^\circ$	+1	+1	+1
BRAÇO À DIREITA e PARA BAIXO	≥ 0	$\phi - 90^\circ$	+1	-1	-1

Tabela 2 - Configurações possíveis para a junta 3

3.3. Solução para as Juntas do Punho

Depois de conhecida a solução para as três primeiras juntas, pode calcular-se a matriz 0T_3 . Assim, será necessário:

- Estabelecer a junta 4 de forma a que uma rotação da junta 5 alinhe o eixo da junta 6 com o vector \mathbf{a} de T .
- Estabelecer a junta 5 de forma a alinhar o eixo da junta 6 com o vector \mathbf{a} .
- Estabelecer a junta 6 de forma a alinhar o vector \mathbf{s} (ou \mathbf{y}_6) com o vector \mathbf{n} .

Matematicamente significa que:

$$\mathbf{z}_4 = \frac{\pm(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} \quad (\text{Eq. 39})$$

Além disso, $\mathbf{a} = \mathbf{z}_5$, dado $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$, e $\mathbf{s} = \mathbf{y}_6$, dados $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T$ e $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$.

Na equação (Eq. 39) o produto vectorial pode ser positivo ou negativo. Em resultado disso haverá duas soluções

possíveis para θ_4 . Se o produto vectorial for nulo (\mathbf{z}_3 paralelo a \mathbf{a}) surge um caso degenerado que corresponde a ter os eixos das juntas 4 e 6 se encontrarem paralelos.

Solução para a junta 4

Ambas as configurações para o punho (em CIMA e em BAIXO) são definidas atendendo à orientação do referencial $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a})$ em relação ao referencial (x_5, y_5, z_5) . O sinal do produto vectorial da equação (Eq. 39) não pode ser determinado sem atender à orientação dos vectores \mathbf{n} ou \mathbf{s} em relação, respectivamente, aos vectores x_5 ou y_5 , os quais têm uma relação fixa com z_4 .

Considere-se que o produto vectorial da equação (Eq. 39) tem sinal positivo. Isto é indicado pelo indicador Ω , definido da seguinte forma:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{no caso degenerado} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 & \text{se } \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 \neq 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5 & \text{se } \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 40})$$

Da Figura 1, $\mathbf{y}_5 = \mathbf{z}_4$, usando a equação (Eq. 39), o indicador Ω pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{no caso degenerado} \\ \mathbf{s} \cdot \frac{(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} & \text{se } \mathbf{s} \cdot (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}) \neq 0 \\ \mathbf{n} \cdot \frac{(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} & \text{se } \mathbf{s} \cdot (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}) = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 41})$$

Se a suposição sobre o facto de o produto vectorial da equação (Eq. 39) ser positivo não for correcta, então será corrigida posteriormente usando a combinação dos indicadores PUNHO e Ω . O indicador Ω é usado para indicar a orientação inicial do vector unitário \mathbf{z}_4 (sentido positivo). O indicador PUNHO indica a escolha de uma solução para o punho (três últimas juntas) de acordo com as equações (Eq. 17) a (Eq. 19).

Se ambos os indicadores tiverem o mesmo sinal, então a suposição sobre o sinal do produto vectorial da equação (Eq. 39) está correcta. As várias combinações possíveis

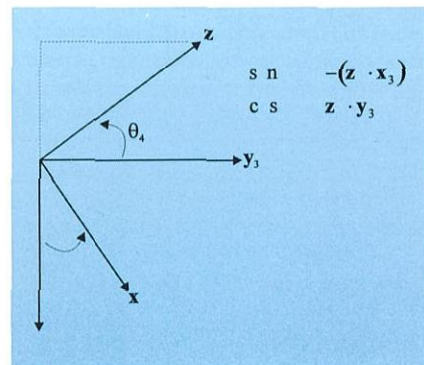


Fig. 5 - Solução para a junta 4

Configurações	$\Omega = s \cdot y_5$ ou $n \cdot y_5$	PUNHO	$M = \text{PUNHO sign}(\Omega)$
PUNHO EM BAIXO	≥ 0	+1	+1
PUNHO EM BAIXO	< 0	+1	-1
PUNHO EM CIMA	≥ 0	-1	-1
PUNHO EM CIMA	< 0	-1	+1

Tabela 3 – Combinações possíveis para os indicadores Ω e PUNHO

para os dois indicadores estão representadas na Tabela 3.

Fazendo a projecção do referencial (x_4, y_4, z_4) no plano x_3y_3 , e tendo em conta a Tabela 3 e a Figura 5, encontram-se as seguintes relações:

$$\text{sen} \theta_4 = -M(z_4 \cdot x_3); \quad \text{cos} \theta_4 = M(z_4 \cdot y_3) \quad (\text{Eq. 42})$$

onde x_3 e y_3 são, respectivamente, os vectores coluna x e y da matriz 0T_3 .

Solução para a junta 5

Para a junta 5 usa-se o critério que faz alinhar o eixo da junta 6 com o vector a (ou $a = z_5$). Fazendo a projecção do referencial (x_5, y_5, z_5) no plano x_4y_4 , mostra-se que (Figura 6):

$$\text{sen} \theta_5 = a \cdot x_4; \quad \text{cos} \theta_5 = -a \cdot y_4 \quad (\text{Eq. 43})$$

onde x_4 e y_4 são, respectivamente, os vectores coluna x e y da matriz 0T_4 .

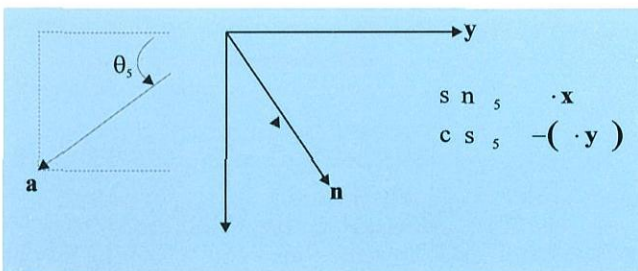


Fig. 6 – Solução para a junta 5

Solução para a junta 6

Fazendo $s = y_6$ e projectando o referencial (n, s, a) no plano x_5y_5 , mostra-se que (Figura 7):

$$\text{sen} \theta_6 = n \cdot y_5; \quad \text{cos} \theta_6 = s \cdot y_5 \quad (\text{Eq. 44})$$

onde y_5 é o vector coluna y da matriz 0T_5 .

4. DIFICULDADES DO MÉTODO GEOMÉTRICO

O Método Geométrico apresenta alguns problemas cuja resolução requer um estudo cuidadoso. Assim, podem referir-se os seguintes aspectos:

- Se o problema da singularidade do punho é de simples resolução, o mesmo não se pode dizer da singularidade do braço [5].
- Como se viu o método pode fornecer até oito soluções

diferentes para uma dada situação do órgão terminal. Existe, assim, o problema da selecção de uma das soluções.

- Como a solução para cada junta resulta, em última análise, do cálculo de uma função $\text{atan2}(x, y)$, surge o problema dos ângulos virem restringidos ao intervalo $[-180^\circ, +180^\circ]$.

Este facto pode levantar problemas, caso o intervalo de variação dos ângulos das juntas não esteja contido nesse intervalo.

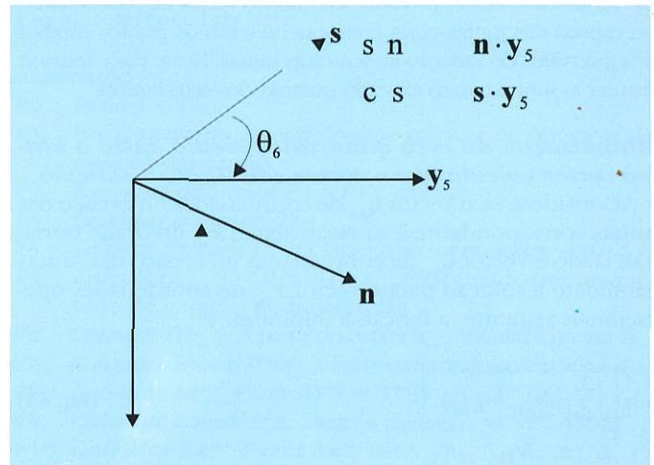


Fig. 7 – Solução para a junta 6

4.1. Problema das Singularidades

Dado que podem existir pontos singulares dentro do espaço de trabalho do manipulador, se a solução para esses pontos não puder ser encontrada, o espaço de trabalho poderá ter que ser restringido. Para o robot manipulador TI ER 6000 existem duas singularidades:

- Singularidade do braço: verifica-se quando os eixos das juntas 2 e 3 ficam alinhados ($\theta_3 = 90^\circ$).
- Singularidade do punho: verifica-se quando os eixos das juntas 4 e 6 ficam alinhados ($\theta_5 = 0^\circ$).

A singularidade do punho é fácil de ultrapassar. Como essa situação só acontece quando os eixos das juntas 4 e 6 ficam alinhados, só interessa a soma dos ângulos θ_4 e θ_6 . Portanto basta fixar um θ_4 (por exemplo, fazer θ_4 igual ao seu valor anterior) e requerer que $\theta_4 + \theta_6$ seja igual ao ângulo necessário para alinhar os vectores s e n . No tocante à singularidade do braço, esta poderá ter que ser evitada restringindo o espaço de trabalho.

4.2 Problema da Escolha da Solução

Depois de calculadas as oito soluções, como o intervalo de variação de cada junta é conhecido, o primeiro passo para a escolha da solução será eliminar qualquer uma que não esteja dentro desses intervalos. Podem então ocorrer três situações distintas:

- Todas as soluções estão dentro dos limites de variação impostos às juntas.
- Apenas algumas das oito soluções não violam os limites de variação impostos às juntas.
- Todas as oito soluções violam os limites de variação impostos às juntas. Não existe solução.

Se se verificar um dos dois primeiros casos há que encontrar um critério que uma vez aplicado permita escolher a solução.

4.2.1. Função custo

Um procedimento possível para seleccionar a solução é escolher aquela que minimiza uma determinada função custo. Por exemplo, escolher a solução que minimiza o erro quadrático médio entre o vector de coordenadas no espaço das juntas actual e o vector de coordenadas no espaço das juntas candidato a próxima solução. É importante notar que neste caso se tenta fazer com que as trajectórias, no espaço das juntas, sejam contínuas no tempo. Uma outra possibilidade consiste em escolher a solução que minimiza o erro quadrático médio entre o vector de coordenadas no espaço das juntas candidato a próxima solução e o vector de coordenadas no espaço das juntas cujas componentes são os pontos médios dos intervalos de variação impostos às juntas. Neste caso, tenta-se manter as juntas o mais afastado possível dos seus limites.

Minimização do erro quadrático médio entre o último vector calculado e o vector candidato a solução.

Considere-se o vector \mathbf{q}_{act} de coordenadas no espaço das juntas correspondente à situação actual \mathbf{x}_{act} do órgão terminal. Dado o vector \mathbf{q}_{seg} de coordenadas no espaço das juntas candidato a solução para o vector \mathbf{x}_{seg} de coordenadas operacionais seguinte, a função a minimizar é:

$$\min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^6 c_i (q_{i,act} - q_{i,seg})^2} \right\} \quad (\text{Eq. 45})$$

em que, $c_i > 0$ ($i = 1, \dots, 6$). Estes parâmetros formam um conjunto de "pesos" que pode ser ajustado por simulação de modo a obter a solução mais adequada. Assim, é necessário calcular o valor da equação (Eq. 45) para cada um dos vectores candidatos a solução e escolher aquele que a minimiza.

Minimização do erro quadrático médio entre vector candidato a solução e o vector formado pelos pontos médios dos intervalos de variação das juntas.

Dado o vector \mathbf{q}_{med} que corresponde aos pontos médios dos intervalos de variação das juntas, e o vector \mathbf{q}_{seg} de coordenadas no espaço das juntas candidato a solução para o vector \mathbf{x}_{seg} de coordenadas operacionais seguinte, a função a minimizar é:

$$\min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^6 c_i (q_{i,med} - q_{i,seg})^2} \right\} \quad (\text{Eq. 46})$$

em que $c_i > 0$ ($i = 1, \dots, 6$). A solução é escolhida tal como no caso anterior.

4.2.2. Simulações usadas para a escolha da função custo

Considere-se que a posição e orientação do manipulador \mathbf{x}_0 é a seguinte (posição em milímetros e orientação em graus): $\mathbf{x}_0 = (50, 40, 600, 10, 5, 35)^T$, à qual corresponde a seguinte configuração \mathbf{q}_0 (em graus): $\mathbf{q}_0 = (6.3, 54.8, 24.2, 40.8, 54.2, 46.1)^T$ no instante de tempo $t = 0$ seg. Pretende-se que o órgão terminal do robot descreva um quadrado no plano YZ (plano vertical) demorando 2 seg. para percorrer cada lado. Para tal define-se uma trajectória especificando os restantes três vértices $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 :

$$\mathbf{x}_1 = (50, 240, 600, 10, 5, 35)^T, \mathbf{x}_2 = (50, 240, 400, 10, 5, 35)^T \text{ e } \mathbf{x}_3 = (50, 40, 400, 10, 5, 35)^T \text{ (Figura 8).}$$

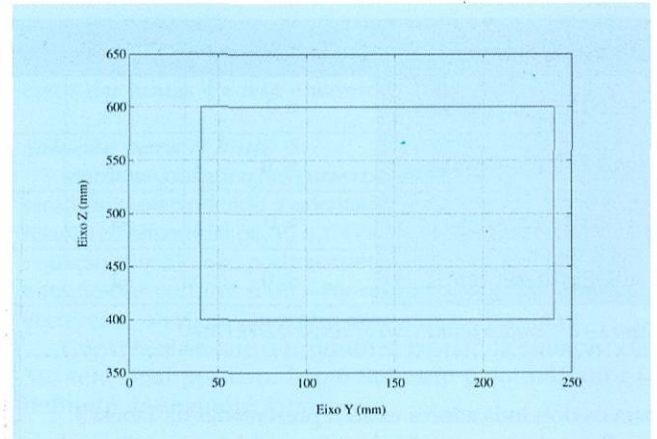


Fig. 8 - Trajectória no plano YZ desejada para o órgão terminal

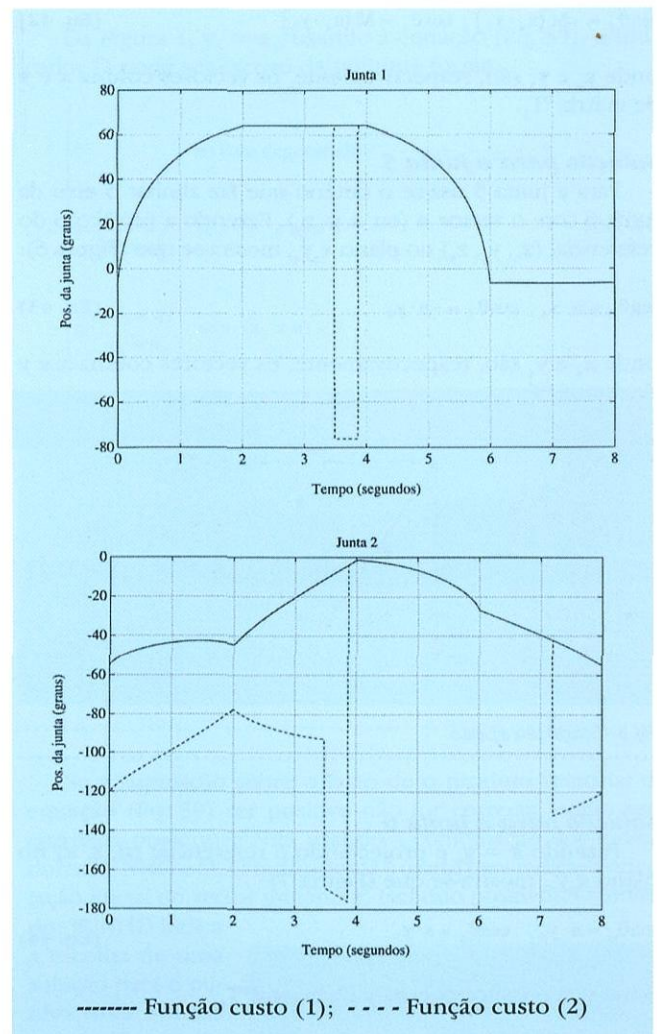


Fig. 9 - Evolução temporal das trajectórias das juntas 1 e 2 geradas pelo Método Geométrico

Na Fig. 9 podem observar-se as trajectórias geradas pelo Método Geométrico para duas funções custo: a função custo adoptada (1) "minimização do erro quadrático médio entre o vector candidato a próxima solução e o vector solução anterior", e outra função custo (2) "minimização do erro quadrático médio entre o vector candidato a próxima solução e o vector cujas componentes são os pontos médios dos intervalos de variação das

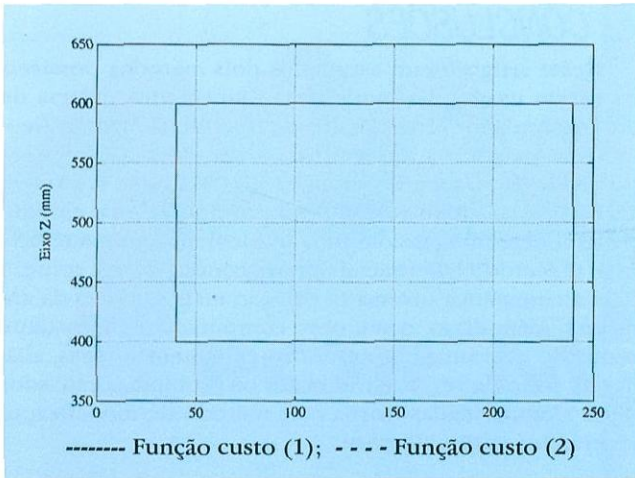


Fig. 10 - Trajectória no espaço operacional (plano YZ) geradas pelo Método Geométrico

juntas". Em ambas as funções custo o vector de pesos é $c = (10, 10, 10, 1, 1, 1)^T$. Notar que a função custo (2) conduz à geração de trajectórias no espaço das juntas descontínuas no tempo. As correspondentes trajectórias no espaço operacional são coincidentes (i.e., o manipulador consegue executar a mesma trajectória no espaço operacional de várias formas diferentes).

4.3 Problema dos ângulos ficarem restringidos ao intervalo $[-180^\circ, +180^\circ]$

O facto das soluções para as juntas resultarem da aplicação de uma função atan2(x, y) faz com que esses valores venham restringidos ao intervalo $[-\pi, \pi]$. Se os intervalos de variação impostos às juntas não estiverem contidos dentro deste intervalo, impõe-se a correcção da solução obtida. Um procedimento que poderá ser adoptado consiste na comparação da solução proposta com a solução anterior. Caso haja uma inversão de sinal há que fazer a devida correcção à solução.

5. MÉTODO DIFERENCIAL

Considere-se que se dispõe de um método capaz de gerar uma trajectória no espaço operacional, isto é, de gerar pontos x suficientemente próximos pelos quais o órgão terminal do manipulador deve passar. Seja q um vector definido no espaço das juntas. D cinemática directa sabe-se que:

$$dx = J dq; \Delta x = J \Delta q; dq = J^{-1} dx; \Delta q = J^{-1} \Delta x \quad (\text{Eq. 47})$$

Segundo Coiffet 5, desde que se verifique que os três últimos eixos do robot manipulador se intersectam no mesmo ponto é possível separar o problema global em dois subproblemas independentes: um de posicionamento e outro de orientação. Assim, dado que o robot TI ER 6000 apresenta esta característica será este o procedimento a adoptar. Considere-se que o vector x (de dimensão 6×1) e o vector q (de dimensão 6×1) podem ser representados da seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_o \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 48})$$

em que x_p (dimensão 3×1) representa a posição do órgão terminal em coordenadas cartesianas e x_o (dimensão 3×1) representa a orientação em termos de ângulos de Euler. Por outro lado, q_1 e q_2 são vectores (de dimensão 3×1) que representam as posições angulares, respectivamente, das três primeiras e das três últimas juntas. Considere-se ainda o jacobiano, relacionando as velocidades linear e as derivadas dos ângulos de Euler do pon-

to de intersecção dos três últimos eixos com as velocidades das juntas. Verifica-se que este pode ser escrito na forma:

$$J^{int} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 49})$$

onde J_{11} , J_{12} e J_{21} são matrizes de dimensão 3×3 e 0 representa a matriz nula de dimensão 3×3 . O vector que representa a posição do ponto de intersecção dos três últimos eixos em relação ao referencial da base pode ser calculado pela equação (Eq. 50):

$$x_p^{int} = x_p - d_6 a \quad (\text{Eq. 50})$$

em que x_p representa a posição do órgão terminal em relação ao referencial da base.

Algoritmo

- P0. Fazer $i = 0$.
- P1. Ler a situação inicial (vector q). Ler os sensores de posição das juntas.
- P2. Executar os passos P3 a P13, até $\Delta x = 0$.
- P3. Calcular a matriz $T(q)$.
- P4. Calcular a matriz $T^{int}(q)$. Fazer o vector posição $p = p - d_6 a$.
- P5. Calcular x_{i+1} . O cálculo de x_{i+1} é efectuado por um método de geração de trajectórias.
- P6. Calcular $T(x_{i+1})$. A partir do vector x_{i+1} calcular a matriz T .
- P7. Calcular a matriz $T^{int}(x_{i+1})$. Fazer o vector posição $p = p - d_6 a$.
- P8. Calcular ΔT^{int} . Fazer $\Delta T^{int} = T^{int}(x_{i+1}) - T^{int}(q_i)$.
- P9. Calcular a matriz Δ . Fazer a matriz $\Delta = \Delta T^{int} T^{1,int} [3]$.
- P10. Calcular Δx^{int} . Fazer $\Delta x^{int} = (\Delta_{14} \Delta_{24} \Delta_{34} \Delta_{32} \Delta_{13} \Delta_{21})^T$, Δ_{ij} , $i = j = 1, \dots, 4$, são os elementos da matriz Δ .
- P11. Calcular Δq . Fazer $\Delta q_1 = J_{21}^{-1} \Delta x_o^{int}$ e $\Delta q_2 = J_{12}^{-1} [\Delta x_p^{int} - J_{11} J_{21}^{-1} \Delta x_o^{int}]$.
- P12. Calcular q_{i+1} . Fazer $q_{i+1} = q_i + \Delta q$.
- P13. Fazer $i = i + 1$.

6. LIMITAÇÕES DO MÉTODO DIFERENCIAL

Fazendo uma análise cuidada podem ser notadas algumas dificuldades inerentes a este método a saber:

- É um método que conduz a uma solução aproximada (embora, teoricamente, possa ser muito boa se forem adoptados incrementos Δx suficientemente pequenos).
- Pequenos incrementos Δx no vector de coordenadas no espaço operacional não garantem incrementos Δq pequenos no vector de coordenadas no espaço das juntas, principalmente próximo de pontos singulares (este problema pode ser minimizado se forem utilizados algoritmos robustos na inversão das matrizes) [7].

7. COMPARAÇÃO DOS DOIS MÉTODOS

De seguida apresentam-se alguns resultados que permitem comparar os métodos de cálculo da cinemática inversa estudados neste capítulo (de acordo com alguns critérios considerados importantes) de modo a poder tirar conclusões sobre a sua adequação ao robot TI ER 6000.

7.1. Evolução temporal das trajectórias geradas

Como se viu na secção 4.2.2 o Método Geométrico pode conduzir a trajectórias descontínuas no tempo e como tal as suas duas primeiras derivadas temporais são infinitas. Fisicamente, isso significa que para poderem ser executadas essas trajectórias são requeridas às juntas velocidades e acelerações infinitas.

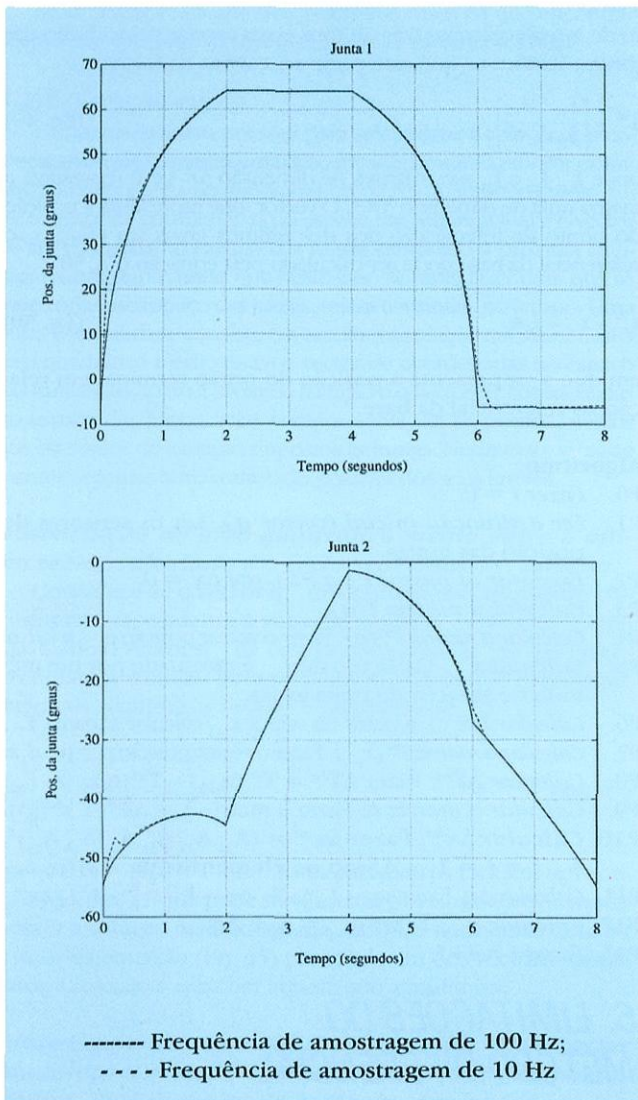


Fig. 11 – Evolução temporal das trajectórias das juntas 1 e 2 geradas pelo Método Diferencial para diferentes frequências de amostragem

Por outro lado, a frequência de amostragem afecta, ao contrário do que acontece no método geométrico, a evolução temporal das trajectórias geradas pelo Método Diferencial (Figura 11, para a trajectória definida na secção 4.2.2).

7.2. Peso computacional

No controlo de manipuladores é muitas vezes necessário calcular em tempo real a solução do problema da cinemática inversa. Assim, o peso computacional pode ser um importante critério de comparação dos algoritmos apresentados neste capítulo.

Para uma implementação num computador com processador 80486 SX a 25 MHz em Turbo Pascal para DOS, os tempos de cálculo para a trajectória referida na secção 4.2.2 (para uma frequência de amostragem de 100Hz) foram os seguintes:

- Método Geométrico: 49.4 seg (61.7 msec por iteração)
- Método Diferencial: 10.9 seg (13.6 msec por iteração)

A conjugação de todos os factores analisados neste capítulo faz do método diferencial o mais adequado para o cálculo da cinemática inversa do manipulador TI ER 6000.

8. CONCLUSÕES

Neste artigo foram estudados dois métodos possíveis de serem usados na modelização cinemática inversa de um manipulador série clássica do tipo 6R. O Método Geométrico permite a determinação de todas as soluções possíveis (8 no caso do robot TI ER 6000) que o modelo apresenta, no entanto, o seu peso computacional elevado é difícil de conjugar com uma implementação em tempo real. O Método Diferencial apenas conduz a uma solução para a cinemática inversa (a solução mais próxima da anterior). Além disso, o seu peso computacional é bastante reduzido. As vantagens anteriormente mencionadas, aliadas ao facto de ser possível evitar os problemas causados pelas singularidades, torna este método de modelização cinemática muito atraente.

9. REFERÊNCIAS

- [1] A. Mendes Lopes, "Análise Cinemática e Planeamento de Trajectórias para um Robot Industrial", Dissertação de Mestrado, DEEC-FEUP, Novembro de 1994.
- [2] M. Vukobratovic, M. Kircanski, "Scientific Fundamentals of Robotics 3: Kinematics and Trajectory Synthesis of Manipulation Robots", Springer-Verlag, 1986.
- [3] Richard P. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control", The MIT Press series in artificial intelligence", 1982.
- [4] C.S.G. Lee, M. Ziegler, "Geometric Approach in Solving Inverse Kinematics of PUMA Robots", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-20, N.6, 1984.
- [5] K. S. Fu, R. C. Gonzalez, C. S. G. Lee, "Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence", McGraw-Hill International Editions, 1987.
- [6] P. Coiffet, "Les Robots, Tome 1: Modélisation et commande", Hermes, Paris, 1982.
- [7] Yoshihiko Nakamura, Hideo Hanafusa, "Inverse Kinematic Solutions With Singularity Robustness for Robot Manipulator Control", Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, September 1986, vol. 108.
- [8] Richard P. Paul, Bruce Shimano, Gordon E. Mayer, "Kinematic Control Equations for Simple Manipulators", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-11, N. 6, June 1981.

* Assistente – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

** Prof. Auxiliar – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores