



Análise estrutural de um quadro tubular de um veículo de Formula SAE recorrendo ao método dos elementos finitos

ABEL JOAQUIM MACHADO SEABRA

julho de 2026



Analise estrutural de um quadro tubular de um veiculo de Formula SAE recorrendo ao metodo dos elementos finitos

ABEL JOAQUIM MACHADO SEABRA

Junho de 2026

**Análise estrutural de um quadro
tubular de um veículo de Formula
SAE recorrendo ao método dos
elementos finitos**

Abel Joaquim Machado Seabra

**Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Automóvel**

Orientador: Professor Doutor Jorge Américo de Oliveira Pinto Belinha

Co-Orientador: Professor Doutor Daniel do Espírito Santo Rodrigues

Declaração de Integridade

Declaro ter conduzido este trabalho académico com integridade.

Não plagiei ou apliquei qualquer forma de uso indevido de informações ou falsificação de resultados ao longo do processo que levou à sua elaboração.

Portanto, o trabalho apresentado neste documento é original e de minha autoria, não tendo sido utilizado anteriormente para nenhum outro fim.

Declaro ainda que tenho pleno conhecimento do Código de Conduta Ética do P.PORTO.

ISEP, Porto, 27 de julho de 2026

O Autor,

Abel Seabra

Resumo

Nas competições de Formula Student, não basta a equipa construir um quadro tubular seguro, é obrigatório prová-lo matematicamente. O regulamento exige a submissão de uma Structural Equivalency Spreadsheet (SES), um documento onde a equipa deve demonstrar, através de cálculo estrutural, que o seu chassis iguala ou supera a rigidez e resistência de uma estrutura de referência definida pelo regulamento, sob pena de reprovação técnica antes mesmo do carro chegar à pista. Este contexto é precisamente onde a análise estrutural deixa de ser uma boa prática para se tornar um requisito de admissão à competição, que o Método dos Elementos Finitos (MEF) se torna indispensável. Só através da simulação numérica é possível prever, com rigor suficiente, o comportamento de uma estrutura tubular irregular sujeita a carregamentos combinados de impacto, torção e flexão.

Este trabalho desenvolve-se ao longo de duas vertentes complementares. A primeira consiste numa revisão estruturada do estado da arte dos métodos numéricos de análise estrutural não linear aplicada a estruturas tubulares, abrangendo formulações incrementais-iterativas, não linearidade geométrica, não linearidade material e fenómenos de instabilidade estrutural. A segunda frente consiste na aplicação prática destes conceitos à análise e otimização de um chassis tubular para um protótipo Formula Student Eléctrico, através de simulação por elementos finitos utilizando o software *SolidWorks Simulation*. O modelo foi discretizado com elementos de viga e sujeito a um estudo de convergência de malha, fixando o tamanho global do elemento em 10 mm como um compromisso entre precisão e custo computacional. Foram realizadas análises estáticas de impactos frontal e lateral, análises de rigidez torcional nos eixos dianteiro e traseiro, e análises modais com o chassis livre e carregado.

O chassis original, com um peso de 56 kg, demonstrou estar estruturalmente sobredimensionado em todos os cenários de carga analisados, com valores de tensão combinada máxima muito abaixo do limite de cedência do material, apresentando níveis de tensão muito baixos nos seus membros. Consequentemente, foi realizada uma otimização geométrica da estrutura, resultando numa redução de massa de 16 kg em comparação com o chassis original. Isto foi alcançado sem comprometer a integridade estrutural do chassis e sem modificar a triangulação. Embora se tenha observado uma diminuição na rigidez torcional, o seu valor continua a ser considerado ótimo pela literatura.

Palavras-chave: Métodos de Elementos Finitos, Análise não Linear, Não Linearidade Geométrica e Material, Quadros Tubulares, Treliças Espaciais, Otimização Estrutural

Abstract

In Formula Student competitions, it is not enough for a team to build a safe tubular frame, they are required to prove it mathematically. The regulations mandate the submission of a Structural Equivalency Spreadsheet (SES), a document in which the team must demonstrate, through structural calculation, that its chassis matches or exceeds the stiffness and strength of a reference structure defined by the rulebook, under penalty of technical rejection before the car even reaches the track. It is precisely in this context, where structural analysis ceases to be good practice and becomes a requirement for admission to the competition, that the Finite Element Method (FEM) becomes indispensable. Only through numerical simulation is it possible to predict, with sufficient accuracy, the behavior of an irregular tubular structure subjected to combined loading from impact, torsion, and bending.

This work is developed along two complementary fronts. The first consists of a structured review of the state of the art of numerical methods for non-linear structural analysis applied to tubular structures, encompassing incremental-iterative formulations, geometric non-linearity, material non-linearity, and structural instability phenomena. The second front consists of the practical application of these concepts to the analysis and optimization of a tubular frame for a Formula Student Electric prototype, through finite element simulation using SolidWorks Simulation software. The model was discretized with beam elements and subjected to a mesh convergence study, fixing the global element size at 10 mm as a compromise between accuracy and computational cost. Static analyses of frontal and lateral impacts, torsional stiffness analyses on the front and rear axles, and modal analyses with both free and loaded frames were performed.

The original frame, weighing 56 kg, proved to be structurally oversized in all analyzed load scenarios, with maximum combined stress values well below the material's yield strength, showing very low stress levels in its members. Consequently, a geometry optimization of the structure was carried out, resulting in a mass reduction of 16 kg compared to the original frame. This was achieved without compromising the structural integrity of the chassis and without modifying the triangulation. Although a decrease in torsional stiffness was observed, its value is still considered optimal by the literature.

Keywords: Finite Element Method, Nonlinear Analysis, Geometric and Material Nonlinearity, Tubular Frames, Space Trusses, Structural Optimization

Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Abreviações	xvii
Lista de Símbolos	xix
1 Introdução	1
1.1 Contextualização e Enquadramento	1
1.2 Motivação	1
1.3 Objetivos	2
1.4 Estrutura	2
2 Aplicações do Método de Elementos Finitos	3
2.1 Introdução	3
2.2 Métodos Incrementais–Iterativos	3
2.2.1 Newton-Raphson e Variantes	4
2.2.2 Métodos de Comprimento de Arco	6
2.2.3 Métodos Baseados em Resíduos, Energia e Outras Formulações	8
2.3 Não Linearidade Geométrica	10
2.3.1 Grandes Deslocamentos e Rotações	10
2.3.2 Efeitos de Segunda Ordem	12
2.4 Não Linearidade Material	13
2.4.1 Elasto-plasticidade	14
2.4.2 Rótulas Plásticas	15
2.4.3 Zonas Plásticas	16
2.5 Encurvadura e Pós-Encurvadura	17
2.5.1 Encurvadura	18
2.5.2 Pós-Encurvadura	19
2.5.3 Instabilidade por Salto e Instabilidade por Recuo	21
2.6 Estruturas Espaciais	22
2.6.1 Modelação de Elementos Viga-Coluna em 3D	23
2.6.2 Efeitos de Torção, Flexo-Torção e Instabilidade Espacial	24
2.6.3 Ligações Semi-Rígidas	25
2.7 Contexto e Versatilidade: Civil e Aeroespacial	26
2.8 Engenharia Automóvel	28
3 Método dos Elementos Finitos	35
3.1 Sistemas Discretos	35
3.1.1 Elementos de barra	35

3.1.2	Equilíbrio nos nós	36
3.1.3	Procedimento Geral do FEM	37
3.2	Elementos Unidimensionais	37
3.2.1	Um Elemento de Barra	37
3.2.2	Cálculo da Tensão	42
3.2.3	Integração Numérica	43
3.3	Elementos de Barra Bidimensionais	44
3.3.1	Treliças no Espaço 2D	44
3.3.2	Matriz de Rigidez	45
3.3.3	Matriz de Massas	46
3.3.4	Pós-cálculo da Tensão	47
3.4	Elementos de barra Tridimensionais	47
3.4.1	Formulação Básica	47
3.5	Viga de Bernoulli	49
3.6	Pórticos de Bernoulli 2D	52
3.6.1	Elemento de Pórtico 2D	52
3.7	Pórticos de Bernoulli 3D	54
3.7.1	Matriz de transformação no espaço 3D	54
3.7.2	Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Nodais Equivalentes	56
3.7.3	Matriz de Massas	57
4	Análise Computacional do Quadro FSAE	59
4.1	O Modelo CAD e Propriedades do Material	59
4.1.1	Modelação Geométrica do quadro	59
4.1.2	Propriedades do Material	61
4.2	Cálculo da Tensão Máxima Combinada	62
4.3	Discretização do Modelo e Convergência de Malha	63
4.4	Análise de compressão Frontal	64
4.5	Análise de compressão lateral	68
4.6	Análise de Rigidez Torcional	72
4.7	Análise Modal	82
4.8	Estratégia de Otimização	85
4.9	Análise de compressão Frontal (quadro otimizado)	88
4.10	Análise de compressão Lateral (quadro otimizado)	91
4.11	Análise de Rigidez Torcional (quadro otimizado)	93
4.12	Análise Modal (quadro otimizado)	100
4.13	Considerações Finais	103
5	Conclusão	105
5.1	Conclusões Gerais	105
5.2	Limitações do Estudo	106
5.3	Trabalhos Futuros	107
6	Apendice A	109
6.1	Chassis original	109
6.2	Chassis com secções otimizadas	118
	Bibliografia	127

Lista de Figuras

2.1	Número de publicações na base de dados ScienceDirect que incluem o termo “Finite Element Method”.	3
2.2	Técnica com Newton-Raphson modificado; Fonte: (Crisfield 1981)	4
2.3	Esquema de funcionamento do método; Adaptado de: (Cosgun e Sayin 2014)	5
2.4	Momentos seccionais induzidos devido à rotação de momentos representados por diferentes braços de nível; Adaptado de: (Wen, Q. Tan e Chen 2019)	6
2.5	Representação esquemática da restrição do método de comprimento de arco; Fonte: https://www.researchgate.net .	7
2.6	Cinemática do elemento de barra na formulação posicional; Fonte: Greco et al. 2006	9
2.7	Modos de encurvadura de um arco; Fonte: (Pi e Bradford 2003)	11
2.8	Trajectoria de equilíbrio da treliça de von Mises, mostrando o fenómeno de <i>snap-through</i> ; Fonte: (Greco et al. 2006)	13
2.9	Modelo constitutivo elasto-plástico com endurecimento bilinear; Adaptado de: (Greco et al. 2006)	15
2.10	Modelo de pórtico metálico com ligações viga-pilar semi-rígidas; Fonte: (Ngo-Huu, Nguyen e Kim 2012)	16
2.11	Relação momento-curvatura-força axial com comportamento elasto-plástico suave do tipo Ramberg-Osgood; Fonte: (Barsan e Chiorean 1999)	17
2.12	Comparação entre curvas carga-deslocamento obtidas experimentalmente e por análise não linear com plasticidade distribuída; Fonte: (Hori e Sasagawa 2000)	18
2.13	Trajectoria carga-deslocamento do pórtico <i>toggle frame</i> ; Fonte: (Papadrakis 1981)	19
2.14	Trajectoria de equilíbrio não linear com ocorrência de <i>snap-through</i> e <i>snap-back</i> , ilustrando o seguimento pós-crítico por método explícito de comprimento de arco com origem móvel; Fonte: (K. S. Lee, S. E. Han e Park 2011)	20
2.15	Trajectoria carga-deslocamento do pórtico <i>toggle frame</i> ; Fonte: (Papadrakis 1981)	20
2.16	Trajectoria de equilíbrio pós-crítica carga-deslocamento com ocorrência de <i>snap-back</i> ; Adaptado de: (K. Lee, S. Han e Hong 2014)	21
2.17	Disposição geral da Terceira Ponte de Pingnan, (a) Disposição geral (unidades: m), (b) diagrama da secção do arco principal (unidades: mm); Fonte: (Zheng et al. 2021).	27
2.18	<i>National Grand Theater</i> , (a) Modelo CAD, (b) Estrutura em construção; Fonte: (Dong, Zhao e Xing 2012).	27
2.19	Configuração <i>Treliça Espacial de suporte para fuselagem</i> ; Fonte: (Yousif, Zein e Elsayed 2012).	28
2.20	Configuração <i>Truss Braced Wing</i> ; Adaptado de: (Gur et al. 2010).	28
2.21	Configuração do Chassis; Fonte: (Nain e Sharma 2015).	29

2.22	Configuração do Chassis para Buggy; Fonte: (Seelam, Ahmed e Sachidananda 2020).	30
2.23	Chassis Tubular para veículo todo Terreno, (a) configuração 1, (b) configuração 2; Fonte: (Prabhu, Prashanth e Senthilkumar 2020).	31
2.24	Configuração do Chassis para Go kart; Fonte: (Srivastava et al. 2021).	32
2.25	Configuração do Chassis para veículo solar; Fonte: (Patel et al. 2022).	32
2.26	Chassis para veículo solar, (a) chassis fabricado, (b) veículo Solar Completo; Adaptado de: (Patel et al. 2022).	33
3.1	Elemento finito de barra com 2 nós	35
3.2	Um elemento de barra no seu sistema de coordenadas local	38
3.3	Elemento de barra com dois nós	39
3.4	Barra discretizada em 4 elementos	41
3.5	Quadratura de Gauss unidimensional para 2 e 1 pontos de integração	44
3.6	Elemento de Barra 2D: graus e liberdade locais e globais	44
3.7	Treliças em coordenadas 3D: sistemas de coordenadas local e global	48
3.8	Elemento de Viga de Bernoulli com 2 Nós	49
3.9	Um elemento de pórtico 2D	52
3.10	Um elemento de pórtico 3D	54
4.1	Modelo geométrico tridimensional do quadro tubular <i>Formula Student</i> (vista isométrica).	60
4.2	Vista lateral do quadro com medidas	60
4.3	Diâmetro usado nos tubos.	61
4.4	Espessura de parede usada nos tubos.	61
4.5	simulação utilizada para a convergência de malha	63
4.6	Curva de convergência de malha evidenciando a estabilização dos resultados.	64
4.7	Condições de fronteira no compressão frontal	65
4.8	Deslocamento resultante na simulação de compressão frontal	66
4.9	Distribuição de tensões axiais na simulação de compressão frontal	66
4.10	Distribuição de tensões máximas combinadas na simulação de compressão frontal	67
4.11	Componentes críticos da simulação de compressão frontal	68
4.12	Condições de fronteira no compressão lateral	69
4.13	Deslocamento resultante na simulação de compressão lateral	69
4.14	Distribuição de tensões axiais na simulação de compressão lateral	70
4.15	Distribuição de tensões máximas combinadas na simulação de compressão lateral	70
4.16	Local da singularidade	71
4.17	Componentes críticos da simulação de compressão lateral	72
4.18	Condições de fronteira na simulação de rigidez torcional no eixo dianteiro	74
4.19	Deslocamentos nos pontos de suspensão dianteiros; a: lado direito, b: lado esquerdo.	75
4.20	Distância entre os nós de maior deslocamento	76
4.21	<i>Plot</i> de tensões máximas combinadas	77
4.22	Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo dianteiro	78
4.23	Condições de fronteira na simulação de rigidez torcional no eixo traseiro	78
4.24	Deslocamentos nos pontos de suspensão traseiros; a: lado direito, b: lado esquerdo.	79

4.25	Distância entre os nós de maior deslocamento	80
4.26	<i>Plot</i> de tensões máximas combinadas	81
4.27	Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo traseiro	82
4.28	Oitavo modo de vibração, quadro carregado, 116,21 Hz	85
4.29	quadro com diferentes secções diferenciadas por cor	88
4.30	Deslocamento resultante na simulação de compressão frontal (FBH)	88
4.31	Componentes críticos da simulação de compressão frontal	89
4.32	Tensões máximas combinadas na simulação de compressão frontal (FBH)	90
4.33	Comparação do <i>Worst Case</i> , todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, compressão frontal	90
4.34	Deslocamento resultante na simulação de compressão lateral (FBH)	91
4.35	Componentes críticos da simulação de compressão lateral	92
4.36	Tensões máximas combinadas na simulação de compressão Lateral	92
4.37	Comparação do <i>Worst Case</i> , todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, compressão lateral	93
4.38	Deslocamentos nos pontos de suspensão dianteiros; a: lado direito, b: lado esquerdo. (quadro com novas secções)	94
4.39	Deslocamentos nos pontos de suspensão traseiros; a: lado direito, b: lado esquerdo. (quadro com novas secções)	95
4.40	<i>Plot</i> de tensões máximas combinadas, eixo dianteiro, quadro com secções otimizadas	96
4.41	Comparação do <i>Worst Case</i> , todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, eixo dianteiro	97
4.42	Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo dianteiro, quadro otimizado	98
4.43	<i>Plot</i> de tensões máximas combinadas, eixo traseiro, quadro com secções otimizadas	98
4.44	Comparação do <i>Worst Case</i> , todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, eixo traseiro	99
4.45	Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo dianteiro, quadro otimizado	100
4.46	Comparação dos modos de vibração, quadro livre, original vs com secções otimizadas	101
4.47	Comparação dos modos de vibração, quadro carregado, original vs com secções otimizadas	102

Lista de Tabelas

3.1	Coordenadas e pesos para integração de Gauss	43
4.1	Propriedades mecânicas do aço Docol R8 adotadas no modelo numérico. .	62
4.2	Resultados do estudo de convergência de malha para o ensaio de torção. .	64
4.3	Condições de fronteira para o ensaio de compressão frontal.	66
4.4	Esforços nos componentes críticos da simulação de compressão frontal (valores em MPa).	67
4.5	Esforços nos componentes críticos da simulação de compressão lateral (valores em MPa).	71
4.6	Condições de fronteira para o ensaio de rigidez torcional frontal.	74
4.7	Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional frontal (valores em MPa).	77
4.8	Condições de fronteira para o ensaio de rigidez torcional traseira.	79
4.9	Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional traseira (valores em MPa).	81
4.10	Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro Livre. .	84
4.11	Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro carregado.	84
4.12	Propriedades geométricas regulamentares por localização estrutural	86
4.13	Resultados do dimensionamento, tensões máximas combinadas, área atual, mínima e diâmetro mínimo requerido	87
4.14	Tensões nos componentes críticos da simulação de compressão frontal (valores em MPa).	89
4.15	Esforços nos componentes críticos da simulação de compressão lateral (valores em MPa).	91
4.16	Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional frontal, quadro com novas secções (valores em MPa).	97
4.17	Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional traseira (valores em MPa).	99
4.18	Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro livre com secções otimizadas.	101
4.19	Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro carregado com secções otimizadas.	102
6.1	Compressão Frontal: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados	109
6.2	Compressão Lateral: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados	111
6.3	Torção Frente: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados .	112
6.4	Torção Traseira: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados .	114
6.5	Resultados Globais, Casos Críticos e Dimensionamento Mínimo da Estrutura .	116

6.6	Compressão Frontal: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro tubular com secções otimizadas	118
6.7	Compressão Lateral: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro tubular com secções otimizadas	120
6.8	Torção Frente: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro com secções otimizadas	121
6.9	Torção Trás: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro com secções otimizadas	123

Lista de Abreviações

CFST	Concrete Filled Steel Tube
CRC	Column Research Council
DR	Dynamic Relaxation
ERV	Energy Reduction Value
FEM	Finite Element Method
FRV	Fuel Reduction Value
FSAE	Formula Society of Automotive Engineers
FGM	Functionally Graded Materials
ISSA	Incremental Secant Stiffness Approach
MEF	Método dos Elementos Finitos
NOx	Óxidos de Azoto
NR	Newton-Raphson
PM10	Partículas Finas
SES	Structural Equivalency Spreadsheet
TBW	Truss Braced Wing
TL	Total Lagrangian
UL	Updated Lagrangian

Lista de Símbolos

u, v, w	Deslocamentos nodais globais
u', v', w'	Deslocamentos nodais no sistema local
$\mathbf{u}$	Vetor global de deslocamentos
$\mathbf{u}^e$	Vetor de deslocamentos do elemento
L, L_e	Comprimento do elemento
A	Área da secção transversal
E	Módulo de elasticidade (Young)
ρ	Massa volúmica do material
ϵ	Deformação axial
σ	Tensão normal axial
N	Esforço axial
p	Força distribuída por unidade de comprimento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$\mathbf{K}^e$	Matriz de rigidez do elemento
$\mathbf{K}_t$	Matriz de rigidez tangente
$\mathbf{M}$	Matriz de massa global
$\mathbf{M}^e$	Matriz de massa do elemento
$\mathbf{f}$	Vetor global de forças nodais
$\mathbf{f}^e$	Vetor de forças nodais equivalentes
$\mathbf{R}$	Vetor de resíduos (forças desequilibradas)
$\mathbf{N}$	Vetor de funções de forma
l, m	Cossenos diretores no plano (2D)
l_x, l_y, l_z	Cossenos diretores no espaço (3D)
θ	Ângulo de orientação do elemento
ξ	Coordenada natural
J	Jacobiano da transformação
ω	Frequência angular natural
$\hat{\mathbf{u}}$	Vetor próprio (modo de vibração)
ω^2	Valor próprio do problema de vibração
λ	Parâmetro escalar de carga
$\Delta\lambda$	Incremento do parâmetro de carga
$P-\Delta$	Efeito de segunda ordem global
$P-\delta$	Efeito de segunda ordem local

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e Enquadramento

A análise preditiva do comportamento mecânico e a simulação de falhas estruturais em fases preliminares de projeto tornaram-se fundamentais para mitigar a dependência de ensaios destrutivos na engenharia automóvel. No passado, a engenharia estrutural dependia da construção de vários protótipos físicos que eram destruídos em testes, um processo demorado e muito dispendioso. Hoje a realidade é diferente, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), são usados computadores para simular o comportamento de estruturas complexas, como o chassis de um automóvel, e ver como elas reagem a grandes impactos e forças. Esta ferramenta permite-nos prever deformações e zonas críticas num ambiente virtual e seguro, dando aos engenheiros a capacidade de tomar decisões de projeto muito mais rápidas, económicas e precisas.

1.2 Motivação

Atualmente, um dos grandes desafios da indústria automóvel é construir veículos que sejam em simultâneo extremamente seguros e o mais leves possível. O setor dos transportes é responsável por cerca de 20 % das emissões globais anuais de gases com efeito de estufa, sendo os veículos ligeiros sozinhos responsáveis por 10 % dessas emissões e do consumo de energia associado. A magnitude do problema agrava-se com a perspetiva de o número de veículos em circulação crescer dos 700 milhões registados em 2000 para 2 mil milhões em 2050, tornando inevitável o aperto das metas de emissões (Candela et al. 2024). No contexto europeu, as emissões de CO₂ dos automóveis de passageiros terão de ser reduzidas em 15 % a partir de 2025 e em 37,5 % a partir de 2035, face aos valores de referência. A matemática da redução de massa é direta, cerca de um terço do consumo total de combustível numa missão de condução típica resulta exclusivamente do esforço de deslocar a massa do veículo. Do ponto de vista quantitativo, estudos de condução mostram que uma redução de 100 kg na massa de um veículo se traduz numa diminuição do consumo energético de 0,47 a 1,17 kWh por cada 100 km percorridos (valor de *Energy Reduction Value*, ERV), e numa poupança de combustível de 0,159 a 0,237 L/100 km (valor de *Fuel Reduction Value*, FRV) para veículos a gasolina. Quando se consideram os efeitos secundários de redimensionamento da transmissão e do motor, o FRV pode atingir 0,477 L/100 km, reforçando o impacto real do aligeiramento estrutural na eficiência energética global do veículo. No plano ambiental, um aligeiramento de 20 % da massa de um veículo comercial ligeiro resultou em reduções de 1 % a 20 % nas emissões de NOx e de 1 % a 50 % nas emissões de partículas finas (PM10), com impacto direto no custo social associado a doenças respiratórias (Candela et al. 2024). Ao estudar e otimizar o chassis de um carro de competição, como o protótipo

de *Formula Student*, não se está apenas a procurar ganhar décimas de segundo numa pista. O desporto automóvel funciona como laboratório de ensaio onde novas ideias são validadas antes de chegarem à produção em série. As técnicas numéricas utilizadas neste trabalho para retirar material desnecessário de um quadro tubular, sem comprometer a segurança do piloto, assentam nos mesmos princípios que a indústria automóvel aplica para desenvolver veículos de passageiros mais eficientes, sustentáveis e com menor impacto ambiental.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é compreender como os métodos de simulação computacional podem ser aplicados de forma a melhorar o design de estruturas tubulares, e aplicar esse conhecimento na prática, através da análise e otimização de uma estrutura tubular.

De forma a atingir este objetivo geral, definem-se os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar os fundamentos teóricos e matemáticos dos métodos de elementos finitos aplicados à análise estrutural;
- Realizar uma revisão do estado de arte dos métodos de análise estrutural não linear;
- Apresentar aplicações de estruturas treliçadas espaciais em áreas como a engenharia civil, aeroespacial, automóvel e no domínio dos metamateriais;
- Aplicar este conhecimento para testar, e otimizar um chassis de Formula Student.

1.4 Estrutura

No Capítulo 1 é efetuada a contextualização do tema, apresentando-se o enquadramento geral do trabalho, a motivação associada ao estudo de estruturas treliçadas espaciais e os objetivos definidos para o trabalho. No Capítulo 2 é apresentado o estado da arte da análise estrutural não linear no contexto dos elementos finitos. São discutidos os principais métodos incrementais–iterativos, as não linearidades geométrica e material, bem como os fenómenos de instabilidade estrutural, incluindo encurvadura e comportamento pós-crítico, e também a aplicação prática de estruturas treliçadas espaciais em diferentes áreas da engenharia. São sistematizados exemplos representativos nos domínios da engenharia civil, da engenharia aeroespacial e da indústria automóvel, com maior foco nesta última, evidenciando a versatilidade e a relevância das estruturas reticuladas como solução estrutural eficiente. O Capítulo 3 é dedicado aos fundamentos teóricos e matemáticos do Método dos Elementos Finitos. São introduzidos os conceitos base através da formulação de elementos de barra unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. No Capítulo 4 é feita a análise e otimização estrutural do quadro tubular de um veículo Formula Student, sendo comparados os resultados do modelo original, com o otimizado. O Capítulo 5 reúne as conclusões do estudo, aponta algumas limitações que surgiram pelo caminho e deixa sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Aplicações do Método de Elementos Finitos

2.1 Introdução

Nos últimos 20 anos, tem-se observado um crescimento contínuo do interesse da comunidade científica por métodos avançados de análise estrutural, em particular no domínio do Método dos Elementos Finitos aplicado a problemas não lineares. A Figura 2.1 apresenta a evolução do número de publicações indexadas na base de dados ScienceDirect que incluem o termo “Finite Element Method”, evidenciando um aumento significativo da produção científica ao longo das últimas duas décadas. Este crescimento reflete não só a consolidação do FEM como ferramenta central da engenharia computacional, mas também a necessidade crescente de metodologias capazes de lidar com fenômenos complexos, como grandes deslocamentos, plasticidade e instabilidade estrutural. Neste contexto, o desenvolvimento e aperfeiçoamento de métodos incrementais–iterativos robustos tornaram-se essenciais para garantir soluções fiáveis em regimes não lineares, justificando a atenção dedicada a estes temas neste capítulo.

2.2 Métodos Incrementais–Iterativos

Na análise não linear de estruturas, a adoção de algoritmos de solução não linear é essencial, porque a sua forma vai-se alterando a cada incremento de carga ou deformação. Como a rigidez estrutural deixa de ser constante, a solução não pode ser obtida imediatamente.

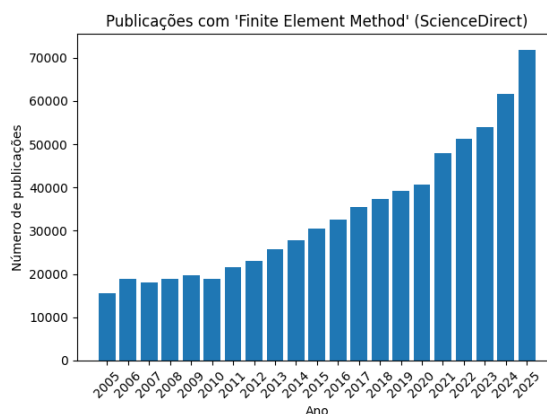


Figura 2.1: Número de publicações na base de dados ScienceDirect que incluem o termo “Finite Element Method”.

Torna-se assim necessário recorrer a esquemas incrementais–iterativos capazes de atualizar a cada iteração tanto o estado interno do material como a geometria deformada.

Entre estas metodologias destaca-se o método de Newton-Raphson (NR), as suas variantes e métodos de comprimento do arco, que permitem ultrapassar pontos limite e seguir percursos de equilíbrio pós-críticos.

Nas secções seguintes apresentam-se os princípios fundamentais destes métodos, as suas limitações e as principais melhorias propostas na literatura.

2.2.1 Newton-Raphson e Variantes

Os métodos de Newton-Raphson compõem a base da maioria dos algoritmos de resolução incremental-iterativa em análise estrutural não linear. A sua formulação é baseada na linearização do equilíbrio e na atualização da rigidez tangente, e apresenta bom desempenho enquanto a estrutura mantém comportamento elástico. No entanto, ao chegar a pontos limite, durante fenómenos de instabilidade ou perante degradações repentinas de rigidez, o método perde robustez e exige modificações que estabilizem o processo iterativo.

Foram desenvolvidas variantes do método original para lidar com estes cenários, entre essas destacam-se as variantes que introduzem equações de restrição adicionais, substituição de matrizes, com o objetivo de se melhorar a convergência em regimes altamente não lineares.

Crisfield apresenta em 1981 um artigo em que reformulou o método de Riks de forma a torná-lo compatível com o esquema de Newton-Raphson Modificado, estabelecendo o algoritmo de método de arco (Arc-Length Method) utilizado atualmente. A inovação pode ser visualizada na Figura 2.2, onde se observa a interseção da iteração com o percurso. A separação do problema em dois vetores incrementais e a imposição de uma restrição quadrática ao comprimento de arco permitem ultrapassar pontos limite e seguir percursos de instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*), sem comprometer a estrutura matricial do problema. (Crisfield 1981).

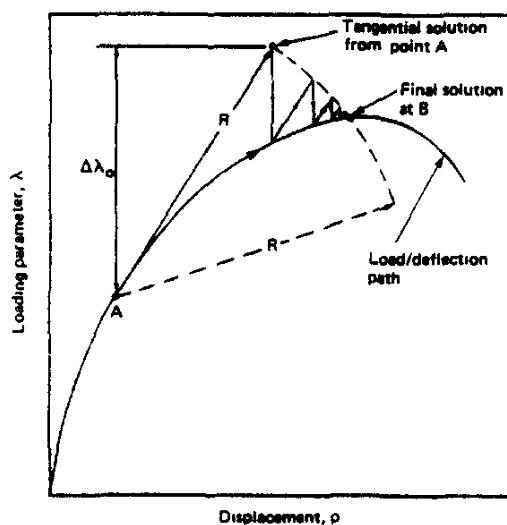


Figura 2.2: Técnica com Newton-Raphson modificado; Fonte: (Crisfield 1981)

Numa abordagem distinta, dirigida à integração das não linearidades geométricas e materiais em pórticos espaciais de aço, Cosgun e Sayin propuseram em 2014 um esquema baseado no método de substituição matricial. A lógica deste procedimento está sintetizada no fluxograma da Figura 2.3. A não linearidade geométrica é incorporada iterativamente através de funções de estabilidade, enquanto a plasticidade é modelada de forma concentrada, através da inserção de rótulas plásticas nas extremidades dos elementos. O algoritmo prossegue iterativamente até que o determinante da matriz de rigidez global se torne negativo, indicando a instabilidade do sistema (Cosgun e Sayin 2014).

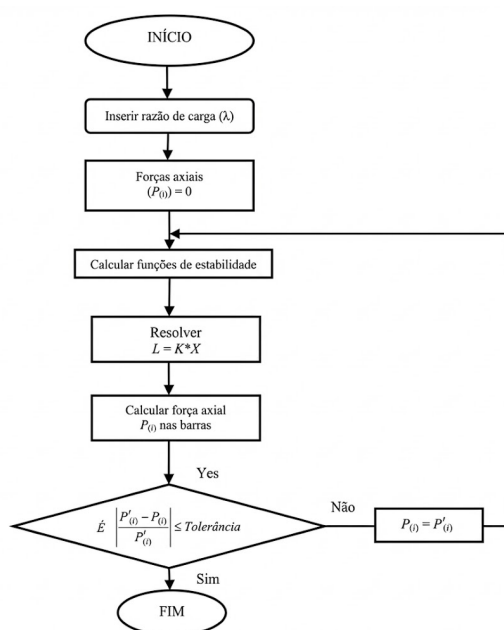


Figura 2.3: Esquema de funcionamento do método; Adaptado de: (Cosgun e Sayin 2014)

Mais recentemente, Wen, Tan e Chen publicam em 2019 um artigo em que abordaram as inconsistências nas formulações de energia potencial clássicas para a análise de estruturas reticuladas tridimensionais. Os autores identificaram que as matrizes de rigidez geométrica tradicionais falham frequentemente no teste de movimento de corpo rígido, gerando forças artificiais espúrias durante grandes rotações espaciais. Para corrigir esta anomalia, o estudo propõe uma formulação de Rigidez Geométrica Qualificada. Conforme ilustrado na Figura 2.4, esta abordagem introduz matrizes de correção que anulam os momentos induzidos fictícios (gerados pela interpretação incorreta do comportamento vetorial dos momentos sob rotação finita), assegurando o equilíbrio perfeito do elemento. Complementarmente, foi desenvolvido o *Incremental Secant Stiffness Approach* (ISSA). Este procedimento de recuperação de forças, baseado na formulação Lagrangiana Atualizada, utiliza a rigidez tangente do passo preditor para atualizar as forças internas. Esta combinação permite capturar com precisão fenômenos de encurvadura flexo-torsional e trajetórias pós-críticas complexas, mesmo com passos de carga amplos, eliminando a deriva numérica comum em métodos anteriores. (Wen, Q. Tan e Chen 2019).

Em conjunto, estes trabalhos apresentam a evolução natural do método de Newton-Raphson desde a sua forma clássica até às variantes mais robustas e adaptadas aos problemas da

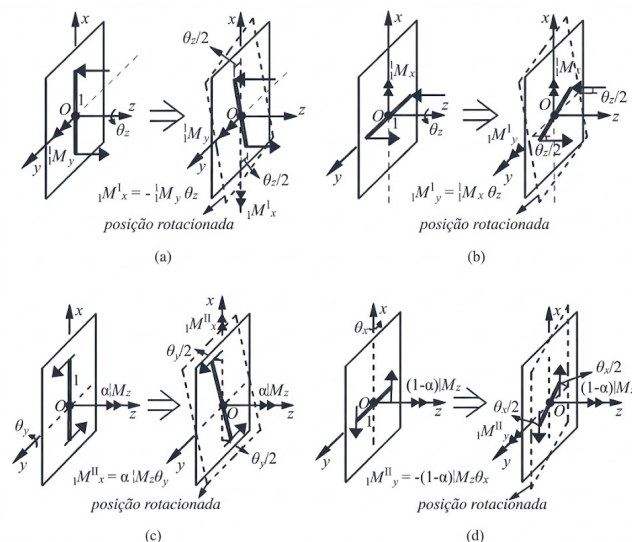


Figura 2.4: Momentos seccionais induzidos devido à rotação de momentos representados por diferentes braços de nível; Adaptado de: (Wen, Q. Tan e Chen 2019)

análise estrutural não linear moderna, incluindo instabilidades, não linearidade geométrica e plastificação.

2.2.2 Métodos de Comprimento de Arco

A análise não linear de estruturas enfrenta um problema, quando a estrutura atinge um ponto limite da curva força–deslocamento, os métodos tradicionais falham numericamente. O controlo de carga perde convergência nos caminhos de instabilidade por salto (*snap-through*), enquanto o controlo de deslocamento falha nos caminhos de instabilidade por recuo (*snap-back*), isto tornou evidente a necessidade de um método capaz de superar estes pontos críticos, mantendo a robustez numérica mesmo com perdas de rigidez. Assim surgiram os métodos de comprimento de arco, desenvolvidos para permitir o seguimento completo da trajetória de equilíbrio em regime pós-crítico.

O método desenvolve-se com este artigo publicado em 1979 por Riks, que adicionou ao sistema de equilíbrio uma equação de restrição que fixa o incremento total num espaço conjunto de deslocamentos e carga (fig.2.5). Esta abordagem acabou com a limitação dos métodos incrementais de controlo unidimensional, permitindo ultrapassar pontos limite onde a rigidez incremental não existe. A proposta de Riks foi um marco conceptual, embora a sua implementação fosse pouco prática devido à necessidade de resolver um sistema alargado $(N+1)$ e à perda de simetria da matriz de rigidez, que dificultava a integração em códigos de elementos finitos existentes (Riks 1979).

Outra evolução computacional foi dada por Crisfield neste artigo publicado em 1981, em que o autor reformula a metodologia de Riks de modo a torná-la compatível com o método dos elementos finitos e com o esquema Newton Raphson Modificado. A inovação principal consistiu em decompor o incremento de deslocamento num termo associado ao desequilíbrio interno e num termo tangencial dependente da carga. A equação de restrição é então escrita apenas em função do escalar associado ao incremento do parâmetro de carga, conduzindo a uma equação quadrática simples e eficiente de resolver. Esta formulação é conhecida

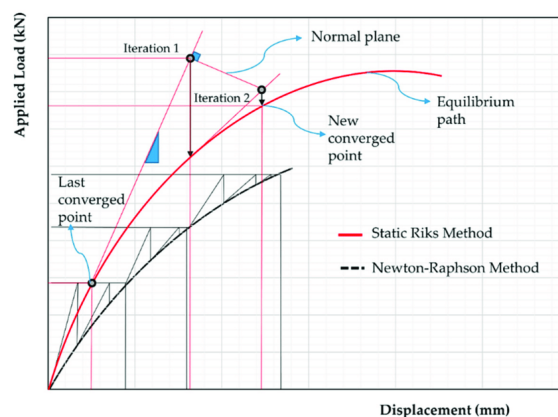


Figura 2.5: Representação esquemática da restrição do método de comprimento de arco; Fonte: <https://www.researchgate.net>.

hoje em dia como método de comprimento de arco de Crisfield, e tornou-se o padrão industrial e acadêmico, pela sua robustez e capacidade de seguir trajetórias complexas contendo instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*) (Crisfield 1981).

A aplicação do comprimento de arco a elementos estruturais avançados aparece mais tarde em 2003, num trabalho de Pi e Bradford. Estes autores integraram o método de Crisfield numa formulação tridimensional de viga curva, desenvolvida para capturar de forma rigorosa fenômenos de flexo-torção e grandes rotações em arcos metálicos. Acompanhado por um modelo elasto-plástico com zona plástica e integração numérica consistente na secção transversal, este estudo demonstrou a importância do comprimento de arco na análise de estruturas onde a resposta pós-encurvadura depende fortemente da interação entre não linearidade geométrica e material. O método permitiu traçar percursos de pós-encurvadura complexos, validando o modelo com resultados experimentais e analíticos disponíveis na literatura (Pi e Bradford 2003).

Paralelamente ao desenvolvimento das formulações implícitas baseadas em Newton-Raphson, surgiram abordagens que eliminam a necessidade de formar e inverter a matriz de rigidez. Um avanço significativo neste sentido foi o método proposto em 2011 por Lee, Han e Park, que introduziu um método explícito de comprimento de arco baseado em Relaxamento Dinâmico com amortecimento cinético. Nesta estratégia, o problema estático é transformado num pseudo-problema dinâmico, integrado no tempo através de diferenças centrais, enquanto a restrição de comprimento de arco controla o percurso de equilíbrio. O método revelou-se particularmente eficaz na captura de fenômenos instáveis em estruturas muito flexíveis, sem os custos computacionais associados ao cálculo da rigidez tangente (K. S. Lee, S. E. Han e Park 2011).

Uma outra evolução surge em 2014 com o trabalho de Lee, Han e Hong, que combinaram a filosofia explícita do Relaxamento Dinâmico com métodos de comprimento de arco híbridos. Ao contrário das versões clássicas puramente esféricas ou cilíndricas, este método introduz um parâmetro que ajusta a influência relativa do incremento de deslocamento e de carga, permitindo adaptar o controlo numérico à curvatura local da trajetória de equilíbrio. Além disso, os autores incorporaram o efeito de ligações semi-rígidas em pórticos espaciais, demonstrando que a abordagem híbrida proporciona uma robustez numérica superior no seguimento da resposta pós-encurvadura de estruturas tridimensionais com comportamento altamente não linear (K. Lee, S. Han e Hong 2014).

Estes trabalhos mostram uma progressão natural, do conceito teórico inicial, à formulação robusta usada universalmente, à sua aplicação em modelos estruturais avançados, ao desenvolvimento de variantes explícitas eficientes, culminando em métodos híbridos capazes de lidar com estruturas espaciais complexas. Em todos os casos, o elemento unificador é a introdução de uma equação de restrição que permite ao algoritmo controlar simultaneamente deslocamentos e carga, tornando possível atravessar pontos limite e seguir a trajetória de equilíbrio mesmo em situações de instabilidade geométrica severa.

2.2.3 Métodos Baseados em Resíduos, Energia e Outras Formulações

Para além dos métodos incrementais clássicos e das estratégias de comprimento de arco, foram desenvolvidos procedimentos que procuram resolver o equilíbrio estrutural não linear através de princípios alternativos, minimização de resíduos, formulações energéticas e reformulações completas da cinemática ou das equações de equilíbrio. Estes métodos surgem na maioria dos casos como resposta às fragilidades do Newton Raphson e das suas variantes, sobretudo em cenários onde a matriz de rigidez tangente se aproxima da singularidade, onde as iterações se tornam erráticas ou onde o comportamento estrutural combina não linearidade geométrica severa com efeitos de material.

Um dos primeiros contributos neste domínio é o trabalho que Chan publica em 1988, em que introduz o *Minimum Residual Displacement Method* (MRD), ao contrário dos esquemas baseados em rigidez tangente, o MRD evita impor restrições geométricas ou energéticas e foca-se em reduzir diretamente o erro iterativo. O método calcula um fator de correção de carga que minimiza os deslocamentos residuais, permitindo ajustar automaticamente o nível de carregamento a cada iteração e mantendo convergência mesmo na aproximação a pontos limite. O estudo apresenta ainda a ideia de rigidez tangente efetiva, útil em estruturas com travamentos implícitos, e combina esta abordagem com um modelo elasto-plástico baseado em sub-áreas e com uma formulação Lagrangiana atualizada capaz de captar efeitos de encurvadura (Chan 1988).

Pi e Bradford apresentam em 2003 este artigo em que desenvolvem uma formulação energética aplicada a elementos de viga curva tridimensionais, integrando não linearidades geométricas complexas e um modelo elasto-plástico de zona plástica. Embora o artigo seja frequentemente associado aos métodos de comprimento de arco, o aspeto principal da contribuição deste trabalho é uma formulação de energia consistente, construída sobre relações não lineares entre deformações e deslocamentos baseadas nas teorias de Euler-Bernoulli e Vlasov. O tratamento das tensões de torsão, conseguido através de integração numérica refinada na secção transversal, revelou que a precisão em pós-encurvadura depende tanto da coerência energética como do método incremental usado. A formulação demonstra como uma abordagem fundamentada na energia pode resolver limitações presentes em modelos clássicos e fornecer um quadro mais completo para problemas de flexo-torção em regime pós-crítico (Pi e Bradford 2003).

Uma linha alternativa, com impacto crescente no início do século XXI foi introduzida em 2006 por Greco et al., através da chamada formulação posicional. Em vez de trabalhar com deslocamentos, o método descreve a cinemática diretamente a partir das posições nodais absolutas, colocando toda a formulação num único sistema cartesiano fixo (figura 2.6). Esta abordagem simplifica drasticamente os desenvolvimentos cinemáticos, elimina transformações entre sistemas locais e globais e permite escrever a energia potencial total como função direta dessas posições. A resolução do equilíbrio decorre do princípio da energia potencial

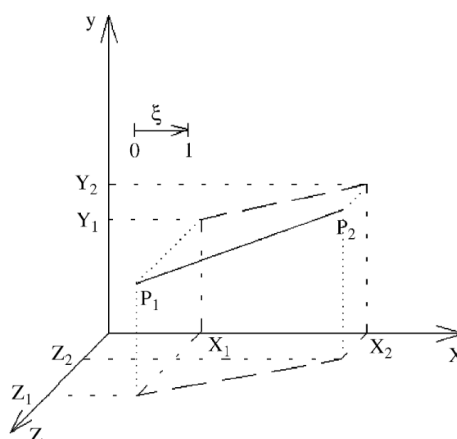


Figura 2.6: Cinemática do elemento de barra na formulação posicional; Fonte: Greco et al. 2006

mínima, com a matriz Hessiana a desempenhar o papel de rigidez tangente, tudo isto resulta num método limpo, direto e capaz de lidar simultaneamente com grandes deformações geométricas e com elastoplasticidade (Greco et al. 2006).

A abordagem vetorial explícita voltou a ganhar força com este trabalho publicado em 2011 por Lee, Han e Park, que combinaram o Relaxamento Dinâmico com um controlo de comprimento de arco explícito. Apesar do artigo ser frequentemente classificado no âmbito dos métodos de comprimento de arco, o que realmente o distingue é que toda a resolução do equilíbrio é feita sem matriz de rigidez, recorrendo a integração explícita e a amortecimento cinético para dissipar a energia. Trata-se, essencialmente, de um método baseado em resíduos dinâmicos, o sistema é levado a oscilar em torno da solução até o erro se anular. A inclusão da restrição de arco apenas orienta o processo ao longo da trajetória correta. Este tipo de método evidencia como sistemas puramente vetoriais podem contornar dificuldades de convergência típicas dos esquemas implícitos (K. S. Lee, S. E. Han e Park 2011).

Outra evolução surge com o método apresentado em 2014 por Zhong, Ren e Wan, que propõem um Newton amortecido para problemas elastoplásticos severos. Quando o material entra em amolecimento ou plastificação perfeita, a matriz de rigidez tangente torna-se singular, o que destrói a convergência em Newton clássico. A solução introduzida consiste num fator de amortecimento calculado automaticamente a cada iteração, garantindo que a matriz elastoplástica permanece bem condicionada. Embora a formulação siga a estrutura incremental tradicional da plasticidade, a modificação ao passo iterativo coloca este método na classe dos métodos de estabilização de resíduos, já que o amortecimento atua diretamente sobre os termos que controlam o desequilíbrio interno. Os autores demonstram que o método mantém convergência rápida mesmo em situações onde outros algoritmos colapsam (Zhong, Ren e Wan 2014).

Mais recentemente em 2019, Wen, Tan e Chen introduzem um contributo conceptual fundamental para a análise geométrica não linear, a rigidez geométrica qualificada. Este trabalho evidencia que várias formulações clássicas de energia falham no teste de movimento de corpo rígido, produzindo forças artificiais durante rotações rígidas. A partir da comparação entre diferentes modelos cinemáticos, os autores derivam correções matriciais que tornam a rigidez geométrica fisicamente consistente, eliminando erros em bifurcação (há vários caminhos matematicamente válidos para continuar a deformar), pós-encurvadura e análise de

segunda ordem. Além disso, propõem um procedimento eficiente de recuperação de forças, o *Incremental Secant Stiffness Approach* (ISSA), que combina simplicidade computacional com consistência teórica. A abordagem fornece uma formulação energética unificada para modelos tridimensionais sujeitos a grandes rotações, funcionando como uma boa alternativa aos métodos clássicos (Wen, Q. Tan e Chen 2019).

Em conjunto, estes métodos revelam que sempre que Newton-Raphson se aproxima dos seus limites, surgem estratégias que reconstróem o problema noutras bases, minimização do erro, formulações energéticas diretas, integração explícita, estabilização dinâmica ou qualificação rigorosa das matrizes fundamentais. Esta diversidade de abordagens fornece um conjunto de ferramentas robustas para lidar com não linearidades, oferecendo alternativas sólidas aos métodos convencionais.

2.3 Não Linearidade Geométrica

As não linearidades aparecem quando a resposta das estruturas deixa de poder ser descrita por relações lineares entre forças e deslocamentos. Este comportamento pode acontecer em grandes deformações, na perda de rigidez material ou em fenómenos de instabilidade. A não linearidade geométrica altera profundamente as equações de equilíbrio usadas no Método dos Elementos Finitos. Embora não sejam métodos, estas não linearidades condicionam a escolha e o desempenho dos algoritmos de resolução, sendo a razão pela qual métodos incrementais iterativos se tornam essenciais. A sua presença obriga à atualização contínua da rigidez, ao uso de formulações apropriadas para grandes deslocamentos e à adoção de estratégias para ultrapassar pontos limite e trajetórias de equilíbrio complexas.

2.3.1 Grandes Deslocamentos e Rotações

A análise estrutural em grandes deslocamentos e grandes rotações precisa de formulações capazes de representar adequadamente a evolução da configuração geométrica durante o carregamento. Estes efeitos tornam as equações de equilíbrio dependentes da configuração atual, introduzem acoplamentos entre modos de deformação e criam problemas de rigidez geométrica que não surgem em regimes lineares. Ao longo do tempo, vários autores contribuíram para a consolidação de formulações robustas, modelos de elemento finito e métodos incrementais-iterativos capazes de lidar com estas dificuldades.

Um dos contributos neste domínio é o trabalho de Bathe e Bolourchi, que apresentam em 1979 uma formulação completa para a análise de grandes deslocamentos e grandes rotações em vigas tridimensionais. O estudo compara as abordagens Lagrangiana Total e Lagrangiana Atualizada (UL), mostrando que ambas as abordagens conduzem às mesmas matrizes de rigidez quando corretamente formuladas, mesmo que a versão UL seja computacionalmente mais eficiente. Com elementos baseados em funções Hermitianas e integração consistente, o método consegue capturar fenómenos como acoplamento axial-flexão-torção e rotações próximas de 90°, estabelecendo a base utilizada depois em vários programas de MEF (Bathe e Bolourchi 1979).

Papadrakakis publica em 1981 este artigo em que investiga o comportamento em grande deflexão e pós-encurvadura de treliças e pórticos espaciais, destacando o efeito da força axial na rigidez, o encurvamento dos membros e as deflexões finitas. Embora o objetivo do autor fosse desenvolver métodos vetoriais alternativos ao Newton Raphson, a formulação baseia-se diretamente na teoria *beam-column* e constitui uma das primeiras aplicações sistemáticas

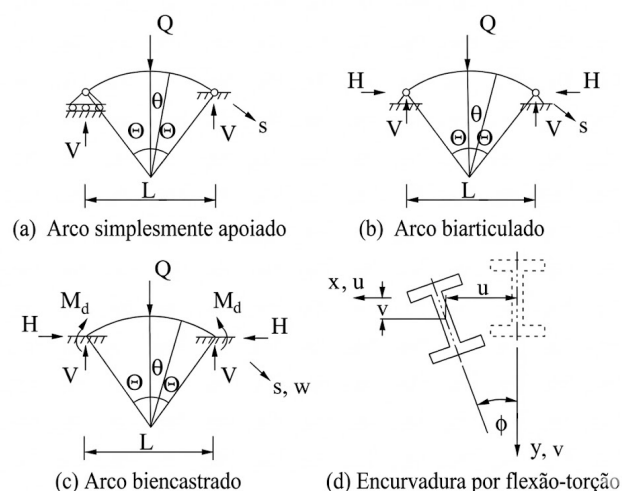


Figura 2.7: Modos de encurvadura de um arco; Fonte: (Pi e Bradford 2003)

da rigidez secante em grandes deslocamentos para estruturas tridimensionais (Papadrakakis 1981).

Paralelamente em 1982, Argyris et al. introduziram a Formulação Natural, um quadro teórico particularmente elegante para combinar não linearidade geométrica com plasticidade concentrada. Ao decompor o movimento em deformações naturais e movimentos de corpo rígido, a abordagem permite tratar de forma clara grandes rotações e deformações moderadas mantendo o formalismo energeticamente consistente. A aplicação a pórticos 2D e 3D demonstrou que o método é eficaz na análise de instabilidades geométricas e plastificação localizada (J. Argyris et al. 1982).

Meek e Tan publicaram em 1984 este artigo em que desenvolvem uma formulação incremental-iterativa orientada para treliças espaciais, incorporando explicitamente grandes rotações através de uma matriz de orientação nodal. A estratégia de solução é baseada no método do comprimento de arco e foi concebida para lidar com fenômenos como instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*), destacando a importância de tratar corretamente a cinemática não linear dos nós na robustez do algoritmo. Este trabalho consolidou a ligação entre formulações de grande rotação e métodos de controlo de caminho (Meek e H. S. Tan 1984).

A interação entre grandes rotações e instabilidade estrutural foi aprofundado por Pi e Bradford, numa interação crítica entre grandes rotações e a instabilidade estrutural foi aprofundada por Pi e Bradford (2003), num estudo sobre a encurvadura e pós-encurvadura de arcos. Os autores demonstraram que os modelos de vigas tridimensionais carecem de uma representação adequada das grandes rotações de torção e do empenamento para capturar corretamente o comportamento pós-crítico, conforme ilustrado nos modos de deformação da Figura 2.7. O estudo evidenciou ainda que a precisão dos esquemas de integração numérica nos elementos finitos é fortemente influenciada pela magnitude das rotações envolvidas (Pi e Bradford 2003).

Evoluções mais recentes revisitaram diretamente a consistência matemática das formulações geométricas. Wen, Tan e Chen, publicam em 2019 este artigo que mostra que muitas matrizes de rigidez geométrica clássicas falham o teste de movimento de corpo rígido, produzindo

forças internas artificiais quando o elemento sofre uma rotação rígida. Para ultrapassar estas incoerências, os autores propuseram a rigidez geométrica qualificada, derivada de uma decomposição mais rigorosa da energia potencial. Esta correção revelou-se essencial para análises de segunda ordem, encurvadura lateral-torsional e trajetórias pós-críticas, sobretudo em problemas tridimensionais onde ocorrem rotações finitas (Wen, Q. Tan e Chen 2019).

De forma geral, estes estudos mostram que a análise de grandes deslocamentos e rotações não só depende apenas da escolha de um método incremental-iterativo, mas também exige uma formulação geométrica rigorosa, interpolação cinemática adequada, correções energéticas consistentes e estratégias de solução capazes de manter a convergência em regiões de instabilidade. O desenvolvimento progressivo destas técnicas tornou possível analisar, com fiabilidade, estruturas espaciais esbeltas sujeitas a grandes deformações, capturando fenómenos complexos como acoplamentos flexo-torsionais, rotações severas e comportamento pós-crítico.

2.3.2 Efeitos de Segunda Ordem

Os efeitos de segunda ordem tem um papel essencial na análise não linear de estruturas, principalmente quando ocorrem grandes deslocamentos laterais, rotações significativas ou estados de compressão elevados que fazem com que as deformações e instabilidades sejam amplificadas. Em pórticos e estruturas espaciais, este fenómeno materializa-se através dos efeitos $P - \Delta$ (instabilidade global) e $P - \delta$ (instabilidade local), tornando inadequadas as formulações lineares ou de primeira ordem. Os estudos que marcaram a evolução desta área abordam estes efeitos tanto do ponto de vista algorítmico, com a melhoria da convergência dos métodos incrementais-iterativos, como do ponto de vista físico através da representação realista da rigidez, das ligações e do comportamento pós-crítico.

O trabalho de Meek e Loganathan, apresentado em 1989, representa um dos avanços mais significativos na análise não linear geométrica de treliças espaciais. Baseando-se no método de comprimento de arco desenvolvido por Riks e refinado por Crisfield, os autores apresentam um algoritmo robusto, capaz de ultrapassar pontos limite e traçar de forma contínua o percurso pós-encurvadura. O estudo reforça que as estruturas espaciais são sensíveis a instabilidade geométrica por causa da sua elevada esbelteza e dependência da ação axial. Para ultrapassar falhas frequentes de convergência nos métodos clássicos, os autores introduziram a redução automática do comprimento de arco perante raízes imaginárias e a utilização de modos próprios para orientar a solução em bifurcações (Meek e Loganathan 1989).

Hsieh e Deierlein demonstra, neste artigo publicado em 1991, que a modelação das ligações semi-rígidas tem um papel fundamental no comportamento de pórticos tridimensionais. Este estudo combina não linearidade geométrica via formulação Lagrangiana Atualizada, não linearidade de material via rótulas plásticas e um modelo momento-rotação. Os autores mostram que a flexibilidade das ligações altera significativamente a rigidez global e pode amplificar deslocamentos laterais, afetando diretamente a avaliação de segunda ordem e o desempenho pós-elástico das estruturas (Hsieh e Deierlein 1991).

A aplicação de métodos de segunda ordem em estruturas de grande escala é evidenciada no estudo de Hori e Sasagawa, publicado em 2000. Os autores validam numericamente e experimentalmente o comportamento de uma cobertura espacial com mais de dois mil elementos tubulares, sujeita a grandes deformações e plastificação localizada. Os resultados obtidos no estudo mostram que os efeitos de segunda ordem têm influência não apenas

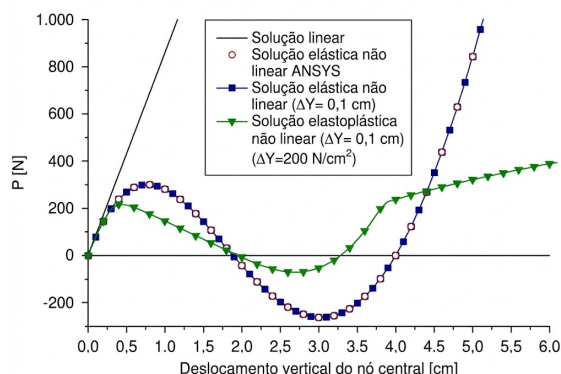


Figura 2.8: Trajetória de equilíbrio da treliça de von Mises, mostrando o fenômeno de *snap-through*; Fonte: (Greco et al. 2006)

sobre a carga crítica, mas também sobre o mecanismo de instabilidade combinada entre cordões, destacando a importância da compatibilidade entre rigidez geométrica e material em análises com muita não linearidade (Hori e Sasagawa 2000).

Em 2001, Kim e Choi introduzem um método de análise avançada específico para pórticos espaciais semi-rígidos. O estudo combina estabilidade de segunda ordem com modelos simplificados de plasticidade e rigidez de ligação. A utilização de funções de estabilidade para capturar efeitos $P - \Delta$ permite reduzir bastante a discretização necessária, mantendo precisão no cálculo da instabilidade global. Demonstram também que a interação entre força axial e momentos fletores pode ser tratada de forma eficiente através de superfícies de interação e rótulas plásticas concentradas (Kim e Choi 2001).

Greco et al. apresentam em 2006 uma formulação não linear inovadora para treliças espaciais baseada em coordenadas posicionais. Embora dirigida a treliças, esta formulação revela-se altamente relevante no contexto de efeitos de segunda ordem, uma vez que a instabilidade axial e as deformações geométricas são tratadas diretamente através das posições nodais. Esta abordagem faz com que não sejam necessários sistemas de coordenadas locais e permite incorporar plasticidade de forma simples, fornecendo um modelo robusto para estruturas sensíveis a efeitos $P - \delta$ e perda de rigidez progressiva, como se pode observar no comportamento de instabilidade por salto (*snap-through*) da figura 2.8 (Greco et al. 2006).

No seu conjunto, estes trabalhos mostram como a análise de segunda ordem evoluiu de abordagens puramente incrementais para métodos capazes de simular comportamentos complexos, integrando instabilidade, não linearidade geométrica, material e flexibilidade das ligações de forma consistente.

2.4 Não Linearidade Material

A resposta dos materiais estruturais em situações reais raramente segue o comportamento elástico linear que tantas vezes se assume em análises preliminares. Quando as tensões ultrapassam o limite elástico, surgem fenômenos como plastificação localizada, degradação de rigidez, acumulação de deformações permanentes e até dano irreversível, todos esses fenômenos alteram significativamente a capacidade resistente e a rigidez equivalente dos elementos estruturais, tornando indispensável a consideração da não linearidade do material em análises de engenharia com exigências em segurança e precisão. Nesta secção descrevem-se

as principais abordagens utilizadas na modelação do comportamento não linear do material nos Métodos dos Elementos Finitos, destacando modelos concentrados como rótulas plásticas, plasticidade ao longo do elemento e metodologias híbridas que juntam eficiência e rigor.

2.4.1 Elasto-plasticidade

A consideração do comportamento elasto-plástico é essencial para descrever o início e a progressão da cedência em estruturas metálicas, principalmente quando grandes deslocamentos se desenvolvem antes do colapso global. A investigação sobre o tema evoluiu tanto na formulação dos modelos constitutivos como nas estratégias numéricas utilizadas na sua integração nas análises não lineares.

Um contributo nesta área é apresentado por Argyris et al. em 1982, que introduzem a chamada Formulação Natural para pórticos bidimensionais e tridimensionais. A abordagem separa explicitamente os modos de corpo rígido das deformações internas do elemento, conduzindo a matrizes de rigidez natural particularmente simples no regime elástico. A plastificação é concentrada nas extremidades sob a forma de rótulas plásticas, regidas por uma função de cedência e associadas a um procedimento incremental baseado na matriz de rigidez tangente. A formulação demonstra elevada eficiência na análise do comportamento pós-crítico de pórticos metálicos (J. Argyris et al. 1982).

Poucos anos depois, em 1990, Chandra et al. ampliam o foco para pórticos espaciais, propondo o *instantaneous secant stiffness method* como uma alternativa aos algoritmos Newton-Raphson clássicos. A plasticidade é igualmente modelada por rótulas concentradas, integrando superfícies de interação axial-flexão-torção específicas para perfis I. O método permite acompanhar de forma estável a degradação de rigidez e a evolução de mecanismos plásticos até ao colapso (Chandra, Krishna e Trikha 1990).

Com uma perspetiva mais recente, Greco et al. introduzem em 2006 uma formulação posicional para treliças espaciais que incorpora plasticidade com endurecimento bilinear, como ilustrado na figura 2.9. A energia potencial total é escrita diretamente em função das posições nodais, evitando transformações entre sistemas de coordenadas e simplificando o cálculo da deformação axial não linear. O procedimento iterativo utiliza o Newton-Raphson e mostra-se eficiente na caracterização da perda de rigidez induzida pela plastificação (Greco et al. 2006).

Além das estruturas metálicas convencionais, a plasticidade desempenha papel determinante em materiais heterogêneos. Em 2013 Alijani et al. analisam vigas de materiais de gradiente funcional, combinando um modelo elasto-plástico com endurecimento isotrópico com um algoritmo de comprimento de arco para captar percursos pós-críticos. Os autores concluem que o início da cedência na fase metálica condiciona a resposta crítica e pós-crítica, demonstrando a importância da modelação de material em sistemas híbridos (Alijani et al. 2013).

Em suma, os avanços na modelação elasto-plástica possibilitam análises cada vez mais próximas do comportamento real de estruturas e materiais, juntando eficiência numérica com rigor na representação da cedência, acumulação de deformações permanentes e evolução dos mecanismos resistentes.

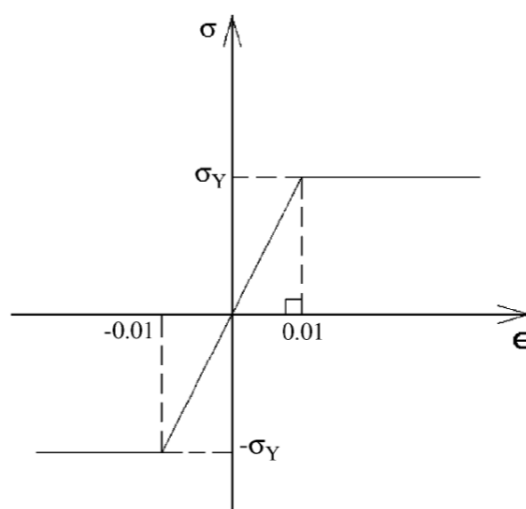


Figura 2.9: Modelo constitutivo elasto-plástico com endurecimento bilinear;
Adaptado de: (Greco et al. 2006)

2.4.2 Rótulas Plásticas

A utilização de modelos com rótulas plásticas concentradas nos extremos dos elementos estruturais tem-se afirmado como uma alternativa eficiente aos métodos de plasticidade distribuída, principalmente quando se procura um compromisso entre precisão e custo computacional em análises com elevadas não linearidades.

Um dos primeiros desenvolvimentos significativos neste âmbito foi o trabalho de Abbasnia e Kassimali, que em 1995 propuseram uma formulação para pórticos espaciais com grandes deslocamentos e rotações. Esta formulação é baseada numa abordagem Euleriana, separa os movimentos de corpo rígido das deformações relativas e incorpora um modelo de cedência idealmente elasto-plástico sem encruamento, considerando superfícies de plastificação envolvendo força axial, momentos fletores e torção. A estratégia incremental-iterativa de Newton Raphson permite acompanhar a formação e evolução de rótulas plásticas sob rotações muito intensas, com resultados validados em estruturas espaciais de referência (Abbasnia e Kassimali 1995).

Em 2001, Kim e Choi propuseram um procedimento prático baseado no conceito de rótulas plásticas concentradas para a análise não linear de pórticos espaciais em aço. O modelo integra superfícies de cedência, degradação progressiva de rigidez e ligações semi-rígidas diretamente ao nível das rótulas, dispensando discretizações refinadas ao longo dos elementos. Esta abordagem permite capturar de forma eficiente os efeitos combinados de plasticidade do material e instabilidade global. Apesar da sua formulação simplificada, o método demonstrou elevada fidelidade na previsão da capacidade resistente última e do comportamento instável de pórticos espaciais, com significativo ganho de eficiência computacional face a modelos de plasticidade distribuída (Kim e Choi 2001).

Embora os modelos clássicos de rótulas plásticas concentradas sejam amplamente utilizados pela sua simplicidade e eficiência computacional, apresentam limitações na representação da degradação progressiva da rigidez e da plastificação ao longo dos membros. Nesse contexto, Chiorean propôs um método que através das fragilidades inerentes às rótulas plásticas, introduz uma descrição mais realista do comportamento inelástico através de uma formulação

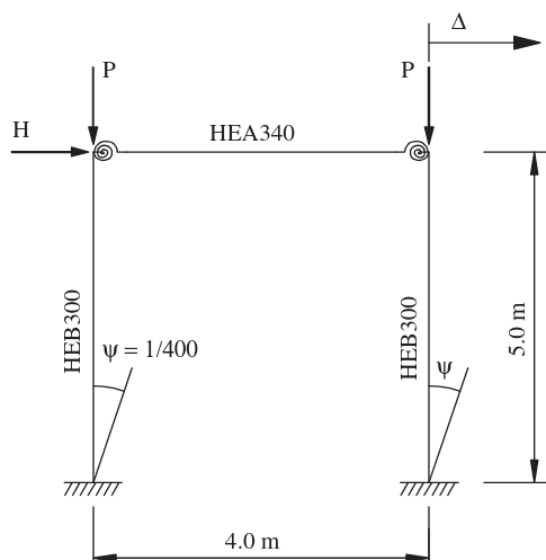


Figura 2.10: Modelo de pórtico metálico com ligações viga-pilar semi-rígidas;
Fonte: (Ngo-Huu, Nguyen e Kim 2012)

pela flexibilidade. Esta abordagem permite capturar a plastificação distribuída ao longo do elemento com apenas um elemento por membro, preservando a eficiência computacional típica dos modelos de rótulas, mas com maior precisão na previsão da rigidez tangente e da capacidade última (Chiorean 2009).

No contexto de estruturas metálicas com ligações viga-pilar parcialmente restritas, Ngo-Huu et al. apresentaram em 2012 um método de rótulas plásticas concentradas acoplado a funções de estabilidade para a consideração rigorosa dos efeitos de segunda ordem $P - \delta$ e $P - \Delta$, como se pode verificar na figura 2.10. Esta formulação permite representar simultaneamente a instabilidade geométrica, a cedência progressiva da secção ao nível das rótulas e a flexibilidade não linear das ligações, enquadrando-se na filosofia dos métodos práticos avançados de análise. A resolução das equações de equilíbrio através do método de controlo de deslocamentos generalizado assegura elevada robustez numérica na análise do comportamento pós-crítico (Ngo-Huu, Nguyen e Kim 2012).

Em conjunto, todos estes contributos consolidam o uso das rótulas plásticas em análises não lineares, permitindo estudar o comportamento pós-crítico de estruturas metálicas com grande eficiência computacional. Persistem, contudo, limitações conhecidas, como a incapacidade de representar gradientes não uniformes de plastificação ao longo do elemento.

2.4.3 Zonas Plásticas

Ao contrário dos métodos de rótulas plásticas, onde a cedência é concentrada em zonas discretas nas extremidades dos elementos, as abordagens de zonas plásticas descrevem a degradação gradual da rigidez ao longo do comprimento do membro. Estas formulações permitem capturar com maior rigor a evolução do comportamento elasto-plástico, especialmente em estruturas que desenvolvem mecanismos complexos de instabilidade e redistribuição de esforços antes do colapso.

Um dos contributos neste âmbito foi apresentado em 1999 por Barsan e Chiorean, que desenvolveram um programa de análise não linear geométrica e de material para pórticos

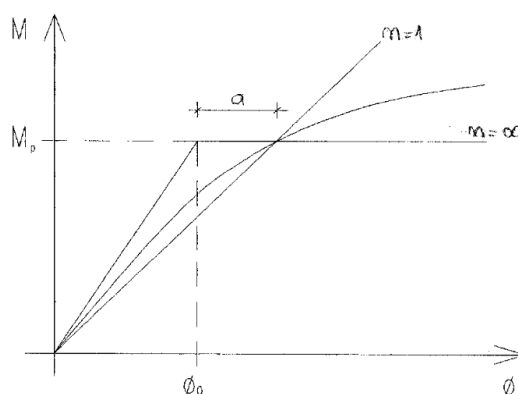


Figura 2.11: Relação momento-curvatura-força axial com comportamento elasto-plástico suave do tipo Ramberg-Osgood; Fonte: (Barsan e Chiorean 1999)

metálicos 2D e 3D com ligações semi-rígidas. A metodologia baseia-se na análise de zona plástica, modelando as relações não lineares momento-curvatura-força axial ($M-\Phi-P$) com curvas suaves do tipo Ramberg-Osgood (figura 2.11). A formulação utiliza uma abordagem pela flexibilidade, obtendo a matriz de flexibilidade por integração ao longo do elemento e invertendo-a para calcular a rigidez tangente elastoplástica. Os efeitos de segunda ordem são incorporados através de funções de estabilidade para o comportamento local e de uma formulação lagrangiana atualizada para grandes deflexões globais, enquanto as ligações semi-rígidas são representadas por molas rotacionais não lineares. Esta combinação chega a resultados comparáveis aos de modelos com múltiplos elementos por barra, apesar de usar apenas um elemento por membro, alcançando assim o desejado equilíbrio entre precisão e eficiência computacional (Barsan e Chiorean 1999).

Por sua vez, Hori e Sasagawa publicam em 2000 este artigo em que aplicam uma formulação de plasticidade distribuída a estruturas espaciais de grande escala, validando-a com ensaios experimentais reais. Usando elementos unidimensionais subdivididos em subelementos com fibras nas extremidades, a metodologia consegue prever de forma consistente fenômenos de instabilidade acoplada e resposta pós-crítica, mesmo quando coexistem grandes deslocamentos e plastificação intensa. Os resultados mostram concordância robusta com curvas força-deslocamento e padrões de encurvadura observados no laboratório que podem ser vistos na figura 2.12, demonstrando que métodos de zona plástica podem ser aplicados de forma estável e eficiente em estruturas tridimensionais extensas (Hori e Sasagawa 2000).

Em conjunto, estes trabalhos demonstram que as formulações de plasticidade distribuída representam uma evolução crucial nos métodos de análise não linear, oferecendo uma estimativa mais fiel da capacidade resistente e do comportamento pós-crítico, sem o custo computacional excessivo das discretizações extremamente refinadas.

2.5 Encurvadura e Pós-Encurvadura

As estruturas esbeltas apresentam um comportamento fortemente dependente da não linearidade geométrica, sobretudo quando submetidas a esforços de compressão. Pequenas imperfeições iniciais ou deslocamentos laterais provocam incrementos adicionais de deformação que se autoamplificam, conduzindo a fenômenos de instabilidade global ou local,

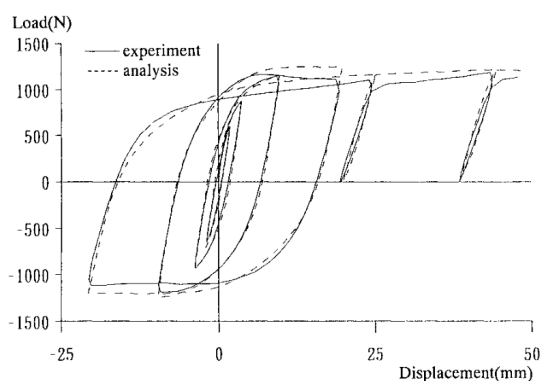


Figura 2.12: Comparação entre curvas carga–deslocamento obtidas experimentalmente e por análise não linear com plasticidade distribuída; Fonte: (Hori e Sasagawa 2000)

tipicamente designados por encurvadura. Este comportamento é influenciado pela esbelteza dos elementos, pela rigidez axial e pelas condições de confinamento impostas pelo sistema estrutural envolvente.

Depois de chegar ao ponto crítico de instabilidade, a estrutura pode seguir trajetórias de equilíbrio não lineares complexas, incluindo trajetórias descendentes e fenômenos de mudança brusca de configuração, como instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*). Nestes regimes, a análise numérica torna-se particularmente exigente, devido à degradação da rigidez estrutural e à ocorrência de pontos limite onde métodos iterativos convencionais tendem a falhar.

A previsão rigorosa destes efeitos requer modelos que tenham em conta os grandes deslocamentos e a variação progressiva da rigidez, seja devido à geometria deformada ou pela plastificação decorrente após a instabilidade. A análise em pós-encurvadura assume especial relevância em estruturas tubulares automóveis e treliças espaciais, nas quais a perda inicial de estabilidade não implica necessariamente o colapso imediato. Em muitos casos, subsiste capacidade resistente adicional nos caminhos pós-críticos, sendo crucial avaliá-la de modo adequado para garantir segurança e otimização estrutural.

2.5.1 Encurvadura

A instabilidade geométrica sempre foi um desafio central na análise de estruturas esbeltas, especialmente quando sujeitas a grandes deslocamentos e cargas compressivas. Neste âmbito, Papadrakakis apresenta em 1981 uma das primeiras abordagens realmente eficazes para capturar o comportamento pós-encurvadura de estruturas espaciais usando apenas formulações vetoriais. O método evita a montagem da matriz de rigidez tangente e resolve o equilíbrio através de técnicas baseadas em relaxação dinâmica e gradientes conjugados, permitindo ultrapassar pontos críticos como caminhos de instabilidade por salto (*snap-through*) sem colapsar numericamente. A validação em estruturas de referência, incluindo treliças espaciais e o clássico pórtico "*toggle frame*", demonstrou a robustez do algoritmo para seguir trajetórias altamente não lineares dependentes do efeito $P\Delta$ e do encurvamento dos membros, como se pode ver na figura 2.13 (Papadrakakis 1981).

A necessidade de prever a instabilidade com consistência também está presente no trabalho de Bayo e Loureiro, publicado em 2001, em que se critica a dependência do comprimento

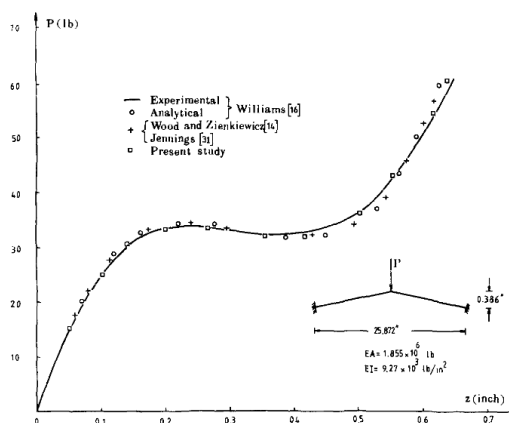


Fig. 8. Williams' toggle: geometry and load-deflection curves.

Figura 2.13: Trajetória carga–deslocamento do pórtico *toggle frame*; Fonte: (Papadrakakis 1981)

efetivo K em análises regulamentares como as do Eurocódigo 3. Os autores propõem uma metodologia direta que substitui o uso de fatores empíricos por imperfeições geométricas calibradas energeticamente a partir do modo próprio de Instabilidade. O resultado é uma análise de segunda ordem mais rigorosa, na qual rigidez, imperfeições e resistência são tratadas num único modelo, eliminando imprecisões e sensibilidades induzidas pelo processo normativo clássico (Bayo e Loureiro 2001).

Mais recentemente, em 2011, Lee et al. publicam este artigo em que usam a metodologia vetorial ao introduzir um método explícito de comprimento de arco baseado em relaxação dinâmica com amortecimento cinético. A técnica é capaz de seguir trajetórias instáveis com forte curvatura em problemas tridimensionais, capturando fenômenos de instabilidade por recuo (*snap-back*) (figura 2.14) sem recorrer à formação e inversão da matriz de rigidez tangente. Ensaio numéricos realizados mostram que a abordagem apresenta elevada estabilidade na vizinhança de pontos limite, onde métodos incrementais convencionais falham facilmente (K. S. Lee, S. E. Han e Park 2011).

Por fim, numa perspectiva direcionada ao dimensionamento, Dou et al. publicam em 2018 este artigo em que analisam a instabilidade de arcos treliçados de aço, extremamente importantes para estruturas de grande vão. Demonstra-se que modos locais, como a encurvadura dos banzos, podem dominar sobre a encurvadura global, reduzindo drasticamente a capacidade resistente. Através de análises numéricas extensas, os autores propõem uma curva unificada de instabilidade e uma equação simples de interação para estados combinados de compressão e flexão, alinhada com a metodologia dos Eurocódigos mas adaptada especificamente a treliças (Dou et al. 2018).

2.5.2 Pós-Encurvadura

O comportamento pós-crítico em estruturas esbeltas evolui de forma altamente não linear, exigindo modelos numéricos capazes de capturar grandes deslocamentos, rotações e possíveis mecanismos de falha. Um dos primeiros contributos computacionais realmente eficazes foi apresentado em 1981 por Papadrakakis, que propôs uma estratégia puramente vetorial para análise de pós-encurvadura em estruturas espaciais, evitando a montagem da matriz de rigidez tangente e resolvendo o equilíbrio através de relaxação dinâmica e gradientes

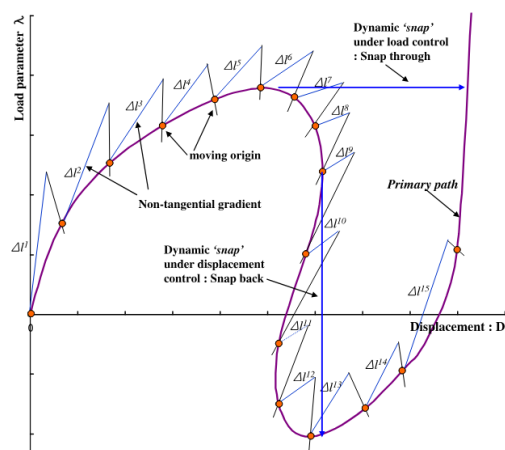


Figura 2.14: Trajetória de equilíbrio não linear com ocorrência de *snap-through* e *snap-back*, ilustrando o seguimento pós-crítico por método explícito de comprimento de arco com origem móvel; Fonte: (K. S. Lee, S. E. Han e Park 2011)

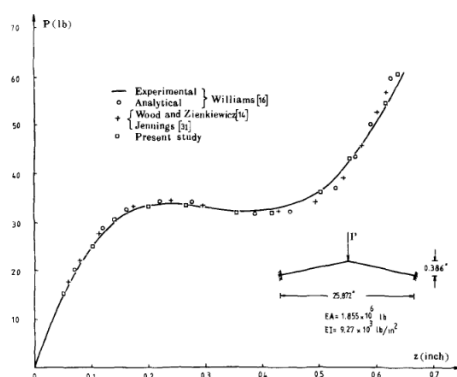


Figura 2.15: Trajetória carga–deslocamento do pórtico toggle frame; Fonte: (Papadrakakis 1981)

conjugados, o método consegue ultrapassar pontos limite associados a fenômenos de instabilidade por salto (*snap-through*), mantendo a estabilidade numérica e permitindo que a curva força–deslocamento seja completamente traçada em modelos tridimensionais como se evidencia na figura 2.15 (Papadrakakis 1981).

O comportamento pós-crítico também tem vindo a ser estudado em estruturas curvas, altamente relevantes em aplicações de engenharia. Pi e Bradford apresentam em 2003 este artigo, em que desenvolvem um elemento de viga curva capaz de capturar instabilidades flexo-torcionais e a propagação de plastificação em arcos metálicos sujeitos a cargas concentradas. A introdução de uma integração consistente da secção transversal e a utilização de um método de comprimento de arco permitem simular com precisão a evolução da resposta após a encurvadura, incluindo o efeito das grandes rotações de torção (Pi e Bradford 2003).

A interação entre instabilidade geométrica e plasticidade localizada torna-se mais complexa quando os materiais apresentam microestrutura heterogênea. Neste artigo publicado em

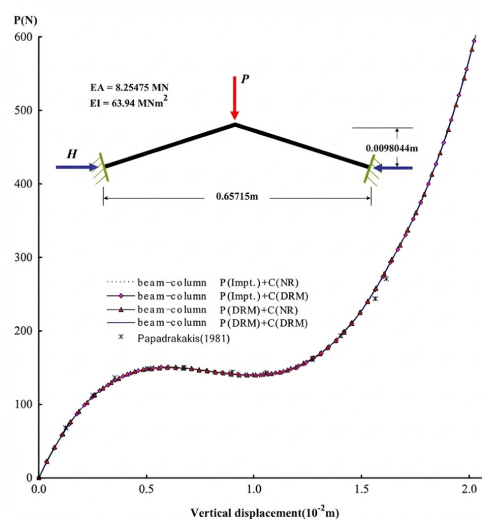


Figura 2.16: Trajetória de equilíbrio pós-crítica carga-deslocamento com ocorrência de *snap-back*; Adaptado de: (K. Lee, S. Han e Hong 2014)

2013, Alijani et al. analisam vigas em materiais funcionalmente graduados e mostram que a transição para o regime pós-encurvadura pode ocorrer por bifurcações internas associadas ao início do escoamento na fase metálica. O estudo mostra que formulações elásticas sobrestimam drasticamente a capacidade portante e que prever a resposta pós-crítica requer uma modelação simultânea das não linearidades geométrica e de material (Alijani et al. 2013).

Por sua vez, neste artigo publicado em 2014 por Lee et al. , são abordadas estruturas espaciais com ligações semi-rígidas e destaca-se a necessidade de algoritmos robustos para seguir caminhos pós-críticos com forte curvatura. O método proposto combina relaxação dinâmica com estratégias híbridas de comprimento de arco, alternando automaticamente entre controlo de deslocamento e de carga. Esta capacidade permite simular fenómenos de *snap-back* e continuar a trajetória de equilíbrio para além de singularidades, estando isso comprovado na figura 2.16 , algo que frequentemente escapa a algoritmos baseados exclusivamente em rigidez tangente (K. Lee, S. Han e Hong 2014).

Em síntese a análise pós-encurvadura em estruturas tubulares e pórticos tridimensionais exige algoritmos especializados que mantenham convergência perante instabilidades severas, garantindo previsões realistas da capacidade resistente residual para além do ponto crítico.

2.5.3 Instabilidade por Salto e Instabilidade por Recuo

Fenómenos de instabilidade súbita como instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*) acontecem quando a curva força-deslocamento da estrutura atinge pontos limite, invertendo o sentido da resposta e originando grandes variações nos deslocamentos com incrementos mínimos de carga. A captura realista destas instabilidades constitui uma das maiores dificuldades da análise não linear, exigindo algoritmos especiais capazes de continuar o percurso de equilíbrio após a singularidade da rigidez.

Um marco fundamental nesta área foi estabelecido por Crisfield, que propôs em 1981 uma versão eficiente do método de comprimento de arco. A inovação consistiu em reformular a

técnica de Riks de forma a ser compatível com a estrutura matricial do método incremental-iterativo tipo Newton-Raphson. Através da introdução de uma equação de restrição no espaço combinado força-deslocamento, o parâmetro de carga deixa de ser controlado externamente e passa a ser resolvido juntamente com os deslocamentos. Esta estratégia permite superar pontos críticos e trajetórias instáveis, tornando possível a simulação com fenómenos de instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*) (Crisfield 1981).

A análise de instabilidades em elementos estruturais curvos foi aprofundada por Pi e Bradford neste artigo publicado pelos autores em 2003, em que demonstraram que grandes rotações de torção e efeitos de encurvadura têm papel fundamental no comportamento pós-crítico de arcos metálicos sob carga concentrada. A combinação de um elemento de viga curva com integração consistente na secção transversal e um esquema comprimento do arco revela-se essencial para captar a rigidez reduzida e as mudanças bruscas na trajetória de equilíbrio que caracterizam o fenómeno (Pi e Bradford 2003).

Já Lee et al. publicam em 2011 este artigo em que propõem uma alternativa puramente vetorial baseada em relaxação dinâmica com amortecimento cinético integrada num esquema de comprimento de arco explícito. Esta formulação contorna totalmente o cálculo da matriz de rigidez tangente, reduzindo desta forma o custo computacional e aumentando a estabilidade do algoritmo em situações em que os métodos clássicos implícitos falham. Esta técnica mostrou-se eficaz em vários exemplos com instabilidade por salto (*snap-through*), reproduzindo a resposta pós-crítica sem interrupções ou quebras numéricas (K. S. Lee, S. E. Han e Park 2011).

Neste artigo publicado por Lee et al. em 2014, é introduzida a aplicação de métodos híbridos de comprimento de arco em pórticos espaciais com ligações semi-rígidas. O controlo adaptativo do incremento, alternando dinamicamente entre características de controlo de deslocamento e de carga, provou-se crucial para atravessar transições abruptas associadas a instabilidade por recuo (*snap-back*), garantindo continuidade da solução mesmo sob instabilidades altamente não lineares (K. Lee, S. Han e Hong 2014).

2.6 Estruturas Espaciais

As estruturas espaciais distinguem-se por apresentarem um comportamento estrutural tridimensional, com transferência de esforços entre os seus elementos em todas as direções do espaço. Esta configuração permite alcançar grandes vãos com elevada eficiência material, tornando as estruturas espaciais particularmente adequadas em coberturas de estádios, aeroportos, centros de exposições e outras obras de grande escala.

Contudo, a natureza tridimensional destas estruturas introduz desafios significativos na modelação e análise. A interação entre elementos, a elevada sensibilidade a imperfeições geométricas e a possibilidade de múltiplos modos de instabilidade exigem métodos numéricos avançados. Considerar a não linearidade geométrica, comportamento inelástico dos materiais e ligações semi-rígidas em muitos dos casos, é necessário para uma previsão realista da resposta das estruturas.

Nesta secção, são analisadas contribuições relevantes da literatura que abordam estes desafios e demonstram a evolução dos métodos de análise aplicados a estruturas espaciais metálicas.

2.6.1 Modelação de Elementos Viga-Coluna em 3D

O desenvolvimento da análise não linear de pórticos espaciais teve avanços decisivos desde o final da década de 1980, quando se tornou evidente que estruturas eficientes do ponto de vista resistente eram igualmente sensíveis a fenómenos de instabilidade geométrica severa.

O trabalho de Meek e Loganathan, publicado em 1989, apresentou um algoritmo robusto para o traçado automático de percursos força–deslocamento completos, incluindo regiões pós-críticas com fenómenos de instabilidade por salto (*snap-through*) e instabilidade por recuo (*snap-back*). Baseando-se nos métodos de comprimento de arco de Riks e Crisfield, a formulação Lagrangiana atualizada, aliada a estratégias de redução adaptativa do incremento e à introdução controlada de imperfeições, permitiu ultrapassar falhas numéricas típicas em pontos limite e seguir múltiplos caminhos de instabilidade em estruturas *benchmark* como arcos profundos e cúpulas geodésicas (Meek e Loganathan 1989).

Pouco depois em 1990, Ram Chandra, Krishna e Trikha ampliaram o âmbito da análise não linear ao incluir simultaneamente não linearidades geométricas e elasto-plásticas. Através do método da rigidez secante instantânea, substituindo o esquema de rigidez tangente clássico, conseguiram acelerar a convergência e evitar a singularização da matriz estrutural, enquanto a modelação de rótulas plásticas e critérios de interação para secções em I possibilitou previsões realistas da formação de mecanismos resistentes (Chandra, Krishna e Trikha 1990).

Esta evolução para modelos que captam a degradação gradual da rigidez continuou com Abbasnia e Kassimali, que publicam em 1995 este artigo em que desenvolvem uma formulação capaz de lidar com grandes deslocamentos, rotações e mecanismos de plastificação em simultâneo. A validação desta formulação com ensaios experimentais em coberturas espaciais de grande escala provou a capacidade do método para simular encurvaduras, respostas pós-crítica estável e redistribuições complexas de esforços, mesmo em malhas tridimensionais extensas (Abbasnia e Kassimali 1995).

A partir dos anos 2000, o foco da investigação começou expandir-se para a integração de efeitos adicionais e para a simplificação computacional sem perda de rigor. Hori e Sasagawa demonstraram neste artigo publicado em 2000 que formulações inelásticas de grande deformação podiam reproduzir com fidelidade o comportamento real de protótipos estruturais com milhares de elementos, continuando o percurso numérico até estados significativamente superiores aos observados experimentalmente (Hori e Sasagawa 2000).

Logo depois em 2001, Kim e Choi apresentaram uma metodologia prática para pórticos metálicos semi-rígidos, incorporando não linearidade geométrica através de funções de estabilidade, não linearidade de material com rótulas plásticas e módulo tangente CRC, e comportamento não linear das ligações com o modelo momento-rotação de Kishi-Chen. Com apenas um elemento por cada membro físico, o método juntou precisão e eficiência, tornando-se ideal para aplicação em projeto (Kim e Choi 2001).

Na década seguinte, surgem novas abordagens numéricas destinadas a superar limitações estruturais das abordagens clássicas. Greco et al. propuseram em 2006 uma formulação posicional para treliças espaciais, eliminando coordenadas locais e tornando o cálculo mais direto, enquanto mantinham a capacidade de tratar plastificação e grandes deflexões (Greco et al. 2006).

Neste artigo publicado por Zhong et al. em 2014, procura-se solução para um problema recorrente em análises elasto-plásticas, a perda de condicionamento da matriz de rigidez tangente em regimes de escoamento perfeito ou amolecimento. O método de Newton

amortecido introduzido pelos autores estabiliza o cálculo do parâmetro de consistência plástica, garantindo convergência mesmo em estados limite do material (Zhong, Ren e Wan 2014).

No mesmo ano, Lee et al. avançaram na análise pós-instabilidade propondo esquemas híbridos de comprimento de arco integrados num processo de relaxação dinâmica explícita. Esta estratégia tornou possível acompanhar de forma contínua percursos de equilíbrio com múltiplas inversões de trajetória, incluindo ligações semi-rígidas e fenómenos de instabilidade por recuo (*snap-back*), sem dependência da matriz de rigidez tangente (K. Lee, S. Han e Hong 2014).

Finalmente, em 2019, Wen, Tan e Chen publicam este artigo em que identificam inconsistências fundamentais nas formulações clássicas da rigidez geométrica, e propuseram o conceito de *qualified geometric stiffness*, garantindo conformidade com o critério de movimento de corpo rígido. Esta mudança introduzida assegura previsões consistentes da estabilidade global, independentemente da malha ou da magnitude das rotações (Wen, Q. Tan e Chen 2019).

Resumidamente, a evolução histórica mostra uma progressão clara, desde dos primeiros esforços para simplesmente seguir caminhos instáveis de equilíbrio, avançou-se para métodos que integram plasticidade, grandes deformações, ligações semi-rígidas e rigor geométrico, mantendo estabilidade numérica e eficiência computacional.

2.6.2 Efeitos de Torção, Flexo-Torção e Instabilidade Espacial

O colapso de elementos estruturais por vezes parece complicado devido à presença de flexão, torção e encurvadura, o que origina estados de encurvadura mistos e cuja análise implica a utilização de formulações capazes de captar grandes rotações, distribuição de tensões não lineares e interação entre a geometria e o comportamento do material. A motivação desta área é seguir a fidelidade física e robustez numérica, através de soluções não lineares.

No contexto da análise de pós-encurvadura de arcos metálicos com grandes rotações de torção, Pi e Bradford propuseram em 2003 um elemento finito curvo formulado em regime Lagrangiano Total, incluindo os efeitos de empenamento segundo a teoria de Vlasov e plastificação por von Mises com integração numérica consistente ao longo da secção. A formulação supera limitações de modelos que subestimavam a degradação torsional na pós-encurvadura e proporcionam resultados que apresentam elevada semelhança com os de ensaios experimentais, demonstrando a importância da consideração explícita da flexo-torção na determinação da capacidade resistente (Pi e Bradford 2003).

Posteriormente, Zhong et al. publicam em 2014 este artigo em que abordam dificuldades numéricas intrínsecas à instabilidade plástica, nomeadamente a perda de definição positiva da rigidez tangente em regimes plásticos. O método de Newton amortecido proposto estabiliza a iteração incremental-iterativa, assegurando convergência robusta na proximidade de rotações torsionais elevadas e mecanismos localizados, condição essencial para análises espaciais com grandes não linearidades (Zhong, Ren e Wan 2014).

Num âmbito estrutural mais amplo, neste artigo publicado em 2014 por Dou et al. investiga-se a interação entre modos globais e locais de instabilidade em arcos treliçados tubulares de secção triangular, recorrendo a elementos de viga tridimensionais e imperfeições geométricas iniciais. A encurvadura dos banzos (os elementos longitudinais da secção triangular) e diagonais pode controlar o colapso em configurações esbeltas, reduzindo significativamente a

ductilidade e capacidade resistente. Os autores consolidam os resultados paramétricos numa curva unificada de verificação de resistência, reforçando a pertinência prática da modelação adequada da instabilidade espacial acoplada (Dou et al. 2018).

Em conjunto, todos estes estudos evidenciam que a previsão fiável de instabilidades de flexão, tensão, e comportamentos pós-críticos em estruturas espaciais requer simultaneamente representação rigorosa de empenamento, modelação elasto-plástica consistente, e técnicas numéricas estáveis perante rotações acentuadas e perda de rigidez estrutural.

2.6.3 Ligações Semi-Rígidas

A consideração da flexibilidade das ligações viga-coluna revelou-se essencial para prever com rigor a rigidez global, os mecanismos de plastificação e a capacidade resistente de estruturas metálicas. A evolução dos métodos reflete a transição de modelos idealizados para representações com realismo físico, mantendo viabilidade computacional para aplicação prática.

Hsieh e Deierlein apresentam em 1991 este artigo, em que estabelecem uma das primeiras formulações tridimensionais integradas para análise não linear com ligações semi-rígidas. O modelo momento-rotação baseou-se na equação de Richard-Abbott, calibrada com vários testes experimentais, permitindo representar a degradação de rigidez da ligação sem dependência de ensaios específicos por estrutura. A ligação é incorporada como elemento independente de comprimento nulo e a análise combina efeitos de segunda ordem, através de uma formulação Lagrangiana atualizada, com rótulas plásticas concentradas. Os resultados demonstraram que a resistência da ligação influencia decisivamente a formação de mecanismos e os deslocamentos laterais no regime pós-elástico (Hsieh e Deierlein 1991).

Com foco em aplicações práticas, Kim e Choi propõem em 2001 um método eficiente para pórticos espaciais semi-rígidos, capaz de integrar simultaneamente não linearidade geométrica via funções de estabilidade (efeitos $P - \delta$ e $P - \Delta$), rótulas plásticas com superfícies de cedência e ligações semi-rígidas descritas pelo modelo não linear de Kishi-Chen. Um único elemento por barra mostrou-se suficiente para captar a instabilidade global, mantendo custo computacional relativamente baixo (Kim e Choi 2001).

Neste estudo publicado por Chiorean em 2009, é exposto o desenvolvimento do NEFCA-3D (Nonlinear Elastic Finite Curved Arc), um método de análise não linear de arcos e elementos curvos tridimensionais, recorrendo a uma formulação de zona plástica baseada na matriz de flexibilidade, permitindo simular plastificação distribuída ao longo do membro com apenas um elemento físico por barra. As ligações semi-rígidas, introduzidas como molas rotacionais não lineares, influenciam diretamente o estado interno das seções. O algoritmo de comprimento de arco assegura estabilidade numérica no pós-colapso (Chiorean 2009).

Neste artigo publicado por Ngo-Huu et al. em 2012, é exposta a otimização do equilíbrio entre precisão e custo computacional, propondo uma formulação de segunda ordem com rótulas plásticas e elementos específicos para ligações semi-rígidas. A relação momento-rotação segue novamente o modelo de Kishi-Chen e as funções de estabilidade permitem captar fenómenos de instabilidade espacial acoplada, com discretização reduzida. Os resultados obtidos demonstraram excelente concordância com análises de zona plástica e soluções numéricas avançadas (Ngo-Huu, Nguyen e Kim 2012).

Finalmente, em 2014 Lee et al. apresentam este estudo em que estendem o método de relaxação dinâmica a pórticos espaciais com ligações semi-rígidas, integrando-o com técnicas

de controlo de comprimento de arco híbrido. O algoritmo permite traçar percursos de equilíbrio instáveis, incluindo fenómenos de instabilidade por salto (*snap-through*) e recuo (*snap-back*), eliminando a necessidade de derivar ou inverter matrizes de rigidez tangente. Esta abordagem mostrou robustez numérica e aplicabilidade a estruturas altamente não lineares com comportamento complexo de ligação (K. Lee, S. Han e Hong 2014).

A literatura revista prova que a modelação rigorosa das ligações semi-rígidas combinada com estratégias de análise eficientes, é fundamental para prever de forma correta efeitos de instabilidade, redistribuição plástica e capacidade resistente em estruturas metálicas tridimensionais.

Embora a maioria dos métodos desenvolvidos e discutidos nos estudos revistos tenha sido originalmente formulada no contexto das estruturas civis, os mecanismos numéricos apresentados são diretamente aplicáveis a estruturas tubulares automóveis, nomeadamente chassis do tipo *spaceframe* e *roll-cages*. Nestes sistemas, tal como em estruturas espaciais de grande escala, verificam-se interações complexas entre instabilidade local e global, grandes deslocamentos e, em muitos casos, comportamento pós-elástico.

Softwares de análise estrutural amplamente utilizados na prática de engenharia, como o SolidWorks Simulation, ANSYS, Inventor Nastran e ABAQUS, recorrem a variantes dos métodos descritos ao longo deste capítulo, incluindo esquemas incrementais-iterativos, controlo de percurso por comprimento de arco e estratégias de estabilização numérica para lidar com perda de rigidez e instabilidades geométricas.

A revisão bibliográfica apresentada teve como principal objetivo proporcionar um enquadramento teórico sólido que permita compreender de que forma estes programas resolvem os problemas não lineares que lhes são colocados, bem como clarificar a evolução histórica dos métodos numéricos face às dificuldades encontradas pelos investigadores, em particular na análise de regimes pós-críticos caracterizados por fenómenos como instabilidade por salto (*snap-through*), instabilidade por recuo (*snap-back*) e bifurcações de equilíbrio.

Este enquadramento é essencial para uma utilização informada e crítica das ferramentas de elementos finitos na análise de estruturas tubulares automóveis, garantindo que os resultados numéricos obtidos refletem o comportamento físico real da estrutura e não limitações do algoritmo de cálculo.

2.7 Contexto e Versatilidade: Civil e Aeroespacial

Na engenharia civil, os *spaceframes* são a solução de eleição para infraestruturas de escala monumental e coberturas complexas. O exemplo máximo desta aplicação em infraestruturas é a Terceira Ponte de Pingnan, atualmente a ponte em arco com o maior vão do mundo. O seu arco principal é um *spaceframe* tridimensional de elevada rigidez, constituído por arcos paralelos interligados por contraventamento transversal, demonstrando a capacidade destas estruturas em suportar cargas massivas com estabilidade global (Figura 2.17) (Zheng et al. 2021).

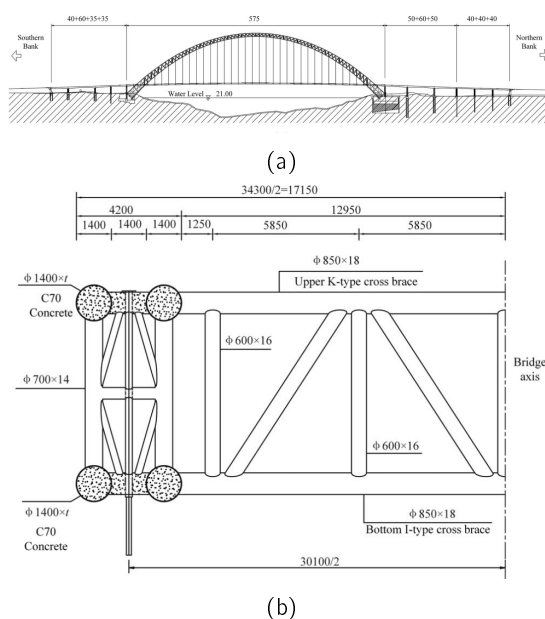


Figura 2.17: Disposição geral da Terceira Ponte de Pingnan, (a) Disposição geral (unidades: m), (b) diagrama da secção do arco principal (unidades: mm); Fonte: (Zheng et al. 2021).

No domínio da arquitetura de grande vão, edifícios icônicos como o *National Grand Theater* em Pequim (Figura 2.18) utilizam sistemas de treliças espaciais para criar vãos livres de colunas, onde a rigidez é assegurada pela organização tridimensional dos elementos, permitindo geometrias curvas complexas (Dong, Zhao e Xing 2012).

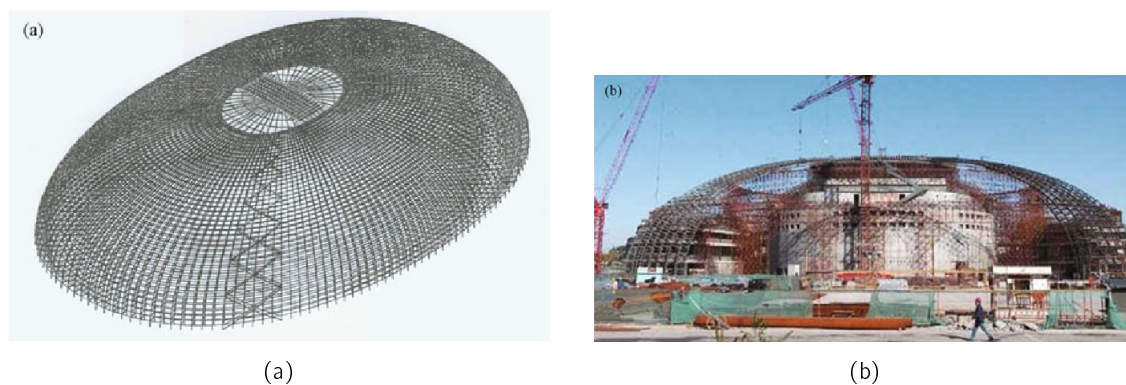


Figura 2.18: *National Grand Theater*, (a) Modelo CAD, (b) Estrutura em construção; Fonte: (Dong, Zhao e Xing 2012).

Por outro lado, no setor aeroespacial e aeronáutico, onde a relação rigidez-peso é o parâmetro crítico, as treliças espaciais assumem um papel estrutural primário na otimização de massa. Um exemplo de elevada afinidade técnica com o presente trabalho é o do avião ligeiro SAFAT-01 (Figura 2.19). A sua fuselagem é inteiramente construída em tubos de aço 4130N soldados, formando um esqueleto treliçado tridimensional (Yousif, Zein e El-sayed 2012). Esta configuração é tecnicamente análoga aos chassis de *Formula Student*, utilizando a triangulação para resistir a esforços de flexão e torção com o mínimo de massa possível.

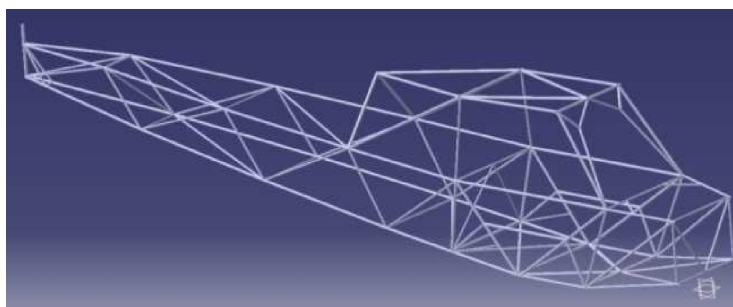


Figura 2.19: Configuração *Treliça Espacial de suporte para fuselagem*; Fonte: (Yousif, Zein e Elsayed 2012).

Adicionalmente, a configuração *Truss Braced Wing* (TBW), ilustrada na Figura 2.20, demonstra o uso de treliças espaciais para suportar asas de aeronaves transônicas, permitindo reduzir momentos fletores e aumentar a eficiência estrutural global (Gur et al. 2010).

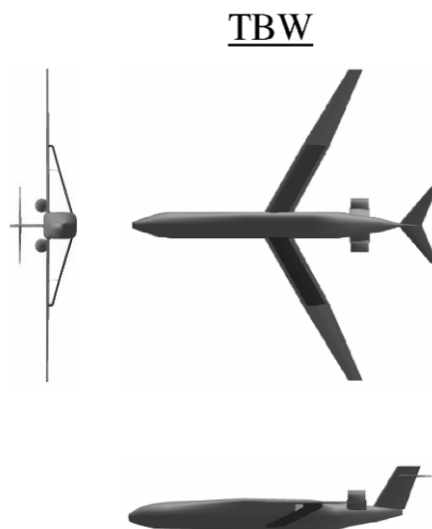


Figura 2.20: Configuração *Truss Braced Wing*; Adaptado de: (Gur et al. 2010).

A aplicação destes conceitos transita de forma natural para a indústria automóvel. Como será detalhado na secção seguinte, os princípios de análise de instabilidade e otimização da secção transversal dos elementos tubulares — consolidados na literatura civil e aeronáutica — constituem os pilares para garantir a segurança (*crashworthiness*) e a rigidez dinâmica de veículos de alta performance.

2.8 Engenharia Automóvel

Na engenharia automóvel, as treliças espaciais são amplamente utilizadas como solução estrutural para chassis de veículos de competição, protótipos experimentais e aplicações recreativas. Os *spaceframes* tubulares permitem obter elevada rigidez estrutural e proteção dos ocupantes com peso relativamente baixo, recorrendo a geometrias tridimensionais

trianguladas de fácil fabrico. Nesta secção apresentam-se exemplos da aplicação de estruturas treliçadas espaciais em diferentes tipologias de veículos automóveis, evidenciando a utilização recorrente de chassis tubulares como estruturas primárias em contextos onde a simplicidade construtiva e a eficiência estrutural são importantes.

Nain e Sharma apresentam a aplicação de um chassis tubular do tipo estrutura treliçada tridimensional tubular desenvolvido para um veículo Formula SAE. A estrutura baseia-se numa treliça espacial tridimensional constituída por tubos de secção circular, organizados segundo uma lógica de triangulação nó-a-nó, assegurando um comportamento estrutural dominado por esforços axiais. A geometria global do chassis é ilustrada na Figura 2.21, onde se observa a organização tridimensional da treliça, incluindo os roll hoops, os montantes longitudinais e as diagonais que definem os diferentes compartimentos do chassis (Nain e Sharma 2015).

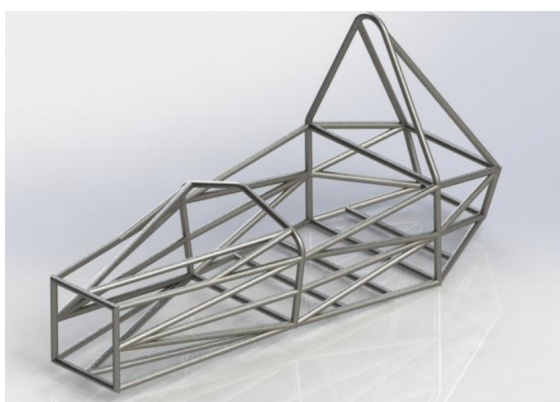


Figura 2.21: Configuração do Chassis; Fonte: (Nain e Sharma 2015).

Seelam et al analisam a aplicação de uma estrutura treliçada tridimensional tubular no contexto de veículos off-road do tipo buggy, onde o chassis funciona simultaneamente como elemento resistente e como sistema de proteção do ocupante. A estrutura, apresentada na figura 2.22, é composta por tubos circulares interligados formando uma treliça espacial fechada, típica de roll cages automóveis, concebida para distribuir cargas de impacto através de caminhos estruturais triangulados. O estudo ilustra de forma clara a utilização da treliça 3D como solução estrutural leve, modular e de elevada rigidez em veículos recreativos e de competição, evidenciando a sua adequação para aplicações automóveis (Seelam, Ahmed e Sachidananda 2020).

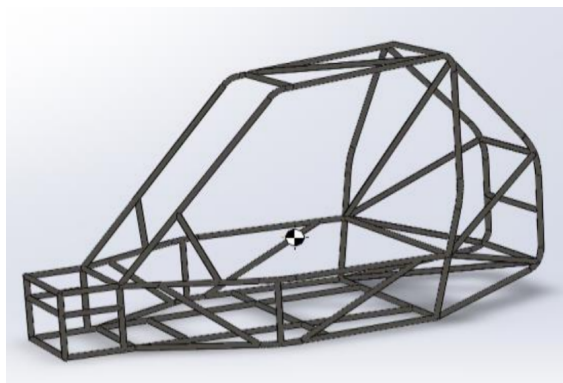
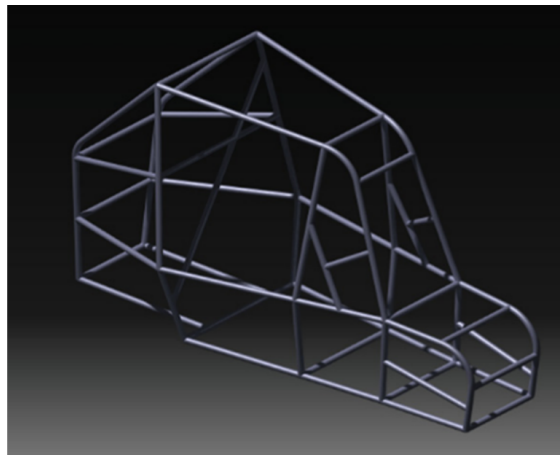
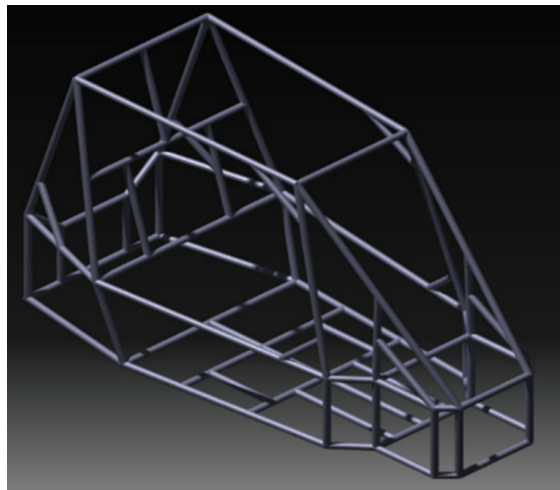


Figura 2.22: Configuração do Chassis para Buggy; Fonte: (Seelam, Ahmed e Sachidananda 2020).

Aakash et al apresentam o projeto e a análise de um chassis tubular do tipo *spaceframe* para um veículo todo-o-terreno, concebido como uma estrutura treliçada tridimensional destinada a garantir rigidez global, proteção dos ocupantes e baixo peso. O chassis é constituído por tubos circulares dispostos segundo uma geometria triangulada no espaço, formando um roll cage integral que funciona simultaneamente como elemento resistente e de segurança. A aplicação do space frame é ilustrada na figura 2.23 , onde se observam as vistas lateral, frontal e isométrica de duas configurações de chassis tubulares. Estas figuras permitem identificar a organização tridimensional dos montantes, diagonais e arcos de proteção, evidenciando o papel da triangulação espacial na distribuição de cargas e na resistência a impactos, torção e capotamento (Prabhu, Prashanth e Senthilkumar 2020).



(a)



(b)

Figura 2.23: Chassis Tubular para veículo todo Terreno, (a) configuração 1, (b) configuração 2; Fonte: (Prabhu, Prashanth e Senthilkumar 2020).

Srivastava et al apresentam a aplicação de um roll cage tubular do tipo space frame no contexto de um veículo Go-Kart. O chassis é constituído por tubos de secção circular organizados numa configuração espacial triangulada, formando um espaço estrutural fechado. A geometria do *spaceframe* é claramente ilustrada nas Figura 2.24, onde se observa a disposição dos montantes longitudinais, diagonais e arcos de proteção. O artigo constitui assim um exemplo representativo da utilização de estruturas treliçadas espaciais 3D na engenharia automóvel, reforçando o papel dos *spaceframes* tubulares como solução recorrente em aplicações onde a simplicidade construtiva, o baixo custo e a eficiência estrutural são prioritários (Srivastava et al. 2021).

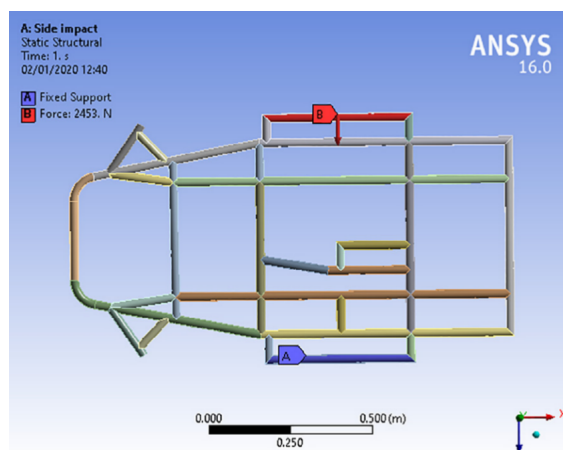


Figura 2.24: Configuração do Chassis para Go kart; Fonte: (Srivastava et al. 2021).

Patel et al apresentam a aplicação de um chassis tubular do tipo *spaceframe* no desenvolvimento de um veículo automóvel movido a energia solar. A estrutura é constituída por tubos de aço soldados, organizados segundo uma configuração tridimensional triangulada, formando uma treliça espacial que funciona como estrutura portante principal e sistema de proteção do condutor. A geometria global do *spaceframe* é ilustrada na Figura 2.25, onde se observa o modelo tridimensional do chassis, evidenciando a disposição espacial dos montantes longitudinais, diagonais e arcos de proteção. Adicionalmente, as Figura 2.26 mostra o chassis fabricado e o veículo completo (Patel et al. 2022).

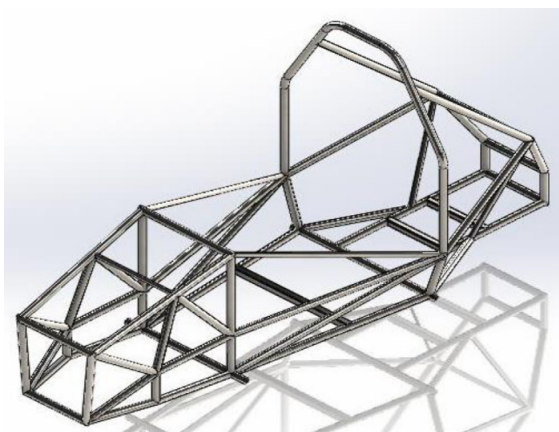


Figura 2.25: Configuração do Chassis para veículo solar; Fonte: (Patel et al. 2022).



(a)



(b)

Figura 2.26: Chassis para veículo solar, (a) chassis fabricado, (b) veículo Solar Completo; Adaptado de: (Patel et al. 2022).

Os exemplos apresentados mostram que os *spaceframes* tubulares constituem uma solução estrutural consolidada na engenharia automóvel, sendo aplicáveis a veículos de competição, todo-o-terreno, karts e veículos experimentais. A organização tridimensional dos tubos em configurações trianguladas permite combinar rigidez, leveza e proteção estrutural de forma eficaz. Estes trabalhos evidenciam a versatilidade das estruturas treliçadas espaciais no setor automóvel, confirmando o seu papel como solução construtiva simples e eficiente para chassis automóveis em diferentes campos de utilização.

As estruturas treliçadas espaciais constituem uma tipologia estrutural madura e amplamente consolidada, com aplicações que atravessam múltiplos domínios da engenharia, desde edifícios e pontes de grande vão até chassis tubulares automóveis e sistemas estruturais em contextos aeroespaciais. O seu desempenho não resulta apenas das propriedades dos materiais utilizados, mas sobretudo da organização geométrica dos elementos e da triangulação espacial, que asseguram uma transmissão eficiente de esforços e elevada estabilidade global.

A recorrência deste tipo de estrutura em contextos tão distintos demonstra que as treliças espaciais oferecem respostas particularmente eficazes a problemas de rigidez, estabilidade e redução de massa, mantendo simultaneamente simplicidade construtiva e previsibilidade do comportamento estrutural.

Este facto reforça a relevância do seu estudo e da sua aplicação no contexto da competição automóvel, onde a otimização da relação peso–rigidez é determinante. A utilização de

chassis do tipo *spaceframe* permite reduzir massa estrutural sem comprometer a rigidez global, contribuindo para um comportamento dinâmico mais controlável e previsível do veículo, aspetos essenciais em aplicações de elevado desempenho.

Capítulo 3

Método dos Elementos Finitos

3.1 Sistemas Discretos

O método de elementos finitos é nos dias de hoje a principal ferramenta computacional para aplicações em ciência e engenharia. Esta ferramenta surge pela segunda metade do século XX, com os trabalhos pioneiros de Courant (Courant 1943), Clough (Clough 1960) e Argyris (J. H. Argyris 1965). Neste capítulo serão ilustrados alguns conceitos fundamentais através da resolução de sistemas discretos formados por molas e barras.

3.1.1 Elementos de barra

Considere-se um elemento com 2 nós e 2 graus de liberdade, correspondentes a 2 deslocamentos axiais $u_1^{(e)}$ e $u_2^{(e)}$, onde $^{(e)}$ representa um elemento finito genérico como o presente na figura 3.1. Pode-se assumir um comprimento L , área de secção constante A e módulo de elasticidade E para o elemento, que suporta apenas esforços axiais (Ferreira e Fantuzzi 2020).

A deformação da barra em análise é obtida da seguinte forma

$$\epsilon = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}} \quad (3.1)$$

enquanto que a tensão na barra é dada pela lei de Hooke como

$$\sigma = E^{(e)}\epsilon = E^{(e)} \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}} \quad (3.2)$$

Os esforços axiais resultantes são obtidos através da integração das tensões na área da secção transversal da barra como

$$N = A^{(e)}\sigma = A^{(e)}(E^{(e)}\epsilon) = (EA)^{(e)} \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}} \quad (3.3)$$

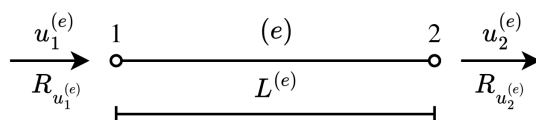


Figura 3.1: Elemento finito de barra com 2 nós

Tendo em conta o equilíbrio estático das forças axiais $R_{u_1^{(e)}}$ e $R_{u_2^{(e)}}$ de acordo com a figura 3.1 tais forças nodais podem ser expressas como

$$R_{u_2^{(e)}} = -R_{u_1^{(e)}} = N = \left(\frac{EA}{L}\right)^{(e)} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) \quad (3.4)$$

Escrevem-se então as equações da seguinte forma (tendo em conta que $k^{(e)} = \frac{EA}{L}$)

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{Bmatrix} R_{u_1^{(e)}} \\ R_{u_2^{(e)}} \end{Bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento de barra, $\mathbf{a}^{(e)}$ é o vetor de deslocamento, e $\mathbf{q}^{(e)}$ representa o vetor das forças nodais (Ferreira e Fantuzzi 2020). No caso de se considerar um elemento de barra, este poderá sofrer a ação de forças uniformemente distribuídas, sendo assim necessário transformar essas forças em forças nodais por (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{q}^{(e)} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} - \frac{(bL)^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} \quad (3.6)$$

sendo $\mathbf{f}^{(e)}$ o vetor nodal das forças equivalentes às forças distribuídas $\mathbf{b}^{(e)}$.

3.1.2 Equilíbrio nos nós

Na equação 3.6 é demonstrada a relação de equilíbrio para um elemento, mas é também necessário obter as equações de equilíbrio para a estrutura. Então, é necessário juntar todos os elementos de modo que se possa obter um sistema global de equações. Para fazer isto é necessário que em cada nó j a soma de todas as forças provenientes dos vários elementos adjacentes, seja igual à carga aplicada no nó j . obtém-se então (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\sum_{e=1}^{n_e} R^{(e)} = f_j \quad (3.7)$$

onde n_e representa o número de elementos na estrutura, resultando num sistema de equações global na forma

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

escrita de forma mais compacta

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.9)$$

Aqui $\mathbf{K}$ representa a matriz de rigidez do sistema, $\mathbf{a}$ o vetor dos deslocamentos e $\mathbf{f}$ o vetor das forças do sistema (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.1.3 Procedimento Geral do FEM

Em qualquer problema de elementos finitos, alguns passos de calculo têm de ser respeitados:

- define-se um conjunto de elementos ligados nos nós,
- para cada elemento, calcula-se a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ e o vetor de força $\mathbf{f}^{(e)}$,
- montar a contribuição de todos os elementos no sistema global $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$,
- modificar o sistema global impondo condições de fronteira essenciais(deslocamentos),
- resolver o sistema global e obter os deslocamentos globais $\mathbf{a}$,
- para cada elemento, avaliar as tensões e deformações (pós processamento)

3.2 Elementos Unidimensionais

Nesta secção, analisam-se elementos estruturais carregados axialmente, elementos esses aos quais podemos chamar barras ou treliças.

Uma treliça está ligada a outros elementos apenas através de rótulas, que são ligações que não restringem as rotações. As treliças são modeladas como elementos discretos porque apenas são avaliadas a força axial, seja esta tração ou compressão, e a respetiva elongação.

Em geral, um elemento finito é formulado num domínio de referência e, por isso, é realizada uma transformação de coordenadas que abrange tanto a geometria como a(s) variável(is) dependente(s). Funções de interpolação são usadas para ambas as transformações (Ferreira e Fantuzzi 2020).

De acordo com o grau de aproximação usado tanto para a geometria como para as variáveis dependentes, as formulações de elementos finitos classificam-se como:

- Superparamétrica: A aproximação usada para a geometria é de ordem superior à usada para a variável dependente.
- Isoparamétrica: O mesmo grau de aproximação, é usado para a geometria e para as variáveis dependentes.
- Subparamétrica: A aproximação usada para a geometria é de ordem inferior à usada para a variável dependente.

Na presente secção, é considerada uma formulação de elementos finitos isoparamétrica para o problema de barra/treliça.

3.2.1 Um Elemento de Barra

Considerando o elemento finito com dois nós mostrado na figura 3.2, com área de secção constante (área A) e comprimento $L=2a$. O elemento de barra pode suportar apenas esforços axiais σ_x , sendo estes uniformemente distribuidos por todas as secções de corte. O equilíbrio do elemento de barra pode ser expresso de acordo com o Princípio de Hamilton como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - (\delta U - \delta W)) dt = 0 \quad (3.10)$$

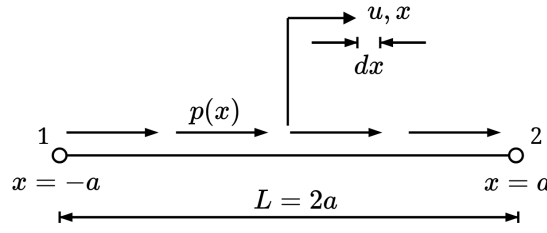


Figura 3.2: Um elemento de barra no seu sistema de coordenadas local

onde δ representa a variação, K a energia cinética, U a energia interna (deformações) e W o trabalho externo resultante das cargas aplicadas. Recorda-se que $\pi = u - w$ representa a energia potencial total do sistema. A energia cinética pode ser expressa como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dV = \frac{\rho A}{2} \int_{-a}^a \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.11)$$

onde V indica o volume da barra e ρ a respetiva densidade, e através da avaliação da variação da energia cinética e integrando por partes obtêm-se a expressão

$$\delta K = -\rho A \int_{-a}^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx \quad (3.12)$$

o trabalho interno realizado/energia de deformação acumulada pelo elemento de barra é

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{A}{2} \int_{-a}^a \sigma_x \epsilon_x dx \quad (3.13)$$

a relação deformação-deslocamento é

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.14)$$

assumindo um comportamento linear elástico do material é possível afirmar que

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.15)$$

onde E é o módulo de elasticidade.

$$U = \frac{EA}{2} \int_{-a}^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.16)$$

a variação da energia interna é derivada como

$$\delta U = EA \int_{-a}^a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \quad (3.17)$$

se considerar p como sendo as forças aplicadas por unidade de comprimento, o trabalho externo virtual em cada elemento é

$$\delta W = \int_{-a}^a p \delta u dx \quad (3.18)$$

finalmente, o equilíbrio a barra é dado por

$$\rho A \int_{-a}^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx + EA \int_{-a}^a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx - \int_{-a}^a p \delta u dx = 0 \quad (3.19)$$

que também é denominada forma fraca ou variacional do problema da barra. Considere-se agora um elemento finito com dois nós, tal como ilustrado na figura 3.3. Os deslocamentos axiais podem ser interpolados como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$u = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad (3.20)$$

onde a função de forma é definida como

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.21)$$

no sistema de coordenadas natural $\xi \in [-1, +1]$. A interpolação 3.20 pode ser definida em forma de matriz como

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.22)$$

a deformação do elemento pode ser calculada no sistema natural após a transformação de coordenadas $x = a\xi$ ($dx = a d\xi$) como

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^{eT} EA \int_{-a}^a \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} \frac{d\mathbf{N}}{dx} dx \mathbf{u}^e \quad (3.23)$$

e recordando que $\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi}$ e que $dx = a d\xi$ como

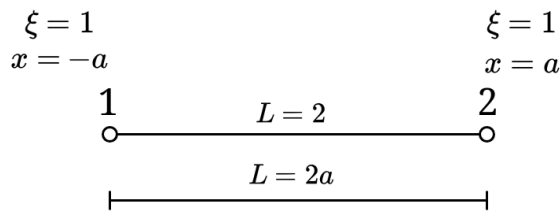


Figura 3.3: Elemento de barra com dois nós

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^{eT} EA \int_{-1}^1 \frac{1}{a^2} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} a d\xi \mathbf{u}^e = \delta \mathbf{u}^{eT} \frac{EA}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi \mathbf{u}^e \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{N}' = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi}$, e

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (3.25)$$

a matriz de rigidez do elemento, $\mathbf{K}^e$, é dada por

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi \quad (3.26)$$

O integral é avaliado no sistema natural considerando o mapeamento $x = a\xi$, equivalente a uma transformação geométrica. A matriz Jacobiana é introduzida para tal transformação, que no problema em questão é $|J| = \frac{dx}{d\xi} = a$. Para problemas unidimensionais o procedimento pode ser feito sem introduzir formalmente a matriz jacobiana. Neste elemento as derivadas das funções de forma são (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

neste caso a matriz de rigidez pode ser dada na sua forma explícita como

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{a} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

usando $L = 2a$ obtém-se a mesma matriz de rigidez como no método direto demonstrado no capítulo anterior, o trabalho virtual realizado pelas forças externas é definido como

$$\delta W^e = \int_{-a}^a \rho \delta u dx = \int_{-1}^1 \rho \delta u a d\xi = \delta \mathbf{u}^{eT} a \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T d\xi \quad (3.29)$$

ou

$$\delta W^e = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (3.30)$$

onde os vetores das forças nodais equivalentes às forças distribuídas é dado pela expressão seguinte caso dadas forças sejam uniformemente distribuídas

$$\mathbf{f}^e = a \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T d\xi = \frac{a\rho}{2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} d\xi = a\rho \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

a matriz de massa da barra derivada da variação da energia cinética como

$$\mathbf{M}^e = \rho A \int_{-a}^a \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx = \rho A \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} a d\xi \quad (3.32)$$

incluindo a definição do vetor das funções de forma, a matriz de massa consistente toma a forma

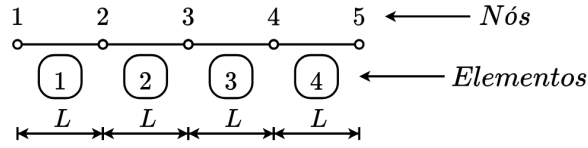


Figura 3.4: Barra discretizada em 4 elementos

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A}{4} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} [1 - \xi \quad 1 + \xi] a \, d\xi = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

é possível evitar a integração da matriz de massa considerando a matriz de massa concentrada como

$$\mathbf{M}^e = \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

que representa a massa total da barra dividida por 2, pois foi considerado um elemento de dois nós. Para um sistema de barras, a contribuição de cada elemento deve ser montada. Por exemplo, na barra da figura 3.4, consideramos 5 nós e 4 elementos. Neste caso, o vetor de deslocamentos da estrutura é dado por (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5] \quad (3.35)$$

Somando a contribuição de todos os elementos, obtemos energia de deformação, o trabalho das forças externas e a energia cinética como

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^T \sum_{e=1}^4 \mathbf{K}^e \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.36)$$

$$\delta W = \delta \mathbf{u}^T \sum_{e=1}^4 \mathbf{f}^e = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (3.37)$$

$$\delta K = \delta \mathbf{u}^T \sum_{e=1}^4 \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.38)$$

onde $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{f}$ são respectivamente a matriz de rigidez da estrutura, matriz das massas e vetor da força. A matriz de rigidez é então montada (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{elemento 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{elemento 2}} + \dots \right] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde o vetor das forças equivalentes é dado por

$$\mathbf{f} = a\rho \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

e o vetor das forças nodais globais por

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

um procedimento de montagem semelhante aplica-se também à matriz de massa. Obtemos assim um sistema global de equações na forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.42)$$

a ser resolvido após a imposição das condições de fronteira, conforme explicado anteriormente.

O problema algébrico (3.42) pode ser utilizado para considerar o problema estático, quando $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, ou o problema de vibrações livres, quando $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, ou a análise no domínio do tempo através do método de Newmark. Para resolver o problema de vibrações livres a solução tem de ser procurada na forma $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}e^{i\omega t}$, pelo que o problema algébrico final se torna (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}$ representa o vetor próprio e ω^2 o valor próprio.

3.2.2 Cálculo da Tensão

A tensão no elemento genérico é definida pela equação 3.15. Incluindo a aproximação por elementos finitos e usando a transformação de coordenadas, leva a

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{u}^e = E \frac{d\mathbf{N}}{a d\xi} \mathbf{u}^e = \frac{E}{2a} ((u_2)^{(e)} - (u_1)^{(e)}) \quad (3.44)$$

onde u_1 e u_2 são os deslocamentos nodais do elemento genérico (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.2.3 Integração Numérica

Os integrais que surgem a formulação variacional podem ser resolvidos através de integração numérica, como por exemplo, pela Quadratura de Gauss, que é apresentada nesta secção como uma solução para integrais unidimensionais (Ferreira e Fantuzzi 2020). Considera-se uma função $f(x)$, $x \in [-1, 1]$. No método de Gauss, o integral

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (3.45)$$

é substituído por uma soma de pontos Gauss p , na qual nesses pontos a função é multiplicada por alguns pesos como

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^p f(x_i) W_i \quad (3.46)$$

onde W_i é o peso do i -ésimo ponto (Ferreira e Fantuzzi 2020). Na tabela 3.1 as coordenadas e pesos da técnica de Gauss são apresentados. Esta técnica é exata sempre que $f(x)$ é um polinómio de grau p , empregando $\frac{1}{2}(p+1)$ pontos de integração. Quando $p+1$ é ímpar, deve ser selecionado o número inteiro imediatamente superior. Para funções quadráticas, $f(x)$ ($p=2$), dois pontos de integração representam a integração exata sobre o elemento. Para funções $f(x)$ lineares ($p=1$) ou constantes ($p=0$), um ponto de integração é exato, uma integração assim é designada integração reduzida (Ferreira e Fantuzzi 2020).

No presente caso, consideram-se funções de interpolação linear; assim, o integral de **K**^e 3.28 é constante, requerendo apenas um ponto de Quadratura, enquanto o integral de **M**^e 3.33 é quadrático, exigindo uma quadratura de dois pontos. O integral de **f**^e 3.31 é calculado de forma exata com uma integração de apenas um ponto, visto que a função integrada é linear. Na Fig. 3.5 ilustra-se a localização dos pontos para a integração de Gauss (Ferreira e Fantuzzi 2020).

Tabela 3.1: Coordenadas e pesos para integração de Gauss

n	x_i	W_i
1	0.0	2.0
2	± 0.5773502692	1.0
3	± 0.7745966692 0.0	0.555 555 555 6 0.888 888 888 9
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.347 854 845 1 0.652 145 154 9

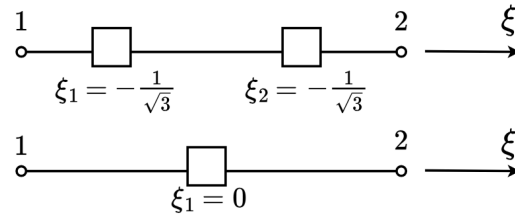


Figura 3.5: Quadratura de Gauss unidimensional para 2 e 1 pontos de integração

3.3 Elementos de Barra Bidimensionais

O foco desta secção é a análise estática e de vibração livre de treliças bidimensionais. Sendo estas compostas por elementos de barra orientados num sistema Cartesiano 2D, o passo fundamental da análise é a transformação de coordenadas. Este processo transpõe as matrizes locais de cada elemento (rigidez, massa e vetor de forças) para o sistema de coordenadas global da estrutura. Lembra-se que, por definição, as treliças suportam unicamente forças axiais (compressão e tração) e que todas as cargas são aplicadas nos nós.

3.3.1 Treliças no Espaço 2D

Um elemento de uma treliça 2D típica, localizada no plano global $x - y$ (fig3.6), possui 2 graus de liberdade no seu sistema local ($x' - y'$). Estes graus de liberdade correspondem aos deslocamentos locais u'_1 e v'_1 , definidos pelo vetor (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{u}'^T = \begin{bmatrix} u'_1 & v'_1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

por sua vez, ao ser considerado no sistema de coordenadas global, o mesmo elemento passa a ser descrito com 4 graus de liberdade, como expresso no vetor de deslocamentos global

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

a relação entre os deslocamentos globais e locais é dada por

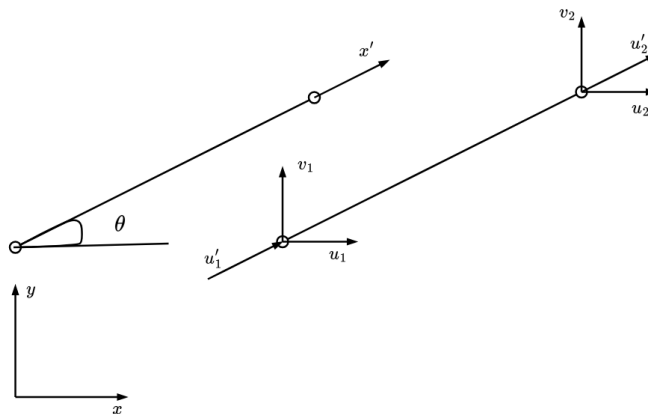


Figura 3.6: Elemento de Barra 2D: graus e liberdade locais e globais

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{T}]\mathbf{P} \quad (3.49)$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

em que θ é o ângulo entre o eixo local x' e o eixo global x , ou em forma matricial como

$$\mathbf{u}' = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.51)$$

sendo a matriz $\mathbf{L}$ definida como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

os elementos l, m da matriz L podem ser definidos pelas coordenadas nodais como

$$l = \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{L_e}; \quad m = \sin \theta = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \quad (3.53)$$

sendo L_e o comprimento do elemento

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.54)$$

3.3.2 Matriz de Rigidez

No sistema de coordenadas local, a matriz de rigidez do elemento de treliça 2D é dada pela rigidez da barra, como anteriormente:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

no sistema de coordenadas local, a energia de deformação deste elemento é dada por

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}'^T \mathbf{K}' \mathbf{u}' \quad (3.56)$$

substituindo $\mathbf{u}' = \mathbf{L}\mathbf{u}$ em 3.56 obtemos

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L}] \mathbf{u} \quad (3.57)$$

agora possível expressar a matriz de rigidez global como

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} \quad (3.58)$$

ou

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} I^2 & Im & -I^2 & -Im \\ Im & m^2 & -Im & -m^2 \\ -I^2 & -Im & I^2 & Im \\ -Im & -m^2 & Im & m^2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

3.3.3 Matriz de Massas

A matriz de massa tem também de ser convertida para o sistema Cartesiano global. As matrizes de massa consistente $\mathbf{M}'_C$ e massa concentrada $\mathbf{M}'_L$ para a treliça, na base local, são respetivamente (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{M}'_C = \frac{\rho A}{6} L_e \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

e

$$\mathbf{M}'_L = \frac{\rho A}{2} L_e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

partindo da energia cinética, a definição da matriz de massa no sistema de referência global pode ser derivada como

$$K^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}'^T \mathbf{M}' \dot{\mathbf{u}}' = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T [\mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L}] \dot{\mathbf{u}} \quad (3.62)$$

é agora possível expressar a matriz de massa global como

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L} \quad (3.63)$$

para a matriz de massa consistente

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A}{6} L_e \begin{bmatrix} 2I^2 & 2Im & I^2 & Im \\ 2Im & 2m^2 & Im & m^2 \\ I^2 & Im & 2I^2 & 2Im \\ Im & m^2 & 2Im & 2m^2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e para a matriz de massa concentrada

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A}{2} L_e \begin{bmatrix} I^2 & Im & 0 & 0 \\ Im & m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I^2 & Im \\ 0 & 0 & Im & m^2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Ao contrário da rigidez, as massas translacionais nunca se anulam, pelo que todas as massas translacionais devem ser retidas na matriz de massa local (Ferreira e Fantuzzi 2020). Por outras palavras, definindo $Im = 0$ e 1 nos restantes casos nas definições 3.64 e 3.65 como

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A}{6} L_e \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

e para a matriz de massa concentrada

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A}{2} L_e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

3.3.4 Pós-cálculo da Tensão

No sistema de coordenadas local, as tensões são definidas como $\sigma_x = E\epsilon_x$. Tendo em conta a definição de deformação na barra, obtemos (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\sigma_x = E \frac{v'_1 - u'_1}{L_e} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}' \quad (3.68)$$

por transformação das coordenadas locais para globais, obtemos as tensões em função dos deslocamentos como

$$\sigma_x = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{u} = \frac{E}{L_e} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.69)$$

3.4 Elementos de barra Tridimensionais

Esta secção generaliza o modelo de treliça 2D do capítulo anterior para treliças no espaço Cartesiano 3D. Problemas estáticos são resolvidos transformando as matrizes de rigidez e massa locais, e o vetor de cargas, em grandezas globais 3D.

3.4.1 Formulação Básica

Consideramos agora treliças no espaço 3D. Um elemento de treliça 3D típico de dois nós é ilustrado na 3.7 Cada nó possui três graus de liberdade globais. O vetor de deslocamentos em coordenadas locais não se altera em relação ao do capítulo anterior. Pelo contrário, os deslocamentos em coordenadas globais, projetados do nó 1 e do nó 2, são (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

a relação entre as coordenadas locais e globais deve-se à matriz de cossenos diretores (4.5) como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

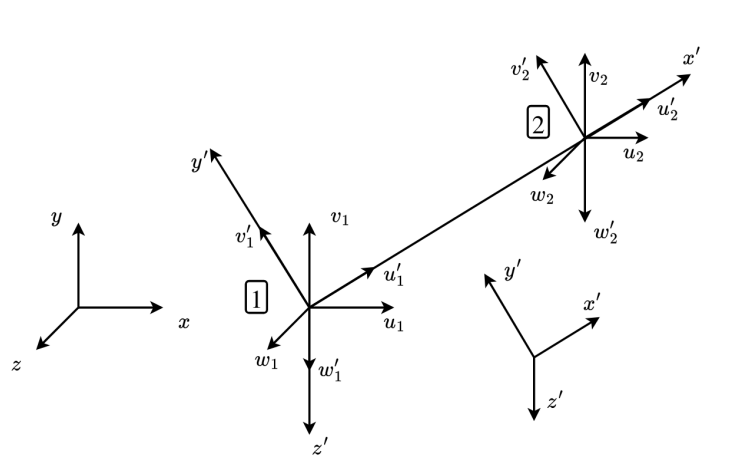


Figura 3.7: Treliças em coordenadas 3D: sistemas de coordenadas local e global

onde os cossenos são obtidos como

$$l_x = \frac{x_2 - x_1}{L_e}; \quad l_y = \frac{y_2 - y_1}{L_e}; \quad l_z = \frac{z_2 - z_1}{L_e}$$

a matriz de rigidez em coordenadas globais é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z & -l_x^2 & -l_x l_y & -l_x l_z \\ & l_y^2 & l_y l_z & -l_x l_y & -l_y^2 & -l_y l_z \\ & & l_z^2 & -l_x l_z & -l_y l_z & -l_z^2 \\ & & & l_x^2 & l_x l_y & l_x l_z \\ \text{sim} & & & & l_y^2 & l_y l_z \\ & & & & & l_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

uma transformação análoga é realizada para a matriz de massa global. A matriz de massa consistente torna-se

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L} = \frac{\rho A}{6} L_e \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

a matriz de massa concentrada é

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L} = \frac{\rho A}{2} L_e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Realiza-se então um procedimento de montagem padrão para obter as matrizes de rigidez e de massa e o vetor global de forças nodais equivalentes para o sistema completo, tal como se fez para as treliças 2D (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.5 Viga de Bernoulli

O elemento de viga (3.8) é definido no plano x-z, possui uma área de secção constante A . A teoria de vigas de Bernoulli assume que as seções planas não deformadas permanecem planas após a deformação. deslocamento axial u , a uma distância z do eixo médio da viga, é dado por

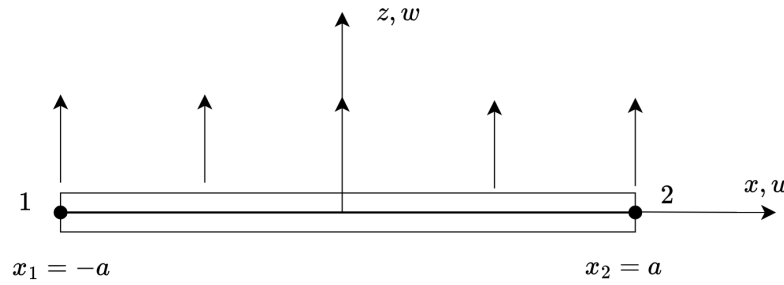


Figura 3.8: Elemento de Viga de Bernoulli com 2 Nós

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.75)$$

onde w é o deslocamento transversal. Desta forma o movimento da viga é totalmente descrito pelo deslocamento vertical. As deformações são definidas como

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.76)$$

A energia de deformação elástica é obtida como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon_x^2 dV \quad (3.77)$$

Tomando $dV = dA dx$ e integrando em relação à área A , obtém-se

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^a E I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.78)$$

onde I_y é o segundo momento de área da seção transversal da viga. A energia cinética é obtida como

$$K = \frac{1}{2} \int_V (\rho \dot{u}^2 + \rho \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(\rho I_y \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \rho A \dot{w}^2 \right) dx \quad (3.79)$$

O trabalho externo para este elemento, considerando a pressão transversal p e a carga axial N^0 é dado por

$$\delta W = \int_{-a}^a p \delta w dx - \int_{-a}^a N^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (3.80)$$

Com as energias cinética, de deformação e o trabalho externo, o Princípio de Hamilton pode ser formulado. Em cada nó, consideram-se 2 graus de liberdade, w e $\frac{\partial w}{\partial x}$, o deslocamento transversal e a rotação da seção transversal.

$$\mathbf{w}^{eT} = \left[w_1 \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad w_2 \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} \right] \quad (3.81)$$

O deslocamento transversal é interpolado por funções de forma de Hermite como

$$w = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{w}^e \quad (3.82)$$

sendo as funções de forma definidas como

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (3.83)$$

$$N_2(\xi) = \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (3.84)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (3.85)$$

$$N_4(\xi) = \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (3.86)$$

onde $\xi = x/a$ identifica a coordenada axial adimensional. Estas funções são conhecidas como funções de aproximação de Hermite, e podem ser obtidas a partir da solução elástica de uma viga encastrada, impondo alternadamente deslocamentos e rotações unitários nas extremidades. A energia de deformação é obtida na forma

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a E I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{E I_y}{a^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 a d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{w}^e T \frac{E I_y}{a^3} \int_{-1}^1 \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi \mathbf{w}^e
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

onde $\mathbf{N}'' = \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2}$. A matriz de rigidez do elemento é então obtida

$$\mathbf{K}^e = \frac{E I_y}{a^3} \int_{-1}^1 \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi = \frac{E I_y}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

A energia cinética toma a forma

$$K = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \rho A \dot{w}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho A \dot{w}^2 a d\xi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^e T \int_{-1}^1 \rho A a \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi \dot{\mathbf{w}}^e \tag{3.89}$$

A matriz de massa é identificada por

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \rho A a \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi = \frac{\rho A a}{210} \begin{bmatrix} 156 & 44a & 54 & -26a \\ 44a & 16a^2 & 26a & -12a^2 \\ 54 & 26a & 156 & -44a \\ -26a & -12a^2 & -44a & 16a^2 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

O trabalho realizado pelas forças distribuídas é definido na forma

$$\delta W_1^e = \int_{-a}^a p \delta w dx = \int_{-1}^1 p \delta w a d\xi = \delta \mathbf{w}^e T a \int_{-1}^1 p \mathbf{N}^T d\xi \tag{3.91}$$

O vetor de forças nodais equivalente às forças distribuídas uniformes p é obtido como

$$\mathbf{f}^e = ap \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T d\xi = \frac{ap}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ 3 \\ -a \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

O trabalho realizado pela força axial N^0 é definido como

$$\begin{aligned}
 \delta W_2^e &= \int_{-a}^a N^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx = \int_{-1}^1 \frac{N^0}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \delta w}{\partial \xi} a d\xi \\
 &= \delta \mathbf{w}^e T \frac{N^0}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi \mathbf{w}^e
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

A matriz de estabilidade é definida como

$$\mathbf{G}^e = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi = \frac{1}{60a} \begin{bmatrix} 36 & 6a & -36 & 6a \\ 3L & 16a^2 & -6a & -4a^2 \\ -36 & -6a & 36 & -6a \\ 6a & -4a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Após a montagem, o sistema algébrico de resolução é

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{N}^0 \mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.95)$$

A expressão 3.95 permite resolver o problema estático, de vibração livre e de encurvamento da viga de Bernoulli. Nota que tanto o problema de encurvamento como o de vibração livre são ambos resolvidos sob a forma de um problema de valores próprios. Assim, os códigos dos dois problemas serão muito semelhantes, trocando a matriz de massa pela matriz de estabilidade.

3.6 Pórticos de Bernoulli 2D

Nesta secção são analisados pórticos sob cargas estáticas. As matrizes de rigidez e de massa são obtidas através da transformação dessas matrizes em coordenadas locais através de uma matriz de rotação, que é função do declive da viga em relação ao eixo horizontal (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.6.1 Elemento de Pórtico 2D

Na figura 3.9 pode-se observar um elemento de viga de Bernoulli com dois nós, cada nó tem três graus de liberdade, dois deslocamentos em eixos globais, e uma rotação. O vetor dos deslocamentos é dado por (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{u}^T = [u_1, \quad u_2, \quad v_1, \quad v_2, \quad \theta_1, \quad \theta_2] \quad (3.96)$$

Definimos uma base local com cossenos l, m , em relação a θ , o ângulo entre x' e x . Neste conjunto de coordenadas locais, os deslocamentos são detalhados como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

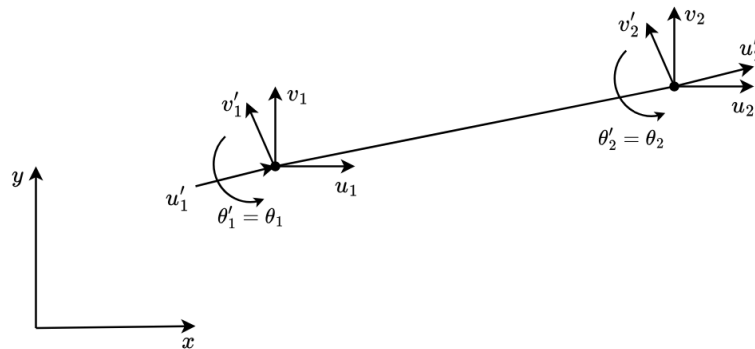


Figura 3.9: Um elemento de pórtico 2D

$$\mathbf{u}'^T = [u'_1, \quad u'_2, \quad v'_1, \quad v'_2, \quad \theta'_1, \quad \theta'_2] \quad (3.97)$$

Tendo em conta que $\theta_1 = \theta'_1$ e $\theta_2 = \theta'_2$, deriva-se uma matriz de transformação local-global na forma

$$\mathbf{u}' = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.98)$$

onde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & m & 0 & 0 \\ -m & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Em coordenadas locais, a matriz de rigidez do elemento de pórtico é obtido através da combinação da rigidez do elemento de barra com o elemento de viga de Bernoulli, na forma (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{K}'^e = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2 & -AL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & AL^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12l & -12l & 6l & 6l \\ & & & 12l & -6l & -6l \\ & & & & 4l^2 & 2l^2 \\ \text{sym} & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Em coordenadas globais, a energia de deformação é dada por

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}'^T \mathbf{K}' \mathbf{u}' = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.101)$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}' \mathbf{L} \quad (3.102)$$

Em coordenadas locais, a matriz de massas do elemento de pórtico é obtida pela combinação da massa do elemento de barra com o elemento de viga de Bernoulli, na forma (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{M}'^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 156 & 54 & 22L & -13L \\ & & & 156 & 13L & -22L \\ & & & & 4L^2 & -3L^2 \\ \text{sym} & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Em coordenadas globais a energia cinética é dada por

$$K^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}'^T \mathbf{M}' \dot{\mathbf{u}}' = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.104)$$

onde

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{M}' \mathbf{L} \quad (3.105)$$

3.7 Pórticos de Bernoulli 3D

A análise de pórticos 3D é semelhante à dos pórticos 2D, no elemento de 2 nós 3D, consideram-se 3 deslocamentos e 3 rotações relativamente aos 3 eixos cartesianos. contudo, a complexidade destas estruturas deve-se á orientação da viga no espaço, o que não acontece no plano 2D. Antes de se introduzir as matrizes de rigidez e massa no sistema de referência global, são apresentadas as matrizes de rotação para vetores no espaço 3D (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.7.1 Matriz de transformação no espaço 3D

Assume-se que o eixo local x' é alinhado com o eixo principal da viga, tal como se pode ver na figura 3.10. Em pórticos 2D uma única rotação é suficiente para definir a viga no plano $x - y$, no entanto, no espaço 3D, são necessárias pelo menos 3 rotações. A definição dos cosenos diretores relativamente ao eixo x' é direta e segue a ordem dada na secção anterior como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$C_{xx'} = \frac{x_2 - x_1}{L_e}; \quad C_{yx'} = \frac{y_2 - y_1}{L_e}; \quad C_{zx'} = \frac{z_2 - z_1}{L_e} \quad (3.106)$$

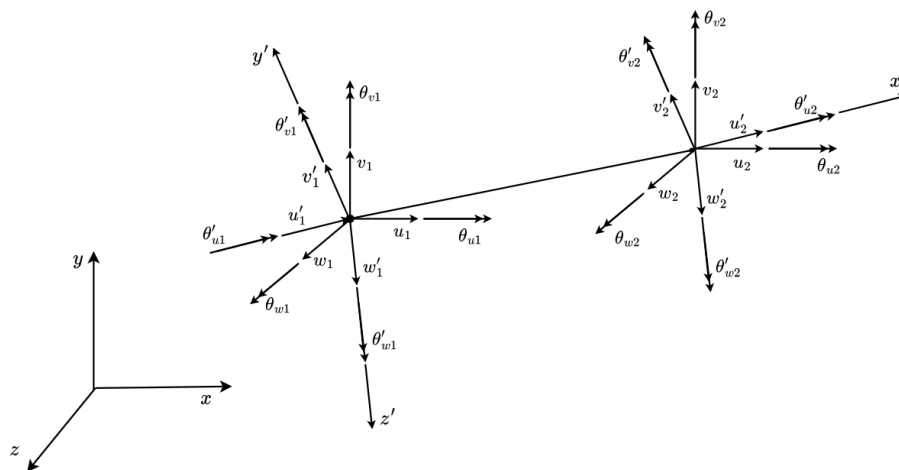


Figura 3.10: Um elemento de pórtico 3D

onde x , y e z são referentes ao sistema global de referência e x' , y' e z' o sistema de referência local onde

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.107)$$

representa o comprimento da viga. A matriz dos vetores de rotação podem ser representados como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} C_{xx'} & C_{yx'} & C_{zx'} \\ C_{xy'} & C_{yy'} & C_{zy'} \\ C_{xz'} & C_{yz'} & C_{zz'} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

onde as definições das duas últimas linhas são representadas abaixo. A matriz de rotação de vetores no espaço 3D (3.108) é dada pelo produto de três matrizes de rotação como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{r} = R_\alpha R_\beta R_\gamma \quad (3.109)$$

onde α , β e γ são os ângulos de rotação em torno dos eixos x' , y' e z' , respetivamente. A rotação em torno do eixo z , R_γ , é dada por:

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

onde $\cos \gamma = C_{xx'}/C_{xy}$, $\sin \gamma = C_{yx'}/C_{xy}$ e $C_{xy} = \sqrt{C_{xx'}^2 + C_{yx'}^2}$. A rotação em torno do eixo y , R_β , é dada por:

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

onde $\cos \beta = C_{xy}$ e $\sin \beta = C_{yx'}$. Combinando as rotações em torno de y e z , a matriz de rotação de vetores resulta em:

$$\mathbf{r} = R_\beta R_\gamma = \begin{bmatrix} C_{xx'} & C_{yx'} & C_{zx'} \\ -\frac{C_{yx'}}{C_{xy}} & \frac{C_{xx'}}{C_{xy}} & 0 \\ -\frac{C_{xx'}C_{zx'}}{C_{xy}} & -\frac{C_{yx'}C_{zx'}}{C_{xy}} & C_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Note-se que quando $\beta = 90^\circ$ ou $\beta = 270^\circ$, as coordenadas globais do elemento de viga de 2 nós variam apenas ao longo de z , pelo que a matriz de rotação toma uma forma especial (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{zx'} \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_{zx'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

para $z_2 > z_1$ ou $\beta = 90^\circ$, $C_{zx'} = 1$; caso contrário, para $z_1 > z_2$ ou $\beta = 270^\circ$, $C_{zx'} = -1$.

Se a rotação extra da viga α for incluída, a sua matriz de rotação é:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Finalmente, a matriz de rotação de vetores completa torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R_\alpha R_\beta R_\gamma \\ &= \begin{bmatrix} \frac{C_{xx'} C_{zx'} \sin \alpha - C_{yx'} \cos \alpha}{C_{xy}} & \frac{C_{yx'} C_{zx'} \sin \alpha + C_{xx'} \cos \alpha}{C_{xy}} & -C_{xy} \sin \alpha \\ -\frac{C_{xx'} C_{zx'} \cos \alpha + C_{yx'} \sin \alpha}{C_{xy}} & -\frac{C_{yx'} C_{zx'} \cos \alpha + C_{xx'} \sin \alpha}{C_{xy}} & C_{xy} \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.115)$$

O caso especial de elementos verticais ($\beta = 90^\circ$ e $\beta = 270^\circ$) também pode ser derivado para o presente caso como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{zx'} \\ C_{zx'} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -C_{zx'} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

para $\alpha=0$ obtém-se o caso anterior 3.113. Por uma questão de simplicidade, daremos continuidade considerando elementos sem a orientação α , como por exemplo, vigas de secção transversal circular. O leitor interessado poderá facilmente estender os códigos utilizando as matrizes de rotação supracitadas, tendo em conta a rotação α (Ferreira e Fantuzzi 2020).

3.7.2 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Nodais Equivalentes

No sistema de coordenadas local, a matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Após a transformação para os eixos globais, a matriz de rigidez em coordenadas globais é obtida por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}' \mathbf{R} \quad (3.118)$$

onde a matriz de rotação $\mathbf{R}$ é definida como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

sendo $\mathbf{r}$ a matriz indicada em (3.112) ou (3.115). Esta última não foi codificada no presente trabalho por uma questão de simplicidade ($\alpha = 0$), mas pode ser facilmente introduzida pelo leitor.

O elemento de pórtico 3D de dois nós possui seis graus de liberdade por nó. Uma vez resolvido o problema estático (calculados os deslocamentos nodais), é possível calcular as reações nos apoios através de (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3.120)$$

onde $\mathbf{K}$ e $\mathbf{U}$ são, respetivamente, a matriz de rigidez da estrutura e o vetor de deslocamentos nodais. As forças nodais do elemento podem ser avaliadas pela transformação de eixos como (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}'\mathbf{R}\mathbf{U}_e \quad (3.121)$$

onde $\mathbf{f}_e$ é o vetor de forças nodais do elemento e $\mathbf{U}_e$ é o vetor global de deslocamentos referente ao elemento e .

3.7.3 Matriz de Massas

No caso de análise de vibrações livres, a matriz de massa consistente no referencial local é definida como:

$$\mathbf{M}' = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70r_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140r_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

onde $r_x^2 = (I_y' + I_z')/A$, sendo I_y' e I_z' os segundos momentos de área da secção transversal em relação aos eixos principais y' e z' . Por outro lado, a matriz de massas concentradas (*lumped mass matrix*) é dada por (Ferreira e Fantuzzi 2020):

$$\mathbf{M}' = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

A matriz de massa no referencial global toma a forma:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}^T \mathbf{M}' \mathbf{R} \quad (3.124)$$

onde a matriz de rotação $\mathbf{R}$ é a definida em (3.119).

Capítulo 4

Análise Computacional do Quadro FSAE

Este capítulo descreve a metodologia adotada para a avaliação estrutural do quadro tubular FSAE. O processo computacional foi desenvolvido com recurso ao *software SolidWorks*, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) para simular os diferentes casos de carga a que o veículo está sujeito. A metodologia divide-se na definição geométrica do modelo, atribuição de propriedades dos materiais, geração da malha e, por fim, na configuração rigorosa das condições de fronteira para quatro testes distintos, sendo estes testes de torção estática, compressão frontal, compressão lateral e análise modal. Adicionalmente, apresenta-se a estratégia de parametrização que servirá de base à otimização geométrica do quadro.

4.1 O Modelo CAD e Propriedades do Material

4.1.1 Modelação Geométrica do quadro

O modelo tridimensional do quadro foi desenvolvido tendo por base os regulamentos estruturais da *Formula Student*. Tratando-se de uma *spaceframe* tubular, a modelação no *SolidWorks* foi realizada através da criação de um esboço tridimensional que define as linhas de centro de todos os elementos estruturais. Foi utilizada a ferramenta *Weldments* para atribuir as secções transversais aos respetivos segmentos de reta, e posteriormente no módulo de simulação, todos os elementos estruturais foram modelados como elementos de viga para análise por elementos finitos. A geometria base foi desenhada para respeitar as exigências regulamentares de triangulação para os arcos de segurança principal (*Main Hoop*) e frontal (*Front Hoop*), bem como para a estrutura de impacto lateral e *Front Bulkhead*.

Na Figura 4.1 apresenta-se o modelo CAD tridimensional utilizado como base para as simulações numéricas, na figura 4.2 encontra-se a vista lateral do quadro tubular com algumas medidas para referência.

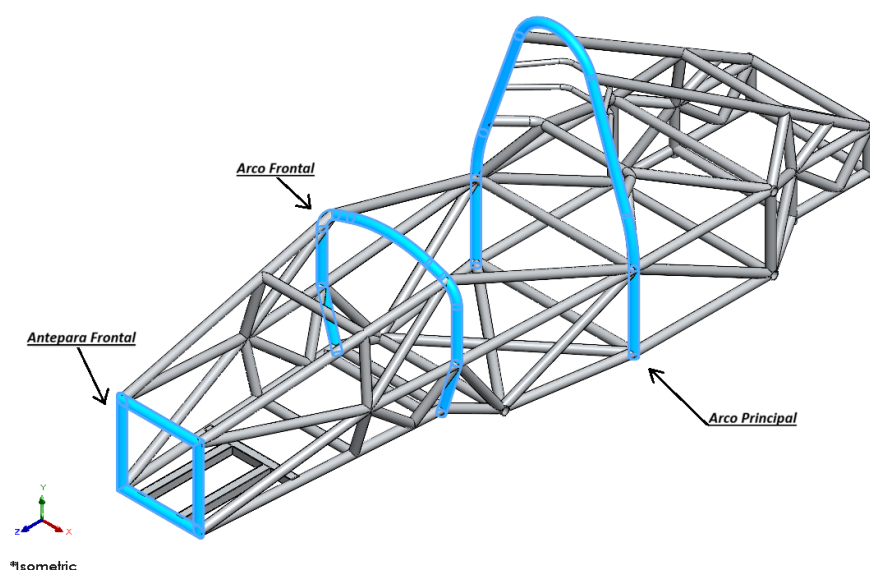


Figura 4.1: Modelo geométrico tridimensional do quadro tubular *Formula Student* (vista isométrica).

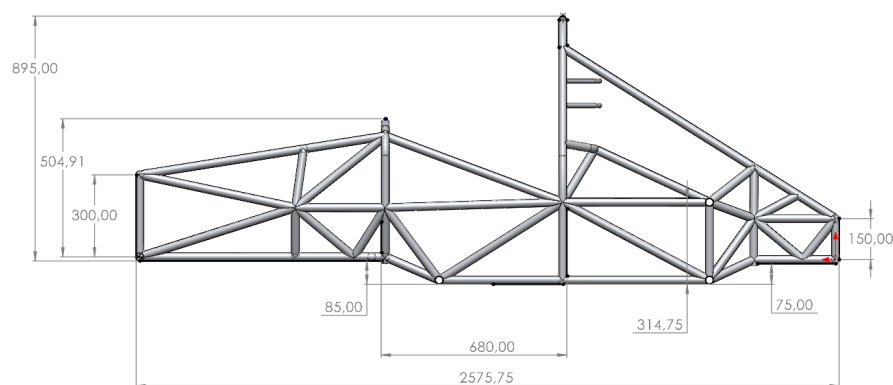


Figura 4.2: Vista lateral do quadro com medidas

Todos os elementos tubulares do quadro original foram modelados com secção transversal circular, com diâmetro de 30 mm (figura 4.3) e espessura da parede de 2 mm (figura 4.4), que cumprem os requisitos mínimos de inércia e área de secção ditados pelo regulamento da competição.

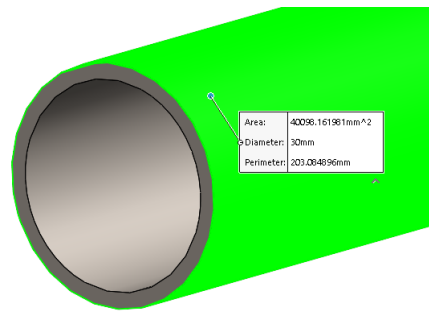


Figura 4.3: Diâmetro usado nos tubos.

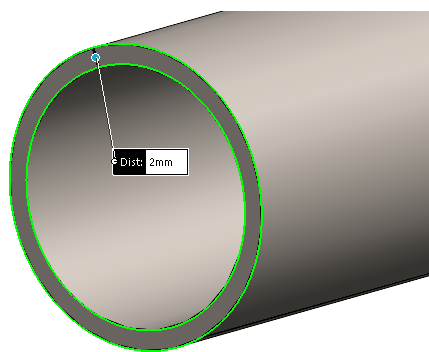


Figura 4.4: Espessura de parede usada nos tubos.

4.1.2 Propriedades do Material

A seleção do material é um parâmetro crítico no dimensionamento de um quadro de competição, exigindo um compromisso entre elevada resistência mecânica, facilidade de soldadura e viabilidade económica. Para este quadro tubular, adotou-se o aço Docol R8. Este material é desenvolvido pela SSAB (Svenskt Stål AB) para aplicações em desporto automóvel, como *roll cages* e quadros tubulares, oferecendo uma excelente relação resistência-peso, com a capacidade de manter as propriedades mecânicas do material em zonas de soldadura. As propriedades mecânicas isotrópicas utilizadas nas simulações numéricas foram extraídas da biblioteca oficial de materiais da SSAB (*SSAB Material Library*) para o *software SolidWorks*, obtida diretamente junto do fabricante, os parâmetros encontram-se resumidos na tabela 4.1. Anteriormente tinha sido considerado o cromo-molibdênio (25CrMo4), mas devido à indisponibilidade deste material, optou-se então pelo Docol R8, que atualmente se encontra no website da chaloupka-cz.eu, com um custo de 27 euros por cada metro de tubo com 30 mm de diâmetro exterior e 2 mm de parede, cada tubo tem um comprimento de 2,95m e são necessários no total 8 tubos para a construção do quadro, contando com cerca de 20 a 30% de desperdício nos processos de fabrico.

Tabela 4.1: Propriedades mecânicas do aço Docol R8 adotadas no modelo numérico.

Propriedade	Valor	Unidade
Densidade	7850	kg/m ³
Módulo de Elasticidade	200	GPa
Coefficiente de Poisson	0,28	-
Tensão de Cedência	600	MPa
Tensão de Ruptura	800	MPa

Para capturar com o máximo de realismo o comportamento estrutural do quadro em condições extremas de carga, optou-se por configurar todos os ensaios como análises estáticas não-lineares. Para o efeito, o aço Docol R8 foi modelado com um comportamento elasto-plástico. O limite de cedência de 600 MPa define o ponto de transição, a partir do qual o material abandona o regime elástico e inicia o escoamento.

4.2 Cálculo da Tensão Máxima Combinada

De modo a garantir a fiabilidade dos resultados em todos os ensaios estáticos, analisou-se a tensão máxima combinada, designada no software *SolidWorks* como *Worst Case* ou *Upper Bound Axial and Bending*. A adoção desta métrica é necessária devido à tipologia da discretização utilizada. Ao modelar o quadro com elementos de viga, o modelo numérico é capaz de capturar com maior realismo o comportamento das junções. Diferente de uma treliça ideal, onde os membros são modelados como elementos de barra sujeitos apenas a tração e compressão, a estrutura real do quadro possui juntas soldadas que conferem rigidez aos nós. Esta continuidade estrutural induz momentos flettores e tensões de flexão secundárias que, se negligenciadas, poderiam levar a uma subestimação das tensões reais. Desta forma, a tensão reportada em cada elemento é calculada através da sobreposição da tensão axial (σ_a) com as tensões resultantes dos momentos flettores nos dois planos locais da viga (σ_{b1} e σ_{b2}), representando a solicitação na fibra mais externa do tubo (Dassault Systèmes 2024):

$$\sigma_{wc} = \frac{P}{A} + \frac{(M_1 I_{22} + M_2 I_{12})y_1 + (M_2 I_{11} + M_1 I_{21})y_2}{I_{22} I_{11} - I_{12}^2} \quad (4.1)$$

Onde:

- σ_{wc} é a tensão combinada máxima reportada no elemento;
- P é a força axial uniforme;
- A é a área da secção transversal da viga;
- M_1 e M_2 são os momentos flettores atuantes nos eixos locais 1 e 2, respetivamente;
- I_{11} e I_{22} são os momentos de inércia em torno dos eixos ortogonais locais 1 e 2;
- I_{12} e I_{21} são os produtos de inércia da secção;
- y_1 e y_2 são as distâncias desde a linha neutra até às fibras extremas da secção transversal.

O valor de σ_{wc} será o parâmetro de comparação com a tensão de cedência do material (600 MPa). Esta métrica serve como validação de segurança, garantindo que, sob as cargas impostas nas diferentes simulações, a tensão máxima não ultrapassa o limite elástico da estrutura. Além da validação de segurança, o valor de σ_{wc} servirá como um identificador de Otimização, permitindo identificar elementos subaproveitados, com baixos valores de tensão combinada, que possam sofrer reduções de secção transversal para diminuição da massa total do veículo.

4.3 Discretização do Modelo e Convergência de Malha

Tendo em conta a tipologia estrutural do quadro, a discretização geométrica para o Método dos Elementos Finitos foi realizada utilizando elementos de viga. Embora a literatura clássica frequentemente idealize as *spaceframes* como treliças puras, elementos de barra sujeitos apenas a tração e compressão axiais, a realidade construtiva de um quadro *Formula Student* exige uma abordagem mais rigorosa.

Para garantir a fiabilidade e precisão dos resultados numéricos e assegurar que a solução é independente do tamanho da malha, realizou-se um estudo de convergência, utilizou-se uma simulação de resistência torcional para realizar este estudo, fundamental no Método dos Elementos Finitos para provar que a discretização espacial não introduz erros numéricos significativos, na figura 4.5 pode-se verificar as condições de fronteira utilizadas, foram aplicadas 2 forças de 1000N em sentidos opostos nos pontos de suspensão dianteiros, e encastrados os pontos de suspensão traseiros.

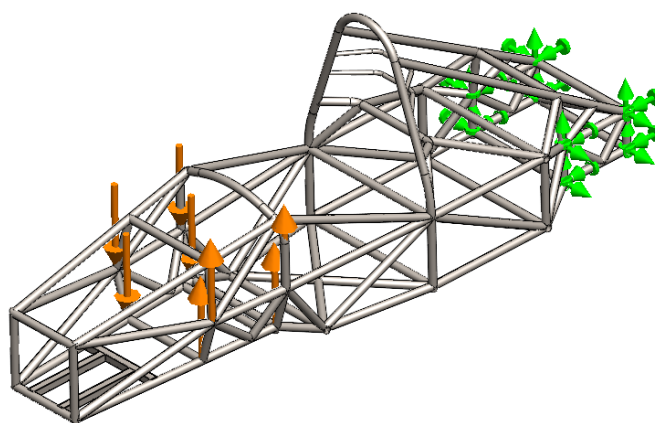


Figura 4.5: simulação utilizada para a convergência de malha

O tamanho global dos elementos de viga 3D foi progressivamente reduzido desde um tamanho de elemento de 30 mm, a 5 mm, registando-se, para cada malha, o número de nós e o deslocamento máximo obtido no quadro. Os resultados deste estudo estão resumidos na Tabela 4.2, onde se pode verificar a variação percentual entre os deslocamentos máximos ao longo do refinamento da malha.

Tabela 4.2: Resultados do estudo de convergência de malha para o ensaio de torção.

Tamanho do Elemento (mm)	Nº de Nós	Deslocamento Máximo (mm)	Varição (%)
30	1782	2,62648	-
20	2558	2,62703	0,0209%
15	3383	2,62718	0,0057%
10	4947	2,62728	0,0038%
7,5	6573	2,62732	0,0015%
5	9874	2,62739	0,0027%

Através da análise da curva de convergência (Figura 4.6) e dos dados na Tabela 4.2, observa-se que a variação do deslocamento máximo é negligenciável logo desde a primeira iteração.

O critério de paragem para o estudo foi avaliado na malha com tamanho global de 10 mm, onde a variação relativa face à iteração anterior foi de apenas 0,0038%. Refinar a malha para lá deste ponto traduz-se em variações irrelevantes, que aumentam o esforço de cálculo desnecessariamente. O aumento da variação na malha de 5 mm não se deve ao aumento de erro ou complexidade, mas sim ao facto de o salto de refinamento ter sido maior nesse passo, 33% de redução, face aos 25% do passo anterior. De forma a otimizar a relação entre a precisão dos resultados e o custo computacional, seleccionou-se um tamanho global de elemento de 10 mm para todas as simulações realizadas neste trabalho.

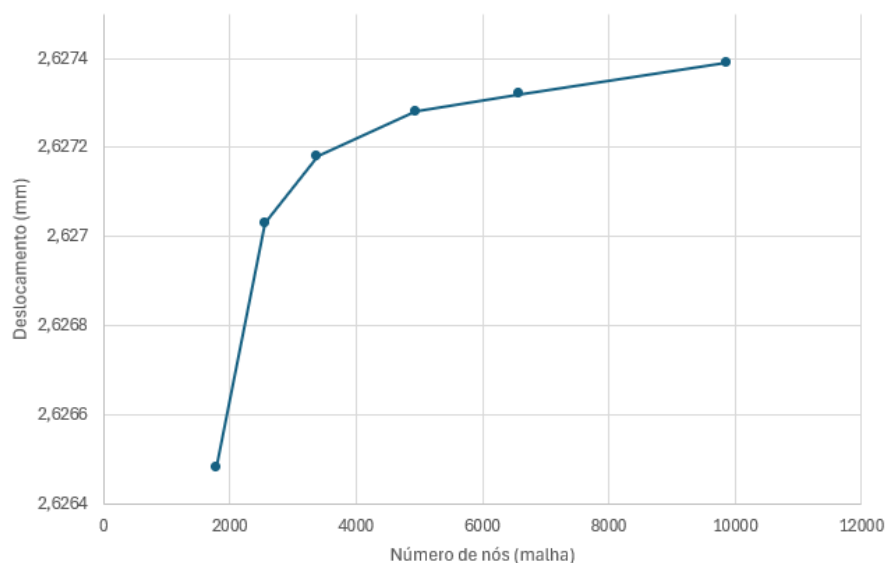


Figura 4.6: Curva de convergência de malha evidenciando a estabilização dos resultados.

4.4 Análise de compressão Frontal

O ensaio de compressão frontal é um cenário de carga crítico para a validação da capacidade de absorção de energia por parte da estrutura. O objetivo principal é garantir que, em caso de colisão longitudinal, a estrutura tubular preserve o espaço vital do piloto e a integridade do acumulador de energia, dissipando os esforços através da estrutura.

A simulação do compressão frontal é realizada através de uma análise estática não linear. A conversão da energia cinética de um evento dinâmico numa carga estática depende criticamente do intervalo de tempo da colisão (Δt). A zona frontal do veículo está equipada com um atenuador de impacto, cuja função é deformar-se plasticamente para dissipar a energia cinética e prolongar o tempo de paragem do veículo, reduzindo o pico de força transmitido à estrutura. Neste caso, considerou-se o cenário de colisão mais severo em contexto de competição, um impacto frontal a 110 km/h, assumindo um comportamento estrutural onde o atenuador garante uma desaceleração constante na ordem dos $10g$, o tempo de duração do impacto pode ser deduzido pelas equações da cinemática (Kumar et al. 2019):

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{30,56 \text{ m/s}}{98,1 \text{ m/s}^2} \approx 0,31 \text{ s} \quad (4.2)$$

O valor de $\Delta t = 0,3$, representa a janela temporal do impacto, contando com o esmagamento do atenuador de impacto antes da carga ser transferida integralmente para o quadro (Kumar et al. 2019).

Considerando a massa total do veículo ($m = 338 \text{ kg}$) e a desaceleração calculada para 110 km/h ($a \approx 101,87 \text{ m/s}^2$), a força total aplicada na *Front Bulkhead* ($F_{compresso}$) é determinada pela Segunda Lei de Newton:

$$F_{compresso} = 338 \text{ kg} \cdot 101,87 \text{ m/s}^2 \approx 34\,432 \text{ N} \approx 34,43 \text{ kN} \quad (4.3)$$

No *SolidWorks*, a carga de 34,43 kN foi distribuída nos 4 elementos integrantes da *Front Bulkhead* (Figura 4.7). As condições de fronteira (Tabela 4.3) foram definidas para forçar as tensões através dos membros longitudinais do quadro, testando a resistência à compressão e encurvadura. Estas condições de fronteira asseguram o bloqueio das translações dos três eixos globais (X, Y e Z) nos 8 pontos de suspensão traseiros, servindo como suporte fixo para a absorção das cargas de compressão aplicadas à estrutura (Wongchai 2020).

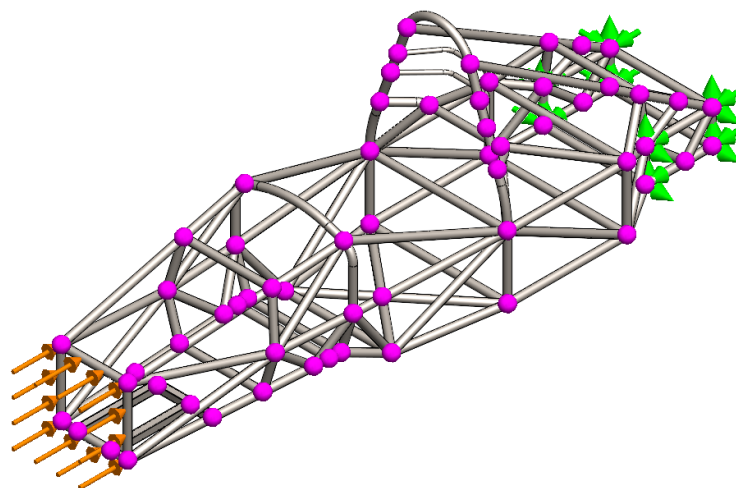


Figura 4.7: Condições de fronteira no compressão frontal

Tabela 4.3: Condições de fronteira para o ensaio de compressão frontal.

Componente	Tipo de Condição	Descrição
Front Bulkhead	Carga distribuída	34,43 kN
Apoios Suspensão Traseira	Imóvel	Restrição deslocamentos (3 GL)
Restante Estrutura	Livre	-

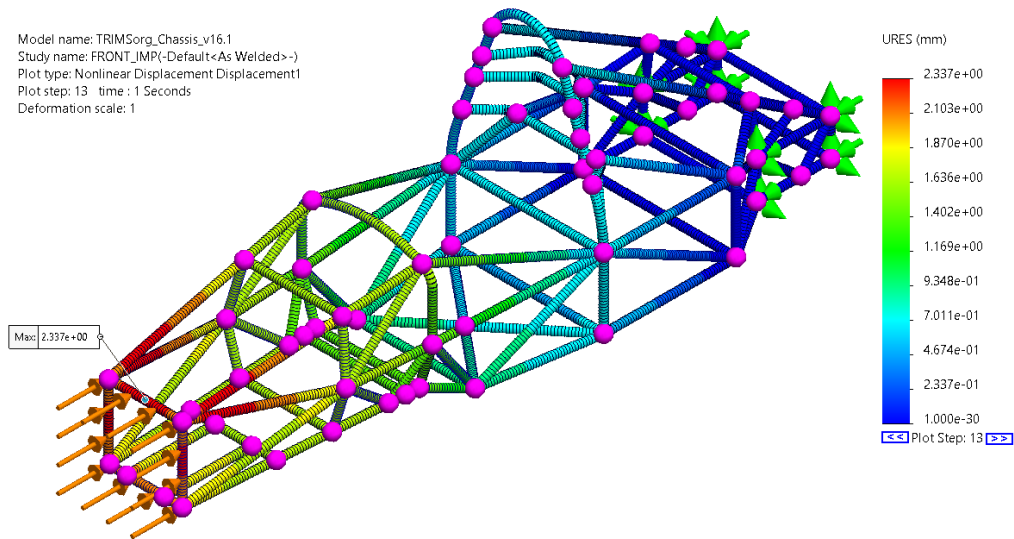


Figura 4.8: Deslocamento resultante na simulação de compressão frontal

A Figura 4.8 ilustra os deslocamentos resultantes obtidos na simulação de compressão frontal. Observa-se que os maiores deslocamentos, ocorrem a meio vão dos quatro tubos que compõem a *Front Bulkhead*, correspondendo às zonas de menor rigidez local face ao carregamento aplicado.

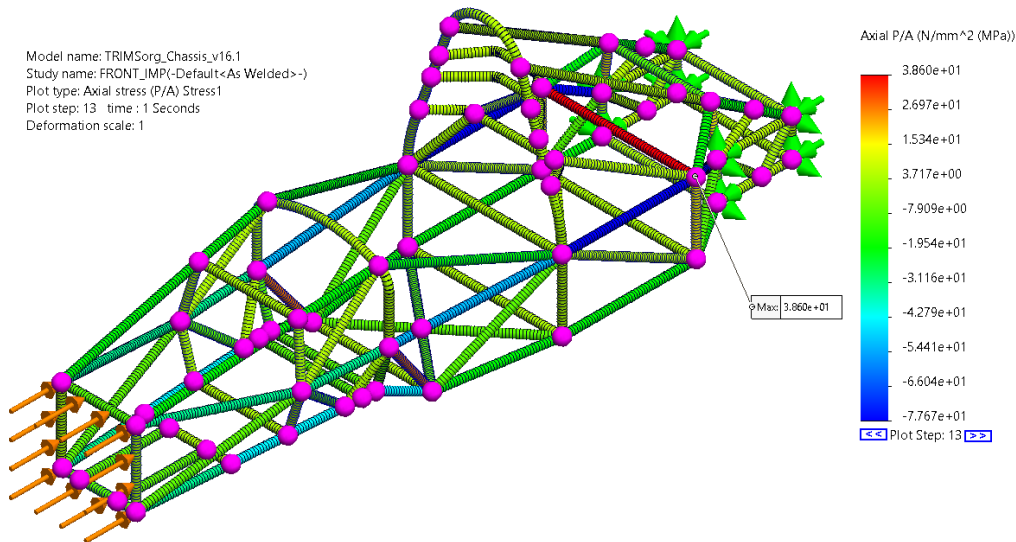


Figura 4.9: Distribuição de tensões axiais na simulação de compressão frontal

A Figura 4.9 ilustra a distribuição das tensões axiais ao longo da estrutura, revelando que a carga de compressão de 34,43 kN é absorvida através de esforços de compressão nos membros longitudinais. No entanto, como este estudo não conta apenas com esforços axiais, os valores de tensão axial não irão ser utilizados para a otimização estrutural, para esse efeito, a tensão máxima combinada será a métrica a considerar.

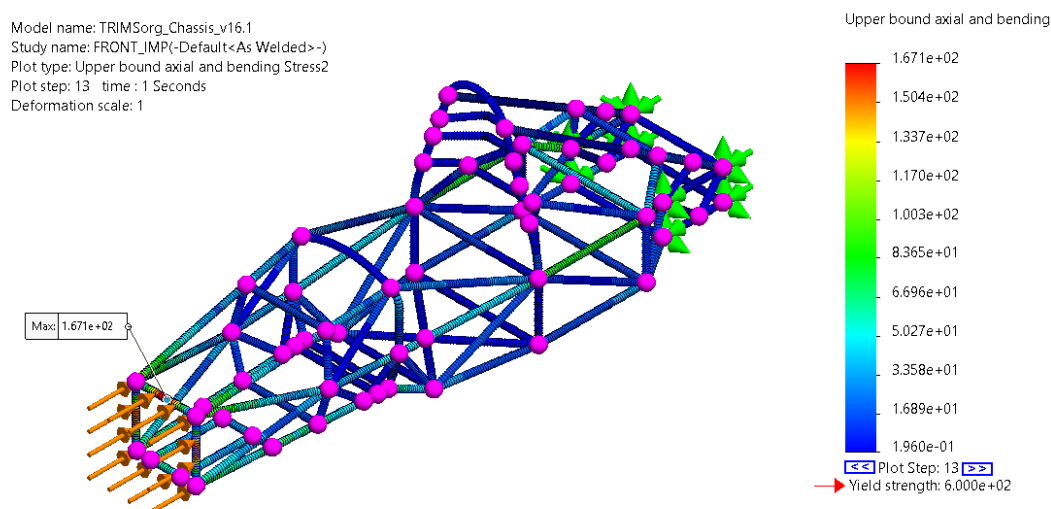


Figura 4.10: Distribuição de tensões máximas combinadas na simulação de compressão frontal

Na Figura 4.10, é possível verificar o *plot* de tensões máximas combinadas, nota-se um valor elevado de tensão máxima no meio vão dos quatro tubos que compõem a *Front Bulkhead*, que correspondem às zonas de menor rigidez local face ao carregamento aplicado, coincidente também com as zonas de maior deslocamento, e sendo o elemento mais solicitado, a *Front BulkHead* suporta as forças impostas sem entrar em regime plástico, existindo nesse local um fator de segurança de cerca de 3.59 ($FS = \frac{\sigma_{ced}}{\sigma_{wc}} = \frac{600 \text{ MPa}}{167,10 \text{ MPa}} = 3,59$), já acima do intervalo indicado pela literatura, de 1.5 a 2.5 (Subramanyam et al. 2016).

Tabela 4.4: Esforços nos componentes críticos da simulação de compressão frontal (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-107(FBH_LS[1])	-42,56	-55,67	-51,19	3,12	104,02
Beam-124(Front_BulkHead[1])	0,97	4,00	150,34	8,18	151,28
Beam-129(FBH_LS[2])	-42,65	-57,18	50,79	-3,06	105,02
Beam-164(Front_BulkHead[3])	0,99	-4,10	-150,60	-8,09	151,52
Beam-182(Front_BulkHead[2])	-7,63	3,90	-159,44	-0,09	167,10

Podem ser então visualizados os componentes críticos apresentados na tabela 4.4, na figura 4.31

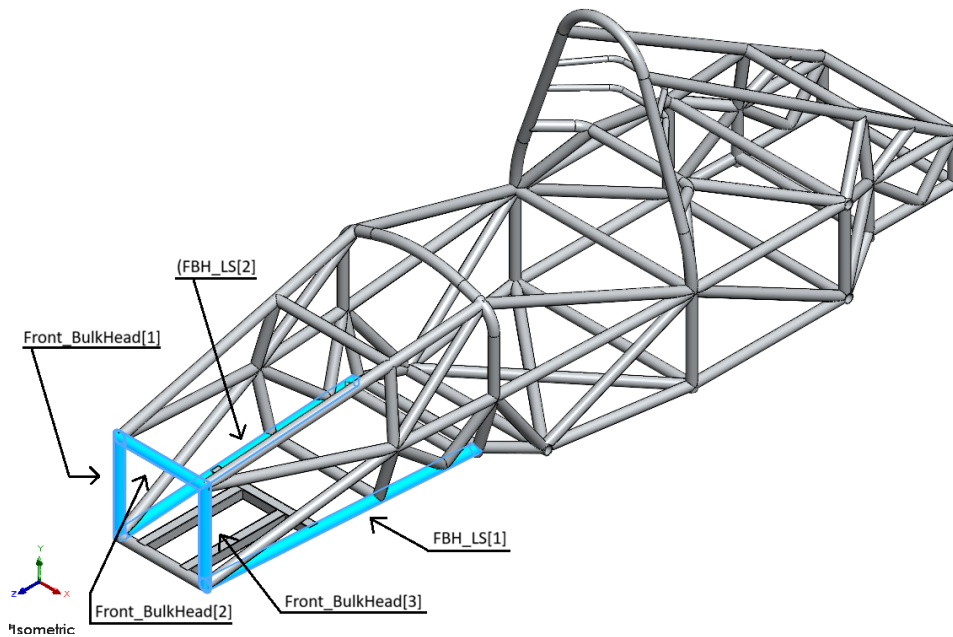


Figura 4.11: Componentes críticos da simulação de compressão frontal

A análise dos resultados permite identificar margens para a otimização do peso, através da redução da secção dos tubos, dado que a maioria dos membros opera com tensões muito abaixo do limite elástico do material, é possível diminuir a espessura da parede ou o diâmetro de tubos específicos sem comprometer a segurança estrutural, obedecendo aos limites impostos pelo regulamento de *Formula Student*. Pode-se também recorrer a simplificação geométrica, os valores de tensão axial obtidos sugerem que a geometria pode ser simplificada através da remoção ou reposicionamento de tubos menos solicitados, reduzindo a complexidade de fabrico e a massa total, mantendo a utilização do aço Docol R8.

4.5 Análise de compressão lateral

O Impacto lateral representa um cenário crítico devido à reduzida zona de deformação entre a face externa do quadro e o piloto. O objetivo é validar a rigidez flexional da *Side Impact Structure*, garantindo que não existe intrusão no habitáculo que comprometa o piloto. Ao contrário de uma situação de impacto frontal em que há um atenuador de impacto, a lateral do quadro possui uma zona de deformação muito limitada, assim, a rigidez estrutural da estrutura tem de ser suficiente para evitar a intrusão no cockpit.

Considerando o pior cenário possível, um despiste em curva do veículo *Formula Student* e impacto lateral deste numa parede, a uma velocidade de 13,8 m/s (50 km/h) e uma desaceleração de $7g$ ($\approx 68,67 \text{ m/s}^2$) (Subramanyam et al. 2016), o tempo de duração do impacto (Δt) pode ser calculado:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{13,8 \text{ m/s}}{68,67 \text{ m/s}^2} \approx 0,200 \text{ s} \quad (4.4)$$

Considerando a massa total do protótipo com condutor e a desaceleração de $7g$ ($68,67 \text{ m/s}^2$), a força de compressão lateral é:

$$F_{lateral} = m \cdot a = 338 \text{ kg} \cdot 68,67 \text{ m/s}^2 \approx 23\,210 \text{ N} \approx 23,21 \text{ kN} \quad (4.5)$$

A carga de 23,21 kN foi aplicada nos elementos integrantes da *Side Impact Structure*, e os deslocamentos bloqueados nos nós de suspensão do lado oposto à compressão (Figura 4.12). As condições de fronteira foram definidas de forma a forçar as tensões através dos membros da *Side Impact Structure* para testar a sua resistência à encurvadura, sem criar rigidez artificial.

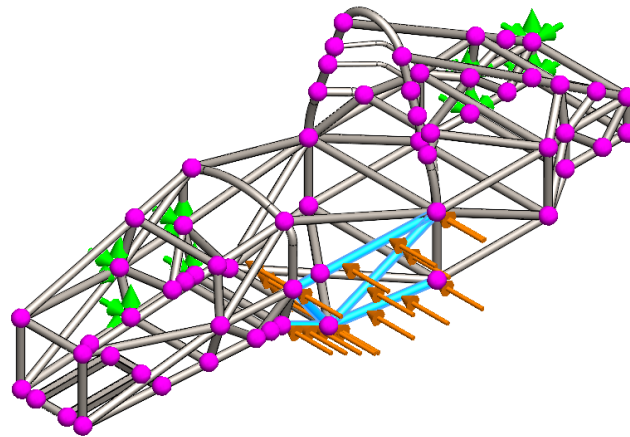


Figura 4.12: Condições de fronteira no compressão lateral

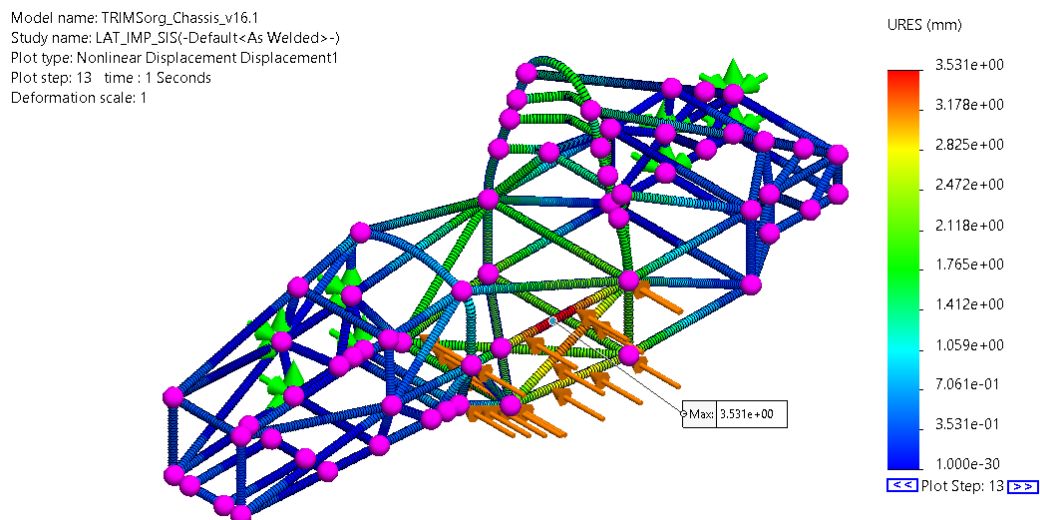


Figura 4.13: Deslocamento resultante na simulação de compressão lateral

A Figura 4.13 ilustra o campo de deslocamentos resultantes obtido na simulação de compressão lateral. Verifica-se que o deslocamento máximo, de 3,531 mm, localiza-se a meio

vão do elemento tubular superior da *Side Impact Structure*, correspondendo à secção de menor rigidez face ao esforço de flexão transversal aplicado.

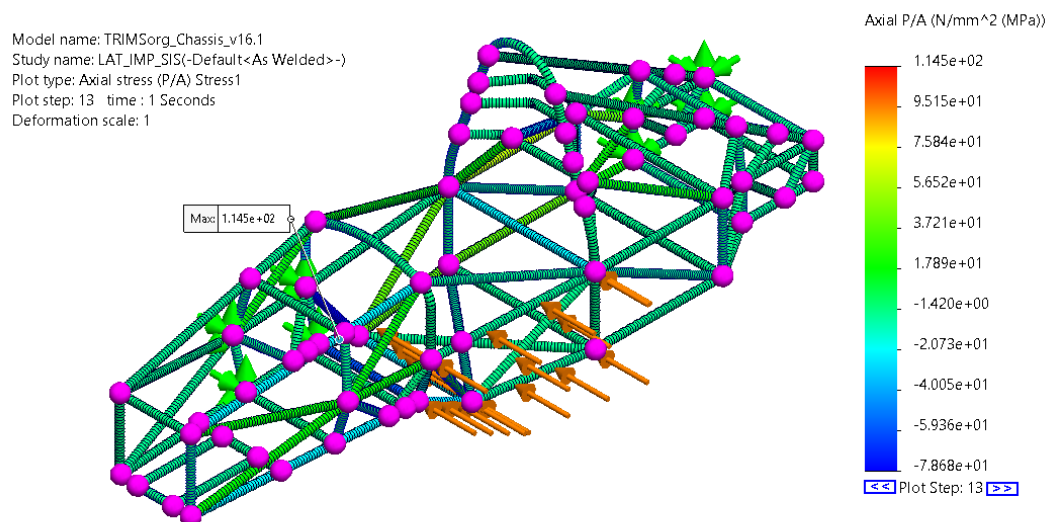


Figura 4.14: Distribuição de tensões axiais na simulação de compressão lateral

Na Figura 4.14 pode ser observada a distribuição de tensões axiais ao longo do quadro na simulação de compressão lateral. Verifica-se uma tensão axial máxima de 114,5 MPa, bastante inferior à tensão máxima combinada de 414,3 MPa, isto prova a importância de utilizar a tensão máxima combinada para a análise e otimização do quadro tubular.

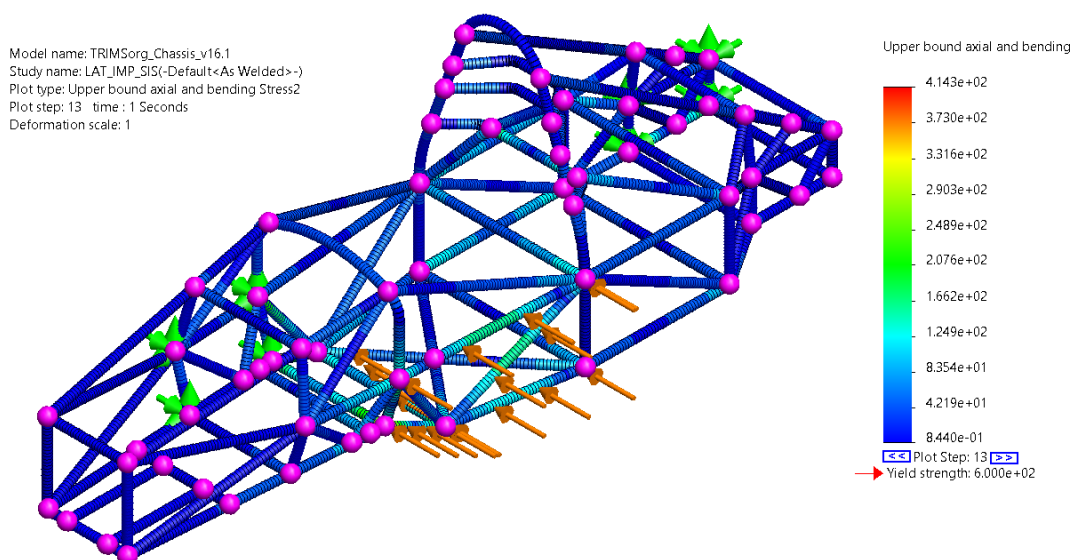


Figura 4.15: Distribuição de tensões máximas combinadas na simulação de compressão lateral

Através do *plot* de tensões máximas combinadas (Figura 4.15), verifica-se que, tal como

no ensaio anterior, o quadro se encontra sobredimensionado face ao carregamento aplicado, com uma tensão máxima registada de 414,3 MPa, abaixo da tensão de cedência do Docol R8 (600MPa). Importa notar que este valor máximo ocorre num nó de suspensão com restrição imposta (4.16), onde a concentração de tensões constitui, muito possivelmente, uma singularidade numérica. Excluindo este ponto, os restantes membros estruturais operam com tensões consideravelmente inferiores, confirmando que existe margem para otimização.

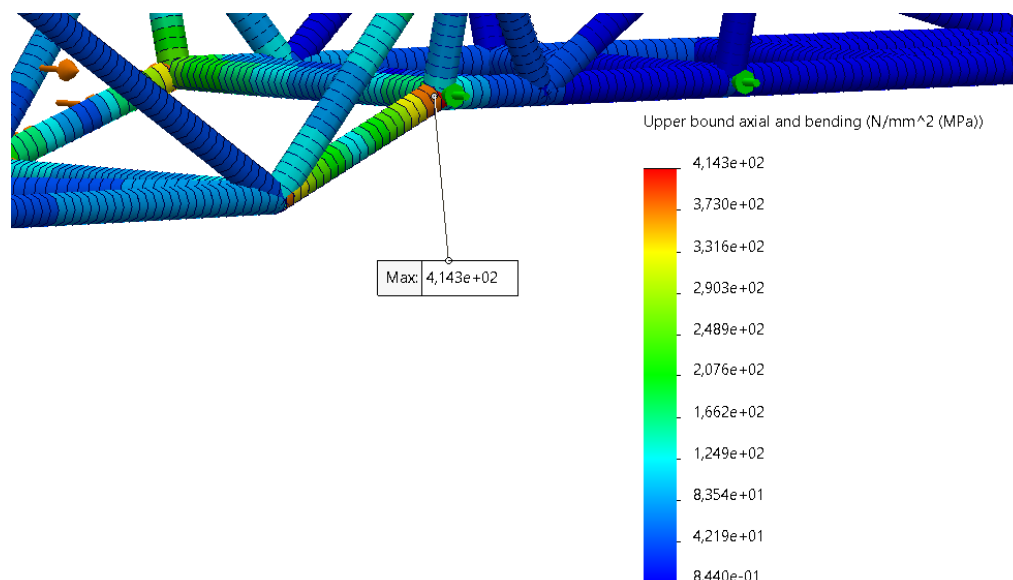


Figura 4.16: Local da singularidade

Tabela 4.5: Esforços nos componentes críticos da simulação de compressão lateral (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	-23,49	351,48	76,46	-2,24	383,19
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	0,20	338,38	-3,87	1,06	342,39
Beam-145(TRNSV_FH)	-57,51	-81,51	168,81	2,58	244,97
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])*	114,46	298,72	-31,13	3,41	414,34
Beam-186(Front_Hoop[1])	-22,45	13,59	237,92	13,32	260,76

* Valor ocorre num nó de suspensão restringido — possível singularidade numérica.

Podem-se visualizar os componentes críticos apresentados na tabela 4.5, na figura 4.17.

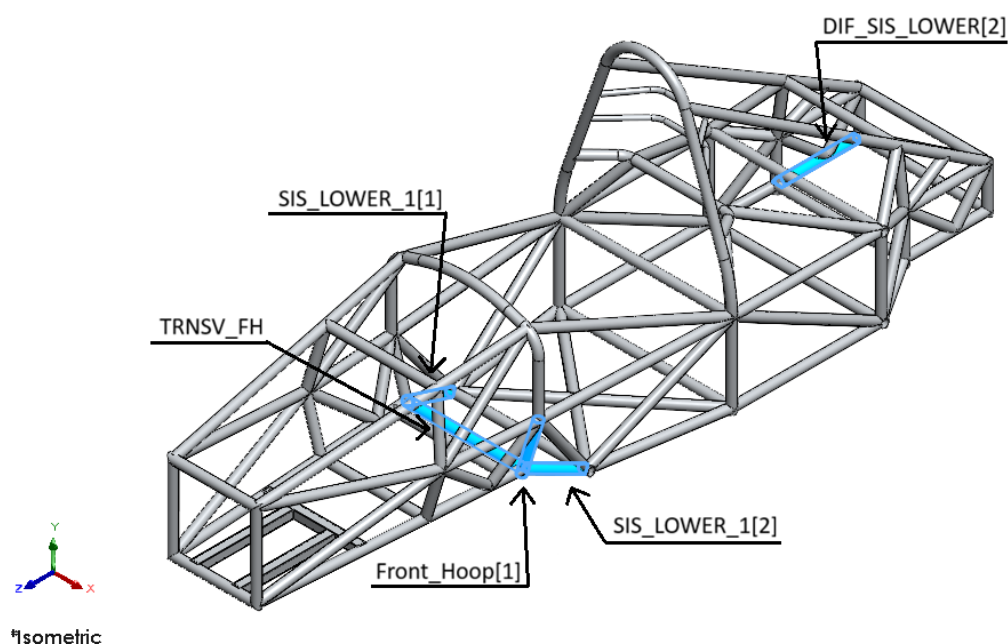


Figura 4.17: Componentes críticos da simulação de compressão lateral

Da análise da Tabela 4.5, verifica-se que os elementos mais solicitados se concentram na estrutura de impacto lateral inferior (*SIS_LOWER* e *DIF_SIS_LOWER*), que absorve a maior parte da carga transversal aplicada, com tensões máximas combinadas entre 342 e 383 MPa, excluindo a singularidade já referida. Nota-se também que o *Front_Hoop* e o *TRNSV_FH*, embora não pertencentes diretamente à zona de impacto, registam tensões na ordem dos 245 e 261 MPa, revelando que a carga se propaga para além da *Side Impact Structure*. Os restantes membros operam com tensões muito inferiores, sendo candidatos à redução de secção transversal na fase de otimização. A tabela completa encontra-se no Anexo 6.2.

4.6 Análise de Rigidez Torcional

A rigidez torcional é o parâmetro de desempenho estrutural mais crítico para a dinâmica do veículo. Define a capacidade do quadro de resistir às solicitações de torção geradas durante a transferência de carga em curva, garantindo que a afinação da suspensão atua conforme projetado.

A análise determina a resistência do quadro a um momento torsor aplicado no eixo longitudinal, o ensaio consiste em restringir os graus de liberdade nos pontos de fixação da suspensão traseira e aplicar um binário nos nós da suspensão dianteira, e vice-versa, na análise da resistência torcional no eixo traseiro. Valores de referência para a rigidez torcional em protótipos *space frame* variam tipicamente entre 1500 e 2500 Nm/grau (Sethupathi et al. 2018). Valores dentro desta margem garantem que o quadro é significativamente mais rígido que as molas da suspensão, funcionando como uma plataforma rígida.

O binário torsor (T) é gerado pela aplicação de duas forças verticais de igual magnitude e sentidos opostos ($F = 1000$ N) no eixo frontal. A distância L utilizada no cálculo corresponde à distância transversal entre os nós de fixação esquerdo e direito do quadro, onde o

deslocamento medido é maior:

$$T = F \cdot L \quad [\text{Nm}] \quad (4.6)$$

O ângulo de torção θ (em graus) do quadro é determinado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{z_{\text{esq}} + z_{\text{dir}}}{L}\right) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) \quad [\text{graus}] \quad (4.7)$$

onde:

z_{esq} , deslocamento máximo nos nós de suspensão esquerdos;

z_{dir} , deslocamento máximo nos nós de suspensão direitos;

L , distância entre os nós com maior deslocamento;

A rigidez torcional global do quadro (K_t) é a razão entre o momento torsor aplicado e o ângulo de deformação resultante:

$$K_t = \frac{T}{\theta} \quad [\text{Nm/grau}] \quad (4.8)$$

Na dinâmica de um veículo de competição, o quadro atua mecanicamente como uma mola de torção que une os eixos dianteiro e traseiro. Por este motivo, a quantificação da rigidez torcional deve ser realizada medindo a deflexão diretamente nos pontos de fixação da suspensão, uma vez que é nestes locais que as cargas dinâmicas induzem o ângulo de torção que o projeto visa minimizar. A relação estrutural entre as secções dianteira e traseira é crítica para a estabilidade do veículo, é importante garantir uma elevada rigidez à torção entre estes dois eixos para que a estrutura não sofra distorção durante as trajetórias em curva. Esta ligação rígida entre a frente e a traseira é o que permite isolar o trabalho cinemático do quadro, viabilizando a afinação precisa e independente da suspensão para controlar as transferências de carga e otimizar a manobrabilidade do veículo. Assim, foi aplicada uma força de 1000 N distribuída por 4 nós de suspensão dianteiros em cada lado (com sentidos opostos para criar um binário), bloqueando-se os deslocamentos nos nós de suspensão traseiros (Figura 4.18). As condições de fronteira utilizadas estão descritas na Tabela 4.6 (Jain 2014).

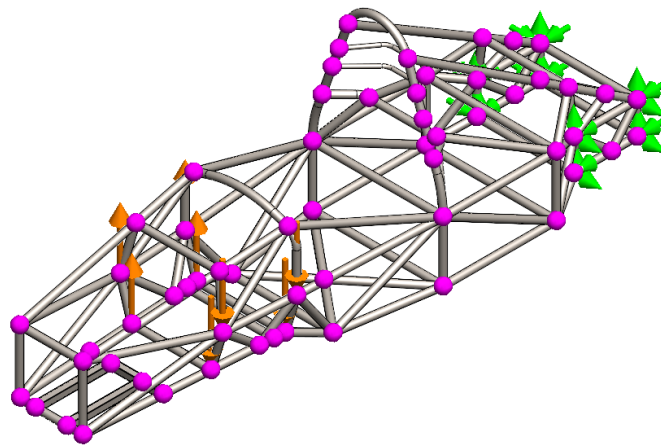


Figura 4.18: Condições de fronteira na simulação de rigidez torcional no eixo dianteiro

Tabela 4.6: Condições de fronteira para o ensaio de rigidez torcional frontal.

Componente	Tipo de Condição	Descrição / Eixo
Nós Suspensão Frontal (Esq.)	Carga Distribuída (4 nós)	1000 N
Nós Suspensão Frontal (Dir.)	Carga Distribuída (4 nós)	-1000 N
Apoios Suspensão Traseira	Imóvel	Restrição deslocamentos (3 GL)
Restante Estrutura	Livre	-

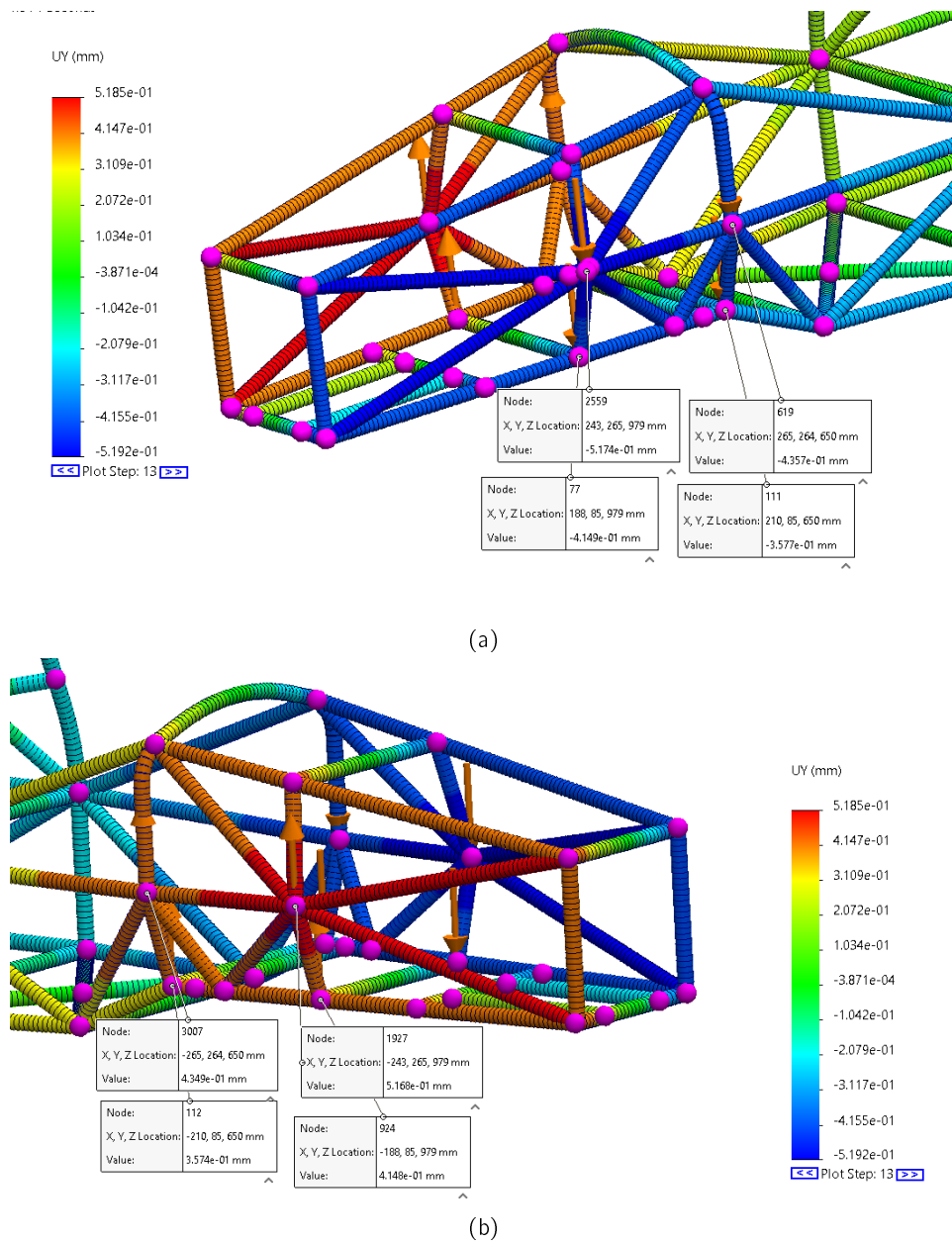


Figura 4.19: Deslocamentos nos pontos de suspensão dianteiros; a: lado direito, b: lado esquerdo.

Os deslocamentos máximos obtidos, medidos no eixo Y, na mesma direção de aplicação das forças aplicadas, foram de 0,5174 mm no lado direito, e de 0,5168 mm no lado esquerdo (4.19), a partir destes valores, juntamente com a distância entre os pontos onde foram medidos, de $L=486,08$ mm 4.20, é possível calcular a rigidez torcional no eixo dianteiro:

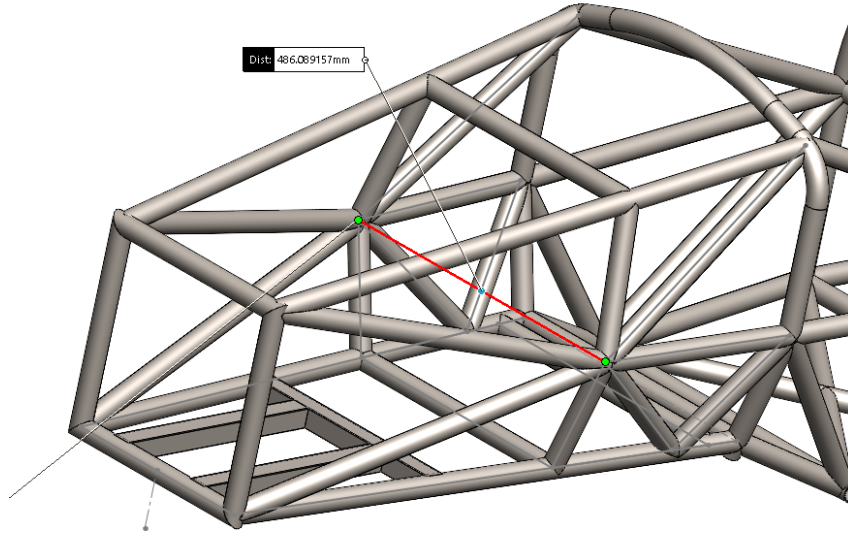


Figura 4.20: Distância entre os nós de maior deslocamento

$$\theta = \arctan\left(\frac{0,5174 + 0,5168}{486,08}\right) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) = [0.1219\text{graus}] \quad (4.9)$$

e também

$$T = 1000 \cdot 0,48608 = [486,1\text{Nm}] \quad (4.10)$$

Com estes dois valores, podemos calcular a rigidez torcional global do quadro (K_t), que é a razão entre o momento torsor aplicado e o ângulo de deformação resultante:

$$K_t = \frac{486,1}{0,1219} = [3988\text{Nm/grau}] \quad (4.11)$$

O valor alcançado encontra-se acima do intervalo considerado ideal para esta aplicação, situado entre os 1500 e 2500 Nm/grau. Este resultado evidencia uma margem significativa para otimização da estrutura. Através da supressão ou redimensionamento de barras submetidas a baixos níveis de tensão, é viável reduzir a massa total da estrutura, maximizando assim a relação entre a rigidez torcional e o peso do veículo.

Importa ainda referir que a rigidez global poderia atingir valores substancialmente mais elevados se a estrutura apresentasse uma triangulação integral. Conforme se observa na Figura 4.21, a ausência de membros diagonais em determinados quadros submete as barras adjacentes a elevados esforços. Esta lacuna geométrica causa uma flexibilidade local na estrutura que atua como um fator limitante, penalizando a rigidez torcional global do quadro (Sethupathi et al. 2018). Um dos locais em que há então falta de triangulação é a zona onde irá ser acoplada a bateria de tração, mas devido ao facto de haver a necessidade da bateria poder ser montada e desmontada livremente, essa zona não pode ser triangulada.

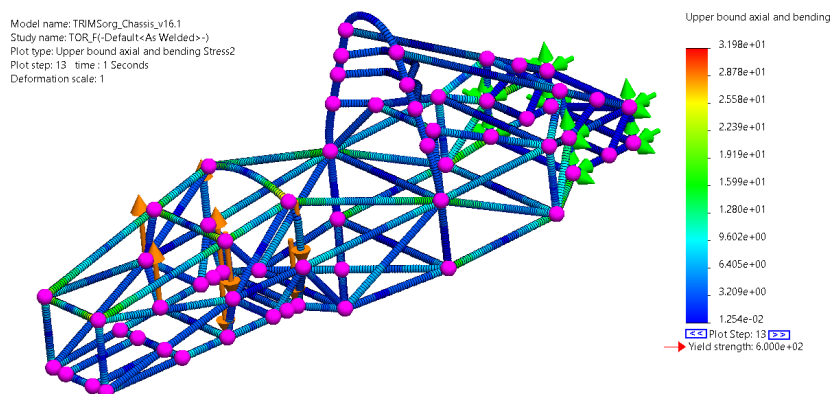


Figura 4.21: Plot de tensões máximas combinadas

A Tabela 4.7 apresenta os 5 elementos estruturais mais solicitados no ensaio de rigidez torcional frontal. Estes concentram-se na zona central do quadro, nomeadamente nos membros da estrutura de impacto lateral inferior (*DIF_SIS*) e no *Front Hoop*, que absorvem os esforços de flexão induzidos pelo binário torsor aplicado. A tabela completa encontra-se no Anexo 6.3.

Tabela 4.7: Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional frontal (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-122(TRNSV_T2_T3[1])	0,00	-25,69	7,32	1,89	26,71
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	-0,01	28,74	-3,18	0,32	31,92
Beam-158(Front_Hoop[3])	-1,49	27,11	7,53	-2,66	27,88
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	29,70	2,28	-0,06	31,98
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,00	16,57	-25,71	2,23	30,59

Podem ser visualizados os componentes críticos apresentados na tabela 4.7, na figura 4.22.

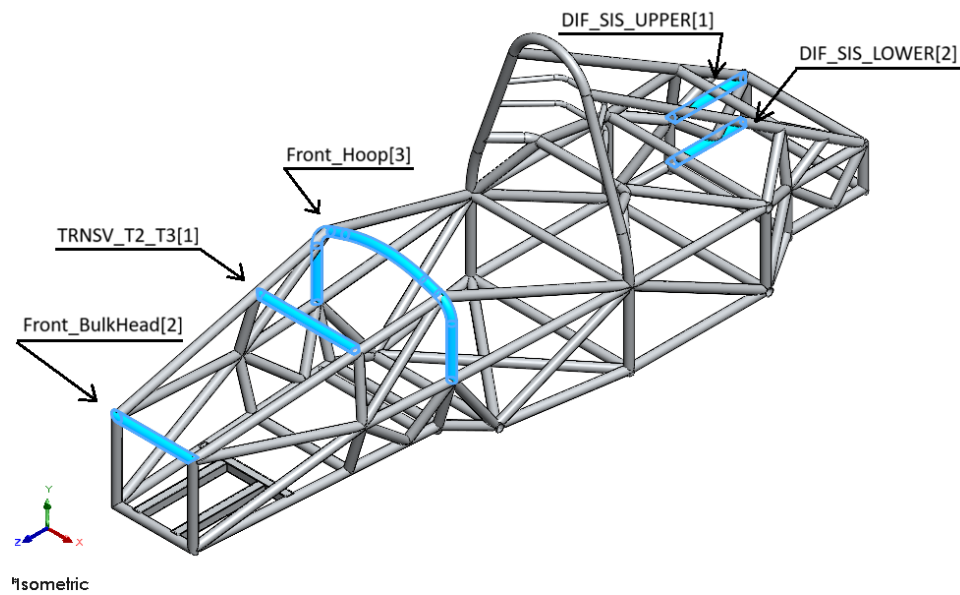


Figura 4.22: Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo dianteiro

No caso do eixo traseiro, o procedimento da simulação é idêntica à do eixo dianteiro, mas com as condições de fronteira invertidas, conforme ilustrado na Figura 4.23.

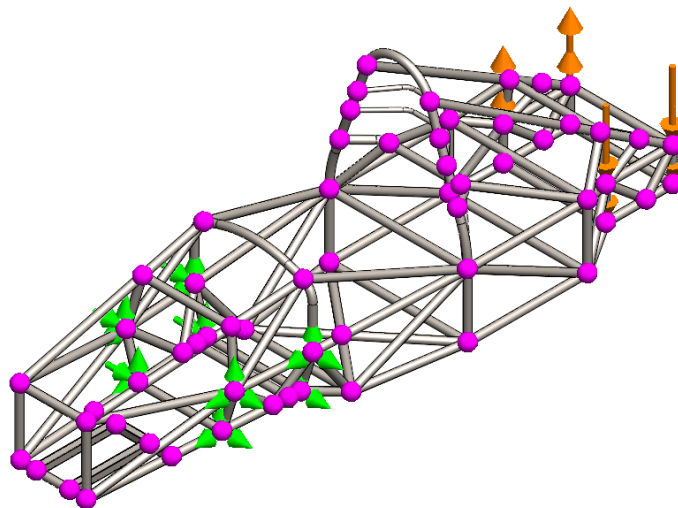


Figura 4.23: Condições de fronteira na simulação de rigidez torcional no eixo traseiro

Tabela 4.8: Condições de fronteira para o ensaio de rigidez torcional traseira.

Componente	Tipo de Condição	Descrição / Eixo
Nós Suspensão Traseira (Esq.)	Carga Distribuída (4 nós)	1000 N
Nós Suspensão Traseira (Dir.)	Carga Distribuída (4 nós)	-1000 N
Apoios Suspensão Traseira	Imóvel	Restrição deslocamentos (3 GL)
Restante Estrutura	Livre	-

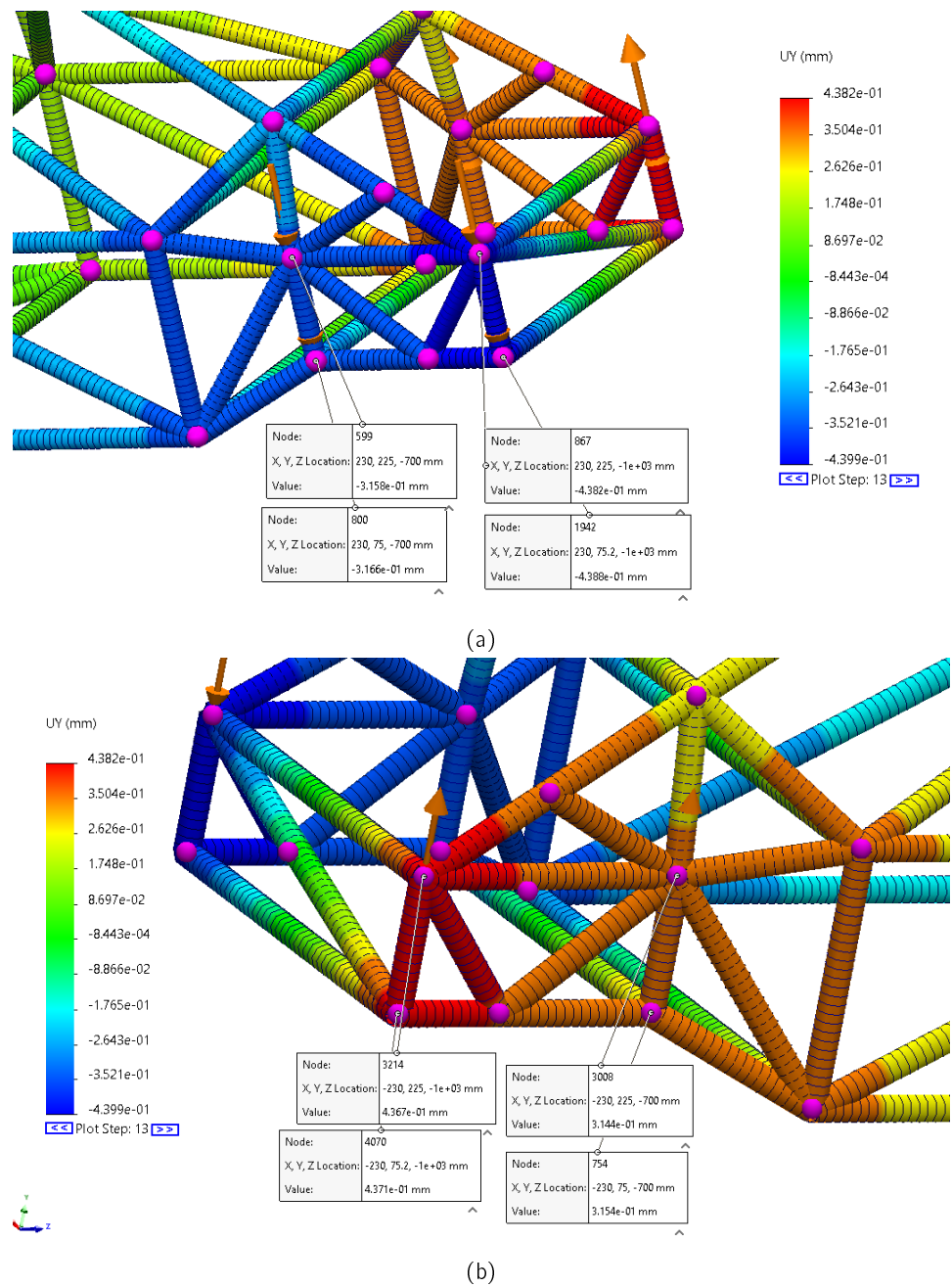


Figura 4.24: Deslocamentos nos pontos de suspensão traseiros; a: lado direito, b: lado esquerdo.

Os deslocamentos máximos obtidos, medidos em Y, na mesma direção de aplicação das forças aplicadas, foram de 0,4388 mm no lado direito, e de 0,4271 mm no lado esquerdo (4.24), a partir destes valores, juntamente com a distância entre os pontos onde foram medidos, de 460 mm 4.25, é possível calcular a rigidez torcional no eixo traseiro:

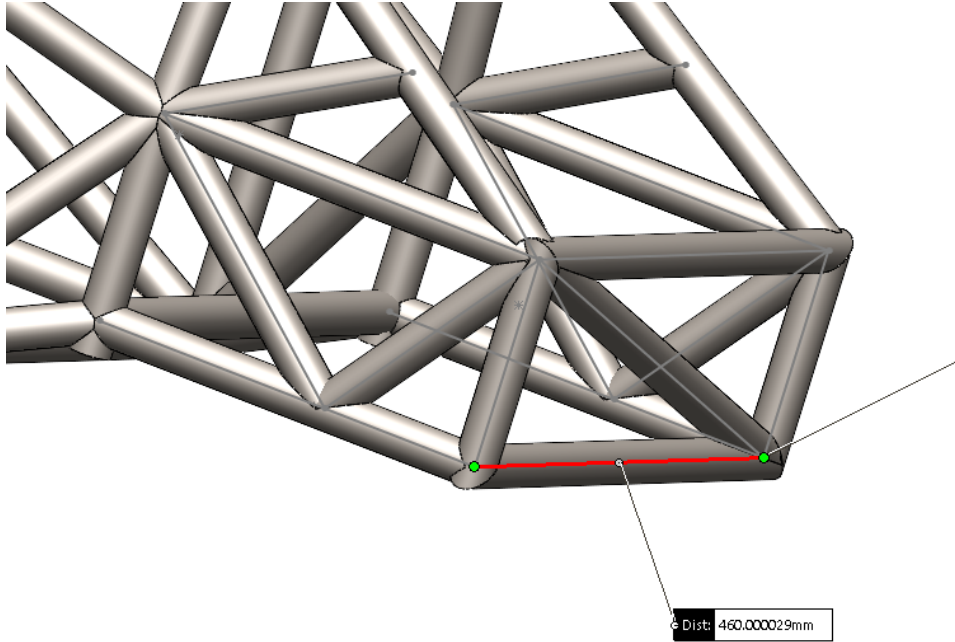


Figura 4.25: Distância entre os nós de maior deslocamento

$$\theta = \arctan \left(\frac{0,4388 + 0,4371}{460} \right) \cdot \left(\frac{180}{\pi} \right) = [0,1091\text{graus}] \quad (4.12)$$

e também

$$T = 1000 \cdot 0,460 = [460\text{Nm}] \quad (4.13)$$

Com estes dois valores, podemos calcular a rigidez torcional global do quadro (K_t), que é a razão entre o momento torsor aplicado e o ângulo de deformação resultante:

$$K_t = \frac{460}{0,1091} = [4216\text{Nm/grau}] \quad (4.14)$$

O valor de rigidez torcional obtido para o eixo traseiro é bastante satisfatório. Contudo, a análise da distribuição de tensões revela margem para otimização geométrica. Conforme ilustrado na Figura 4.26, identifica-se a ausência de triangulação num dos quadros (zona da bateria de tração). A falta de um elemento diagonal nesta zona obriga as barras envolvidas a suportar elevados esforços.

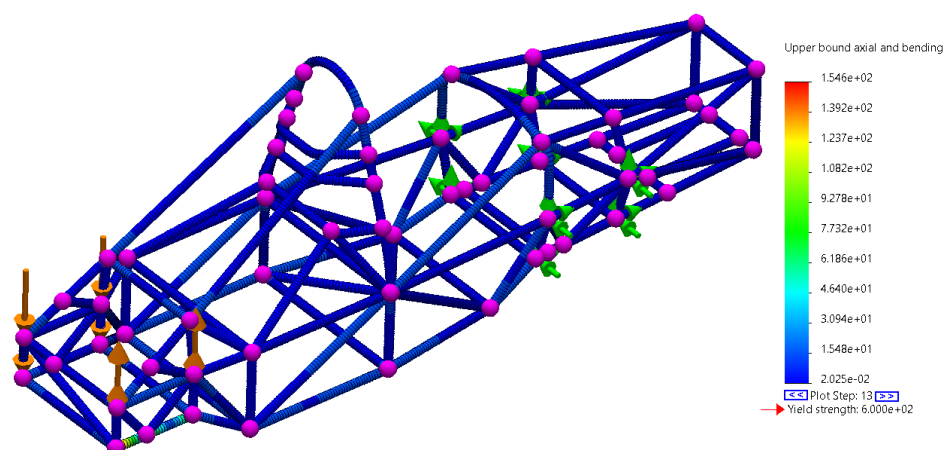


Figura 4.26: Plot de tensões máximas combinadas

A Tabela 4.9 apresenta os 5 elementos mais solicitados no ensaio de rigidez torcional traseira. À semelhança do ensaio frontal, os níveis de tensão combinada são muito inferiores aos registados nos ensaios de compressão. Contudo, destaca-se o elemento *DIF_SIS_LOWER[2]*, que apresenta uma tensão máxima combinada de 155 MPa, significativamente superior aos restantes elementos da tabela e ao máximo registado no ensaio de torção frontal. Este valor elevado, dominado pela componente de flexão *Bending Dir1*, sugere que este membro está sujeito a um momento fletor considerável induzido pelo binário torsor traseiro. A tabela completa encontra-se no Anexo 6.4.

Tabela 4.9: Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional traseira (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	-11,03	-9,93	-10,46	0,81	25,45
Beam-134(AC_SIS_LOWER[2])	6,22	-14,23	3,48	1,35	20,87
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	0,63	149,19	4,85	2,74	154,62
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	11,01	-10,01	-10,41	0,84	25,45
Beam-158(Front_Hoop[3])	6,13	14,57	-15,42	1,04	21,58

Podem ser visualizados os componentes críticos apresentados na tabela 4.9, na figura 4.27.

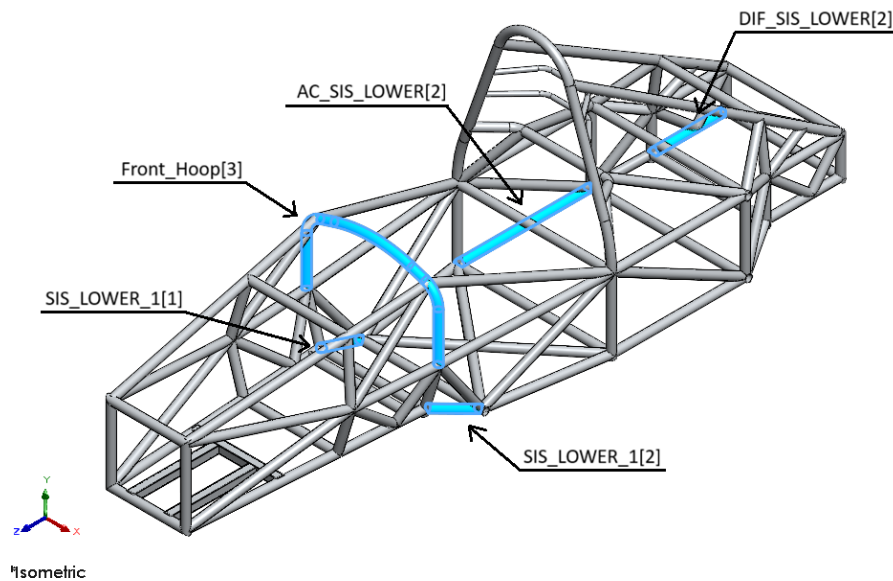


Figura 4.27: Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo traseiro

Com os valores de rigidez torcional dianteiro e traseiro anteriormente obtidos, é possível obter o rácio de rigidez torcional entre os dois eixos através da seguinte relação:

$$\text{Rácio} = \frac{K_{t,dianteiro}}{K_{t,traseiro}} = \frac{3988}{4216} \approx 0,946 \quad (4.15)$$

O valor alcançado demonstra um equilíbrio estrutural notável entre as secções frontal e traseira do quadro. Uma relação equilibrada, próxima de 1 e de elevada magnitude é fundamental para garantir que a transferência de carga lateral é gerida de forma previsível. A suspensão é projetada sob a premissa de que o quadro atua como uma plataforma rígida, recomendando-se que a rigidez estrutural seja uma ordem de grandeza superior à rigidez das molas da suspensão, cerca de 10 vezes superior. Valores insuficientes de rigidez torcional resultam numa estrutura que atua como um elemento elástico parasita, o que, de acordo com relatos experimentais, leva a uma perda direta de controlo da suspensão e impossibilita o ajuste mecânico linear do comportamento dinâmico do veículo (Riley e George 2002).

4.7 Análise Modal

A análise modal tem um papel fundamental no desenvolvimento estrutural de um veículo de competição, permitindo caracterizar detalhadamente o seu comportamento dinâmico. O principal objetivo deste estudo é identificar as frequências naturais e as respetivas formas modais do quadro, garantindo que não coincidem com as frequências de excitação geradas durante a operação do veículo, tais como as vibrações induzidas pelos componentes do grupo propulsor. Esta separação de frequências é crucial para evitar fenómenos de ressonância, que poderiam levar a falhas por fadiga.

Ao contrário de um sistema massa-mola simples com um grau de liberdade, cuja frequência natural pode ser facilmente determinada de forma analítica, um quadro tubular de *Formula Student* constitui uma estrutura espacial complexa com múltiplos graus de liberdade. Assim,

para a determinação rigorosa das suas características modais e resolução do problema de valores próprios (eigenvalues), é necessário recorrer a simulações baseadas no Método dos Elementos Finitos.

Nesta secção, são extraídos os 14 primeiros modos de vibração da estrutura, aplicando-se a metodologia computacional a dois cenários de análise distintos. O primeiro é a análise do quadro livre, em que a avaliação da estrutura tubular é feita de forma isolada. O segundo cenário consiste na análise do quadro carregado, em que são incorporadas no modelo numérico as massas dos subsistemas mais pesados do veículo, nomeadamente o piloto, o acumulador de alta tensão, o motor elétrico e o diferencial.

Para a modelação destes subsistemas, as massas correspondentes foram distribuídas pontualmente pelos nós pertencentes às barras onde os componentes estarão fisicamente fixados. Esta abordagem metodológica foi adotada em detrimento da utilização de ligações infinitamente rígidas, a acoplagem de massas através de restrições rígidas multiponto atua como um reforço estrutural irrealista, introduzindo uma rigidez artificial severa que inflaciona as frequências naturais do sistema. Ao aplicar o peso sob a forma de massas distribuídas, garante-se a alteração exclusiva da matriz de massa do sistema matemático, preservando a flexibilidade e a verdadeira matriz de rigidez da estrutura tubular (Heirman e Desmet 2010).

Esta segunda abordagem é relevante dado que a frequência natural é inversamente proporcional à massa do sistema ($f_n \propto \sqrt{K/m}$). Nas duas situações distintas, adotou-se uma condição de fronteira totalmente livre. A extração focou-se nos 14 primeiros modos de vibração, ignorando os modos de corpo rígido, o que permite uma análise de modo a prevenir que o quadro entre em ressonância com as frequências de excitação geradas pelo motor de tração, por exemplo. Importa salientar que, na determinação destas frequências naturais, a densidade e o Módulo de Elasticidade do material assumem um papel dominante (Baojun et al. 2017; Schweighardt, Vehovszky e Feszty 2020).

A Tabela 4.10 sintetiza as frequências naturais obtidas para os 14 primeiros modos de vibração elásticos com o quadro livre, e a tabela 4.11 apresenta os 14 primeiros modos de vibração elásticos para o quadro carregado.

Tabela 4.10: Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro Livre.

quadro Livre (Hz)	Descrição da Forma Modal
62,90	1º Modo de vibração
81,62	2º Modo de vibração
113,95	3º Modo de vibração
140,12	4º Modo de vibração
144,76	5º Modo de vibração
150,76	6º Modo de vibração
166,14	7º Modo de vibração
175,11	8º Modo de vibração
187,14	9º Modo de vibração
198,26	10º Modo de vibração
107,40	11º Modo de vibração
220,38	12º Modo de vibração
224,44	13º Modo de vibração
242,50	14º Modo de vibração

Tabela 4.11: Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro carregado.

quadro Carregado (Hz)	Descrição da Forma Modal
30,74	1º Modo de vibração
57,32	2º Modo de vibração
71,96	3º Modo de vibração
78,49	4º Modo de vibração
89,09	5º Modo de vibração
91,72	6º Modo de vibração
99,80	7º Modo de vibração
116,21	8º Modo de vibração
131,31	9º Modo de vibração
137,81	10º Modo de vibração
154,55	11º Modo de vibração
189,53	12º Modo de vibração
195,52	13º Modo de vibração
197,76	14º Modo de vibração

Como demonstrado na Tabela 4.11, a introdução das massas dos componentes resultou numa diminuição acentuada das frequências naturais em comparação com o quadro livre. Este fenómeno é esperado, uma vez que a frequência natural de um sistema é inversamente proporcional à raiz quadrada da sua massa.

Importante notar que o uso de massas distribuídas permitiu eliminar a rigidez artificial observada em iterações anteriores da simulação modal. A utilização de ligações rigidamente acopladas tende a sobrestimar a rigidez global da estrutura, resultando em frequências naturais irrealisticamente elevadas. Com a metodologia de massas distribuídas, garantiu-se

que apenas a matriz de massa do sistema fosse incrementada, preservando a flexibilidade intrínseca dos tubos e fornecendo resultados que representam com maior fidelidade o comportamento real da estrutura em vibração (Heirman e Desmet 2010).

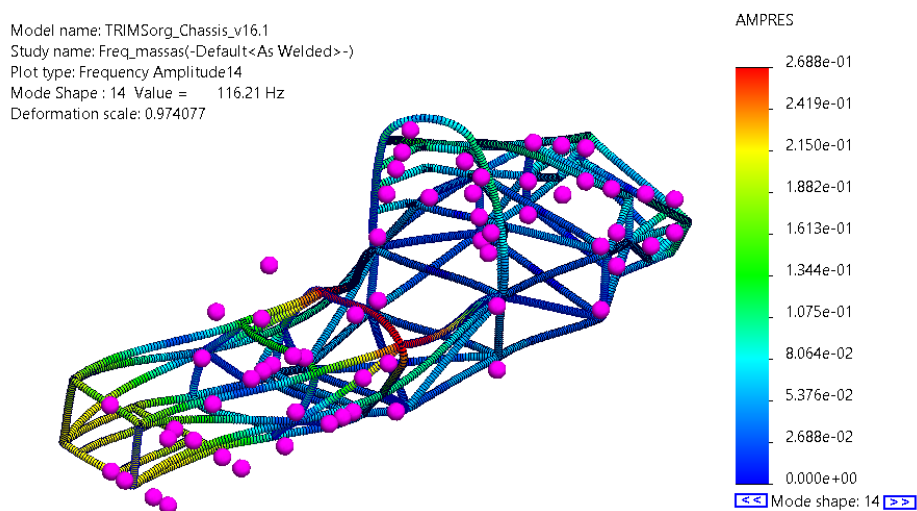


Figura 4.28: Oitavo modo de vibração, quadro carregado, 116,21 Hz

O sistema propulsor selecionado, o motor elétrico síncrono EMRAX 208, apresenta uma rotação nominal de 7000 RPM, o que corresponde a uma frequência de excitação de aproximadamente 116,67 Hz. Ao analisar os resultados da Tabela 4.11, verifica-se que esta frequência de operação se situa no espectro dos 20 primeiros modos de vibração do quadro carregado, estando próximo do 8º modo (4.28), cuja frequência é de 116,21 Hz, não ocorre ressonância mas existem vibrações com grande amplitude. Uma separação das frequências naturais da estrutura e do funcionamento do motor de tração é fundamental, pois minimiza o risco de fenômenos de ressonância preservando a integridade estrutural do quadro durante o funcionamento do veículo. Este problema poderá vir a ser resolvido, uma vez que a otimização irá retirar massa, fazendo com que a frequência natural desse modo se afaste da frequência de funcionamento do motor de tração.

4.8 Estratégia de Otimização

As tabelas detalhadas com os resultados de todos os ensaios estáticos (compressão Frontal, compressão lateral, Torção Frontal e Torção Traseira) encontram-se compiladas nos Anexos deste documento, e reportam, para cada elemento, as seguintes componentes de tensão em N/m^2 :

- Axial: tensão normal (σ_a) por tração ou compressão axial.
- Bending Dir1 / Dir2: tensões de flexão (σ_{b1} , σ_{b2}) nos dois planos locais ortogonais da secção.
- Torsional: tensão de corte (τ) por momento torçor.
- Worst Case: tensão máxima combinada, calculada pela Equação 4.1.

A estratégia de otimização geométrica baseia-se na observação dos valores de tensão máxima combinada, com a condição de que nenhum elemento do quadro tubular ultrapasse a Tensão de Cedência do Docol R8 (600 MPa). De modo a proceder à otimização de forma eficiente, foi elaborada a tabela 6.5, em que estão expostos, para cada tubo, os valores de tensões combinadas máximas em todas as simulações estáticas realizadas, o valor de área de secção mínimo para suportar esses mesmos valores sem ultrapassar a tensão de cedência do material, assim como o diâmetro exterior mínimo, calculado a partir das dimensões de espessura de parede, área de secção e momento de inércia, do regulamento Formula Student (Formula Student 2026). Na tabela 4.12 estão expostas as propriedades geométricas regulamentares a cumprir, por cada tipologia de membro. considerar cargas combinadas como por exemplo um impacto frontal com torção. A estratégia de otimização é de natureza manual e baseada na observação de parâmetros de tensão, não constituindo uma otimização generativa ou automatizada.

Tabela 4.12: Propriedades geométricas regulamentares por localização estrutural

tipologia do Membro	Espessura de Parede (mm)	Área de Secção (mm ²)	Momento de Inércia (mm ⁴)
Main e front hoop	2	173	11320
Estruturas de impacto, front bulkhead, roll hoop bracing, driver's restraint, harness attachment	1,2	119	8509
Front bulkhead support, main hoop bracing supports	1,2	91	6695

O diâmetro exterior mínimo é obtido isolando a respetiva variável na equação do momento de inércia para um tubo de secção circular oca:

$$I = \frac{\pi \cdot (D_o^4 - D_i^4)}{64} \quad (4.16)$$

Considerando que o diâmetro interior se relaciona com o diâmetro exterior através da espessura da parede ($D_i = D_o - 2t$), a equação toma a forma:

$$I = \frac{\pi \cdot [D_o^4 - (D_o - 2t)^4]}{64} \quad (4.17)$$

Sabendo os valores de inércia e de espessura de parede, basta resolver a equação 4.17 em ordem ao diâmetro exterior. No entanto, de modo a cumprir-se o regulamento Formula Student, o diâmetro exterior não pode ser determinado apenas através do critério isolado da inércia, sob o risco de a restrição de área de secção mínima ser negligenciada. Uma vez que as regras definem limites mínimos independentes e cumulativos para o momento de inércia ($I_{\min}$), para a área da secção transversal ($A_{\min}$) e para a espessura de parede ($t_{\min}$), o diâmetro exterior (D_o) foi condicionado de forma a assumir o valor necessário para satisfazer a equação do momento de inércia ou o valor imposto pela área de secção mínima, prevalecendo sempre o cenário mais conservador. Adicionalmente, devido às elevadas propriedades mecânicas do aço Docol R8, as áreas mínimas estritamente necessárias para suportar as solicitações mecânicas ($A_{\min, res}$) situam-se muito abaixo das exigidas pelo regulamento.

$$A_{\text{mín, res}} = \frac{\max(\sigma_{\text{IF}}, \sigma_{\text{IL}}, \sigma_{\text{TF}}, \sigma_{\text{TT}}) \cdot A_{\text{atual}}}{\sigma_{\text{ced}}} \quad (4.18)$$

onde σ_{IF} , σ_{IL} , σ_{TF} e σ_{TT} representam as tensões máximas combinadas nos ensaios de compressão Frontal, compressão Lateral, Torção Frontal e Torção Traseira, respetivamente. O termo A_{atual} corresponde à área de secção transversal de referência da tubagem base (175,93 mm²).

Assim, as áreas calculadas não foram consideradas para a definição geométrica final, prevalecendo sempre os limites regulamentares mínimos. Na Tabela 4.13 apresenta-se um resumo da Tabela 6.5 (disponibilizada em anexo), destacando um membro representativo de cada uma das principais tipologias estruturais do quadro. Ambas as tabelas expõem os cenários de *worst case* máximo para cada simulação, detalhando a área atual da secção de cada tubo no chassis original, a área mínima necessária para suportar a maior solicitação e o diâmetro mínimo permitido segundo os critérios geométricos da Tabela 4.12.

Tabela 4.13: Resultados do dimensionamento, tensões máximas combinadas, área atual, mínima e diâmetro mínimo requerido

Nome da Viga	compressão Frontal (MPa)	compressão Lateral (MPa)	Torção Frente (MPa)	Torção Trás (MPa)	Área Atual (mm ²)	Área Mínima (mm ²)	Diâmetro Mínimo (mm)
B-144 (Main_Hoop)	59,60	40,60	5,70	18,60	175,93	17,48	29,53
B-133 (upper_FBH)	118,00	39,80	19,30	5,82	175,93	34,64	25,42
B-110 (SIS_LOWER)	350,00	383,00	8,78	25,40	175,93	112,36	32,77

No entanto, o dimensionamento obtido deve ser confrontado com as restrições em relação ao material disponível no mercado. Na prática, a seleção geométrica está limitada aos perfis comerciais discretos disponibilizados pelos fabricantes, impossibilitando a adoção exata dos diâmetros teóricos ótimos. Adicionalmente, de um ponto de vista de projeto, a utilização de uma elevada variedade de secções distintas impactaria negativamente o processo de fabrico. Esta variabilidade aumentaria a complexidade na maquinagem das extremidades dos tubos e existiriam também incompatibilidades de diâmetros. Assim, optou-se por uma estratégia de uniformização geométrica, com perfis Docol Tube R8 disponíveis no catálogo do fornecedor ME Racing. As três tipologias de tubos foram mapeados em apenas dois diâmetros exteriores distintos, para o tipo 1 (*Roll Hoops*), selecionou-se o perfil de 30,00×2,00 mm, para o tipo 2 adotou-se o perfil de 30,00×1,50 mm. Ao unificar o diâmetro exterior com o dos Hoops, simplificaram-se substancialmente os nós de transição estrutural, aceitando um ligeiro aumento de massa a favor da integridade e facilidade de fabrico. Finalmente, para o tipo 3 (Membros de Suporte e Triangulações Secundárias), foi selecionado o tubo de 25,40×1,24 mm. Os três perfis normalizados selecionados superam todos os requisitos geométricos mínimos de espessura de parede, área de secção e segundo momento de inércia impostos pelo regulamento *Formula Student*. Na figura 4.29 é possível observar a distribuição dos diferentes perfis pelo quadro, vermelho para 30,00×2,00 mm, amarelo para 25,40×1,24 mm e verde para 30,00×1,50 mm.

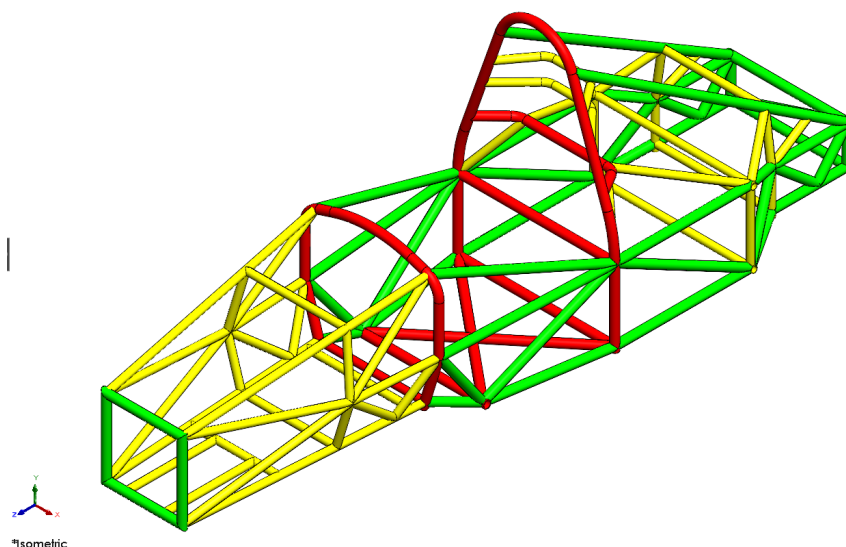


Figura 4.29: quadro com diferentes secções diferenciadas por cor

4.9 Análise de compressão Frontal (quadro otimizado)

Depois da aplicação dos novos perfis, obteve-se desde logo uma redução de 16 kg na massa do quadro, que passou de 56 kg, para 40 kg, sem qualquer alteração na triangulação. Na compressão frontal, obteve-se um deslocamento máximo de 3,383 mm. Não substancialmente superior ao valor de deslocamento resultante obtido com um quadro 16kg mais pesado, de 2,337 mm. O local onde se situa o deslocamento máximo mudou também, devido ao uso das novas secções. Anteriormente a *Front BulkHead* e os seus suportes usavam o mesmo perfil de 30 x 2 mm, agora, a primeira usa um perfil de 30 x 1,5 mm, e a segunda, um perfil de 25,4 x 1,24 mm. Contudo, havendo uma redução de 28,57% de peso, e um aumento de apenas 1,046 mm no deslocamento resultante, pode-se concluir que a otimização estrutural cumpriu o seu propósito.

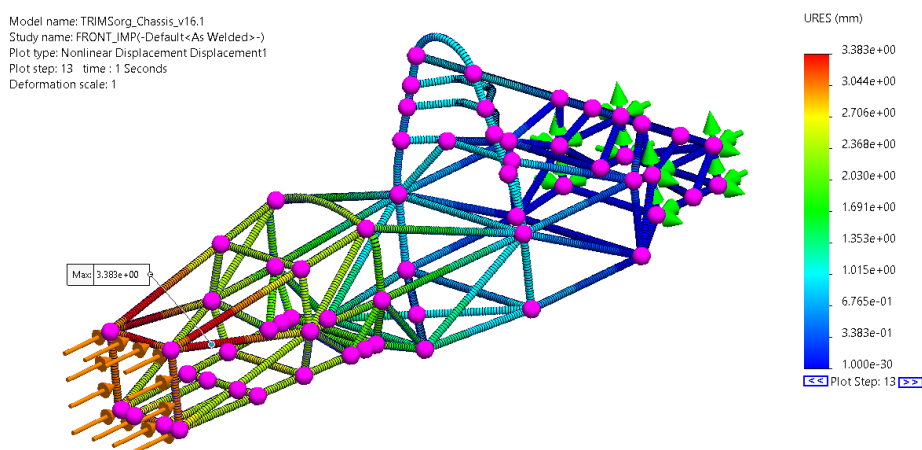


Figura 4.30: Deslocamento resultante na simulação de compressão frontal (FBH)

Através da análise da Tabela 6.6, é possível verificar um incremento nas tensões nos elementos estruturais do quadro. Todos os componentes previamente classificados como críticos, 4.14, registraram um aumento substancial na sua solicitação. Por exemplo, no *Beam-182* é possível verificar um aumento de 167 MPa para 249 MPa, o que, ainda assim, traduz um coeficiente de segurança de 2,41 face ao limite de cedência do material. Este comportamento é igualmente observado nos resultados das simulações subsequentes. Adicionalmente, verifica-se que os cinco elementos críticos variam consoante o cenário analisado, o que decorre diretamente da alteração das secções transversais dos tubos, esta modificação altera a rigidez local e consequentemente, redefine os caminhos de força e a distribuição de tensões ao longo do quadro.

Algo a notar que as barras constituintes da *Front Bulkhead* foram as que registaram os níveis de solicitação mais elevados do modelo. Isto acontece por causa da aplicação da força ao longo de uma barra suportada apenas nas suas extremidades, ocorrendo concentração de esforços nas zonas que oferecem menor rigidez local ao carregamento.

Tabela 4.14: Tensões nos componentes críticos da simulação de compressão frontal (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-107(FBH_LS[1])	-79,73	-88,41	-105,33	6,51	194,89
Beam-124(Front_BulkHead[1])	1,89	3,76	227,63	12,29	229,32
Beam-129(FBH_LS[2])	-80,44	-94,42	106,24	-6,10	199,12
Beam-164(Front_BulkHead[3])	1,95	-4,38	-227,78	-11,76	229,54
Beam-182(Front_BulkHead[2])	-9,43	4,35	-239,52	-0,31	249,95

Pode-se visualizar os componentes críticos apresentados na tabela 4.14, na figura 4.31

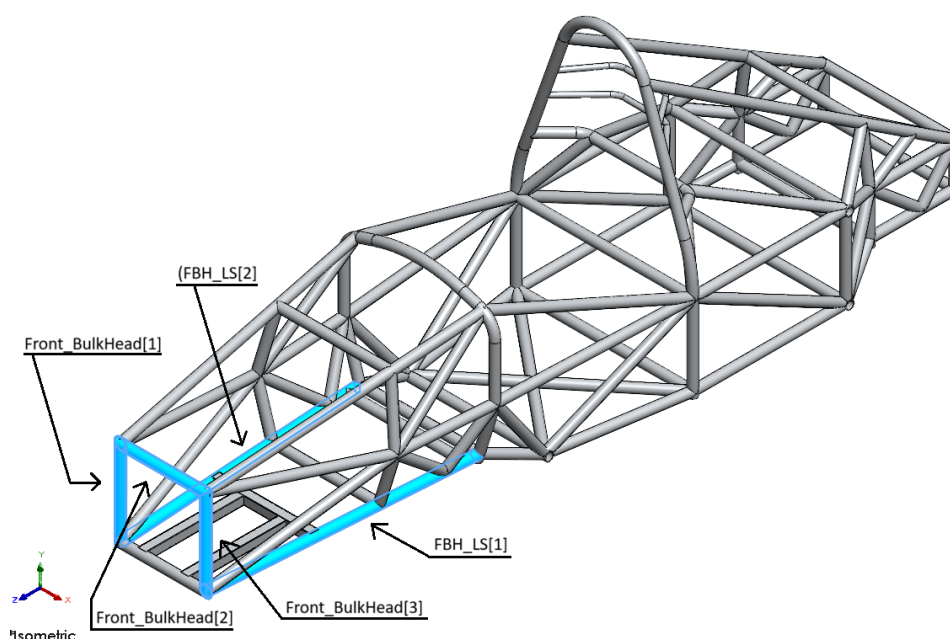


Figura 4.31: Componentes críticos da simulação de compressão frontal

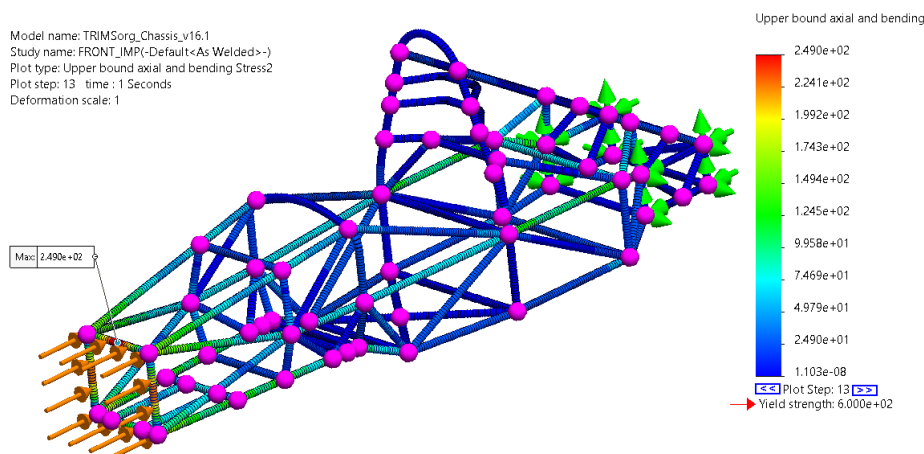


Figura 4.32: Tensões máximas combinadas na simulação de compressão frontal (FBH)

Na figura 4.32 observa-se também que a localização do pico de tensão máxima combinada foi diferente da zona de maior deslocamento global, ao contrario do sucedido na mesma simulação no quadro original, com o mesmo perfil em todos os seus tubos. Isto aconteceu devido à diferença de rigidez entre os componentes da estrutura onde decorrem os dois eventos. O facto de a *Front Bulkhead*, onde ocorre o pico de tensão máximo, ser constituída por um perfil mais robusto (30,00 x 1,5 mm) faz com que atue como o principal caminho de carga da compressão, ocorrendo assim concentração de tensão. Em contrapartida, as barras de suporte da *Bulkhead*, utilizam um perfil mais esbelto (25,40 x 1,24 mm), e assim, possuem menos rigidez local, fazendo com que se deformem mais facilmente, originando os maiores deslocamentos globais, sem acumularem os picos de tensão como na *Front BulkHead*.

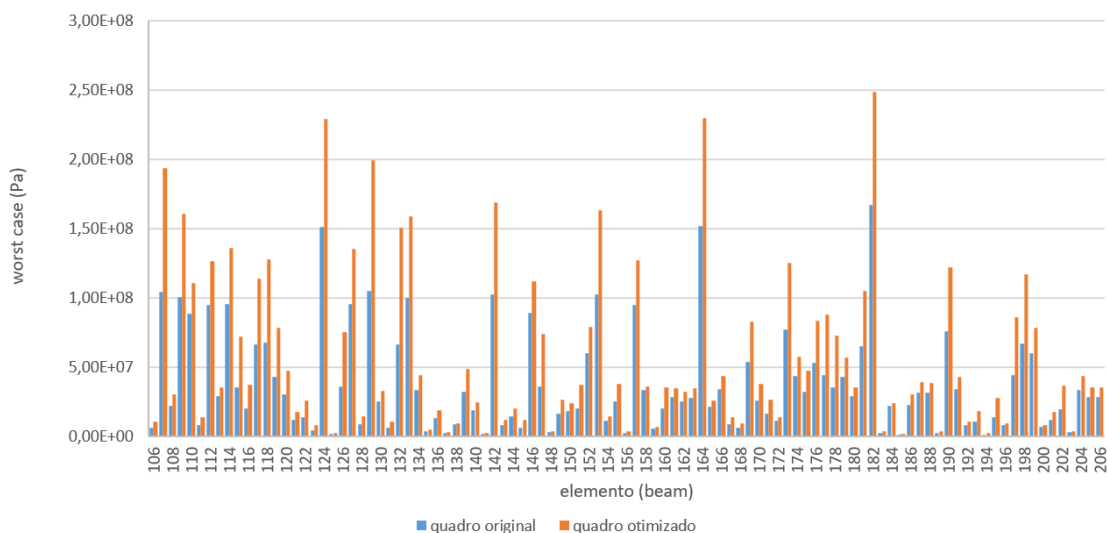


Figura 4.33: Comparação do *Worst Case*, todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, compressão frontal

Analisando o gráfico da figura 4.33, é possível verificar o incremento que ocorreu nas tensões, mencionado anteriormente. O incremento médio nas das tensões *Worst Case* foi de +50,48%, um aumento bastante significativo.

4.10 Análise de compressão Lateral (quadro otimizado)

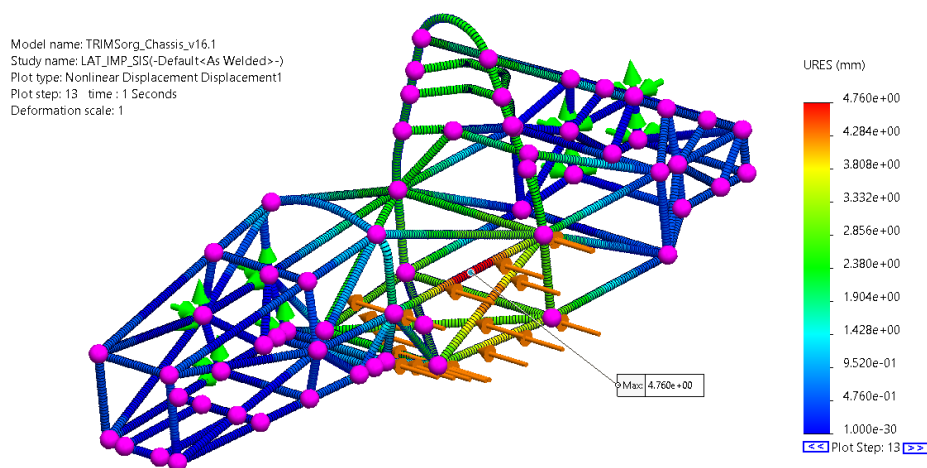


Figura 4.34: Deslocamento resultante na simulação de compressão lateral (FBH)

Na figura 4.34 podemos observar um aumento no deslocamento, expectado, uma vez que foi aplicado na estrutura de impacto lateral um perfil mais esbelto, o valor obtido para o deslocamento passou de 3,531 mm para 4,760 mm, mais uma vez, um aumento não muito significativo tendo em conta a redução de massa que se conseguiu com o método de otimização utilizado. O deslocamento máximo ocorreu no mesmo local da simulação com o quadro original.

Tabela 4.15: Esforços nos componentes críticos da simulação de compressão lateral (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-107(FBH_LS[1])*	-21,50	-108,39	-307,47	-32,25	342,85
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	-24,34	380,08	-71,41	14,36	410,61
Beam-145(TRNSV_FH)	100,98	-142,47	201,83	5,56	425,73
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	159,13	347,17	-39,53	8,43	506,48
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	-108,12	195,52	-16,05	10,42	304,30

* Valor ocorre num nó de suspensão restringido — possível singularidade numérica.

Pode-se visualizar os componentes críticos apresentados na tabela 4.15, na figura 4.35.

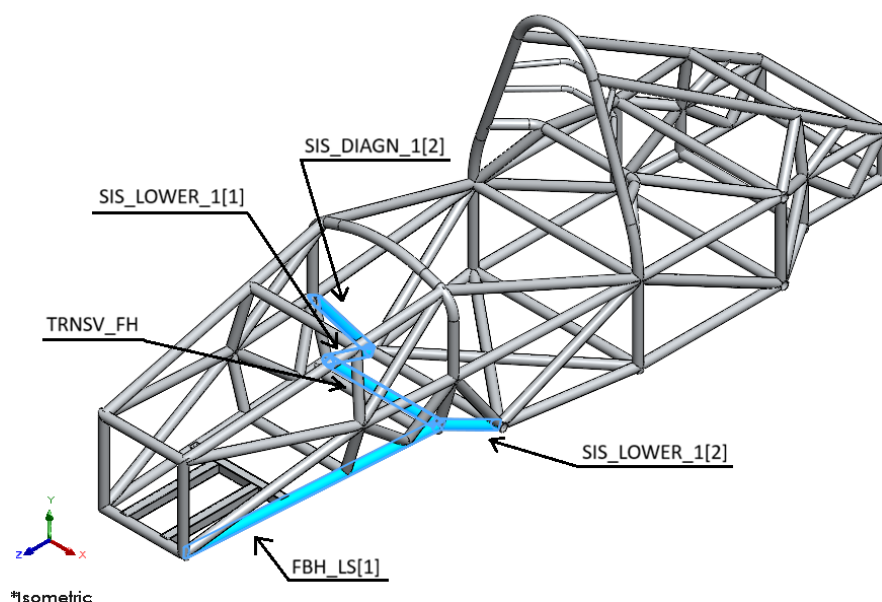


Figura 4.35: Componentes críticos da simulação de compressão lateral

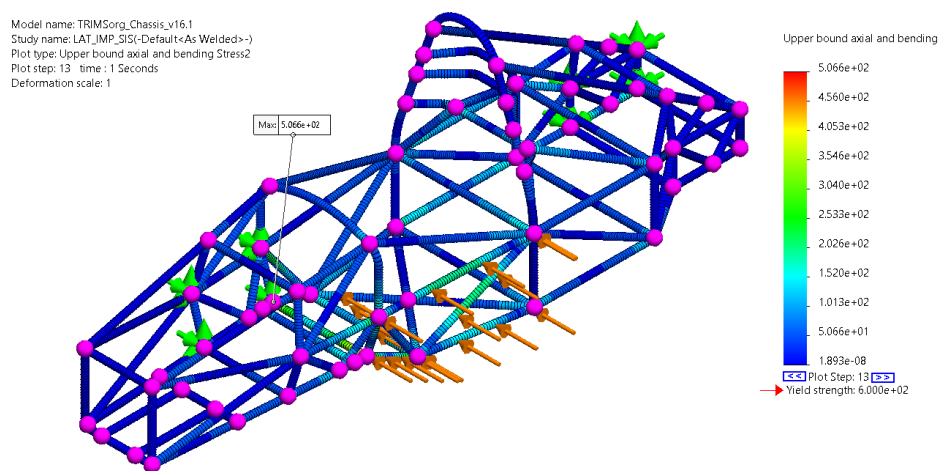


Figura 4.36: Tensões máximas combinadas na simulação de compressão lateral

À semelhança da simulação de compressão lateral em que o quadro usava os perfis originais (30 x 2 mm), o pico de tensões situa-se num nó de suspensão, algo esperado porque todos os deslocamentos estão restringidos, tornando-o num local propenso a concentração de tensões. Ocorreu também um aumento global na solicitação dos tubos do quadro, tal como esperado. A transição para as secções otimizadas resultou num aumento dos níveis de tensão, acompanhando a redução de massa. Conforme ilustrado no gráfico da figura 4.37, a tensão média global da estrutura subiu 40,64%.

O ponto crítico do quadro em ambas as configurações manteve-se no tubo Beam-146 (SIS_LOWER_1[1]), mesmo a lista dos elementos críticos tendo mudado, devido à alteração das secções. Nesse elemento a tensão máxima registou um aumento, progredindo

de 414,3 MPa para 506,5 MPa. Sendo este o ensaio mecânico mais severo para as barras de proteção lateral, o valor obtido estabiliza com segurança abaixo da tensão de cedência do material.

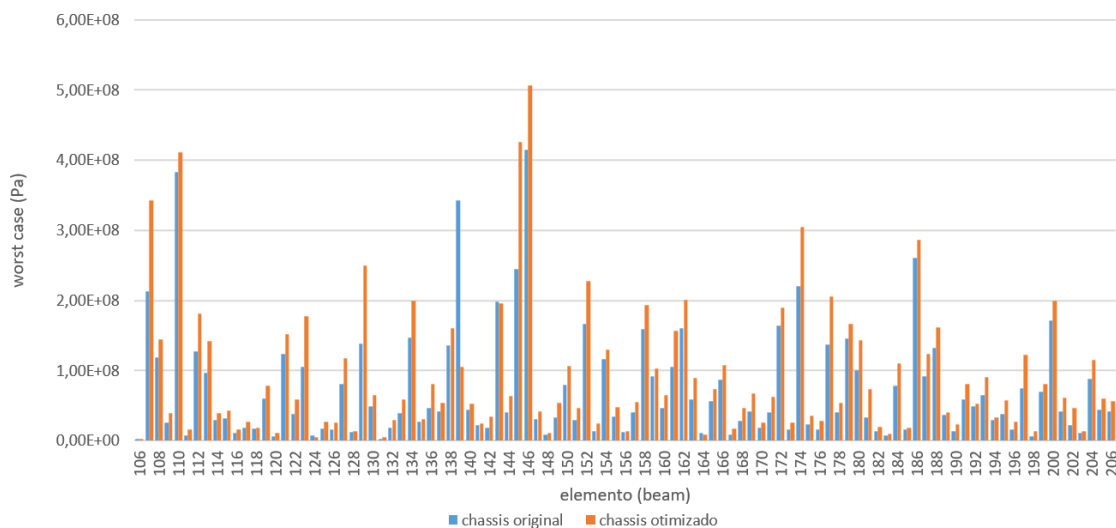


Figura 4.37: Comparação do *Worst Case*, todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, compressão lateral

Pode-se observar uma diminuição das tensões máximas combinadas no elemento 139 que cooresponde á barra (DIF_SIS_LOWER[2]), essa redução deve-se ao facto de que foram entao aplicados diferentes perfis naquela zona que permitiram que as forças fossem melhor distribuidas, aliviando bastante a tensão nesse local.

4.11 Análise de Rigidez Torcional (quadro otimizado)

De modo a avaliar a performance do quadro otimizado e comparar com a do quadro original, obtemos os deslocamentos nos nós de suspensão, tal como feito anteriormente.

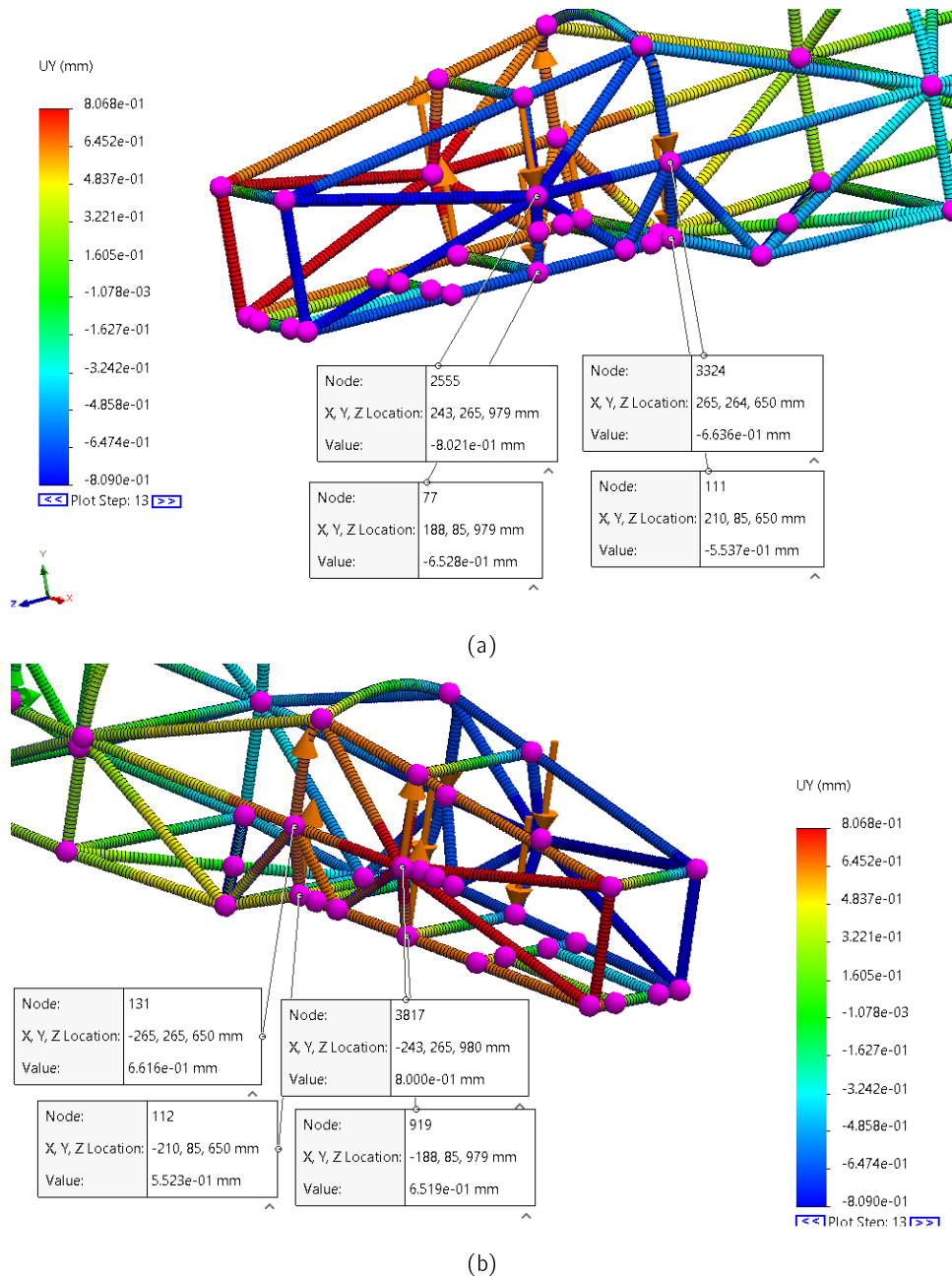


Figura 4.38: Deslocamentos nos pontos de suspensão dianteiros; a: lado direito, b: lado esquerdo. (quadro com novas secções)

de seguida com os valores obtidos, calcula-se o ângulo de torção

$$\theta = \arctan \left(\frac{0,8021 + 0,8000}{486,08} \right) \cdot \left(\frac{180}{\pi} \right) = [0,1888 \text{ graus}] \quad (4.19)$$

e também

$$T = 1000 \cdot 0,48608 = [486,1 \text{ Nm}] \quad (4.20)$$

Com estes dados podemos calcular a rigidez torcional no eixo dianteiro do quadro (K_t), que é a razão entre o momento torsor aplicado e o ângulo de deformação resultante:

$$K_t = \frac{486,1}{0,1888} = [2574 \text{ Nm/graú}] \quad (4.21)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, com os deslocamentos no eixo traseiro

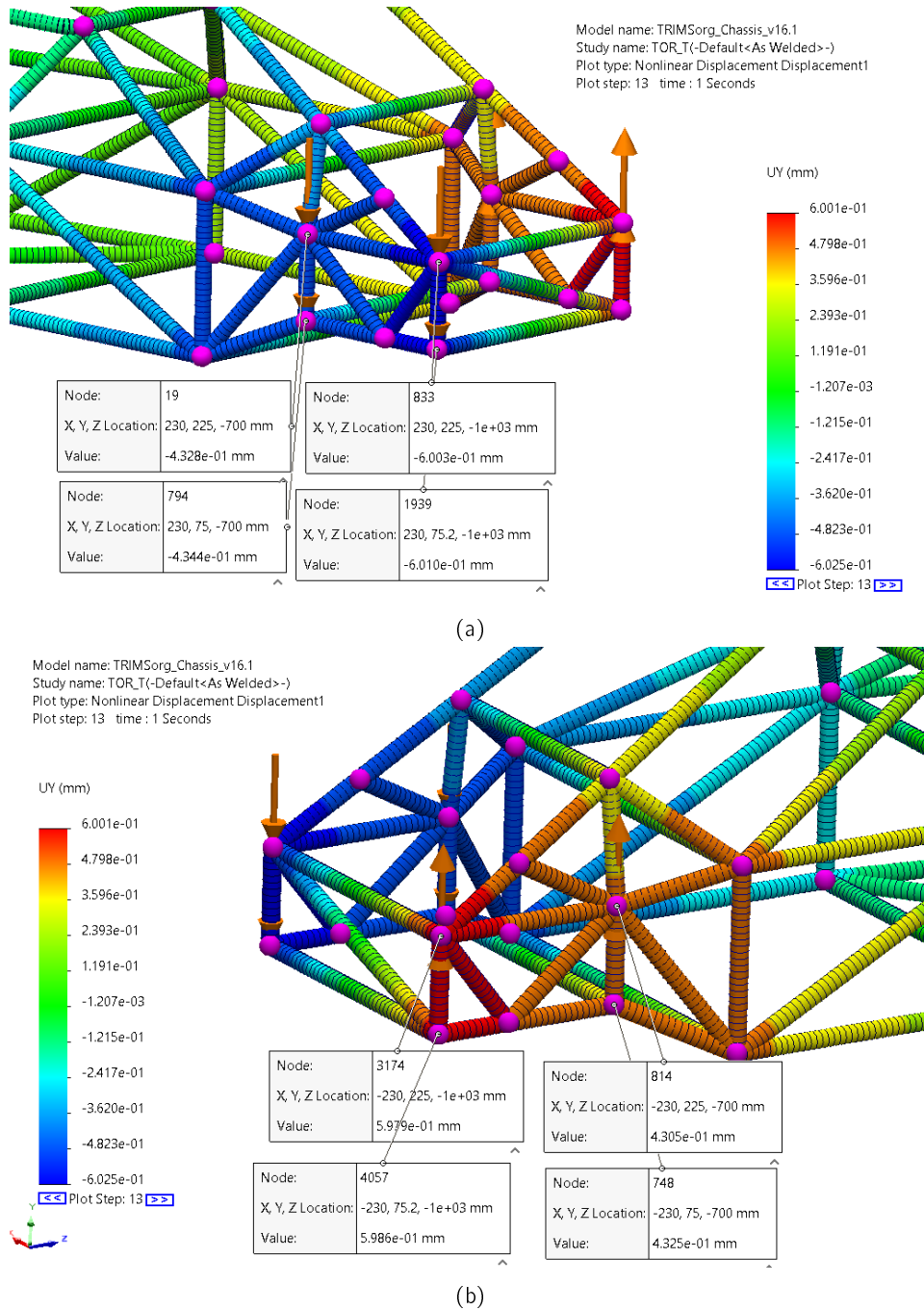


Figura 4.39: Deslocamentos nos pontos de suspensão traseiros; a: lado direito, b: lado esquerdo. (quadro com novas secções)

$$\theta = \arctan\left(\frac{0,6010 + 0,5979}{460}\right) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) = [0,1490 \text{ graus}] \quad (4.22)$$

e também

$$T = 1000 \cdot 0,460 = [460\text{Nm}] \quad (4.23)$$

obtém-se assim o valor da rigidez torcional para o eixo traseiro:

$$K_t = \frac{460}{0,1490} = [3087\text{Nm/graú}] \quad (4.24)$$

finalmente, a razão entre a torção entre os dois eixos:

$$\text{Rácio} = \frac{K_{t,dianteiro}}{K_{t,traseiro}} = \frac{2574}{3087} \approx 0,834 \quad (4.25)$$

Houve uma diminuição acentuada na rigidez torcional do quadro, de 35,50% no eixo dianteiro, e de 26,80% no eixo traseiro, isto é expectado uma vez que ao reduzir a área de secção em todos os constituintes do quadro, enquanto o diametro exterior foi mantido ou diminuído, reduziram-se também os seus momentos de inércia e consequentemente, a rigidez do quadro. Apesar da redução acentuada da rigidez torcional, os valores obtidos ainda se situam acima da margem de referência indicada pela literatura, de 1500 a 2500 Nm/graú.

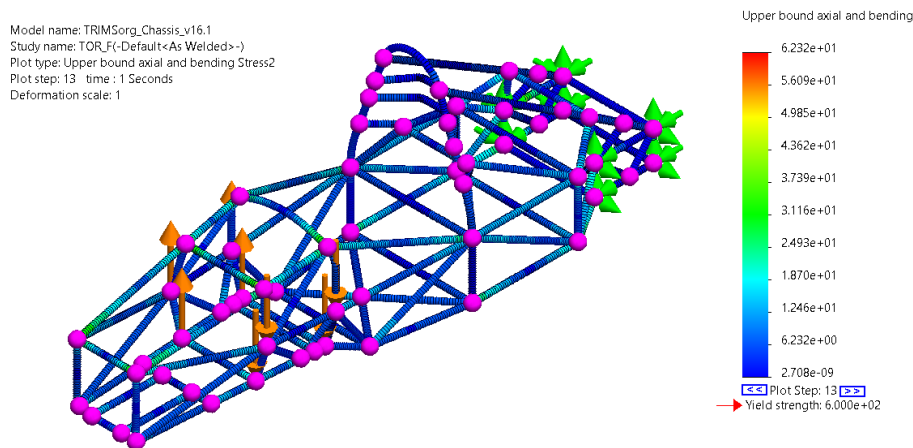


Figura 4.40: *Plot* de tensões máximas combinadas, eixo dianteiro, quadro com secções otimizadas

Na figura 4.40, está apresentado o *plot* de tensões máximas combinadas no quadro com secções otimizadas, na simulação de rigidez torcional no eixo dianteiro. A alteração do quadro uniforme para a versão com secções otimizadas provocou um aumento geral das tensões nos tubos. Como se pode observar no gráfico da figura 4.41, a tensão média no *Worst Case* subiu, com um aumento médio de 62,16%, valor obtido através do Excel.

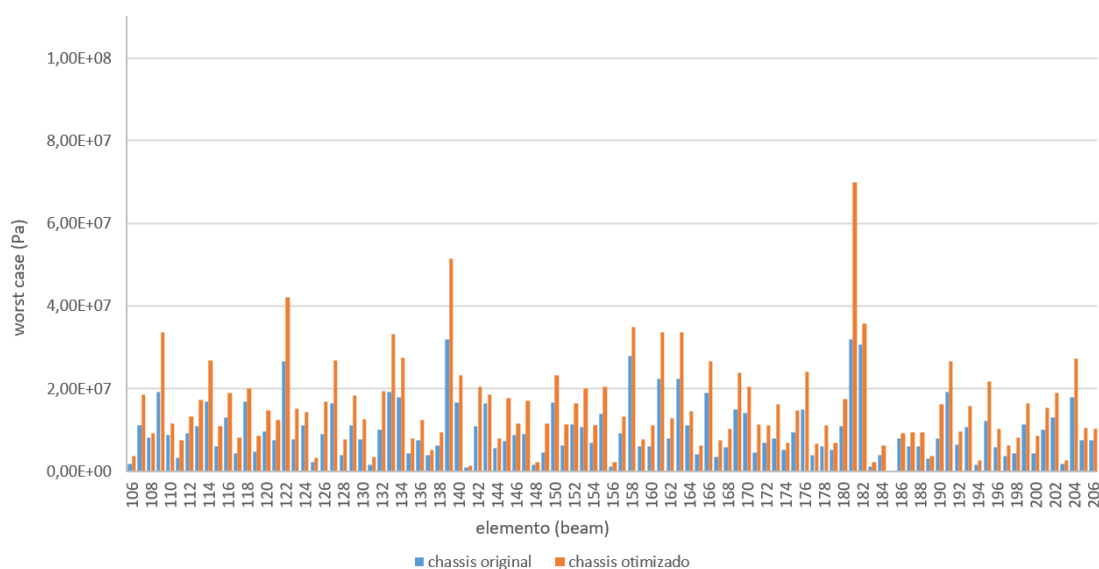


Figura 4.41: Comparação do *Worst Case*, todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, eixo dianteiro

O valor mais elevado continuou localizado no tubo Beam-181, passando de 32,0 MPa no modelo original para 69,9 MPa no modelo otimizado. Apesar deste aumento, todas as tensões da nova estrutura continuam muito abaixo da tensão de cedência do material (600 MPa).

Tabela 4.16: Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional frontal, quadro com novas secções (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-122(TRNSV_T2_T3[1])	0,00	-39,67	14,43	2,49	42,19
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	-0,02	-44,85	-6,67	0,63	51,53
Beam-158(Front_Hoop[3])	-1,36	34,91	-6,18	-3,06	34,96
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	-66,02	-3,89	0,02	69,91
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,01	17,68	31,02	3,85	35,68

Podem-se visualizar os componentes críticos apresentados na tabela 4.16, na figura 4.42.

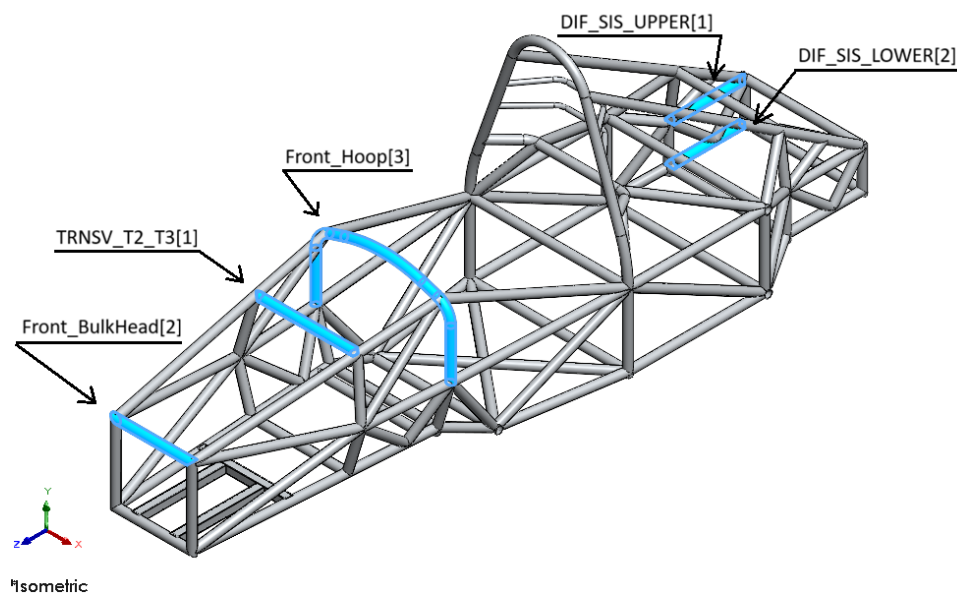


Figura 4.42: Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo dianteiro, quadro otimizado

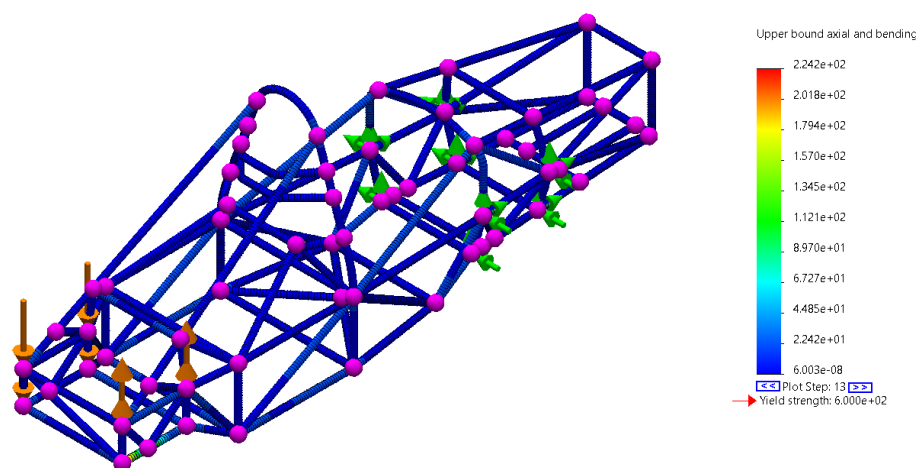


Figura 4.43: Plot de tensões máximas combinadas, eixo traseiro, quadro com secções otimizadas

A análise no eixo traseiro segue o mesmo procedimento. Na figura 4.43 são apresentadas as tensões máximas combinadas no quadro com secções otimizadas, na simulação de rigidez torcional no eixo traseiro. À semelhança do eixo dianteiro, a alteração do quadro uniforme para a versão com secções otimizadas provocou um aumento geral das tensões nos tubos. Como se pode observar no gráfico da figura 4.44, a tensão média no *Worst Case* subiu, com um aumento médio de 45,54%, valor obtido através de tratamento de dados no Excel.

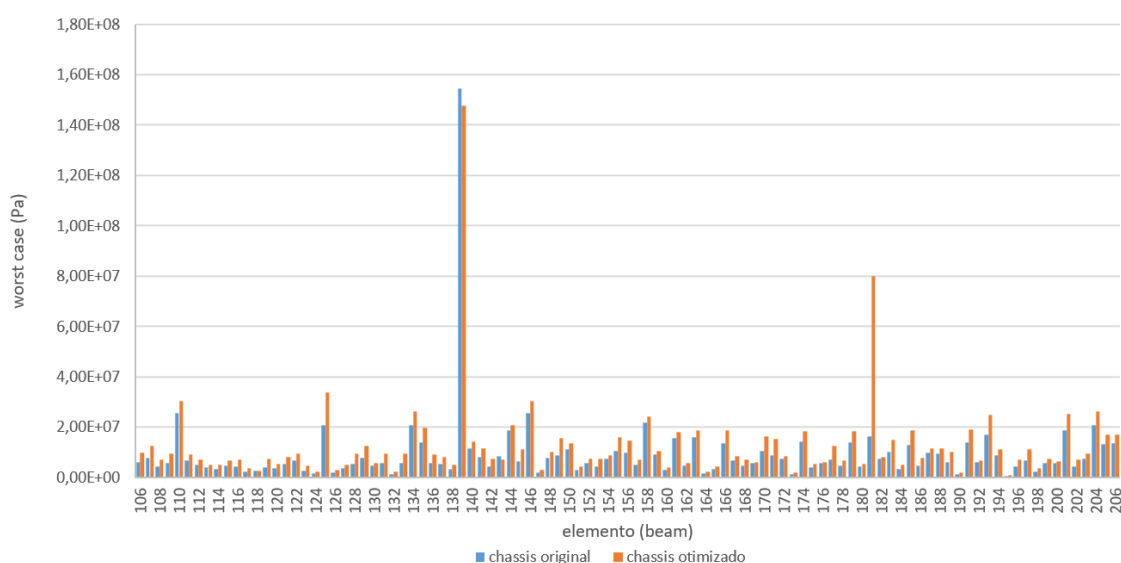


Figura 4.44: Comparação do *Worst Case*, todas as barras do quadro original vs quadro com secções otimizadas, eixo traseiro

O componente mais solicitado em ambas as configurações, original e otimizada, foi o tubo Beam-139, que registou uma ligeira redução de $-4,5\%$, passando de $154,6$ MPa no modelo original para $147,6$ MPa no otimizado. Mesmo sendo o ponto crítico do quadro nesta simulação, este valor permanece substancialmente abaixo do limite de cedência do material. Os 5 elementos críticos nesta simulação tem alguns elementos diferentes da simulação com as secções originais.

Tabela 4.17: Esforços nos componentes críticos da simulação de rigidez torcional traseira (valores em MPa).

Nome da Viga	Axial	Flexão na Direção 1	Flexão na Direção 2	Torção	Máxima combinada
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	-14,53	10,50	-12,38	1,08	30,41
Beam-125(30x2 30X2(43)[1])	0,06	-31,87	-11,23	-2,30	33,81
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	-0,86	128,05	-18,69	4,21	147,60
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	14,51	10,71	-12,28	1,12	30,34
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	1,73	77,82	1,38	3,42	79,77

Podem ser então visualizados os componentes críticos apresentados na tabela 4.17, na figura 4.45.

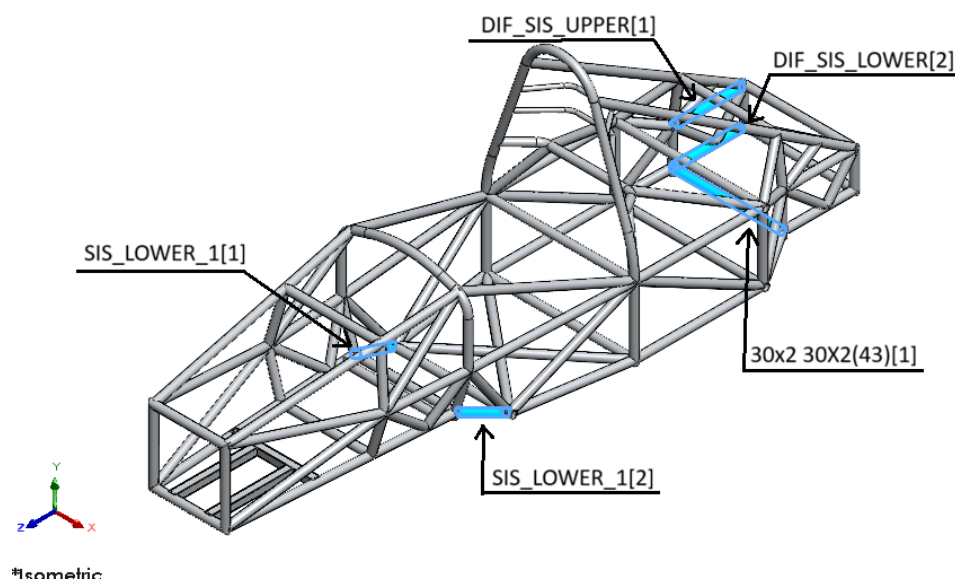


Figura 4.45: Componentes críticos da simulação de rigidez torcional, eixo dianteiro, quadro otimizado

Os aumentos de tensão verificados em todas as simulações, comprovam o sucesso do processo de otimização realizado. Ao retirar excesso de material onde a estrutura estava sobredimensionada, conseguiu-se obter um quadro mais leve. Além disso, como em nenhum momento a tensão de cedência do material foi ultrapassada, não se comprometeu a segurança durante a otimização.

4.12 Análise Modal (quadro otimizado)

Na tabela 4.18 é possível observar os valores obtidos para as 14 primeiras formas modais, houve uma redução média de $-2,19\%$. O esperado é que ocorra um aumento nas frequências naturais, pois foi reduzida a massa no sistema "massa-mola", estas diminuições podem ser explicadas pelo facto da rigidez do quadro ter diminuído também.

Tabela 4.18: Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro livre com secções otimizadas.

quadro Livre (Hz)	Descrição da Forma Modal
60,79	1º Modo de vibração
77,83	2º Modo de vibração
114,74	3º Modo de vibração
121,53	4º Modo de vibração
136,01	5º Modo de vibração
147,39	6º Modo de vibração
166,27	7º Modo de vibração
176,57	8º Modo de vibração
182,24	9º Modo de vibração
200,19	10º Modo de vibração
209,86	11º Modo de vibração
222,19	12º Modo de vibração
223,82	13º Modo de vibração
235,70	14º Modo de vibração

Através da observação da figura 4.46, pode-se fazer uma comparação dos valores obtidos para as 14 primeiras formas modais do quadro original, e otimizado.

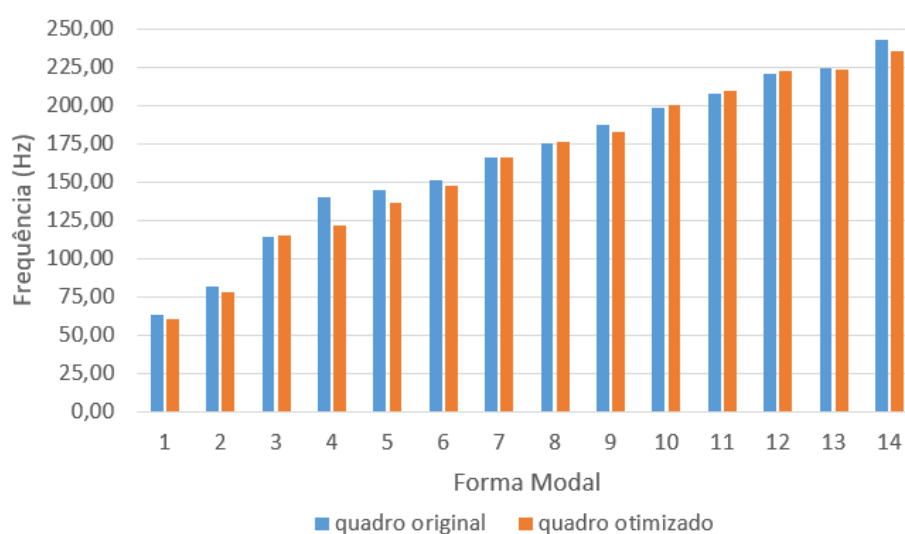


Figura 4.46: Comparação dos modos de vibração, quadro livre, original vs com secções otimizadas

Na tabela 4.19 encontram-se os valores das frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração do quadro carregado, e tal como no livre, ocorreu uma redução média, neste caso de $-6,27\%$.

Tabela 4.19: Frequências naturais dos 14 primeiros modos de vibração para o quadro carregado com secções otimizadas.

quadro Carregado (Hz)	Forma Modal
30,25	1º Modo de vibração
53,80	2º Modo de vibração
59,60	3º Modo de vibração
67,57	4º Modo de vibração
84,24	5º Modo de vibração
89,44	6º Modo de vibração
95,16	7º Modo de vibração
112,50	8º Modo de vibração
125,99	9º Modo de vibração
138,48	10º Modo de vibração
150,90	11º Modo de vibração
156,89	12º Modo de vibração
185,13	13º Modo de vibração
190,06	14º Modo de vibração

Observando a figura 4.47, pode-se fazer uma comparação dos valores obtidos para as 14 primeiros modos de vibração do quadro original e otimizado.

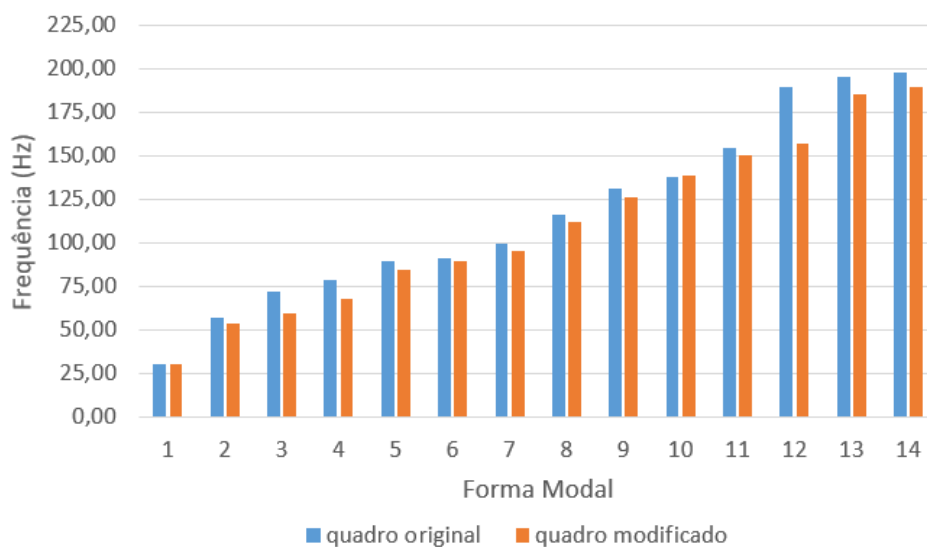


Figura 4.47: Comparação dos modos de vibração, quadro carregado, original vs com secções otimizadas

Finalmente, analisando os dados obtidos, pode-se verificar que a frequência de funcionamento do sistema propulsor, o motor elétrico síncrono EMRAX 208, com uma rotação nominal de 7000 RPM correspondente a uma frequência de excitação de 116,67 Hz, não é atingida em nenhum dos modos, sendo o valor mais próximo 114,74 Hz, valor obtido na terceira forma modal, com o quadro livre. O valor mais próximo, do quadro carregado, foi de 112,50 Hz, correspondente à oitava forma modal. Refere-se mais uma vez, que a redução

nas frequências naturais dos modos deveu-se ao facto de que ao ser feita a redução á área de secção dos tubos do quadro com o intuito de reduzir peso, reduziu-se consequentemente o momento de inércia dos mesmos, baixando assim a rigidez do quadro.

4.13 Considerações Finais

Este capítulo apresentou a análise estrutural completa do quadro tubular *Formula Student*, desde a definição do modelo numérico até à validação do quadro otimizado. A utilização de elementos de viga, em detrimento de elementos de barra simples, revelou-se indispensável para uma representação fidedigna do comportamento estrutural do quadro. As juntas soldadas introduzem continuidade rotacional nos nós, induzindo momentos flettores e esforços transversos que uma formulação de treliça pura é incapaz de capturar. A importância desta escolha foi confirmada na análise de compressão lateral, a tensão axial máxima registada foi de apenas 114,5 MPa, enquanto a tensão máxima combinada atingiu 414,3 MPa, um fator de subestimação de cerca de 3,6 vezes, demonstrando que a utilização exclusiva do esforço axial como critério de dimensionamento conduziria a conclusões incorretas e potencialmente perigosas.

A análise do quadro original revelou um sobredimensionamento estrutural em todos os casos de análise. Na compressão frontal com 34,43 kN aplicados, a estrutura apresentou um fator de segurança de aproximadamente 3,59 nos membros mais solicitados da *Front Bulkhead*. Na compressão lateral a 50 com 23,21 kN aplicados, excluindo a singularidade numérica no nó de suspensão restringido, as tensões máximas nos membros da *Side Impact Structure* situaram-se entre 342 e 383 MPa, significativamente abaixo da tensão de cedência do Docol R8 (600 MPa). A rigidez torcional do quadro original atingiu 3988 Nm/grau no eixo dianteiro e 4216 Nm/grau no eixo traseiro, com uma relação de 0,946 que demonstra um bom equilíbrio estrutural entre o eixo dianteiro e traseiro do quadro tubular. Ambos os valores superam o intervalo de referência de 1500 a 2500 Nm/grau, mostrando que havia margem para otimização. A análise modal confirmou a ausência de ressonância com o motor de tração EMRAX 208 (7000 RPM $\approx$ 116,67 Hz), sendo a frequência natural mais próxima de 116,21 Hz no quadro carregado.

A estratégia de otimização, baseada na observação sistemática do parâmetro *Worst Case* por elemento e nos requisitos geométricos mínimos do regulamento, permitiu consolidar as três tipologias de membros estruturais em apenas dois diâmetros exteriores comerciais de aço Docol Tube R8, simplificando o fabrico e os nós de transição. O resultado foi uma redução de massa de 28,57%, de 56 kg para 40 kg, sem qualquer alteração na triangulação do quadro.

A análise do quadro otimizado confirmou o sucesso da abordagem adotada. Na compressão frontal, o deslocamento máximo aumentou apenas 1,046 mm, de 2,337 mm para 3,383 mm, para uma redução de massa de 16 kg, e as tensões máximas combinadas subiram em média 50,48%, mantendo-se sempre abaixo da tensão de cedência. Na compressão lateral, o elemento mais solicitado (*SIS_LOWER_1[1]*) registou uma tensão máxima de 506,5 MPa, ainda com uma margem de segurança de cerca de 18,5% face ao limite de cedência, com um incremento médio global de 40,64%. A rigidez torcional reduziu-se para 2574 Nm/grau no eixo dianteiro e 3087 Nm/grau no eixo traseiro, valores que, apesar da diminuição, continuam a situar-se dentro do intervalo de referência. O rácio de rigidez entre eixos passou de 0,946 para 0,834, refletindo uma ligeira diminuição do equilíbrio estrutural. A análise modal do

quadro otimizado registou reduções médias nas frequências naturais de 2,19% no quadro livre e 6,27% no quadro carregado.

Os resultados obtidos demonstram que é possível alcançar uma redução de massa significativa num quadro tubular, com impacto direto na performance e na autonomia do veículo, mantendo o cumprimento integral dos requisitos regulamentares e das margens de segurança estrutural em todos os cenários de carga analisados.

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Conclusões Gerais

O objetivo desta dissertação consistiu em apresentar os fundamentos matemáticos do MEF para análise não linear; analisar a evolução desses métodos face aos desafios encontrados ao longo do tempo; e fazer uma revisão da aplicação de estruturas treliçadas tridimensionais em diferentes áreas da engenharia. Depois do levantamento bibliográfico, foi feita a análise e otimização estrutural de um quadro tubular pertencente a um veículo Formula Student.

A revisão dos fundamentos teóricos do Método dos Elementos Finitos permite compreender a base matemática subjacente à modelação de estruturas esbeltas e sensíveis à instabilidade, como é o caso das treliças espaciais tubulares. Tornou-se evidente que para este tipo de estruturas, abordagens lineares não são suficientes para que se consiga obter resultados em regime plástico, sendo indispensável considerar não linearidades geométricas e de material, bem como fenómenos de instabilidade como *snap-through* e *snap-back*, para obter resultados confiáveis. Apesar destas considerações, as análises estáticas realizadas nesta dissertação encontram-se no regime elástico do material selecionado.

A análise do estado da arte dos métodos de análise não linear mostrou que, embora os esquemas incrementais iterativos clássicos, como o método de *Newton-Raphson*, funcionem bem em regimes elásticos, apresentam limitações significativas na proximidade de pontos limite e em trajetórias pós-críticas. A evolução destes métodos através de técnicas de comprimento de arco, formulações baseadas em resíduos ou energia, e abordagens vetoriais explícitas, revelou-se fundamental para garantir robustez numérica e continuidade da solução em problemas altamente não lineares. Concluiu-se que a representação correta de grandes deslocamentos, efeitos de segunda ordem e plastificação é determinante para descrever o comportamento estrutural até ao colapso, com fidelidade à realidade, e sem o algoritmo falhar antes de se obterem as soluções.

A revisão das aplicações de estruturas treliçadas espaciais provou a maturidade da aplicação deste tipo de estruturas e a sua utilização consistente em diferentes áreas, desde estruturas de grande dimensão, como pontes e coberturas espaciais de grande vão, a quadros tubulares usados em automóveis. Esta diversidade de aplicações demonstra a versatilidade que as treliças espaciais têm, sendo aplicáveis em praticamente qualquer área, dependendo do design utilizado. O que mais as destaca é o seu desempenho, que resulta sobretudo da sua organização geométrica e da triangulação espacial, mais do que do material em si.

Nesta dissertação, uma estrutura treliçada espacial - um quadro tubular pertencente a um veículo Formula Student - foi utilizada como modelo de análise. Para essa análise, a utilização da tensão máxima combinada como métrica de análise revelou-se essencial para a

análise estrutural do quadro, uma vez que a tensão axial isolada subestima a solicitação real dos elementos. Na realidade, existem momentos fletores induzidos pelas juntas soldadas, que introduzem uma continuidade estrutural ausente num modelo de treliça ideal. O quadro original revelou-se sobredimensionado em todas as simulações estáticas não lineares, tendo isto confirmado a alta margem para otimização.

A estratégia de otimização baseada na observação da distribuição da tensão máxima combinada pela estrutura, cruzada com os requisitos geométricos mínimos do regulamento Formula Student 2026, permitiu definir novas secções para os tubos do chassis, de forma fundamentada. A uniformização em três perfis comerciais normalizados simplifica a posterior fabricação e os nós de transição estrutural. A massa total da estrutura reduziu-se sem que a tensão de cedência do Docol R8 tenha sido ultrapassada em nenhum elemento do quadro tubular, em nenhuma das análises, e apesar da rigidez torcional ter diminuído, o seu valor continua acima do intervalo de referência indicado pela literatura.

Este trabalho demonstrou que o Método dos Elementos Finitos, constitui uma ferramenta muito útil para o projeto e otimização de estruturas tubulares. A revisão do estado da arte estabeleceu uma base conceptual sólida que permite uma leitura crítica dos resultados numéricos e uma escolha informada dos algoritmos de cálculo. A aplicação prática demonstrou que é possível obter reduções de massa significativas, com impacto direto na performance, autonomia e consumo do veículo, mantendo o cumprimento integral dos requisitos regulamentares e das margens de segurança estrutural. As estruturas *spaceframe* confirmam-se como soluções de elevada eficiência estrutural, cujo desempenho deriva fundamentalmente da sua geometria triangulada tridimensional, sendo adequadas para múltiplas finalidades.

5.2 Limitações do Estudo

A realização desta dissertação apresentou algumas limitações associadas ao processo de levantamento e sistematização da bibliografia, e na realização da análise e otimização do quadro tubular. No que respeita ao estado da arte dos métodos de análise não linear, o elevado número de publicações existentes dificultou a identificação, seleção e obtenção dos trabalhos mais relevantes, podendo não terem sido abrangidas de forma exaustiva todas as abordagens propostas na literatura. Por outro lado, na análise das aplicações de treliças espaciais na engenharia automóvel e aeronáutica, verificou-se uma menor diversidade de estudos científicos especificamente focados nestas áreas, o que condicionou a abrangência da revisão realizada. Em alguns casos, tornou-se necessário recorrer a fontes técnicas e documentais de carácter mais aplicado, cuja fiabilidade e detalhe variam significativamente. Estas limitações refletem a distribuição desigual da produção científica nas diferentes áreas analisadas.

Na análise e otimização do quadro tubular do veículo Formula Student, ocorreu um pouco o oposto do que sucedeu na fase anterior, a falta de material específico na área da análise e otimização de estruturas, dificultou a fundamentação dos métodos usados para analisar a performance da estrutura sobre os vários cenários escolhidos. As análises realizadas são de natureza estática ou quase-estática, e além disso tratam-se de estudos de compressão frontal e lateral, não se tendo tratado de simulações de impacto simplificado, recorrendo a análise estática. A equivalência entre a força dinâmica de impacto e uma carga estática aplicada instantaneamente é uma simplificação corrente na literatura, mas que não captura os efeitos dinâmicos por exemplo dum evento de colisão. Os resultados das simulações

compressão devem ser interpretados como estimativas conservadoras e não como previsões quantitativas absolutas de uma colisão real.

O modelo de elementos finitos considera juntas nodais perfeitamente rígidas, desconsiderando a flexibilidade intrínseca das soldaduras e a potencial concentração de tensões nas zonas de ligação, que em estruturas tubulares reais podem ser determinantes para a fadiga e para a resistência última. Não foram consideradas imperfeições geométricas iniciais, que podem influenciar significativamente a carga crítica de encurvadura dos membros comprimidos. A análise foi conduzida numa única configuração de carregamento por ensaio, sem considerar cargas combinadas como por exemplo um impacto frontal com torção.

A estratégia de otimização adotada é de natureza manual e baseada na observação de parâmetros de tensão, não constituindo uma otimização topológica, paramétrica ou generativa automatizada. A seleção final das secções foi ainda condicionada pela disponibilidade de perfis comerciais no catálogo do fornecedor, limitando a aproximação ao diâmetro teórico ótimo. Finalmente, a ausência de validação experimental dos resultados numéricos, impede a verificação das hipóteses de modelação assumidas.

5.3 Trabalhos Futuros

Como perspectiva de trabalhos futuros, destaca-se a substituição das análises estáticas equivalentes por simulações dinâmicas explícitas, com modelação do contacto entre o veículo e a barreira de impacto. Isto permitiria obter curvas de força-deslocamento mais realistas e avaliar diretamente a energia absorvida pelo quadro nos cenários de impacto frontal e lateral. Outra possibilidade seria um problema de otimização com múltiplos objetivos em simultâneo. A estratégia de otimização adotada privilegiou a redução de massa, um problema de otimização com vários objetivos, simultaneamente minimizando a massa, maximizando a rigidez torcional e garantindo uma separação espectral adequada entre as frequências naturais e as frequências de excitação do sistema propulsor, resultaria solução mais completa.

Capítulo 6

Apendice A

Neste anexo apresentam-se as tabelas completas dos esforços em cada uma das barras do quadro tubular.

6.1 Chassis original

Tabela 6.1: Compressão Frontal: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção (MPa)	Máx. Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod triang[2])	1,18	-4,98	1,17	-1,26	6,30
Beam-107(FBH LS[1])	-42,56	-55,67	-51,19	3,12	104,02
Beam-108(Front Hoop[2])	-13,04	-9,10	5,76	-0,69	22,21
Beam-109(upper FBH Support[2])	-20,95	-56,90	55,14	-3,40	100,18
Beam-110(SIS LOWER 1[2])	-44,94	-5,14	-43,32	-0,59	88,56
Beam-111(T7 BLNÇ T LOW[1])	0,05	6,37	-4,78	-0,75	8,01
Beam-112(AC SIS UPPER[2])	-77,61	-13,46	-10,34	-0,26	94,58
Beam-113(HARNESS B SUP T[1])	-1,06	15,32	23,21	0,08	28,87
Beam-114(TS SIS UPPER[1])	-73,50	-6,36	21,01	-1,79	95,45
Beam-115(FBH T 3[2])	1,99	5,19	32,94	0,86	35,34
Beam-116(TS VERT F[1])	12,68	7,11	1,30	0,81	19,79
Beam-117(FBH T 1[2])	-10,98	9,82	54,40	2,39	66,26
Beam-118(Front BulkHead[4])	-7,26	-6,85	60,10	-17,63	67,37
Beam-119(30x2 30X2(34)[1])	38,60	1,89	3,56	0,00	42,63
Beam-120(MHB support 1[1])	19,98	10,18	-1,71	0,45	30,30
Beam-121(FBH T6 BLNÇ[2])	-1,77	4,69	-9,67	-0,97	11,98
Beam-122(TRNSV T2 T3[1])	3,22	7,60	7,41	0,01	13,83
Beam-123(SUP CX DIR)	-3,25	-0,49	-1,19	0,00	4,53
Beam-124(Front BulkHead[1])	0,97	4,00	150,34	8,18	151,25
Beam-125(30x2 30X2(43)[1])	0,00	1,67	0,43	0,00	1,70
Beam-126(FBH T 2[1])	3,58	8,74	-32,23	2,01	36,05
Beam-127(TS SIS UPPER[2])	-73,35	-7,52	21,04	1,72	95,70
Beam-128(DIF SIS UPPER[2])	-0,02	4,13	-7,59	-0,09	8,66
Beam-129(FBH LS[2])	-42,65	-57,18	50,79	-3,06	105,02
Beam-130(SIS DIAGN 2[1])	-11,79	-0,48	13,58	-0,38	25,37
Beam-131(Pushrod triang[1])	1,23	4,60	-0,27	1,32	5,84
Beam-132(PEDALBOX 2)	1,72	-63,71	-2,67	-7,17	66,44
Beam-133(upper FBH Support[1])	-20,99	56,85	54,48	3,41	99,73
Beam-134(AC SIS LOWER[2])	-16,90	3,19	16,12	-0,40	33,33
Beam-135(DIF SIS LOWER[1])	0,03	2,34	-2,79	-0,27	3,66
Beam-136(FBH T6 BLNÇ[1])	-1,79	-4,57	-10,52	1,05	12,98
Beam-137(HEADREST L)	-0,03	1,17	2,28	-0,09	2,30
Beam-138(30x2 30X2(27)[2])	7,94	0,69	0,41	0,04	8,65
Beam-139(DIF SIS LOWER[2])	0,05	-30,42	1,92	0,26	32,34
Beam-140(AC SIS DIAGN[1])	-1,64	4,19	16,35	0,03	18,52
Beam-141(RBH DIAG)	0,00	-1,53	-0,51	0,00	1,61

Continua na página seguinte...

Tabela 6.1 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-142(FBH_DS[1])	-28,61	49,24	55,14	-2,59	102,53
Beam-143(HARNESSBAR)	-0,25	7,79	4,23	-3,30	8,26
Beam-144(Main_Hoop)	0,82	-14,38	5,30	-2,66	14,43
Beam-145(TRNSV_FH)	-5,10	0,96	-0,74	0,01	6,28
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	-45,05	5,46	43,43	0,59	88,82
Beam-147(FBH_T_2[2])	3,60	8,81	32,11	-1,97	35,94
Beam-148(Rear_Bulkhead[1])	0,00	1,30	2,60	-0,16	2,91
Beam-149(FBH_T_4[2])	0,42	-15,61	-2,25	-0,41	16,10
Beam-150(AC_SIS_DIAGN[2])	-1,64	-4,13	16,19	0,01	18,35
Beam-151(FBH_T5_BLNÇ[1])	-5,68	12,67	7,34	-1,68	20,32
Beam-152(SIS_UPPER[2])	-51,50	-8,29	-2,58	0,39	60,13
Beam-153(FBH_DS[3])	-28,59	-48,96	55,57	2,60	102,66
Beam-154(HAB_X1)	-3,03	-7,00	-4,55	1,80	11,23
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	-9,83	-1,90	15,18	0,26	25,12
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	0,11	-1,35	-2,42	-0,27	2,61
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	-77,67	-13,68	-10,44	0,28	94,88
Beam-158(Front_Hoop[3])	9,37	-22,77	-23,68	1,21	33,16
Beam-159(30x2_30X2(27)[1])	4,72	-0,73	-0,40	0,00	5,56
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	-5,62	-12,49	7,14	1,68	20,01
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	-14,47	-13,11	-4,09	1,54	28,20
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	-11,74	0,50	13,30	0,36	25,05
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	-14,21	-12,69	3,90	-1,52	27,49
Beam-164(Front_BulkHead[3])	0,99	-4,10	-150,60	-8,09	151,52
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	-0,52	-20,87	-1,65	-0,15	21,46
Beam-166(FH_SUP[2])	-21,24	-4,96	11,95	-0,63	33,87
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	0,03	-6,01	-6,01	0,83	8,53
Beam-168(MHB_support_1[4])	0,00	-2,48	5,91	-0,89	6,33
Beam-169(MHB_support_2[2])	-21,22	-13,51	-29,39	1,42	53,56
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	-10,09	1,69	15,57	-0,25	25,73
Beam-171(FBH_T_4[1])	0,41	15,61	-2,24	0,41	16,09
Beam-172(HAB_X2,1)	-2,85	-6,93	4,44	-1,81	11,09
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	-11,09	-26,25	39,62	-0,14	76,96
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	26,09	-1,59	-17,15	-0,74	43,24
Beam-175(MHB_support_1[3])	20,02	11,65	2,40	-0,50	31,92
Beam-176(MHB_support_2[1])	-21,13	13,48	28,99	-1,40	53,10
Beam-177(FBH_DS[2])	-34,39	4,54	8,78	-1,18	44,27
Beam-178(FBH_T_3[1])	1,98	5,27	-33,05	-0,88	35,44
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	26,04	1,53	-16,72	0,76	42,76
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	-1,09	-15,27	23,25	-0,09	28,90
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	59,65	5,38	0,17	65,03
Beam-182(Front_BulkHead[2])	-7,63	3,90	-159,44	-0,09	167,10
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,05	1,30	-2,40	0,30	2,50
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	-0,45	-21,37	1,62	0,19	21,88
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	0,00	0,07	-0,83	0,00	0,83
Beam-186(Front_Hoop[1])	-13,00	-9,22	5,91	0,72	22,29
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	-14,92	-16,24	1,15	-0,03	31,21
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-14,90	-16,24	1,04	0,05	31,18
Beam-189(HEADREST_U)	-0,04	0,38	2,41	0,15	2,44
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	-11,09	-25,83	-39,00	0,10	75,92
Beam-191(FH_SUP[1])	-21,19	5,04	-11,56	0,61	33,70
Beam-192(HAB_X2,2)	-3,02	-4,74	1,50	0,11	7,98
Beam-193(30x2_30X2(34)[2])	8,44	1,49	-1,25	0,00	10,32
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	0,00	-0,30	1,32	0,00	1,36
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	4,30	8,87	3,47	-0,01	13,80
Beam-196(MHB_support_1[2])	-0,11	7,69	-2,20	0,93	7,87
Beam-197(FBH_DS[4])	-34,32	4,18	-8,98	1,17	44,23
Beam-198(FBH_T_1[1])	-10,99	-9,43	54,86	-2,38	66,66
Beam-199(SIS_UPPER[1])	-51,53	-7,98	-2,51	-0,40	59,85
Beam-200(30x2_30X2(25))	6,17	0,31	-0,58	0,01	6,79
Beam-201(30x2_30X2(43)[2])	-7,29	-0,41	-4,37	0,01	11,67
Beam-202(TS_VERT_F[2])	12,58	6,96	-1,39	-0,81	19,55

Continua na página seguinte...

Tabela 6.1 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-203(Rear Bulkhead[3])	0,00	-1,45	-2,66	0,24	3,03
Beam-204(AC SIS LOWER[1])	-16,84	16,11	3,01	0,38	33,23
Beam-205(30x2 30X2(60)[1])	-18,42	8,40	12,65	-0,81	28,32
Beam-206(30x2 30X2(60)[2])	-18,36	-8,40	12,63	0,80	28,26

Tabela 6.2: Compressão Lateral: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod triang[2])	-0,37	-1,49	-0,94	-0,37	2,13
Beam-107(FBH LS[1])	-15,23	-66,68	-189,64	23,28	212,37
Beam-108(Front Hoop[2])	-0,13	-11,97	-118,54	-1,88	118,85
Beam-109(upper FBH Support[2])	4,66	20,23	-6,85	-2,05	26,02
Beam-110(SIS LOWER 1[2])	-23,49	351,48	76,46	-2,24	383,19
Beam-111(T7 BLNÇ T LOW[1])	0,26	7,56	-0,87	1,48	7,87
Beam-112(AC SIS UPPER[2])	47,81	5,10	-79,59	-3,13	127,55
Beam-113(HARNESS B SUP T[1])	11,25	-84,39	11,62	0,37	96,20
Beam-114(TS SIS UPPER[1])	0,35	-1,16	-28,79	-0,20	29,17
Beam-115(FBH T 3[2])	-0,48	13,80	-28,47	3,21	32,12
Beam-116(TS VERT F[1])	5,12	3,26	4,31	-0,78	10,53
Beam-117(FBH T 1[2])	13,39	5,58	-1,07	-1,92	19,02
Beam-118(Front BulkHead[4])	1,16	-1,82	-16,80	-0,36	17,32
Beam-119(30x2 30X2(34)[1])	-6,95	-13,44	51,52	0,72	60,11
Beam-120(MHB support 1[1])	-0,59	0,50	-5,28	-0,32	5,87
Beam-121(FBH T6 BLNÇ[2])	-4,76	117,71	-27,24	28,32	123,79
Beam-122(TRNSV T2 T3[1])	-1,06	27,80	-29,69	0,37	38,18
Beam-123(SUP CX DIR)	-5,98	67,34	73,65	-0,64	105,77
Beam-124(Front BulkHead[1])	1,08	6,22	1,39	0,64	7,30
Beam-125(30x2 30X2(43)[1])	3,88	-12,50	-3,24	0,72	16,79
Beam-126(FBH T 2[1])	0,70	-11,56	-14,86	7,39	16,05
Beam-127(TS SIS UPPER[2])	35,92	4,12	45,16	-0,86	81,10
Beam-128(DIF SIS UPPER[2])	-1,54	-1,93	11,28	0,60	12,83
Beam-129(FBH LS[2])	5,89	26,57	-134,86	19,80	138,46
Beam-130(SIS DIAGN 2[1])	29,78	-13,16	13,63	-10,47	48,73
Beam-131(Pushrod triang[1])	-0,22	-1,65	2,22	-1,67	2,45
Beam-132(PEDALBOX 2)	-0,91	13,63	3,96	-1,61	18,50
Beam-133(upper FBH Support[1])	-13,06	26,70	-6,23	6,45	39,78
Beam-134(AC SIS LOWER[2])	32,64	113,05	-15,86	-4,27	146,41
Beam-135(DIF SIS LOWER[1])	-3,09	4,41	-23,26	1,25	26,76
Beam-136(FBH T6 BLNÇ[1])	0,26	46,34	-5,37	6,23	46,81
Beam-137(HEADREST L)	-0,47	15,52	-38,62	-1,77	42,09
Beam-138(30x2 30X2(27)[2])	-19,10	33,32	-112,27	-1,03	136,21
Beam-139(DIF SIS LOWER[2])	0,20	338,38	-3,87	1,06	342,39
Beam-140(AC SIS DIAGN[1])	-7,31	36,71	7,44	-7,09	44,07
Beam-141(RBH DIAG)	8,36	-13,66	-4,73	0,13	22,32
Beam-142(FBH DS[1])	11,04	7,28	2,94	-2,61	18,72
Beam-143(HARNESSBAR)	-3,99	193,16	195,41	-8,48	198,02
Beam-144(Main Hoop)	1,13	-36,65	18,15	15,81	40,59
Beam-145(TRNSV FH)	-57,51	-81,51	168,81	2,58	244,97
Beam-146(SIS LOWER 1[1])	114,46	298,72	-31,13	3,41	414,34
Beam-147(FBH T 2[2])	-0,05	-3,31	-31,03	0,52	31,11
Beam-148(Rear Bulkhead[1])	0,14	7,59	-3,42	-0,15	8,47
Beam-149(FBH T 4[2])	9,16	-23,90	-14,50	9,91	33,25
Beam-150(AC SIS DIAGN[2])	-3,44	-76,05	-7,77	-2,29	79,49
Beam-151(FBH T5 BLNÇ[1])	0,13	27,56	-9,61	5,10	29,31
Beam-152(SIS UPPER[2])	-3,45	2,68	165,32	7,12	167,04
Beam-153(FBH DS[3])	-2,67	-10,22	-2,69	-1,36	13,24
Beam-154(HAB X1)	-7,61	-61,87	-112,25	-5,36	116,16

Continua na página seguinte...

Tabela 6.2 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	11,69	15,71	-16,33	6,23	34,35
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	-1,83	9,58	3,12	1,40	11,91
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	-9,68	-11,83	-30,12	-4,57	40,88
Beam-158(Front_Hoop[3])	-15,87	-157,09	-62,68	-20,27	158,91
Beam-159(30x2 30X2(27)[1])	-7,01	-19,60	-83,63	0,69	91,60
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	4,11	-35,83	-23,91	-6,41	47,18
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	23,05	7,88	82,40	8,78	105,82
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	-11,38	-150,85	-17,18	-4,37	160,77
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	-2,37	3,32	56,63	6,25	59,10
Beam-164(Front_BulkHead[3])	-4,11	-6,42	2,07	0,59	10,85
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	-7,54	-33,97	35,14	10,78	56,42
Beam-166(FH_SUP[2])	-7,59	-78,89	-8,82	3,19	86,98
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	1,58	6,40	2,78	0,79	8,57
Beam-168(MHB_support_1[4])	0,00	27,21	-9,37	-3,82	27,75
Beam-169(MHB_support_2[2])	4,74	29,46	21,69	3,94	41,32
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	-1,29	16,66	-5,48	4,24	18,47
Beam-171(FBH_T_4[1])	12,56	27,80	-3,11	0,66	40,37
Beam-172(HAB_X2,1)	0,53	-24,05	-163,67	6,34	164,54
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	-0,66	1,15	-14,06	-0,24	15,88
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	-78,67	141,24	-13,63	3,86	220,57
Beam-175(MHB_support_1[3])	-4,76	-4,59	-17,41	-0,42	22,77
Beam-176(MHB_support_2[1])	0,84	13,12	8,42	3,69	16,44
Beam-177(FBH_DS[2])	15,18	-21,25	-120,05	-6,05	137,08
Beam-178(FBH_T_3[1])	0,40	-24,71	31,30	1,91	40,28
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	24,12	120,21	21,36	4,92	146,21
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	-13,94	-86,77	-12,95	0,25	100,71
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	26,37	6,81	0,74	33,17
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,38	2,11	12,82	-0,62	13,37
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,19	6,99	0,99	1,00	7,19
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	9,19	-49,50	50,68	1,17	77,96
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	-0,02	-6,25	-15,48	0,33	16,34
Beam-186(Front_Hoop[1])	-22,45	13,59	237,92	13,32	260,76
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	39,28	-3,08	52,81	-7,07	92,18
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-3,55	34,27	-130,59	7,33	132,65
Beam-189(HEADREST_U)	0,47	15,06	-32,78	-1,68	36,48
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	0,11	0,51	-13,24	0,25	13,69
Beam-191(FH_SUP[1])	16,69	-39,11	-17,19	4,34	59,41
Beam-192(HAB_X2,2)	-3,39	-12,69	-44,63	4,26	48,52
Beam-193(30x2 30X2(34)[2])	-4,34	55,86	-22,24	1,67	64,46
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	-9,70	-4,74	-19,21	0,16	29,49
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	4,67	-32,33	-8,95	-3,70	38,21
Beam-196(MHB_support_1[2])	-0,84	3,34	-14,47	-3,60	15,67
Beam-197(FBH_DS[4])	0,07	17,05	-73,24	1,11	75,26
Beam-198(FBH_T_1[1])	-3,54	2,74	1,45	-1,67	6,28
Beam-199(SIS_UPPER[1])	2,73	-10,28	66,54	2,00	70,05
Beam-200(30x2 30X2(25))	-28,98	-53,98	140,24	3,78	171,23
Beam-201(30x2 30X2(43)[2])	0,43	21,14	37,10	0,34	41,86
Beam-202(TS_VERT_F[2])	-14,80	-6,76	6,92	-0,71	21,78
Beam-203(Rear_Bulkhead[3])	-0,08	11,22	-1,42	-1,76	11,32
Beam-204(AC_SIS_LOWER[1])	1,09	2,39	86,61	-2,28	87,69
Beam-205(30x2 30X2(60)[1])	2,37	-38,93	-17,81	1,46	43,88
Beam-206(30x2 30X2(60)[2])	2,89	-37,78	12,59	0,49	41,16

Tabela 6.3: Torção Frente: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod_triáng[2])	-0,12	1,25	-1,47	1,03	1,83

Continua na página seguinte...

Tabela 6.3 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-107(FBH_LS[1])	3,47	-2,87	7,74	-2,40	11,14
Beam-108(Front_Hoop[2])	-1,84	0,32	-6,27	1,06	8,12
Beam-109(upper_FBH_Support[2])	4,73	15,51	3,09	-1,54	19,32
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	2,60	4,38	5,72	-1,98	8,78
Beam-111(T7_BLNÇ_T_LOW[1])	0,15	2,55	-2,04	-0,41	3,42
Beam-112(AC_SIS_UPPER[2])	-5,16	-3,79	-2,34	-1,32	9,16
Beam-113(HARNESS_B_SUP_T[1])	-0,95	-9,70	3,89	-1,16	10,95
Beam-114(TS_SIS_UPPER[1])	2,38	5,45	-13,41	-0,05	16,85
Beam-115(FBH_T_3[2])	-0,28	-2,62	5,23	-0,31	6,13
Beam-116(TS_VERT_F[1])	0,23	1,91	12,92	-0,50	13,16
Beam-117(FBH_T_1[2])	-1,52	2,38	1,75	-1,79	4,47
Beam-118(Front_BulkHead[4])	-0,35	15,57	-7,90	2,32	16,83
Beam-119(30x2_30X2(34)[1])	0,01	-0,97	-4,70	0,81	4,81
Beam-120(MHB_support_1[1])	-3,06	0,04	6,53	-0,04	9,59
Beam-121(FBH_T6_BLNÇ[2])	0,82	6,76	1,11	0,84	7,59
Beam-122(TRNSV_T2_T3[1])	0,00	-25,69	7,32	1,89	26,71
Beam-123(SUP_CX_DIR)	0,00	-5,74	-5,11	1,53	7,68
Beam-124(Front_BulkHead[1])	0,39	9,26	5,44	-0,84	11,08
Beam-125(30x2_30X2(43)[1])	0,00	-2,01	1,13	0,33	2,30
Beam-126(FBH_T_2[1])	1,12	-0,95	-7,86	1,26	9,04
Beam-127(TS_SIS_UPPER[2])	-2,38	-5,29	13,11	-0,05	16,51
Beam-128(DIF_SIS_UPPER[2])	0,01	-1,80	3,51	-0,07	3,95
Beam-129(FBH_LS[2])	-3,47	2,89	7,69	-2,41	11,10
Beam-130(SIS_DIAGN_2[1])	-2,49	5,33	-0,18	-1,09	7,82
Beam-131(Pushrod_triáng[1])	0,12	1,28	1,39	1,02	1,69
Beam-132(PEDALBOX_2)	0,36	7,99	2,51	2,40	10,14
Beam-133(upper_FBH_Support[1])	-4,73	15,46	-3,08	-1,54	19,27
Beam-134(AC_SIS_LOWER[2])	-0,15	17,64	-2,00	-1,99	17,91
Beam-135(DIF_SIS_LOWER[1])	0,02	3,37	-2,63	0,31	4,28
Beam-136(FBH_T6_BLNÇ[1])	-0,83	6,71	-1,22	0,90	7,55
Beam-137(HEADREST_L)	0,05	1,17	-3,89	0,31	3,93
Beam-138(30x2_30X2(27)[2])	-0,04	1,55	6,04	1,20	6,25
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	-0,01	28,74	-3,18	0,32	31,92
Beam-140(AC_SIS_DIAGN[1])	-5,31	-11,44	-0,95	-1,24	16,78
Beam-141(RBH_DIAG)	0,00	0,75	0,52	0,01	0,91
Beam-142(FBH_DS[1])	2,41	8,41	-1,58	-2,00	10,85
Beam-143(HARNESSBAR)	0,19	16,19	16,37	1,84	16,40
Beam-144(Main_Hoop)	0,57	-4,61	-5,60	-2,58	5,70
Beam-145(TRNSV_FH)	0,01	6,51	-3,59	1,70	7,44
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	-2,60	4,32	5,73	-1,98	8,78
Beam-147(FBH_T_2[2])	-1,12	0,93	-7,89	1,26	9,07
Beam-148(Rear_Bulkhead[1])	0,00	-1,55	-0,49	0,24	1,63
Beam-149(FBH_T_4[2])	1,08	3,14	1,74	-0,16	4,54
Beam-150(AC_SIS_DIAGN[2])	5,28	-11,37	0,94	-1,21	16,69
Beam-151(FBH_T5_BLNÇ[1])	1,06	-5,12	0,62	-0,01	6,22
Beam-152(SIS_UPPER[2])	3,24	-1,37	8,02	-1,42	11,37
Beam-153(FBH_DS[3])	-2,40	8,36	1,60	-2,00	10,79
Beam-154(HAB_X1)	1,13	-5,80	-5,23	0,64	6,98
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	-7,04	-6,02	3,45	0,94	13,98
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	-0,23	0,67	-0,76	0,19	1,25
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	5,15	3,78	2,37	-1,35	9,16
Beam-158(Front_Hoop[3])	-1,49	27,11	7,53	-2,66	27,88
Beam-159(30x2_30X2(27)[1])	0,02	1,07	-6,01	1,12	6,12
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	-1,06	-5,04	-0,61	-0,01	6,14
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	9,43	-7,68	12,65	1,71	22,31
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	2,48	5,43	0,20	-1,06	7,91
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	-9,43	7,65	12,70	1,71	22,36
Beam-164(Front_BulkHead[3])	-0,39	9,33	5,44	-0,86	11,14
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	0,40	3,39	-2,52	-0,83	4,26
Beam-166(FH_SUP[2])	-5,08	-13,91	1,90	-1,75	19,02
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	-0,14	2,68	2,13	-0,42	3,56

Continua na página seguinte...

Tabela 6.3 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-168(MHB_support_1[4])	0,00	-2,12	-5,74	-1,23	5,80
Beam-169(MHB_support_2[2])	-2,48	11,30	-6,25	1,35	14,90
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	7,03	-6,09	-3,48	0,93	14,04
Beam-171(FBH_T_4[1])	-1,08	3,11	-1,73	-0,16	4,50
Beam-172(HAB_X2,1)	-1,01	5,82	1,39	0,63	7,00
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	0,11	0,76	7,17	-2,54	8,04
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	2,92	-2,17	1,11	-0,69	5,19
Beam-175(MHB_support_1[3])	3,06	0,03	6,50	-0,06	9,56
Beam-176(MHB_support_2[1])	2,48	11,28	-6,27	1,36	14,88
Beam-177(FBH_DS[2])	0,96	-0,54	-2,94	-1,23	3,95
Beam-178(FBH_T_3[1])	0,28	2,61	5,26	-0,31	6,15
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	-2,91	-2,16	-1,08	-0,68	5,16
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	0,97	-9,68	-3,88	-1,17	10,95
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	29,70	2,28	-0,06	31,98
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,00	16,57	-25,71	2,23	30,59
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,22	0,62	0,77	0,23	1,21
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	-0,39	-3,23	-2,39	-0,80	3,88
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	0,00	0,15	0,09	0,01	0,18
Beam-186(Front_Hoop[1])	1,85	-0,38	6,22	1,08	8,06
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	0,76	1,47	5,19	-1,19	6,13
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-0,76	-1,45	-5,17	-1,17	6,09
Beam-189(HEADREST_U)	-0,05	-0,33	3,12	0,20	3,18
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	-0,10	-0,77	7,16	-2,54	8,03
Beam-191(FH_SUP[1])	5,08	-14,07	1,91	-1,78	19,18
Beam-192(HAB_X2,2)	-1,13	5,01	-5,24	0,13	6,50
Beam-193(30x2_30X2(34)[2])	0,00	-7,82	7,24	1,19	10,66
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	0,00	-1,03	1,31	-0,04	1,67
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	0,00	7,59	-9,51	1,66	12,17
Beam-196(MHB_support_1[2])	0,06	5,78	2,03	-1,24	5,90
Beam-197(FBH_DS[4])	-0,95	0,47	-2,83	-1,22	3,82
Beam-198(FBH_T_1[1])	1,52	2,36	-1,76	-1,80	4,46
Beam-199(SIS_UPPER[1])	-3,23	1,39	-8,00	-1,45	11,35
Beam-200(30x2_30X2(25))	0,00	4,30	0,55	1,76	4,34
Beam-201(30x2_30X2(43)[2])	0,00	-9,49	-3,50	0,29	10,12
Beam-202(TS_VERT_F[2])	-0,21	-1,90	12,95	-0,49	13,16
Beam-203(Rear_Bulkhead[3])	0,00	-1,80	-0,56	0,31	1,89
Beam-204(AC_SIS_LOWER[1])	0,17	1,96	-17,63	-2,01	17,91
Beam-205(30x2_30X2(60)[1])	-2,30	5,79	4,37	-0,96	7,61
Beam-206(30x2_30X2(60)[2])	2,30	5,77	-4,35	-0,96	7,59

Tabela 6.4: Torção Traseira: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod_triangular[2])	-0,20	-5,60	0,84	-0,29	5,86
Beam-107(FBH_LS[1])	1,32	5,40	5,37	0,35	7,66
Beam-108(Front_Hoop[2])	-0,03	3,61	3,36	0,04	4,17
Beam-109(upper_FBH_Support[2])	-2,41	-3,87	1,35	-0,72	5,82
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	-11,03	-9,93	-10,46	0,81	25,45
Beam-111(T7_BLNÇ_T_LOW[1])	-1,01	5,80	-0,30	1,26	6,81
Beam-112(AC_SIS_UPPER[2])	-0,38	-1,83	4,09	1,20	4,86
Beam-113(HARNESS_B_SUP_T[1])	0,30	-3,28	-2,02	0,84	4,06
Beam-114(TS_SIS_UPPER[1])	1,22	-2,03	-0,82	1,27	3,41
Beam-115(FBH_T_3[2])	-0,14	-4,36	-1,18	0,14	4,55
Beam-116(TS_VERT_F[1])	-0,81	2,20	2,52	-1,16	4,16
Beam-117(FBH_T_1[2])	-1,24	-0,83	-0,15	0,33	2,08
Beam-118(Front_BulkHead[4])	-0,05	-2,32	1,33	-0,54	2,47
Beam-119(30x2_30X2(34)[1])	0,00	-4,08	0,38	-1,23	4,10

Continua na página seguinte...

Tabela 6.4 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-120(MHB_support_1[1])	0.87	-2.04	-2.61	-0.43	3.78
Beam-121(FBH_T6_BLNÇ[2])	-0.19	-4.93	-1.60	-0.58	5.38
Beam-122(TRNSV_T2_T3[1])	0.00	-6.65	0.21	-0.54	6.65
Beam-123(SUP_CX_DIR)	0.01	2.58	-0.22	-0.16	2.60
Beam-124(Front_BulkHead[1])	-0.53	0.80	-0.85	0.20	1.70
Beam-125(30x2_30X2(43)[1])	0.03	-19.52	-7.21	-1.92	20.82
Beam-126(FBH_T_2[1])	0.02	1.78	1.01	-0.30	2.06
Beam-127(TS_SIS_UPPER[2])	-1.23	1.97	1.01	1.23	3.45
Beam-128(DIF_SIS_UPPER[2])	-1.04	1.92	-4.14	2.41	5.32
Beam-129(FBH_LS[2])	-1.32	-5.42	5.31	0.35	7.65
Beam-130(SIS_DIAGN_2[1])	1.27	1.33	3.30	0.77	4.66
Beam-131(Pushrod_triáng[1])	0.12	-5.50	-0.77	-0.29	5.67
Beam-132(PEDALBOX_2)	-0.05	-0.97	-0.37	-0.59	1.16
Beam-133(upper_FBH_Support[1])	2.41	-3.87	-1.34	-0.73	5.82
Beam-134(AC_SIS_LOWER[2])	6.22	-14.23	3.48	1.35	20.87
Beam-135(DIF_SIS_LOWER[1])	-0.60	-2.04	-13.19	2.62	13.85
Beam-136(FBH_T6_BLNÇ[1])	0.20	-5.28	1.52	-0.60	5.70
Beam-137(HEADREST_L)	-0.05	-3.68	3.71	-1.13	5.23
Beam-138(30x2_30X2(27)[2])	0.11	-3.18	-0.74	-1.08	3.38
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	0.63	149.19	4.85	2.74	154.62
Beam-140(AC_SIS_DIAGN[1])	5.70	5.76	-1.15	0.61	11.58
Beam-141(RBH_DIAG)	-2.73	3.65	-3.92	-1.74	8.09
Beam-142(FBH_DS[1])	-1.61	-2.58	0.56	0.38	4.25
Beam-143(HARNESSBAR)	-0.38	-7.37	-7.45	-2.22	8.38
Beam-144(Main_Hoop)	-1.04	12.00	18.41	6.20	18.58
Beam-145(TRNSV_FH)	0.00	-1.14	6.15	-0.57	6.25
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	11.01	-10.01	-10.41	0.84	25.45
Beam-147(FBH_T_2[2])	-0.01	-1.71	0.97	-0.30	1.98
Beam-148(Rear_Bulkhead[1])	1.24	5.97	2.41	-1.26	7.68
Beam-149(FBH_T_4[2])	5.42	3.43	1.10	-0.51	8.89
Beam-150(AC_SIS_DIAGN[2])	-5.66	5.23	1.15	0.54	11.01
Beam-151(FBH_T5_BLNÇ[1])	0.15	2.20	-1.62	-0.23	2.88
Beam-152(SIS_UPPER[2])	-0.07	1.80	5.46	0.45	5.54
Beam-153(FBH_DS[3])	1.61	-2.57	-0.56	0.37	4.23
Beam-154(HAB_X1)	-0.22	5.96	5.55	-0.83	7.44
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	2.51	-7.44	2.31	-0.25	10.30
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	-0.66	-9.11	-1.50	-1.17	9.78
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	0.41	1.79	-4.16	1.30	4.94
Beam-158(Front_Hoop[3])	6.13	14.57	-15.42	1.04	21.58
Beam-159(30x2_30X2(27)[1])	-0.06	-7.20	-5.26	-0.81	8.98
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	-0.14	2.13	1.65	-0.22	2.83
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	-0.30	4.91	-14.53	1.38	15.63
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	-1.26	1.04	-3.26	0.69	4.53
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	0.33	-4.94	-14.82	1.35	15.95
Beam-164(Front_BulkHead[3])	0.53	0.81	-0.85	0.20	1.70
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	0.29	-2.89	-3.12	1.18	3.42
Beam-166(FH_SUP[2])	7.50	5.89	-1.28	0.74	13.52
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	0.94	5.63	0.20	1.20	6.57
Beam-168(MHB_support_1[4])	-1.19	2.98	-1.39	-1.23	4.48
Beam-169(MHB_support_2[2])	0.84	-4.46	2.47	0.50	5.77
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	-2.53	-7.58	-2.37	-0.26	10.47
Beam-171(FBH_T_4[1])	-5.43	3.33	-1.11	-0.51	8.80
Beam-172(HAB_X2.1)	-0.05	-5.72	4.50	0.09	7.33
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	0.07	-0.19	1.04	0.63	1.31
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	-5.15	-7.40	5.09	0.49	14.14
Beam-175(MHB_support_1[3])	-0.89	1.99	-2.64	-0.42	3.79
Beam-176(MHB_support_2[1])	-0.82	-4.46	2.44	0.48	5.74
Beam-177(FBH_DS[2])	0.02	3.49	6.24	0.19	7.17
Beam-178(FBH_T_3[1])	0.13	4.34	-1.19	0.13	4.52
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	5.18	-7.41	-4.83	0.45	14.02
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	-0.34	-3.42	2.03	0.86	4.14

Continua na página seguinte...

Tabela 6.4 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-181(DIF SIS UPPER[1])	1.13	-11.11	-4.03	2.30	16.27
Beam-182(Front BulkHead[2])	0.00	-2.25	6.85	-0.48	7.21
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0.66	-9.50	0.81	-1.31	10.19
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	-0.26	3.02	-1.58	1.11	3.42
Beam-185(Rear Bulkhead[4])	1.25	-2.25	11.42	-1.86	12.88
Beam-186(Front Hoop[1])	0.02	-3.72	-3.75	-0.01	4.65
Beam-187(SIS LOWER 2[1])	6.04	-1.35	-3.37	0.39	9.67
Beam-188(SIS LOWER 2[2])	-6.03	1.33	3.30	0.24	9.59
Beam-189(HEADREST_U)	0.07	4.04	-4.57	-0.96	6.16
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	-0.07	0.19	1.03	0.63	1.30
Beam-191(FH_SUP[1])	-7.50	6.13	-1.28	0.80	13.77
Beam-192(HAB_X2.2)	0.20	-2.59	5.59	-0.74	6.14
Beam-193(30x2 30X2(34)[2])	0.00	16.02	5.88	-1.21	17.07
Beam-194(Rear Bulkhead[2])	1.31	6.60	3.70	-1.89	8.73
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	0.00	0.42	-0.14	-0.03	0.45
Beam-196(MHB_support_1[2])	1.19	1.44	-2.94	-1.19	4.46
Beam-197(FBH_DS[4])	-0.01	-3.15	5.97	0.16	6.75
Beam-198(FBH_T_1[1])	1.24	-0.84	-0.17	0.33	2.09
Beam-199(SIS UPPER[1])	0.07	-1.93	-5.53	0.54	5.61
Beam-200(30x2 30X2(25))	0.02	-4.05	-3.84	-1.06	5.60
Beam-201(30x2 30X2(43)[2])	0.01	12.40	13.88	-2.06	18.61
Beam-202(TS_VERT_F[2])	0.80	-2.20	2.63	-1.16	4.23
Beam-203(Rear Bulkhead[3])	-0.21	6.98	-2.56	-0.85	7.33
Beam-204(AC SIS LOWER[1])	-6.25	-3.33	14.14	1.48	20.78
Beam-205(30x2 30X2(60)[1])	-1.70	11.49	-1.43	2.68	13.12
Beam-206(30x2 30X2(60)[2])	1.72	11.78	-1.96	2.87	13.52

Tabela 6.5: Resultados Globais, Casos Críticos e Dimensionamento Mínimo da Estrutura

Viga	Imp. Frontal (MPa)	Imp. Lateral (MPa)	Torção Frent. (MPa)	Torção Trás. (MPa)	Área Atual (mm ²)	Nova Área (mín., mm ²)	Diâm. Ext. (mm)	Reg. (mm)
Beam-106	6,27	2,13	1,83	5,86	6,27	175,93	1,84	25,34
Beam-107	77,63	212,37	11,14	7,66	212,37	175,93	62,27	25,34
Beam-108	22,02	118,85	8,12	4,17	118,85	175,93	34,85	29,53
Beam-109	28,98	26,02	19,32	5,82	28,98	175,93	8,50	25,34
Beam-110	88,92	383,19	8,78	25,45	383,19	175,93	112,36	32,77
Beam-111	8,03	7,87	3,42	6,81	8,03	175,93	2,36	32,77
Beam-112	94,56	127,55	9,16	4,86	127,55	175,93	37,40	32,77
Beam-113	28,91	96,20	10,95	4,06	96,20	175,93	28,21	25,34
Beam-114	95,40	29,17	16,85	3,41	95,40	175,93	27,97	32,77
Beam-115	30,45	32,12	6,13	4,55	32,12	175,93	9,42	25,34
Beam-116	19,80	10,53	13,16	4,16	19,80	175,93	5,81	25,34
Beam-117	24,42	19,02	4,47	2,08	24,42	175,93	7,16	25,34
Beam-118	18,60	17,32	16,83	2,47	18,60	175,93	5,45	32,77
Beam-119	42,69	60,11	4,81	4,10	60,11	175,93	17,63	25,34
Beam-120	30,32	5,87	9,59	3,78	30,32	175,93	8,89	25,34
Beam-121	11,24	123,79	7,59	5,38	123,79	175,93	36,30	25,34
Beam-122	8,36	38,18	26,71	6,65	38,18	175,93	11,19	25,34
Beam-123	3,61	105,77	7,68	2,60	105,77	175,93	31,01	25,34
Beam-124	12,75	7,30	11,08	1,70	12,75	175,93	3,74	32,77
Beam-125	1,74	16,79	2,30	20,82	20,82	175,93	6,10	25,34
Beam-126	31,88	16,05	9,04	2,06	31,88	175,93	9,35	25,34
Beam-127	95,76	81,10	16,51	3,45	95,76	175,93	28,08	32,77
Beam-128	8,64	12,83	3,95	5,32	12,83	175,93	3,76	32,77
Beam-129	78,06	138,46	11,10	7,65	138,46	175,93	40,60	25,34
Beam-130	25,32	48,73	7,82	4,66	48,73	175,93	14,29	32,77
Beam-131	5,87	2,45	1,69	5,67	5,87	175,93	1,72	25,34

Continua na página seguinte...

Tabela 6.5 – continuação da página anterior

Viga	Imp. Frontal (MPa)	Imp. Lateral (MPa)	Torção Frent. (MPa)	Torção Trás. (MPa)	Area Atual (mm ²)	Nova Area (mm ²)	Diâm. Ext. (mm)	Reg. (mm)
Beam-133	29,08	39,78	19,27	5,82	39,78	175,93	11,66	25,34
Beam-134	33,34	146,41	17,91	20,87	146,41	175,93	42,93	32,77
Beam-135	3,61	26,76	4,28	13,85	26,76	175,93	7,85	32,77
Beam-136	12,27	46,81	7,55	5,70	46,81	175,93	13,72	25,34
Beam-138	8,53	136,21	6,25	3,38	136,21	175,93	39,94	25,34
Beam-139	32,73	342,39	31,92	154,62	342,39	175,93	100,39	32,77
Beam-140	18,51	44,07	16,78	11,58	44,07	175,93	12,92	32,77
Beam-141	1,61	22,32	0,91	8,09	22,32	175,93	6,54	32,77
Beam-142	41,80	18,72	10,85	4,25	41,80	175,93	12,26	25,34
Beam-143	8,28	198,02	16,40	8,38	198,02	175,93	58,06	29,53
Beam-144	14,46	40,59	5,70	18,58	40,59	175,93	11,90	29,53
Beam-145	6,25	244,97	7,44	6,25	244,97	175,93	71,83	25,34
Beam-146	89,33	414,34	8,78	25,45	414,34	175,93	121,49	32,77
Beam-147	31,86	31,11	9,07	1,98	31,86	175,93	9,34	25,34
Beam-148	2,91	8,47	1,63	7,68	8,47	175,93	2,48	32,77
Beam-149	16,41	33,25	4,54	8,89	33,25	175,93	9,75	25,34
Beam-150	18,36	79,49	16,69	11,01	79,49	175,93	23,31	32,77
Beam-151	23,15	29,31	6,22	2,88	29,31	175,93	8,60	25,34
Beam-152	60,46	167,04	11,37	5,54	167,04	175,93	48,98	32,77
Beam-153	41,40	13,24	10,79	4,23	41,40	175,93	12,14	25,34
Beam-154	11,45	116,16	6,98	7,44	116,16	175,93	34,06	32,77
Beam-155	25,14	34,35	13,98	10,30	34,35	175,93	10,07	32,77
Beam-156	2,61	11,91	1,25	9,78	11,91	175,93	3,49	32,77
Beam-157	94,85	40,88	9,16	4,94	94,85	175,93	27,81	32,77
Beam-158	35,04	158,91	27,88	21,58	158,91	175,93	46,59	29,53
Beam-159	5,59	91,60	6,12	8,98	91,60	175,93	26,86	25,34
Beam-160	22,83	47,18	6,14	2,83	47,18	175,93	13,83	25,34
Beam-161	28,20	105,82	22,31	15,63	105,82	175,93	31,03	32,77
Beam-162	24,96	160,77	7,91	4,53	160,77	175,93	47,14	32,77
Beam-163	27,38	59,10	22,36	15,95	59,10	175,93	17,33	32,77
Beam-164	11,20	10,85	11,14	1,70	11,20	175,93	3,28	32,77
Beam-165	21,65	56,42	4,26	3,42	56,42	175,93	16,54	25,34
Beam-166	33,70	86,98	19,02	13,52	86,98	175,93	25,50	32,77
Beam-167	8,51	8,57	3,56	6,57	8,57	175,93	2,51	32,77
Beam-168	6,34	27,75	5,80	4,48	27,75	175,93	8,14	25,34
Beam-169	53,58	41,32	14,90	5,77	53,58	175,93	15,71	25,34
Beam-170	25,73	18,47	14,04	10,47	25,73	175,93	7,54	32,77
Beam-171	16,52	40,37	4,50	8,80	40,37	175,93	11,84	25,34
Beam-172	11,24	164,54	7,00	7,33	164,54	175,93	48,25	32,77
Beam-174	43,16	220,57	5,19	14,14	220,57	175,93	64,67	32,77
Beam-175	31,94	22,77	9,56	3,79	31,94	175,93	9,37	25,34
Beam-176	53,12	16,44	14,88	5,74	53,12	175,93	15,58	25,34
Beam-177	46,74	137,08	3,95	7,17	137,08	175,93	40,19	25,34
Beam-178	30,46	40,28	6,15	4,52	40,28	175,93	11,81	25,34
Beam-179	42,56	146,21	5,16	14,02	146,21	175,93	42,87	32,77
Beam-180	28,95	100,71	10,95	4,14	100,71	175,93	29,53	25,34
Beam-181	65,22	33,17	31,98	16,27	65,22	175,93	19,12	32,77
Beam-182	10,02	13,37	30,59	7,21	30,59	175,93	8,97	32,77
Beam-183	2,50	7,19	1,21	10,19	10,19	175,93	2,99	32,77
Beam-184	22,06	77,96	3,88	3,42	77,96	175,93	22,86	25,34
Beam-185	0,82	16,34	0,18	12,88	16,34	175,93	4,79	32,77
Beam-186	22,52	260,76	8,06	4,65	260,76	175,93	76,46	29,53
Beam-187	31,22	92,18	6,13	9,67	92,18	175,93	27,03	32,77
Beam-188	31,07	132,65	6,09	9,59	132,65	175,93	38,90	32,77
Beam-191	33,49	59,41	19,18	13,77	59,41	175,93	17,42	32,77
Beam-192	8,06	48,52	6,50	6,14	48,52	175,93	14,23	32,77
Beam-193	10,33	64,46	10,66	17,07	64,46	175,93	18,90	25,34
Beam-194	1,37	29,49	1,67	8,73	29,49	175,93	8,65	32,77
Beam-195	11,17	38,21	12,17	0,45	38,21	175,93	11,20	25,34
Beam-196	7,89	15,67	5,90	4,46	15,67	175,93	4,60	25,34

Continua na página seguinte...

Tabela 6.5 – continuação da página anterior

Viga	Imp. Frontal (MPa)	Imp. Lateral (MPa)	Torção Frent. (MPa)	Torção Trás. (MPa)	Área Atual (mm ²)	Nova Área Diâm. (mm ²)	Ext. Reg. (mm)
Beam-197	46,88	75,26	3,82	6,75	75,26	175,93	22,07 25,34
Beam-198	24,71	6,28	4,46	2,09	24,71	175,93	7,25 25,34
Beam-199	60,21	70,05	11,35	5,61	70,05	175,93	20,54 32,77
Beam-200	6,73	171,23	4,34	5,60	171,23	175,93	50,21 25,34
Beam-201	11,71	41,86	10,12	18,61	41,86	175,93	12,27 25,34
Beam-202	19,58	21,78	13,16	4,23	21,78	175,93	6,39 25,34
Beam-203	3,03	11,32	1,89	7,33	11,32	175,93	3,32 32,77
Beam-204	33,15	87,69	17,91	20,78	87,69	175,93	25,71 32,77
Beam-205	28,35	43,88	7,61	13,12	43,88	175,93	12,87 32,77
Beam-206	28,28	41,16	7,59	13,52	41,16	175,93	12,07 32,77

6.2 Chassis com secções otimizadas

Tabela 6.6: Compressão Frontal: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro tubular com secções otimizadas

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod triang[2])	2,03	-8,59	-0,78	-1,93	10,65
Beam-107(FBH LS[1])	-79,73	-88,40	-105,33	6,51	193,89
Beam-108(Front Hoop[2])	-14,00	-16,05	8,23	-1,39	30,14
Beam-109(upper FBH Support[2])	-39,36	-86,16	84,91	-5,58	160,33
Beam-110(SIS LOWER 1[2])	-58,55	6,36	-51,58	-0,88	110,49
Beam-111(T7 BLNÇ T LOW[1])	0,12	11,54	-6,84	-1,29	13,54
Beam-112(AC SIS UPPER[2])	-102,70	-18,34	15,19	-0,42	126,52
Beam-113(HARNESS B SUP T[1])	-0,99	22,24	-27,42	-0,03	35,50
Beam-114(TS SIS UPPER[1])	-98,54	-16,27	33,40	-2,65	135,70
Beam-115(FBH T 3[2])	3,08	12,94	67,92	2,45	72,21
Beam-116(TS VERT F[1])	25,20	11,16	4,66	1,40	36,86
Beam-117(FBH T 1[2])	-20,38	23,04	90,63	4,32	113,89
Beam-118(Front BulkHead[4])	-9,06	-8,68	118,89	-19,35	127,95
Beam-119(30x2 30X2(34)[1])	71,71	2,51	6,00	-0,01	78,20
Beam-120(MHB support 1[1])	35,19	11,34	-3,42	0,11	47,04
Beam-121(FBH T6 BLNÇ[2])	-1,29	11,07	-15,06	-1,56	17,34
Beam-122(TRNSV T2 T3[1])	5,18	12,07	16,32	0,00	25,48
Beam-123(SUP CX DIR)	-5,56	-0,67	-2,39	-0,04	7,95
Beam-124(Front BulkHead[1])	1,89	3,76	227,63	12,29	229,32
Beam-125(30x2 30X2(43)[1])	0,00	2,19	0,62	0,00	2,28
Beam-126(FBH T 2[1])	5,66	15,70	-68,72	3,85	74,86
Beam-127(TS SIS UPPER[2])	-98,49	-16,28	33,09	2,64	135,37
Beam-128(DIF SIS UPPER[2])	0,00	-4,72	-13,53	-0,26	14,34
Beam-129(FBH LS[2])	-80,44	-94,42	106,24	-6,10	199,12
Beam-130(SIS DIAGN 2[1])	-15,63	1,81	16,84	-0,33	32,52
Beam-131(Pushrod triang[1])	2,02	8,43	-0,75	1,92	10,48
Beam-132(PEDALBOX 2)	2,73	150,27	-9,39	-7,12	150,63
Beam-133(upper FBH Support[1])	-39,25	84,90	83,91	5,63	158,62
Beam-134(AC SIS LOWER[2])	-21,98	-5,45	21,26	-0,57	43,93
Beam-135(DIF SIS LOWER[1])	0,08	-1,43	-4,46	-0,47	4,60
Beam-136(FBH T6 BLNÇ[1])	-1,41	-10,93	-17,44	1,88	19,06
Beam-137(HEADREST L)	-0,07	1,55	3,20	-0,09	3,25
Beam-138(30x2 30X2(27)[2])	7,96	0,74	-0,80	0,07	9,05
Beam-139(DIF SIS LOWER[2])	0,08	47,48	-1,50	0,50	48,59
Beam-140(AC SIS DIAGN[1])	-1,80	6,13	21,69	0,00	24,34
Beam-141(RBH DIAG)	0,00	-2,22	-0,52	-0,04	2,28
Beam-142(FBH DS[1])	-53,55	73,09	88,93	-3,71	168,66
Beam-143(HARNESSBAR)	-0,27	11,47	4,90	-3,12	11,94
Beam-144(Main Hoop)	0,86	-19,94	7,22	-3,72	20,12
Beam-145(TRNSV FH)	-9,90	1,48	-1,77	-0,01	11,99

Continua na página seguinte...

Tabela 6.6 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	-59,06	-7,87	52,11	0,92	111,69
Beam-147(FBH_T_2[2])	5,69	16,16	67,61	-3,62	73,69
Beam-148(Rear_Bulkhead[1])	0,00	1,37	3,16	-0,19	3,45
Beam-149(FBH_T_4[2])	1,14	-24,94	4,09	-1,65	26,41
Beam-150(AC_SIS_DIAGN[2])	-1,78	-6,01	21,34	0,06	23,94
Beam-151(FBH_T5_BLNÇ[1])	-9,62	25,71	10,11	-3,18	37,24
Beam-152(SIS_UPPER[2])	-67,74	-11,21	-2,94	0,49	79,08
Beam-153(FBH_DS[3])	-53,04	-69,82	85,39	3,77	163,34
Beam-154(HAB_X1)	-4,08	-8,88	-5,26	2,24	14,21
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	-15,88	-3,33	21,36	0,26	37,49
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	0,14	-2,27	-2,99	-0,34	3,28
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	-102,80	15,63	-18,64	0,47	127,13
Beam-158(Front_Hoop[3])	9,37	-25,11	26,11	1,07	35,58
Beam-159(30x2_30X2(27)[1])	5,42	-0,86	-0,74	-0,02	6,56
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	-9,35	-24,62	8,62	3,04	35,44
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	-16,41	-17,16	-6,19	2,32	34,66
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	-15,46	-1,41	16,32	0,33	31,82
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	-16,29	-17,28	5,84	-2,34	34,52
Beam-164(Front_BulkHead[3])	1,95	-4,38	-227,78	-11,75	229,54
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	-0,02	-25,65	2,84	-0,55	25,83
Beam-166(FH_SUP[2])	-27,76	-5,03	15,35	-0,76	43,39
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	0,12	-11,66	-6,81	1,28	13,62
Beam-168(MHB_support_1[4])	0,00	-4,17	8,34	-1,50	9,24
Beam-169(MHB_support_2[2])	-36,37	-20,92	-41,48	2,35	82,83
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	-15,91	3,29	21,48	-0,27	37,64
Beam-171(FBH_T_4[1])	1,20	25,17	4,08	1,64	26,69
Beam-172(HAB_X2,1)	-3,82	-8,61	4,81	-2,28	13,68
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	-16,94	87,03	64,16	-0,43	125,06
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	34,34	-2,53	-23,29	-0,96	57,64
Beam-175(MHB_support_1[3])	35,16	11,34	3,37	-0,12	46,98
Beam-176(MHB_support_2[1])	-36,41	21,18	41,79	-2,38	83,26
Beam-177(FBH_DS[2])	-65,51	8,82	20,55	-1,96	87,87
Beam-178(FBH_T_3[1])	3,05	12,53	-68,50	-2,56	72,68
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	34,07	2,11	-22,81	1,04	56,88
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	-1,04	-21,98	-27,14	0,04	35,33
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	-94,40	10,51	0,27	104,91
Beam-182(Front_BulkHead[2])	-9,43	4,35	-239,52	-0,31	248,95
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,14	2,21	-3,14	0,41	3,35
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	0,16	-23,79	-2,79	0,54	24,08
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	0,00	0,04	-1,44	0,00	1,44
Beam-186(Front_Hoop[1])	-13,89	-15,94	8,13	1,48	29,94
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	-18,48	-20,30	-1,83	-0,05	38,84
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-18,39	-20,31	-1,52	0,06	38,73
Beam-189(HEADREST_U)	-0,09	0,45	3,36	-0,18	3,42
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	-16,97	-84,28	62,42	0,24	121,84
Beam-191(FH_SUP[1])	-27,76	5,13	-14,66	0,75	42,91
Beam-192(HAB_X2,2)	-4,02	-6,01	1,58	0,12	10,24
Beam-193(30x2_30X2(34)[2])	15,45	1,98	-1,68	-0,01	18,04
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	0,00	-0,37	2,11	-0,01	2,14
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	7,54	19,17	6,69	-0,06	27,51
Beam-196(MHB_support_1[2])	0,00	8,30	-4,36	1,47	9,27
Beam-197(FBH_DS[4])	-64,76	7,61	-19,62	1,87	85,81
Beam-198(FBH_T_1[1])	-20,36	-23,25	93,75	-4,23	116,94
Beam-199(SIS_UPPER[1])	-67,55	-10,61	-2,47	-0,51	78,25
Beam-200(30x2_30X2(25))	6,98	0,51	-0,77	0,00	7,75
Beam-201(30x2_30X2(43)[2])	-12,74	-1,13	-4,92	0,00	17,77
Beam-202(TS_VERT_F[2])	25,23	10,99	-4,54	-1,40	36,68
Beam-203(Rear_Bulkhead[3])	0,00	-1,67	-3,38	0,33	3,77
Beam-204(AC_SIS_LOWER[1])	-21,87	-4,99	21,22	0,58	43,67
Beam-205(30x2_30X2(60)[1])	-22,63	9,83	19,21	-1,43	35,40
Beam-206(30x2_30X2(60)[2])	-22,61	-9,90	19,23	1,44	35,36

Tabela 6.7: Compressão Lateral: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro tubular com secções otimizadas

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod triang[2])	-0,72	1,76	-1,66	0,19	2,47
Beam-107(FBH LS[1])	-21,50	-108,39	-307,47	-32,25	342,85
Beam-108(Front Hoop[2])	-0,22	-25,33	-142,57	-7,32	144,11
Beam-109(upper FBH Support[2])	8,63	29,02	-9,95	-3,36	39,31
Beam-110(SIS LOWER 1[2])	-24,34	380,08	-71,41	14,36	410,61
Beam-111(T7 BLNÇ T LOW[1])	0,58	14,92	-1,64	1,74	15,58
Beam-112(AC SIS UPPER[2])	68,35	-8,61	-111,91	-3,84	180,58
Beam-113(HARNESS B SUP T[1])	25,96	-115,52	10,31	1,08	141,76
Beam-114(TS SIS UPPER[1])	1,39	4,41	-37,20	-0,95	38,85
Beam-115(FBH T 3[2])	-0,66	21,86	36,83	4,65	43,37
Beam-116(TS VERT F[1])	10,72	4,76	5,18	0,06	16,02
Beam-117(FBH T 1[2])	19,16	8,27	-1,15	-3,22	27,47
Beam-118(Front BulkHead[4])	1,00	-2,15	-18,11	-0,22	18,66
Beam-119(30x2 30X2(34)[1])	-14,55	-15,92	62,27	0,84	78,61
Beam-120(MHB support 1[1])	-1,87	2,21	-9,35	-1,53	11,24
Beam-121(FBH T6 BLNÇ[2])	-5,88	143,89	-33,98	37,52	151,55
Beam-122(TRNSV T2 T3[1])	-1,23	43,92	-45,06	0,73	59,29
Beam-123(SUP CX DIR)	-8,85	121,32	116,84	0,26	177,29
Beam-124(Front BulkHead[1])	1,43	3,95	1,26	0,54	5,37
Beam-125(30x2 30X2(43)[1])	7,98	-13,36	-12,76	1,28	26,46
Beam-126(FBH T 2[1])	0,64	-14,74	-25,05	9,83	26,11
Beam-127(TS SIS UPPER[2])	51,37	11,32	66,25	-2,53	117,85
Beam-128(DIF SIS UPPER[2])	-1,26	2,88	11,90	1,36	13,16
Beam-129(FBH LS[2])	9,05	47,17	-242,64	25,14	249,05
Beam-130(SIS DIAGN 2[1])	41,15	-13,86	20,53	-12,98	65,17
Beam-131(Pushrod triang[1])	-0,26	3,00	3,63	-1,77	4,97
Beam-132(PEDALBOX 2)	-1,11	27,02	7,29	-1,29	29,10
Beam-133(upper FBH Support[1])	-19,62	39,04	9,21	8,28	58,70
Beam-134(AC SIS LOWER[2])	45,96	-152,36	-24,68	-6,34	199,57
Beam-135(DIF SIS LOWER[1])	-3,81	-8,14	-25,57	2,65	30,65
Beam-136(FBH T6 BLNÇ[1])	0,47	80,76	-7,55	10,99	81,42
Beam-137(HEADREST L)	0,92	19,64	-49,62	-2,29	54,27
Beam-138(30x2 30X2(27)[2])	-19,11	38,02	-135,47	-1,64	159,81
Beam-139(DIF SIS LOWER[2])	0,20	-82,20	-44,06	2,85	105,20
Beam-140(AC SIS DIAGN[1])	-11,31	41,57	12,97	-8,84	53,00
Beam-141(RBH DIAG)	9,89	-14,92	-5,31	0,32	25,09
Beam-142(FBH DS[1])	16,52	17,48	3,98	-4,18	34,34
Beam-143(HARNESSBAR)	-5,93	191,79	194,05	-10,91	195,80
Beam-144(Main Hoop)	1,92	-53,61	32,18	19,82	63,84
Beam-145(TRNSV FH)	-100,98	-142,47	291,83	5,56	425,73
Beam-146(SIS LOWER 1[1])	159,13	347,17	-39,53	8,43	506,48
Beam-147(FBH T 2[2])	-0,04	-4,38	-41,84	1,20	41,96
Beam-148(Rear Bulkhead[1])	0,19	9,91	-4,15	-0,41	10,93
Beam-149(FBH T 4[2])	11,99	-41,62	-20,50	13,06	54,14
Beam-150(AC SIS DIAGN[2])	-4,55	-102,31	-12,93	-2,82	106,85
Beam-151(FBH T5 BLNÇ[1])	0,24	43,35	-15,71	6,33	46,35
Beam-152(SIS UPPER[2])	-5,35	5,45	224,95	9,22	228,10
Beam-153(FBH DS[3])	-5,40	-18,80	-3,54	-2,65	24,53
Beam-154(HAB X1)	-5,97	-71,86	-126,56	-6,29	129,81
Beam-155(TS SIS DIAGN[1])	17,14	19,00	-24,42	10,43	48,08
Beam-156(T8 BLNÇ T LOW[2])	-2,41	10,77	3,77	1,63	13,82
Beam-157(AC SIS UPPER[1])	-14,01	20,08	-38,60	-5,90	54,63
Beam-158(Front Hoop[3])	-17,33	-191,45	-79,05	-32,09	193,19
Beam-159(30x2 30X2(27)[1])	-8,32	-21,59	-93,17	1,23	102,49
Beam-160(FBH T5 BLNÇ[2])	5,79	-49,78	-31,05	-9,32	64,46
Beam-161(TS SIS LOWER[2])	32,95	14,42	122,65	13,42	156,44
Beam-162(SIS DIAGN 2[2])	-14,82	-188,06	-19,48	-4,80	201,02
Beam-163(TS SIS LOWER[1])	-2,30	4,04	87,09	9,96	89,49
Beam-164(Front BulkHead[3])	-4,24	-4,50	1,71	0,59	9,05

Continua na página seguinte...

Tabela 6.7 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	-13,26	-47,63	46,42	14,43	73,24
Beam-166(FH_SUP[2])	-9,88	-96,12	-15,20	2,87	107,19
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	1,88	15,08	3,66	0,72	17,39
Beam-168(MHB_support_1[4])	0,01	-43,34	-17,77	-4,51	46,85
Beam-169(MHB_support_2[2])	7,85	50,31	30,83	3,40	66,85
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	-1,93	22,51	-7,40	7,37	25,35
Beam-171(FBH_T_4[1])	24,98	37,86	-5,60	0,62	62,92
Beam-172(HAB_X2,1)	2,11	-28,13	-186,56	8,63	189,75
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	-1,18	1,85	-24,22	-0,56	25,47
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	-108,12	195,52	-16,05	10,42	304,30
Beam-175(MHB_support_1[3])	-8,74	-4,87	-25,88	-1,72	35,08
Beam-176(MHB_support_2[1])	3,01	23,57	7,66	3,39	27,79
Beam-177(FBH_DS[2])	22,90	-34,91	-179,69	-6,03	205,91
Beam-178(FBH_T_3[1])	0,70	-34,08	40,46	3,51	53,60
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	27,07	137,05	25,66	12,82	166,50
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	-30,51	-112,81	-12,40	1,09	143,35
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	-72,74	-1,85	1,26	73,03
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,33	1,87	19,12	-0,51	19,46
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,59	8,85	1,89	1,19	9,47
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	16,07	71,49	61,40	2,28	110,30
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	0,29	-7,21	-16,46	0,55	17,99
Beam-186(Front_Hoop[1])	-18,98	19,61	-266,97	5,03	286,67
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	55,02	-1,87	68,88	-9,04	123,92
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-5,03	43,28	-158,54	9,52	161,60
Beam-189(HEADREST_U)	0,84	20,01	-34,61	-1,93	40,81
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	0,53	23,28	-1,33	0,05	23,85
Beam-191(FH_SUP[1])	23,09	-51,33	-25,17	5,86	80,26
Beam-192(HAB_X2,2)	-2,54	-14,53	-48,76	5,01	52,47
Beam-193(30x2 30X2(34)[2])	-9,27	73,09	-35,08	2,30	90,35
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	-11,19	-5,00	-20,79	0,38	32,57
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	6,05	-49,27	-15,86	-4,96	57,81
Beam-196(MHB_support_1[2])	-1,13	6,99	24,99	-4,30	27,08
Beam-197(FBH_DS[4])	0,24	28,37	-118,66	0,77	122,23
Beam-198(FBH_T_1[1])	-6,04	7,12	1,71	-2,89	13,16
Beam-199(SIS_UPPER[1])	4,24	-12,13	75,61	3,17	80,81
Beam-200(30x2 30X2(25))	-32,17	-60,18	163,13	4,69	199,78
Beam-201(30x2 30X2(43)[2])	1,18	38,01	49,11	0,44	61,53
Beam-202(TS_VERT_F[2])	-30,73	-10,11	15,58	-0,24	46,32
Beam-203(Rear_Bulkhead[3])	-0,09	13,82	-1,20	-1,99	13,92
Beam-204(AC_SIS_LOWER[1])	3,87	-2,72	111,03	-3,73	114,92
Beam-205(30x2 30X2(60)[1])	4,18	-55,84	-20,20	2,26	59,86
Beam-206(30x2 30X2(60)[2])	3,04	-54,46	12,58	0,50	56,77

Tabela 6.8: Torção Frente: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro com secções otimizadas

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod_triangular[2])	-0,13	2,14	-2,77	1,70	3,64
Beam-107(FBH_LS[1])	5,66	-4,55	13,13	-5,10	18,53
Beam-108(Front_Hoop[2])	-1,41	1,75	-7,74	1,43	9,23
Beam-109(upper_FBH_Support[2])	7,31	27,43	4,78	-2,40	33,58
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	2,06	8,76	6,17	-2,26	11,55
Beam-111(T7_BLNÇ_T_LOW[1])	0,31	6,29	-3,75	-0,69	7,62
Beam-112(AC_SIS_UPPER[2])	-7,28	4,51	-3,81	-1,90	13,19
Beam-113(HARNESS_B_SUP_T[1])	-2,57	-14,41	6,02	-1,44	17,32
Beam-114(TS_SIS_UPPER[1])	3,87	7,78	-21,64	-0,35	26,87
Beam-115(FBH_T_3[2])	-0,51	-2,95	10,04	0,14	10,97

Continua na página seguinte...

Tabela 6.8 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-116(TS_VERT_F[1])	-0,89	2,81	18,16	-0,69	19,05
Beam-117(FBH_T_1[2])	-2,22	5,41	2,62	-2,98	8,24
Beam-118(Front_BulkHead[4])	-0,36	16,78	-11,20	3,90	20,05
Beam-119(30x2_30X2(34)[1])	-0,01	-1,35	8,46	1,13	8,57
Beam-120(MHB_support_1[1])	-4,27	1,56	10,45	0,34	14,84
Beam-121(FBH_T6_BLNÇ[2])	1,91	10,55	2,35	1,02	12,53
Beam-122(TRNSV_T2_T3[1])	0,00	-39,66	14,43	2,49	42,19
Beam-123(SUP_CX_DIR)	-0,01	-9,27	12,02	2,17	15,19
Beam-124(Front_BulkHead[1])	0,40	10,67	-9,02	-2,24	14,37
Beam-125(30x2_30X2(43)[1])	0,00	-2,57	2,05	0,55	3,28
Beam-126(FBH_T_2[1])	2,14	-1,40	-14,75	2,14	16,96
Beam-127(TS_SIS_UPPER[2])	-3,87	-7,76	21,56	-0,34	26,79
Beam-128(DIF_SIS_UPPER[2])	0,00	3,30	7,05	0,00	7,79
Beam-129(FBH_LS[2])	-5,70	4,59	12,86	-5,12	18,32
Beam-130(SIS_DIAGN_2[1])	-3,26	9,42	-1,03	-1,69	12,74
Beam-131(Pushrod_triáng[1])	0,13	2,06	2,75	1,70	3,57
Beam-132(PEDALBOX_2)	0,52	-18,71	4,19	2,12	19,49
Beam-133(upper_FBH_Support[1])	-7,35	26,95	-4,78	-2,42	33,14
Beam-134(AC_SIS_LOWER[2])	0,43	-26,85	-2,40	-2,95	27,39
Beam-135(DIF_SIS_LOWER[1])	-0,01	-6,68	-4,52	0,61	8,08
Beam-136(FBH_T6_BLNÇ[1])	-1,95	10,37	-2,67	1,11	12,41
Beam-137(HEADREST_L)	0,11	1,54	-5,10	0,62	5,19
Beam-138(30x2_30X2(27)[2])	-0,03	3,07	8,91	1,85	9,46
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	-0,02	-44,85	-6,67	0,63	51,53
Beam-140(AC_SIS_DIAGN[1])	-6,39	-16,76	0,94	-1,75	23,18
Beam-141(RBH_DIAG)	0,00	1,30	0,74	0,02	1,50
Beam-142(FBH_DS[1])	3,51	17,04	-2,41	-3,48	20,57
Beam-143(HARNESSBAR)	0,31	18,30	18,51	2,30	18,65
Beam-144(Main_Hoop)	0,75	-7,53	-7,00	-2,49	7,99
Beam-145(TRNSV_FH)	0,01	16,89	-5,37	2,41	17,73
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	-2,06	8,69	6,16	-2,25	11,50
Beam-147(FBH_T_2[2])	-2,14	1,34	-14,92	2,12	17,12
Beam-148(Rear_Bulkhead[1])	0,00	-2,21	-0,65	0,37	2,30
Beam-149(FBH_T_4[2])	2,12	-8,90	2,93	-0,56	11,49
Beam-150(AC_SIS_DIAGN[2])	6,36	-16,78	-0,91	-1,72	23,16
Beam-151(FBH_T5_BLNÇ[1])	2,61	-8,69	0,73	0,28	11,33
Beam-152(SIS_UPPER[2])	4,49	1,86	11,95	-1,85	16,54
Beam-153(FBH_DS[3])	-3,47	16,60	2,47	-3,41	20,09
Beam-154(HAB_X1)	1,36	-9,75	-6,65	1,07	11,10
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	-10,78	-8,52	4,56	1,58	20,44
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	-0,43	1,18	-1,35	0,27	2,22
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	7,26	-4,54	3,88	-1,94	13,23
Beam-158(Front_Hoop[3])	-1,36	34,91	-6,18	-3,06	34,96
Beam-159(30x2_30X2(27)[1])	0,02	-0,57	-7,77	1,70	7,80
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	-2,60	-8,52	-0,71	0,28	11,15
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	13,57	-10,06	19,97	2,82	33,69
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	3,25	9,56	1,07	-1,66	12,87
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	-13,57	10,04	20,02	2,83	33,75
Beam-164(Front_BulkHead[3])	-0,41	10,84	9,01	-2,21	14,47
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	0,53	5,12	-4,24	-1,06	6,32
Beam-166(FH_SUP[2])	-5,98	-20,52	3,44	-2,59	26,59
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	-0,30	6,24	3,74	-0,68	7,58
Beam-168(MHB_support_1[4])	0,00	-2,83	-9,93	-1,92	10,32
Beam-169(MHB_support_2[2])	-3,34	18,41	-9,91	2,35	23,99
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	10,77	-8,49	-4,58	1,58	20,41
Beam-171(FBH_T_4[1])	-2,08	-8,83	-2,91	-0,55	11,38
Beam-172(HAB_X2,1)	-1,24	9,78	1,53	1,07	11,14
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	0,36	0,87	-15,96	-2,46	16,32
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	3,63	-3,35	1,44	-0,69	6,98
Beam-175(MHB_support_1[3])	4,25	-1,56	10,43	0,34	14,79
Beam-176(MHB_support_2[1])	3,37	18,46	-9,96	2,36	24,07

Continua na página seguinte...

Tabela 6.8 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-177(FBH_DS[2])	1,67	-0,82	-5,02	-1,84	6,77
Beam-178(FBH_T_3[1])	0,50	2,92	10,17	0,12	11,08
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	-3,63	-3,27	-1,39	-0,69	6,90
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	2,63	-14,48	-5,93	-1,45	17,43
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	0,00	-66,02	-3,89	0,02	69,91
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,01	17,68	31,02	3,85	35,68
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,44	1,14	1,37	0,34	2,23
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	-0,52	-4,37	-3,84	-0,97	6,34
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	0,00	0,18	0,14	0,01	0,19
Beam-186(Front_Hoop[1])	1,41	-1,87	7,70	1,44	9,19
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	1,94	3,19	6,97	-1,86	9,49
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-1,92	-3,20	-6,94	-1,86	9,46
Beam-189(HEADREST_U)	0,10	0,34	-3,73	0,39	3,82
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	-0,34	-15,83	0,89	-2,45	16,17
Beam-191(FH_SUP[1])	5,98	-20,68	3,45	-2,62	26,74
Beam-192(HAB_X2,2)	-1,37	8,13	-6,65	0,07	9,64
Beam-193(30x2 30X2(34)[2])	0,01	-12,40	9,75	1,58	15,78
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	0,00	-1,47	2,27	-0,06	2,70
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	0,01	14,66	-16,06	2,24	21,75
Beam-196(MHB_support_1[2])	0,00	9,92	2,86	-1,91	10,32
Beam-197(FBH_DS[4])	-1,64	0,67	-4,69	-1,76	6,37
Beam-198(FBH_T_1[1])	2,26	5,27	-2,64	-3,03	8,15
Beam-199(SIS_UPPER[1])	-4,48	-1,80	-11,83	-1,89	16,40
Beam-200(30x2 30X2(25))	0,00	8,51	1,38	2,63	8,62
Beam-201(30x2 30X2(43)[2])	-0,01	14,88	-4,23	0,38	15,47
Beam-202(TS_VERT_F[2])	0,92	-2,80	18,15	-0,70	19,07
Beam-203(Rear_Bulkhead[3])	0,00	-2,60	-0,80	0,49	2,72
Beam-204(AC_SIS_LOWER[1])	-0,41	-2,46	-26,82	-2,95	27,34
Beam-205(30x2 30X2(60)[1])	-2,23	7,84	6,25	-1,43	10,44
Beam-206(30x2 30X2(60)[2])	2,24	7,76	-6,24	-1,44	10,38

Tabela 6.9: Torção Trás: esforços axiais, flexionais, torcionais e máximos combinados, quadro com secções otimizadas

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-106(Pushrod_triáng[2])	-0,34	-9,24	1,12	-0,22	9,65
Beam-107(FBH_LS[1])	1,99	7,61	9,79	0,52	12,54
Beam-108(Front_Hoop[2])	-0,04	5,14	5,95	0,08	7,00
Beam-109(upper_FBH_Support[2])	-3,59	-6,60	2,89	-0,68	9,59
Beam-110(SIS_LOWER_1[2])	-14,53	10,50	-12,38	1,08	30,41
Beam-111(T7_BLNÇ_T_LOW[1])	-1,16	7,82	-0,58	2,14	9,00
Beam-112(AC_SIS_UPPER[2])	-0,41	2,26	6,10	1,48	6,91
Beam-113(HARNESS_B_SUP_T[1])	0,24	4,32	-2,29	0,73	5,13
Beam-114(TS_SIS_UPPER[1])	1,35	-3,28	-1,17	1,89	4,83
Beam-115(FBH_T_3[2])	-0,20	-6,38	-1,62	0,09	6,68
Beam-116(TS_VERT_F[1])	-1,42	3,91	3,99	-1,60	7,00
Beam-117(FBH_T_1[2])	-1,95	-1,58	-0,30	0,48	3,56
Beam-118(Front_BulkHead[4])	-0,04	-2,39	-1,34	-0,82	2,49
Beam-119(30x2 30X2(34)[1])	-0,01	-6,54	3,21	-1,48	7,29
Beam-120(MHB_support_1[1])	1,56	-2,57	-3,26	-1,42	5,17
Beam-121(FBH_T6_BLNÇ[2])	-0,22	-7,48	-2,27	-1,01	8,04
Beam-122(TRNSV_T2_T3[1])	0,00	-9,37	0,31	-0,63	9,38
Beam-123(SUP_CX_DIR)	0,04	4,59	-0,29	-0,25	4,63
Beam-124(Front_BulkHead[1])	-0,56	1,02	-1,40	0,50	2,30
Beam-125(30x2 30X2(43)[1])	0,06	-31,86	-11,23	-2,30	33,81
Beam-126(FBH_T_2[1])	0,02	2,32	1,75	-0,39	2,93
Beam-127(TS_SIS_UPPER[2])	-1,36	3,31	1,53	1,86	5,00

Continua na página seguinte...

Tabela 6.9 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção (MPa)	Máx. Comb. (MPa)
Beam-128(DIF_SIS_UPPER[2])	-1,61	-2,66	-7,70	3,57	9,44
Beam-129(FBH_LS[2])	-1,98	-7,63	9,77	0,53	12,53
Beam-130(SIS_DIAGN_2[1])	1,53	1,07	4,03	0,93	5,56
Beam-131(Pushrod_triangular[1])	0,20	-9,15	-1,01	-0,24	9,40
Beam-132(PEDALBOX_2)	0,06	-2,19	-0,66	-0,55	2,28
Beam-133(upper_FBH_Support[1])	3,60	-6,53	-2,88	-0,69	9,53
Beam-134(AC_SIS_LOWER[2])	8,31	17,33	4,43	1,53	26,20
Beam-135(DIF_SIS_LOWER[1])	0,74	2,67	-18,93	4,03	19,86
Beam-136(FBH_T6_BLNÇ[1])	0,23	-8,66	2,34	-1,09	9,20
Beam-137(HEADREST_L)	-0,08	-7,14	3,92	-2,37	8,18
Beam-138(30x2_30X2(27)[2])	0,11	-4,72	-1,00	-1,43	4,93
Beam-139(DIF_SIS_LOWER[2])	-0,86	128,05	-18,69	4,21	147,60
Beam-140(AC_SIS_DIAGN[1])	7,54	6,60	-1,31	0,48	14,27
Beam-141(RBH_DIAG)	-3,74	5,79	-5,27	-2,37	11,57
Beam-142(FBH_DS[1])	-2,40	-5,03	0,84	0,57	7,50
Beam-143(HARNESSBAR)	-0,53	-5,56	5,20	-2,95	7,06
Beam-144(Main_Hoop)	-1,31	14,12	20,48	6,61	20,73
Beam-145(TRANSV_FH)	0,00	-1,63	11,15	-0,83	11,27
Beam-146(SIS_LOWER_1[1])	14,51	10,71	-12,28	1,12	30,34
Beam-147(FBH_T_2[2])	-0,01	-2,20	1,70	-0,41	2,79
Beam-148(Rear_Bulkhead[1])	1,60	7,87	3,50	-1,71	10,21
Beam-149(FBH_T_4[2])	10,99	4,52	0,98	-0,46	15,52
Beam-150(AC_SIS_DIAGN[2])	-7,48	5,91	1,34	0,40	13,54
Beam-151(FBH_T5_BLNÇ[1])	0,18	-3,34	-2,18	-0,33	4,17
Beam-152(SIS_UPPER[2])	-0,04	1,89	7,21	0,55	7,27
Beam-153(FBH_DS[3])	2,39	-4,89	-0,81	0,57	7,35
Beam-154(HAB_X1)	-0,25	6,80	5,97	-1,00	8,69
Beam-155(TS_SIS_DIAGN[1])	3,46	-12,08	3,59	-0,50	16,06
Beam-156(T8_BLNÇ_T_LOW[2])	-0,65	-13,78	-2,24	-1,75	14,43
Beam-157(AC_SIS_UPPER[1])	0,46	-2,19	-6,13	1,60	6,96
Beam-158(Front_Hoop[3])	6,36	16,55	-17,62	1,28	24,10
Beam-159(30x2_30X2(27)[1])	-0,06	-8,83	-5,49	-1,05	10,46
Beam-160(FBH_T5_BLNÇ[2])	-0,17	3,10	2,21	-0,29	3,97
Beam-161(TS_SIS_LOWER[2])	-0,53	6,14	-16,41	2,21	18,04
Beam-162(SIS_DIAGN_2[2])	-1,51	0,68	-4,03	0,84	5,57
Beam-163(TS_SIS_LOWER[1])	0,56	-6,17	-16,85	2,16	18,51
Beam-164(Front_BulkHead[3])	0,56	1,05	-1,37	0,47	2,29
Beam-165(HARNESS_B_SUP_F[1])	1,10	-2,73	-2,89	1,61	4,18
Beam-166(FH_SUP[2])	9,79	8,80	-1,76	0,94	18,69
Beam-167(T7_BLNÇ_T_LOW[2])	1,05	7,25	0,32	2,03	8,32
Beam-168(MHB_support_1[4])	-2,37	4,53	-1,16	-2,33	7,04
Beam-169(MHB_support_2[2])	1,42	-4,39	-1,31	0,08	5,95
Beam-170(TS_SIS_DIAGN[2])	-3,49	-12,16	-3,67	-0,50	16,19
Beam-171(FBH_T_4[1])	-10,99	4,31	-0,98	-0,46	15,32
Beam-172(HAB_X2,1)	-0,06	-6,53	5,46	0,06	8,57
Beam-173(PEDALBOX_1[2])	0,15	-0,26	1,87	0,61	2,04
Beam-174(SIS_DIAGN_1[2])	-6,72	9,77	6,18	0,32	18,27
Beam-175(MHB_support_1[3])	-1,57	2,52	-3,29	-1,41	5,20
Beam-176(MHB_support_2[1])	-1,40	-4,64	-1,32	0,06	6,18
Beam-177(FBH_DS[2])	0,04	5,64	11,07	0,26	12,47
Beam-178(FBH_T_3[1])	0,20	6,37	-1,63	0,07	6,67
Beam-179(SIS_DIAGN_1[1])	6,75	-9,90	-5,89	0,29	18,27
Beam-180(HARNESS_B_SUP_T[2])	-0,34	-4,41	2,32	0,75	5,26
Beam-181(DIF_SIS_UPPER[1])	1,73	77,82	1,38	3,42	79,77
Beam-182(Front_BulkHead[2])	0,00	-2,25	-7,91	-0,77	8,22
Beam-183(T8_BLNÇ_T_LOW[1])	0,66	-14,33	0,90	-1,93	15,02
Beam-184(HARNESS_B_SUP_F[2])	-1,02	3,00	-2,39	1,44	4,86
Beam-185(Rear_Bulkhead[4])	1,70	-3,23	16,49	-2,55	18,50
Beam-186(Front_Hoop[1])	0,04	-5,25	-6,37	0,07	7,55
Beam-187(SIS_LOWER_2[1])	8,05	-1,45	-3,26	0,51	11,62
Beam-188(SIS_LOWER_2[2])	-8,03	1,39	3,17	0,34	11,49

Continua na página seguinte...

Tabela 6.9 – continuação da página anterior

Nome da Viga	Axial (MPa)	Flexão Dir. 1 (MPa)	Flexão Dir. 2 (MPa)	Torção Máx. (MPa)	Comb. (MPa)
Beam-189(HEADREST_U)	-0,15	-8,48	5,71	-2,16	10,27
Beam-190(PEDALBOX_1[1])	-0,15	1,84	-0,26	0,61	2,01
Beam-191(FH_SUP[1])	-9,81	9,06	-1,68	1,02	18,95
Beam-192(HAB_X2,2)	0,23	-3,57	6,03	-0,90	6,73
Beam-193(30x2 30X2(34)[2])	-0,01	22,94	9,21	-1,46	24,73
Beam-194(Rear_Bulkhead[2])	1,80	8,77	3,98	-2,59	11,24
Beam-195(TRNSV_T2_T3[2])	0,00	0,67	-0,53	-0,02	0,85
Beam-196(MHB_support_1[2])	2,38	1,21	-4,44	-2,26	6,98
Beam-197(FBH_DS[4])	-0,01	-4,91	10,16	0,22	11,29
Beam-198(FBH_T_1[1])	1,95	-1,62	-0,30	0,49	3,59
Beam-199(SIS_UPPER[1])	0,05	-2,03	-7,20	0,67	7,27
Beam-200(30x2 30X2(25))	0,02	-4,26	-4,73	-1,35	6,38
Beam-201(30x2 30X2(43)[2])	0,02	18,48	17,17	-2,32	25,21
Beam-202(TS_VERT_F[2])	1,39	-3,94	4,18	-1,60	7,14
Beam-203(Rear_Bulkhead[3])	-0,20	9,14	-3,56	-1,04	9,55
Beam-204(AC_SIS_LOWER[1])	-8,36	4,30	17,18	1,67	26,07
Beam-205(30x2 30X2(60)[1])	-2,58	-14,36	-1,80	3,52	16,98
Beam-206(30x2 30X2(60)[2])	2,59	14,45	-2,52	3,77	16,92

Bibliografia

- Abbasnia, Reza e Aslam Kassimali (jan. de 1995). «Large deformation elastic-plastic analysis of space frames». Em: *Journal of Constructional Steel Research* 35.3, pp. 275–290. issn: 0143-974X. doi: 10.1016/0143-974x(95)00008-j. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0143-974x\(95\)00008-j](http://dx.doi.org/10.1016/0143-974x(95)00008-j).
- Alijani, A et al. (set. de 2013). «Elasto-plastic pre- and post-buckling analysis of functionally graded beams under mechanical loading». Em: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications* 229.2, pp. 146–165. issn: 2041-3076. doi: 10.1177/1464420713502908. url: <http://dx.doi.org/10.1177/1464420713502908>.
- Argyris, J. H. (1965). «Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements». Em: *Journal of the Royal Aeronautical Society* 69, pp. 801–805. doi: 10.1017/S0368393100009242.
- Argyris, J.H. et al. (nov. de 1982). «Finite element analysis of two- and three-dimensional elasto-plastic frames—the natural approach». Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 35.2, pp. 221–248. issn: 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(82)90135-9. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90135-9](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(82)90135-9).
- Baojun, Yu et al. (2017). «Finite Element Modal Analysis Of FSC Racing Frame». Em: *Proceedings of the 2017 2nd Joint International Information Technology, Mechanical and Electronic Engineering Conference (JIMEC 2017)*. Atlantis Press, pp. 161–165. isbn: 978-94-6252-366-1. doi: 10.2991/jimec-17.2017.36. url: <https://doi.org/10.2991/jimec-17.2017.36>.
- Barsan, G.M. e C.G. Chiorean (set. de 1999). «Computer program for large deflection elasto-plastic analysis of semi-rigid steel frameworks». Em: *Computers & Structures* 72.6, pp. 699–711. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/s0045-7949(98)00310-1. url: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00310-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00310-1).
- Bathe, Klaus-Jürgen e Saïd Bolourchi (jan. de 1979). «Large displacement analysis of three-dimensional beam structures». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.7, pp. 961–986. issn: 1097-0207. doi: 10.1002/nme.1620140703. url: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620140703>.
- Bayo, Eduardo e Alfonso Loureiro (dez. de 2001). «An efficient and direct method for buckling analysis of steel frame structures». Em: *Journal of Constructional Steel Research* 57.12, pp. 1321–1336. issn: 0143-974X. doi: 10.1016/s0143-974x(01)00040-2. url: [http://dx.doi.org/10.1016/S0143-974X\(01\)00040-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0143-974X(01)00040-2).
- Candela, Andrea et al. (abr. de 2024). «Lightweighting in the automotive industry as a measure for energy efficiency: Review of the main materials and methods». en. Em: *Heliyon* 10.8, e29728.
- Chan, Siu Lai (dez. de 1988). «Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method». Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26.12, pp. 2657–2669. issn: 1097-0207. doi: 10.1002/nme.1620261206. url: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620261206>.

- Chandra, Ram, Prem Krishna e D. N. Trikha (abr. de 1990). «Elastic-Plastic Analysis of Steel Space Structures». Em: *Journal of Structural Engineering* 116.4, pp. 939–955. issn: 1943-541X. doi: 10.1061/(asce)0733-9445(1990)116:4(939). url: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1990\)116:4\(939\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:4(939)).
- Chiorean, C.G. (dez. de 2009). «A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D semi-rigid steel frameworks». Em: *Engineering Structures* 31.12, pp. 3016–3033. issn: 0141-0296. doi: 10.1016/j.engstruct.2009.08.003. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.08.003>.
- Clough, R. W. (1960). «The finite element method in plane stress analysis». Em: *Proceedings of the 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation*, pp. 345–378. doi: 10.1061/9780872620097.ch27.
- Cosgun, Turgay e Baris Sayin (mar. de 2014). «Geometric and material nonlinear analysis of three-dimensional steel frames». Em: *International Journal of Steel Structures* 14.1, pp. 59–71. issn: 2093-6311. doi: 10.1007/s13296-014-1007-3. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s13296-014-1007-3>.
- Courant, Richard (1943). «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations». Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49.1, pp. 1–23. doi: 10.1090/S0002-9904-1943-07818-7.
- Crisfield, M.A. (jun. de 1981). «A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”». Em: *Computers & Structures* 13.1–3, pp. 55–62. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(81)90108-5. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5).
- Dassault Systèmes (2024). *SOLIDWORKS Simulation Help: Beam Stress Components*. Disponível na documentação oficial do software. Dassault Systèmes SolidWorks Corporation. Waltham, MA.
- Dong, Shilin, Yang Zhao e Dong Xing (set. de 2012). «Application and development of modern long-span space structures in China». Em: *Frontiers of Structural and Civil Engineering* 6.3, pp. 224–239. issn: 2095-2430. doi: 10.1007/s11709-012-0166-6. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s11709-012-0166-6>.
- Dou, Chao et al. (set. de 2018). «In-plane buckling and design of steel tubular truss arches». Em: *Thin-Walled Structures* 130, pp. 613–621. issn: 0263-8231. doi: 10.1016/j.tws.2018.06.024. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2018.06.024>.
- Ferreira, Antonio J. M. e Nicholas Fantuzzi (2020). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*. Springer International Publishing. isbn: 9783030479527. doi: 10.1007/978-3-030-47952-7. url: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-47952-7>.
- Formula Student (2026). *Formula Student Rules 2026*. 1.0. Commonly used by FS Germany, FS East, FS Austria, and other European competitions. Formula Student. url: <https://www.formulastudent.de/>.
- Greco, M. et al. (ago. de 2006). «Nonlinear positional formulation for space truss analysis». Em: *Finite Elements in Analysis and Design* 42.12, pp. 1079–1086. issn: 0168-874X. doi: 10.1016/j.finel.2006.04.007. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2006.04.007>.
- Gur, Ohad et al. (nov. de 2010). «Design Optimization of a Truss-Braced-Wing Transonic Transport Aircraft». Em: *Journal of Aircraft* 47.6, pp. 1907–1917. issn: 1533-3868. doi: 10.2514/1.47546. url: <http://dx.doi.org/10.2514/1.47546>.
- Heirman, Gert H K e Wim Desmet (ago. de 2010). «Interface reduction of flexible bodies for efficient modeling of body flexibility in multibody dynamics». en. Em: *Multibody Syst. Dyn.* 24.2, pp. 219–234.

- Hori, Akio e Akira Sasagawa (mai. de 2000). «Large Deformation of Inelastic Large Space Frame. II: Application». Em: *Journal of Structural Engineering* 126.5, pp. 589–595. issn: 1943-541X. doi: 10.1061/(asce)0733-9445(2000)126:5(589). url: [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2000\)126:5\(589\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2000)126:5(589)).
- Hsieh, S.-H e G.G Deierlein (1991). «Nonlinear analysis of three-dimensional steel frames with semi-rigid connections». Em: *Computers & Structures* 41.5, pp. 995–1009. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(91)90293-u. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(91\)90293-u](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(91)90293-u).
- Jain, Atishay (abr. de 2014). «Computational analysis and optimization of torsional stiffness of a Formula-SAE chassis». Em: *SAE Technical Paper Series*. Vol. 1. 2014-01-0355. Detroit, Michigan, United States: SAE International.
- Kim, Seung-Eock e Se-Hyu Choi (dez. de 2001). «Practical advanced analysis for semi-rigid space frames». Em: *International Journal of Solids and Structures* 38.50–51, pp. 9111–9131. issn: 0020-7683. doi: 10.1016/s0020-7683(01)00141-x. url: [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00141-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00141-X).
- Kumar, M. D. et al. (2019). «Design Optimization and Simulation Analysis of Formula SAE Frame Using Chromoly Steel». Em: *Journal of Engineering Sciences* 6.2, pp. D9–D13. doi: 10.21272/jes.2019.6(2).d2. url: <http://jes.sumdu.edu.ua>.
- Lee, Kyoung Soo, Sang Eul Han e Taehyo Park (jan. de 2011). «A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping». Em: *Computers & Structures* 89.1–2, pp. 216–233. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/j.compstruc.2010.09.006. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.09.006>.
- Lee, Kyoungsoo, SangEul Han e Jung-Wuk Hong (jan. de 2014). «Post-buckling analysis of space frames using concept of hybrid arc-length methods». Em: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 58, pp. 76–88. issn: 0020-7462. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.003. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.003>.
- Meek, J.L. e S. Loganathan (jan. de 1989). «Geometrically non-linear behaviour of space frame structures». Em: *Computers & Structures* 31.1, pp. 35–45. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(89)90165-x. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90165-X](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(89)90165-X).
- Meek, J.L. e Hoon Swee Tan (dez. de 1984). «Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique». Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 47.3, pp. 261–282. issn: 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(84)90079-3. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90079-3](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(84)90079-3).
- Nain, Raman e Rahul Sharma (2015). «Design and Analysis of Space Frame Tubular Chassis to be used in Formula SAE». Em: *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering* 2.6, pp. 22–25. issn: 2393-8609.
- Ngo-Huu, Cuong, Phu-Cuong Nguyen e Seung-Eock Kim (nov. de 2012). «Second-order plastic-hinge analysis of space semi-rigid steel frames». Em: *Thin-Walled Structures* 60, pp. 98–104. issn: 0263-8231. doi: 10.1016/j.tws.2012.06.019. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2012.06.019>.
- Papadrakakis, M. (jan. de 1981). «Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods». Em: *Computers & Structures* 14.5–6, pp. 393–402. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(81)90059-6. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90059-6](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(81)90059-6).
- Patel, Deep et al. (2022). «Design and FE analysis of chassis for solar powered vehicle». Em: *Materials Today: Proceedings* 62, pp. 1626–1631. issn: 2214-7853. doi: 10.1016/j.matpr.2022.04.137. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.137>.

- Pi, Yong-Lin e Mark Andrew Bradford (ago. de 2003). «Elasto-plastic buckling and post-buckling of arches subjected to a central load». Em: *Computers & Structures* 81.18–19, pp. 1811–1825. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/s0045-7949(03)00204-9. url: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00204-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00204-9).
- Prabhu, T.R., K.P. Prashanth e N. Senthilkumar (2020). «A comprehensive review on natural fiber-reinforced polymer composites: Preparation and properties». Em: *Materials Today: Proceedings* 33, pp. 3043–3049. doi: 10.1016/j.matpr.2020.07.709. url: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.07.709>.
- Riks, E. (1979). «An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems». Em: *International Journal of Solids and Structures* 15.7, pp. 529–551. issn: 0020-7683. doi: 10.1016/0020-7683(79)90081-7. url: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7).
- Riley, William B. e Albert R. George (dez. de 2002). «Design, Analysis and Testing of a Formula SAE Car Chassis». Em: *Proceedings of the 2002 SAE Motorsports Engineering Conference and Exhibition*. SAE Technical Paper Series 2002-01-3300. Warrendale, PA: SAE International.
- Schweighardt, Attila, Balázs Vehovszky e Dániel Feszty (ago. de 2020). «Modal analysis of the tubular space frame of a formula student race car». Em: *MANUF. TECHNOL.* 20.1, pp. 84–91.
- Seelam, Anil Babu, Ayub Khan Aaqif Ahmed e Krishnamurthy H. Sachidananda (nov. de 2020). «Buggy Role Cage – Analysis and Design». Em: *International Journal of Safety and Security Engineering* 10.5, pp. 589–599. issn: 2041-904X. doi: 10.18280/ijssse.100502. url: <http://dx.doi.org/10.18280/ijssse.100502>.
- Sethupathi, P. Baskara et al. (2018). «Design and optimization of FSAE chassis using FEA». Em: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 402.1, p. 012184. doi: 10.1088/1757-899X/402/1/012184.
- Srivastava, Jay Prakash et al. (2021). «Numerical study on strength optimization of Go-Kart roll-cage using different materials and pipe thickness». Em: *Materials Today: Proceedings* 39, pp. 488–492. issn: 2214-7853. doi: 10.1016/j.matpr.2020.08.217. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpr.2020.08.217>.
- Subramanyam, B. et al. (out. de 2016). «Analysis of Formula Student Race Car». Em: *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)* 5.10, pp. 81–84. issn: 2278-0181. doi: 10.17577/IJERTV5IS100046. url: <http://www.ijert.org>.
- Wen, Y., Q. Tan e Z. L. Chen (ago. de 2019). «Qualified Geometric Stiffness for Linear Buckling and Second-Order Nonlinear Analysis of Framed Structures». Em: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 19.08, p. 1950094. issn: 1793-6764. doi: 10.1142/s0219455419500949. url: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219455419500949>.
- Wongchai, Boonthum (mar. de 2020). «Front and side impact analysis of space frame chassis of formula car». Em: *Int. J. GEOMATE* 18.67.
- Yousif, Ismail Abdelrahman, Mohammed Abdelmageed M. Zein e Mohammed Elhadi Ahmed Elsayed (nov. de 2012). «Computational Analysis of a Truss Type Fuselage». Em: *Applied Mechanics and Materials* 225, pp. 183–188. issn: 1662-7482. doi: 10.4028/www.scientific.net/amm.225.183. url: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.225.183>.
- Zheng, Jiellian et al. (set. de 2021). «Innovations in Design, Construction, and Management of Pingnan Third Bridge—The Largest-Span Arch Bridge in the World». Em: *Structural Engineering International* 32.2, pp. 134–141. issn: 1683-0350. doi: 10.1080/10168664.2021.1956399. url: <http://dx.doi.org/10.1080/10168664.2021.1956399>.

Zhong, Zhi-peng, Da-long Ren e Shui Wan (jan. de 2014). «A new numerical method for determining collapse load-carrying capacity of structure made of elasto-plastic material». Em: *Journal of Central South University* 21.1, pp. 398–404. issn: 2227-5223. doi: 10.1007/s11771-014-1953-0. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s11771-014-1953-0>.

