



AVALIAÇÃO DE TENDÊNCIA DA FIABILIDADE DE SISTEMAS

MARINA SANDRINI

novembro de 2017



AVALIAÇÃO DE TENDÊNCIA DA FIABILIDADE DE SISTEMAS

Marina Sandrini

2017

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Engenharia Mecânica



POLITÉCNICO
DO PORTO

isep

AVALIAÇÃO DE TENDÊNCIA DA FIABILIDADE DE SISTEMAS

Marina Sandrini

1161974

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação da Doutora Sandra Cristina de Faria Ramos e co-orientação da Doutora Elisangela Aparecida da Silva Lizzi

2017

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Engenharia Mecânica



POLITÉCNICO
DO PORTO

isep

JÚRI

Presidente

Francisco Silva

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Orientador

Sandra Cristina de Faria Ramos

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Coorientador

Elisangela Aparecida da Silva Lizzi

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Arguente

Luís Miguel Almeida da Silva

Professor Auxiliar Convidado, Universidade de Aveiro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a UTFPR-CP, pela oportunidade e todo auxílio no programa de Dupla Formação. E aos professores Adriano Silva Borges e Paulo Moseli, e a minha Coorientadora Elisangela Aparecida da Silva Lizzi, pelo apoio e incentivo para realizar essa jornada.

Gostaria de agradecer ao ISEP pela recepção e apoio nesse intercâmbio. E principalmente ao Engenheiro Francisco Silva e a minha Orientadora Sandra Ramos, por todo apoio, dedicação e suporte que me deram, para realização desse excelente trabalho.

Agora gostaria de agradecer a minha Família, aos meus pais, Olivio Sandrini Junior e Meire Aparecida da Silva, por todo apoio, paciência e incentivo que me deram nesse sonho; ao meu avô, Olivio Sandrini, por toda a oportunidade escolar e acadêmica, que me proporcionou a vida toda, para eu ter minha formação; agradeço também a minha avó, tios, tias, padrinho, madrinhas, primos, primas, amigas e amigos, que me deram o total apoio e suporte, antes e durante esse ano.

E principalmente a minha irmã gêmea, Beatriz Sandrini, por todo incentivo para me escrever nesse programa, junto com ela. Pois assim conseguimos compartilhar juntas esse sonho. Obrigada, por todo apoio e convivência desse ano.

PALAVRAS CHAVE

Fiabilidade de Sistemas; Tendência da ocorrência de falhas; Modelação Estatística; Testes de Hipóteses; Processo de Poisson; Simulação de Monte Carlo

RESUMO

Durante o desenvolvimento e validação de novos produtos são, frequentemente, consideradas análises estatísticas para avaliar a existência de tendência no processo de falhas. Estas análises têm como objectivo determinar se, e como, o padrão de falhas está a evoluir com o tempo, sendo os seus resultados determinantes para o sucesso da fase de projeto do produto.

Por outro lado, o conhecimento do comportamento temporal do padrão de ocorrências de falhas de um equipamento reparável é um aspecto fulcral na perspectiva das políticas de manutenção.

Impõe-se assim a necessidade do desenvolvimento de técnicas estatísticas de avaliação da existência de tendência no processo de falhas. Existem, descritos na literatura, vários testes de avaliação de tendência. Cada um com as suas particularidades e especificidades de aplicação.

Neste trabalho apresenta-se uma revisão sobre um conjunto de testes estatísticos de avaliação de tendência da fiabilidade. É levado a cabo um estudo alargado de simulação de Monte Carlo, envolvendo sistemas únicos, no sentido de comparar o desempenho dos diferentes testes revistos, tanto em vários cenários de fiabilidade como na presença de diferentes tipos de amostras.

Os resultados, parecem indicar que não existe o teste perfeito, mas que o teste de Anderson & Darling é o indicado para uso geral, pois é robusto para a maioria dos cenários considerados e não é sensível à dimensão da amostra.

KEYWORDS

Reliability; Occurrence of Faults; Tendency; Statistical Modeling; Hypothesis Testing; Poisson Process; Monte Carlo Simulation

ABSTRACT

During the development and validation of new products, statistical analyzes are often considered to evaluate the existence of a tendency in the process of failure. These analyzis aim to determine if, and how, the failure pattern is evolving over time, and its results are decisive for the success of the product design phase.

On the other hand, the knowledge of the temporal behavior of the failure occurrence pattern of a repairable equipment is a central aspect in the maintenance policy perspective.

This implies the need for statistical techniques to evaluate the existence of a tendency in the process of failure. There are, described in the literature, several trend evaluation tests. Each one with its application specificities.

In this work we present a review on a set of statistical tests of reliability trend evaluation. A large Monte Carlo simulation study, involving single systems, is carried out to compare the performance of the different tests reviewed, both in several reliability scenarios and in the presence of different types of samples.

The results seem to indicate that the perfect test does not exist, but the Anderson & Darling test is indicated for general use because it is robust for most of the considered scenarios and is not sensitive to the sample size

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Lista de Abreviaturas

PPH	Processo Homogêneo de Poisson
PPNH	Processo Não Homogêneo de Poisson
PR	Processo de Renovação
PP	Processo de Poisson
TTT	Tempo Total sob Teste
T _{máx}	Tempo Máximo
TH	Teste de Hipóteses
H ₀	Hipótese Nula
H ₁	Hipótese Alternativa ou Fundamental
ET	Estatística de Teste
RC	Região Crítica

Lista de Unidades

u.t.	Unidade de Tempo
Avaria/ u.t.	Número de avarias por Unidade de Tempo

Lista de Símbolos

$\lambda(\cdot)$	Taxa instantânea de avarias
β, λ	Parâmetro do modelo de Crow
$N(t)$	Número de falhas observadas no intervalo $(0, t]$
t	Tempo
ET_L	Estatística de Teste do Teste de Laplace
ET_M	Estatística de Teste do Teste de Mann
ET_{LR}	Estatística de Teste do Teste de Lewis Robinson
ET_{CROW}	Estatística de Teste do Modelo de Crow
ET_{AD}	Estatística de Teste do Teste de Anderson Darling

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: TEMPOS DAS OCORRÊNCIAS E TEMPOS ENTRE OCORRÊNCIAS.	35
FIGURA 2: REGIÃO CRÍTICA DE UM TESTE BILATERAL.	39
FIGURA 3: REGIÃO CRÍTICA PARA ET COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL	40
FIGURA 4: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE LAPLACE SIMPLES	41
FIGURA 5: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE MANN	43
FIGURA 6: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE LEWIS-ROBINSON	45
FIGURA 7: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DO MODELO DE CROW	46
FIGURA 8: ALGORITMO 1 - GERAR UMA AMOSTRA DE UM PPH	52
FIGURA 9: AMOSTRAS DE TEMPOS DE PPH	53
FIGURA 10: ALGORITMO 2 - GERAR UMA AMOSTRA DE UM PPNH	53
FIGURA 11: AMOSTRAS DE TEMPOS DE PPNH	54
FIGURA 12: ALGORITMO 3 - GERAR UMA AMOSTRA DE UM PR	55
FIGURA 13: AMOSTRAS DE TEMPOS DE PR	56
FIGURA 14: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE LAPLACE	57
FIGURA 15: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE MANN	58
FIGURA 16: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE LEWIS-ROBINSON	59
FIGURA 17: REGIÃO CRÍTICA DO TESTE DE CROW	60
FIGURA 18: HISTOGRAMAS DE ESTATÍSTICA DE TESTE DO CENÁRIO 1	62
FIGURA 19: HISTOGRAMAS DE ESTATÍSTICA DE TESTE DO CENÁRIO 2	64
FIGURA 20: HISTOGRAMAS DE ESTATÍSTICA DE TESTE DO CENÁRIO 3	66
FIGURA 21: AVALIAÇÃO DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA PARA $\lambda=0.1$ OCORRÊNCIAS/U.T.	68
FIGURA 22: AVALIAÇÃO DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA PARA $\lambda=5$ OCORRÊNCIAS/U.T.	69
FIGURA 23: AVALIAÇÃO DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA PARA $\beta = 0.5$	69
FIGURA 24: AVALIAÇÃO DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA PARA $\beta = 1.5$	70

FIGURA 25: COMPARAÇÃO DOS TESTES NO PR COM DISTRIBUIÇÃO WEIBULL	71
FIGURA 26: COMPARAÇÃO DOS TESTES NO PR COM DISTRIBUIÇÃO NORMAL	71

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1: VALOR CRÍTICO (ANDERSON, T. W. & DARLING, 1954 E CHEN, 2006)	48
TABELA 2: NÚMERO DE NÃO REJEIÇÕES DE H_0 E % DE NÃO REJEIÇÕES DE H_0	61
TABELA 3: NÚMERO DE NÃO REJEIÇÕES DE H_0 E % DE NÃO REJEIÇÕES DE H_0	63
TABELA 4: NÚMERO DE NÃO REJEIÇÕES DE H_0 E % DE NÃO REJEIÇÕES DE H_0	65

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	MOTIVAÇÃO E ENQUADRAMENTO	23
1.2	OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO	25
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	25
1.4	<i>SOFTWARE</i>	26
2	REVISÃO DA LITERATURA	29
3	CONCEITOS TEÓRICOS	35
3.1	NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA	35
3.2	ALGUNS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS IMPORTANTES NA MODELAÇÃO DO MECANISMO DE OCORRÊNCIA DE FALHAS	36
3.2.1	PROCESSO HOMOGÊNEO DE POISSON	36
3.2.2	PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÊNEO	36
3.2.3	PROCESSO DE RENOVAÇÃO	37
3.3	TESTES DE HIPÓTESES DE AVALIAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE TENDÊNCIA	38
3.3.1	BREVE INTRODUÇÃO AO TESTES DE HIPÓTESES	38
3.3.2	TESTE DE LAPLACE	41
3.3.3	TESTE DE MANN	42
3.3.4	TESTE DE LEWIS – ROBINSON	44
		45
3.3.5	TESTE DE CROW	45
3.3.6	TESTE DE ANDERSON-DARLING	47

4	ESTUDO DE SIMULAÇÃO	51
4.1	ALGUNS ASPECTOS COMPUTACIONAIS - ALGORITIMOS	52
4.1.1	PROCESSO DE POISSON HOMOGÉNEO DE POISSON	52
4.1.2	PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÉNEO	53
4.1.3	PROCESSO DE RENOVAÇÃO	55
4.2	RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO	56
4.2.1	ANÁLISE INDIVIDUAL DE CADA TESTE	56
4.2.2	RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO	61
4.2.3	AValiação DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA	67
5	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	75
5.1	CONCLUSÕES	75
5.2	PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS	77
6	BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO	81
7	ANEXOS	85

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E ENQUADRAMENTO

1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

1.4 *SOFTWARE*

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E ENQUADRAMENTO

Falhas ou avarias, em qualquer sistema operacional, têm consequências graves, tanto no âmbito económico como no da segurança, pelo que, actualmente, há um maior controle da qualidade do sistema de maneira a reduzir a ocorrência dessas falhas/avarias. Impõem-se assim o estudo e aplicação de metodologias que avaliem, com base no histórico de ocorrências, o efeito das medidas de melhoria implementadas na frequência de ocorrência das avarias.

Por outro lado, é prática corrente, na fase de desenvolvimento de um novo produto, executar testes de avaliação de fiabilidade, expondo o produto a condições específicas (como por exemplo, condições ambientais, condições de carga, etc) de maneira a simular o estado de uso normal. Em caso de ocorrência de falha, são identificados os mecanismos de falha e consideradas alterações no projeto de maneira a reduzir a probabilidade de ocorrências futuras nesses mecanismos. Este procedimento é repetido até que se atinjam os objetivos pré-especificados no que respeita a fiabilidade do produto. As metodologias de avaliação da existência de tendência no processo de falhas são parte importante desse procedimento.

De um ponto de vista paramétrico, a avaliação da fiabilidade envolve a especificação adequada da distribuição de probabilidade de sobrevivência do sistema. Existe uma variedade de procedimentos, como a modelação via distribuição de Weibull, para caracterizar probabilisticamente os tempos de vida. Esses procedimentos baseiam-se no pressuposto de que o processo que gera os eventos é constante no tempo. Isto significa, de um ponto de vista estatístico, que os tempos de falha observados são distribuídos de forma independente e idêntica (iid). Na realidade, este pressuposto nem sempre é verificado. Por exemplo, os intervalos entre falhas de um sistema reparável podem revelar uma tendência decrescente no tempo devido ao efeito das reparações. É prática comum modelar o tempo até à falha desde a última reparação de um item reparável através de uma distribuição estacionária, contudo esta abordagem nem sempre é adequada pois os tempos podem ser gerados por um processo não constante. Assim, é necessário detetar tendências na taxa de ocorrência de falhas antes de se considerar uma distribuição de probabilidade para os tempos de falhas.

As metodologias de avaliação da existência de tendência na taxa instantânea de falhas¹ estão a ganhar popularidade no meio industrial e a sua aplicação é cada vez mais frequente. A indústria automóvel e a indústria das telecomunicações são bons exemplos de indústrias onde a aplicação de testes de hipóteses para avaliar a evolução temporal das ocorrências já é prática corrente [vejam-se, como exemplo, os trabalhos Freind (1995) e Bothwell (1996)].

Existem ferramentas gráficas disponíveis para avaliar a existência de tendência na fiabilidade dos sistemas, que são simples e fáceis de implementar, contudo a sua interpretação está envolvida de alguma subjetividade. Os testes de hipóteses são uma ferramenta interessante para avaliar a existência de tendência na fiabilidade, pois, caso os pressupostos de aplicabilidade sejam satisfeitos, a interpretação do seu resultado não varia com o utilizador. Esses testes identificam, através de dados observados, se há ou não uma tendência significativa na fiabilidade de um sistema. Nesta dissertação, os dados observados correspondem a tempos entre ocorrências, respeitando a ordem cronológica. É de notar que, embora as ferramentas gráficas por si só tenham pouco interesse pela razão já apresentada, elas são parte fundamental da análise que antecede um teste de hipóteses.

Muito se tem escrito sobre este tipo de testes [veja-se, por exemplo, Kvaloy e Lindqvist (1998), Wang & Coit (2005) e Gustin (2011)], no entanto, nem sempre existe consenso relativamente ao seu desempenho. Wang e Coit compararam 4 testes do tipo em estudo, tendo concluído que o teste de Crow/AMSAA é, no geral, o teste mais robusto. Jan Terje Kvaloy & Bo Henry Lindqvist, compararam o desempenho de um conjunto de também 4 testes (ao conjunto de testes considerado pelos autores anteriores, retiram o teste de Crow/AMSAA e acrescentaram o teste de Anderson-Darling) e concluíram que, no caso de sistema único (sistema com um único elemento), o teste de tendência Anderson-Darling pode ser recomendado como a melhor escolha para uso geral. Muitos outros estudos foram considerados, no entanto, ou os resultados não são comparáveis por não tratarem os mesmos tipos de testes ou os resultados obtidos não são consensuais.

Este trabalho surgiu da tentativa de ultrapassar/esclarecer as dificuldades/divergências encontradas em trabalhos anteriores que comparam o desempenho de vários testes de avaliação de existência de tendência em diferentes cenários.

¹ Note-se que a expressão “testar a existência de tendência na fiabilidade” é equivalente à expressão “testar a existência de tendência na taxa de ocorrências de falhas” pois a uma situação de fiabilidade crescente (decrescente) corresponde uma taxa instantânea de falhas decrescente (crescente). Estas duas expressões serão usadas ao longo do texto com o mesmo sentido.

1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Nesta dissertação, desenvolvida no âmbito do mestrado em Engenharia Mecânica ramo Gestão Industrial, tentou-se dar resposta às questões:

1. Os testes de hipóteses para avaliação da existência de tendência no processo de falhas têm todos o mesmo desempenho em diferentes cenários?
2. Será que estes testes são sensíveis ao cenário de fiabilidade?
3. Será que estes testes são sensíveis ao tamanho da amostra?

No sentido de responder às questões anteriores foram traçados os seguintes objetivos para esta dissertação:

1. Realizar uma revisão sobre os 5 testes estatísticos de avaliação de tendência da fiabilidade mais populares, nomeadamente, o teste de Laplace, o teste de Lewis-Robinson, o teste de Crow, o teste de Mann e o teste de Anderson-Darling.
2. Levar a cabo um estudo comparativo alargado, baseado em simulação de Monte Carlo, no sentido de comparar o desempenho dos diferentes testes estudados em vários cenários de fiabilidade. Os diferentes cenários de fiabilidade foram obtidos considerando tempos de ocorrências gerados a partir de 3 processos estocásticos diferentes, nomeadamente, de Processos de Poisson Homogéneos que correspondem a mecanismos de ocorrências sem tendência, de Processos de Poisson Não Homogéneos associados a mecanismos de ocorrências não com tendência e de Processos de Renovação que também modelam situações em que as ocorrências acontecem de forma aleatória. Foram ainda consideradas amostras de diferentes tamanhos.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Para além deste capítulo que faz uma introdução ao problema tratado, apresenta os objetivos da dissertação e introduz o *software* utilizado no estudo de simulação, este documento conta com mais 6 capítulos, estruturados de forma a que o leitor tenha um bom entendimento sobre o assunto que está sendo apresentado.

O capítulo 2 apresenta uma revisão sobre trabalhos que tratam o assunto aqui abordado. São ainda referidas algumas situações práticas onde os testes de avaliação de tendência foram aplicados.

O capítulo 3 dedica-se a uma descrição de alguns processos estocásticos usados em simulação de tempos entre ocorrências, particularmente, o Processo de Poisson Homogêneo, o Processo de Poisson não homogêneo e o Processo de Renovação. Apresenta ainda uma revisão sobre 5 testes de hipóteses de avaliação da existência de tendência que são, por sua vez, aplicados no estudo de simulação apresentado no capítulo seguinte.

O capítulo 4 apresenta as contribuições mais importantes do trabalho. Inicia com uma descrição do estudo de simulação proposto, seguindo-se a descrição dos algoritmos implementados em ambiente R e finaliza com a apresentação dos resultados do estudo de simulação.

O capítulo 5 dedica-se então às conclusões obtidas sobre o trabalho desenvolvido e apresenta algumas orientações sobre possibilidades de trabalho futuro.

Os capítulos 6 e 7 fecham este documento. No Capítulo 6 é apresentada a lista de referências consultadas no âmbito da realização desta dissertação. Os anexos, que apresentam todo o código desenvolvido em ambiente R, preenchem o Capítulo 7.

1.4 SOFTWARE

O *software* escolhido para o desenvolvimento desse trabalho foi o *software R*, por se tratar de uma linguagem computacional grátis e de código aberto. O R, para além de ser uma linguagem, é também um ambiente de desenvolvimento integrado para cálculos estatísticos e gráficos.

Ross Ihaka e Robert Gentleman, professores universitários e “pais” do R, sentiram a necessidade de desenvolver um *software* não comercial para fins de análises estatísticas pois, até então, os *softwares* existentes eram pagos. Tendo como base as ideias da linguagem S, que também era uma linguagem voltada para cálculos estatísticos mas paga, produziram sua própria linguagem para dar as suas aulas de estatística. Surgiu assim a linguagem R um dialeto da linguagem S [Borges (2014)].

O R pode ser obtido no sítio <https://www.r-project.org/>. Para além das bibliotecas base (instaladas juntamente com o R), é possível instalar novas bibliotecas para análises estatísticas mais específicas [SITE R-Project].

Porque a sua instalação é rápida, prática e fácil, por tratar-se de um programa que não ocupa muita memória no computador, por ser de rápida execução, por ser grátis e de código aberto, e entre outras razões, o R tem ganho grande popularidade entre os programas similares, como MatLab. Atualmente, o R é uma das linguagens de programação para análises estatísticas que mais cresce no mundo com perspectivas de continuar a crescer.

REVISÃO DA LITERATURA

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta uma revisão sobre alguns trabalhos que tratam o assunto da comparação do desempenho de testes de avaliação da existência de tendência no processo gerador de falhas. Não se pretende, de modo algum, uma descrição completa e exaustiva dos trabalhos, mas apenas referir as principais contribuições de cada um deles.

O conceito de teste de avaliação de existência de fiabilidade crescente foi introduzido, na década de 60, por Duane [Duane, J. T. (1964)], que estava envolvido num processo de desenvolvimento e teste de motores para aviões. Desde então muitos testes de avaliação de tendência têm sido propostos, tanto de um ponto de vista paramétrico como de um ponto de vista não paramétrico, e vários estudos de simulação têm sido realizados no sentido de comparar o desempenho desses testes em diferentes cenários.

Wang & Coit, no seu trabalho *Repairable Systems Reliability Trend Tests and Evaluation* [Wang & Coit (2005)], fazem uma revisão sobre 4 testes de avaliação de tendência de fiabilidade (teste de Laplace, teste de Crow/AMSAA, teste PCNT - e teste de Lewis-Robinson) e consideram um estudo de simulação no sentido de comparar o desempenho de cada um deles em diferentes cenários de fiabilidade. De acordo com estes autores, o teste de Crow/AMSAA é, no geral, o mais robusto. Concluíram ainda que o teste PCNT oferece poucas vantagens sobre os outros testes, o que é um resultado com alguma surpresa visto tratar-se de um teste não paramétrico com propriedades assintóticas sólidas.

Já Sara Gustin em 2011 [Gustin (2011)] conduziu um estudo comparativo com também 4 testes: teste de Laplace, teste de Mann, teste generalizado de Anderson-Darling e o teste de Lewis-Robinson. A principal conclusão foi que o teste generalizado de Anderson-Darling tem, claramente, melhor desempenho em cenários de tendência crescente e que os outros testes são consideravelmente melhores em cenários de tendência decrescente. Neste mesmo trabalho, Gustin aplica os 4 testes a dados reais publicados, no ano 2001, pela seguradora Swiss Reinsurance e que dizem respeito a tempos entre desastres graves ocorridos entre os anos 1970 e 2000. Para estes dados os 4 testes permitiram concluir no mesmo sentido.

Para Jan Terje Kvaloy & Bo Henry Lindqvist [Kvaloy e Lindqvist (1998)] é óbvio que nenhum teste é superior a todos os outros em todos os cenários de fiabilidade (taxa instantânea de ocorrências constante ou não, taxas monótonas e taxas não monótonas). No entanto, dizem que, no caso de sistema único, o teste de tendência de Anderson-Darling (versão generalizada) pode ser recomendado como a melhor escolha para uso geral. Estes autores consideraram no seu estudo de simulação os seguintes testes: teste de Laplace, teste não paramétrico de Mann, teste generalizado de Anderson-Darling e o teste de Lewis-Robinson.

Dada a relevância do conhecimento do “melhor” teste, outros estudos que compararam vários testes de avaliação de tendência têm também vindo a ser publicados.

Muitas são também as publicações que apresentam aplicações de testes de avaliação de existência de tendência em diferentes contextos.

Nos últimos anos, os testes de avaliação de existência de tendência na fiabilidade têm vindo a ser aplicados pelo Departamento da Defesa do Estados Unidos da América. Em 2011, foi publicada uma nova versão de um manual [Department of Defense (2011)] que fornece, entre outros assuntos, conceitos e princípios sobre procedimentos de aumento de fiabilidade, uma descrição sobre as vantagens de fazer uma gestão do aumento de fiabilidade e algumas indicações sobre como fazer essa gestão. As técnicas de aumento de fiabilidade permitem avaliar e controlar a fiabilidade de um sistema durante a fase de desenvolvimento. Os conceitos e metodologias de aumento de fiabilidade apresentados em [Department of Defense (2011)] evoluíram nas últimas décadas devido a ensinamentos resultantes de aplicações reais aos sistemas do Exército, da Marinha e da Força Aérea. Através destas aplicações reais, o procedimento de gestão de aumento de fiabilidade foi evoluindo até serem alcançadas, tanto recompensas consideráveis na melhoria da fiabilidade do sistema como uma redução de custos significativa.

Em 2016, Harish Sukhwani e companheiros [Sukhwani, Alonso, Trivedi e McGinnis(2016)] aplicaram testes de avaliação de existência de tendência num programa desenvolvido para avaliar a fiabilidade de um *software* de voo para missões espaciais da NASA² e para comparar versões do *software*. Os dados usados foram obtidos a partir de relatórios de defeitos gerados durante o desenvolvimento de *software* de voo.

No trabalho [De Oliveira] foi proposto um programa de avaliação da fiabilidade para suportar as operações de manutenção na indústria da aviação. Este programa resultou de uma colaboração de 6 meses com a Indústria Aeronáutica de Portugal, S.A (OGMA) e contou 10 anos de histórico relativo a dados de manutenção de aviões. O objetivo do programa era definir diretrizes importantes na redução de custos e na optimização do processo de manutenção. Os testes de tendência foram uma parte importante do programa desenvolvido. Foram aplicados a componentes individuais, como indicador da fiabilidade do componente.

Muitas outras aplicações dos testes estudados neste trabalho (e outros testes) estão descritas na literatura, veja-se, por exemplo as referências Gustin (2011) e Bothwell (1996).

² National Aeronautics and Space Administration, em língua Inglesa.

Os exemplos anteriores dão uma ideia da importância dos testes de avaliação de tendência da fiabilidade quando se tem em consideração a sua aplicação em contextos reais.

CONCEITOS TEÓRICOS

3.1 NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

3.2 ALGUNS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS IMPORTANTE NA MODELAÇÃO DO MECANISMO DE OCORRÊNCIA DE FALHAS

3.2.1 PROCESSO HOMOGÉNEO DE POISSON

3.2.2 PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÉNEO

3.2.3 PROCESSO DE RENOVAÇÃO

3.3 TESTES DE HIPÓTESES DE AVALIAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE TENDÊNCIA

3.3.1 BREVE INTRODUÇÃO AO TESTES DE HIPÓTESES

3.3.2 TESTE DE LAPLACE

3.3.3 TESTE DE MANN

3.3.4 TESTE DE LEWIS – ROBINSON

3.3.5 TESTE DE CROW

3.3.6 TESTE DE ANDERSON-DARLING

3 CONCEITOS TEÓRICOS

Esse capítulo apresenta uma revisão sobre as ideias e os instrumentos fundamentais que constituíram, grosso modo, a base deste trabalho. Esta revisão foca, essencialmente, dois aspetos: os aspetos teóricos associados com a simulação dos tempos das ocorrências a partir de Processos de Poisson Homogéneos, de Processos de Poisson não Homogéneos de Processos de Renovação e os aspetos teóricos relacionados com cada teste de avaliação de tendência estudado.

Na Secção 3.1 é apresentada notação e terminologia necessárias ao bom entendimento das metodologias abordadas. A Secção 3.2 apresenta os processos estocásticos estudados, enquanto que os testes de avaliação de existência de tendência são apresentados na Secção 3.3.

Devido à brevidade desta revisão, não se apresentam grandes detalhes sobre a teoria subjacente aos métodos/procedimentos revistos. Mais detalhes podem ser encontrados na literatura citada.

3.1 NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Os tempos das ocorrências sucessivas são, neste trabalho, denotados por $T_1, T_2, T_3 \dots$ e os correspondentes tempos entre ocorrências são denotados por $X_1, X_2, X_3 \dots$ (veja-se Figura 1). É fácil constatar que $X_1 = T_1$ e $X_i = T_i - T_{i-1}, i = 2, 3, \dots$ e que $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

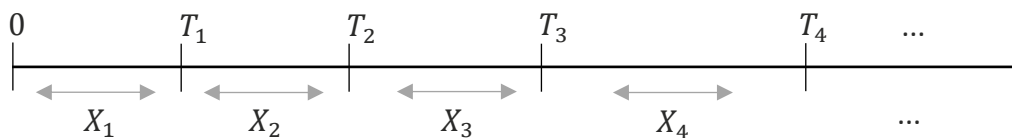


Figura 1: Tempos das ocorrências e tempos entre ocorrências.

Outra forma de apresentar a informação sobre as ocorrências de falha é através do número acumulado de ocorrências até ao instante de tempo t que é representado por $N(t)$ – número de ocorrências no intervalo $(0, t]$.

Neste estudo admite-se que a observação do sistema (único) começa no instante $t = 0$ e que os tempos de inatividade (tempos de paragem) são desprezáveis.

Definição 1 – Processo Estocástico

Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias $\{Y(t), t \in T\}$ definidas no mesmo espaço amostral, indexadas por um parâmetro t variando num conjunto T , designado por conjunto de índices do processo.

Definição 2 – Processo de contagem

Um processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de contagem se, fixando $t > 0$, $N(t)$ representa o número de acontecimentos no intervalo $(0, t]$.

3.2 ALGUNS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS IMPORTANTES NA MODELAÇÃO DO MECANISMO DE OCORRÊNCIA DE FALHAS

3.2.1 PROCESSO HOMOGÊNIO DE POISSON

Definição 3 – Processo de Poisson Homogêneo

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ com $N(0)=0$ diz-se um Processo de Poisson Homogêneo (PPH) de intensidade λ se forem verificadas as seguintes condições:

1. $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários e independentes;
2. Para qualquer $t > 0$, $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt , simbolicamente, $\forall t > 0, N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, portanto:

$$P[N(t) = k] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

No caso particular deste trabalho, o fenômeno aleatório é a ocorrência de falhas. Ou seja, para t fixo, $N(t)$ representa o número de falhas ocorridas no intervalo $(0, t]$.

3.2.2 PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÊNIO

Definição 4 – Processo de Poisson Não Homogêneo

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ com $N(0)=0$ diz-se um Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH) de intensidade $\lambda(t)$ se forem verificadas as seguintes condições:

1. $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;

2. $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t) \times h + o(h), t \geq 0;$
3. $P[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h), t \geq 0.$

Sendo que, $o(h)$ representa uma quantidade que tende para zero para valores pequenos de h .

A função valor médio, $m(t)$, é dada por:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(t) dt.$$

Os PPNH são muito úteis na descrição de mecanismos de falha com tendência não crescente ou decrescente. O número acumulado de falhas no tempo t , $N(t)$, segue uma distribuição de Poisson com o parâmetro $m(t)$, pelo que a probabilidade de $N(t)$ tomar o valor um inteiro dado k é dada pela expressão:

$$P[N(t) = k] = \frac{[m(t)]^k}{k!} e^{-m(t)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Pelo exposto acima, é fácil constatar que o que distingue o PPH do PPNH é o fato do primeiro ter incrementos estacionários e o segundo não.

3.2.3 PROCESSO DE RENOVAÇÃO

O PPH é um processo estocástico de contagem para o qual os tempos entre ocorrências sucessivas são variáveis aleatórias independentes e com distribuição exponencial. O Processo de Renovação (PR) é uma generalização do PPH, já que para estes processos os tempos entre ocorrências podem ser distribuídos de acordo com qualquer distribuição de probabilidade adequada. Portanto, se o mecanismo de falhas for bem modelado por um PR significa que não há aumento nem deterioração na fiabilidade.

Definição 5 – Processo de Renovação

Sejam

- $\{X_i: i \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de variáveis aleatórias que representam os tempos entre as ocorrências;
- $T_0 = 0;$
- $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ o tempo da n -ésima ocorrência;
- $N(t)$ o número de ocorrências no intervalo $(0, t]$

Se $\{X_i: i \in \mathbb{N}\}$ representar uma sequência de variáveis aleatórias não negativas e independentes com função de distribuição acumulada comum representada por F , então o processo estocástico de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é um PR.

3.3 TESTES DE HIPÓTESES DE AVALIAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE TENDÊNCIA

Antes de iniciar a descrição dos testes de hipóteses retratados nesta dissertação, é feita uma breve introdução aos conceitos fundamentais dos testes de hipóteses.

3.3.1 BREVE INTRODUÇÃO AO TESTES DE HIPÓTESES

Um teste de hipóteses (TH) é um processo estatístico usado para se tirar uma conclusão sobre uma ou mais populações, a partir de uma ou mais amostras dessas populações [Pedrosa (2016)].

O primeiro passo na condução de um TH é a formulação das duas hipóteses estatísticas: hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa ou fundamental (H_1). Habitualmente, em H_0 declara-se o que é considerado inverossímil e em H_1 é declarado o que se pretende verificar.

De acordo com a forma de H_1 , os testes de hipóteses classificam-se como testes bilaterais ou unilaterais (à direita ou à esquerda). Dado que neste trabalho serão apenas considerados testes bilaterais, esta revisão fará apenas referência a estes testes.

Após a especificação das hipóteses estatísticas segue-se a implementação de um procedimento que permita decidir se deve ou não rejeitar H_0 . Este procedimento é baseado numa função da amostra (ou amostras), designada de estatística de teste (ET) e que segue uma determinada distribuição de probabilidade. Para determinados valores da ET, designados de região crítica, a H_0 é rejeitada.

A figura seguinte ilustra a região crítica (RC) (a vermelho) para uma ET com distribuição normal estandardizada e para um teste bilateral.

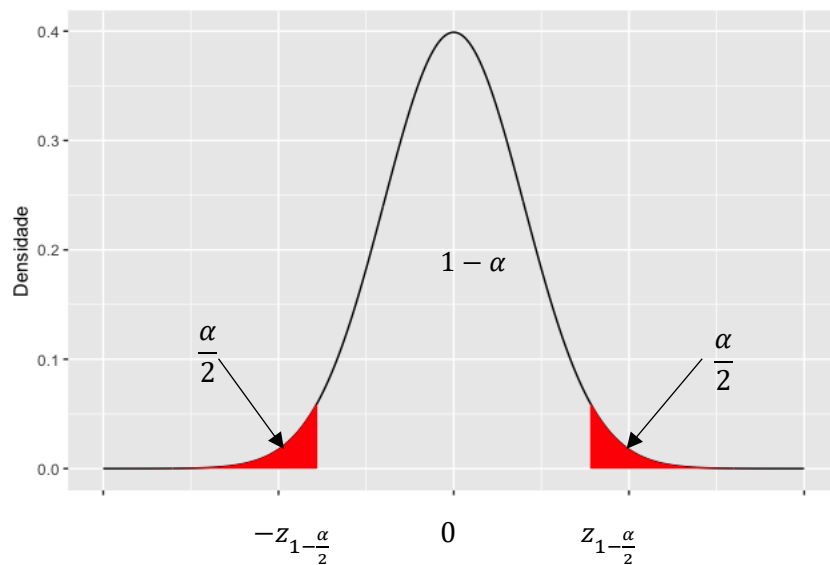


Figura 2: Região crítica de um teste bilateral.

A quantidade α apresentada na figura anterior é designada de nível de significância do teste ou de dimensão do teste e representa a probabilidade de se rejeitar H_0 erradamente, ou seja, a probabilidade de rejeitar H_0 quando esta é verdadeira. Como α representa uma probabilidade de se cometer um erro assume, por razões óbvias, valores pequenos (tipicamente 0.05). $z_{1-\alpha/2}$ é o quantil $1-\alpha/2$ da distribuição normal estandardizada.

Num TH a probabilidade de não rejeitar H_0 erradamente é representada por β . A potência do teste é dada por $1-\beta$ e representa a probabilidade de rejeitar H_0 quando esta é falsa (decisão correta).

A regra de decisão baseada na RC consiste em comparar o valor da estatística de teste observada ($ET_{\text{obser.}}$) com os valores limites da RC. Rejeita-se H_0 sempre que $ET_{\text{obser.}}$ pertencer à RC, ou seja, sempre que $ET_{\text{obser.}} < -z_{1-\alpha/2}$ ou $ET_{\text{obser.}} > z_{1-\alpha/2}$.

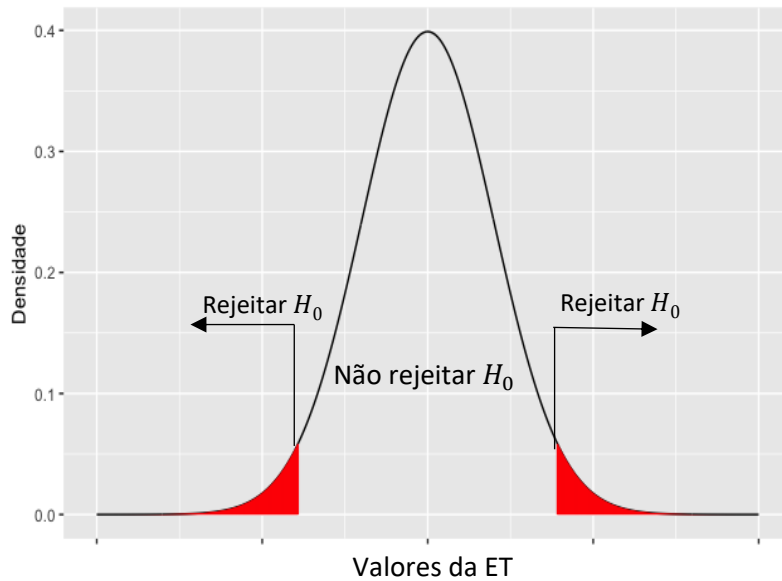


Figura 3: Região crítica para ET com distribuição Normal

Uma outra regra de decisão usada nos TH tem por base uma quantidade designada de valor-p ou valor de prova (*p-value*, em Inglês). O valor-p é uma probabilidade que mede até que ponto é que os dados da amostra sugerem a rejeição de H_0 sendo, num TH bilateral dado por [Pedrosa (2016)]:

$$\text{valor-p} = P(|ET| > ET_{\text{obser}} | H_0 \text{ é verdadeira})$$

Para qualquer nível de significância α , H_0 é rejeitada sempre que $\text{valor-p} < \alpha$.

Finaliza-se esta breve revisão fazendo a distinção entre TH paramétricos e TH não paramétricos. Os TH paramétricos contêm pressupostos distribucionais enquanto que os TH não paramétricos não requerem pressupostos sobre a distribuição da população subjacente aos dados. Em alguns casos e em amostras grandes, deixa ser necessário testar o pressuposto distribucional dos testes paramétricos já que existem resultados limite que permitem especificar a distribuição da ET.

Em seguida faz-se uma descrição sobre os testes de avaliação de tendência da taxa de ocorrência de avarias considerados neste trabalho.

3.3.2 TESTE DE LAPLACE

O teste de Laplace simples é um teste estatístico que declara na hipótese nula (H_0) que o taxa instantânea de falhas do sistema em estudo é bem modelado por um processo de Poisson homogêneo (PPH), isto é, que os eventos ocorrem aleatoriamente no tempo e que o tempo entre ocorrências é exponencialmente distribuído. Na hipótese alternativa (H_1), o teste de Laplace, declara que mecanismo é modelado por um processo de Poisson não homogêneo (PPNH), isto é, as ocorrências não têm um comportamento temporal aleatório [Kvaloy e Lindqvist (1998)]:

H_0 : o processo de falhas é modelado por um PPH

H_1 : o processo de falhas é modelado por um PPNH

Seja T_1, T_2, \dots, T_n uma sequência de tempos de ocorrências no intervalo $[0, t_F]$. Sabendo que ocorreram n eventos no intervalo pré-especificado $[0, t_F]$, os sucessivos tempos das ocorrências são uma estatística de ordem de uma população uniforme no intervalo $[0, t_F]$. A distribuição da estatística de teste estandardizada

$$ET_L = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i - \frac{t_F}{2}}{t_F \sqrt{\frac{1}{12n}}}$$

tende, sob H_0 , rapidamente para uma distribuição normal padrão $[N(0,1)]$. A região de rejeição, apresentada a vermelho na Figura 4 para um nível de significância de $\alpha \times 100\%$, inclui as duas caudas da distribuição normal padrão.

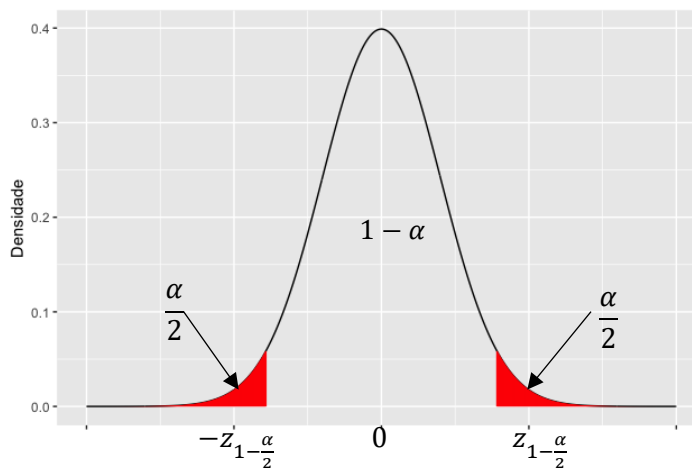


Figura 4: Região crítica do teste de Laplace simples

No caso em que a observação do elemento termina quando ocorre o n –ésimo evento, a estatística de teste tem a seguinte forma:

$$ET_L = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} T_i - (N-1) \frac{T_n}{2}}{T_n \sqrt{\frac{1}{12(n-1)}}}$$

que, para $n \geq 4$, tem uma distribuição aproximadamente normal padrão $[N(0,1)]$.

Este teste tem uma interpretação muito simples e intuitiva que será dada para o segundo caso apresentado. A média amostral dos primeiros $n - 1$ tempos é comparada com o ponto médio do intervalo, $T_n/2$, portanto, sob H_0 (PPH), a estatística de teste tomará valores baixos. Sob a hipótese de taxa de ocorrências crescente (decrescente), a estatística de teste assume valores elevados e positivos (negativos).

Note-se que, o teste de Laplace considera em H_0 um PPH, pelo que ao rejeitar esta hipótese terá que se ter cuidado ao concluir que a taxa de ocorrências não é constante pois o processo subjacente ao mecanismo de falhas pode ser um processo de renovação não exponencial que também está associado com taxas de ocorrências com comportamento constante.

3.3.3 TESTE DE MANN

O teste de Mann é um teste não paramétrico para avaliação da existência de tendência. Baseia-se na comparação entre pares de tempos entre ocorrências. Caso exista tendência na taxa de ocorrências, o número esperado de comparações onde o tempo seguinte é maior do que o tempo anterior deverá ser igual ao número de comparações com situação inversa.

Em H_0 , o teste de Mann declara que as falhas ocorrem de forma aleatória no tempo e que o tempo entre as falhas, segue uma distribuição de probabilidade adequada:

H_0 : o processo de falhas é modelado por um PR

H_1 : o processo de falhas não é modelado por um PR

Defina-se então a seguinte estatística de teste

$$\hat{M} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n I(X_i < X_j),$$

onde $I(A)$ é a função indicatriz que assume o valor 1 sempre A representar uma condição verdadeira e assume o valor 0, caso contrário.

Para $n < 10$, o valor observado da estatística de teste deve ser comparado com valores críticos tabelados. Para $n \geq 10$ e considerando H_0 como hipótese verdadeira, estatística de teste segue uma distribuição aproximadamente normal com os seguintes parâmetros [Tibor (1993)]:

$$E[\widehat{M}|H_0] = n(n - 1)/4,$$

$$V[\widehat{M}|H_0] = (2n^3 + 3n^2 + 5n)/72.$$

Simbolicamente, temos:

$$\widehat{M} \sim N\left(\frac{n(n - 1)}{4}, \frac{2n^3 + 3n^2 + 5n}{72}\right),$$

o que é equivalente a escrever

$$ET_M = \frac{\widehat{M} - \frac{n(n - 1)}{4}}{\sqrt{\frac{2n^3 + 3n^2 + 5n}{72}}} \sim N(0,1).$$

Portanto, rejeita-se H_0 , se $ET_M > z_{1-\alpha/2}$ ou se $ET_M < -z_{1-\alpha/2}$ (veja-se a Figura 5).

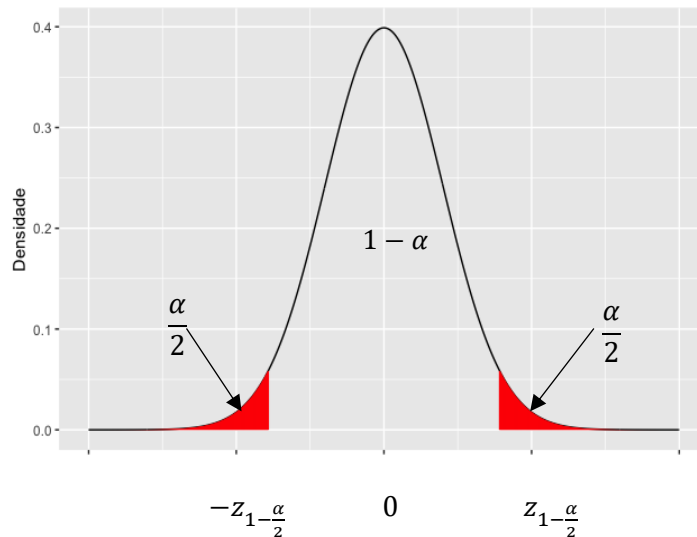


Figura 5: Região crítica do teste de Mann

3.3.4 TESTE DE LEWIS – ROBINSON

A descrição aqui feita segue de perto a descrição apresentada no capítulo “Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems” da referência [Limnios (1999)].

O teste de Lewis-Robinson representa uma modificação do teste de Laplace, pois a sua estatística de teste é uma função da estatística de teste do teste de Laplace.

Este teste de hipóteses pretende superar a lacuna do teste de Laplace referida anteriormente. Relembrar que no teste de Laplace há o risco de se rejeitar a hipótese das falhas ocorrerem segundo um PPH, concluindo-se pela existência de não aleatoriedade de ocorrências, quando o processo de falha subjacente for um PR não exponencial.

As hipóteses do teste são:

H_0 : o processo de falhas é modelado por um PR

H_1 : o processo de falhas não é modelado por um PR

A estatística de teste, ET_{LR} , é dada pelo quociente entre a ET_L e o coeficiente de variação amostral dos tempos entre ocorrências (CV). Simbolicamente:

$$ET_{LR} = \frac{ET_L}{\widehat{CV}},$$

com

$$\widehat{CV} = \frac{\sqrt{\widehat{V}[X]}}{\bar{X}},$$

onde \bar{X} e $\widehat{V}[X]$ representam, respectivamente, a média e a variância dos tempos entre ocorrências amostrais.

Note-se que o coeficiente de variação de uma variável aleatória com distribuição exponencial é igual a 1³. A introdução do denominador na ET_{LR} tem como objectivo identificar situações em que os tempos entre ocorrências não são exponencialmente distribuídos. Este denominador garante que ET_{LR} é aproximadamente distribuído

³ Na distribuição exponencial o valor médio e o desvio padrão tomam o mesmo valor.

segundo uma distribuição normal padrão, sempre que os dados sejam provenientes de um PR.

Assim, rejeita-se H_0 , se $ET_{LR} > z_{1-\alpha/2}$ ou se $ET_{LR} < -z_{1-\alpha/2}$, entanto a região de rejeição representada a vermelho na figura apresentada a seguir

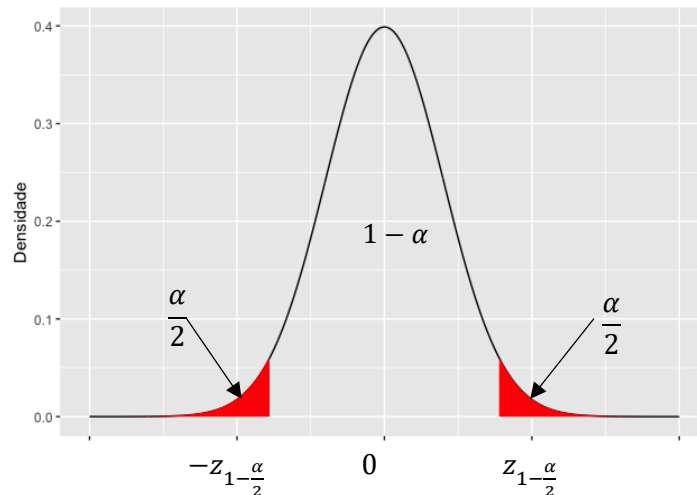


Figura 6: Região crítica do teste de Lewis-Robinson

3.3.5 TESTE DE CROW

O teste de Crow [Stephens (2011)] é baseado na suposição de que o modelo $\lambda(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$; λ, β e $t > 0$ (Crow,1974) é adequado para modelar a taxa instantânea de falhas. Note-se que se $\beta = 1$, $\lambda(t) = \lambda$, o que significa que o processo de falhas não apresenta tendência (PPH). Para $\beta > 1$ (<1), a taxa instantânea de falhas tem um comportamento monótono crescente (decrecente), ou seja, existe um crescimento (uma deterioração) da fiabilidade. Este teste é baseado nas estimativas de máxima verossimilhança do parâmetro β dada pela expressão

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(t_F/T_i)}$$

para o caso de n eventos no intervalo pré-especificado $[0, t_F]$ e dada pela expressão

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} \ln(T_n/T_i)}$$

no caso em a observação do elemento termina com a ocorrência de n -ésima falha.

A hipóteses do teste são:

H_0 : o processo de falhas é modelado por um PPH ($\beta = 1$)

H_1 : o processo de falhas é modelado por um PPNH ($\beta \neq 1$)

No caso em que o elemento é observado por t_F unidades de tempo, a estatística de teste segue uma distribuição χ^2 com $2n$ graus de liberdade e é dada pela expressão:

$$ET_{CROW} = 2n / \hat{\beta},$$

sendo H_0 rejeitada sempre que os valores observados da estatística de teste não pertencerem ao intervalo $\left[\chi^2_{2n, \frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{2n, 1 - \frac{\alpha}{2}} \right]$, onde $\chi^2_{2n, \alpha}$ representa o quantil de ordem α de uma distribuição qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade. A região de rejeição está representada na figura seguinte a cor vermelha.

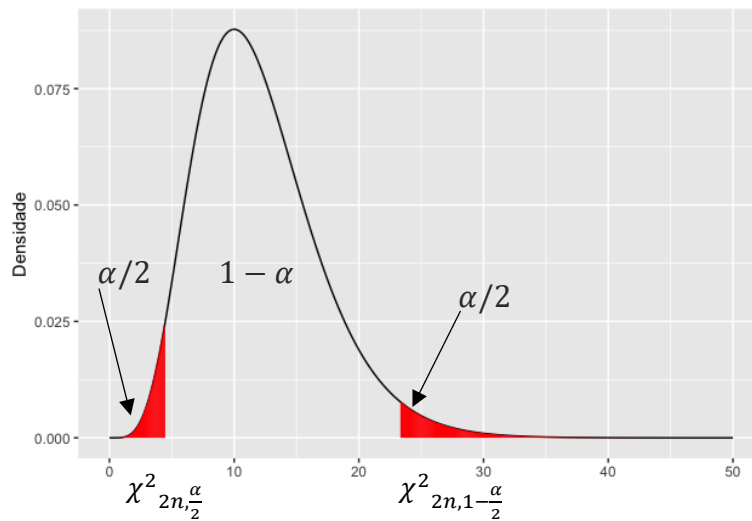


Figura 7: Região crítica do teste do Modelo de Crow

No caso em que observação do sistema termina com a ocorrência de n -ésima falha, a estatística de teste é dada pela mesma expressão mas segue uma distribuição χ^2 com $2(n - 1)$ graus de liberdade.

3.3.6 TESTE DE ANDERSON-DARLING

O teste de Anderson-Darling para avaliação de existência de tendência na taxa instantânea de falhas foi apresentado em 1998 pelos autores Kvaloy e Lindqvist [Kvaloy e Lindqvist (1998)], e é baseado na bem conhecida estatística de Anderson-Darling.

Embora existam várias variantes da estatística de teste do teste de Anderson-Darling para avaliação de tendência, a estatística considerada neste trabalho foi a publicada em [Antoch, Jaromír & Jarusková, Daniela (2007)] é parametrizada pela expressão

$$ET_{AD} = \frac{1}{\bar{X}^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{1}{i(n-i)} \left(T_i - \frac{i}{n} T_n \right)^2 \right],$$

onde $\bar{X} = T_n/2$. Esta estatística corresponde a um teste de hipóteses unilateral cujos valores críticos são os mesmos da estatística de teste Anderson-Darling regular.

As hipóteses do teste são:

H_0 : o processo de falhas é modelado por um PPH

H_1 : o processo de falhas é modelado por um PPNH

Este teste de Anderson-Darling, assim como alguns testes já discutidos, considera em H_0 um PPH, pelo que ao rejeitar-se essa hipótese não significa necessariamente que haja uma tendência no processo.

Em [Kvaloy e Lindqvist & Malmedal (2001)], Kvaløy e companheiros propuseram a seguinte estatística generalizada

$$ET_{ADG} = \frac{(n-4)\bar{X}^2}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n \left(q_i^2 \ln \left(\frac{i}{i-1} \right) + (q_i + r_i)^2 \ln \left(\frac{n-i+1}{n-i} \right) - \frac{r_i^2}{n} \right)$$

que corresponde a um teste com um PR na hipótese nula.

Na fórmula anterior:

$$q_i = (T_i - iX_i)/T_n, \quad r_i = \frac{nX_i}{T_n} - 1 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2.$$

Note-se que, na expressão de ET_{ADG} , quando $i = 1$ e $i = n$ obtêm-se denominadores com valor 0. Para efeitos de simulação, atribuiu-se o valor 0 a esses termos.

É de notar que, embora neste trabalho tenham sido considerados cenários com tendência monótona, o teste de Anderson-Darling rejeita a hipótese nula na presença de tendências monotónas e não monotónas. Os outros testes geralmente apenas detectam tendências monótonas[Gustin (2011)].

Os valores críticos para a estatística de teste Anderson-Darling regular encontram-se disponíveis na literatura [Anderson e Darling (1954), Chen (2006) e Gustin (2011)]. Para diferentes valores do nível de significância, a tabela seguinte mostra esses valores críticos.

Tabela 1: Valor Crítico (Anderson, T. W. & Darling, 1954 e Chen, 2006)

Valor Crítico de Anderson-Darling	
α (Nível de significância)	Valor crítico
0.15	1.610
0.10	1.933
0.05	2.492
0.025	3.070
0.01	3.857

ESTUDO DE SIMULAÇÃO

4.1 ALGUNS ASPECTOS COMPUTACIONAIS - ALGORITIMOS

4.1.1 PROCESSO DE POISSON HOMOGÉNEO DE POISSON

4.1.2 PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGÉNEO

4.1.3 PROCESSO DE RENOVAÇÃO

4.2 RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO

4.2.1 ANÁLISE INDIVIDUAL DE CADA TESTE

4.2.2 RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO

4.2.3 AVALIAÇÃO DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA

4 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Após a exposição dos conceitos teóricos fundamentais ao desenvolvimento desta dissertação, este capítulo apresenta resultados da implementação desses conceitos num estudo de simulação de Monte Carlo que tinha como objetivo comparar o desempenho de 5 testes de avaliação da existência de tendência em diferentes cenários de fiabilidade.

Apresenta-se, em seguida, as diferentes fases do estudo de simulação implementado.

Fase 1: PPH

1. Simular para $\lambda = 0.1$ (ocorrências por unidade de tempo), 1000 amostras de tamanho 20 de tempos de ocorrências: $t_1^i, t_2^i, \dots, t_{20}^i, i = 1, \dots, 1000$.
2. Aplicar, a cada uma das amostras geradas, os 5 testes de hipóteses apresentados no capítulo anterior.
3. Calcular a percentagem de rejeições de H_0 .

Fase 2: PPNH

1. Simular para $\lambda(t) = \lambda\beta t^{1-\beta}$ ($\beta > 1$ e $\beta < 1$), 1000 amostras de tamanho 20 de tempos de ocorrências: $t_1^i, t_2^i, \dots, t_{20}^i, i = 1, \dots, 1000$.
2. Aplicar, a cada uma das amostras geradas, os 5 testes de hipóteses apresentados no capítulo anterior.
3. Calcular a percentagem de rejeições de H_0 .

Fase 3: PR

1. Simular para 2 distribuições de probabilidade diferentes para os tempos entre ocorrências (Weibull e Normal), 1000 amostras de tamanho 20 de tempos de ocorrências: $t_1^i, t_2^i, \dots, t_{20}^i, i = 1, \dots, 1000$.
2. Aplicar, a cada uma das amostras geradas, os 5 testes de hipóteses apresentados no capítulo anterior.
3. Calcular a percentagem de rejeições de H_0 .

Fase 4: Avaliar o efeito do tamanho da amostra no desempenho dos testes

1. Para $n = 5$ até 100 (por passo de 5 unidades), repetir as 3 fases anteriores.
2. Traçar gráficos com os resultados obtidos.

Para a implantação computacional do estudo de simulação escreveram-se funções na linguagem R que implementam os vários métodos descritos no capítulo anterior. O código implementado está disponível no último capítulo deste documento (Anexo 1).

4.1 ALGUNS ASPECTOS COMPUTACIONAIS - ALGORITIMOS

4.1.1 PROCESSO DE POISSON HOMOGENEO DE POISSON

Como é sabido, o PPH está associado com taxas de ocorrência (instantânea) constante com tempos entre ocorrências exponencialmente distribuídos.

São vários os algoritmos publicados na literatura para simular amostras de tempos a partir de PPH [veja-se, por exemplo, os trabalhos, RK (2015), Poisson Process Generation e Burnecki (2010)]. Neste trabalho optou-se pelo algoritmo apresentado em seguida que considera o caso em que a simulação termina quando o valor simulado para o tempo de ocorrência excede t_F (limite superior do intervalo de tempo considerado). Facilmente se adapta este algoritmo ao caso em que o critério de paragem na simulação é o número de ocorrências (n).

Objectivo: Gerar T_i em $(0, t_F)$

1. Inicializar $t = t - \ln(u_0)/\lambda$, $n=0$;
2. Enquanto $t < t_F$, $i = i + 1$, $T_i = t$, $t = t - \ln(u_i)/\lambda$. Fim.

Saída: n – número de eventos; $T_1 \dots, T_n$ – tempos das ocorrências.

$U_i \sim U[0,1]$

Figura 8: Algoritmo 1 - Gerar uma amostra de um PPH

A figura seguinte mostra três amostras de tamanho 20 geradas a partir de um PPH.

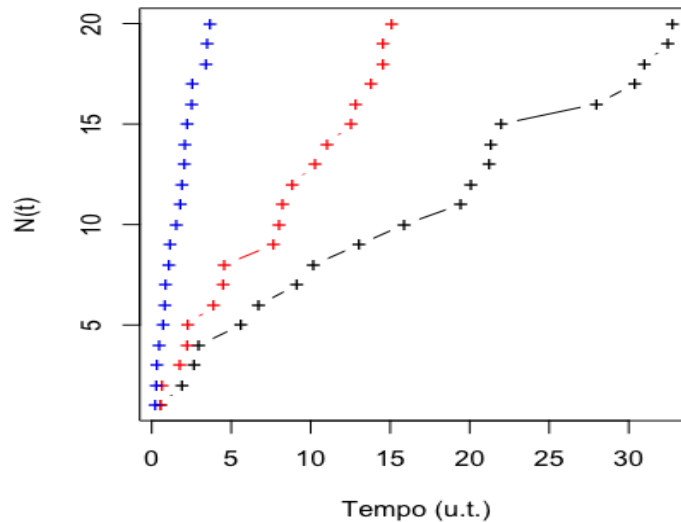


Figura 9: Amostras de tempos de PPH

A Figura 9 mostra então 3 amostras de dimensão 20, de tempos de ocorrências geradas de um PPH. A linha preta resulta de um PPH com $\lambda = 0.1$ ocorrências/u.t.. Já a linha vermelha corresponde a um PPH de $\lambda = 1$ ocorrências/u.t.. Por fim, a linha de cor azul corresponde a uma amostra gerada de um PPH de parâmetro $\lambda = 5$ ocorrências/u.t.. Como se pode observar na figura anterior e como era esperado, à medida que aumenta o valor de λ o tempo até que ocorram as 20 falhas diminui.

4.1.2 PROCESSO DE POISSON NÃO HOMOGENEO

Os PPNH desempenham um papel crucial na quantificação da fiabilidade pois modelam situações físicas associadas com taxas não constantes.

Tal como para o PPH, existem vários algoritmos para gerar amostras de um PPNH. Neste trabalho, as amostras obtidas de um PPNH foram geradas com base no seguinte algoritmo (conhecido por algoritmo “Thinning”) [RK (2015), Poisson Process Generation e Burnecki (2010)]:

Objectivo: Gerar T_i em $(0, t_F)$

1. Inicializar $t = 0, i = 0, \lambda = \max_{t \in [0, t_F]} \lambda(t)$;
2. Atribuir $t = t - \ln(U[0,1]) / \lambda$, se $t > t_F$, parar;
3. Se $U[0,1] \leq \lambda(t) / \lambda$, atribuir $i = i + 1, T_n = t$;
4. Voltar ao passo 2.

Saída: n – número de eventos; $T_1 \dots, T_n$ – tempos das ocorrências.

Figura 10: Algoritmo 2 - Gerar uma amostra de um PPNH

Também aqui foi considerado o caso em que a simulação termina quando o valor simulado para o tempo de ocorrência excede t_F (limite superior do intervalo de tempo considerado). A adaptação ao caso em que o critério de paragem na simulação é o número de ocorrências (n) é um problema trivial.

A figura seguinte ilustra 3 amostras de tamanho 20 geradas a partir de um PPNH com função intensidade modelada por

$$\lambda(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}, t, \lambda, \beta > 0.$$

A figura mostra 3 cenários de fiabilidade:

- $\beta = 0.5 < 1$: Taxa instantânea de ocorrências decrescente (linha de cor preto);
- $\beta = 1$: Taxa instantânea de ocorrências constante ($\lambda(t) = \lambda$ – PPH) (linha de cor azul);
- $\beta = 1.5 > 1$: Taxa instantânea de ocorrências crescente (linha de cor vermelha).

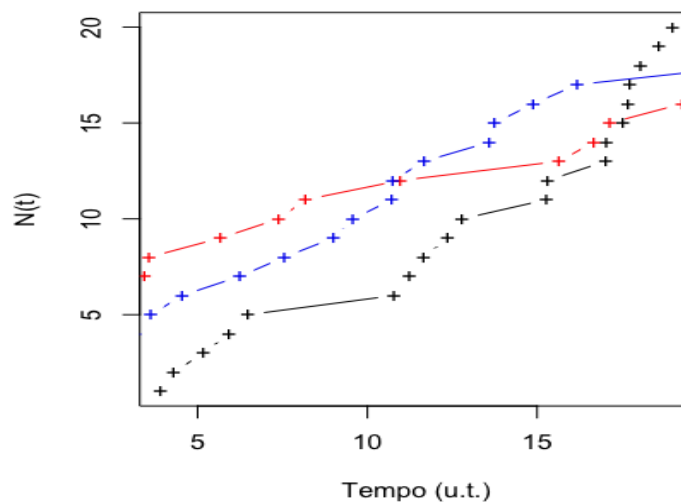


Figura 11: Amostras de tempos de PPNH

4.1.3 PROCESSO DE RENOVAÇÃO

Por fim, o PR. Como já referido, o PR é uma generalização do PPH e também modela situação físicas com taxas de ocorrência constante. Neste processo os tempos entre ocorrências não têm que seguir, necessariamente, uma distribuição exponencial como acontece no caso do PPH. O algoritmo implementado para simular amostras de um PR encontra-se em seguida [Ricarte (2016)]:

Objectivo: Gerar T_i em $(0, t_F)$

1. Inicializar $T_0 = 0$;
2. Atribuir $T_i = T_{i-1} + u_i$; se $T_i > t_F$, parar;

Saída: $T_1 \dots, T_n$ – tempos das ocorrências.

$u_i \sim F(\cdot)$

Figura 12: Algoritmo 3 - Gerar uma amostra de um PR

No PR foram consideradas 3 distribuições de probabilidade diferentes para modelar o tempo entre ocorrências, nomeadamente, a distribuição exponencial (correspondente a um PPH), a distribuição de Weibull e a distribuição normal, cujas funções densidade de probabilidade são dadas pelas expressões:

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda): f(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i}, \lambda, x_i > 0;$$

$$X_i \sim \text{Weibull}(\beta, \eta): f(x_i) = \frac{\beta x_i^{\beta-1}}{\eta^\beta} \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta\right], \quad x_i, \beta, \eta > 0;$$

$$X_i \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2): f(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}}, x_i, \mu, \sigma > 0.$$

A figura mostrada a seguir ilustra 3 amostras de um PR, sendo a linha preta correspondente ao caso em que o tempo entre falhas é exponencialmente distribuído, para a linha vermelha esses tempos seguem a distribuição de Weibull e para a linha azul

os tempos entre falhas são normalmente distribuídos. O comportamento quase linear das curvas representadas provam a não existência de tendência na fiabilidade.

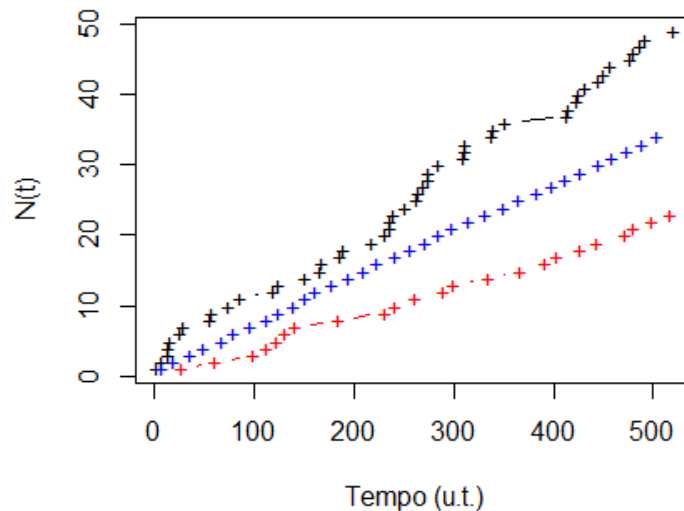


Figura 13: Amostras de tempos de PR

4.2 RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Esta secção apresenta os resultados do estudo de simulação. No sentido de se obter um bom entendimento do resultado de cada um dos testes, apresenta-se na secção seguinte uma análise detalhada do resultado de cada um dos 5 testes quando aplicado a uma amostra proveniente de um PPH. A Secção 4.2.2 mostra os resultados do estudo de simulação, para os diferentes cenários de fiabilidade considerados e na Secção 4.2.3 apresentam-se os resultados do estudo sobre a influência do tamanho da amostra no desempenho dos testes.

4.2.1 ANÁLISE INDIVIDUAL DE CADA TESTE

Nesta análise considerou-se uma amostra proveniente de um PPH de parâmetro 0.1 ocorrências/u.t., pelo que se está a considerar que os tempos das ocorrências apresentam uma taxa instantânea de falhas constante e que os tempos entre as ocorrências são exponencialmente distribuídos (cenário de fiabilidade constante).

De maneira a se fazer uma comparação adequada, os 5 testes foram executados sobre uma mesma amostra.

Teste de Laplace

Executando o teste de Laplace sobre uma amostra de tamanho 20 proveniente de um PPH com $\lambda=0.1$, obteve-se o seguinte valor para a estatística de teste $ET_L = 0.945$. Considerando este valor e os valores críticos da distribuição normal padrão para um nível de significância de 5% ($\alpha = 0.05$), não se pode concluir pela rejeição da hipótese de que os tempos são provenientes de um PPH (veja-se a figura mostrada a seguir).

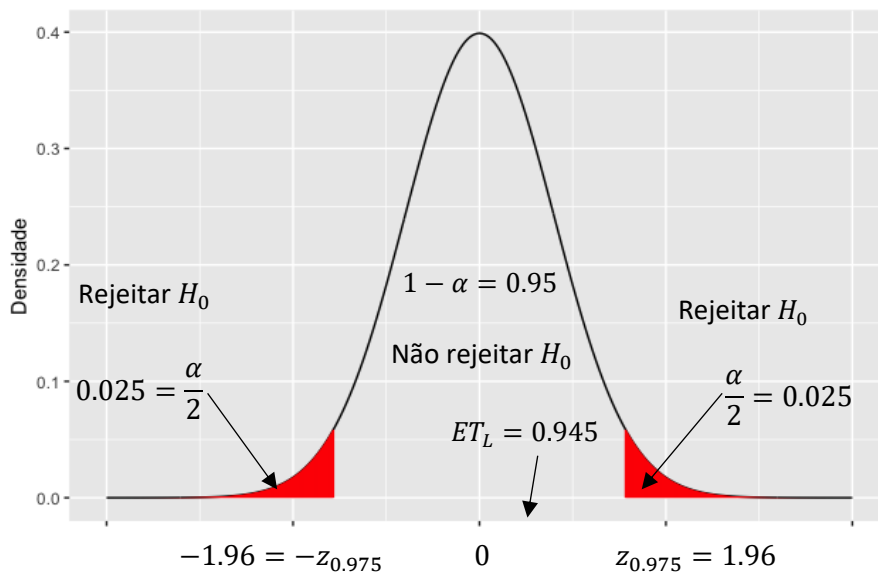


Figura 14: Região Crítica do teste de Laplace

Teste de Mann

Para a amostra considerada no teste de Laplace, o teste Mann forneceu o valor -0.455 para a estatística de teste ($ET_M = -0.455$). Uma vez que a estatística de teste do teste de Mann segue uma distribuição normal padrão, os valores críticos aqui, para $\alpha = 0.05$, são os mesmos do teste de Laplace, conforme mostra a figura abaixo. Comparando o valor de ET_M com a região crítica, é possível concluir pela não rejeição da hipótese de que os tempos foram gerados a partir de um PR (o teste de Mann declara em H_0 que os tempos são provenientes de um PR). Este teste permite então concluir que não se pode afirmar que os tempos considerados não são modelados por um PR (generalização do PPH).

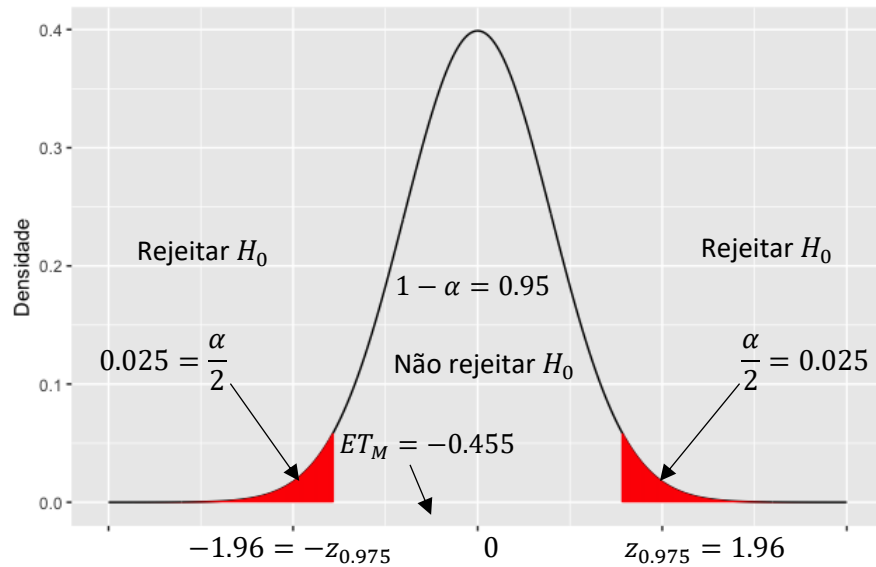


Figura 15: Região Crítica do teste de Mann

Teste de Lewis-Robinson

O teste de Lewis-Robinson foi executado sobre a amostra gerada, tendo-se obtido o valor 0.912 para a estatística de teste ($ET_{LR} = 0.945$). Para este teste, a estatística de teste segue uma distribuição normal padrão, pelo que os valores críticos, para $\alpha = 0.05$, são os mesmos dos testes anteriores, conforme mostra a figura abaixo. Comparando o valor de ET_{LR} com a região crítica, é possível concluir pela não rejeição da hipótese de que os tempos foram gerados a partir de um PR (o teste de Lewis-Robinson declara em H_0 que os tempos são provenientes de um PR). Há semelhança com os dois testes anteriores, este teste conduz a uma decisão acertada, ou seja, não rejeita a hipótese de que os tempos considerados são provenientes de um PR, quando na verdade estes tempos são gerados de um PPH (caso particular PR).

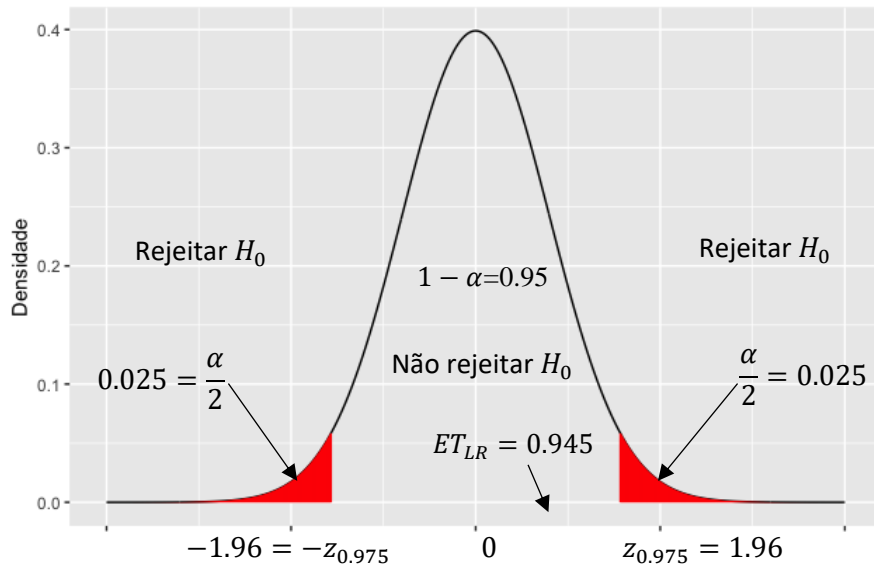


Figura 16: Região Crítica do teste de Lewis-Robinson

Teste de CROW

O teste de Crow foi executado sobre a amostra de tempos gerada de um PPH, tendo-se obtido o valor 31.724 para a estatística de teste ($ET_C = 31.724$). Para este teste, a estatística de teste segue uma distribuição de um χ^2 com 38 graus de liberdade [$2 \times (20 - 1)$]. Os valores críticos, para $\alpha = 0.05$, estão apresentados na figura seguinte. Comparando o valor de ET_C com a região crítica, é possível concluir pela não rejeição da hipótese de que os tempos foram gerados a partir de um PPH. Também aqui é obtida uma decisão certa, ou seja, o teste de Crow não rejeita a hipótese de que os tempos considerados são provenientes de um PPH, quando na verdade estes tempos são gerados de um PPH.

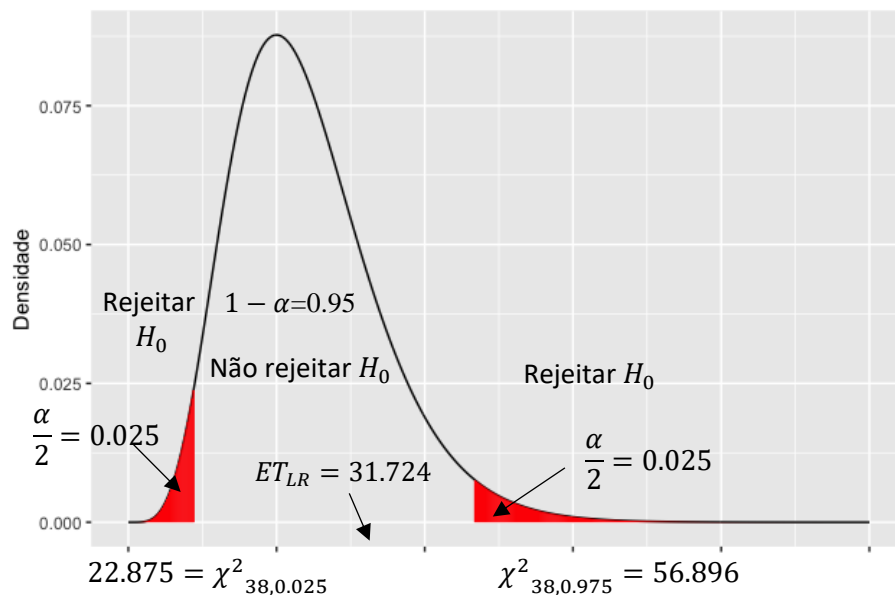


Figura 17: Região Crítica do teste de Crow

Teste de Anderson-Darling generalizado

Por fim, aplicou-se o teste de Anderson-Darling generalizado à amostra de tempos gerada de um PPH. O valor observado da estatística de teste foi 0.365 ($ET_{ADG} = 0.365$). Para este teste, a estatística de teste não segue uma distribuição paramétrica conhecida, estando os valores críticos da distribuição de ET_{ADG} tabelados para diferentes valores de α . Comparando o valor de ET_{ADG} com o valor crítico da distribuição Anderson-Darling para $\alpha = 0.05$ (2.492) é possível concluir-se pela não rejeição da hipótese de que os tempos foram gerados a partir de um PR. Também aqui é obtida uma decisão certa, isto é, o teste de Anderson-Darling generalizado não rejeita a hipótese de que os tempos considerados são provenientes de um PR, quando na verdade estes tempos são gerados de um PPH (caso particular do PR).

Em jeito de conclusão, os resultados apresentados levam-nos a pensar que se os tempos das ocorrências forem bem modelados por um PPH, os 5 testes apresentam um desempenho semelhante. De maneira a confirmar (ou concluir de forma diferente) esta suspeita, apresentam-se, na subsecção seguinte, resultados de um estudo de simulação de Monte Carlo, onde os 5 testes foram executados sobre 1000 amostras geradas a partir de diferentes cenários de fiabilidade. Como resultados, apresentam-se

histograma dos 1000 valores da estatística de teste e a percentagem de vezes que H_0 é rejeitada.

4.2.2 RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO

CENÁRIO 1

Amostras, de dimensão 20, geradas de um PPH de parâmetro λ ocorrências/u.t., que corresponde a uma situação onde os indicadores de fiabilidade não variam com o tempo.

Na tabela seguinte, reproduzem-se, para cada teste e para $\alpha = 0.05$, o número de não rejeições de H_0 e a correspondente percentagem de não rejeições. Apesar de todos os testes terem apresentado uma percentagem de decisão correta superior a 90%, é o teste de Anderson-Darling generalizado que revela melhor desempenho, com uma percentagem de 96.8% no caso em que $\lambda = 1$ e é o teste de Lewis-Robinson o que revela o pior desempenho com uma percentagem de 92.8% para esse mesmo caso. Embora o estudo de simulação tenha considerado apenas dois valores distintos para λ , somos tentados a sugerir que o valor desse parâmetro não interfere com o desempenho dos testes pois os resultados são semelhantes nos dois cenários.

Tabela 2: Número de não rejeições de H_0 e % de não rejeições de H_0 .

TESTE	$\lambda = 0.1$ ocorrência/u.t.		$\lambda = 5$ ocorrências/u.t.	
	# de não rejeições	% de não rejeições	# de não rejeições	% de não rejeições
Laplace	940	94.0	934	93.4
Mann	953	95.3	950	95.0
Lewis-Robinson	928	92.8	929	92.9
Crow	951	95.1	957	95.7
Anderson-Darling	968	96.8	975	97.5

A figura seguinte mostra, para o caso em que $\lambda = 0.1$ ocorrências/u.t. e para cada teste, o histograma da estatística de teste para as 1000 amostras. Para o caso em $\lambda = 5$ ocorrências/u.t. os histogramas revelaram um comportamento semelhante aos apresentados. Como esperado os 3 primeiros testes revelam um histograma típico de uma distribuição aproximadamente normal padrão. O histograma relativo ao teste de Crow tem também um aspecto simétrico o que se entende pelo elevado número de

graus de liberdade da estatística de teste. Para o teste de Anderson-Darling, a distribuição é assimétrica positiva.

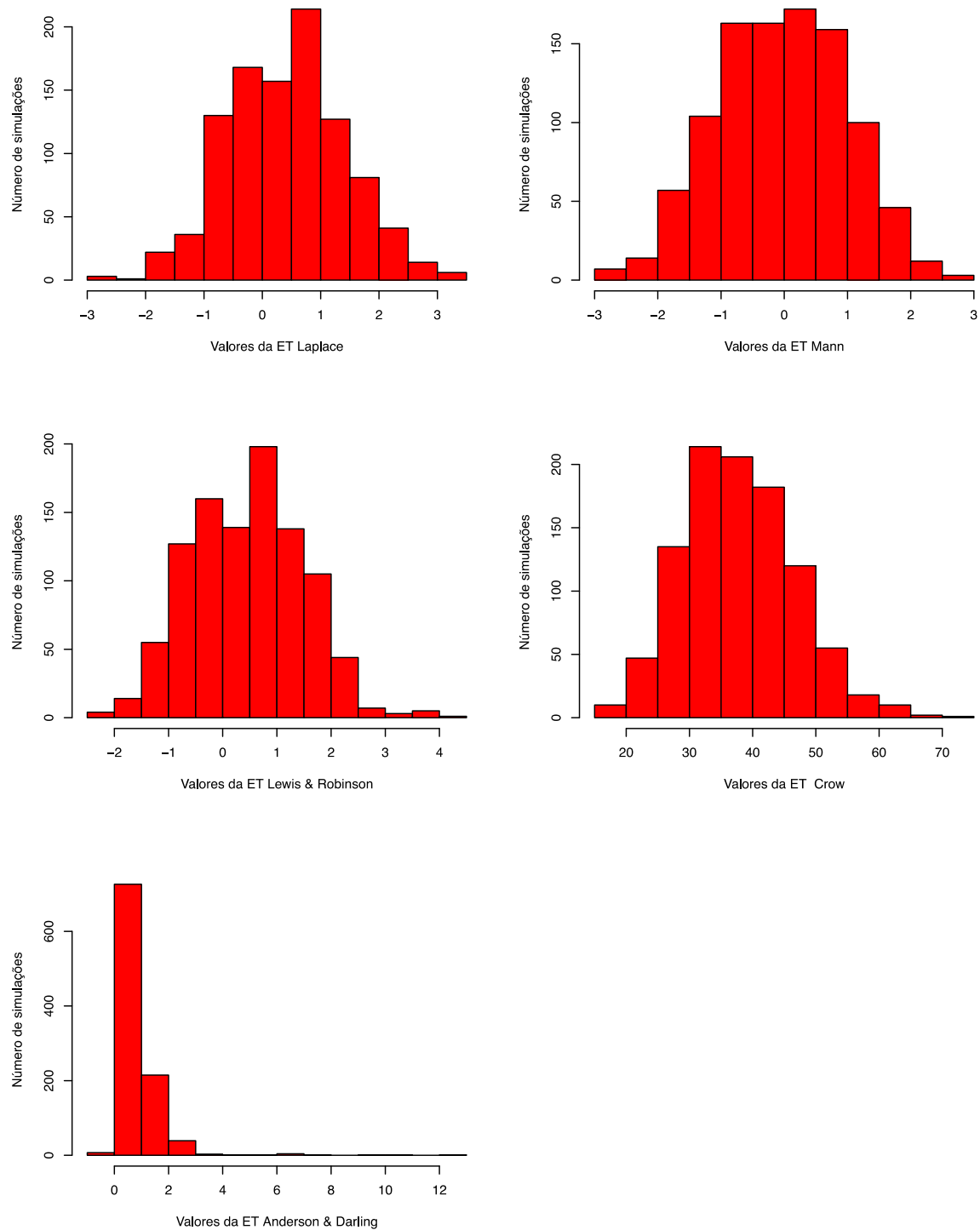


Figura 18: Histogramas de estatística de teste do Cenário 1

CENÁRIO 2

Amostras, de dimensão 20, geradas de um PPNH com $\lambda(t) = \lambda \beta t^{1-\beta}$, que corresponde a uma situação onde os indicadores de fiabilidade variam com o tempo.

A tabela seguinte, mostra para cada teste e para $\alpha = 0.05$, o número de não rejeições de H_0 e a correspondente percentagem de não rejeição. Note-se que aqui as amostras são geradas de um PPNH pelo que a não rejeição de H_0 não deve ser interpretada como no **Cenário 1**. Para $\beta = 0.5$ (fiabilidade crescente), o teste de Laplace e o teste de Lewis-Robinson não rejeitam a hipótese dos tempos serem gerados por um PR (fiabilidade constante) em, aproximadamente, 50% dos casos. O teste de Mann e o teste de Anderson-Darling não rejeitam esta hipótese em, respectivamente, 77.7% e 71.7%. Já o teste de Crow, não rejeita a hipótese de fiabilidade constante de forma errada em 63.7% dos casos.

Para $\beta = 1.5$ (fiabilidade decrescente), o teste de Crow destaca-se pela positiva pois rejeita a hipótese de que a amostra é modelada por um PPH em 87.0% dos casos. Todos os outros testes apresentam fraco desempenho, já que a percentagem de rejeições ronda os 50% em todos os testes.

Tabela 3: Número de não rejeições de H_0 e % de não rejeições de H_0 .

TESTE	$\beta = 0.5$		$\beta = 1.5$	
	Taxa decrescente		Taxa crescente	
	# de não rejeições	% de não rejeições	# de não rejeições	% de não rejeições
Laplace	535	53.5	470	47.0
Mann	777	77.7	450	45.0
Lewis-Robinson	503	50.3	560	56.0
Crow	637	63.7	130	13.0
Anderson-Darling	717	71.7	530	53.0

A figura seguinte mostra, para o caso em que $\beta = 1.5$ e para cada teste, o histograma da estatística de teste para as 1000 amostras simuladas. Aqui, os 2 primeiros testes revelam um histograma típico de uma distribuição aproximadamente normal, mas de média diferente de zero. O histograma relativo ao teste de Crow tem também um aspecto simétrico pela razão já apresentada acima. Para os dois outros testes os histogramas revelam uma ligeira assimetria positiva.

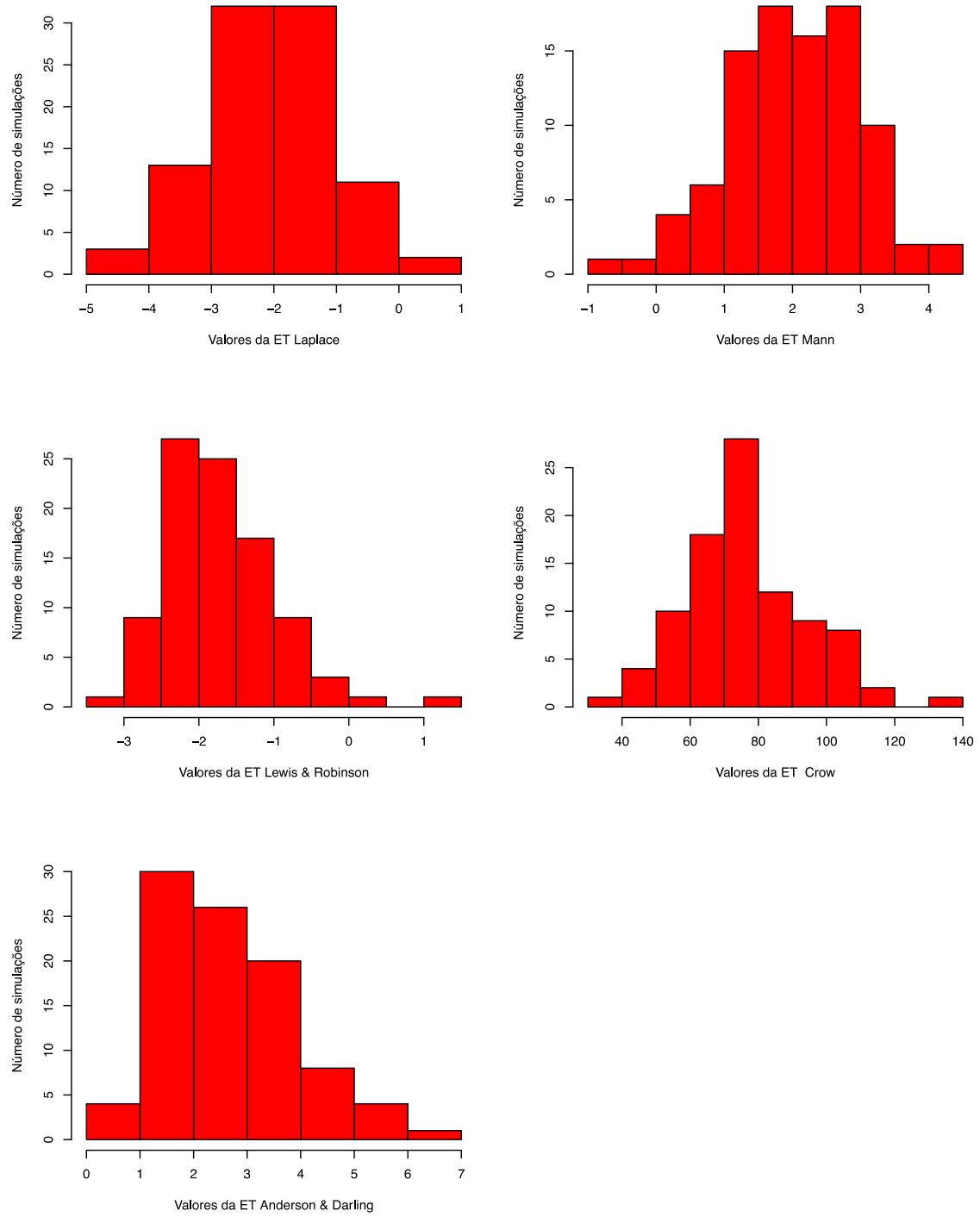


Figura 19: Histogramas de estatística de teste do Cenário 2

CENÁRIO 3

Amostras, de dimensão 20, geradas de um PR que corresponde a uma situação onde os indicadores de fiabilidade não variam com o tempo (fiabilidade constante o que equivale a uma taxa de ocorrências constante). Foram consideradas duas distribuições de probabilidade diferentes para os tempos entre ocorrências (normal e de Weibull).

A tabela seguinte, mostra para cada teste e para $\alpha = 0.05$, o número de não rejeições de H_0 e a correspondente percentagem. Aqui as amostras são geradas de um PR pelo que a não rejeição de H_0 será uma decisão correta. Tanto para a distribuição normal como para a distribuição de Weibull, os testes de Laplace, de Crow e de Anderson-Darling conduzem a uma decisão correta em 100% (ou quase) dos casos. O teste de Mann apresenta um desempenho bastante satisfatório com, aproximadamente, 95% amostras das amostras com uma decisão correta. Já o teste de Lewis- Robinson apresenta o pior desempenho, levando a conclusões erradas em quase 50% dos casos na distribuição de normal e em mais de 10% dos casos na distribuição de Weibull.

Tabela 4: Número de não rejeições de H_0 e % de não rejeições de H_0 .

TESTE	$X_i \sim N(10,2)$		$X_i \sim Weibull(2,15)$	
	# de não rejeições	% de não rejeições	# de não rejeições	% de não rejeições
Laplace	1000	100.0	999	99.9
Mann	951	95.1	950	95.0
Lewis-Robinson	503	50.3	871	87.1
Crow	1000	100.0	1000	100.0
Anderson-Darling	1000	100.0	1000	100.0

A figura seguinte mostra, para o caso em que os tempos entre avarias são modelados por uma $N(10,2)$ e para cada teste, o histograma da estatística de teste para as 1000 amostras simuladas. Para o caso da distribuição de Weibull os histogramas revelaram um comportamento semelhante aos apresentados. Aqui, o teste de Mann revela um histograma típico de uma distribuição aproximadamente normal padrão. Os testes de Laplace e Lewis-Robinson apresenta um histograma aproximadamente, simétrico, mas com média superior a 0. O histograma relativo ao teste de Crow tem também um aspeto simétrico pela razão já apresentada. O teste de Anderson – Darling revela um histograma assimétrico positivo.

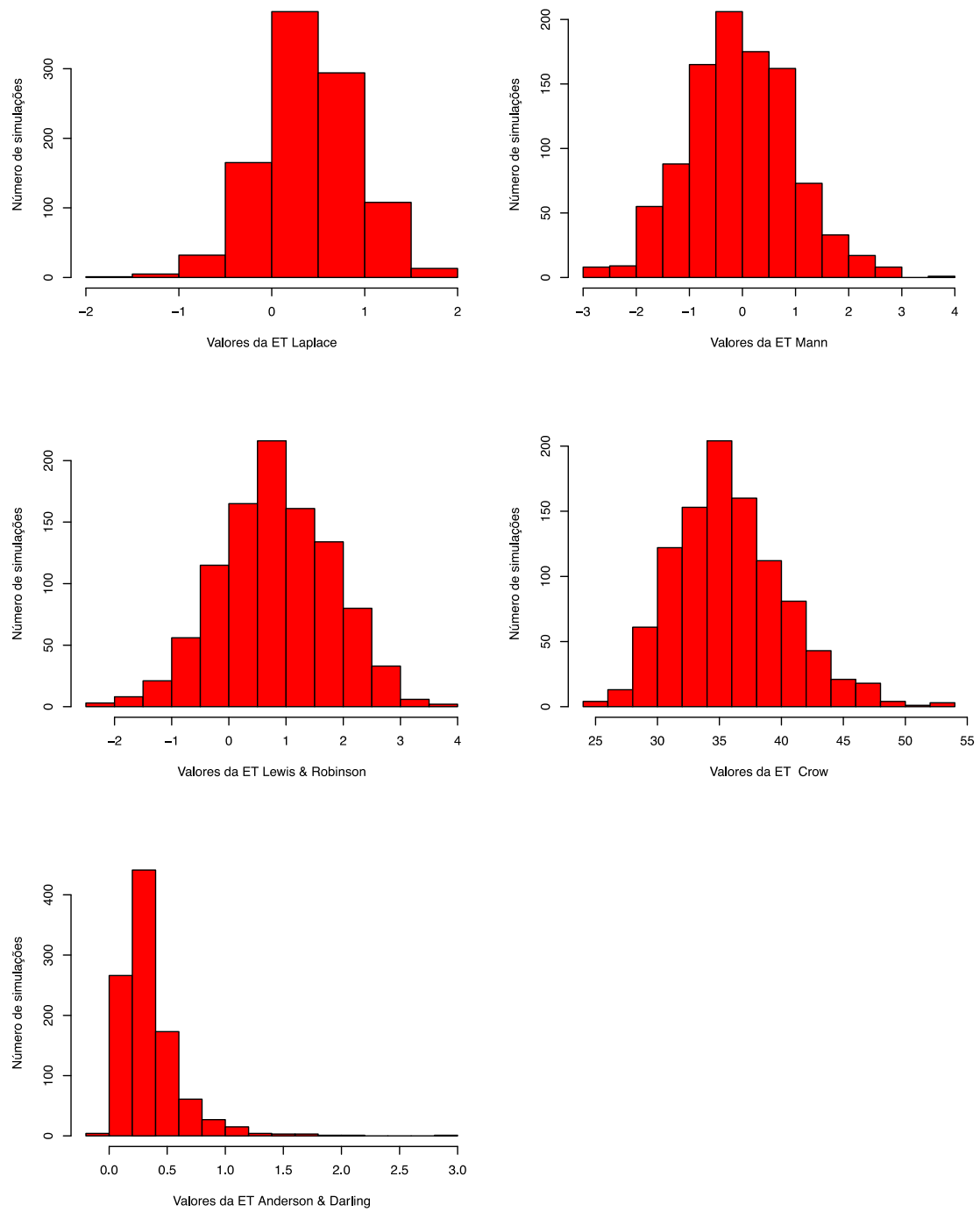


Figura 20: Histogramas de estatística de teste do Cenário 3

4.2.3 AVALIAÇÃO DO EFEITO DO TAMANHO DA AMOSTRA

Nesta secção apresentam-se resultados do estudo do efeito do tamanho da amostra no desempenho dos testes. Para os 3 cenários apresentados na secção anterior, executou-se o procedimento também aí apresentado sobre amostras de vários tamanhos (de tamanho 5 até 100, por múltiplos de 5).

Para todas as figuras desta secção, a linha verde diz respeito ao teste de Lewis-Robinson, a linha a vermelho ao teste de Laplace, a linha azul ao teste de Mann, a linha cinzenta ao teste de Crow e a linha a preto ao teste de Anderson-Darling generalizado.

Algoritmo Desenvolvido

O algoritmo que foi desenvolvido nessa secção, para amostra de tamanho $n = 5$ até 100 (por passo de 5 unidades). Irá simular 1000 simulações, em um determinado cenário, o qual será escolhido, para depois executar os 5 testes sobre as amostras simuladas. Feito isso irá se estimar a probabilidade de decisão errada dada, as quais serão feitas pelas fórmulas a seguir:

Para cenários de fiabilidade constante

$$\frac{\# \text{ de vezes em que se rejeita } H_0}{1000}$$

Para cenários de fiabilidade não constante

$$\frac{\# \text{ de vezes em que não se rejeita } H_0}{1000}$$

Feito isso irá se plotar um gráfico, com a estimativa da probabilidade de decisões erradas pelo tamanho da amostra, para assim comparar os resultados de cada teste e a analisar a influência do tamanho da amostra.

CENÁRIO 1

Amostras, de várias dimensões, geradas de um PPH de parâmetro λ ocorrências/u.t., que corresponde a uma situação onde os indicadores de fiabilidade não variam com o tempo.

As duas figuras abaixo mostram, para $\lambda = 0.1$ ocorrências/u.t. e $\lambda = 5$ ocorrências/u.t., respectivamente, os resultados de uma análise sobre o efeito do tamanho da amostra no desempenho dos testes. Esta avaliação foi feita através da estimativa da probabilidade de o teste decidir sobre H_0 erradamente, ou seja, neste caso, através da estimativa da probabilidade de se rejeitar H_0 , já que as amostras foram geradas de PPH.

Observando-se as duas figuras (Figura 21 e Figura 22) pode concluir-se que o tamanho da amostra não tem grande efeito no desempenho dos 5 testes. Os testes de Laplace, Crow e Mann apresentam uma estimativa da probabilidade de erro mais ou menos constante. O teste de Lewis-Robinson é o que apresenta pior desempenho na presença de amostras de dimensão reduzida, enquanto que o teste Anderson-Darling generalizado é o que apresenta melhor desempenho com amostras pequenas.

Pode observar-se ainda que, à medida que a dimensão da amostra aumenta, a estimativa da probabilidade de decisão errada tende para o mesmo valor nos 5 testes estudados.

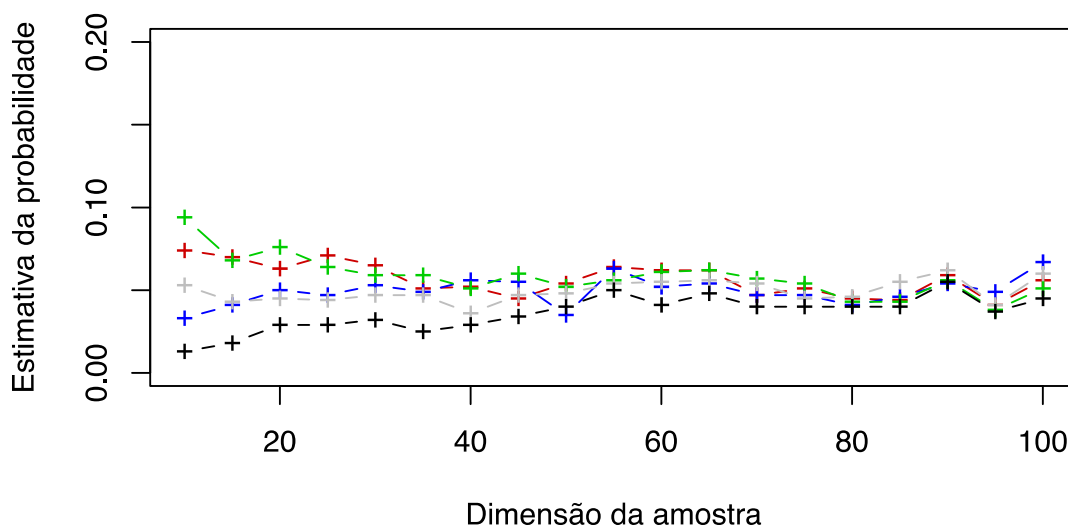


Figura 21: Avaliação do efeito do tamanho da amostra para $\lambda=0.1$ ocorrências/u.t.

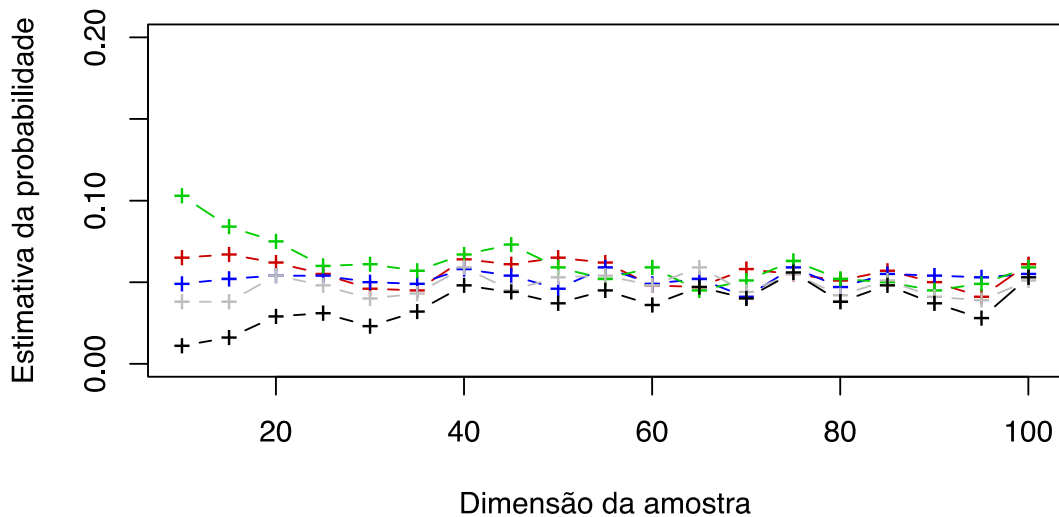


Figura 22: Avaliação do efeito do tamanho da amostra para $\lambda=5$ ocorrências/u.t.

CENÁRIO 2

Amostras, de várias dimensões, geradas de um PPNH com $\lambda(t) = \lambda \beta t^{1-\beta}$, que correspondem a uma situação onde os indicadores de fiabilidade variam com o tempo.

As duas figuras abaixo mostram, para $\beta = 0.5$ (taxa decrescente, fiabilidade crescente) e $\beta = 1.5$ (taxa crescente, fiabilidade decrescente), respetivamente, os resultados de uma análise sobre o efeito do tamanho da amostra no desempenho dos 5 testes estudados.

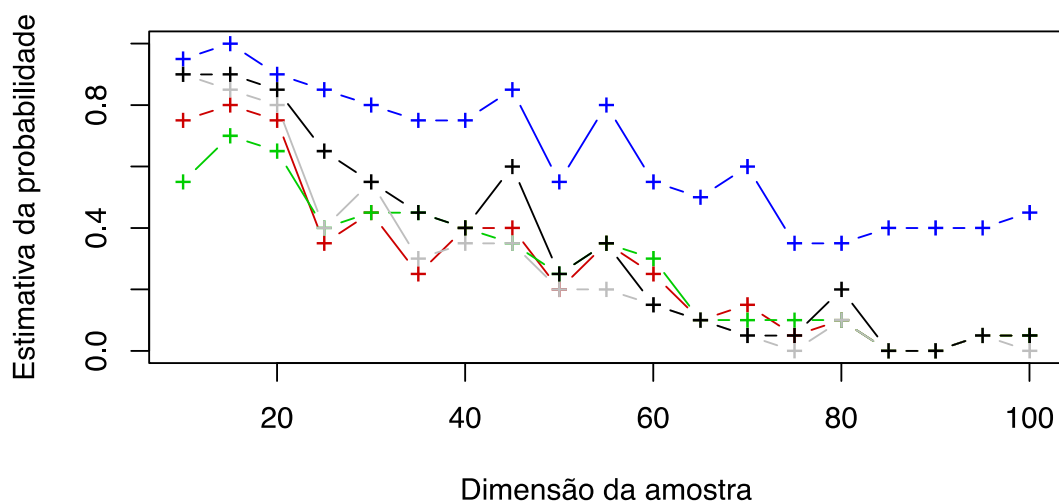


Figura 23: Avaliação do efeito do tamanho da amostra para $\beta = 0.5$

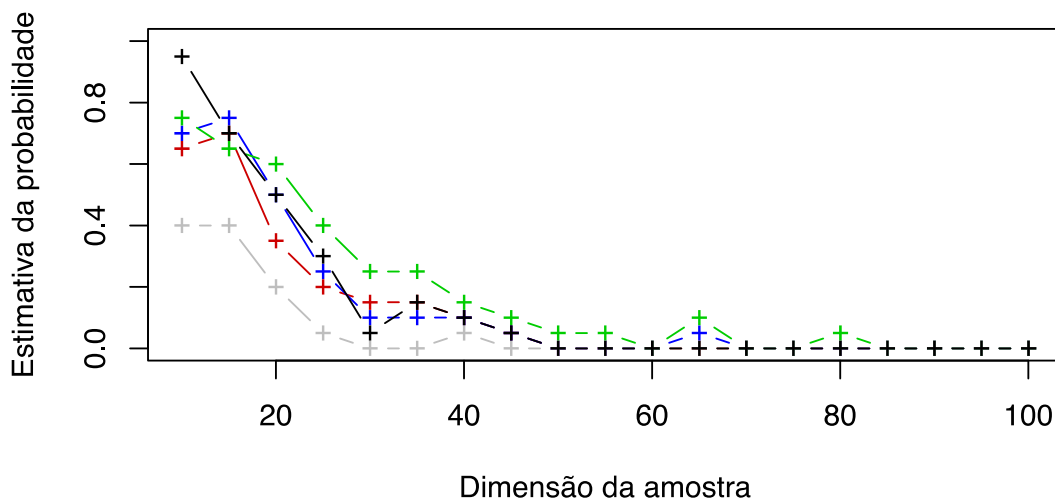


Figura 24: Avaliação do efeito do tamanho da amostra para $\beta = 1.5$

Aqui considerou-se a estimativa da probabilidade de não se rejeitar H_0 (probabilidade de erro) já que as amostras foram geradas de PPNH. Neste cenário, uma decisão correta seria rejeitar H_0 . Tendo em consideração as duas figuras acima (Figura 23 e Figura 24), pode concluir-se que o tamanho da amostra tem efeito no desempenho dos testes, pois, para amostras pequenas, a estimativa da probabilidade de erro é muito elevada, tanto para o caso de fiabilidade crescente como para o caso de fiabilidade decrescente. Pode ainda constatar-se que para o caso de fiabilidade crescente (Figura 23), com exceção do teste de Mann, à medida que a dimensão da amostra aumenta, a estimativa da probabilidade de decisão errada diminuiu bastante e tende a ser semelhante nos 4 testes. No caso de fiabilidade decrescente (Figura 24) é o teste de Crow que revela melhor desempenho para pequenas amostras.

CENÁRIO 3

Amostras de várias dimensões, geradas de um PR, que correspondem a uma situação onde os indicadores de fiabilidade não variam com o tempo e os tempos entre ocorrências são modelados por uma qualquer distribuição de probabilidade adequada.

A Figura 25 e a Figura 26 mostram, com uma distribuição de Weibull e com uma distribuição normal para os tempos entre ocorrências, respectivamente, os resultados da análise sobre o efeito do tamanho da amostra no desempenho dos testes. Esta avaliação foi feita através da estimativa da probabilidade do teste decidir sobre H_0 erradamente, ou seja, neste caso, através da estimativa da probabilidade de se rejeitar H_0 já que as amostras foram geradas de PR. Observando as duas figuras pode concluir-

se que o tamanho da amostra tem efeito bem evidente no desempenho do teste de Lewis-Robinson. Para este teste, à medida que a dimensão de amostra aumenta, a estimativa da probabilidade de interesse diminui bastante, sendo esta conclusão mais evidente para o caso em que os tempos entre ocorrências é modelado por uma distribuição normal (Figura 26). O desempenho dos restantes 4, aparentemente, não é afetado pelo tamanho da amostra.

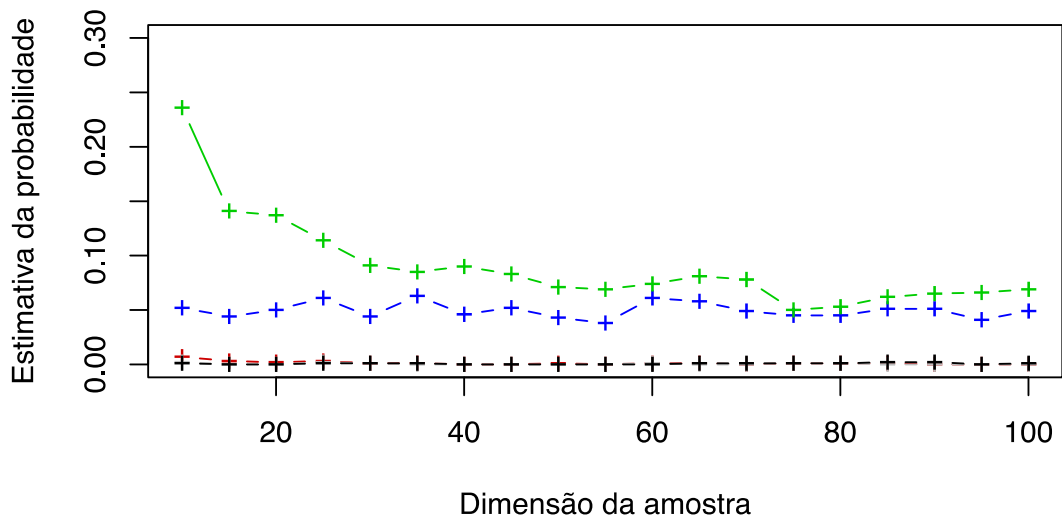


Figura 25: Comparação dos testes no PR com distribuição Weibull

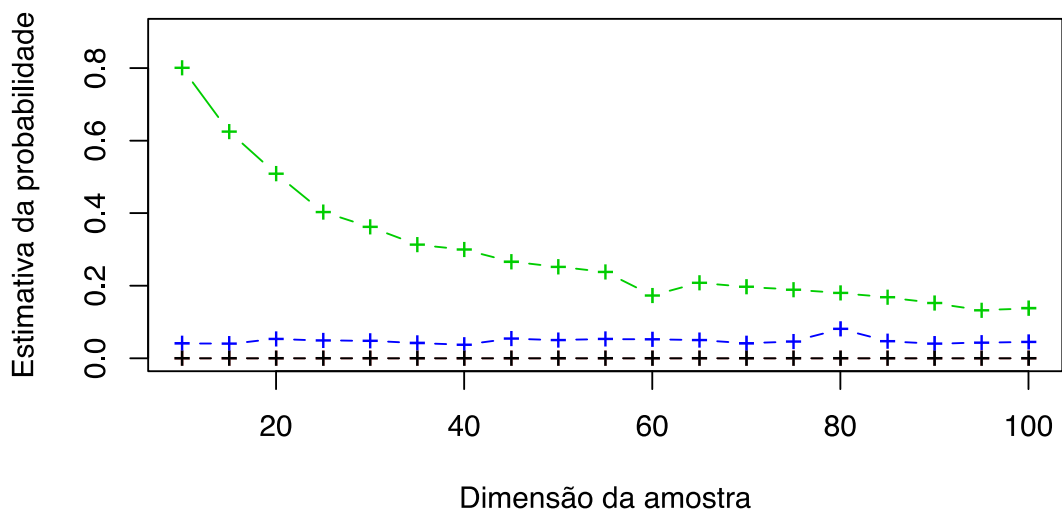


Figura 26: Comparação dos testes no PR com distribuição Normal

CONCLUSÕES

5.1 CONCLUSÕES

5.2 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

5 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Esse capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho desenvolvido e apresentado neste relatório. Apresenta ainda as limitações do estudo assim com algumas perspectivas de trabalho futuro.

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho tinha como objetivo principal a comparação do desempenho de 5 testes de avaliação de existência de tendência de fiabilidade em sistemas únicos. Os testes estudados – teste de Laplace, teste de Mann, teste de Lewis-Robinson, teste de Crow e teste de Anderson-Darling – foram selecionados, entre outros existentes, pela sua popularidade científica e também prática. Os testes foram comparados em diferentes cenários de fiabilidade (constante, crescente e decrescente), tendo esta comparação considerado amostras de diversos tamanhos.

O trabalho foi desenvolvido em 2 fases. Numa primeira etapa, foram estudados e implementados processos estocásticos relevante na modelação dos tempos das ocorrências. Este estudo permitiu obter amostras de tempos de ocorrências que simulam diferentes cenários de fiabilidade. O PPH e o PR foram considerados na simulação de cenários com fiabilidade constante, enquanto que o PPNH com o modelo de Crow para a taxa instantânea de avarias, foi utilizado na simulação de cenários de fiabilidade não constante. Os resultados desta fase foram considerados com *input* da fase II do trabalho.

A segunda fase do trabalho incidiu na avaliação do desempenho dos 5 testes nos diferentes cenários simulados e no estudo do efeito do tamanho da amostra no desempenho dos testes. Neste estudo de simulação foram consideradas amostras de dimensão igual a 20, por se considerar ser um valor realista no sentido de representatividade dos tamanhos das amostras encontradas em situação práticas. As principais conclusões desta segunda etapa foram as seguintes:

- Em cenários de fiabilidade constante, simulados a partir de PPH, os 5 testes apresentam um desempenho muito bom e semelhante (mais de 90% de decisões corretas em todos os testes). Observou-se uma ligeira superioridade do teste de Anderson-Darling e uma ligeira inferioridade do teste de Lewis-Robinson. Os outros 3 testes revelaram um desempenho muito semelhante.
- Em cenários de fiabilidade crescente, simulados a partir de PPNH com $\beta = 0.5$ no modelo de Crow, os 5 testes apresentam um desempenho fraco. Os testes de Laplace e de Lewis-Robinson foram os que apresentaram melhor desempenho

mas permitiram decidir corretamente em apenas, aproximadamente, 50% dos casos.

- Em cenários de fiabilidade decrescente, simulados a partir de PPNH com $\beta = 1.5$ no modelo de Crow, os 5 testes apresentam também um desempenho fraco. Esta conclusão é comum a todos os testes, embora este mau desempenho tenha sido mais evidente no teste de Lewis-Robinson.
- Em cenários de fiabilidade constante, simulados a partir de PR, o desempenho foi muito bom e semelhante em 4 dos 5 testes. Neste cenário o teste de Lewis-Robinson destacou-se pela negativa. Os testes de Laplace, de Crow e de Anderson-Darling apresentaram taxas de rejeições erradas perto de 0 (mesmo 0 para alguns testes). O teste de Mann revelou também um bom desempenho, sendo a taxa de decisões erradas da ordem dos 5%.

No que respeita ao estudo sobre o efeito do tamanho da amostra no desempenho do teste, foi possível concluir o seguinte:

- Em cenários de fiabilidade constante, simulados a partir de PPH, a dimensão da amostra tem um efeito pequeno no desempenho dos testes, pois para os testes analisados, a estimativa da probabilidade de rejeitar H_0 (neste caso não se deveria rejeitar H_0) mais ou menos constante. Querendo adiantar o pior teste e o melhor teste, seriam referidos, respectivamente, o teste de Lewis-Robinson e o teste de Anderson-Darling generalizado.
- Em cenários de fiabilidade constante, simulados a partir de PPH, a dimensão da amostra tem um efeito pequeno nos testes Laplace e Lewis-Robinson, pois para estes dois testes a estimativa da probabilidade de rejeitar H_0 (neste caso não se deveria rejeitar H_0) é maior na presença de amostras pequenas.
- Em cenários de fiabilidade constante, simulados a partir de PR, a dimensão da amostra tem um efeito evidente apenas para o teste de Lewis-Robinson. Nos outros casos, a estimativa da probabilidade de erro é praticamente constante ao longo do tamanho da amostra.
- Em cenários de fiabilidade não constante, simulados a partir de PPNH, no caso de fiabilidade crescente, observasse um mau desempenho dos 5 testes estudados. Para amostras grandes amostras grandes ($n > 60$) a probabilidade de erro é < 0.2 em 4 testes dos 5 testes.
- Em cenários de fiabilidade não constante, simulados a partir de PPNH, no caso de fiabilidade decrescente, para amostras pequenas os 5 testes apresentaram um mau desempenho. Neste caso, o teste de Crow apresentou um bom desempenho e o teste Mann apresentou um mau desempenho neste caso e no caso de fiabilidade crescente. Para amostras grandes ($n > 40$) todos os testes têm um bom desempenho.

Em suma, considerando os resultados de simulação, o teste de Anderson-Darling generalizado seria o recomendado para uso geral. Contudo este teste revelou fraco desempenho no cenário de fiabilidade não constante, destacando-se pela positiva em todos os outros cenários. O teste de Laplace e o teste de Crow apresentaram um desempenho bastante razoável, no geral. Já os outros dois testes revelaram-se bons em alguns cenários e maus noutros.

É de salientar que, para amostras de dimensão pequena e fiabilidade não constante, todos os testes revelaram mau desempenho. Na verdade, esta conclusão não nos surpreendeu, pois com poucos valores não é fácil detectar tendências.

5.2 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

Uma das limitações deste estudo prende-se com a simulação de cenários de fiabilidade não constante. Neste trabalho foi apenas considerado o modelo de Crow para a taxa instantânea de ocorrências. A utilização de outros modelos permitiria obter, certamente, conclusões mais fundamentadas. A elaboração de um estudo de simulação mais alargado com outros cenários, constitui uma perspectiva interessante de trabalho futuro.

**BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES
DE INFORMAÇÃO**

6 BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

ANDERSON, T. W. e DARLING, D. A, **A test of goodness of fit**. Journal of the American Statistical Association, 49, No. 268, pp. 765-769, dezembro de 1954.

ANTOCH, Jaromír & JARUSKOVÁ, Daniela, **Testing a homogeneity of stochastic processes**, Kybernetika, 43(4), pp 415-430, 2007.

BORGES, Alexandra Isabel Monteiro, **Análise de Sobrevivência com o R**, tese de mestrado, Universidade da Madeira, setembro 2014

BOTHWELL, R., DONTAMSETTY, R., KANIA, Z. and WESOLOSKI, R., **Reliability Evaluation: Field Experience From Motorola's Cellular Base Transceiver Systems**, in Proceedings, 1996.

BURNECKI, Krzysztof e WERON, Rafal, **Simulation of Risk Processes**, Wroclaw University of Technology, Poland. Disponível em < https://mpra.ub.uni-muenchen.de/25444/2/MPRA_paper_25444.pdf>, 2010

CHEN, Colin, **Test of fit for the three-parameter lognormal distribution. Computational Statistics & Data Analysis**. Journal Computational Statistics & Data Analysis, 50, Issue 6, pp. 1418-1440, março de 2006.

CROW, L.H., **Reliability Analysis for Complex Repairable Systems**, Reliability & Biometry, Statistical analysis of lifelength, SIAM, pp. 379 – 410, 1974.

DE OLIVEIRA, João Luís Ribeiro, **Developing a reliability program for maintenance and operation**, Instituto Superior Técnico - Departamento de Engenharia Aeroespacial Avenida Rovisco Pais, 1096-001 Lisboa, Portugal. Disponível em < <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1126295043834548/Extended%20Abstract.pdf>>.

DEPARTMENT OF DEFENSE, United States of America, **Department of Defense Handbook Reliability Growth Management**, MIL-HDBK-189C. Disponível em < http://www.barringer1.com/mil_files/MIL-HDBK-189C.pdf>, 14 de junho de 2011.

DUANE, J. T., **Learning Curve Approach to Reliability Monitoring**, IEEE Transactions on Aerospace, 2, 563-566, 1964.

FREIND, H, **Reliability growth test planning, in Proceedings of the 41st Technical Meeting**, Institute of Environmental Sciences, IES, pp. 104-110, 1995.

GUSTIN, Sara, **Investigation of some tests for homogeneity of intensity with applications to insurance data**, Uppsala University. Disponível em < <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:468559/FULLTEXT01.pdf>>, dezembro de 2011.

KVALOY, Jan Terje e LINDQVIST, Bo Henry & MALMEDAL, **A Statistical test for Monotonic and Non-Monotonic trend in Repairables Systems**, Department of Mathematical Sciences, Stavanger University College and Norwegian University of Science and Technology, Norway. Conference Proceedings ESREL, Torino, 16-20, pp. 1563-1570, 2001.

KVALOY, Jan Terje e LINDQVIST, Bo Henry, **TTT based tests for trend in repairable systems data**, Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Reliability Engineering and System Safety, 60, pp. 13-28, 1998.

LIMNIOS, Nikolaos e IONESCU, Dumitru Cezar, **Statistical and Probabilistic Models in Reliability**, Springer Science, 1999.

PEDROSA, António Carvalho e GAMA, Sílvio Marques A., **Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística**, Porto Editora, janeiro de 2016.

Poisson Process Generation. Disponível em < <http://www.math.wsu.edu/faculty/genz/416/lect/l05-45.pdf>>, acessado em agosto de 2017.

RICARTE, Ivan Luiz Marques, **Material Didático – R Software Estatístico**, Unicamp. Disponível em < <https://pt.slideshare.net/ivanricarte/r-software-estatistico>>, 2016

RK, **Simulation of Non-Homogeneous Poisson Processes.** Disponível em < <http://radhakrishna.typepad.com/simulating-nonhomogeneous-poisson-process.pdf>>, 20 de abril de 2015.

SITE R- Project, Disponível em < <https://www.r-project.org/>> . > acessado em setembro de 2017.

STEPHENS, Kenneth S., **Reliability Data Analysis with Excel and Minitab**, Kindle Edition, Amer Society for Quality; Edição Har/Cdr, novembro de 2011.

SUKHWANI, Harish, ALONSO, Javier, TRIVEDI, Kishor S., MCGINNIS, Issac, **Software Reliability Analysis of NASA Space Flight Software: A Practical Experience**, Software Quality, Reliability and Security (QRS), IEEE International Conference on, Vienna, Austria. Disponível em <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7589818/>>, agosto de 2016.

TIBOR, C, **Some Parameter-Free Tests for Trend and Their Application to Reliability Analysis**, Reliability Engineering and System Safety 41, pp.225-230, 1943.

WANG, Peng e COIT, David W., **Repairable Systems Reliability Trend Tests and Evaluation**, United Technologies Research Center e Rutgers University, Reliability and Maintainability Symposium, 2005

ANEXOS

7 ANEXOS

Esse anexo corresponde ao código, desenvolvido no *software* R, o qual serviu de base para o desenvolvimento desse trabalho.

```
# Código para gerar um processo de Poisson homogêneo no R limitado
pelo tempo
# lambda - função intensidade (constante)
# tmax - limite superior do intervalo de tempo
pph<-function(lambda,tmax){
  u<-runif(1, min = 0, max = 1)
  tempo<-(-log(u))/lambda
  n<-0
  X<-NULL
  while(tempo<tmax) {
    n<-n+1
    X[n]<-tempo
    u<-runif(1, min = 0, max = 1)
    tempo<-tempo-log(u)/lambda
  }
  return(X)
}

### simular um pph limitado pelo número de avarias
pphmax<-function(lambda,nmax){
  u<-runif(1, min = 0, max = 1)
  tempo<-(-log(u))/lambda
  n<-0
  X<-NULL
  nocorrencia<-0
  while(nocorrencia<nmax) {
    n<-n+1
```

```
X[n]<-tempo
u<-runif(1, min = 0, max = 1)
tempo<-tempo-log(u)/lambda
nocorrencia<-nocorrencia+1
}
return(X)
}

# Código para gerar um processo de Poisson Não Homogeneo no R
limitado pelo tempo
# lambda - função intensidade (não constante)
# Tmax - limite superior do intervalo de tempo
ppnh<-function(Tmax){
#lambda=function(x) (0.015*x^(0.5))
lambda=function(x) (0.0015*x^(0.5))
Lambda=function(t) integrate(f=lambda,lower=0,upper=t)$value

n=rpois(1,Lambda(Tmax))
Ft=function(x) Lambda(x)/Lambda(Tmax)
Ftinv=function(u){
a=0
b=Tmax
for(j in 1:20){
if(Ft((a+b)/2)<=u){binf=(a+b)/2;bsup=b}
if(Ft((a+b)/2)>=u){bsup=(a+b)/2;binf=a}
a=binf
b=bsup
}
return((a+b)/2)
}
X0=rep(NA,n)
for(i in 1:n){
X0[i]=Ftinv(runif(1))
```

```
}
X=sort(X0)
return(X)
}

# Código para gerar um processo de Poisson Não Homogeneo no R
limitado

#pelo numero de avarias

ppnhnmax<-function(Tmax,nmax) {
  lambda1=function(x) (1.5*x^(-0.5))
  #lambda=function(x) (0.5*x^(0.5))
  #lambda1=function(x) (1)
  lambda <- Vectorize(lambda1, "x")
  Lambda=function(t) integrate(f=lambda,lower=0,upper=t)$value
  n=rpois(1,Lambda(Tmax))
  Ft=function(x) Lambda(x)/Lambda(Tmax)
  Ftinv=function(u) {
    a=0
    b=Tmax
    for(j in 1:20){
      if(Ft((a+b)/2)<=u) {binf=(a+b)/2;bsup=b}
      if(Ft((a+b)/2)>=u) {bsup=(a+b)/2;binf=a}
      a=binf
      b=bsup
    }
    return((a+b)/2)
  }
  X0=rep(NA,n)
  for(i in 1:n){
    X0[i]=Ftinv(runif(1))
  }
  X=sort(X0)
}
```

```
X<-X[1:nmax]
return(X)
}
# Código para gerar um processo de renovação no R
# lambda - função intensidade (constante)
# Tmax - limite superior do intervalo de tempo
# distribuição dos tempos entre falhas:
#### 1 - distribuição exponencial
#### 2 - distribuição weibull
#### 3 - distribuição normal

pr<-function(dist,tmax){
  X<-NULL
  n<-1
  if (dist==1) {
    tempo<-0
    X[n]<-tempo
    while(tempo<tmax) {
      n<-n+1
      X[n]<-X[n-1]+rexp(1,0.1)
      tempo<-X[n]
    }
    return(X[2:length(X)])
  }

  if (dist==2) {
    tempo<-0
    X[n]<-tempo
    while(tempo<tmax) {
      n<-n+1
      X[n]<-X[n-1]+rweibull(1,2,15)
      tempo<-X[n]
    }
  }
}
```

```
    }
    return(X[2:length(X)])
}
if (dist==3) {
  tempo<-0
  X[n]<-tempo
  while(tempo<tmax) {
    n<-n+1
    X[n]<-X[n-1]+rnorm(1,10,2)
    tempo<-X[n]
  }
  return(X[2:length(X)])
}
}

# Código para gerar um processo de renovação no R limitado pelo
# número de avarias
# lambda - função intensidade (constante)
# nmax - limite superior do intervalo de tempo
# distribuição dos tempos entre falhas:
#### 1 - distribuição exponencial
#### 2 - distribuição weibull
#### 3 - distribuição normal

prnmax<-function(dist,nmax){
  X<-NULL
  n<-1
  if (dist==1) {
    tempo<-0
    X[n]<-tempo
    nocorrencias<-0
    while(nocorrencias<nmax) {
      n<-n+1
```

```
    X[n]<-X[n-1]+rexp(1,0.1)
    tempo<-X[n]
    nocorrencias<-nocorrencias+1
  }
  return(X[2:length(X)])
}
```

```
if (dist==2) {
  tempo<-0
  X[n]<-tempo
  nocorrencias<-0
  while(nocorrencias<nmax) {
    n<-n+1
    X[n]<-X[n-1]+rweibull(1,2,15)
    tempo<-X[n]
    nocorrencias<-nocorrencias+1
  }
  return(X[2:length(X)])
}
```

```
if (dist==3) {
  tempo<-0
  X[n]<-tempo
  nocorrencias<-0
  while(nocorrencias<nmax) {
    n<-n+1
    X[n]<-X[n-1]+rnorm(1,10,2)
    tempo<-X[n]
    nocorrencias<-nocorrencias+1
  }
  return(X[2:length(X)])
}
```

```
}  
  
}  
  
#####  
#representação dos processos  
## PPH  
tempos.avarias<-pphnmax(0.5,20)  
n.avarias<-length(tempos.avarias)  
plot(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),           xlab="Tempo  
(u.t.)",pch="+",pty = "s",ylab="N(t)",type = "b")  
  
tempos.avarias<-pphnmax(1,20)  
n.avarias<-length(tempos.avarias)  
points(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),type    =  
"b",col="red",pch="+")  
  
tempos.avarias<-pphnmax(5,20)  
n.avarias<-length(tempos.avarias)  
points(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),type    =  
"b",col="blue2",pch="+")  
  
#representação dos processos  
## PPNH  
  
tempos.avarias<-ppnhnmax(500,20)  
n.avarias<-length(tempos.avarias)  
plot(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),           xlab="Tempo  
(u.t.)",pch="+",pty = "s",ylab="N(t)",type = "b")
```

```
tempos.avarias<-ppnhnmax(500,20)
n.avarias<-length(tempos.avarias)
points(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),type = "b",pch="+")

tempos.avarias<-ppnhnmax(500,20)
n.avarias<-length(tempos.avarias)
points(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),type =
"b",col="blue2",pch="+")

#representação dos processos
## PR
tempos.avarias<-pr(1,500)
n.avarias<-length(tempos.avarias)
plot(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),
(u.t.)",pch="+",pty = "s",ylab="N(t)",type = "b") xlab="Tempo

tempos.avarias<-pr(2,500)
n.avarias<-length(tempos.avarias)
points(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),type =
"b",col="red",pch="+")

tempos.avarias<-pr(3,500)
n.avarias<-length(tempos.avarias)
points(tempos.avarias,seq(1,n.avarias),type =
"b",col="blue2",pch="+")

#####
# teste de Laplace
etlv<-NULL
# teste Mann (ou PCTM é o mesmo)
etmanv<-NULL
# teste Luis Robison
```

```
etlrv<-NULL
# teste de Crow
etcrowv<-NULL
# teste de Anderson-Darling
etadv<-NULL
# teste de Anderson-Darling generalizado
etadgv<-NULL

nal<-0
naman<-0
nalr<-0
nacrow<-0
naad<-0
naadg<-0

for(i in 1:1000){
# processo PH
#S<-ppnhnmax(1000,20)

#processo de PNH
#S<-ppnhnmax(100,20)

# processo de renovação
S<-prnmax(2,20)

dimensao<-length(S)
# apenas serão executados os testes com amostras >5
#if (dimensao >5) {

# Teste de Laplace
etl<-sqrt(12*length(S))*(sum(S)/(S[length(S)]*length(S))-0.5)
```

```
etlv[i]<-etl

if (etl>qnorm(0.025) & etl<qnorm(0.975)) {nal<-nal+1}

# Teste Mann ou PCTM

X<-diff(S)
nX<-length(X)-1
nx<-length(X)
sman<-0
for (k in 1:nX){
  aux<-k+1
  for (l in aux:nx){
    if (X[k]<X[l]) {sman<-sman+1}
  }
}
nX<-length(X)
mediasman<-(nX*(nX-1))/4
varman<-(2*nX^3+3*nX^2-5*nX)/72
etman<-(sman-mediasman)/sqrt(varman)
etmanv[i]<-etman
if (etman>qnorm(0.025) & etman<qnorm(0.975)) {naman<-naman+1}

# Teste Lewis-Robinson
media<-mean(diff(S))
desp<-sd(diff(S))
cv<-desp/media
etlr<-etl/cv
etlrv[i]<-etlr
if (etlr>qnorm(0.025) & etlr<qnorm(0.975)) {nalr<-nalr+1}

# Teste de Crow
```

```

tn<-S[length(S)]
betaestimado<-length(S)/(sum(log(tn/S)))
etcrow<-(2*length(S))/betaestimado
etcrowv[i]<-etcrow
if      (etcrow>qchisq(0.025,2*(length(S)-1))      &
etcrow<qchisq(0.975,2*(length(S)-1)))    {nacrow<-nacrow+1}

# Teste Anderson Darling
auxi<-seq(1:(length(S)-1))
Tn<-S[length(S)]
xbar=Tn/length(S)
etad<-(1/xbar^2)*sum((1/(auxi*(length(S)-
auxi)))*(S[1:(length(S)-1)]-(auxi/length(S))*S[length(S)])^2)
etadv[i]<-etad
if (etad<2.492)    {naad<-naad+1}

# Teste Anderson Darling generalizado

Tn<-S[length(S)]
xbar=Tn/length(S)
ri<-((length(S)*diff(S))/Tn)-1
qi<-(S[1:(length(S)-1)]-auxi*diff(S))/Tn
sigma2<-1/(2*(length(S)-1))*sum((diff(S))^2)
auxiliar1<-(length(S)-4)*xbar^2/sigma2
auxiliar2<-qi^2*log(auxi/(auxi-1))
auxiliar2[1]<-0
auxiliar3<-(qi+ri)^2*log((length(S)-auxi+1)/(length(S)-auxi))-
ri^2/length(S)
etadg<-auxiliar1*sum(auxiliar2+auxiliar3)
etadv[i]<-etadg
if (etadg<2.492)    {naadg<-naadg+1}
}
#}

```

```
nal
naman
nalr
nacrow
naadg
#Representação gráfica da estatística de teste
# Teste de Laplace
par(mfrow=c(3,2))
hist(etlv, col="red",
      xlab="Valores da ET Laplace",ylab="Número de
simulações",main="")

# Teste de Mann
hist(etmanv, col="red",
      xlab="Valores da ET Mann",ylab="Número de
simulações",main="")

# Teste de Lewis-Robinson
hist(etlrsv, col="red",
      xlab="Valores da ET Lewis & Robinson",ylab="Número de
simulações",main="")

# Teste de Crow
hist(etcrowv, col="red",
      xlab="Valores da ET Crow",ylab="Número de
simulações",main="")

# Teste de Anderson Darling
hist(etadgv, col="red",
      xlab="Valores da ET Anderson & Darling",ylab="Número de
simulações",main="")
```

```
##### EXTRA #####  
#####  
prl<-NULL  
prman<-NULL  
prlr<-NULL  
prcrow<-NULL  
prad<-NULL  
pradg<-NULL  
ns<-0  
  
for(dimamostra in seq(10, 100, 5)){  
  
# teste de Laplace  
etlv<-NULL  
# teste Mann (ou PCTM é o mesmo)  
etmanv<-NULL  
# teste Luis Robison  
etlrv<-NULL  
# teste de Crow  
etcrowv<-NULL  
# teste de Anderson-Darling  
etadv<-NULL  
# teste de Anderson-Darling generalizado  
etadgv<-NULL  
  
nal<-0  
naman<-0  
nalr<-0  
nacrow<-0  
naad<-0  
naadg<-0
```

```
for(i in 1:100){
  # processo PH
  S<-ppnhnmax(2000,dimamostra)
  #processo de PNH
  #S<-ppnh(5000)
  # processo de renovação
  #S<-pr(3,500)

  #dimensao<-length(S)
  # apenas serão executados os testes com amostras >5
  #if (dimensao >5) {

  # Teste de Laplace
  etl<-sqrt(12*length(S))*(sum(S)/(S[length(S)]*length(S))-0.5)
  etlv[i]<-etl
  if (etl>qnorm(0.025) & etl<qnorm(0.975)) {nal<-nal+1}

  # Teste Mann ou PCTM
  X<-diff(S)
  nX<-length(X)-1
  nx<-length(X)
  sman<-0
  for (k in 1:nX){
    aux<-k+1
    for (l in aux:nx){
      if (X[k]<X[l]) {sman<-sman+1}
    }
  }
  nX<-length(X)
  mediasman<-(nX*(nX-1))/4
  varman<-(2*nX^3+3*nX^2-5*nX)/72
```

```

etman<- (sman-mediasman) /sqrt (varman)
etmanv[i]<-etman
if (etman>qnorm(0.025) & etman<qnorm(0.975)) {naman<-naman+1}

# Teste Lewis-Robinson
media<-mean(diff(S))
desp<-sd(diff(S))
cv<-desp/media
etlr<-etl/cv
etlrv[i]<-etlr
if (etlr>qnorm(0.025) & etlr<qnorm(0.975)) {nalr<-nalr+1}

# Teste de Crow

#S<-ppnhnmax(100000,100)

tn<-S[length(S)]
betaestimado<-length(S) / (sum(log(tn/S)))
etcrow<- (2*length(S)) /betaestimado
#etcrow
etcrowv[i]<-etcrow
if (etcrow>qchisq(0.025,2*(length(S)-1)) &
etcrow<qchisq(0.975,2*(length(S)-1))) {nacrow<-nacrow+1}

# Teste Anderson Darling
auxi<-seq(1:(length(S)-1))
Tn<-S[length(S)]
xbar=Tn/length(S)
etad<- (1/xbar^2) *sum((1/(auxi*(length(S)-
auxi))) * (S[1:(length(S)-1)] - (auxi/length(S)) *S[length(S)] ) ^2)
etadv[i]<-etad
if (etad<2.492) {naad<-naad+1}

```

```

# Teste Anderson Darling generalizado

Tn<-S[length(S)]
xbar=Tn/length(S)
ri<-((length(S)*diff(S))/Tn)-1
qi<-(S[1:(length(S)-1)]-auxi*diff(S))/Tn
sigma2<-1/(2*(length(S)-1))*sum((diff(S))^2)
auxiliar1<-(length(S)-4)*xbar^2/sigma2
auxiliar2<-qi^2*log(auxi/(auxi-1))
auxiliar2[1]<-0
auxiliar3<-(qi+ri)^2*log((length(S)-auxi+1)/(length(S)-auxi))-
ri^2/length(S)
etadg<-auxiliar1*sum(auxiliar2+auxiliar3)
etadgv[i]<-etadg
if (etadg<2.492) {naadg<-naadg+1}
}

#aux3<-length(seq(10, 100, 5))
ns<-ns+1
#prl[ns]<-(1000-nal)/1000
#prman[ns]<-(1000-naman)/1000
#prlr[ns]<-(1000-nalr)/1000
#prcrow[ns]<-(1000-nacrow)/1000
#prad[ns]<-(1000-naad)/1000
#pradg[ns]<-(1000-naadg)/1000

prl[ns]<-(nal)/100
prman[ns]<-(-naman)/100
prlr[ns]<-(nalr)/100
prcrow[ns]<-(nacrow)/100
prad[ns]<-(naad)/100
pradg[ns]<-(naadg)/100
}

```

```
plot(seq(10, 100, 5),prl,ylim=c(0,0.9),type =
"b",col="red3",pch="+",
      xlab = "Dimensão da amostra", ylab="Estimativa da
probabilidade" )
points(seq(10, 100, 5),prman,type = "b",col="blue",pch="+" )

points(seq(10, 100, 5),prlr,type = "b",col="green3",pch="+" )
points(seq(10, 100, 5),prcrow,type = "b",col="gray",pch="+" )
#points(seq(10, 100, 5),prad,type = "b",col="black",pch="+" )
points(seq(10, 100, 5),pradg,type = "b",col="black",pch="+" )
```