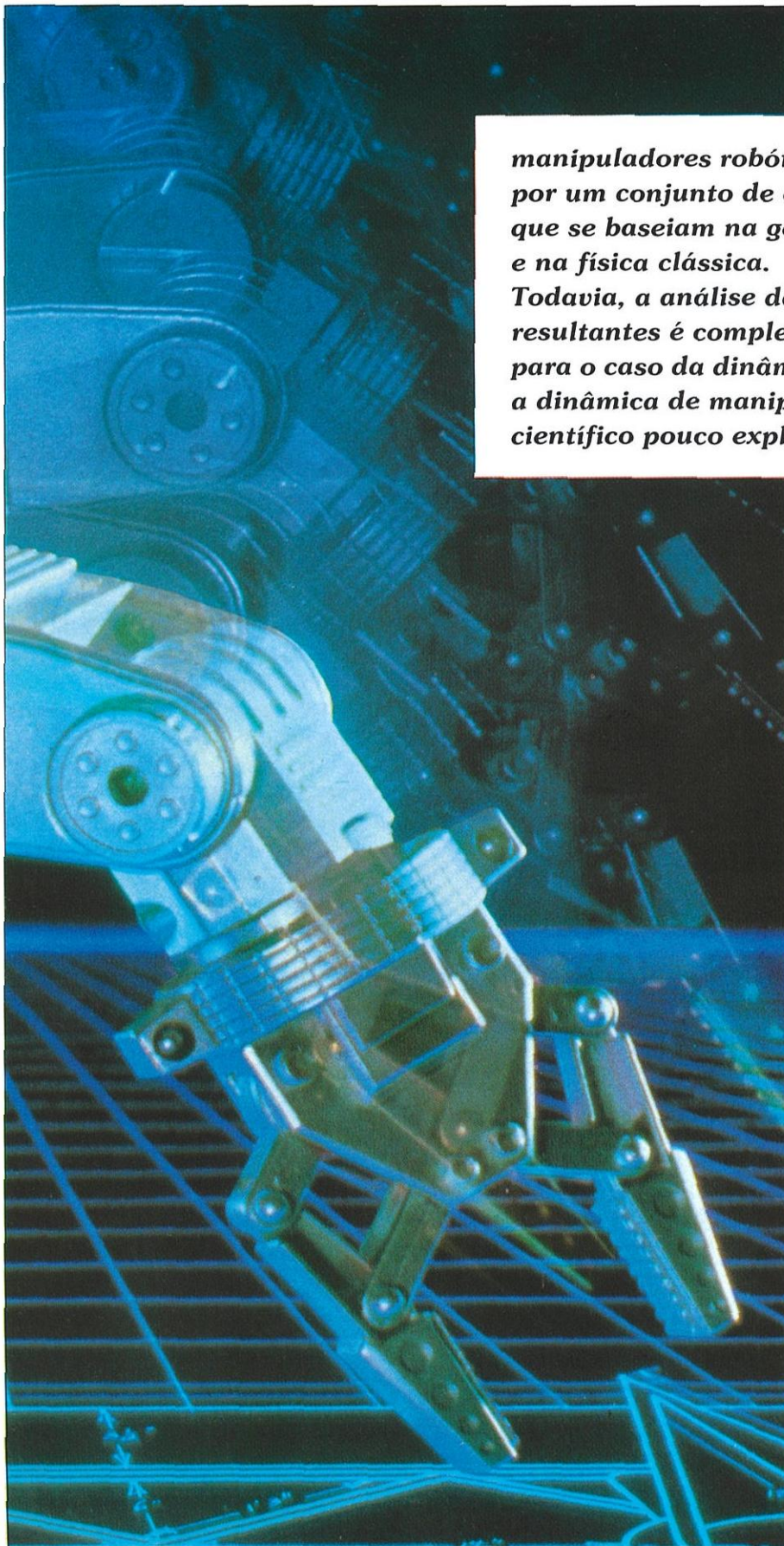




Os fenómenos cinemáticos e dinâmicos que ocorrem nos manipuladores robóticos podem ser descritos por um conjunto de equações diferenciais que se baseiam na geometria euclidiana e na física clássica.

Todavia, a análise das expressões resultantes é complexa, particularmente para o caso da dinâmica. Devido a este facto, a dinâmica de manipuladores é um tema científico pouco explorado e a investigação

efectuada até ao momento tem-se revelado muito limitada.

Este artigo estuda a dinâmica e a sua interligação com a cinemática, apoiado na concepção de um novo modelo estatístico.

Este modelo, desenvolvido segundo uma perspectiva experimentalista, revela-se apropriado ao tratamento numérico de dados por computador e conduz a resultados claros e precisos. Segundo este ponto de vista, demonstram-se as propriedades fundamentais destes sistemas mecânicos e sugerem-se novas pistas para o desenvolvimento de robots mais eficientes.

Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores Robóticos

Alexandra M.S.F. Galhano *
J.A. Tehreiro Machado *



1. Introdução

Os manipuladores robóticos são sistemas mecânicos passíveis de uma modelização com base nas leis da física clássica. Todavia, a complexidade das expressões resultantes torna difícil a análise das propriedades destes sistemas. No caso particular da dinâmica, isto é, na descrição das relações entre forças/binários, posições, velocidades e acelerações, a magnitude das dificuldades encontradas levou a que somente alguns investigadores se tenham debruçado sobre o assunto [1-8] e que o seu estudo esteja, ainda, numa fase preliminar. Assim, pode-se dizer que a caracterização da dinâmica dos manipuladores é um problema ainda em aberto pelo que constitui um tema importante no desenvolvimento da robótica.

Em artigos anteriores [9-13] os autores introduziram a modelização estatística da cinemática de manipuladores robóticos. O modelo estatístico revelou-se computacionalmente eficiente, apropriado no tratamento de dados experimentais tais como no

caso de sinais provenientes de sensores e, acima de tudo, demonstrou conduzir facilmente a conclusões gerais e inequívocas.

O presente artigo estuda a dinâmica de manipuladores robóticos à luz dos novos conceitos de modelização. Tal como já foi estabelecido para a cinemática, adopta-se o *robot 2R* como protótipo de estudo pois alia uma relativa simplicidade com a generalidade do seu modelo, atendendo a que inclui todos os fenómenos dinâmicos que ocorrem em manipuladores mais complexos.

Deste modo, na secção 2 começa-se por definir as variáveis estatísticas fundamentais bem como a estratégia a adoptar no estudo da dinâmica. De facto, a ausência de conhecimento científico nesta área aconselha o estudo, gradual e progressivo, de fenómenos dinâmicos parcelares, ou seja, o estudo de fenómenos restritos, logo mais simples, e a sua integração posterior no estudo da dinâmica na sua totalidade. Assim, sabendo de

antemão da existência de fenómenos dinâmicos parcelares, tais como os efeitos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais, considera-se um estudo preliminar destes fenómenos dinâmicos. Uma vez estabelecido um conhecimento destes fenómenos passa-se a estudar, na secção 3, a dinâmica na sua globalidade. Neste caso, a integração dos estudos parcelares revela algumas dificuldades que são ultrapassadas pela adopção de uma estratégia parcialmente heurística. Este procedimento não desvaloriza a modelização estatística, já que conduz a resultados significativos, mas, antes pelo contrário, demonstra a flexibilidade da nova metodologia. Na secção 4 analisa-se a acção simultânea dos fenómenos cinemáticos e dinâmicos. Aqui avaliam-se os pesos relativos dos dois fenómenos e traçam-se conclusões sobre a sua importância no desenvolvimento e controlo de manipuladores. Complementarmente, abordam-se algumas questões relativas ao planeamento (dinâmico) de trajectórias. A investigação neste ponto [14-16] tem, também, sido muito limitada, todavia, verifica-se que o método estatístico abre novas perspectivas de estudo. Por último, na secção 5 apontam-se as principais conclusões que decorrem do presente estudo.

* Professores Auxiliares
na FEUP/DEEC

2. Sobre a Modelização Estatística da Dinâmica de Manipuladores

A dinâmica (inversa) relaciona as posições, velocidades e acelerações $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$ exigidas ao manipulador no espaço das articulações, com as forças/binários $\{\mathbf{T}\}$ solicitadas aos actuadores das articulações.

Desta maneira, o modelo estatístico deve considerar em primeiro lugar:

- A descrição estatística, isto é, através de funções densidade de probabilidade (f.d.p.'s) apropriadas, do conjunto $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$ de variáveis independentes ou variáveis aleatórias de entrada (v.a.e.'s) da dinâmica.
- A descrição estatística, isto é, através de f.d.p.'s, do conjunto $\{\mathbf{T}\}$ de variáveis dependentes ou variáveis aleatórias de saída (v.a.s.'s) da dinâmica.

Uma vez definidas as variáveis em jogo, deve passar-se, em segundo lugar, ao estabelecimento das relações entre as v.a.e.'s e as v.a.s.'s e, em terceiro lugar, devem analisar-se os respectivos histogramas. No entanto, a dinâmica revela-se bastante mais complexa que a cinemática, o que dificulta o desenvolvimento do estudo nos moldes indicados.

Assim, decidiu-se analisar, numa fase inicial, fenómenos parcelares da dinâmica e integrar, posteriormente, os resultados aquando do estudo da dinâmica na sua globalidade.

Como é sabido, na dinâmica coexistem fenómenos de origem gravitacional, fenómenos que são influenciados pelas velocidades e fenómenos que dependem das acelerações. Deste modo, começa-se por analisar, separadamente, três subsistemas:

- Os fenómenos gravitacionais que estabelecem uma relação do tipo $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{T}$ (i.e. $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e $g \neq 0$)
- Os fenómenos Coriolis/centrípetos que correspondem à relação $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \mapsto \mathbf{T}$ (i.e. $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e $g = 0$)
- Os fenómenos inerciais que obedecem à relação $(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{T}$ (i.e. $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e $g = 0$)

Para uma maior facilidade de interpretação passam a afectar-se as v.a.s.'s $\mathbf{T}$ por um índice indicativo de cada situação. Assim, de acordo com esta notação, as forças/binários dos subsistemas referidos designam-se por $\mathbf{T}_G$, $\mathbf{T}_C$ e $\mathbf{T}_I$, respectivamente.

2.1. Estudo Preliminar dos Fenómenos Gravitacionais, Coriolis/centrípetos e Inerciais

Nesta subsecção inicia-se o estudo das relações $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{T}_G$ (com $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e $g \neq 0$), $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}_C$ (com $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e $g = 0$) e $(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) \rightarrow \mathbf{T}_I$ (com $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e $g = 0$). Numa primeira fase efectua-se algumas experiências, por simulação numérica, a fim de explorar as propriedades dos subsistemas. Numa segunda fase, analisam-se as relações analíticas entre as v.a.e.'s e as v.a.s.'s e comparam-se os resultados obtidos.

Dada a ausência de conhecimento, *a priori*, das características dos fenómenos, e tendo em vista uma análise numérica preliminar dos três subsistemas, definimos as f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} & \text{se } |\mathbf{q}| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |\mathbf{q}| > \pi \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$g_Q(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \dot{\mathbf{q}}_2^2}{2\sigma_Q^2} \right\}$$

$$g_Q(\ddot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{\mathbf{q}}_1^2 + \ddot{\mathbf{q}}_2^2}{2\sigma_Q^2} \right\} \quad (3)$$

A Fig. 1 ilustra as respostas dos subsistemas gravitacional, Coriolis/centrípeto e inercial sujeitos a amostras aleatórias obedecendo a estas f.d.p.'s, com $\sigma_Q = 10 \text{ s}^{-1}$ e $\sigma_{\ddot{Q}} = 10 \text{ s}^{-2}$ nas expressões (2) e (3), respectivamente. Tal como já foi referido para a cinemática, sob o ponto de vista dos actuadores das articulações interessam as f.d.p.'s marginais e não as f.d.p.'s conjuntas.

Nesta perspectiva, observa-se que:

- Nos fenómenos gravitacionais – Os histogramas relativos a $h_{TG1}(T_{G1})$ e $h_{TG2}(T_{G2})$ revelam a existência de máximos para valores elevados (positivos e negativos) e de um mínimo na origem. Isto quer dizer que o manipulador 2R "privilegia" a existência de binários elevados e "evita" situações tais que $\mathbf{T}_G \approx \mathbf{0}$.
- Nos fenómenos Coriolis/centrípetos – Os histogramas de $h_{TC1}(T_{C1})$ e $h_{TC2}(T_{C2})$ mostram um máximo na origem. Ao contrário do que se verificava para os binários gravitacionais, os gráficos mostram que este subsistema "privilegia", desde logo, situações onde $\mathbf{T}_C \approx \mathbf{0}$.
- Nos fenómenos inerciais – Os histogramas relativos a $h_{TI1}(T_{I1})$ e $h_{TI2}(T_{I2})$ revelam um máximo na origem. Assim, verificamos que os fenómenos inerciais ocorrem "preferencialmente" para $\mathbf{T}_I \approx \mathbf{0}$.

Estes resultados dependem das propriedades intrínsecas de cada subsistema e, dado que nos interessam histogramas que mostrem elevada probabilidade na origem e baixa probabilidade nos

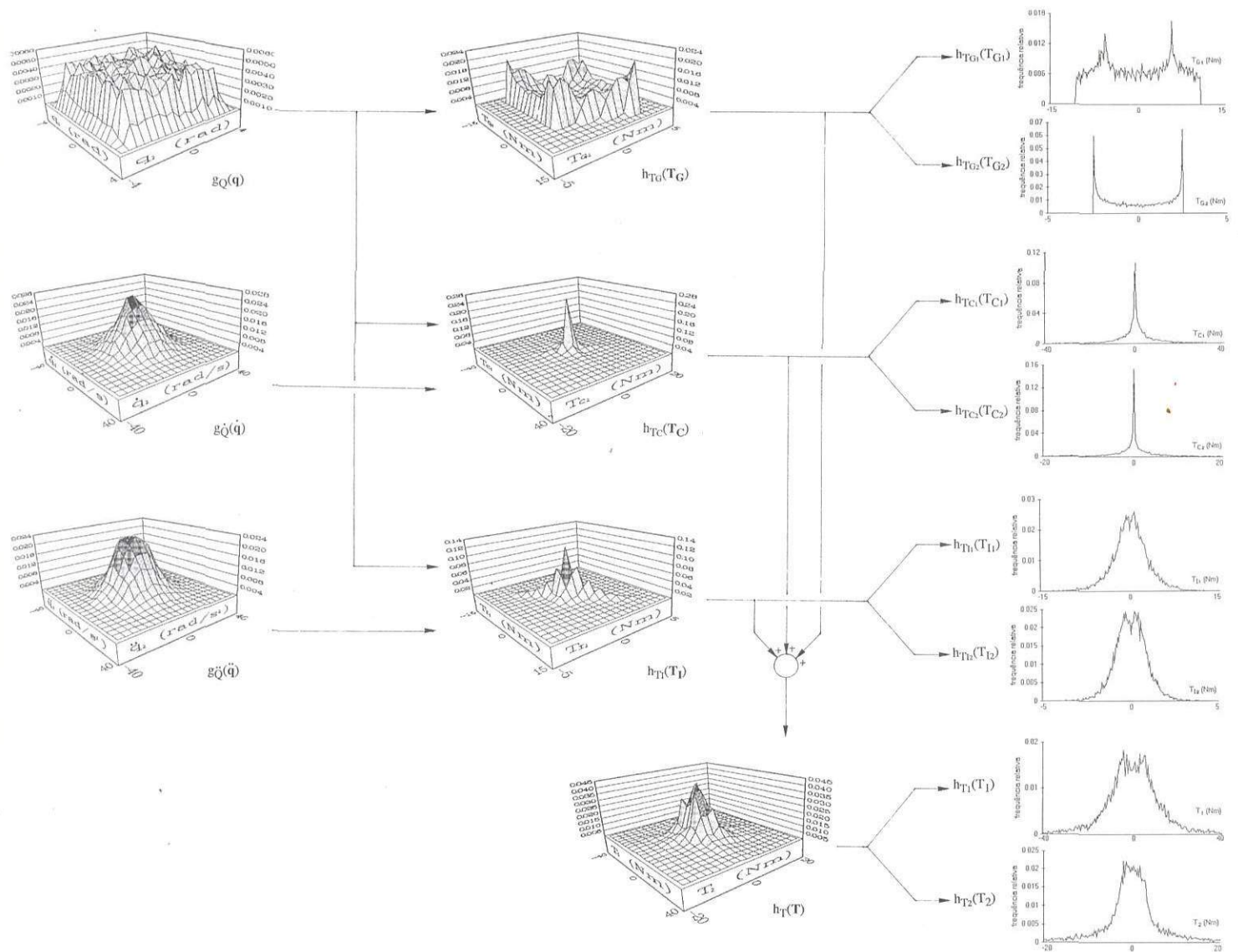


Fig. 1 - Diagrama sinóptico da modelização estatística da dinâmica. Os fenómenos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais encontram-se individualizados. As v.a.e.'s obedecem às f.d.p.'s:

$$g_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} & \text{se } |q| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |q| > \pi \end{cases}$$

$$g_Q(\dot{q}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2} \exp\left\{-\frac{q_1^2 + q_2^2}{2\sigma_Q^2}\right\} \quad (\text{com } \sigma_Q = 10 \text{ s}^{-1})$$

$$g_Q(\ddot{q}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^{*2}} \exp\left\{-\frac{\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2}{2\sigma_Q^{*2}}\right\} \quad (\text{com } \sigma_Q^* = 10 \text{ s}^{-2})$$

extremos, o passo seguinte consiste no estudo das condições a impôr às v.a.e.'s que favorecem esta situação.

O estudo analítico destes fenómenos permite estabelecer as condi-

ções de optimização dos binários solicitados aos actuadores. Assim, estudando as funções de variável aleatória $q \Rightarrow T_G, (q, \dot{q}) \Rightarrow (T_G, T_C)$ e $(q, \dot{q}, \ddot{q}) \Rightarrow (T_G, T_C, T_I)$, onde se consideram as v.a.s.'s auxiliares

T_G e T_G, T_C no segundo e terceiro casos a fim de se manter dimensões semelhantes para os conjuntos de variáveis dependentes e independentes, então é possível escrever:

$$h_{TG}(\mathbf{T}_G) = |J_Q| g_Q[\mathbf{q}(\mathbf{T}_G)] \quad (4a)$$

$$h_{TGTC}(\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C) = |J_{Q\dot{Q}}| g_{Q\dot{Q}}[\mathbf{q}(\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{T}_C)] \quad (4b)$$

$$h_{TGTCII}(\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_I) = |J_{Q\ddot{Q}\ddot{Q}}| g_{Q\ddot{Q}\ddot{Q}}[\mathbf{q}(\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_I), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{T}_C), \ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{T}_I)] \quad (4c)$$

onde os jacobianos são:

$$J_Q = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{T}_G} \quad (5a)$$

$$J_{Q\dot{Q}} = \frac{\partial (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C)} \quad (5b)$$

$$J_{Q\ddot{Q}\ddot{Q}} = \frac{\partial (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{T}_G, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_I)} \quad (5c)$$

Recorrendo ao modelo dinâmico clássico verifica-se que:

$$J_Q = \{[m_1 r_1 + (m_0 + m_2) 1_1] (m_2 r_2 + m_0 1_2) g^2 S_1 S_{12}\}^{-1} \quad (6a)$$

$$J_{Q\dot{Q}} = J_Q J_{\dot{Q}} = J_Q \{[2 1_1 A_2 S_2]^2 \dot{q}_1 \dot{q}_{12}\}^{-1} \quad (6b)$$

$$J_{Q\ddot{Q}\ddot{Q}} = J_{Q\dot{Q}} J_{\ddot{Q}} = J_{Q\dot{Q}} \{[J_1 + (m_0 + m_2) 1_1^2] (J_2 + m_0 1_2^2) - (1_1 A_2 C_2)^2\}^{-1} \quad (6c)$$

sendo o momento estático do segundo elo:

$$A_2 = m_2 r_2 + m_0 1_2 \quad (6d)$$

Estas expressões revelam que:

- *Nos fenómenos gravitacionais* – A maximização de J_Q estipula que $g_Q(\mathbf{q})$ deve ter máximos em $q_1 = \{0, \pm\pi\}$ ou $q_{12} = \{0, \pm\pi\}$ e mínimos em $q_1 = \pm\pi/2$ ou $q_{12} = \pm\pi/2$. Todavia, a "excitação" do subsistema por uma f.d.p. de acordo com estas directrizes origina histogramas de $\mathbf{T}_G$ com picos longe da origem. De facto, conforme sugere a Fig. 1, neste caso a maximização de J_Q conduz, no limite, à criação de impulsos de Dirac nos histogramas $h_{TG1}(\mathbf{T}_{G1})$ e $h_{TG2}(\mathbf{T}_{G2})$ que estão centrados em valores elevados, logo ao contrário do que seria de desejar. Consequentemente, para os binários

gravitacionais, a situação inversa, ou seja, a minimização de J_Q , é a condição que minimiza as exigências colocadas aos actuadores. Assim, a consideração de f.d.p.'s $g_Q(\mathbf{q})$ que estabeleçam máximos em $q_1 = \pm\pi/2$ e $q_{12} = \pm\pi/2$ e mínimos em $q_1 = \{0, \pm\pi\}$ e $q_{12} = \{0, \pm\pi\}$, corresponde a minimizar solicitações sobre $\mathbf{T}_G$.

- *Nos fenómenos Coriolis/centrípetos* – A maximização de $J_{Q\dot{Q}}$ implica que $g_{Q\dot{Q}}(\mathbf{q})$ deve ter máximos em $q_2 = \{0, \pm\pi\}$. Conforme aponta a Fig. 1, no limite esta condição conduz a histogramas $h_{TC1}(\mathbf{T}_{C1})$ e $h_{TC2}(\mathbf{T}_{C2})$ correspondentes a impulsos de Dirac centrados na origem. Por outro lado, dado que não ocor-

rem extremos relativos a $\dot{\mathbf{q}}$, não é possível apontar condições relativas a classes de f.d.p.'s $g_{\dot{Q}}(\dot{\mathbf{q}})$ óptimas.

- *Nos fenómenos inerciais* – A expressão de $J_{Q\ddot{Q}\ddot{Q}}$ revela a existência de máximos em $q_2 = \{0, \pm\pi\}$ e de mínimos em $q_2 = \pm\pi/2$. O estudo experimental de cada um destes extremos demonstrou que, f.d.p.'s $g_Q(\mathbf{q})$ com máximos em $q_2 = \pm\pi$ e mínimo em $q_2 = 0$ são, na realidade, aquelas que produzem histogramas $h_{TI1}(\mathbf{T}_{I1})$ e $h_{TI2}(\mathbf{T}_{I2})$ óptimos. Por outro lado, não existem em J_Q extremos relativos a $\ddot{\mathbf{q}}$, pelo que não é possível definir classes de f.d.p.'s $g_{\ddot{Q}}(\ddot{\mathbf{q}})$ óptimas.

2.2. Comparação dos Fenómenos Gravitacionais, Coriolis/centrípetos e Inerciais

Esta subsecção compara as propriedades dos subsistemas $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{T}_G$, $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Rightarrow \mathbf{T}_C$ e $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Rightarrow \mathbf{T}_I$. Assim, define-se um conjunto de f.d.p.'s para as v.a.e.'s de acordo com as conclusões da subsecção anterior, de seguida "excitam-se" numericamente os subsistemas referidos e, por último, analisam-se os histogramas obtidos. Tendo em vista uma condensação dos resultados adopta-se, como já se fez para a cinemática, o interpercentil de 95% como índice das solicitações de binários.

De acordo com a estratégia estabelecida, decidiu-se estudar o efeito das classes de f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 |S_1 S_{12}|^K \quad (7)$$

$$g_{Q\dot{Q}}(\mathbf{q}) = \chi |C_2|^K \quad (8)$$

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |\text{SEN}(q_2/2)|^K \quad (9)$$

onde $K = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } K = 1 \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{2\pi} & \text{se } K = 2; 4; 6 \dots \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots K}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots K-1} \cdot \frac{1}{4} & \text{se } K = 3; 5; 7 \dots \end{cases} \quad (10)$$

Estas expressões correspondem a classes de f.d.p.'s que optimizam os fenómenos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais, respectivamente. A Fig. 2 mostra as respostas de cada um destes subsistemas quando sujeitos às respectivas f.d.p.'s óptimas (com $K = 3$) e mantendo as mesmas exigências de $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$ (i.e., $\sigma_{\dot{\mathbf{q}}} = 10 \text{ s}^{-1}$ em (2) e $\sigma_{\ddot{\mathbf{q}}} = 10 \text{ s}^{-2}$ em (3)). Comparando estes resultados com os gráficos da Fig. 1 verifica-se, facilmente, que existe uma diminuição das exigências sobre os binários. Por outro lado, antes de prosseguir a análise dos resultados, vamos, ainda, considerar duas f.d.p.'s suplementares:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |S_2|^K \quad (11)$$

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 |S_1 S_2|^K \quad (12)$$

para $K = 0, 1, 2, \dots$

No primeiro caso, tem-se uma f.d.p. que optimiza a cinemática, enquanto que no segundo caso, se estabelece um compromisso entre a optimização da cinemática e a optimização dos fenómenos gravitacionais. Como é óbvio, nesta secção não se encontram em estudo quaisquer fenómenos cinemáticos pelo que poderá parecer de pouca relevância a consideração destas f.d.p.'s. No entanto, o seu estudo tem importância na preparação da secção 4, onde se irão considerar, simultaneamente, os fenómenos cinemáticos e dinâmicos.

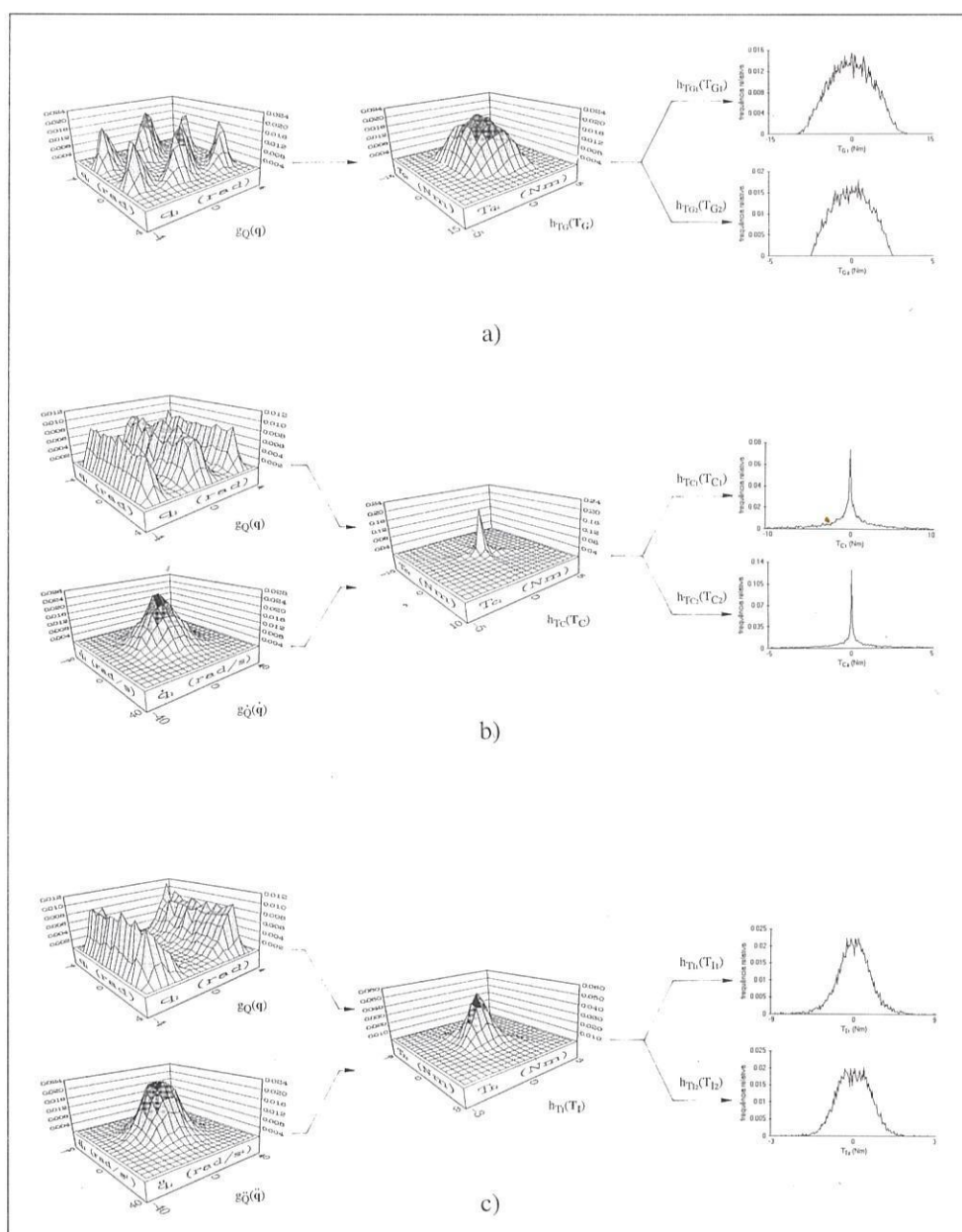


Fig. 2 - Diagrama sinóptico da modelização dos subsistemas dinâmicos:

a) gravitacional, sujeito à f.d.p. $g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 |S_1 S_{12}|$
b) Coriolis/centrípeto, sujeito às f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |C_2|^3$$

$$g_{\dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{q}}}^2} \exp \left\{ -\frac{\dot{\mathbf{q}}_1^2 + \dot{\mathbf{q}}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{q}}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\dot{\mathbf{q}}} = 10 \text{ s}^{-1})$$

c) inercial, sujeito à f.d.p.'s:

$$g_Q(\mathbf{q}) = \chi |\text{SEN}(q_2/2)|^3$$

$$g_{\ddot{\mathbf{q}}}(\ddot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{q}}}^2} \exp \left\{ -\frac{\ddot{\mathbf{q}}_1^2 + \ddot{\mathbf{q}}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{q}}}^2} \right\} \quad (\text{com } \sigma_{\ddot{\mathbf{q}}} = 10 \text{ s}^{-2})$$

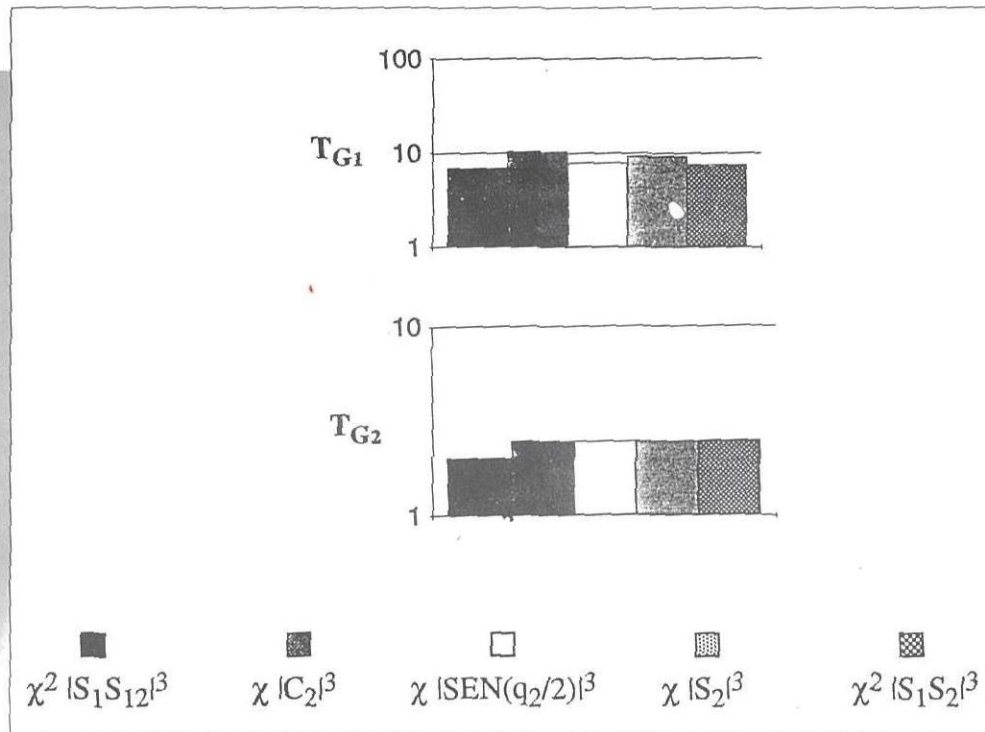


Fig. 3

Comparação do interpercentil de 95% de T_{G1} e T_{G2} com q sujeito às cinco f.d.p.'s (7) a (12).

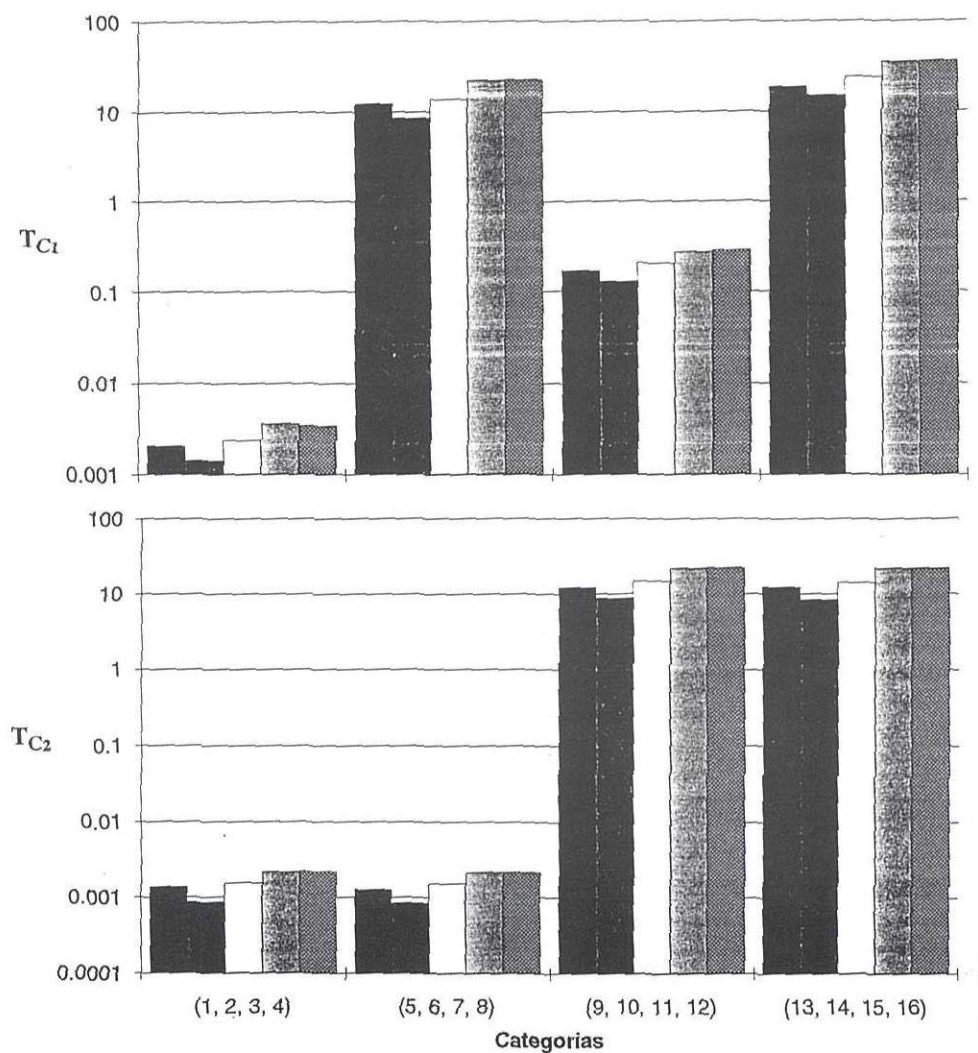


Fig. 4

Comparação do interpercentil de 95% de T_{C1} e T_{C2} com q e q sujeitos às f.d.p.'s (7) a (12) e (2), respectivamente, para as condições indicadas na Tabela 1.

Categorias	$\sigma \dot{q}_1$	$\sigma \dot{q}_2$	$\sigma \ddot{q}_1$	$\sigma \ddot{q}_2$
1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0.1	10
3	0.1	0.1	10	0.1
4	0.1	0.1	10	10
5	0.1	10	0.1	0.1
6	0.1	10	0.1	10
7	0.1	10	10	0.1
8	0.1	10	10	10
9	10	0.1	0.1	0.1
10	10	0.1	0.1	10
11	10	0.1	10	0.1
12	10	0.1	10	10
13	10	10	0.1	0.1
14	10	10	0.1	10
15	10	10	10	0.1
16	10	10	10	10

Tabela 1 - Exigências de $\dot{q}$ e $\ddot{q}$

A Fig. 3 mostra o desempenho do subsistema gravitacional sujeito ao estímulo das cinco f.d.p.'s indicadas. Como seria de esperar, verifica-se que a f.d.p. (7) é aquela que minimiza as exigências.

No tocante ao subsistema Coriolis/centrípeto o seu estudo requer a definição de $g_0(\mathbf{q})$. Assim, considerando a expressão (2) e as categorias de exigências indicadas na Tabela 1, representam-se na Fig. 4 os resultados obtidos. Para este subsistema conclui-se que:

- Como seria de esperar, a f.d.p. (8), é aquela que dá origem a melhores resultados.

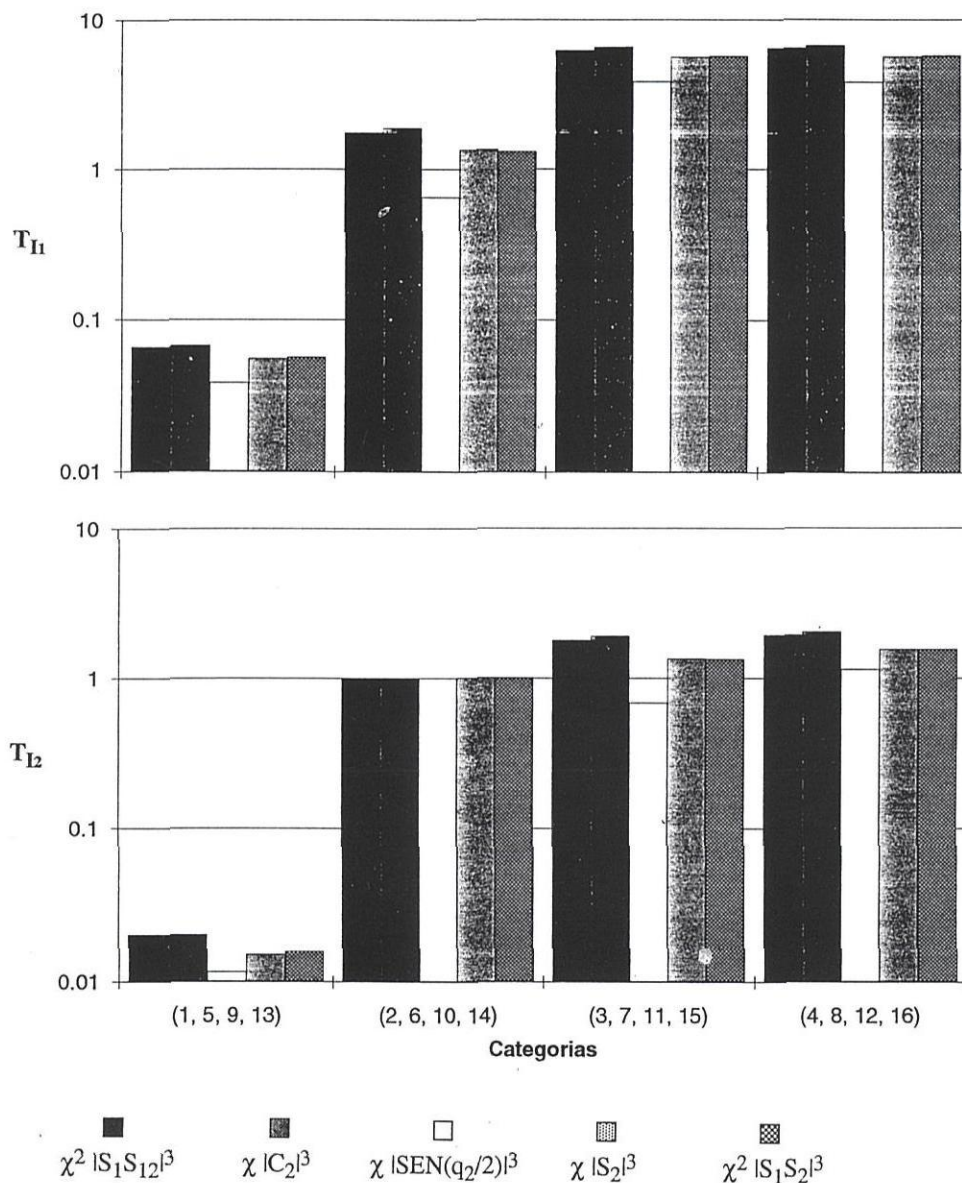


Fig. 5
Comparação do interpercentil de 95% de T_{11} e T_{12} com q e $\dot{q}$ sujeitos às f.d.p.'s (7) a (12) e (3), respectivamente, para as condições indicadas na Tabela 1.

- T_{C1} depende quer de $\dot{q}_1$ quer de $\dot{q}_2$; contudo, $\dot{q}_2$ tem um efeito mais pronunciado do que $\dot{q}_1$.
- T_{C2} depende somente de $\dot{q}_1$.

O subsistema inercial está ilustrado na Fig. 5. Neste caso considerou-se $\ddot{q}$ caracterizado pela f.d.p. (3) sujeita às categorias indicadas na Tabela 1. Dos gráficos podemos concluir que:

- A f.d.p. (9) é aquela que apresenta melhores resultados.
- T_{11} e T_{12} dependem quer de $\ddot{q}_1$ quer de $\ddot{q}_2$.
- Para valores elevados de $\ddot{q}_1$, a variável $\ddot{q}_2$ tem pouca influência sobre T_1 .

3. A Dinâmica de Manipuladores

Como já foi referido anteriormente, os efeitos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais são fenómenos parcelares que compõem a dinâmica.

Na realidade, sabe-se que, em geral, os binários solicitados aos actuadores das articulações vêm dados pela expressão:

$$T = T_G + T_C + T_I \quad (13)$$

Assim, interessa avaliar o efeito conjunto dos três fenómenos, pelo que se torna necessário integrar os resultados particulares obtidos para cada subsistema.

Dado que, neste caso, se tem a relação $(q, \dot{q}, \ddot{q}) \Rightarrow T$, conclui-se que qualquer expressão conducente à optimização de T terá que envolver as variáveis q , $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ interligadas pelos parâmetros característicos do braço (comprimentos, massas, inércias, etc.). Por outras palavras, para um robot com n graus de liberdade (g.d.l.) a optimização estatística da dinâmica envolveria o cálculo de um jacobiano de ordem $3n$.

Tendo em vista ultrapassar cálculos laboriosos e, acima de tudo, conducentes a expressões difíceis de analisar, entendeu-se ser mais apropriado desenvolver uma metodologia de trabalho mais consentânea com o espírito "experimentalista" da modelização estatística. Deste modo, decidiu-se avaliar, numericamente, o peso relativo dos três subsistemas. No caso de algum subsistema ser preponderante numa dada situação, então é lícito estender as conclusões estabelecidas do fenómeno parcelar (T_G , T_C ou T_I) para o fenómeno global (T). Trata-se de

uma estratégia heurística, logo aproximada, contudo, é intuitiva e, como iremos ver, conduz a resultados claros e imediatos.

Na perspectiva de experimentação numérica de integração dos resultados parcelares, "excitou-se" a dinâmica (total) com as f.d.p.'s $g_Q(q)$, $g_Q(\dot{q})$ e $g_Q(\ddot{q})$ estabelecidas anteriormente de acordo com o padrão representado na Fig. 6.

Os histogramas de T_1 e T_2 , condensados através do interpercentil de 95%, estão representados na Fig. 7, para dezasseis categorias de exigências de $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ (Tabela 1). A partir dos gráficos pode concluir-se desde logo que:

- T_1 depende fortemente de $\dot{q}_2$ e, em contrapartida, T_2 depende fortemente de $\dot{q}_1$.
- T_1 e T_2 são pouco sensíveis em relação a $\ddot{q}$.

Por outro lado, quando se estuda a influência de $g_Q(q)$ verifica-se que:

- As f.d.p.'s (11) e (12) traduzem configurações pouco apropriadas à optimização da dinâmica. Este resultado era previsível já que, neste conjunto de experiências, não está incluído qualquer fenómeno cinemático.

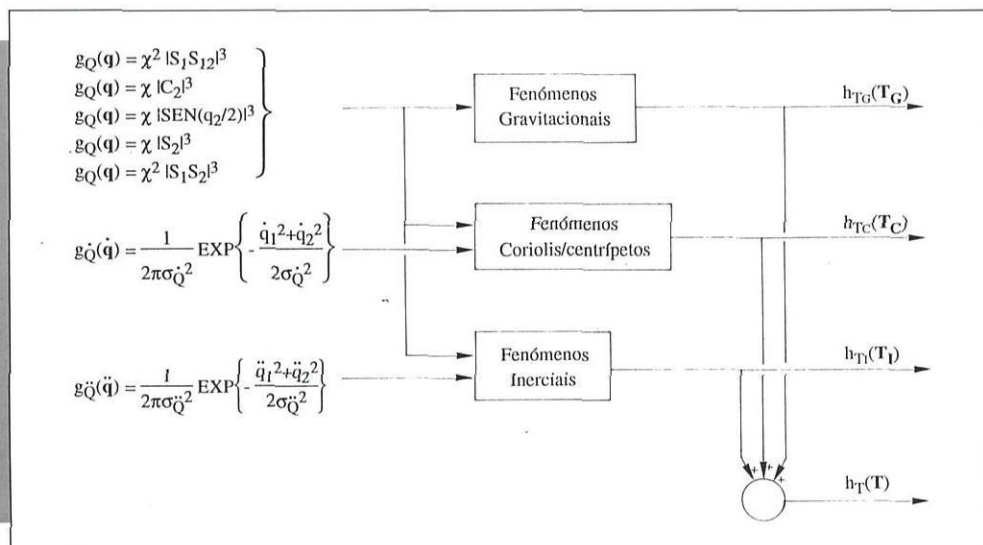


Fig. 6

Padrão de excitação da dinâmica pelas v.a.e.'s q , $\dot{q}$ e $\ddot{q}$.

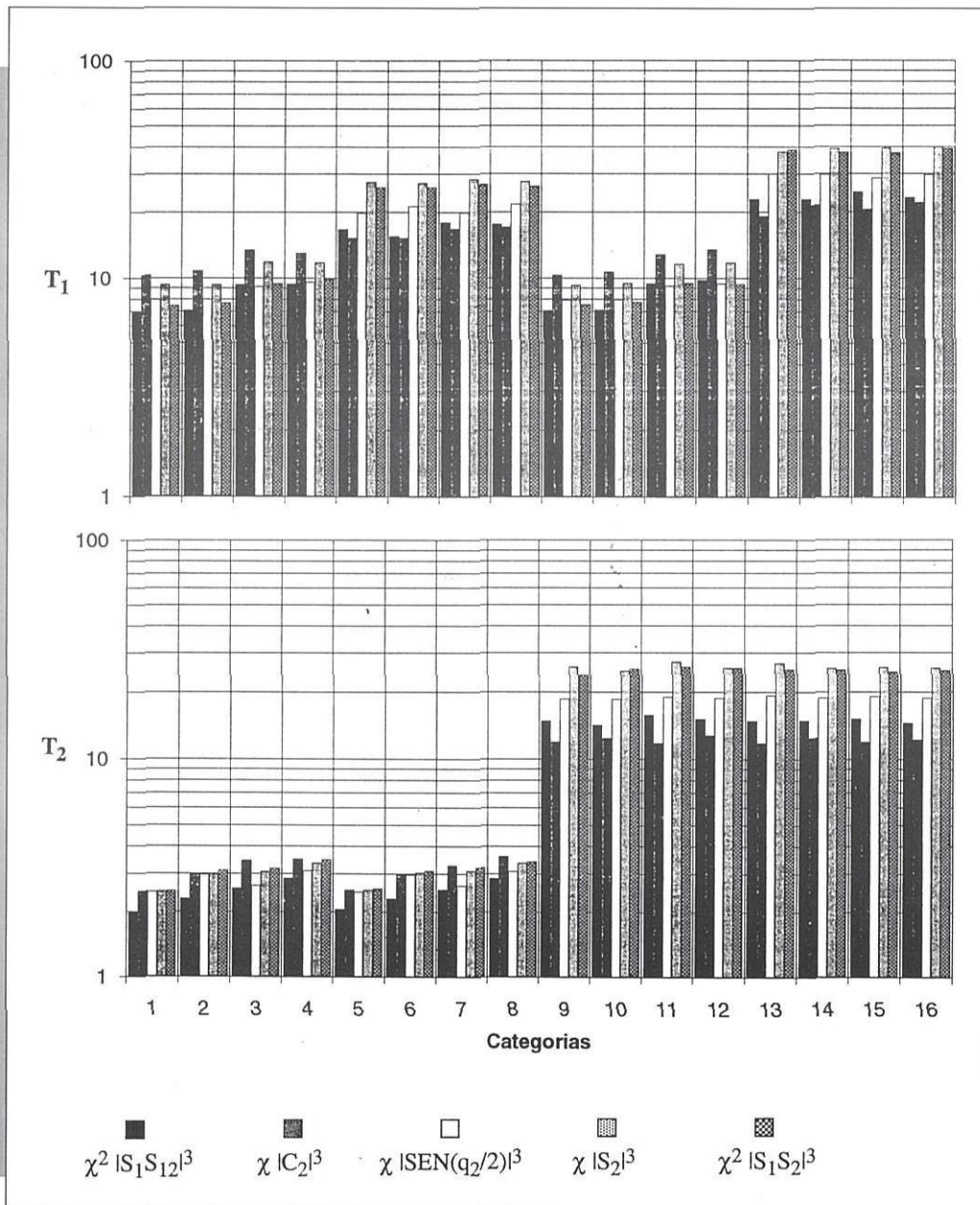


Fig. 7

Comparação do interpercentil de 95% de T_1 e T_2 para o sistema dinâmico com $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ sujeitos às f.d.p.'s (7) a (12), (2) e (3), respectivamente, de acordo com as dezasseis categorias de exigências indicadas na Tabela 1.

- As f.d.p.'s (7), (8) e (9) optimizam situações onde predominam os fenómenos gravitacionais, Coriolis/centrípetos e inerciais, respectivamente, o que está de acordo com o estudo anterior.
- Os fenómenos gravitacionais têm sempre um peso significativo nos binários totais.
- A consideração de uma expressão óptima para $g_0(q)$, que optimizasse simultaneamente todas as variáveis em jogo, traria ganhos adicionais pouco relevantes, já que a dinâmica mani-

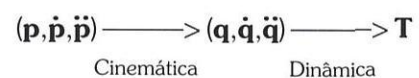
festa pouca sensibilidade às diferentes f.d.p.'s (7), (8) e (9).

Em resumo, o estudo estatístico revela que a natureza multidimensional da dinâmica, onde coexistem fenómenos de natureza diversa, afasta o aparecimento de configurações nitidamente óptimas.

Assim, uma vez que a dinâmica só manifesta uma sensibilidade assinalável relativamente a exigências em $\ddot{q}$ ou aos fenómenos gravitacionais, resta encontrar em que medida estas propriedades são compatíveis com os fenómenos cinemáticos.

4. O Sistema Cinemático-Dinâmico de Manipuladores

Nesta secção avalia-se o peso relativo, isto é estuda-se a acção simultânea, dos sistemas cinemático e dinâmico, sistema que passaremos a designar por cinemático-dinâmico. Devido à inclusão da cinemática torna-se necessário redefinir os conjuntos das v.a.e.'s e das v.a.s.'s de acordo com o diagrama:



Assim, deve considerar-se a descrição estatística, ou seja através de f.d.p.'s, das variáveis:

- $\{p, \dot{p}, \ddot{p}\}$ – V.a.e.'s correspondentes às posições, velocidades e acelerações solicitadas aos manipuladores no espaço operacional.
- $\{T\}$ – V.a.s.'s correspondentes às forças/binários desenvolvidos pelos actuadores nas articulações em resposta às exigências.

Dado que o modelo clássico que descreve o sistema cinemático-dinâmico é complexo, entendeu-se ser conveniente investigar as propriedades através de um estudo puramente numérico e experimental. Nesta ordem de ideias, excitou-se o sistema com uma amostra em $\dot{p}$ e $\ddot{p}$ obedecendo às f.d.p.'s gaussianas:

$$f_p(\dot{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^2} \exp\left\{-\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_p^2}\right\} \quad (14)$$

$$g_p(\ddot{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^2} \exp\left\{-\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_p^2}\right\} \quad (15)$$

de acordo com as exigências referidas na Tabela 2. No tocante a p decidiu-se investigar os desempenhos das cinco f.d.p.'s (expressões 7 a 12) já consideradas no estudo da dinâmica.

Estas expressões estão definidas no espaço das articulações, pelo que, no caso presente, é necessário redefini-las no espaço operacional usando a relação:

$$f_p(p) = |J_Q| g_Q(q) \quad (16a)$$

$$J_Q = \frac{\partial q}{\partial p} \quad (16b)$$

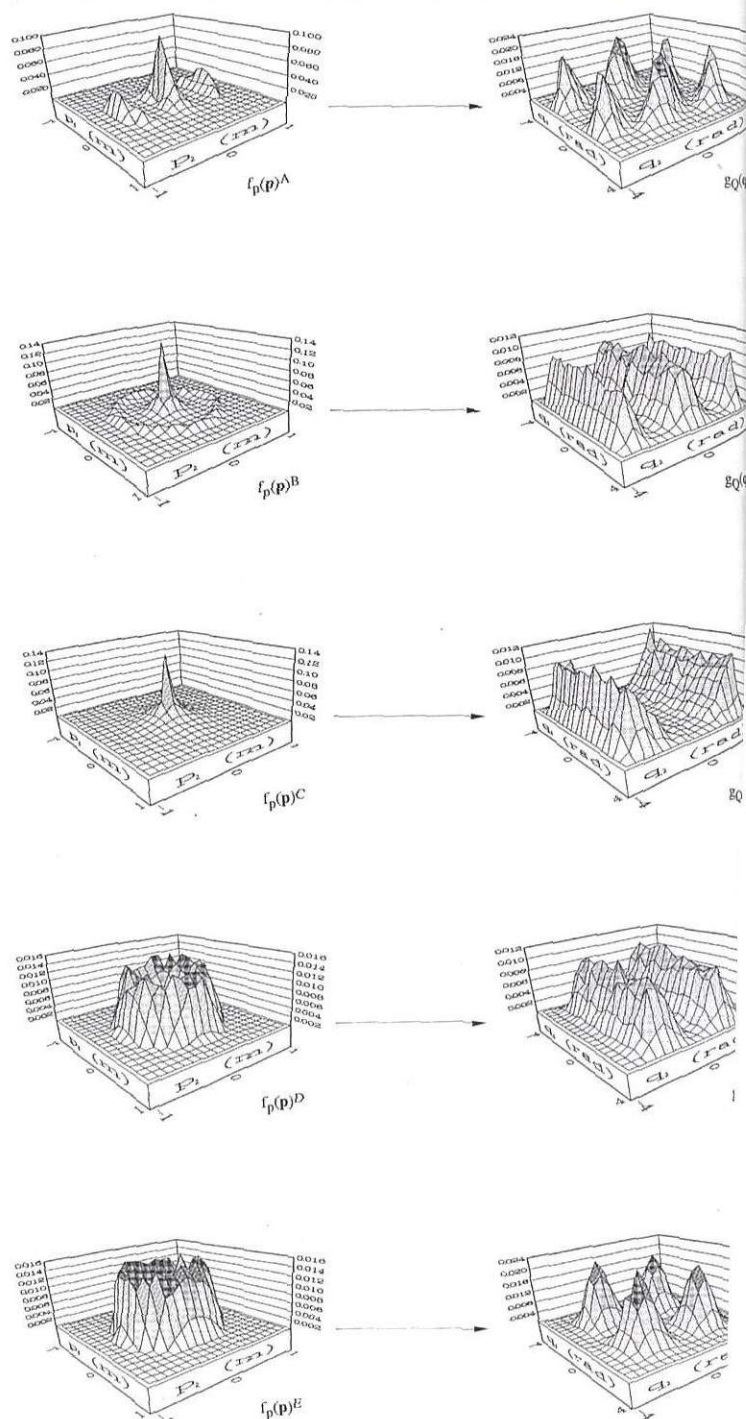
Categorias	$\sigma_{\dot{p}}$	$\sigma_{\ddot{p}}$
1	0.1	0.1
2	0.1	1
3	0.1	10
4	1	0.1
5	1	1
6	1	10
7	10	0.1
8	10	1
9	10	10

Tabela 2 - Exigências de $\dot{p}$ e $\ddot{p}$

No entanto, as expressões analíticas resultantes são muito complexas pelo que, nos limitaremos a designá-las simbolicamente de acordo com o diagrama:

Fig. 8

Representação no espaço operacional e no espaço das articulações das cinco f.d.p.'s das posições.



Espaço Operacional	Cinemática inversa	Espaço das Articulações
$f_p(\mathbf{p})^A$	----->	$g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 S_1 S_{12} ^3$
$f_p(\mathbf{p})^B$	----->	$g_Q(\mathbf{q}) = \chi C_2 ^3$
$f_p(\mathbf{p})^C$	----->	$g_Q(\mathbf{q}) = \chi SEN(q_2/2) ^3$
$f_p(\mathbf{p})^D$	----->	$g_Q(\mathbf{q}) = \chi S_2 ^3$
$f_p(\mathbf{p})^E$	----->	$g_Q(\mathbf{q}) = \chi^2 S_1 S_2 ^3$

A Fig. 8 mostra, graficamente, as propriedades destas f.d.p.'s. Uma vez definidas as f.d.p.'s das v.a.e.'s $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$ e $\ddot{\mathbf{p}}$ podemos excitar o siste-

ma cinemático-dinâmico e analisar as v.a.s.'s $\mathbf{T}$, conforme representado na Fig. 9. A condensação dos histogramas de T_1 e T_2 através

do interpercentil de 95% proporciona os gráficos da Fig. 10. Estes resultados permitem concluir que:

- Para valores baixos de $\dot{\mathbf{p}}$ e $\ddot{\mathbf{p}}$ os binários gravitacionais são a componente predominante.
- Solicitações sobre $\ddot{\mathbf{p}}$ têm uma influência muito menos pronunciada que solicitações sobre $\dot{\mathbf{p}}$. De facto, enquanto que $\ddot{\mathbf{p}}$ influencia somente $\ddot{\mathbf{q}}$ e, consequentemente $\mathbf{T}_I$, $\dot{\mathbf{p}}$ tem influência quer sobre $\ddot{\mathbf{q}}$ quer sobre $\dot{\mathbf{q}}$ ou seja, condiciona simultaneamente $\mathbf{T}_C$ e $\mathbf{T}_I$.

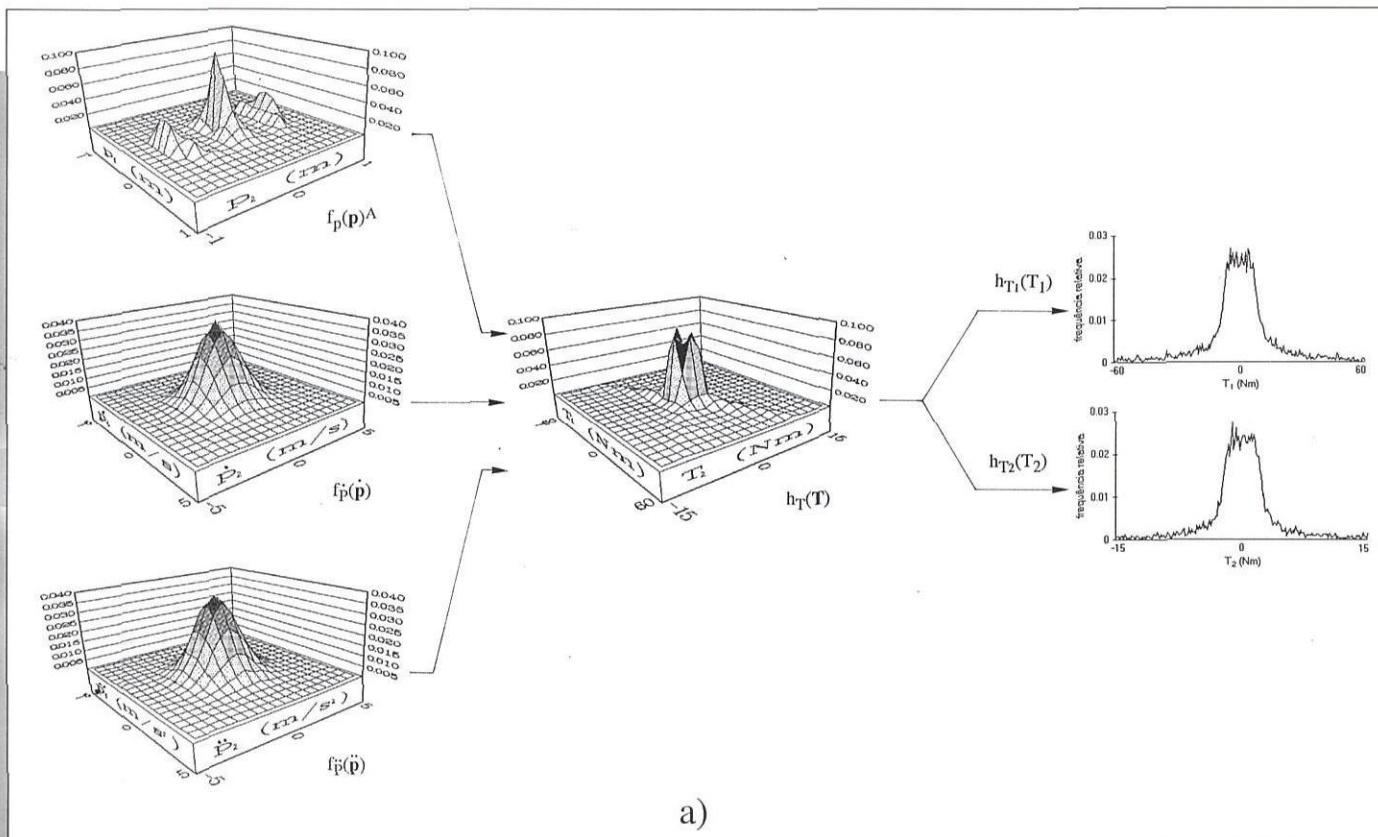


Fig. 9

Diagrama sinóptico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s das posições:

a) $f_p(\mathbf{p})^A$ b) $f_p(\mathbf{p})^B$ c) $f_p(\mathbf{p})^C$ d) $f_p(\mathbf{p})^D$ e) $f_p(\mathbf{p})^E$
e às f.d.p.'s:

$$f_{\dot{\mathbf{p}}}(\dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2} \exp\left\{-\frac{\dot{\mathbf{p}}_1^2 + \dot{\mathbf{p}}_2^2}{2\sigma_{\dot{\mathbf{p}}}^2}\right\} \quad (\text{com } \sigma_{\dot{\mathbf{p}}} = 1 \text{ s}^{-1})$$

$$f_{\ddot{\mathbf{p}}}(\ddot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2} \exp\left\{-\frac{\ddot{\mathbf{p}}_1^2 + \ddot{\mathbf{p}}_2^2}{2\sigma_{\ddot{\mathbf{p}}}^2}\right\} \quad (\text{com } \sigma_{\ddot{\mathbf{p}}} = 1 \text{ s}^{-2})$$

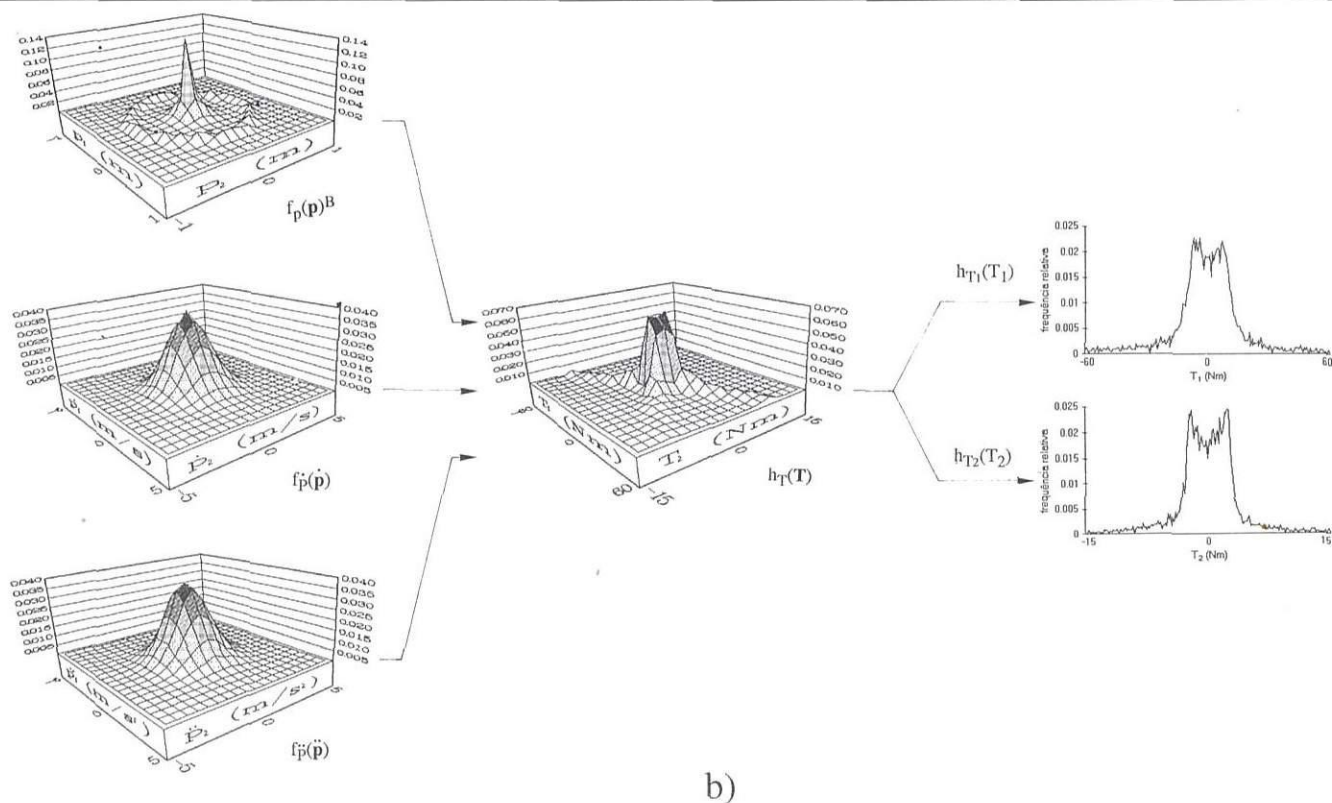


Fig. 9

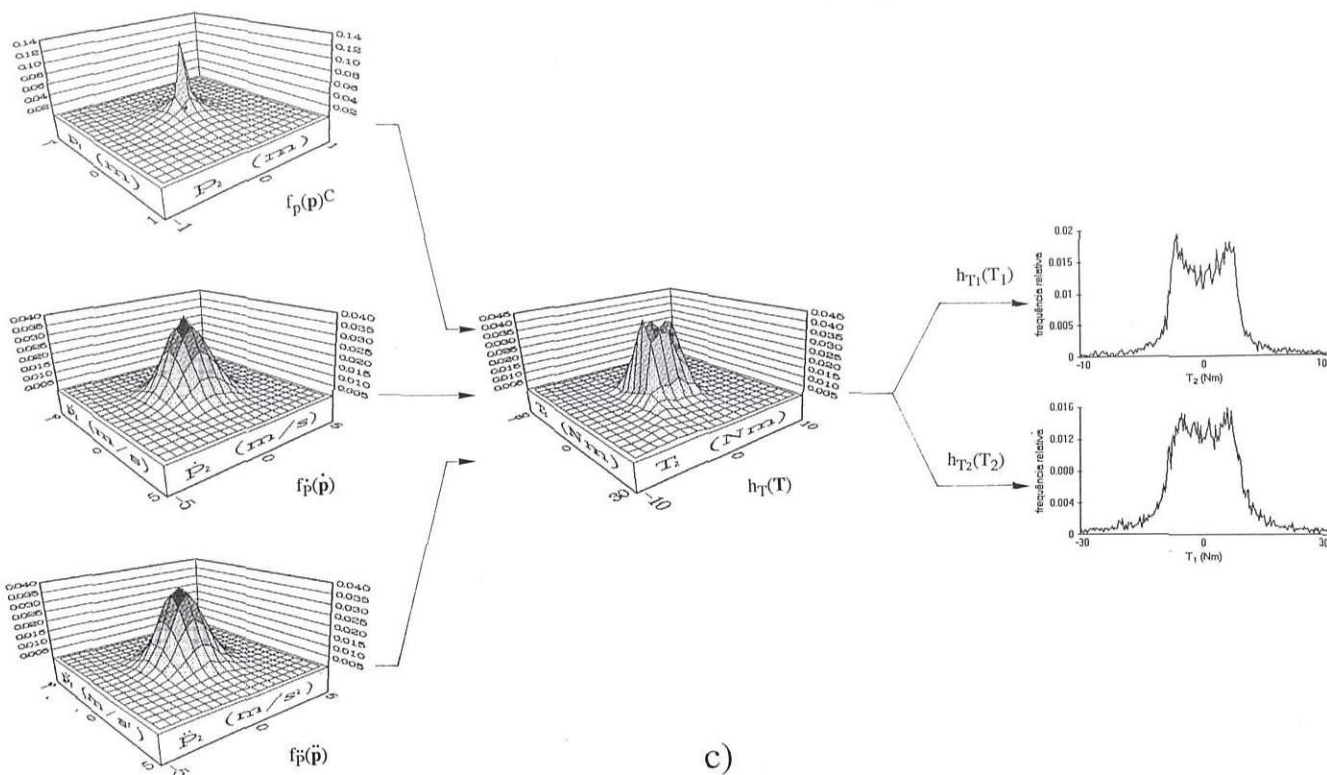
Diagrama sinóptico da modelização do sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s das posições:

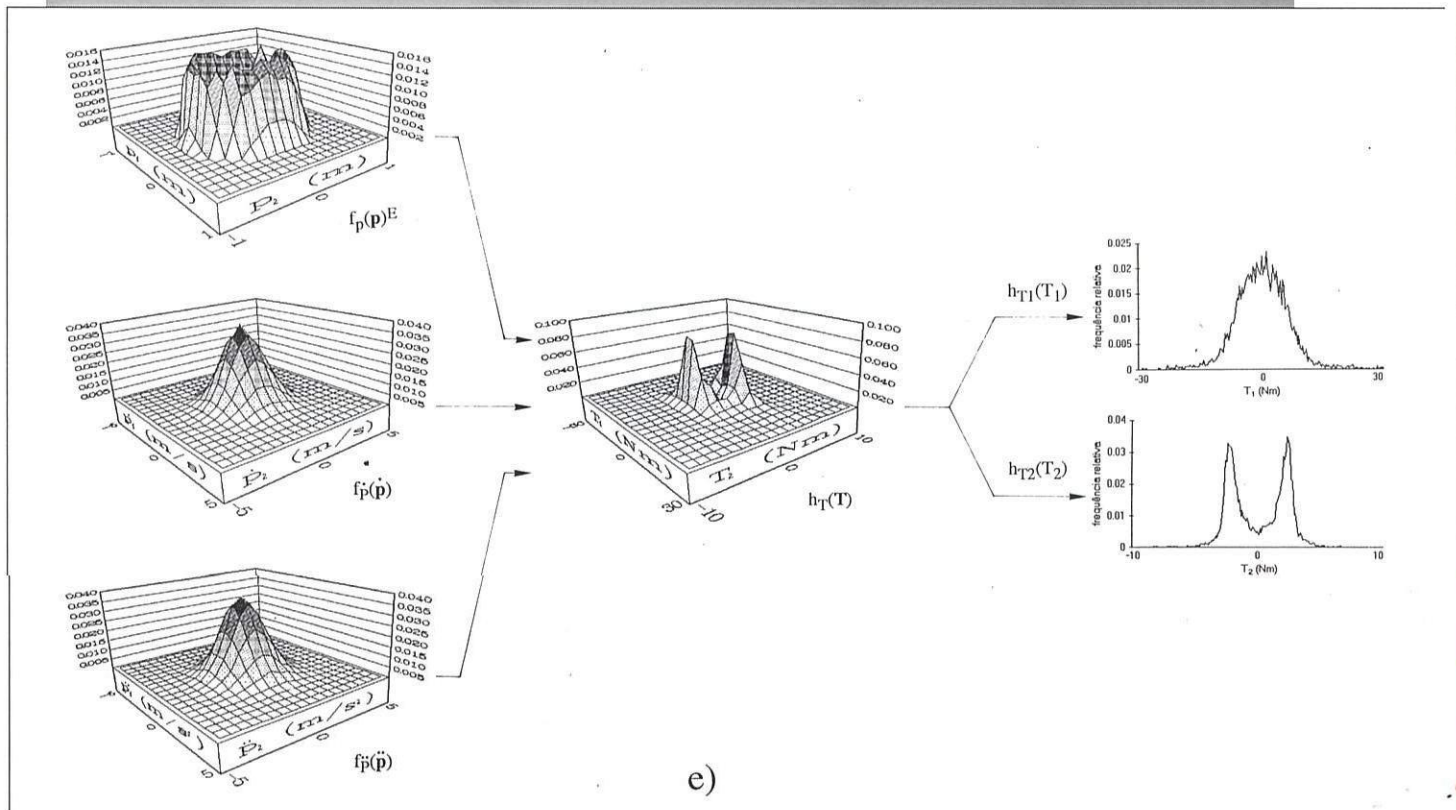
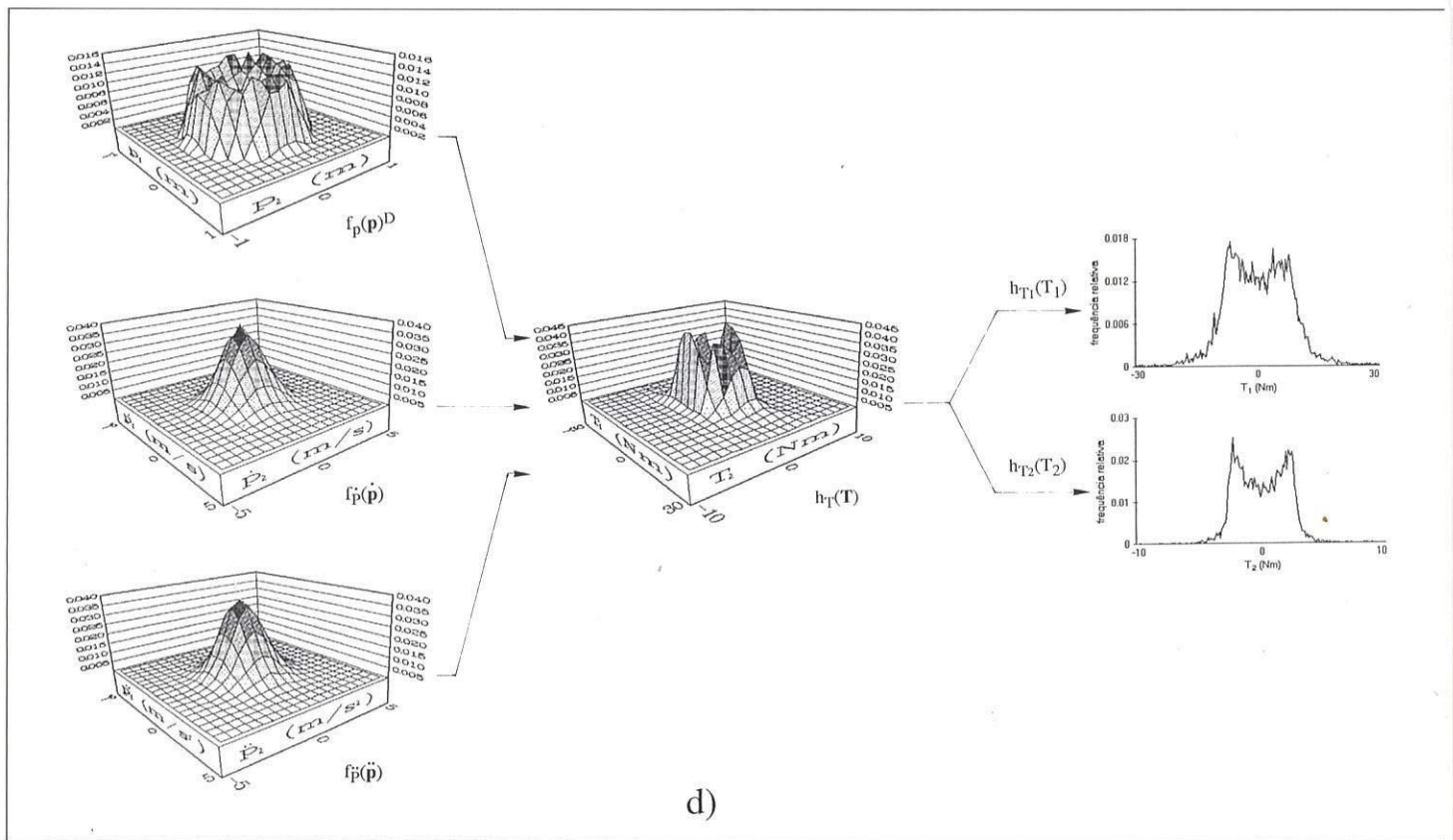
a) $f_p(p)^A$ b) $f_p(p)^B$ c) $f_p(p)^C$ d) $f_p(p)^D$ e) $f_p(p)^E$

e às f.d.p.'s:

$$f_{\dot{p}}(\dot{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^{*2}} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_p^{*2}} \right\} \quad (\text{com } \sigma_p^* = 1 \text{ s}^{-1})$$

$$f_{\ddot{p}}(\ddot{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^{**2}} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_p^{**2}} \right\} \quad (\text{com } \sigma_p^{**} = 1 \text{ s}^{-2})$$





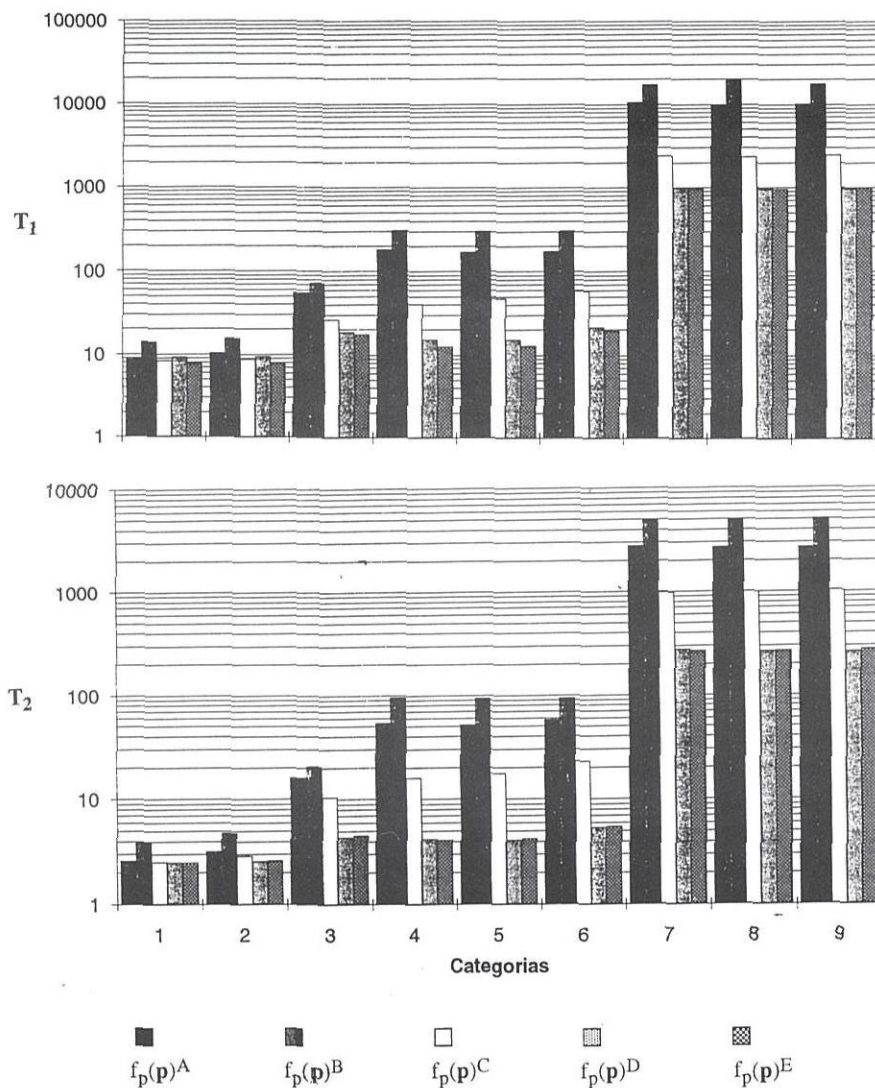


Fig. 10
Comparação do interpercentil de 95% de T_1 e T_2 para o sistema Cinemático-Dinâmico sujeito às f.d.p.'s:

$\{f_p(p)^A, f_p(p)^B, f_p(p)^C, f_p(p)^D, f_p(p)^E\}$

$$f_p(\dot{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^2} \text{EXP} \left\{ -\frac{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2}{2\sigma_p^2} \right\}$$

$$f_p(\ddot{p}) = \frac{1}{2\pi\sigma_p^{*2}} \text{EXP} \left\{ -\frac{\ddot{p}_1^2 + \ddot{p}_2^2}{2\sigma_p^{*2}} \right\}$$

de acordo com as nove categorias de exigências indicadas na Tab. 2.

- Os fenómenos cinemáticos prevalecem sobre os fenómenos dinâmicos, isto é, os primeiros têm um efeito muito mais significativo que os se-

gundos. Este resultado era de esperar, pois enquanto que para a cinemática se encontrou uma optimização comum para todas as variáveis, na dinâmica

a optimização dos fenómenos parcelares revelou-se sujeita a condições diferentes. Assim, $f_p(p)^E$ mostra ser, das f.d.p.'s consideradas, aquela que conduz a melhores desempenhos.

Em conclusão, pode-se dizer que o estudo estatístico revela o peso relativo dos fenómenos cinemáticos e dinâmicos, nomeadamente demonstrando a preponderância da cinemática. Além disso, clarifica a problemática concernente ao peso relativo dos vários fenómenos em jogo. Verifica-se que os fenómenos gravitacionais estão sempre presentes e constituem uma parcela assinalável das exigências colocadas aos actuadores, enquanto que os fenómenos Coriolis/centrípetos e inerciais só adquirem relevância na medida em que a cinemática "amplifica" solicitações de $\dot{p}$. Por outro lado, mostra-se que os manipuladores são sistemas que, intrinsecamente, têm um funcionamento transitório onde existem solicitações de acelerações/desacelerações. Assim, a realização de tarefas no espaço operacional é tanto mais exigente (i.e., requerendo binários elevados) quanto mais frequentemente solicitar altas velocidades. Deste modo, podemos dizer que um manipulador é um sistema de "posicionamento através de transitórios com acelerações/desacelerações" e não um sistema adaptado a "velocidades em regime permanente".

5. Conclusões

A dinâmica de manipuladores robóticos descreve fenómenos relativamente aos quais existe um conhecimento científico restrito.

As limitações verificadas devem-se não somente à dificuldade da obtenção do modelo mas, sobretudo, à complexidade da sua análise.

De facto, ultrapassada que foi, através do cálculo automático por computador, a barreira dos cálculos laboriosos – praticamente impossíveis de realizar manualmente para um *robot* industrial – conducentes às equações diferenciais da dinâmica, restam as tarefas de estimar os valores numéricos dos múltiplos parâmetros e a posterior análise das equações.

Para um manipulador com n g.d.l.'s estão envolvidas $3n$ variáveis independentes e n variáveis dependentes; consequentemente, a análise das equações da dinâmica tem-se revelado difícil e as conclusões preliminares apontadas por alguns investigadores são contraditórias e ambíguas.

O estudo efectuado ultrapassa estes problemas através da adopção de uma estratégia "experimentalista". Esta perspectiva baseia-se no desenvolvimento de um modelo estatístico, o qual se revela eficaz no tratamento de dados provenientes de um fenómeno com natureza multidimensional. Assim, a observação de histogramas correspondentes a f.d.p.'s marginais conduz a conclusões claras e inequívocas mantendo, todavia, a sua generalidade. Deste modo, demonstra-se que os manipuladores robóticos são sistemas bem adaptados a posicionamento envolvendo transitórios com elevadas acelerações e desacelerações.

Por outro lado, a consideração de operações perspectivadas para velocidades elevadas em regime permanente manifesta-se desadequada para este tipo de sistemas requerendo, consequentemente, a utilização de máquinas concebidas segundo uma filosofia diferente. Estas conclusões têm implicações não somente na especificação das tarefas a atribuir ao *robot*, mas também no desenvolvimento de algoritmos de planeamento de trajetórias e na concepção de novas estruturas mecânicas e respectivos actuadores.

Referências

- [1] H. Asada, "A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and its Application to Arm Design", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 105, pp. 131-142, Sept. 1983.
- [2] J. K. Salisbury e J. D. Abramowitz, "Design and Control of a Redundant Mechanism for Small Motion," IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, St. Louis, USA 1985.
- [3] T. Yoshikawa, "Analysis and Design of Articulated Robot Arms from the Viewpoint of Dynamic Manipulability", Robotics Research, The Third Int. Symp., pp. 273-279, 1986.
- [4] Oussama Khatib, "The Operational Space Formulation in the Analysis, Design and Control of Robot Manipulators", Robotics Research, The Third Int. Symp., pp. 273-279, 1986.
- [5] D.C.H. Yang e S.W. Tzeng, "Simplification and Linearization of Manipulator Dynamics by the Design of Inertia Distribution", The Int. J. Robotics Research, vol. 5, pp. 120-128, Fall 1986.
- [6] K. Youcef-Toumi e H. Asada, "The Design of Open-Loop Manipulator Arms with Decoupled and Configuration-Invariant Inertia Tensors", ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., vol. 109, pp. 268-275, Sept. 1987.
- [7] W. Homsup e J. N. Anderson, "Performance Evaluation of Robotic Mechanisms," Proc. American Control Conference, Seattle, USA, 1986.
- [8] A. Peltomaa e H. N. Koivo, "A Method for the Dynamic Analysis of Industrial Robots," Proc. 10th IFAC World Congress on Automatic Control, Munich, F.R.G., 1987.
- [9] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "Statistical Modelling of Robot Manipulators," IEEE International Workshop on Intelligent Motion Control, Istambul, Turquia, 1990.
- [10] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L. Martins de Carvalho e J.A. Tenreiro Machado, "On the Statistical Modelling of Robot Manipulators," 33rd Midwest Symposium on Circuits and Systems, Calgary, Alberta, Canadá, 1990.
- [11] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "Towards the Statistical Modelling of Robotic Manipulators", IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference MELECON'91, Ljubljana, Yugoslavia, 1991.
- [12] Alexandra M.S.F. Galhano, J.L. Martins de Carvalho e J.A. Tenreiro Machado, "On the Statistical Analysis of Mechanical Manipulators", convidado para o 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, Dublin, Irlanda, 1991.
- [13] Alexandra M.S.F. Galhano, J.A. Tenreiro Machado e J.L. Martins de Carvalho, "On the Statistical Modelling of Mechanical Manipulators", IFAC Symposium on Robot Control SYROCO'91, Viena, Áustria, 1991.
- [14] V. Scheinman e B. Roth, "On the Optimal Selection and Placement of Manipulators," Proc. RoManSy, Udine, Italy, 1984.
- [15] J.M. Hollerbach, "Dynamic Scaling of Manipulator Trajectories", ASME J. Dynamic Syst. Meas. Contr., vol. 106, pp. 102-106, March, 1984.
- [16] Gideon Sahar e John M. Hollerbach, "Planning of Minimum-Time Trajectories for Robot Arms", The Int. J. Robotics Research, vol. 5, nº 3 Fall, pp. 90-99, 1986. ■