

NM

Geometria é 'compreender o espaço'. Compreender o espaço em que a criança respira, se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor (...) A geometria presta-se, mais do que outros temas, para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas, que sendo feitas também "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes."

Hans Freudenthal

RESUMO

O presente estudo foi desenvolvido no âmbito do Mestrado de Didática da Matemática e Ciências da Natureza, no 1.º e 2.º Ciclos, no domínio da Geometria. Tem como principal objetivo compreender e analisar, através da implementação de uma sequência de tarefas de investigação e exploração, de que forma o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, na área dos quadriláteros, com os recursos *GeoGebra* e o Geoplano, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Neste sentido, definiram-se as seguintes questões de investigação: (1) Qual a imagem concetual que os alunos possuem de cada um dos quadriláteros? (2) Que conhecimentos têm os alunos sobre as propriedades dos quadriláteros: quadrados, retângulos e losangos? (3) Quais os contributos do Geoplano e do *GeoGebra* na compreensão e identificação das propriedades dos quadriláteros?

A metodologia adotada foi de natureza qualitativa, do tipo interpretativo, baseada em dois estudos de caso. Na recolha de dados, foram utilizados os seguintes instrumentos: observação, questionário, documentos produzidos pelos alunos, entrevistas informais, registos áudio e fotografias aos trabalhos realizados. Na análise dos dados, procurou-se descrever e interpretar os dados recolhidos, no âmbito do objeto do estudo.

Os resultados mostraram que a sequência de tarefas e o modo como foram desenvolvidas foram fundamentais na compreensão dos conteúdos trabalhados.

Regista-se também que os recursos utilizados motivaram os alunos e contribuíram para a interação, como também para a compreensão dos conceitos geométricos. Por outro lado, a utilização do *GeoGebra* e do Geoplano contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio espacial e geométrico.

Palavras-chave – Geometria, Ambientes de Geometria Dinâmica, Materiais Manipulativos, Quadriláteros, Raciocínio Geométrico.

ABSTRACT

This study was conducted in Teaching of Mathematics and Natural Sciences, considering the 1st and 2nd cycles of learning, for Master's Degree purposes in the field of geometry. Its main goal is to understand and analyse how effective the resources (*GeoGebra* and *Geoplano*) are in the process of teaching and student learning in the area of quadrilaterals for the development of geometric reasoning, by implementing a series of research and exploration tasks.

In this sense, there were three essential research questions: (1) what is the conceptual image that students have of each of the quadrilaterals? (2) What knowledge do the students have about the properties of quadrilaterals: squares, rectangles and diamonds? (3) What are the contributions of *Geoplano* and *GeoGebra* to understand and identify the properties of quadrilaterals?

The methodology was qualitative, interpretive type, based on two case studies. In the first, data collection was important: observation, a questionnaire, documents produced by the students, informal interviews, audio recordings and photographs to the work carried out. In the data analysis, the data collected for the study was described and interpreted.

The results showed that the sequence of tasks and the way they were developed were crucial to understand the contents worked. It also notes that the resources that have been used not only motivated students but also contributed to their interaction and developed their understanding of geometric concepts. Moreover, the use of *GeoGebra* and *Geoplano* was essential to the development of spatial and geometric reasoning.

Keywords - Geometry, Dynamic Geometry Settings, Manipulative materials, Quadrilaterals, Geometric reasoning.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos participantes e encarregados de educação pela sua colaboração, neste estudo.

Deixo um agradecimento especial para a minha orientadora, Doutora Filomena Soares pelo seu apoio, pela sua disponibilidade, pelo seu rigor, pelas sugestões que me ajudaram ao longo de todo o estudo.

Para a Doutora Cláudia Maia deixo também um agradecimento reconhecido pela sua ajuda, apoio e por me ter recebido nas suas aulas.

Agradeço a todos os Professores, como também a todos os que colaboraram e ajudaram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

LISTA DE ACRÓNIMOS.....	7
ÍNDICE DE FIGURAS.....	8
ÍNDICE DE TABELAS.....	11
1. PROBLEMA E CONTEXTO DE ESTUDO.....	13
1.1. Problema e Objetivo de Estudo.....	13
1.2. Questões de Investigação.....	15
1.3. Pertinência do Estudo.....	15
1.4. Organização Geral.....	17
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	19
2.1. Ensino de Aprendizagem da Geometria.....	19
2.2. Geometria no Currículo do 1º Ciclo do Ensino Básico.....	21
Sentido Espacial.....	24
2.3. Problemática do Estudo dos Quadriláteros.....	25
2.3.1. Classificação dos Quadriláteros.....	27
2.3.2. Teoria de van Hiele.....	30
2.4 O estudo dos Quadriláteros no PMEB.....	33
2.5 Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD).....	38
GeoGebra.....	41
2.6. Materiais Manipuláveis (MM).....	43
Geoplano – Material Manipulável (MM).....	45
3. METODOLOGIA.....	47
3.1. Opções Metodológicas.....	47
3.2. Participantes do Estudo.....	49
3.3. Procedimentos.....	50
3.4. As Tarefas.....	51

3.5. Instrumentos e Procedimentos de Recolha de Dados.....	63
3.6. Procedimento de Análise de Dados.....	64
4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	65
4.1. O Conhecimento Geométrico Prévio.....	65
4.2. Descrição e Análise das Tarefas com o Geoplano.....	75
4.2.1. Tarefa 1 – Construção de Quadriláteros.....	75
4.2.2. Tarefa 2 – Completar Figuras Geométricas.....	80
4.2.3. Tarefa 3 – Reconhecer Propriedades dos Quadriláteros.....	87
4.3. Descrição e Análise das Tarefas com o <i>GeoGebra</i>	94
4.3.1. Tarefa 4 – Explorar o <i>GeoGebra</i>	94
4.3.2. Tarefa 5 – Explorar o <i>GeoGebra</i>	99
4.3.3. Tarefa 6 – Construção dos Quadriláteros com o <i>GeoGebra</i> : Quadrado, Retângulo e losango.....	104
4.3.4. Tarefa 7 – Construção de Quadriláteros.....	107
4.3.5. Tarefa 8 – Análise da Construção do Losango.....	109
4.4. Tarefa 9 – Classificação de Quadriláteros.....	112
5. CONCLUSÕES.....	117
5.1. Síntese do Estudo.....	117
5.2. Conclusões e Reflexões sobre os Resultados.....	118
5.3. Recomendações e Limitações do Estudo.....	121
5.4. Reflexão Final.....	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	123
APÊNDICES.....	125

LISTA DE SIGLAS E ACRÓNIMOS

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

AGD – Ambientes Dinâmicos de Geometria

MM – Materiais Manipuláveis.

GM – Geometria e Medida

GD – Geometria Dinâmica

CEB – Ciclo do Ensino Básico

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação Hierárquica e Por Partição de Quadriláteros.....	27
Figura 2 – Vista do <i>GeoGebra Prim</i>	41
Figura 3 – Ambiente de trabalho do <i>GeoGebra</i>	42
Figura 4 – Ferramentas do <i>GeoGebra Prim</i>	43
Figura 5 – Geoplano.....	46
Figura 6 - Classificar Quadriláteros	66
Figura 7 – Resposta do João.....	66
Figura 8 – Resposta da Joana.....	66
Figura 9 – Resposta do Pedro.....	66
Figura 10 – Resposta da Sofia.....	67
Figura 11 – Completar Figuras Geométricas relativamente a Eixos de Simetria.....	68
Figura 12 – Resolução da Questão 2 pela Sofia.....	68
Figura 13 – Eixos de Simetria de Quadriláteros.....	69
Figura 14 – Diagonais Quadriláteros.....	69
Figura 15 – Construção de Quadrados, Retângulos e Losangos – Caso 1.....	70
Figura 16 – Construção de Quadrados, Retângulos e Losangos – Caso 2	71
Figura 17 – Definição de Quadrado.....	72
Figura 18 – Definição de Retângulo.....	73
Figura 19 – Definição de Losango.....	74
Figura 20 – Construção de Quadriláteros – Caso 1.....	76
Figura 21 – Construção de Quadriláteros – Caso 2.....	76

Figura 22 – Trabalho <i>Geoplano</i> – Caso 1 e 2.....	78
Figura 23 – Completar Figuras Geométricas – Caso 1 e 2.....	81
Figura 24 – Trabalho do Caso 1 e 2.....	83
Figura 25 – Eixos de Simetria – Caso1.....	84
Figura 26 - Eixos de simetria – Caso 2.....	85
Figura 27 – Identificar Eixos de simetria – Caso 1.....	86
Figura 28 – Identificar Eixos de simetria – Caso 2.....	87
Figura 29 - Propriedades dos Quadriláteros – Caso 1.....	91
Figura 30 – Propriedades dos Quadriláteros – Caso 2.....	92
Figura 31 – Construção Retas Paralelas – Caso 1 e 2.....	96
Figura 32 – Construção Retas Perpendiculares Caso 1 e 2.....	98
Figura 33 – Construção Segmento Reta e Ponto Médio <i>GeoGebra</i> – Caso 1	100
Figura 34 – Construção Segmento Reta e Ponto Médio – Caso 2	100
Figura 35 – Resposta dos Casos 1 e 2.....	100
Figura 36 – Construção de triângulo – Caso 1.....	101
Figura 37 – Construção de Quadrilátero – Caso 1.....	102
Figura 38 – Construção de Quadrilátero – Caso 2.....	103
Figura 39 – Construção Diferentes Quadriláteros <i>GeoGebra</i> – Caso 1.....	103
Figura 40 – Construção Diferentes Quadriláteros <i>GeoGebra</i> – Caso 2.....	105
Figura 41 – Explica como construístes – Caso 1 e 2	105
Figura 42 – Construção Quadrado Dinâmico – Caso 1 e 2	106
Figura 43 – Resposta Caso 1 e 2.....	109
Figura 44 – Análise construção Losango – Caso 1 e 2.....	110
Figura 45 – Resposta Caso 1.....	111

Figura 46 – Resposta Caso 2.....	111
Figura 47 – Adivinha o Quadrilátero – Caso 1 e 2.....	113
Figura 48 – Classificar Quadriláteros e completar Diagrama de Venn – Caso 1.....	114
Figura 48 – Classificar Quadriláteros e completar Diagrama de Venn – Caso 2.....	114

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Níveis de Compreensão do Modelo de van Hiele.....	31
Tabela 2 - Fases de Aprendizagem do Modelo van Hiele.....	32
Tabela 3 – Síntese de Atividades Desenvolvidas.....	51
Tabela 4 – Descrição da Sequência de Tarefas.....	53
Tabela 5 – Propriedades das Diagonais – Caso 1	79
Tabela 6 – Propriedades das Diagonais – Caso 2	79

CAPÍTULO I

PROBLEMA E CONTEXTO DE ESTUDO

Neste capítulo, contextualiza-se o estudo, fazendo-se referência ao problema e aos objetivos do mesmo, seguindo-se as questões de investigação, a sua pertinência e a organização geral deste trabalho.

1.1. Problema e Objetivo do Estudo

A Matemática é fundamental na vida das pessoas, está presente em todos os ramos da Ciência e Tecnologia, na arte, nas profissões e setores de atividade de todos os dias. Vivemos em tempos de mudança, de constante evolução, daí que emergem novos conhecimentos, novas ferramentas, novas formas de procedimento, pelo que é necessário compreender e ser capaz de usar a Matemática na vida quotidiana.

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007), a Matemática teve uma grande evolução nos seus métodos, processos, técnicas e na sua organização. Por isso, exige-se da escola uma formação sólida em Matemática, para todos os alunos, uma formação que permita aos alunos compreender e utilizar a Matemática, no seu percurso escolar, depois da escolaridade, na profissão, na vida pessoal e em sociedade. Assim, os alunos devem aprender segundo métodos próprios da disciplina, pois uma visão vaga e simplesmente intuitiva dos conceitos matemáticos tem um interesse limitado e pouco relevante, para o aprofundamento do estudo, e para as aplicações que se possam fazer.

Ainda de acordo com Programa de Matemática de Ensino Básico (PMEB, 2007)

a disciplina de Matemática no ensino básico deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação matemática necessária a outras disciplinas e ao prosseguimento de estudos – em outras áreas e na própria Matemática – e deve contribuir, também, para a sua plena realização na participação e desempenho sociais e na aprendizagem ao longo da vida. (p. 3)

Também as Metas Curriculares do Programa (2013) apontam para uma construção consistente e coerente do conhecimento matemático, onde o professor deve promover o gosto pela Matemática, pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos. Para a formação dos alunos, é fundamental que se desenvolva de forma progressiva o desenvolvimento do raciocínio, a aplicabilidade dos conceitos abstratos ou a previsão dos resultados.

É, portanto, necessário refletir e alterar as práticas pedagógicas, usar meios, ambientes, instrumentos, ferramentas, recursos e materiais diversos, para levar os alunos a aprender de forma orientada, colaborativa e autónoma. Segundo Costa (2005, p. 197) é importante “refletir sobre o tipo de ambientes de ensino que devem ser promovidos de forma a provocarem o uso pelos alunos de um pensamento visual espacial de qualidade”.

Nesta linha de orientação, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) refere que os professores devem estruturar adequadamente o ambiente de sala de aula, para levar os alunos a explorar as figuras geométricas e as suas propriedades. O mesmo documento acrescenta que a Geometria é uma área de grande importância na matemática, e que esta não se resume a um conjunto de definições, pois é na Geometria que os alunos aprendem a raciocinar e a comunicar. Segundo o NCTM (2007, p. 4), “os alunos merecem e necessitam da melhor educação matemática possível, que lhes permita a realização das suas ambições pessoais e objetivos profissionais neste mundo de constantes modificações”.

Considerando as indicações curriculares atuais ao incluir o ensino da Geometria em todos os ciclos, apontando para a importância do desenvolvimento do sentido espacial, da visualização e do raciocínio geométrico, como também para a necessidade de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem com tecnologias, nomeadamente, os *softwares* de Geometria Dinâmica, estes fatores contribuíram para a escolha deste estudo. Por outro lado, este vai também enriquecer os conhecimentos

da investigadora, no ensino e aprendizagem da Geometria, valorizar a sua formação pessoal.

Neste contexto, este estudo pretende analisar e compreender, de que forma o processo de aprendizagem dos alunos, no tópico dos Quadriláteros, com recurso a uma sequência de tarefas de investigação e exploração, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

1.2. Questões de Investigação

Para desenvolver este estudo, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

- Qual a imagem concetual que os alunos possuem de cada um dos quadriláteros?
- Que conhecimentos têm os alunos sobre as propriedades dos quadriláteros: quadrados, retângulos e losangos?
- Quais os contributos do Geoplano e do *GeoGebra* na compreensão e identificação das propriedades dos quadriláteros?

1.3. Pertinência do Estudo

No Programa e Metas Curriculares (2013) e em outros programas anteriores, o ensino da Matemática deve seguir uma estrutura sequencial, a aprendizagem deve efetuar-se de modo progressivo, tendo em conta, que a Matemática é uma disciplina cumulativa. A abstração tem aqui um papel importante. Nos primeiros anos de escolaridade deve partir-se do concreto e depois de o compreender, passar para o abstrato. A Matemática está cada vez mais presente em várias atividades do quotidiano, onde a escola desempenha um papel importante na formação dos seus alunos para uma cidadania responsável, informada e crítica. O ensino da Geometria, inserido e voltado para a vida prática, leva os alunos a desenvolver hábitos de pensamento matemático, compreender e apreciar o papel da matemática na vida da humanidade.

Já no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2007), a Geometria emerge como um dos temas a abordar ao longo dos três Ciclos do Ensino Básico. Ao

aluno devia ser proporcionado diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, participando em jogos, projetos, atividades de investigação que lhe permitissem conhecer diferentes tipos de procedimentos. Assim, o aluno devia contactar com diferentes atividades e utilizar diversos recursos que proporcionassem momentos de confronto de resultados, discussão de estratégias e de representações matemáticas. O mesmo documento referia ainda que

a aprendizagem da Matemática inclui sempre vários recursos. Os alunos devem utilizar materiais manipuláveis de diversos conceitos, principalmente no 1º Ciclo. (...) Ao longo de todos os Ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objetos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações. (p.9)

Também os Princípios e Normas para a Matemática Escolar referem que “a Tecnologia é essencial no ensino e aprendizagem da Matemática uma vez que influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (NCTM 2007, p. 26). O mesmo documento aponta para a necessidade de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem com o recurso a *software* de Geometria dinâmica, onde os alunos podem formular e explorar conjecturas. Refere também que a Tecnologia melhora a aprendizagem da Matemática ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob diferentes perspetivas.

Do conjunto de *softwares* de geometria dinâmica, destacamos o *GeoGebra* que é livre, gratuito e com potencialidades reconhecidas internacionalmente para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Assim, consideramos a sua utilização neste estudo.

Neste sentido, este trabalho com o recurso ao Geoplano e ao *GeoGebra* no domínio dos Quadriláteros constitui-se como um meio de estudo, no ensino e aprendizagem da Geometria.

1.4. Organização Geral

O documento está organizado em cinco capítulos: (1) Problema e Contexto de Estudo, (2) Revisão da Literatura, (3) Metodologia, (4) Apresentação e Análise dos Resultados, (5) Conclusões.

Este primeiro engloba o problema e contexto de estudo, as questões de investigação, a pertinência do estudo e a organização geral.

No segundo capítulo, é apresentada a Revisão de Literatura, que foca temas relacionados com o Ensino e Aprendizagem da Geometria, a Geometria no Currículo do 1.º Ciclo do Ensino Básico, a Teoria de van Hiele, a Problemática do estudo dos Quadriláteros focando a sua classificação conforme o adotado pelo programa de Matemática, a importância dos Ambientes de Geometria dinâmica (AGD), o *GeoGebra* e os Materiais Manipuláveis (MM), nomeadamente o Geoplano.

O terceiro capítulo engloba a Metodologia, fazendo-se referência às Opções Metodológicas, aos Participantes, aos Procedimentos, às Tarefas, aos Instrumentos relativos à Recolha e Análise dos dados.

No quarto capítulo, é desenvolvida a análise dos dados recolhidos, relativos aos dois estudos de caso, fazendo-se referência ao conhecimento geométrico anterior dos alunos, à descrição e análise das tarefas com os recursos ao Geoplano e ao *GeoGebra*.

No quinto capítulo apresentam - se as conclusões do estudo baseadas na análise de dados, limitações, possíveis recomendações e uma reflexão final.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

A revisão de literatura é fundamental no processo de investigação. Neste capítulo faz-se referência a algumas perspectivas de diversos autores no que concerne à temática principal deste estudo.

Numa primeira fase, contextualiza-se a importância da Geometria e a sua relevância na formação dos alunos, focando os programas e as orientações curriculares nacionais e internacionais. A seguir apresenta-se o estudo dos quadriláteros e o contributo da teoria de van Hiele nesta matéria.

Posteriormente aborda-se os ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), focando em particular o Geogebra, os materiais manipuláveis (MM) e o Geoplano.

2.1. Ensino e Aprendizagem da Geometria

A Geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos. Segundo os Princípios e Normas para Matemática Escolar, tem sido considerada como o conteúdo do Currículo de Matemática onde os alunos desenvolvem o raciocínio geométrico, aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da Matemática. (NCTM, 2007)

De acordo com Lorenzato (1995), a Geometria é essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias, uma visão mais ponderada e abrangente da Matemática.

Segundo Alsina (1999, citada por Costa, 2000),

a Geometria no ensino da Matemática deve ser a Geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma Geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; (...) esta é a Geometria com a qual nos gostaríamos de educar todos. (p. 158)

Para Jones (2002), a Geometria ajuda os alunos a desenvolver as habilidades de visualização, o pensamento crítico, a intuição, a resolução de problemas, o raciocínio dedutivo, a argumentação e prova.

A Matemática está cada vez mais presente em várias atividades do quotidiano, onde a escola desempenha um papel importante na formação de uma cidadania responsável, informada e crítica. A Geometria ajuda a representar e a descrever, de uma forma ordenada o mundo em que vivemos. Assim, no ensino e aprendizagem da geometria, os alunos precisam de descrever, modelar, desenhar e classificar formas, desenvolver o sentido espacial, reconhecer e apreciar a Geometria no mundo real. (NCTM, 1991)

A Geometria é uma componente importante do Currículo de Matemática, pois o conhecimento, as relações e as ideias geométricas são úteis em situações do dia-a-dia e estão relacionados com outros tópicos matemáticos e com outras temáticas escolares (NCTM, 2007). A importância da Geometria escolar está relacionada, segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), com o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, a sensibilidade para a compreensão de fenómenos do mundo real e a utilização de ideias geométricas em diversas situações. Neste sentido, para Ponte e Sousa (2010), a Geometria valoriza o sentido espacial e a visualização, reforçando as transformações geométricas.

A Matemática, nomeadamente a Geometria é fundamental para compreender fenómenos de outras disciplinas e do mundo que nos rodeia. Por isso, os alunos devem estar sensíveis aos métodos próprios da Matemática, tais como o rigor das definições e do raciocínio, a aplicabilidade de conceitos abstratos e a precisão de resultados. Devem

aprofundar conhecimentos, terem gosto pela Matemática e pelo seu estudo. Este processo deverá ser de forma progressiva, desde o início da escolaridade. (Programa e Metas Curriculares, 2013)

Os diferentes documentos curriculares, atuais, nacionais e internacionais, são convergentes ao considerar a Geometria como essencial no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, baseado nas relações entre objetos geométricos e na articulação de argumentos acerca das suas propriedades e nas demonstrações explicativas.

2.2. Geometria no Currículo do 1.º Ciclo do Ensino Básico

O ensino e a aprendizagem da Geometria constituem uma área que tem sido estudada, a nível internacional e nacional, embora não de forma tão intensiva como noutras áreas de investigação (Rodrigues & Bernardo, 2011). De acordo com as mesmas autoras, na reforma da Matemática Moderna dos anos 60 do século passado, houve uma tendência para incluir a Geometria na Álgebra, levando à sua quase anulação do Currículo de Matemática. Mais recentemente, tem havido uma tendência de revalorização da Geometria no Currículo de Matemática, um pouco por todo o mundo (Abrantes, 1999; Veloso, 1998). Em Portugal, passou a ter uma maior visibilidade com a reforma curricular da Matemática nos anos 90.

Atualmente, de acordo com as orientações curriculares do Programa e Metas Curriculares (2013), e Metas Curriculares Matemática (2012), a Geometria é um domínio que faz parte do Currículo, onde se valoriza a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial. A visualização baseia-se na construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tri dimensionais, assim como a perceção de um objeto a partir de diferentes perspetivas (NCTM, 2007).

Segundo Alves e Sampaio (2010), no ensino da Geometria, no ensino básico, o aluno começa a compreender os aspetos espaciais do mundo físico e a desenvolver uma intuição espacial que posteriormente lhe vai permitir a construção do pensamento lógico, noutros níveis de escolaridade.

O uso de *softwares* educativos nas aulas de Geometria, especialmente os de Geometria dinâmica, são referenciados nas indicações metodológicas no ensino e

aprendizagem da Geometria e Medida no PMEB (2007) pois o computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens, nomeadamente através de *applet* - pequenos programas ou aplicações disponíveis na *Internet* - que permitem a realização de jogos e atividades. Os recursos tecnológicos permitem estabelecer relações, tirar conclusões e facilitam a compreensão de conceitos.

Também nas Normas para o ensino da Geometria (NCTM, 2007, p. 44), os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º Ano deverão habilitar todos os alunos para:

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à Geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;
- Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

Nesta linha de orientação, o PMEB (2007) refere que a Geometria está presente nos três ciclos e salienta o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, bem como o estudo das figuras geométricas bi e tridimensionais.

No PMEB (2013) estudam-se logo desde o 1.º (CEB) diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização. Assim, começa-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares, a partir dos quais se constroem objetos mais complexos como polígonos, circunferências, sólidos ou ângulos.

O principal objetivo do ensino da Geometria no 1.º CEB é desenvolver nos alunos o sentido espacial, principalmente na visualização e na compreensão das propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, bem como a noção e a compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, como também a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos.

De acordo com o PMEB (2007, p. 20), a aprendizagem da Geometria no 1.º Ciclo devia proporcionar aos alunos o desenvolvimento das seguintes competências:

- Desenvolver a visualização e ser capazes de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam;
- Ser capazes de identificar e interpretar relações espaciais;
- Compreender as grandezas dinheiro, comprimento, área, massa, capacidade, volume e tempo;
- Compreender o que é a unidade de medida e o processo de medir;
- Ser capazes de realizar estimativas e medições, e de relacionar diferentes unidades de medida;
- Ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar no âmbito deste tema.

De acordo com o Programa e Metas Curriculares (2013), a aprendizagem da Geometria deve começar no nível mais elementar de escolaridade, para adquirir conhecimentos de factos e de procedimentos, construir e desenvolver o raciocínio matemático, comunicar oralmente e por escrito de modo adequado à Matemática como um todo, de modo organizado e coerente.

No 1.º CEB, o aluno deve identificar e designar corretamente a designação referida, reconhecendo os diferentes objetos e conceitos, formalizando, as definições indicadas mais simples, não se exigindo as mais complexas, relacionar a designação referida a uma generalização, verificar a veracidade do enunciado, em exemplos concretos, em casos muito simples, apresentar argumentos de outras situações que expliquem a validade do enunciado.

No mesmo documento, são apresentadas as noções básicas da Geometria, iniciando-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares: pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas, segmentos de reta, paralelismo e perpendicularidade, a partir dos quais se constrói objetos geométricos, tais como, polígonos, circunferências, sólidos, ângulos, entre outros.

No 2.º CEB, os alunos ampliam e desenvolvem os conhecimentos já adquiridos, em articulação com o 1.º CEB. Uma outra orientação comum aos documentos, atrás referidos, é o uso das novas tecnologias que devem ser utilizadas para enriquecer e ajudar na aprendizagem, nomeadamente a utilização dos programas de geometria dinâmica.

Assim, o papel desempenhado pela Geometria no Currículo tem variado ao longo dos tempos. No contexto atual, o ensino da Geometria é considerado importante ao longo dos ciclos, onde os alunos deverão saber relacionar as diferentes propriedades

estudadas com aquelas que já conhecem e que são importantes em cada situação. É também consensual a importância da realização de diversas tarefas que envolvem a utilização de diferentes instrumentos de desenho e de medida, que vão contribuir para a aquisição da destreza na execução de construções rigorosas.

Sentido Espacial

O sentido espacial pode ser caracterizado como o conhecimento intuitivo do meio e dos objetos, fundamental no ensino da Geometria. Para Walle (2007, citado em Ponte & Sousa, 2010), o sentido espacial consiste na capacidade de visualizar mentalmente objetos.

Para Hershkowitz (1998), a visualização é geralmente considerada como "a capacidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre a informação visual" (p. 85). Segundo os mesmos autores, o "sentido espacial" e, em particular, a visualização são características fundamentais em Geometria, e devem merecer uma atenção cuidada e um trabalho consistente ao longo do ensino básico.

De acordo com Matos e Gordo (1993), destacam-se sete aspetos na visualização: coordenação visual-motora, memória visual, percepção figura-fundo, constância perceptual, percepção da posição no espaço, percepção de relações espaciais e discriminação visual. Segundo o mesmo autor, estes aspetos estão relacionados com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia e com a capacidade de interpretar, modificar e antecipar as transformações dos objetos (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011).

Os Programas do Ensino Básico (2007, 2013) valorizam o desenvolvimento do sentido espacial, incluindo a visualização, que está presente de forma explícita no propósito principal do ensino da Geometria para os três ciclos de ensino. A visualização deve englobar capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia e envolve observação, manipulação e transformação de objetos e suas representações. O sentido espacial envolve também noções de orientação e movimento, tendo um papel importante na percepção das relações espaciais.

Nas indicações metodológicas do PMEB (2007) era proposto a apresentação de tarefas que proporcionassem observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas, levando os alunos a explorar, relacionar e a construir.

O NCTM (1991) considerava fundamental para os alunos desenvolverem o sentido espacial, que tivessem a oportunidade de viver experiências relacionadas com as relações geométricas, na direção, orientação e perspectivas dos objetos no espaço, nas formas e tamanhos relativos das figuras e objetos.

A resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis têm assim um papel importante no desenvolvimento do sentido espacial, no 1.º CEB, pois segundo o NCTM (1997) enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se. Como já referimos, os instrumentos de desenho, os programas de Geometria dinâmica e os *applets* permitem realizar múltiplas explorações.

A maioria das atividades realizadas pelos alunos envolve a visualização, pelo que os recursos tecnológicos favorecem o papel ativo dos alunos na sua aprendizagem, podendo apoiar o desenvolvimento do sentido espacial e da visualização.

2.3. Problemática do Estudo dos Quadriláteros

Estudos sobre o conhecimento dos alunos sobre os quadriláteros têm sido realizados por diferentes autores, como Battista (2007), Hans Freudenthal (1991) Fujita e Jones (2007), entre outros.

Aprender implica a construção de novos conceitos e relações entre os conceitos. A perspetiva clássica assente na prática pedagógica em que o aluno aprende por ouvir o professor a explicar os conteúdos e a apresentar exemplos, resolvendo exercícios de aplicação, tem vindo a ser posta em causa pela investigação. Esta valoriza cada vez mais o papel do aluno, como sujeito ativo, que vai construindo o seu próprio saber.

Segundo o PMEB (2007) e o Programa e Metas Curriculares (2013), os alunos deverão continuar o seu percurso de aprendizagem, com as suas experiências e com os seus conhecimentos que devem ser valorizados e não ignorados. A adequação da linguagem e dos conceitos geométricos deve fazer-se de modo gradual, estabelecendo novas relações com o que já conhecem.

De acordo com Battista, (2007), a Geometria é “como uma rede complexa de interligações entre conceitos, modos de pensar, e sistemas de representação que são usados para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginados” Assim,

é importante descobrir novas ligações na rede, recorrer a novos modos de pensar e de representar.

Nesta perspectiva, é importante o desenvolvimento do raciocínio espacial, entendido como “a capacidade para ‘ver’, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações” (Loureiro, 2008).

Também Hans Freudenthal (1991) refere o recurso a pequenos mundos¹ que possam ser estruturados pelas crianças. Essa atividade das crianças constitui uma real atividade matemática que pode ser designada por matematização.

Neste caso particular da atividade geométrica, é importante destacar também a visualização como um processo cognitivo fundamental. Segundo Duval (1998), visualização, construção e raciocínio são os três processos cognitivos envolvidos na atividade geométrica.

Robichaux e Rodrigues (2010) referem que é importante que os alunos tenham experiências que lhes permitam compreender os conceitos e os termos geométricos que ajudam na assimilação e compreensão. É fundamental também que os alunos compreendam que é necessário a utilização de termos rigorosos e definições no estudo da Geometria, na resolução de problemas e na comunicação matemática.

Os autores salientam mesmo que é a classificar formas e resolvendo questões que os alunos desenvolvem o pensamento e a compreensão da Geometria. Para Villiers (1994), as atividades devem permitir uma exploração livre, serem orientadas pelo professor, levando os alunos a relacionar as aprendizagens novas com o que já conhecem.

¹O autor associa os pequenos mundos a novos modos de pensar e de representar, entendendo o novo como o que é desconhecido para o sujeito ou que ele descobre pela primeira vez. Na perspectiva das crianças, a vivacidade está presente no desenvolvimento do seu raciocínio espacial e das suas representações.

2.3.1. Classificação dos Quadriláteros

Classificar é organizar objetos em classes segundo critérios, sendo necessário a identificação de características, semelhanças, diferenças e a consequente construção de definições. Em Matemática, estas são a base da comunicação, da reorganização e construção dos conhecimentos (Villiers, 1994).

Na classificação dos Quadriláteros vamos abordar a hierárquica e a por partição, cuja representação de Villiers (1994, p.3) é elucidativa (ver Figura 1). Na hierárquica, considera-se a classificação de um conjunto de conceitos de modo a que os mais particulares são muitas vezes subconjuntos dos mais gerais. Na classificação por partição os vários subconjuntos de conceitos são disjuntos uns dos outros.

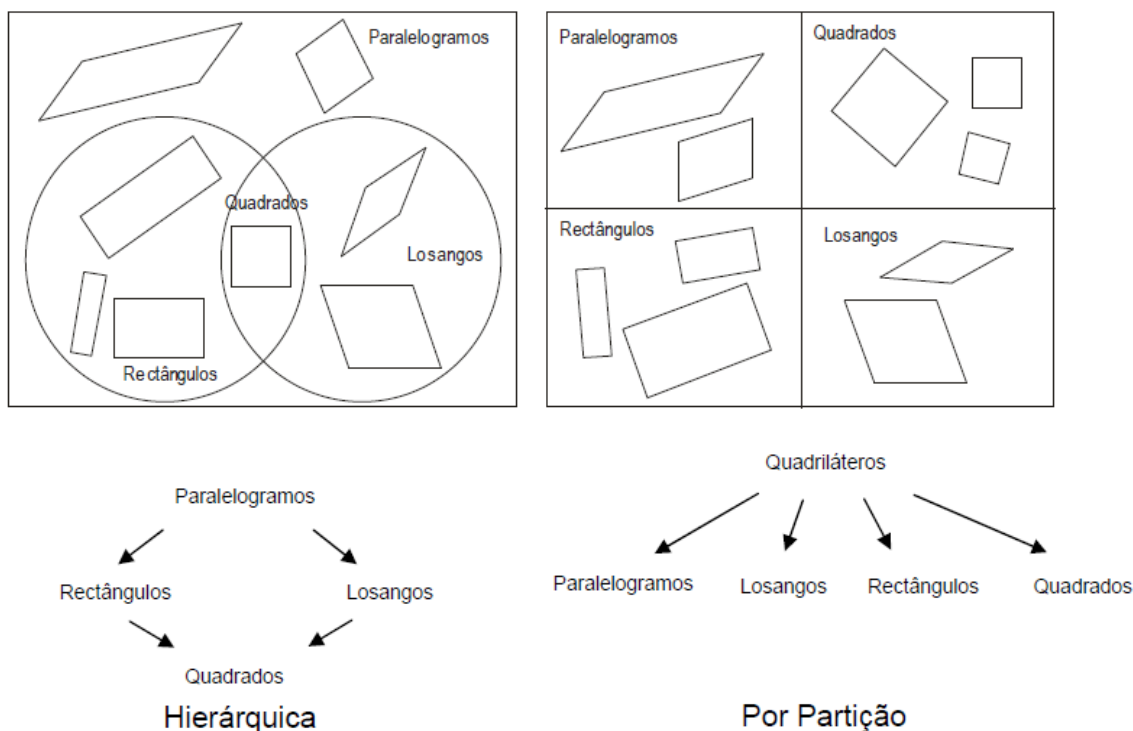


Figura 1 - Classificação Hierárquica e por Partição de Quadriláteros.

Assim, na classificação hierárquica, podemos observar que os retângulos e os losangos são casos particulares dos paralelogramos e os quadrados são simultaneamente losangos e retângulos. Por outro lado, na classificação por partição,

os quadrados não são losangos nem retângulos, assim como os retângulos e os losangos não são paralelogramos.

Segundo o mesmo autor, os conceitos devem ser compreendidos e desenvolvidos de forma natural, relacionados com os preexistentes, para não resultarem em memorizações sem significado.

Também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam que “os termos, as definições, as propriedades e as fórmulas não são para memorizar; constituem um meio, que se vai desenvolvendo gradualmente, de tornar mais claro, preciso e sistemático o pensamento e a sua expressão”. (p. 64)

Como já vimos, na classificação dos Quadriláteros, a classificação hierárquica e a partitiva são igualmente aceitáveis, podendo ser aplicadas em Matemática. Contudo, nos documentos orientadores para o ensino da Matemática em Portugal, está prevista a classificação hierárquica.

A preferência pela classificação hierárquica reside na sua maior funcionalidade (Villiers, 1994). Segundo o autor, a maioria dos livros e professores usam a classificação hierárquica e as suas definições. No entanto, vários estudos, (e.g., Burger & Shaughnessy, 1996; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Mayberry; 1981; Usiskin, 1982) apontam para a existência de dificuldades, por parte dos alunos, com a classificação hierárquica dos Quadriláteros.

Outras pesquisas (e.g., De Villiers, 1987, 1990; De Villiers & Njisane, 1987; Malan, 1986; Smith, 1989; 1987; indicaram que as dificuldades dos alunos não residem só com a lógica da inclusão da classe hierárquica, mas com o significado da atividade quer linguística ou funcional (compreender qual a classificação mais útil: hierárquica ou partitiva).

Também Fujita e Jones (2007) referem que os alunos demonstraram dificuldades na compreensão e na análise das propriedades das figuras geométricas, pois a classificação hierárquica implica dedução lógica entre as imagens e os conceitos, o que para muitos alunos é difícil. Segundo os mesmos autores, estes fatores impedem os alunos de compreender as relações de inclusão dos quadriláteros, pelo que permanecem no nível 2 ou mesmo no nível 1 de van Hiele.

Refira-se que de acordo com outros autores como Frostig e Horne (1964) e Van Hiele (citados por Maia, 2014) consideram que as competências espaciais têm grande

importância para o desenvolvimento do pensamento geométrico, das quais se destacam a percepção de figuras num plano, a percepção da congruência, a percepção da posição no espaço e a percepção de relações espaciais.

A percepção de figuras num plano consiste em observar, identificar uma figura específica numa imagem, como por exemplo, reconhecer a sobreposição de figuras nas semelhanças e diferenças, completar figuras, entre outras, (Lindquist & Shulte 1987, citado por Maia, 2014).

No que diz respeito à congruência, a sua percepção baseia-se na capacidade de reconhecer que um objeto possui propriedades invariantes, tais como o tamanho e a forma, apesar da possível variabilidade quando analisado de um ponto de vista diferente (Lindquist & Shulte, 1987, citado por Maia, 2014). Também Fischbein (1978, citado por Maia, 2014) defende que as preconcepções erradas são imagens concetuais que os alunos possuem dos objetos geométricos, baseadas com a intuição geométrica destes.

A percepção da posição no espaço está relacionada com a habilidade para comparar dois objetos e verificar que duas figuras são congruentes, se ao deslizar, rodar, virar, se verifica a sua congruência ou se uma se transformar na outra. Torna-se assim possível a abstração da sua posição e orientação para a identificação das propriedades comuns das figuras (Lindquist & Shulte, 1987; citados por Maia, 2014).

Em suma, numa perspetiva global, as competências espaciais são fundamentais para o sucesso escolar dos alunos nos primeiros anos, nomeadamente na Geometria, pois possibilitam o estudo das propriedades das figuras geométricas, desenvolvem a compreensão do espaço e a apropriação de informação visual por parte da criança (Maia, 2014).

Assim, relativamente à importância da classificação dos quadriláteros, vários investigadores parecem estar de acordo ao considerarem o conceito de classificação como um dos conceitos essenciais no ensino da Geometria para os primeiros anos (Albuquerque et al., 2008; Jones & Mooney, 2003; Loureiro, 2008), como também na importância dos recursos de softwares interativos de Geometria, onde os alunos podem comparar, confirmar e compreender as propriedades dos quadriláteros.

2.3.2. Teoria van Hiele

A formação e a classificação de conceitos, como também o seu desenvolvimento geométrico têm sido estudadas ao longo dos anos por diferentes investigadores. Uma das teorias mais conhecidas é a de van Hiele que é um modelo hierárquico que pode orientar o professor na sua prática pedagógica. Foi desenvolvida nos anos 50 e consiste num conjunto de etapas para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria (ver tabela 1).

O casal Van Hiele desenvolveu esta teoria, para tentar explicar as dificuldades dos alunos em Geometria, na Holanda. Segundo este modelo a aprendizagem da Geometria decorre de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, permitindo ao professor analisar as dificuldades do aluno e organizar a sua prática pedagógica de modo a facilitar as aprendizagens.

Esta teoria apresenta características sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos bastante significativas: a sequencialidade, a linguagem e a continuidade. Os alunos têm de dominar os conhecimentos e estratégias de um nível de raciocínio para avançar para o nível seguinte. Contudo, na mesma aula, pode haver alunos em níveis de raciocínio diferentes, consoante as tarefas propostas.

Tabela 1 – Níveis de Compreensão do Modelo van Hiele (Alves & Sampaio, 2010, p.70)

Níveis de compreensão	Características
Visualização ou Reconhecimento (Nível 1)	Reconhece visualmente uma figura Geométrica; Tem condições de aprender o vocabulário geométrico; Não reconhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura.
Análise (Nível 2)	Identifica as Propriedades de uma determinada figura; Não faz inclusão de classes ²
Dedução Informal ou Ordenação (Nível 3)	Já é capaz de fazer a inclusão de classes; Acompanha uma prova formal, mas não é capaz de constituir outra.
Dedução Formal (Nível 4)	É capaz de fazer provas formais; Raciocina num Contexto de um Sistema Complexo.
Rigor (Nível 5)	É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas; É neste nível que as geometrias não-euclidianas são compreendidas.

Segundo Alves & Sampaio, o modelo de van Hiele é um guia para a aprendizagem da Geometria, como também um meio para a avaliação das capacidades dos alunos, e apresenta cinco níveis de compreensão, que demonstram quais são as características do processo de pensamento dos alunos em Geometria. Ainda baseado no modelo de Van Hiele, há autores que defendem os níveis a começar em zero (0) até quatro (4) e outros que atribuem graus distintos em cada nível de Van Hiele.

² Este conceito, na Teoria Piagetiana, é quando a criança compreende noções como as de subclasse. Nunca pode conter mais elementos do que a classe maior a que ela pertence. Na geometria, é quando, por exemplo, o aluno compreende que todo o quadrado é um retângulo.

Para Naser (1992), as fases de aprendizagem do modelo de van Hiele podem ocorrer de forma simultânea e em diversas ordens. Contudo, a última fase apenas deve ocorrer após o desenvolvimento das anteriores, sendo indispensáveis para o desenvolvimento da aprendizagem. A Tabela 2 relaciona as fases de aprendizagem do modelo de van Hiele com as suas características.

Tabela 2 - Fases de Aprendizagem do Modelo van Hiele

Fases de Aprendizagem	Características
Questionamento ou informação (Fase 1)	Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; Apresentação de vocabulário do nível a ser atingido; O professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.
Orientação direta (Fase 2)	Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
Explicitação (Fase 3)	O papel do professor é o de observador; Os alunos trocam experiências, os pontos de vista diferentes contribuirão para cada um analisar suas ideias.
Orientação livre (Fase 4)	Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia.
Integração (Fase 5)	O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes ideias.

Para Hamazaki (2004), o modelo van Hiele valoriza a aprendizagem como um processo gradual, global e construtivo. Gradual, por considerar a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica gradualmente. Global, pois as figuras e propriedades não são abstrações isoladas, interrelacionam-se e levam-nos a diversos níveis com outros significados. Construtivo, pois a aprendizagem não é por transmissão de conhecimentos, o aluno constrói os seus conceitos (Serrazina & Matos, 1996).

Diferentes investigadores do modelo van Hiele referem-no como importante no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, pois visa promover o papel ativo do aluno na construção dos seus conhecimentos.

Este estudo irá desenvolver-se essencialmente nos dois primeiros níveis da teoria de Van Hiele, segundo o autor Alves & Sampaio, tendo em conta a idade dos alunos envolvidos (9 anos). De acordo com as questões de investigação, iremos procurar analisar e compreender este modelo de aprendizagem, no domínio da Geometria e Medida (GM4), no estudo dos Quadriláteros – Retângulo, Quadrado e Losango.

2.4. Estudo dos Quadriláteros no PMEB 2013

O PMEB e as Metas Curriculares constituem o normativo legal para a disciplina de Matemática no Ensino Básico. Destacam-se três grandes finalidades: A estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Estas finalidades só podem ser atingidas se os alunos forem apreendendo adequadamente os métodos próprios da Matemática.

Assim, foram estabelecidos os seguintes objetivos para o **1.º e 2.º Ciclos**.

1.º Ciclo

(1) Identificar/designar: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, não se exigindo que enuncie formalmente as definições indicadas (salvo nas situações mais simples), mas antes que reconheça os diferentes objetos e conceitos em exemplos concretos, desenhos, etc.

(2) Estender: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, reconhecendo que se trata de uma generalização.

(3) Reconhecer: O aluno deve reconhecer intuitivamente a veracidade do enunciado em causa em exemplos concretos. Em casos muito simples, poderá apresentar argumentos que envolvam outros resultados já estudados e que expliquem a validade do enunciado.

(4) Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

2.º Ciclo

(1) Identificar/designar: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de maneira equivalente, ainda que informal.

(2) Estender: O aluno deve definir o conceito como se indica ou de forma equivalente, ainda que informal, reconhecendo que se trata de uma generalização.

(3) Reconhecer: O aluno deve conhecer o resultado e saber justificá-lo, eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares. No caso das propriedades mais complexas, deve apenas saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados pelo professor para as deduzir, bem como saber ilustrá-las utilizando exemplos concretos. No caso das propriedades mais simples, poderá ser chamado a apresentar de forma autónoma uma justificação geral um pouco mais precisa.

(4) Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

No seu conjunto, estes desempenhos devem contribuir para a aquisição de factos e de procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma adequada comunicação oral e escrita da Matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos, como um todo articulado e coerente.

Os conteúdos encontram-se organizados, em cada Ciclo, por domínios.

1.º Ciclo

No 1.º ciclo, os domínios de conteúdos são três:

- *Números e Operações* (NO)
- *Geometria e Medida* (GM)
- *Organização e Tratamento de Dados* (OTD)

2.º Ciclo

No 2.º ciclo, os domínios de conteúdos são quatro:

- *Números e Operações* (NO)
- *Geometria e Medida* (GM)
- *Álgebra* (ALG)
- *Organização e Tratamento de Dados* (OTD)

Este estudo vai ser desenvolvido no domínio da Geometria e Medida (GM), essencialmente no domínio da Geometria, no 4º Ano. Assim iremos mencionar os conteúdos referentes à Geometria no 1.º Ciclo

Assim no domínio **GM1**, os conteúdos a desenvolver são:

Localização e orientação no espaço

- Relações de posição e alinhamentos de objetos e pontos;
- Comparação de distâncias entre pares de objetos e pontos;
- Figuras geometricamente iguais.

Figuras geométricas

- Partes retilíneas de objetos e desenhos; partes planas de objetos;
- Segmentos de reta e extremos de um segmento de reta;
- Comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta;
- Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respetivos lados e vértices, circunferência, círculo;
- Sólidos: cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro e esfera.

No domínio **GM2**, os conteúdos a desenvolver são:

Localização e orientação no espaço

- Direções no espaço relativamente a um observador;
- Voltas inteiras, meias voltas, quartos de volta, viragens à direita e à esquerda;
- Itinerários em grelhas quadriculadas.

Figuras geométricas

- Retas e semirretas;
- Polígonos e linhas poligonais;
- Parte interna e externa de linhas planas fechadas;
- Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos;
- Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango);
- Pentágonos e hexágonos;
- Sólidos geométricos – poliedros e não poliedros; pirâmides e cones; vértice, aresta e face;
- Atributos geométricos e não geométricos de um objeto;
- Construção de figuras com eixo de simetria.

No domínio **GM3**, os conteúdos a desenvolver são:

Localização e orientação no espaço

- Segmentos de reta paralelos e perpendiculares em grelhas quadriculadas;
- Direções perpendiculares e quartos de volta;
- Direções horizontais e verticais;
- Coordenadas em grelhas quadriculadas.

Figuras geométricas

- Circunferência, círculo, superfície esférica e esfera; centro, raio e diâmetro;
- Identificação de eixos de simetria em figuras planas.

No domínio **GM4**, os conteúdos a desenvolver são

Localização e orientação no espaço

- Ângulo formado por duas direções; vértice de um ângulo;
- Ângulos com a mesma amplitude;
- A meia volta e o quarto de volta associados a ângulos.

Figuras geométricas

Ângulos

- Ângulos convexos e ângulos côncavos;
- Ângulos verticalmente opostos;
- Ângulos nulos, rasos e giros;
- Critério de igualdade de ângulos;
- Ângulos adjacentes;
- Comparação das amplitudes de ângulos;
- Ângulos retos, agudos e obtusos.

Propriedades geométricas

- Retas concorrentes, perpendiculares e paralelas; retas não paralelas que não se interseçam;
- Retângulos como quadriláteros de ângulos retos;
- Polígonos regulares;
- Polígonos geometricamente iguais;

- Planos paralelos;
- Paralelepípedos retângulos; dimensões;
- Prismas retos;
- Planificações de cubos, paralelepípedos e prismas retos;
- Pavimentações do plano.

Neste estudo, os alunos vão reconhecer e identificar as propriedades geométricas dos quadriláteros retângulo, quadrado e losango, pois os alunos devem saber utilizar corretamente as designações das figuras geométricas.

Assim, nos quadriláteros, os alunos vão poder descobrir, comparar e indicar algumas particularidades que os caracterizam e relacionam uns com os outros, como: lados, ângulos, diagonais, eixos de simetria, etc. É neste âmbito que o presente trabalho se vai desenvolver.

2.5. Ambientes Geometria Dinâmica (AGD)

No contexto atual, vivemos rodeados pelas tecnologias, por isso é possível ensinar e aprender Matemática de forma inovadora, com recurso a ferramentas tecnológicas, capazes de criarem situações favoráveis onde os alunos aprendam a gostar de Matemática. O desenvolvimento de *software* educativo contribuiu para a importância da utilização do computador como um mediador no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a construção de saber por parte do aluno.

De acordo com Bona (2009, citado por Morais, Cadavez, Cadavez, & Miranda, 2013), os *softwares* educativos são uma opção inovadora e interessante para o ensino e aprendizagem da Matemática, podendo ser utilizados em simulações de situações em contexto real, estimulação do raciocínio lógico e da autonomia pois os alunos podem formular as suas hipóteses, fazer conjeturas e tirar as suas próprias conclusões.

Para Cabrita e Silveira (2013), os Ambientes Geometria Dinâmica podem dar origem a espaços de ensino e de Aprendizagem efetivos, estimulantes e inovadores, pois possibilitam ao aluno visualizar, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos. Possibilitam também a compreensão mais profunda dos conceitos geométricos, sendo um bom recurso para o estudo da

Geometria, possibilitando que os alunos passem a trabalhar em níveis mais elevados de generalização ou abstração.

Segundo o NCTM (2008), no mundo em transformação em que vivemos, os que compreendem e têm capacidade de fazer matemática, terão maiores oportunidades para construir o seu futuro. Torna-se, por isso, importante o uso adequado das tecnologias, onde se realça a criação de ambientes de Geometria dinâmica que possam contribuir para uma sólida aprendizagem dos conteúdos geométricos.

Na mesma linha de orientação, também Candeias e Ponte (2006) defendem que os processos de ensino e aprendizagem da Matemática de carácter exploratório e investigativo podem ser potencializados e trabalhados com a utilização das tecnologias. Assim também para estes autores, os ambientes de geometria dinâmica permitem a construção de figuras com certo rigor e possibilitam a sua modificação, por arrastamento de um ou mais elementos, observando-se a invariância de algumas das suas propriedades. (Marioti 1999, Gutiérrez 2005, citados por Cabrita e Silveira, 2013) destacam como principal característica dos AGD a sua propriedade dinâmica, onde as imagens podem ser arrastadas e alteradas, tornando possível ao aluno obter inúmeras construções associadas à figura original.

Também Alves e Soares (2007, citados por Oliveira, 2010, p. 7076),

o arrastar talvez seja o principal entre todos. Através do *mouse* é possível clicar sobre um ponto do objeto geométrico construído e depois arrastá-lo pela tela, criando um movimento que provoca uma mudança na configuração. A questão sobre o que se pode arrastar e sobre por que arrastar permite a diferenciação entre construir uma figura ou simplesmente desenhá-la. Quando constrói uma figura, o usuário não pode fazer apenas uma aproximação e sim ter a clareza sobre as relações entre os diferentes elementos da figura, senão ela não mantém seu formato original ao ser arrastada. [...] a dinâmica dos movimentos possibilita que ele (usuário) perceba o que permanece invariante, alertando-o para determinados padrões e motivando-o a fazer conjeturas e a testar suas convicções.

Segundo Laborde (2008, citado por Gafanhoto & Canavarro, 2012), no ensino e aprendizagem da Matemática, é importante a seleção de tarefas adequadas e o uso de *software*, como os ambientes de geometria dinâmica (AGD). Também as orientações expressas pelo NCTM (2007) indicam que

os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objetos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais. (p. 47)

Para Gravina (1996) e Aguiar (2009), citados por Morais et al., (2013), a utilização de *software* de Geometria dinâmica demonstra aspetos importantes para o ensino da Geometria, como: os alunos têm a oportunidade de construir figuras geométricas, e desta forma aprender as técnicas de construção; o professor pode fornecer figuras já construídas e o aluno tem de deduzir as propriedades que as caracterizam.

Ainda outros autores, (e.g. Bravo 2010, citado por Cabrita & Silveira, 2013; Gravina, 1996, citado por Morais et al., 2013) destacam as capacidades destas ferramentas que permitem um maior número de ações e trabalho com objetos mais complexos do que as ferramentas de uso tradicional.

Efetivamente, o *software* de Geometria dinâmica possibilita aos alunos a possibilidade de construir figuras geométricas, de aprender técnicas de construção, aspetos didáticos importantes para o ensino da Geometria. São vários os *softwares* de Geometria dinâmica, pelo que podemos destacar os seguintes: *Cabri-géomètre*, *The Geometers Sketchpad*, *Geometric Supposer*, *Cinderella*, *Euklid*, régua e compasso, *Tabulae* (geometria plana), *Mangaba* (geometria espacial) e o *GeoGebra*.

Em suma, os diferentes autores mencionados consideram importante ensinar Geometria recorrendo a AGD de onde destacamos o *Geogebra* (GEOmetria + álGEBRA) pois é um *Software* livre, em Português, que simula construções feitas por régua e compasso e que permite movimentos dos objetos com vários recursos e interação com o usuário. Por outro lado, é um *software* predominantemente construtivista, sendo um bom recurso para o estudo de Geometria, uma vez que proporciona ao aluno visualizar, explorar, conjeturar, validar, compreender e comunicar os conceitos geométricos de forma interativa e atrativa.

GeoGebra

O *GeoGebra* é um programa de geometria dinâmica, livre, de fácil acesso e manuseamento para os alunos. É uma aplicação que permite trabalhar, não apenas a Geometria, como também a Álgebra, o Cálculo e a Estatística. Foi desenvolvido em 2001 por *Markus Hohenwarter* e constitui um programa adequado aos vários níveis de ensino, que se encontra em constante atualização

São vários os estudos que referem a importância dos ambientes dinâmicos na educação, nomeadamente, do *Geogebra* (Assude & Gelis, 2000; Bravo, 2005; Oliveira, 2010).

Hohenwarter e Fuchs (2004), e Lopes (2013) apresentam várias vantagens na utilização do *GeoGebra*, como a possibilidade de visualização e construção de figuras geométricas, a sua alteração mantendo as suas propriedades, e a capacidade de argumentação por parte dos alunos.

Para Skovsmove (2008), este tipo de atividades conduz o aluno à descoberta, a formular questões e a procurar explicações.

Assim, parece ser consensual que a utilização do *GeoGebra* facilita a abordagem dos conteúdos matemáticos e a dinâmica com que estes podem ser abordados, torna as aulas mais ativas e menos monótonas, favorecendo a construção do conhecimento.

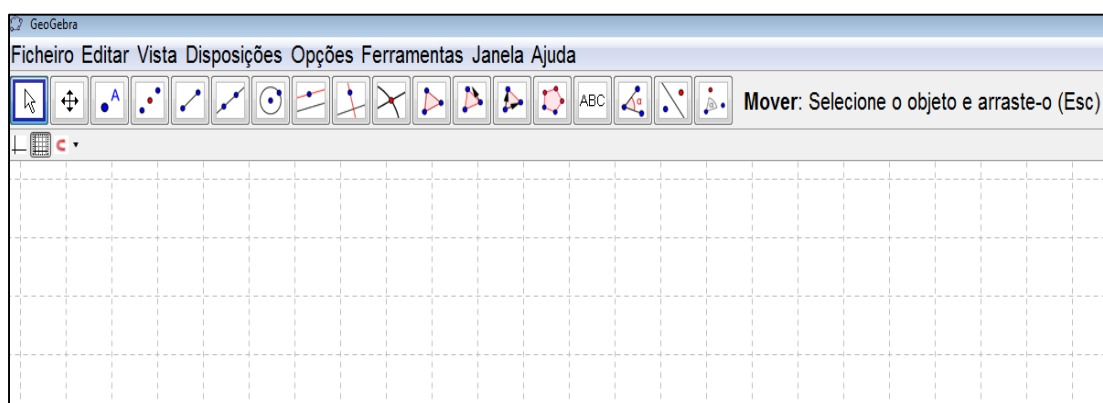


Figura 2 – Vista do *GeoGebra Prim*

Neste estudo, utilizou-se o *GeoGebra Prim* (ver Figura 2) por ser um software menos complexo sob o ponto de vista das ferramentas disponíveis no menu, sendo um dos motivos por se considerar adequado para alunos do 4.º ano de escolaridade

No ambiente de trabalho do *Geogebra*, podemos visualizar três janelas: a zona algébrica, a zona gráfica e uma folha de cálculo (ver Figura 3). O facto de apresentar em simultâneo, as três janelas referidas, permite-nos visualizar simultaneamente três representações de um mesmo objeto. Contudo, no *Geogebra Prim*, surge apenas a janela gráfica que é o necessário e adequado para o estudo a realizar.

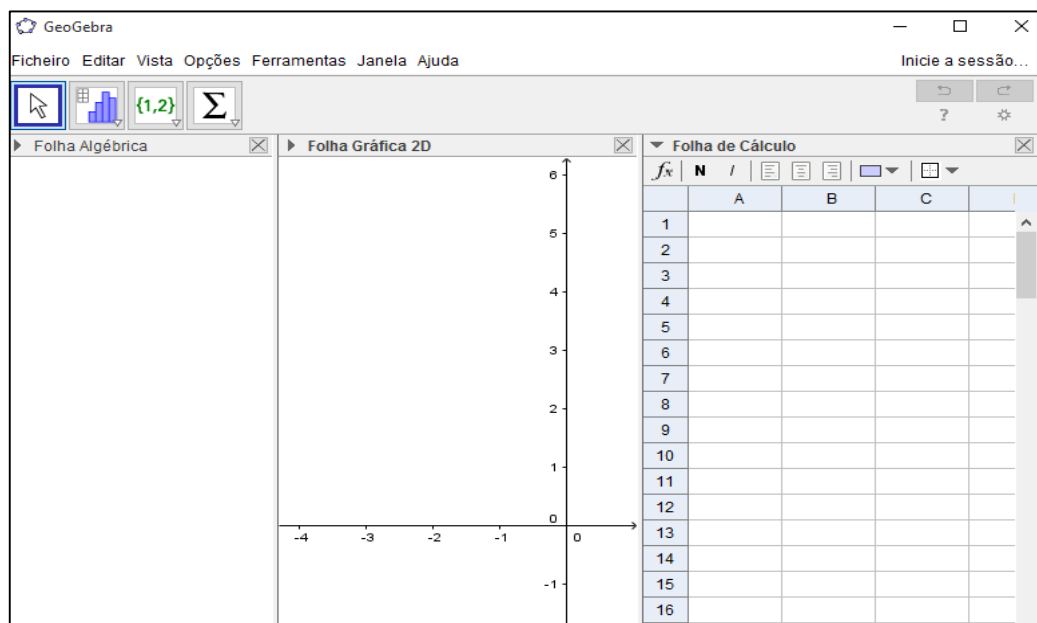


Figura 3 – Ambiente de trabalho do *GeoGebra*

O GeoGebra é um programa bastante intuitivo e auto explicativo, adequado aos utilizadores. As opções das ferramentas possuem ajuda para a utilização do *software* por parte do utilizador (ver Figura 4).

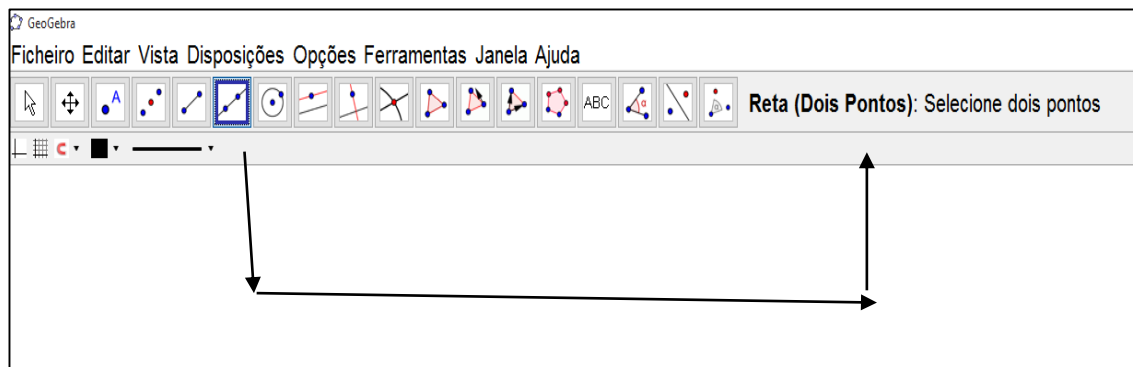


Figura 4 – Ferramentas do *GeoGebra Prim*

Para além das vantagens descritas anteriormente, o *Geogebra Prim* não mostra, por defeito, o rótulo nos objetos, o traço dos mesmos é mais grosso do que no *Geogebra*, representa os ângulos até ao máximo do ângulo raso, entre outras particularidades que facilitam a sua utilização por parte dos mais novos.

2.6. Materiais Manipuláveis (MM)

A definição de materiais manipuláveis tem subjacente a designação adotada pelos documentos e programas do Ministério da Educação.

Assim sendo, de acordo com Ribeiro (1995, citado por Botas, 2008), o material manipulável resume-se a “qualquer objeto concreto que incorpora conceitos matemáticos, apele a diferentes sentidos podendo ser tocados, movidos, rearranjados e manipulados pelas crianças” (p. 28).

Já em 1991, as normas recomendavam o uso de materiais manipuláveis, como o geoplano, o ábaco, os compassos e os transferidores. Referiam também que cabia aos professores proporcionar um ambiente nas aulas que conduzisse os alunos a explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar ideias. Deviam usar com frequência materiais manipuláveis que implicassem o raciocínio de forma a fomentar a aprendizagem de ideias abstratas.

Segundo o Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME, 2001), os materiais manipuláveis

são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover atividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da atividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim. (p. 15)

De acordo com Breda et al., (2011) os materiais manipuláveis podem ter um papel fundamental como mediadores na aprendizagem dos diversos temas de Geometria. Estes autores referem que

os materiais só por si não conduzem a nenhuma aprendizagem, tendo o professor um papel fundamental neste processo. Os professores devem disponibilizar os materiais e organizar adequadamente o ambiente de aprendizagem, de modo a encorajar os alunos a explorar as figuras e as suas propriedades. (p. 20)

Segundo Vale (1999), o material manipulável caracteriza-se como sendo

o material concreto de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento ativo dos alunos por exemplo o ábaco, geoplano, folhas de papel, etc. (p. 112)

Segundo o PMEB (2007), os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) têm um papel importante na aprendizagem da Geometria. Ajudam na compreensão de conceitos e ideias matemáticas, principalmente no 1.º CEB, pois privilegiam a exploração, a manipulação e a experimentação, promovendo o desenvolvimento do sentido espacial. Funcionam como apoio à construção de determinados conceitos, que necessitam de um suporte físico para uma melhor compreensão e assimilação.

Alguns materiais são especificamente apropriados para o ensino da Geometria, como por exemplo: geoplanos, tangrans, peças poligonais encaixáveis, espelhos, miras, modelos de sólidos geométricos, *puzzles*, mosaicos, réguas, esquadros, compassos.

No programa em vigor não há uma referência que atribua aos materiais manipuláveis uma importância tão vinculada quanto a verificada no programa anterior.

Geoplano

O geoplano é um material manipulável (ver figura 5) que o professor deve utilizar, sempre que possível, nas aulas de Matemática. Este serve para motivar os alunos na realização de tarefas. Desenvolve a atenção, a imaginação, a criatividade, o poder de observação, a descoberta, a orientação espacial e a destreza manual. Com este recurso os alunos desenvolvem, em simultâneo, a observação, a construção, a representação e a comunicação. Facilita também, a investigação, a exploração e a argumentação em Matemática (Coelho, Tavares & Costa, 2012). Estes defendem a realização de tarefas com o Geoplano por permitir o desenvolvimento de competências em relação à exploração espacial e à visualização, uma vez que contribuem para

- desenvolver o conhecimento visual de formas geométricas planas;
- ampliar a capacidade de representação (através da cópia das figuras do Geoplano para a folha pontuada);
- diferenciar, construir, identificar figuras geométricas e analisar as suas características e propriedades;
- construir itinerários;
- explorar transformações geométricas de figuras;
- compreender, diferenciar e calcular áreas e perímetros;
- resolver problemas envolvendo os temas/tópicos supramencionados.

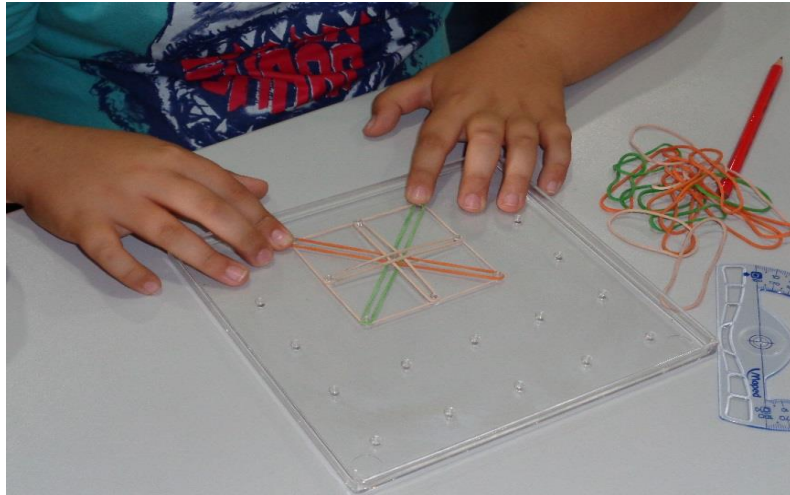


Figura 5 - Geoplano

Segundo diversos autores, como Matos e Serrazina (1996), Abrantes et al. (1999), Vale (1999) e outros como também os diferentes documentos do Ministério da Educação, desde as orientações curriculares do PMEB e NCTM (2007, 2013) referem que o uso de materiais manipuláveis, em particular o Geoplano, proporcionam aos alunos oportunidades importantes para o desenvolvimento do raciocínio, facilitando a compreensão dos conceitos.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentam-se as opções metodológicas do estudo, fazendo-se uma breve referência à investigação qualitativa e ao estudo de caso. Identificam-se, ainda, os participantes, as tarefas, os procedimentos adotados e os instrumentos de recolha e análise de dados.

3.1. Opções Metodológicas

Com a realização deste estudo, pretende-se analisar e compreender, através da implementação de uma sequência de tarefas de investigação e exploração, de que forma o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, na área dos quadriláteros, com os recursos *GeoGebra* e *Geoplano*, contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

A investigação seguiu uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa que se encontra validada pelos mais variados autores. Segundo Bogdan e Biklen (2013), a metodologia qualitativa possui cinco características fundamentais: I) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal da recolha de dados; II) os dados recolhidos são de natureza descritiva, em forma de palavras ou imagens; III) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que com os resultados ou produtos; IV) a análise dos dados é de forma indutiva; V) o investigador interessa-se por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Neste estudo, as características mais representativas da investigação qualitativa são a análise de conteúdo e a observação participante, onde o investigador vai procurar compreender e analisar os trabalhos dos alunos, nomeadamente, os dados descritivos

orais e escritos, ou desenhos, o modo ou o processo como vão construindo gradualmente os seus conhecimentos.

Meirinhos e Osório (2010) consideram que a metodologia qualitativa segue uma perspectiva mais interpretativa e construtivista. Para Denzin e Lincoln (1994), qualitativa significa maior importância a processos e significados que não são medidos nem examinados.

Neste estudo, a estratégia de investigação é o estudo de caso. De acordo com Coutinho (2011), o estudo de caso é analisado, em detalhe, em profundidade, recorrendo a todos os métodos que se revelem apropriados. O objetivo da pesquisa é a realidade como um todo, ampla, integrada, procurando compreender o caso na sua unicidade.

Segundo Ponte (2006), um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica, baseia-se no trabalho de campo ou na análise documental. Trata-se de um tipo de pesquisa bastante descritivo. Para além da descrição, este pode ter um profundo alcance analítico, questionando a situação, comparando com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes, dando origem assim a novas teorias e novas questões para futura investigação. De acordo com o mesmo autor, este tipo de investigação não é experimental, o investigador, embora seja observador participante, não pretende alterar a situação, mas compreendê-la. Num estudo de caso, não se tem controlo sobre os acontecimentos, não é possível ou desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (Merriam, 1988; Yin, 1984).

Segundo Yin (1994, citado por Coutinho, 2011, p. 294), o estudo de caso pode entender-se como sendo “a estratégia de investigação mais adequada quando queremos saber o ‘como’ e o ‘porquê’ de acontecimentos atuais sobre os quais o investigador tem pouco ou nenhum controlo” e de acordo com os mesmos autores, o mesmo pode ser orientado para explorar, descrever e explicar.

Em síntese, segundo Ponte (2006), podemos concluir que nos estudos de caso não se pretendem conhecer propriedades de toda a população, mas sim, compreender em pormenor uma dada situação ou fenómeno, estudar os processos e as dinâmicas da prática com o objetivo de a melhorar.

3.2. Participantes do Estudo

Os participantes deste estudo são alunos do 4.º ano de escolaridade, procedentes de uma escola oficial do distrito do Porto e pertencentes a uma turma com vinte e três alunos, sendo treze do 4.º ano e dez do 3.º ano.

Os alunos apresentam um nível etário em conformidade com o ano de escolaridade que frequentam, estando pela primeira vez no 4.º ano, com um aproveitamento regular. São interessados, comunicativos, ativos, empenhados, e apresentam bom comportamento.

Refira-se ainda que apesar de, na escola, não trabalharem com computadores, em casa todos têm acesso a um computador ou *tablet*.

De acordo com o objeto de estudo, os participantes, o João, o Pedro, a Joana e a Sofia (nomes fictícios) vão constituir dois grupos de trabalho de dois elementos. A constituição dos grupos não foi aleatória, pois procurou-se formar grupos heterogéneos relativamente aos conhecimentos dos alunos, no sentido de se ajudarem mutuamente.

Assim, o critério utilizado na constituição dos grupos (João e Joana) e (Pedro e Sofia) foi a formação de grupos equilibrados, pelo que juntamos um aluno razoável com outro de melhor aproveitamento. No grupo (João e Joana), a melhor aluna é a Joana, e no grupo (Pedro e Sofia), o melhor aluno é o Pedro. Contudo, os outros participantes, ou seja, o João e a Sofia são alunos médios, com algumas dificuldades, mas com vontade de aprender.

O João e a Joana vão constituir o caso (1) e o Pedro e a Sofia caso (2). Quando lhes foi apresentado o estudo que se iria desenvolver, mostraram-se interessados e com vontade de participar e aprender.

Este estudo vai ser desenvolvido em contexto de sala de estudo.

3.3. Procedimentos

O presente estudo decorreu durante o ano letivo de 2014/2015, tendo o trabalho de campo sido desenvolvido durante o 2.º e 3.º período. Foi pedida a autorização aos encarregados de educação (ver Apêndice 1), para que os seus educandos pudessem participar no estudo, uma vez que as intervenções iriam ser gravadas em áudio e estava previsto o registo fotográfico do trabalho desenvolvido pelos alunos. No mesmo documento era garantido o seu anonimato.

As tarefas a implementar foram desenhadas e, de seguida, foram preparados, os respetivos recursos materiais, uma vez que este estudo envolve diferentes estratégias. A sequência das mesmas foi organizada, tendo subjacente o objeto deste estudo, no domínio Geometria e Medida 4, ou seja, o estudo dos quadriláteros. Note-se que a diversificação das tarefas é importante, porque cada tipo desempenha um papel diferenciado relativamente à aprendizagem (Ponte, 2005). Além da escolha de tarefas distintas, foi necessário fazer opções e estabelecer percursos de ensino através de tarefas cuidadosamente selecionadas, de modo que estas consigam proporcionar um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito (Ponte, 2005).

Foi estabelecida a calendarização para a realização das tarefas e instalado o *software* nos computadores que iriam ser utilizados no desenvolvimento deste estudo. A Tabela 3 refere uma síntese das atividades desenvolvidas.

Tabela 3 – Síntese de Atividades Desenvolvidas

Período	Atividades	
Outubro a Fevereiro de 2015	Revisão de Literatura	Elaboração da planificação do estudo; Definição dos objetivos e questões de investigação; Preparação dos recursos materiais.
Março a Abril 2015		Desenho das tarefas a implementar; Pedido de autorização aos encarregados de educação.
Abril a Junho 2015		Implementação da sequência de tarefas; Análise dos dados e conclusões do estudo.

O trabalho de campo terminou após a implementação das tarefas, com a realização de uma pequena entrevista informal, que teve como objetivo primordial a recolha de informações complementares aos alunos, sobre todo o trabalho desenvolvido neste estudo.

3.4. As Tarefas

Na Matemática, como nas outras disciplinas escolares, a aprendizagem dos alunos depende essencialmente do que acontece na sala de aula (Ponte, 2014). As tarefas fazem parte do ensino, onde o aluno tem um papel ativo na aprendizagem.

Segundo Abrantes et al. (1999), a aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento, pois à medida que os alunos se vão envolvendo em novas situações, vão relacionando aquilo que já sabem com as aprendizagens das novas situações. A aprendizagem requer o envolvimento dos alunos em atividades significativas.

Nesta linha de orientação, as Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1991/1994, citado por Ponte, 2014) referem que “as tarefas são os projetos,

questões, problemas, construções, aplicações, e exercícios em que os alunos se envolvem. Elas fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos” (p.16).

Efetivamente, as tarefas têm um papel fundamental no ensino e aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode dar origem a questões diversas, dependendo do modo como é proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos e o contexto de aprendizagem. O recurso aos materiais manipuláveis e aos instrumentos tecnológicos é imprescindível como ponto de partida na realização de muitas tarefas escolares (Abrantes et al., 1999).

Na construção das tarefas deste estudo, tivemos como referência os conteúdos referentes ao domínio da Geometria e Medida (GM) no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (2013).

O trabalho iniciou-se com a construção da tarefa de diagnóstico “Questionário Inicial” que iria ser resolvido individualmente. Com este pretendia-se conhecer o nível dos conhecimentos dos alunos, no domínio da Geometria, nomeadamente, dos quadriláteros, no sentido de promover o desenvolvimento dos seus conhecimentos, com os recursos referidos anteriormente.

Na construção da sequência de tarefas sobre o objeto de estudo, foi considerado os aspetos investigativo e exploratório, onde os alunos vão descobrir e utilizar estratégias para resolver as questões propostas. Seguidamente vão explicar e justificar os seus raciocínios.

A Tabela 4 apresenta a sequência de tarefas, a sua designação, os seus objetivos e os recursos utilizados.

Tabela 4 - Descrição da Sequência de Tarefas

Tarefa	Objetivos	Recursos	Apêndice
Tarefa 1 – Construção de quadriláteros	Construir quadriláteros. Identificar as propriedades das diagonais em relação a cada um deles.	Geoplano	3
Tarefa 2 – Construção de quadrados, retângulos e losangos	Construir quadrados, retângulos e losangos não congruentes. Identificar os eixos de simetria nos mesmos.	Geoplano	4
Tarefa 3 – Reconhecer as propriedades dos quadriláteros	Reconhecer as propriedades dos quadriláteros: quadrado, retângulo e losango.	Geoplano	5
Tarefa 4 – Explorar o <i>Geogebra</i>	Explorar as ferramentas do <i>GeoGebra</i> .	<i>Geogebra</i>	6
Tarefa 5 – Explorar o <i>GeoGebra</i>	Explorar as ferramentas do <i>GeoGebra</i> .	<i>Geogebra</i>	7
Tarefa 6 – Construção de quadriláteros	Construir um quadrado, um retângulo e um losango.	<i>Geogebra</i>	8
Tarefa 7 – Construção de quadriláteros	Construir um retângulo dinâmico ³ . Verificar que o quadrado é um retângulo. Construir um quadrado dinâmico.	<i>Geogebra</i>	9
Tarefa 8 – Análise da construção do losango	Identificar as propriedades do losango. Verificar que o quadrado é um losango.	<i>GeoGebra</i>	10
Tarefa 9 – Classificar quadriláteros	Identificar quadriláteros a partir de propriedades específicas. Compreender a inclusão de classes dos quadriláteros.	Geoplano	11

³ Figura geométrica que, com o arrastamento de um dos seus elementos, mantém as suas propriedades.

As tarefas situam-se essencialmente, como já referimos, nos dois primeiros níveis de compreensão da teoria van Hiele e parcialmente no terceiro, (1) Visualização ou Reconhecimento, (2) Análise, (3) Dedução informal ou Ordenação. No nível 1, os alunos reconhecem visualmente as figuras geométricas, não reconhecem ainda as propriedades, têm condições para aprender e desenvolver os conhecimentos; no nível 2, os alunos já identificam as propriedades das figuras geométricas, exploram, investigam para resolver as tarefas; no nível 3, os alunos já podem ser capazes de fazer a inclusão de classes (Alves & Sampaio, 2010).

Nas tarefas 1, 2 e 3, os alunos vão construir figuras geométricas e reconhecer as suas propriedades com recurso ao Geoplano.

Tarefa 1 – Construção de Quadriláteros

Objetivos:

Construir quadriláteros.

Identificar as propriedades das diagonais em relação a cada um deles.

Atividades/ Estratégias:

A atividade será iniciada com um pequeno diálogo sobre os quadriláteros estudados.

Os alunos irão ser questionados acerca do conceito de diagonal e das suas propriedades.

Os alunos irão resolver a tarefa proposta em pares, podendo solicitar o apoio da investigadora.

No final, irá proceder-se à discussão e síntese da tarefa.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta - Construção de Quadriláteros

Trabalho com o Geoplano

1. Os quadriláteros são figuras geométricas com quatro lados.
 - Constrói, no Geoplano, todos os tipos de quadriláteros que conheces.
 - Copia para este ponteados os quadriláteros que construístes no Geoplano e escreve o seu nome.
 - Desenha as diagonais dos Quadriláteros construídos.

2. Completa a tabela
Escreve o nome dos quadriláteros que conheces e coloca uma cruz (X) onde se verificarem as respetivas propriedades das diagonais.
(ver Apêndice 3)

Tarefa 2 – Construção de Quadrados, Retângulos e Losangos

Objetivos:

Construir quadrados, retângulos e losangos não congruentes.

Identificar os eixos de simetria nos mesmos.

Atividades/ Estratégias:

A atividade vai começar com uma conversa acerca do conceito de simetria.

A tarefa irá ser realizada em pares, podendo os alunos tirar dúvidas com a investigadora.

No final, irá proceder-se à análise e discussão de resultados.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta – Construção de Quadrados, Retângulos, Losangos

Trabalho com o Geoplano

1. No Geoplano, completa os seguintes Quadriláteros – Losangos, Retângulos, Losangos
 - a) Explica por palavras tuas como completaste os quadrados, os retângulos e os losangos.
2. Desenha os eixos de simetria dos quadriláteros que construístes.
3. Preenche o quadro abaixo.
(ver Apêndice 4)

Tarefa 3 – Reconhecer as propriedades dos quadriláteros

Objetivos:

Reconhecer as Propriedades dos quadriláteros: quadrado, retângulo e losango.

Atividades/ Estratégias:

Os alunos irão trabalhar autonomamente, em pares, podendo solicitar o apoio da investigadora.

Os alunos irão apresentar o seu trabalho.

No final, irá proceder-se à discussão e síntese da tarefa.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta: Reconhecer as propriedades dos Quadriláteros

Trabalho com o Geoplano

1. Recorda as atividades realizadas. Podes utilizar o Geoplano, se for preciso.
Observa as propriedades dos quadriláteros que desenhaste: lados, ângulos, diagonais, simetrias.
Preenche o Quadro seguinte
(ver Apêndice 5)

Nas tarefas 4 e 5, os alunos vão explorar o *GeoGebra*, realizando tarefas diversificadas. Estas têm como objetivo orientar o primeiro contacto dos alunos com o *software*, para se familiarizarem com as ferramentas e comandos.

Tarefa 4 – Explorar o *GeoGebra*

Objetivos:

Explorar as ferramentas do *GeoGebra*.

Atividades/ Estratégias:

A investigadora irá demonstrar os menus e ferramentas do ambiente de trabalho do *GeoGebra*.

Os alunos vão realizar os exercícios da tarefa proposta, em pares, com a ajuda da investigadora.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta – Explorar o *GeoGebra*

1. Construir retas paralelas
Desenhar outras retas paralelas
2. Construir retas perpendiculares
(ver Apêndice 6)

Tarefa 5 – Explorar o *GeoGebra*

Objetivos:



Explorar as ferramentas do *GeoGebra*.

Atividades/ Estratégias:

Os alunos vão realizar a tarefa proposta, em pares, com o auxílio da investigadora. Irão também praticar e consolidar conhecimentos acerca do *GeoGebra*.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta – Explorar o *GeoGebra*

1. Construir segmento e ponto médio
 - Marcar pontos
 - Construir segmento de reta
 - Selecionar “ponto médio” e marcar ponto médio do segmento de reta
 - Mover os vértices e verificar que o ponto médio se mantém.
2. Construir um triângulo.
 - Marca três pontos A, B e C.
 - Seleciona no menu, Polígono e  desenha o triângulo ABC.
 - Grava o trabalho com o nome “triângulo”.
3. Construir um quadrilátero qualquer.
 - Marca quatro pontos A, B, C e D.
 - Desenha os segmentos de reta [AB], [BC], [CD] e [DA].
 - Mede os lados do quadrilátero, seleciona no menu, Distância ou Comprimento. 

(ver Apêndice 7)

Nas tarefas seguintes 6 e 7, os alunos vão trabalhar com o *GeoGebra*, explorando o tema em estudo, desenvolvendo e construindo progressivamente os seus conhecimentos. As propostas consistem na construção de quadriláteros (Quadrado, Retângulo e Losango) tendo subjacente as suas propriedades, recorrendo aos conhecimentos prévios ou adquiridos com o recurso ao Geoplano.

Tarefa 6 – Construção de quadriláteros

Objetivos:

Construir um quadrado, um retângulo e um losango

Atividades/ Estratégias:

Os alunos irão resolver a tarefa 6.

O trabalho será realizado em pares, autonomamente.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta – Trabalho com o *GeoGebra*.

1. Construir os seguintes quadriláteros:

- a) Quadrado
- b) Retângulo
- c) Losango.

Explica como construístes

(ver Apêndice 8)

Tarefa 7 – Construção de quadriláteros

Objetivos:

Construir um retângulo dinâmico.

Verificar que o quadrado é um retângulo.

Construir um quadrado dinâmico.

Atividades/ Estratégias:

Será feito um pequeno diálogo com os alunos acerca de figuras geométricas dinâmicas.

Os alunos irão resolver a tarefa 7, em grupos, com o auxílio da investigadora. Pretende-se também que percebam que o quadrado é um retângulo.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta – Construção de Quadriláteros com o *GeoGebra*.

1. Constrói um retângulo dinâmico, ou seja, independentemente da transformação que se consiga fazer à figura, este continuará a ser um retângulo, mantendo as suas propriedades.

Tens de ocultar a malha quadriculada.

Consegues transformar o retângulo num quadrado? O que podes concluir?

2. Constrói um quadrado dinâmico.
(ver Apêndice 9)

Na tarefa 8 vão analisar uma construção do losango, no *GeoGebra*. Os alunos vão poder visualizar, explorar e compreender as propriedades deste quadrilátero, através de uma construção já feita, na qual vão ter de desenhar as suas diagonais.

Tarefa 8 – Análise da construção do losango**Objetivos:**

Identificar as propriedades do losango.

Verificar que o quadrado é um losango.

Atividades/ Estratégias:

Será realizado um pequeno diálogo sobre os exercícios da tarefa 8.

Os alunos vão resolver a tarefa, em grupos, com o auxílio da professora. Pretende-se também que identifiquem as propriedades do losango e verifiquem que o quadrado é um losango.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta - Análise da Construção do Losango com o *GeoGebra*.

1. Analisar a construção de um losango.

- Abre o ficheiro “Losango”.
- Desenha as diagonais.
- Mede o comprimento dos lados e das diagonais.

O que observas?

Consegues transformar o losango num quadrado? O que podes concluir
(ver Apêndice 10)

Na Tarefa 9, os alunos vão classificar Quadriláteros, resolvendo questões para consolidação dos conhecimentos desenvolvidos, na realização de tarefas anteriores. Também se pretende que agrupem ou façam a inclusão de classes dos quadriláteros no diagrama de *Venn*, de acordo com as suas propriedades.

Tarefa 9 – Classificar quadriláteros

Objetivos:

Identificar quadriláteros a partir de propriedades específicas.

Compreender a inclusão de classes dos quadriláteros.

Atividades/ Estratégias:

Será feito um pequeno diálogo, explicando o que é pedido nesta tarefa.

Os alunos vão resolver a tarefa em pares.

No final irá realizar-se a análise e discussão do trabalho feito pelos alunos.

Recursos/ Materiais:

Tarefa proposta – Classificar Quadriláteros

Trabalho com o Geoplano e GeoGebra

1. Adivinha qual é o quadrilátero.

Quadrilátero com os lados todos iguais e dois eixos de simetria.

Quadrilátero com ângulos iguais e dois eixos de simetria.

Quadrilátero com quatro eixos de simetria.

2. Agrupa os quadriláteros que estudaste no diagrama de Venn, de acordo com as suas propriedades.

(ver Apêndice 11)

3.5. Instrumentos e Procedimentos de Recolha de dados

De acordo com os objetivos do estudo, foram utilizadas diversas técnicas de recolha de dados, nomeadamente: observação, análise documental, questionário, entrevistas, gravação áudio e fotografia aos trabalhos dos alunos. A utilização destes instrumentos constitui um meio de obter dados diferentes que proporcionam a possibilidade de cruzamento da informação, pois a utilização de múltiplas fontes de dados permite-nos considerar um conjunto mais diversificado de tópicos de análise (Yin, 1994, citado por Coutinho, 2011).

A recolha de dados iniciou-se com um questionário aos alunos sobre o domínio dos quadriláteros, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) e Metas Curriculares (2013).

Nas sessões seguintes foi registada a gravação dos trabalhos, com a observação direta e participante da investigadora na resolução de algumas tarefas. Em todas as aulas, foram registadas anotações. Todos os dados recolhidos durante o estudo constituem as notas de campo, uma vez que estas são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha de dados” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150).

As entrevistas realizaram-se em grupo, ocorreram no início e no final deste estudo. Na primeira entrevista, pretendíamos recolher informação acerca da opinião dos alunos sobre a Matemática, em particular, sobre o estudo das figuras geométricas, do seu aproveitamento nesta disciplina e se trabalhavam com o Geoplano e com o computador nas aulas de Matemática.

No final das tarefas consideramos importante saber a opinião dos alunos sobre o trabalho desenvolvido, nomeadamente, o trabalho com o *GeoGebra*, e o seu contributo na compreensão das propriedades das figuras geométricas, sobre o Geoplano e se este facilitou a compreensão nos trabalhos desenvolvidos e ainda se consideraram uma mais-valia o trabalho em equipa.

A técnica da entrevista é útil e complementa a observação, sendo também necessária quando se trata de recolher dados válidos sobre as crenças, as opiniões e

as ideias dos sujeitos observados (Werner & Schoepfle, citados por Hébert, Goyette & Boutin, 2012).

Assim, os dados recolhidos dos alunos permitem-nos considerar um conjunto mais diversificado de tópicos de análise, na medida que permite obter elementos mais detalhados dos sujeitos do estudo (Patton, 1987). As conclusões são mais convincentes já que advêm de um conjunto mais alargado de fontes.

3.6. Procedimento de Análise de Dados

Na análise documental, serão examinados os registos escritos realizados pelos participantes, como também os trabalhos realizados no *Geogebra*. Com as gravações áudio e as fotografias, pretendemos ter uma maior perceção do estudo e das aprendizagens no decorrer das tarefas.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados é um processo de busca e de organização sistemática de dados, como transcrições de entrevistas, notas de campo e outros materiais com o objetivo da compreensão dos mesmos e de ser possível partilhar conclusões obtidas. A análise envolve todo o trabalho desenvolvido no estudo, a sua organização, a sua divisão em unidades, a síntese, a descoberta de aspetos importantes que devem ser assimilados e transmitidos.

Para analisar os dados neste estudo, foi utilizada a análise de conteúdo. De acordo com Hébert, Goyette e Boutin (2012), a análise de conteúdo é uma técnica com uma função de complementaridade na investigação qualitativa. Segundo Bardin (1997, citado por Coutinho, 2011), a análise de conteúdo realiza-se em três momentos sucessivos: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados.

Assim, começou-se por organizar os dados recolhidos e posteriormente foi feita uma análise de conteúdo.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo é feita a análise dos dados recolhidos ao longo do estudo, referenciando-se os procedimentos, as dificuldades, as estratégias que emergiram durante a implementação da sequência de tarefas. Será dada uma perspectiva do conhecimento prévio de Geometria revelado pelos alunos, aquando da realização do Questionário Inicial. A seguir apresentaremos a descrição e a análise de dados das tarefas com recurso ao Geoplano e ao *Geogebra*.

Os dados são apresentados de acordo com os dois casos em análise, de forma a poder responder às questões de investigação.

4.1. O Conhecimento Geométrico Prévio

O conhecimento prévio dos alunos é importante para a análise dos dados do trabalho desenvolvido com os participantes deste estudo. Após a correção do questionário inicial realizado pelos alunos, individualmente, foi possível perceber a existência de algumas dificuldades, principalmente na explicação dos conceitos.

Na questão (1), os alunos observaram diversas figuras geométricas (ver figura 6) e indicaram as que representavam quadrados, retângulos e losangos (figuras 7, 8, 9 e 10).

1. Observa as figuras e indica as que são:

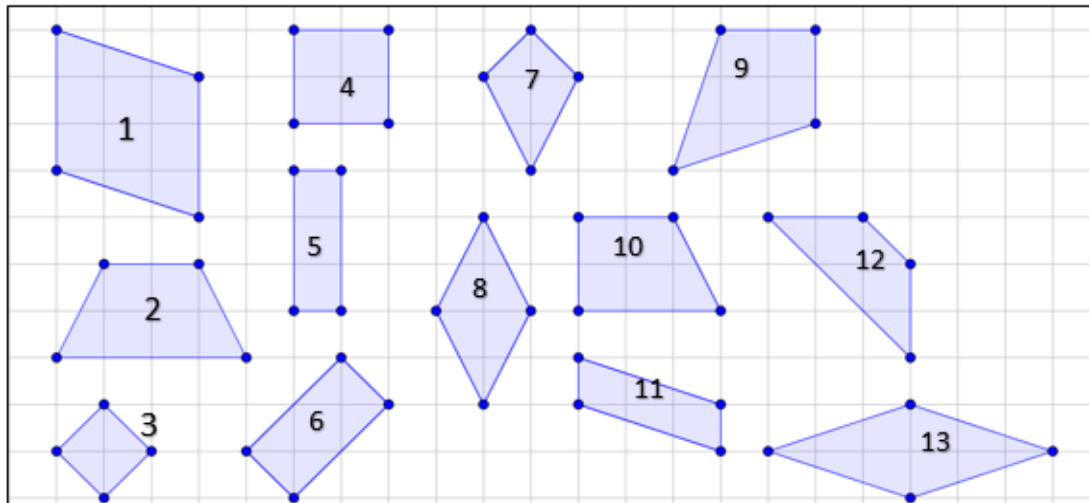


Figura 6 – Classificar Quadriláteros

- a) Quadrados. 4,
- b) Retângulos. 5,6.
- c) Losangos. 1,2,3,7,8,13.

Figura 7 – Resposta do João

- a) Quadrados. 4,3
- b) Retângulos. 5,6
- c) Losangos. 3,7,13

Figura 8 – Resposta da Joana

- a) Quadrados. 4,3
- b) Retângulos. 5,6
- c) Losangos. 1,2,3,7,8,11,13,12,9,10

Figura 9 – Resposta do Pedro

- a) Quadrados. 1, 4
- b) Retângulos. 5, 6, 11
- c) Losangos. 2, 3, 7, 8, 9, 10, 12, 13

Figura 10 – Resposta da Sofia

Analisando todas as respostas dos alunos, verifica-se que nenhum aluno respondeu acertadamente a esta questão. O quadrado (4), na sua posição *standart* foi indicado por todos. Em relação ao quadrado (3) foi referido por apenas metade dos alunos. No entanto, nenhum aluno mencionou os retângulos quadrados 3 e 4, revelando desconhecer a classificação hierárquica ou inclusiva dos quadriláteros. Os alunos estavam, neste caso, a identificar os quadrados e os retângulos propriamente ditos com contornos, portanto, da adoção da classificação partitiva.

Em relação ao losango, todos os alunos identificaram os losangos propriamente ditos. Três dos alunos referiram também o 3, certamente pela posição adotada. Todos os alunos referiram o 7 como losango o que revela apenas a identificação deste quadrilátero, não pelas suas propriedades, mas pela sua posição a algo mais particular mas não perceptível.

Sobre os conhecimentos que os alunos demonstraram acerca das figuras geométricas referidas, vê-se que possuem alguns conhecimentos formais mas, na sua generalidade, desconhecem as suas propriedades. Os alunos demonstraram ter a imagem concetual das figuras geométricas quadrado, retângulo e losango, na posição prototípica, pois, como podemos ver nas suas identificações, apresentam as figuras recorrendo à visualização e à forma concetual que possuem.

Na questão (2) era proposto os alunos completarem as figuras para que ficassem simétricas relativamente aos eixos indicados.

2. Completa as figuras para que fiquem simétricas, relativamente aos eixos indicados.

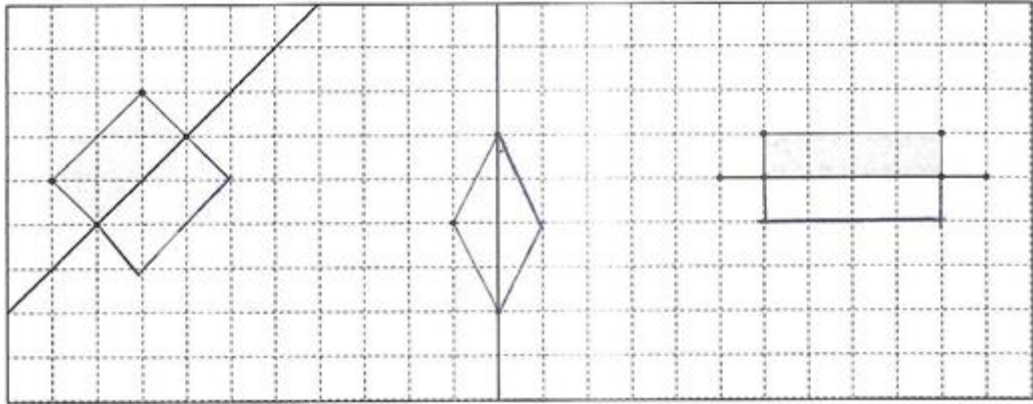


Figura 11 – Completar Figuras Geométricas Relativamente a Eixos de Simetria

Os alunos parecem dominar este conceito, uma vez que resolveram a questão corretamente. Apenas a Sofia demonstrou algumas dificuldades, como podemos ver na figura seguinte (12).

2. Completa as figuras para que fiquem simétricas, relativamente aos eixos indicados.

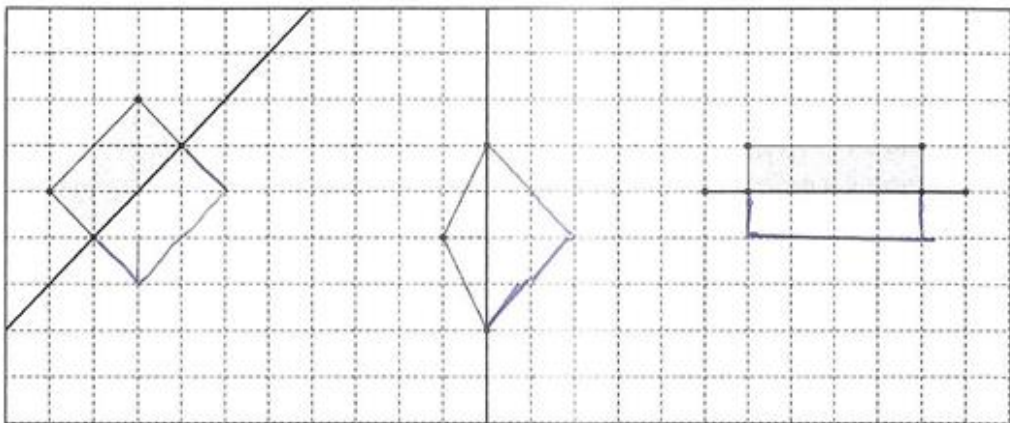


Figura 12 – Resolução da Questão 2 pela Sofia

O aluno (4) demonstrou algumas dificuldades, como se pode ver na imagem, ao completar as figuras, relativamente aos eixos de simetria do losango.

Na questão (3) os alunos tinham de representar se soubessem os eixos de simetria dos quadriláteros. A Figura 13 representa o trabalho realizado pelo Pedro.

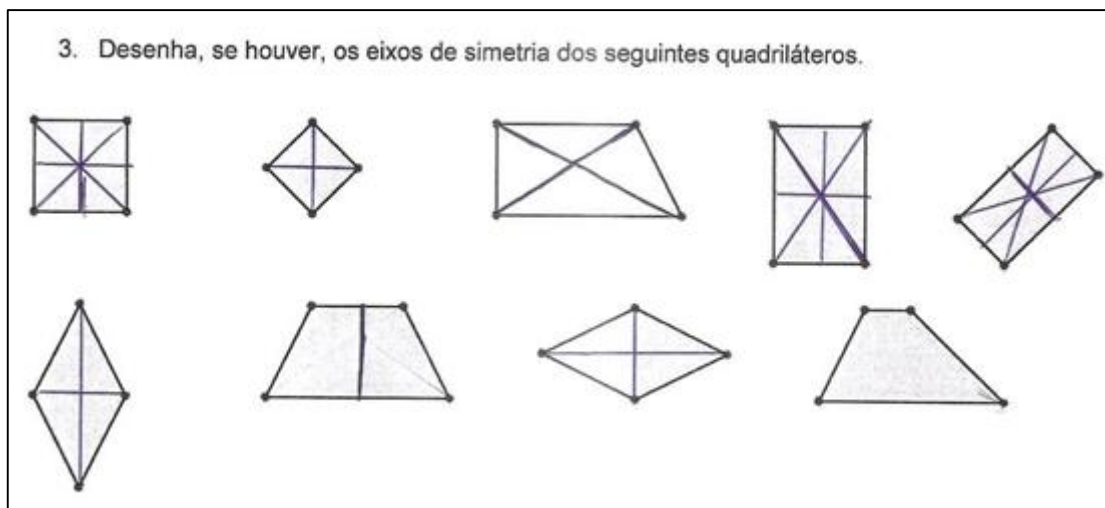


Figura 13 – Eixos de Simetria dos Quadriláteros

Na realização desta questão, os alunos não souberam desenhar corretamente as os eixos de simetria. Deixaram transparecer alguma confusão entre eixos de simetria e diagonais.

Na questão (4) os alunos vão desenhar as diagonais de quadriláteros. A figura 14 representa o trabalho realizado pela Joana.

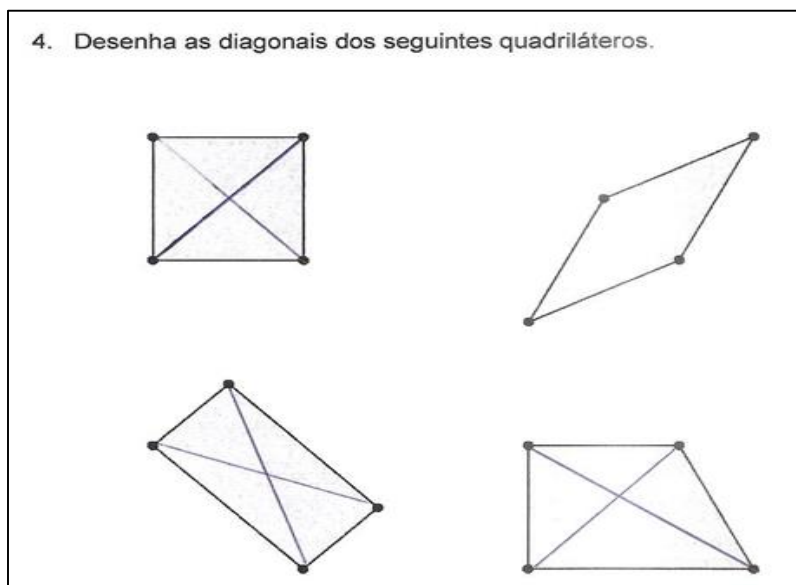


Figura 14 – Diagonais Quadriláteros

Os alunos não conseguiram desenhar as diagonais de todos os quadriláteros. Não houve um aluno que realizasse corretamente a questão. Como não realizaram totalmente a questão, foram levados a recordar que a diagonal de um polígono qualquer é um segmento de reta que une os vértices não consecutivos. Depois concluíram que qualquer quadrilátero tem duas diagonais.

Os alunos também mostraram algumas dúvidas na utilização de alguns termos tais como segmento de reta e vértices não consecutivos.

Na questão (5), os alunos tinham de construir três quadrados, três retângulos e três losangos não congruentes (ver Figura 15).

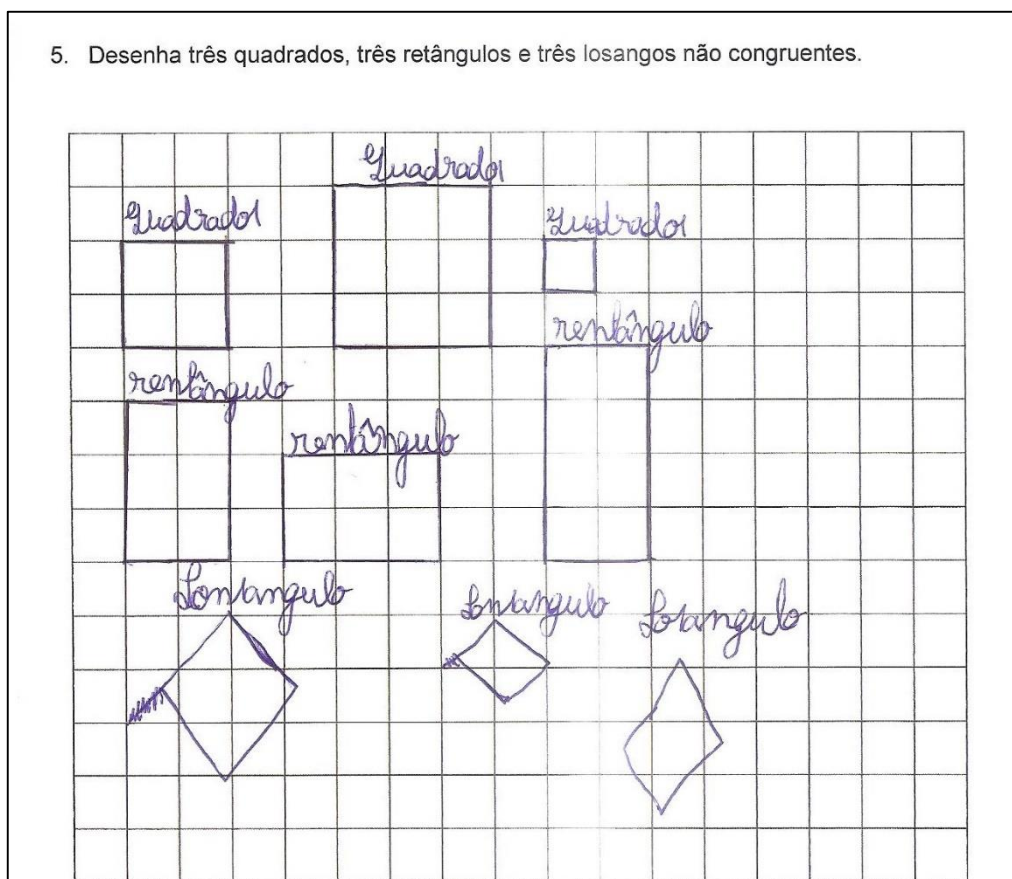


Figura 15 – Construção de Quadrados, Retângulos e Losangos

Na realização desta questão, todos os alunos mostraram conhecer o conceito de “não congruentes”. Os alunos Joana, Pedro e Sofia desenharam as figuras geométricas: quadrado, retângulo e losango, de acordo com a figura (16). Embora todos tivessem os

recursos materiais, não utilizaram a régua na construção das figuras, mas apenas o quadriculado. A dificuldade quer na escrita do nome “losango” quer na imagem conceitual do próprio polígono continua evidente e já confirmado nas questões anteriores. A figura a seguir mostra o trabalho realizado pelo aluno João.

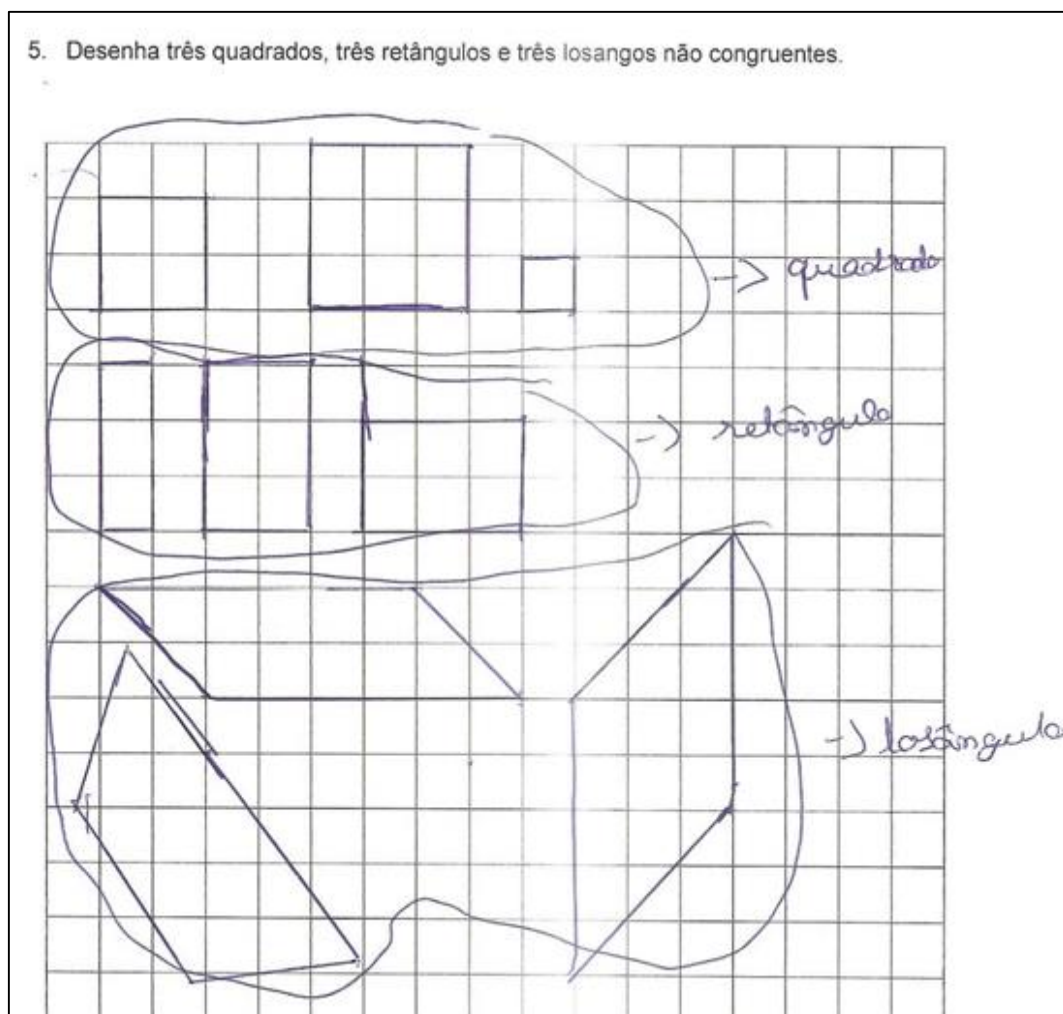


Figura 16 – Construção de Quadrados, Retângulos e Losangos.

As propriedades dos quadrados e dos retângulos parecem estar mais sólidas por parte do aluno. Este deixa transparecer que compreende as figuras pelo seu todo e representa-as na sua posição standart. Não reconhece as propriedades do losango.

Na pergunta 6 apresentamos as respostas dos alunos, para definirem o quadrado (ver Apêndice 1)

6. O que é para ti, um quadrado?

Para mim um quadrado é uma forma geométrica.

6. O que é para ti, um quadrado?

Para mim um quadrado é uma forma com quatro lados geometricamente iguais.

6. O que é para ti, um quadrado?

É um forma geométrica com 4 faces.

6. O que é para ti, um quadrado?

O que é para mim um quadrado é que ele tem 4 lados.

Figura 17 – Definição de Quadrado

Ao analisar as definições dos alunos verificamos que estes apresentam definições particularizadas ou suas, imprecisas, evidenciando dificuldades na utilização da linguagem matemática.

Em suma, os alunos possuem uma imagem concetual de quadrado mas não o sabem definir nem descrever as suas propriedades.

Na pergunta 7 apresentamos algumas respostas dos alunos para definirem o retângulo (ver Apêndice 1).

7. O que é para ti, um retângulo?

É um paralelepípedo.

7. O que é para ti, um retângulo?

Para mim um retângulo é um quadrado especial, maior ~~que~~ no comprimento do quadrado. (do que o)

7. O que é para ti, um retângulo?

É um retângulo cumprido com 4 faces.

7. O que é para ti, um retângulo?

Is que é para mim um retângulo é que tem a forma de uma parede.

Figura 18 – Definição de Retângulo

Relativamente à definição de retângulo nenhum aluno conseguiu escrever uma definição corretamente nem, no mínimo, enunciar as suas propriedades. Assim, tal como ocorre com o quadrado, os alunos possuem a imagem concetual de retângulo mas não o sabem descrever utilizando linguagem matemática adequada. É visível a confusão entre figuras a duas e a três dimensões quer na definição de retângulo como de quadrado (1.^a e 3.^a definições) a apelarem à imagem mental que possuem (2.^a e 4.^a definições).

Na pergunta 8 apresentamos algumas respostas dos alunos para definirem o losango (ver Apêndice 1).

8. O que é para ti, um losango?

É uma figura plana.

8. O que é para ti, um losango?

um losango é um quadrado virado ao contrário.

8. O que é para ti, um losango?

É um losângulo com 2 faces 4 vertice.

8. O que é para ti, um losango?

O que é para mim um losango é um triângulo.

Figura 19 – Definição de Losango

As definições utilizadas pelos alunos revelam uma enorme confusão (3.^a e 4.^a definições) e apelam à imagem mental do mesmo (1.^a e 2.^a definições). Contudo, mesmo a imagem mental que possuem não lhes permitiu reconhecer os losangos em proposta anterior.

Em suma, as respostas às questões abertas 6, 7 e 8 demonstram que os alunos possuem um conceito ou uma imagem concetual das figuras geométricas, quadrado, retângulo e losango, como já referimos, mas evidenciam dificuldades para a sua descrição revelando desconhecimento das suas propriedades fundamentais. Em todas as definições propostas, nenhum aluno foi capaz de as escrever de forma correta.

Segundo Alves e Sampaio (2010), na teoria de van Hiele, relativamente aos níveis de compreensão, poderemos situar os alunos no nível 1 (visualização ou reconhecimento), pois reconhecem visualmente as figuras geométricas, mas não

reconhecem ainda as suas propriedades de identificação. Também De Villers (2010) refere que no nível 1 (reconhecimento) os alunos reconhecem as figuras geométricas pela sua aparência global. Neste caso reconhecem quadrados, retângulos e losangos pela sua forma mas não mencionam as suas propriedades explicitamente.

4.2. Descrição e Análise das Tarefas com o Geoplano

A introdução de conceitos matemáticos através da utilização de materiais manipuláveis, pode fazer com que a Matemática se torne mais viva e que as ideias abstratas tenham mais significado.

A sequência organizada de tarefas exploratórias, como se refere na metodologia deste estudo, engloba três tarefas 1, 2, 3 com o recurso ao Geoplano. A seguir, faremos a apresentação e a análise dos resultados obtidos dos dois casos, com o desenvolvimento destas tarefas de investigação.

4.2.1. Tarefa 1 – Construção de Quadriláteros

- Construir, no Geoplano, todos os tipos de quadriláteros que conheces.
- Copiar, para o papel pontilhado, os quadriláteros que construístes, no Geoplano, e escrever o seu nome.
- Desenhar e indicar as propriedades das diagonais.

O trabalho começou com a distribuição da tarefa. A professora referiu que deviam utilizar o Geoplano e deu algumas indicações como teriam de proceder e organizar o trabalho.

Os alunos trabalharam em pares e autonomamente. Sempre que necessário solicitaram o apoio da professora, que como observadora orientou os trabalhos, procurando não influenciar os resultados. Os alunos construíram diferentes quadriláteros: quadrado, retângulo, losango e outros, primeiro no Geoplano, e depois copiaram para o papel pontilhado. Seguidamente desenharam as diagonais, revelando algumas dificuldades, na identificação dos vértices opostos. Os alunos demonstraram que já reconheciam o quadrado, o retângulo, o losango e o trapézio, pela sua forma como um todo, não pelas suas propriedades, mas pelo seu aspeto visual.

As Figuras 20 e 21 apresentam respectivamente o trabalho dos casos 1 e 2.

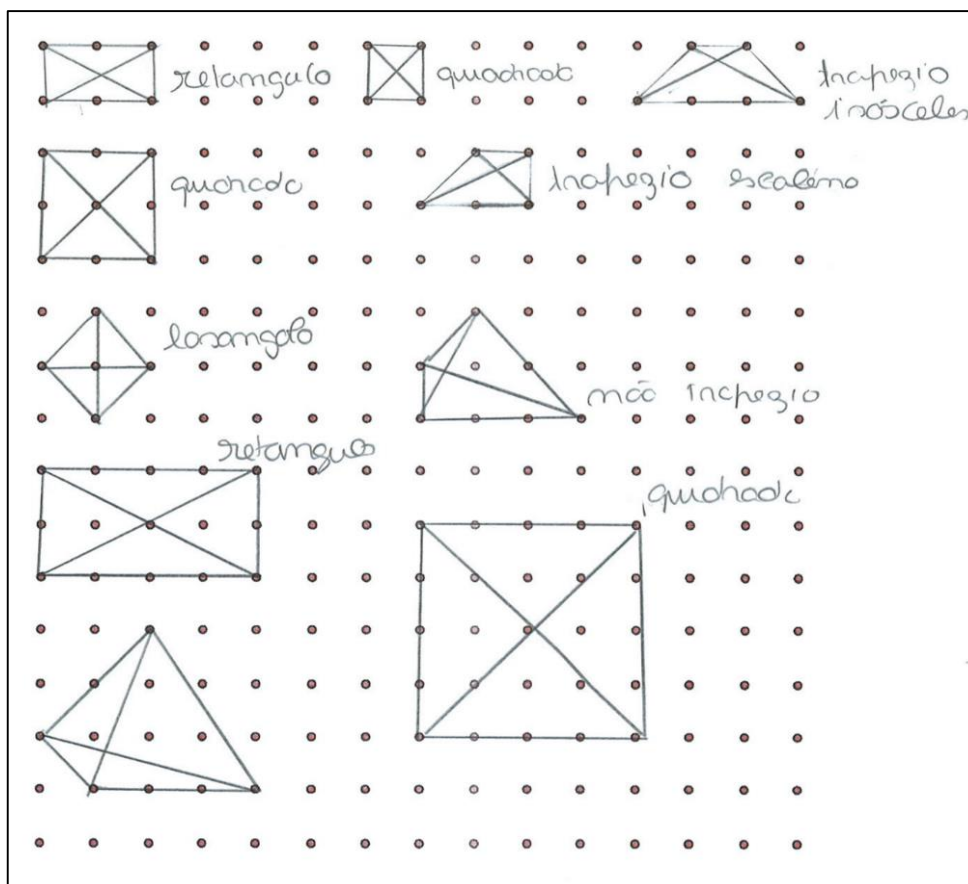


Figura 20 – Construção de Quadriláteros - Caso 1

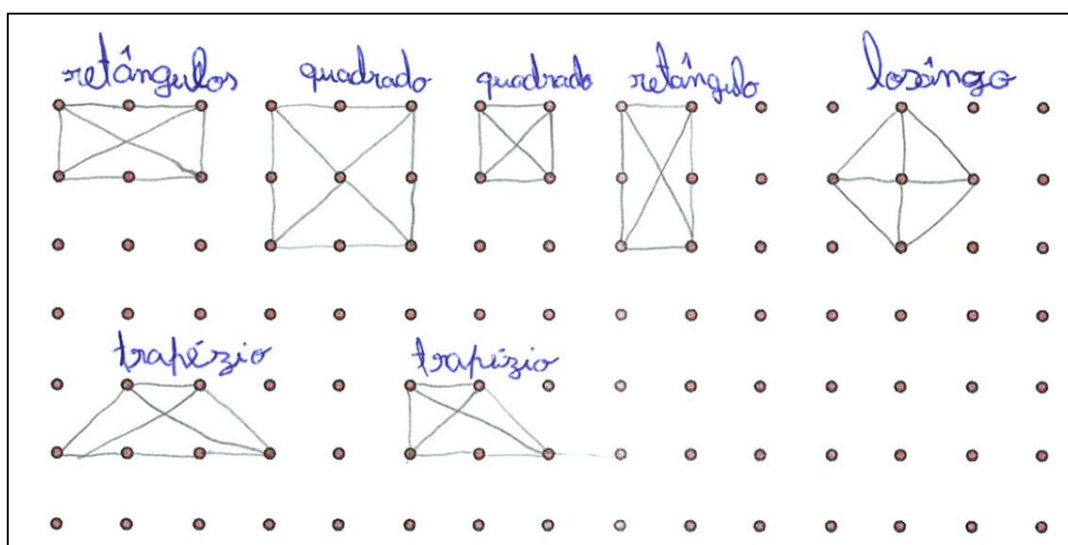


Figura 21 – Construção de Quadriláteros – Caso 2

Na realização da questão (*identificação das propriedades das diagonais*), os alunos utilizaram novamente o Geoplano. Antes de identificarem as diagonais no papel pontado, identificaram-nas no Geoplano. Rodaram e viraram o Geoplano, para facilitar a comparação em diferentes posições, tendo havido um diálogo conjunto. A Figuras 22 representa os trabalhos dos alunos, com o Geoplano. Sobre a mesa, além do Geoplano, pode ver-se diferentes borrachas e um ângulo reto em cartolina azul que é utilizado sempre que for preciso.

P: Quais são os quadriláteros que conhecem?

Alunos: Quadrado, retângulo, losango e trapézio.

A Joana sabia o significado de perpendicular, deu o exemplo do quadrado.

P: Sabem a que quer dizer perpendiculares?

Joana: Sim, o quadrado é.

P: O que é perpendicular no quadrado.

Joana: Esta e esta (diagonais do Quadrado)

P: Vamos recordar o que quer dizer congruentes.

Alunos: os lados são congruentes, os do quadrado.

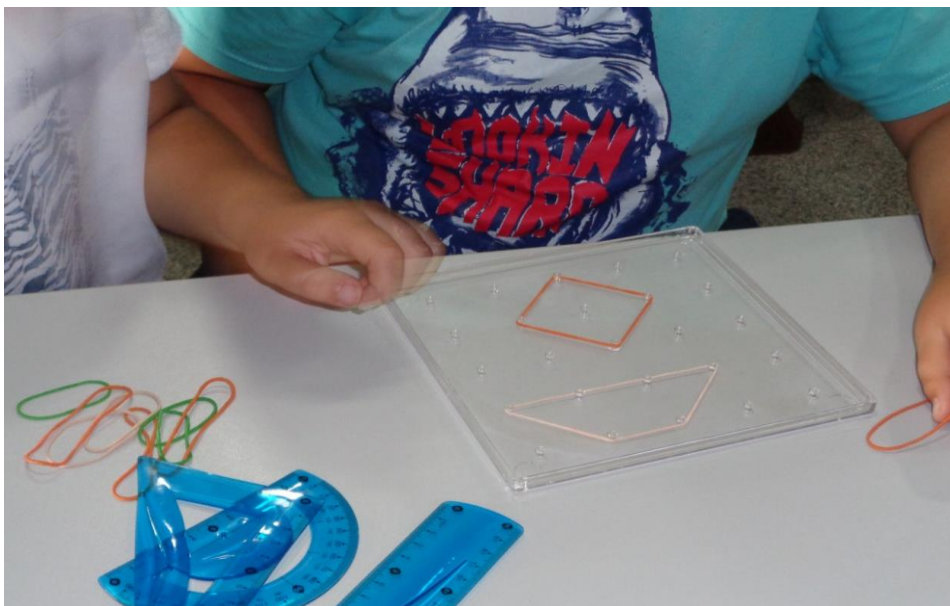


Figura 22 -Trabalho Geoplano – Caso 1 e 2

Depois do trabalho com o Geoplano, os alunos, em pares, e autonomamente, identificaram as propriedades das diagonais do quadrado, retângulo e losango. Contudo, o trabalho realizado teve como suporte os desenhos feitos no Geoplano, como já referimos.

O trabalho foi efetuado pelos dois casos, sem dificuldades, como podemos ver na indicação das propriedades do quadrado, retângulo e losango. Os alunos indicaram o

trapézio porque naturalmente conhecem visualmente esta figura geométrica, mas não reconhecem as suas propriedades, relativamente às diagonais.

As tabelas 5 e 6 indicam respetivamente os trabalhos dos casos 1 e 2.

Tabela 5 - Propriedades das Diagonais – Caso 1

Quadrilátero	Diagonais		
	Perpendiculares	Intersectam-se nos pontos médios (bissetam-se)	Congruentes
quadrado	x	x	x
retângulo		x	x
losango	x	x	
trapezio			

Tabela 6 - Propriedades das Diagonais – Caso 2

Quadrilátero	Diagonais		
	Perpendiculares	Intersectam-se nos pontos médios (bissetam-se)	Congruentes
quadrado	x	x	x
retângulo		x	x
losango	x	x	
trapezio			

Durante o desenvolvimento desta tarefa, foi possível verificar que o Geoplano ajudou na compreensão dos conteúdos trabalhados, permitindo aos alunos experimentar, construir e transformar. Daí que indicaram as propriedades das diagonais, acertadamente. Não identificaram as diagonais do trapézio porque desconhecem as suas propriedades, embora as tenham indicado no papel pontado.

4.2.2. Tarefa 2 - Completar figuras geométricas

Esta tarefa englobava três questões:

- Completar quadriláteros: quadrados, retângulos e losangos
Explica por palavras tuas como completaste os quadrados, os retângulos e os losangos.
- Desenhar os eixos de simetria
- Preencher o quadro.

A primeira parte da questão foi desenvolvida com alguma facilidade pelos dois casos, embora tenha havido um pequeno diálogo conjunto, entre todos os alunos e a professora.

Joana: Professora, aqui temos um quadrado, mas aqui não parece

(um quadrado em posição inclinada).

João: Nós achamos que é assim.

Joana: Pois achamos.

Sofia: Já sei.

Pedro: Eu também.

Joana: Olha aqui, o losango está virado.

.....

A professora propôs que a Joana colocasse a figura noutra posição, na *standard*, e que fizessem as construções, primeiro no Geoplano, e depois no papel pontilhado. Os alunos puderam comparar, observar e aprender a representar figuras em diferentes posições, como também a verificarem o seu raciocínio. Pois, medir e comparar os lados e os ângulos de polígonos ajuda os alunos a construir e a perceber os conceitos matemáticos.

A Figura 23 representa respectivamente os trabalhos dos casos 1 e 2.

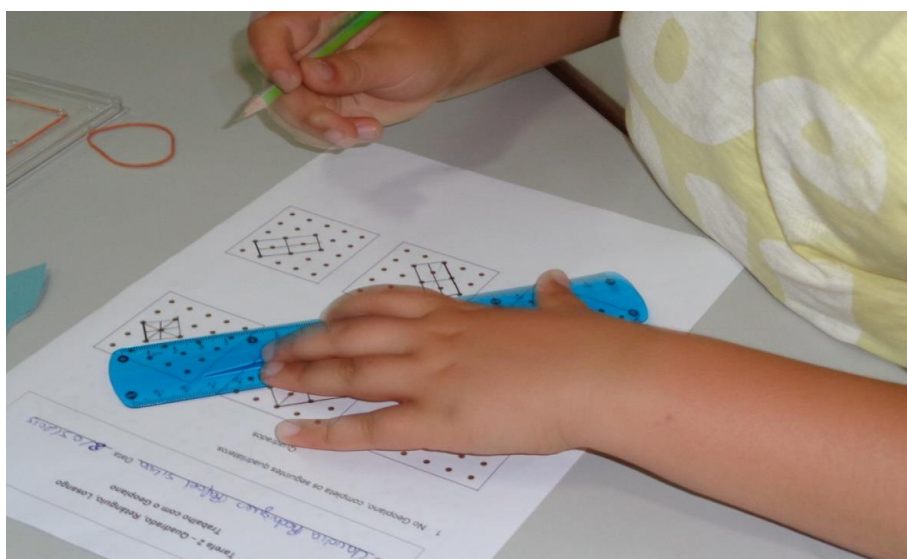
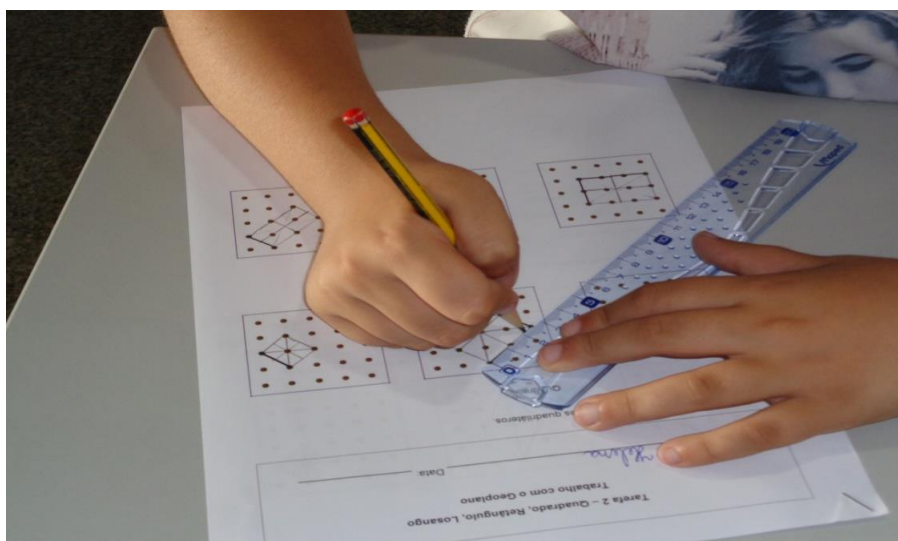


Figura 23 - Completar Figuras Geométricas - Caso 1 e 2

A seguir, os alunos explicaram por palavras suas como completaram os quadrados, os retângulos e os losangos. Demonstraram algumas dificuldades na explicação, o que originou novo diálogo. A professora procurou elucidar os alunos, levando-os a refletir.

P: Porque desenharam assim o retângulo?

Pedro: Porque tem quatro lados diferentes.

João: Tem 2 lados iguais e 2 diferentes.

Joana: Tem quatro lados, paralelos e iguais, dois a dois.

P: E o losango?

Joana: Tem quatro lados iguais.

P: Como é que são os ângulos?

Alunos: Agudos....

P: São todos iguais?

João: Diferentes.

Joana: Dois ângulos agudos e dois obtusos.

Os alunos, em trabalho de grupo, analisaram as propriedades das figuras geométricas: quadrado, retângulo e losango, e com o recurso Geoplano, verificaram que o quadrado tem os lados congruentes, paralelos dois a dois, e os ângulos retos, que no retângulo os lados são paralelos e iguais dois a dois e os ângulos são retos, que no losango os lados são congruentes e paralelos dois a dois e os ângulos são iguais dois a dois.

A figura 24 representa o trabalho dos grupos 1 e 2.

a) Explica por palavras tuas como completaste os quadrados, os retângulos e os losangos.

Porque desenhámos as figuras todas no geoplano. O quadrado tem quatro lados iguais e 4 ângulos retos e iguais. O retângulo tem dois lados iguais e dois retos. O losango tem quatro lados iguais e os ângulos são iguais e dois a dois.

a) Explica por palavras tuas como completaste os quadrados, os retângulos e os losangos.

Porque fizemos no geoplano.
O quadrado tem 4 lados iguais e não ângulos retos iguais.
O retângulo tem 2 lados iguais 2 a 2 e não todos ângulos retos.
O losango tem os lados todos iguais e não ângulos iguais 2 a 2.

Figura 24 - Trabalho Caso 1 e 2

A análise das respostas dos alunos aponta no sentido de que eles não definiram, apresentaram algumas das suas propriedades. As suas definições estão associadas ao conceito que os alunos têm da figura geométrica. Em estudos realizados (Clements et al., 1999; Clements & Sarama 2000; Tsamir et al., 2008), foram encontradas situações semelhantes.

No prosseguimento desta tarefa, na realização da segunda questão (*desenha os eixos de simetria*), alguns alunos revelaram dificuldades, pois como já se viu no questionário inicial, confundiam as diagonais com os eixos de simetria, o que suscitou um pequeno diálogo.

P: Quantos eixos de simetria, tem o quadrado?

João: Dois

Sofia: Quatro.

João: Tem tudo quatro, os quadrados têm todos quatro.

Alunos: Quatro.

Com a ajuda do Geoplano, os alunos fizeram novamente várias representações com diagonais e com simetrias, o que levou a corrigir as dificuldades. Seguidamente, também com a ajuda do Geoplano, verificaram que o quadrado tinha quatro eixos de simetria, o retângulo e o losango tinham dois eixos de simetria, embora alguns alunos continuassem com dúvidas. A professora sugeriu aos alunos que verificassem os eixos de simetria de uma folha A4. Com dobragens, os alunos reconheceram mais uma vez os eixos de simetria.

As figuras 25 e 26 representam respectivamente os trabalhos dos casos 1 e 2.

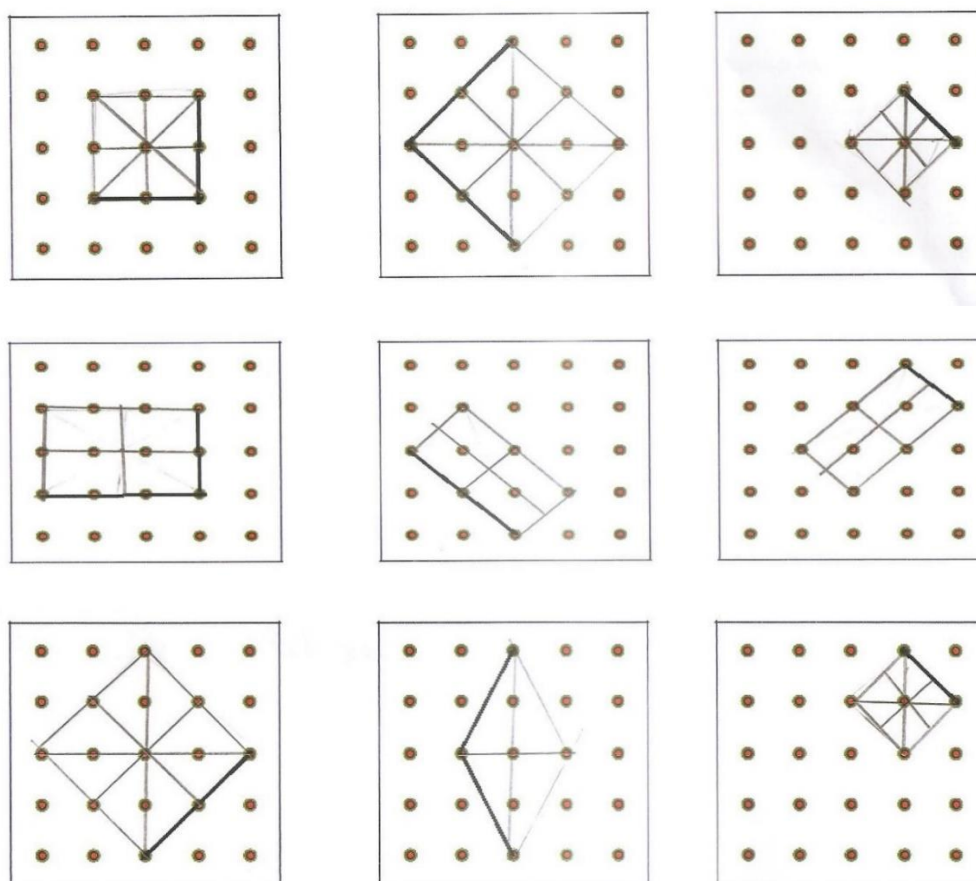


Figura 25 – Eixos de Simetria – Caso 1

O caso 1 realizou corretamente o trabalho. Soube analisar que o losango também é um quadrado porque indicou corretamente os eixos de simetria, como podemos ver nas figuras.

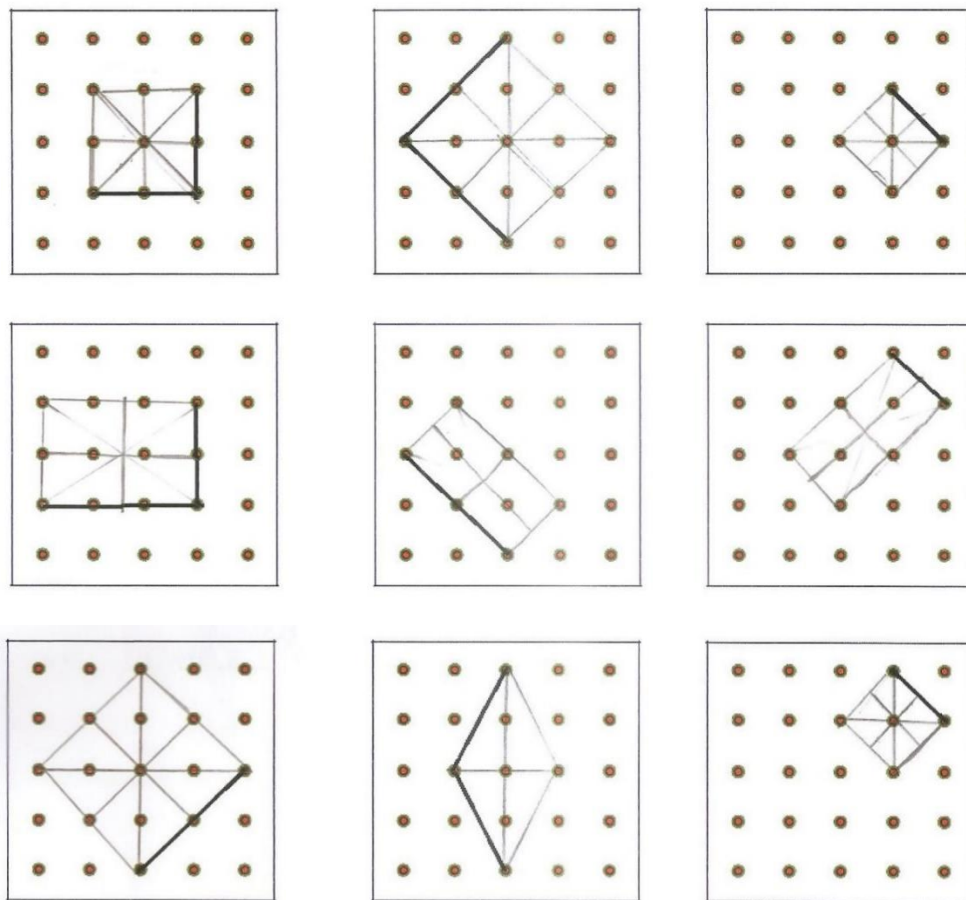


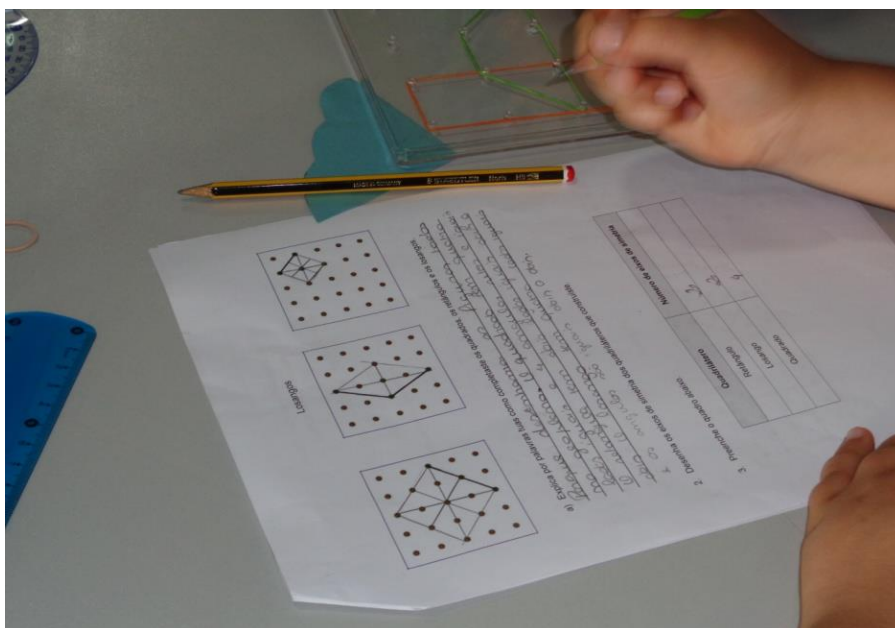
Figura 26 – Eixos de Simetria – Caso 2

O grupo 2 não realizou corretamente o trabalho. Mostrou algumas dificuldades com o retângulo, como podemos ver nas imagens. Contudo, relativamente aos eixos de simetria dos losangos, verificaram que dois também eram quadrados e desenharam corretamente os eixos de simetria.

Como já foi referido, os alunos desenharam os eixos de simetria no Geoplano que ajudou na compreensão dos conhecimentos desenvolvidos, nesta tarefa. Efetivamente, como defendem Matos e Serrazina (1996), o ato de manipular permite ao aluno experimentar e descobrir, ao seu ritmo, padrões e relações que são o essencial da Matemática.

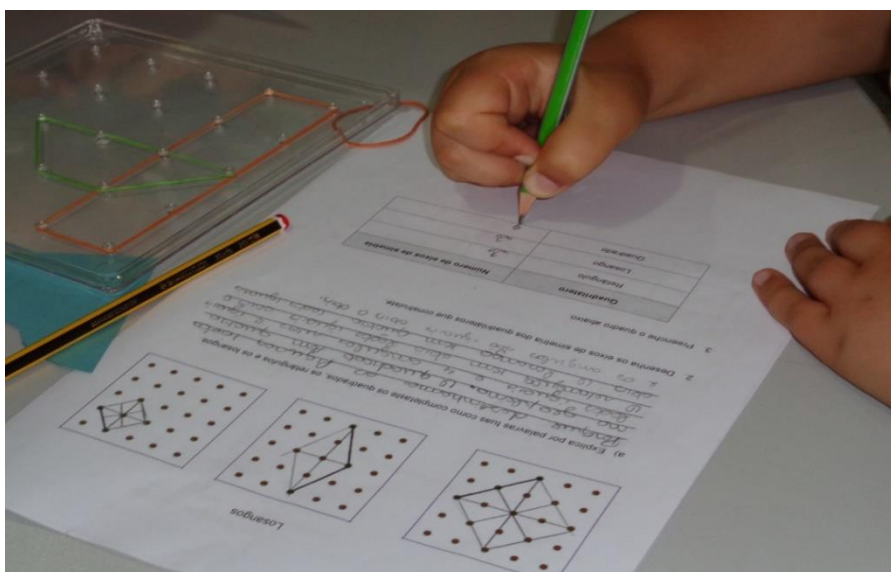
Na realização da **terceira questão** desta tarefa, os alunos usaram novamente o Geoplano e questionaram, analisaram, tiraram dúvidas e conclusões, seguidamente preencheram assim a tabela sem dificuldades.

As Figuras 27 e 28 referem respectivamente os trabalhos dos casos 1 2.



Quadrilátero	Número de eixos de simetria
Retângulo	2
Losango	2
Quadrado	4

Figura 27 – Identificar Eixos de Simetria – Caso 1



Quadrilátero	Número de eixos de simetria
Retângulo	2
Losango	2
Quadrado	4

Figura 28 – Identificar Eixos de simetria – Caso 2

Em suma, como já referimos, este recurso facilitou a interpretação e a resolução desta tarefa, pois permite transformações, desenvolve a atenção, a imaginação, a criatividade, o poder de observação, a descoberta, a orientação espacial e a destreza manual (Coelho, Tavares & Costa 2012).

4.2.3. Tarefa 3 – Reconhecer Propriedades dos Quadriláteros

Nesta tarefa a professora aconselhou os alunos a utilizarem o Geoplano. Mais uma vez foi importante este recurso, onde os alunos fizeram diferentes representações que ajudaram a reconhecer as propriedades dos quadriláteros no que concerne aos seus lados, ângulos, diagonais e eixos de simetria.

Os alunos trabalharam em pares e autonomamente, solicitando o apoio da investigadora, sempre que necessário.

Durante o trabalho de grupo, na análise do losango,

Pedro: Isto é um quadrado especial.

Joana: Tem quatro ângulos.

Sofia: Nós pusemos dois ângulos obtusos e dois ângulos agudos.

P: Repara Joana, se colocares numa posição diferente, o que vês?

Joana: Um quadrado

João: Um quadrado especial.

P: O que podes concluir Sofia?

Sofia: O losango é igual ao quadrado.

P: É sempre igual?

Alunos: Não.

Professora: Há losangos que são quadrados?

Alunos: Há.

Grupo 2: O losango é um quadrado oblíquo.

João: O losango é um quadrado torto

Com a ajuda do Geoplano, os alunos recordaram as propriedades do losango, tendo concluído que os eixos de simetria do losango coincidem com as suas diagonais.

Na análise do **quadrado**, utilizaram também, como já referimos, o Geoplano onde fizeram várias representações com diagonais e eixos de simetrias, que facilitou a compreensão das propriedades desta figura geométrica.

P: Reparem nas diagonais?

João: Duas.

Joana: São iguais e oblíquas

P: O quadrado tem ângulos agudos, retos ou obtusos?

Alunos: Retos.

Pedro: São, com 90°.

João: Vês as simetrias.

P: O que estudamos na outra aula?

Alunos: O quadrado também é um losango.

.....

O Caso 2 estava com dificuldade em identificar as diagonais, o que levou a professora a questionar o outro grupo.

P: Sabes explicar porque fizeste assim, Joana?

Joana: Este é o lado oposto deste.

P: O lado?

Joana: O ponto.

P: O vértice oposto.

...

Na análise e discussão sobre o trabalho realizado pelos alunos, em relação ao retângulo, utilizou-se também o Geoplano, onde os alunos fizeram diferentes representações, em diferentes posições, o que facilitou a compreensão das propriedades desta figura geométrica. Com uma cartolina com um ângulo reto, o Caso 1 verificou que as diagonais não eram perpendiculares. Seguidamente, compreenderam o significado de “*intersectam-se nos pontos médios*”.

Joana: Os lados são iguais dois a dois. Nos ângulos, quatro ângulos retos. São duas diagonais, iguais e perpendiculares.

P: São perpendiculares?

Sofia: Eu acho que não.

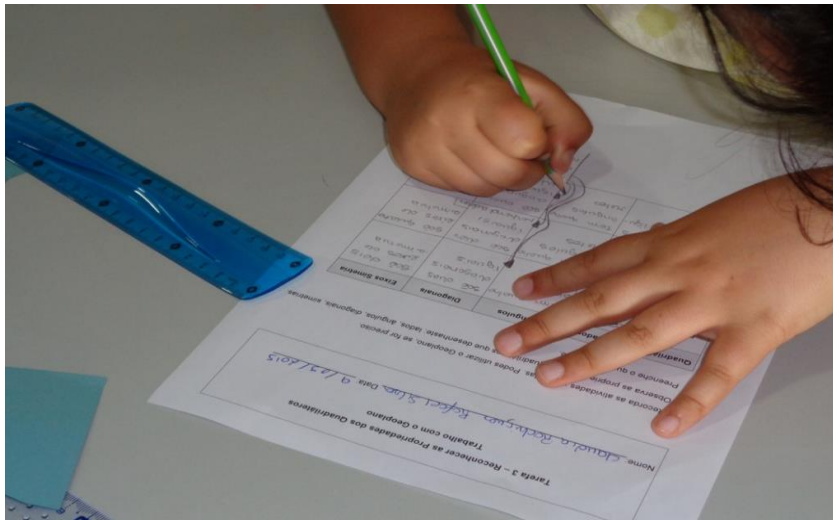
Joana: Intersectam-se nos pontos médios?

As figuras a seguir 29 e 30, representam o trabalho dos Casos 1 e 2 sobre as propriedades dos quadriláteros.



Quadriláteros	Lados	Ângulos	Diagonais	Eixos Simetria
Retângulo	São lados iguais dois a dois.	Têm quatro ângulos retos.	São duas diagonais iguais.	São dois eixos de simetria.
Losango	São lados todos iguais.	Têm quatro ângulos retos.	São duas diagonais iguais, perpendicular entre si.	São quatro eixos de simetria.
Quadrado	São lados todos iguais.	Têm quatro ângulos retos.	São duas diagonais iguais, perpendicular entre si, bissetriz dos ângulos e se cruzam nos pontos médios.	São quatro eixos de simetria.

Figura 29 – Propriedades dos Quadriláteros – Caso 1



Quadriláteros	Lados	Ângulos	Diagonais	Eixos Simetria
Retângulo	Dois lados iguais dois a dois.	4 ângulos retos	duas diagonais iguais	2 eixos de simetria
Losango	Todos iguais dois a dois	2 ângulos obtusos e 2 ângulos agudos	2 diagonais diferentes e se cruzam perpendicularmente	2 eixos de simetria
Quadrado	Todos os lados iguais	4 ângulos retos	2 diagonais iguais e se cruzam perpendicularmente	2 eixos de simetria

Figura 30 – Propriedades dos Quadriláteros – Caso 2

Analisando o trabalho dos alunos, vemos que no Caso 1, os alunos mostraram reconhecer as propriedades do quadrado e retângulo, ao indicarem as suas propriedades. Contudo, não indicaram que as diagonais se bissectam. Relativamente ao losango, continuam com algumas dificuldades pois só indicaram corretamente as propriedades relativamente aos lados desta figura geométrica.

Analisando o trabalho do Caso 2, os alunos mostraram algumas dificuldades no reconhecimento das propriedades dos eixos de simetria do quadrado, ao indicarem dois em vez de quatro eixos. No losango, mostraram alguma dificuldade nas propriedades relativamente aos lados e ângulos, pois deveriam ter referido lados todos iguais, paralelos dois a dois e ângulos iguais dois a dois, ou seja, dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos. Também não indicaram que as diagonais se bissectam, no retângulo e quadrado.

Efetivamente, os grupos desenvolveram os seus conhecimentos geométricos, no reconhecimento das propriedades das figuras, a nível dos lados, ângulos, diagonais e simetrias, com a ajuda do Geoplano. No entanto, revelaram algumas dificuldades em descrevê-las.

Em suma, como já foi referido, o recurso Geoplano foi importante no desenvolvimento deste estudo, pois ajudou os alunos a construir e a enriquecer os seus conhecimentos, a desenvolver a observação e a comunicação. Facilitou também a visualização das figuras geométricas e a compreensão das suas propriedades, pois de acordo com Abrantes et al (1999), a aprendizagem requer o envolvimento dos alunos em atividades de aprendizagem significativas.

4.3. Descrição e Análise das Tarefas com o GeoGebra

A sequência organizada de tarefas, como referimos, na metodologia, engloba as tarefas 4, 5, 6, e 7 com o recurso ao *Geogebra*. Assim, vamos proceder à sua análise, considerando o trabalho desenvolvido pelos alunos, aquando da sua resolução.

4.3.1. Tarefas 4 – Explorar o GeoGebra

A professora apresentou aos alunos o *software* com que iam trabalhar, o *Gebra Prim*, os comandos e as ferramentas principais, tais como: marcar pontos, retas, segmentos de reta, arrastar, traçar retas paralelas, retas perpendiculares e construir polígonos.

As tarefas para reconhecimento do *software* foram: criar pontos, movê-los, limpar a tela de desenho, construir retas, movê-las, construir semirretas, segmentos de reta, retas paralelas e perpendiculares, construir polígonos e medir lados.

As questões iniciais foram realizadas sob a indicação da professora e pretendiam orientar o primeiro contacto dos alunos com o *software*, para que se familiarizassem com as ferramentas e os comandos.

Assim, os alunos tinham de ler e seguir as indicações das questões. Os alunos mostraram-se interessados e empenhados em trabalhar com o *GeoGebra*. Trabalharam em pares, autonomamente e solicitavam a professora quando tinham dúvidas. Aprenderam a marcar pontos, a desenhar retas, retas paralelas, a mudar a cor de uma reta, como também a gravar um ficheiro. Esta tarefa englobava duas questões.

Primeira Questão

Construir retas paralelas (marcar pontos, desenhar reta, desenhar reta paralela, mudar a cor e a espessura da reta, desenhar outras retas paralelas e gravar com o nome “retas paralela”).

Segunda Questão

Construir retas perpendiculares (desenhar uma reta, reta perpendicular, desenhar outras retas perpendiculares e gravar com o nome “retas perpendiculares”).

Na resolução da primeira questão, os alunos trabalharam em pares, com entusiasmo e empenho, ajudando-se mutuamente. Todos mostravam interesse em trabalhar com o *software*.

P: Estão a ver a cor.

Alunos (Pedro e Sofia): Sim.

P: Seleccionam primeiro e depois é que aparece a cor.

Pedro: Agora é a minha vez. Agora vai a cor.

Sofia: Professora, eu quero mudar a cor.

P: Selecciona primeiro. Clica em cima da reta.

Sofia: Já percebi.

Pedro: Carrega na azul. Não é preciso carregares outra vez.....

A Figura 31 mostra o trabalho realizado pelos Casos 1 e 2.

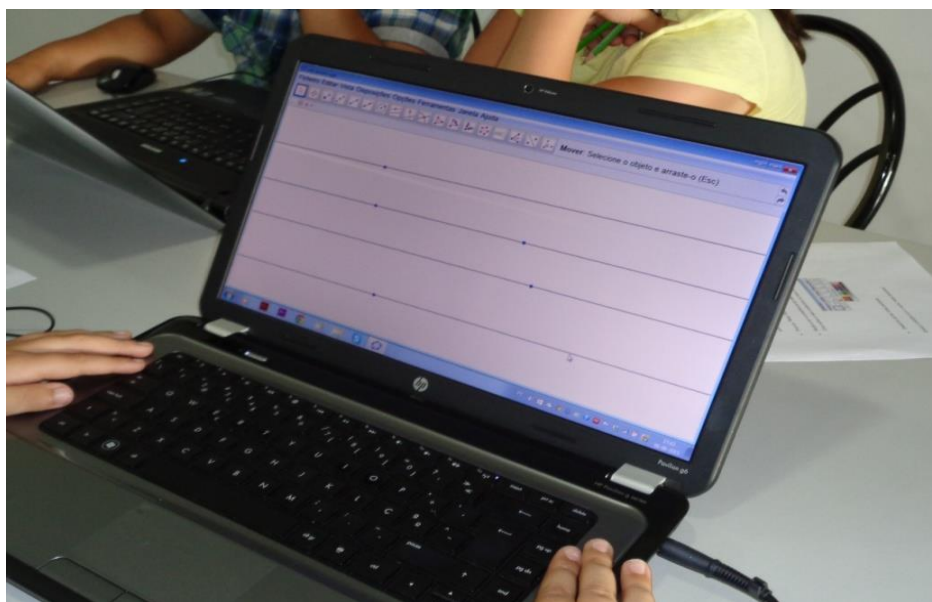


Figura 31 – Construção Retas Paralelas – Caso 1 e 2

A seguir, na resolução da segunda questão, os alunos desenharam retas perpendiculares. Nesta tarefa, revelaram também curiosidade e, ao mesmo tempo, empenho em explorar o *software*, o que originou, algumas vezes, querer repetir o trabalho.

A Figura 32 apresenta o trabalho respetivamente dos casos 1 e 2.

P: João, tu não tens de fazer manualmente a reta perpendicular.

Leiam o enunciado.

Pedro: Onde está reta perpendicular.

João: Está aqui.

P: seleciona... Desenham os dois.

(um de cada vez...)

Joana: Eu fiz o outro das paralelas e ele está a fazer as retas perpendiculares.

Professora: Então já sabem traçar?

Alunos (Pedro e Sofia): Sim.

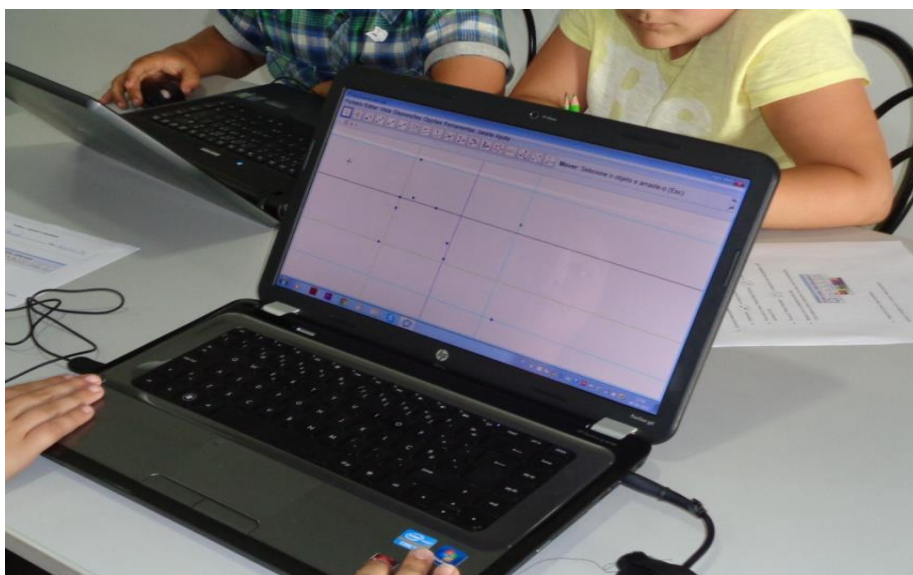


Figura 32 – Construção Retas Perpendiculares – Casos 1 e 2

O ritmo de trabalho dos alunos era diferente, mas todos estavam a conseguir realizar as construções propostas no *GeoGebra*, embora o João demonstrasse algumas dificuldades em desenhar as retas perpendiculares. Contudo, os alunos ajudavam-se mutuamente, todos queriam fazer e experimentar.

4.3.2. Tarefa 5 – Explorar o GeoGebra

Esta tarefa engloba três questões.

Primeira Questão

Construir segmento e ponto médio (marcar os pontos L e M, desenhar segmento de reta, marcar ponto médio, mover ou arrastar os vértices, e responder à questão “O ponto médio mantém-se nos novos segmentos de reta?”, gravar com o nome “segmento de reta”).

Segunda Questão

Construir um triângulo (marcar três pontos A, B e C, selecionar no menu Polígono e desenhar o Triângulo ABC, gravar com o nome “triângulo”).

Terceira Questão

Construir um quadrilátero (marcar quatro pontos: A, B, C, D, desenhar o quadrilátero, medir os lados, gravar com o nome de “quadrilátero”).

Na realização desta tarefa, os alunos trabalharam empenhados, embora com ritmos diferenciados. Demonstraram poucas dificuldades, apesar de ser a segunda aula com o *Geogebra*. Na **primeira questão**, os alunos começaram por desenhar o segmento de reta e o ponto médio, como podemos ver nas imagens 33 e 34.

P: Clica em cima do ponto “Renomear”.

Joana: Já sei

P: O que é que acontece ao ponto médio?

João: Fica sempre no mesmo sítio.

Pedro: Pois fica

Sofia: Agora, sou eu que vou faz

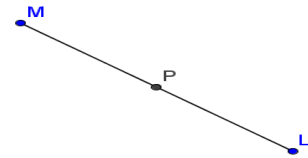
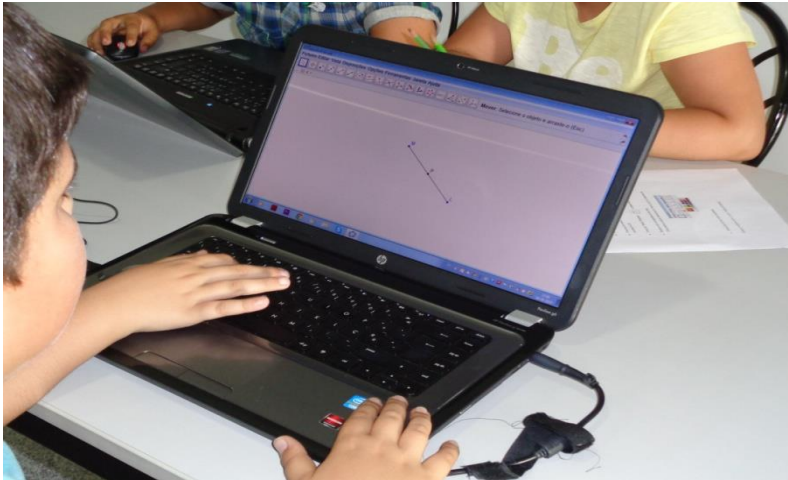


Figura 33 – Construção Segmento Reta e Ponto Médio – Caso 1

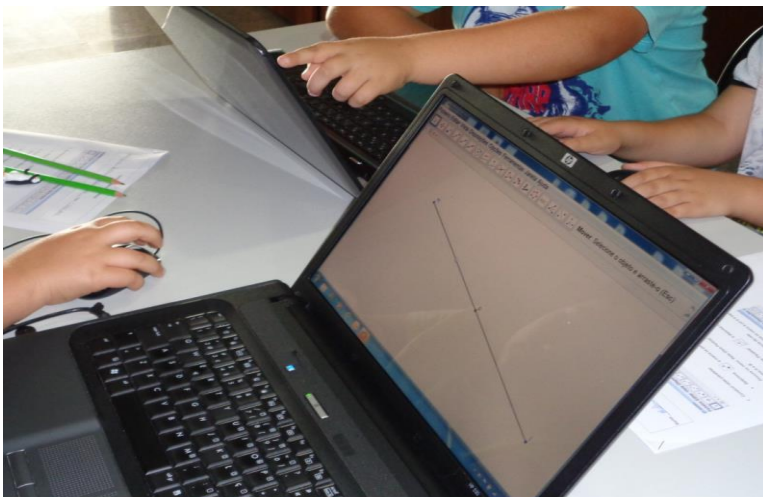


Figura 34 – Construção Segmento Reta e Ponto Médio - Caso 2

Seguidamente, os alunos compreenderam que ao movimentar os vértices, o ponto médio se mantinha, conforme podemos ver nas figuras 35.

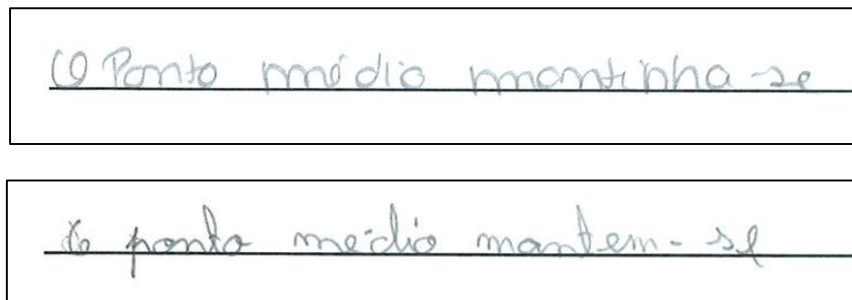


Figura 35 – Resposta dos Casos 1 e 2

Posteriormente, na **segunda questão**, os alunos construíram um triângulo. Começaram por marcar três pontos A, B e C. Depois selecionaram no menu Polígono e desenharam o Triângulo ABC.

O Caso 1 desenhou um triângulo, marcando três pontos e uniram os pontos com segmentos de reta. A professora sugeriu que fizessem também um triângulo de acordo com as indicações.

P: Sigam o enunciado.

João: Já sei.

Joana: Não é assim. Temos de seleccionar polígono

Sofia: Eu sei fazer

....

A figura 36 refere o trabalho respetivamente dos Casos 1

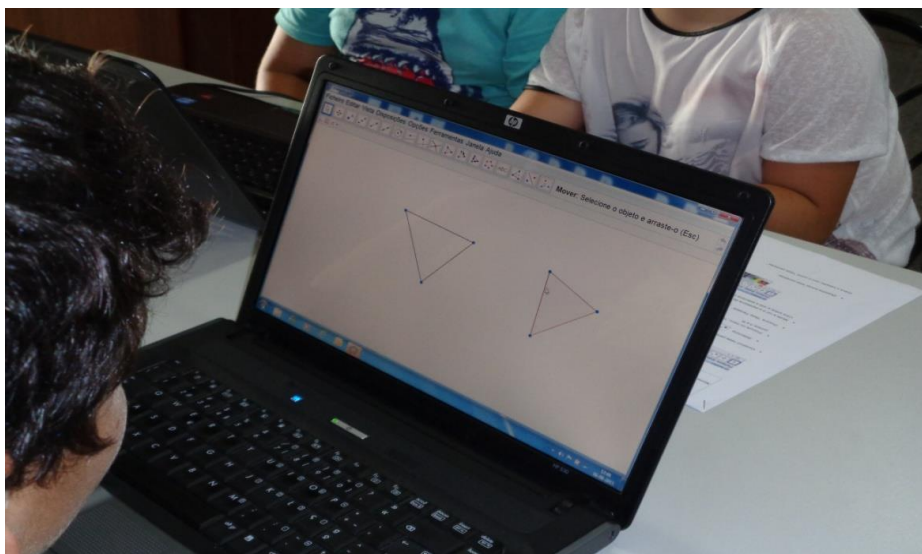


Figura 36 – Construção de Triângulo - Caso 1

Foi feita uma pequena reflexão. A professora pediu que explicassem as suas construções. O Caso 1 explicou (*marcamos três pontos e unimos*). Depois, o caso 2 disse que deveriam ter selecionado (*polígono*) e só *depois desenhar*.

Na **terceira questão**, os alunos construíram um quadrilátero. Começaram por marcar quatro pontos: A, B, C, D, e desenhar o quadrilátero. A seguir mediram o comprimento dos seus lados.

Pedro: É um quadrilátero, tem quatro lados, não é?

Joana: Não é um quadrilátero?

João: É, desde que tenha quatro lados...

Os Casos 1 e 2 começaram por desenhar um quadrilátero, marcando quatro pontos e selecionando polígono. Depois mediram o comprimento dos seus lados.

A professora inseriu, no menu, a ferramenta “Distância ou Comprimento”. Os alunos mediram os lados e as diagonais do quadrilátero desenhado. O Caso 1 desenhou um quadrilátero com os lados iguais e o Caso 2 com lados diferentes.

Neste *Software*, *GeoGebra Prim*, os valores são arredondados à unidade. Com esta questão, pretendeu-se que os alunos aprendessem a utilizar uma ferramenta que depois irá ser utilizada numa tarefa seguinte, como também uma forma de os alunos explorarem o *GeoGebra*.

As figuras 37 e 38, representam o trabalho, respetivamente dos casos 1 e 2.

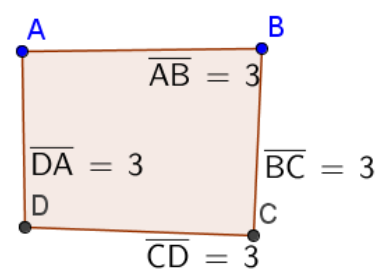
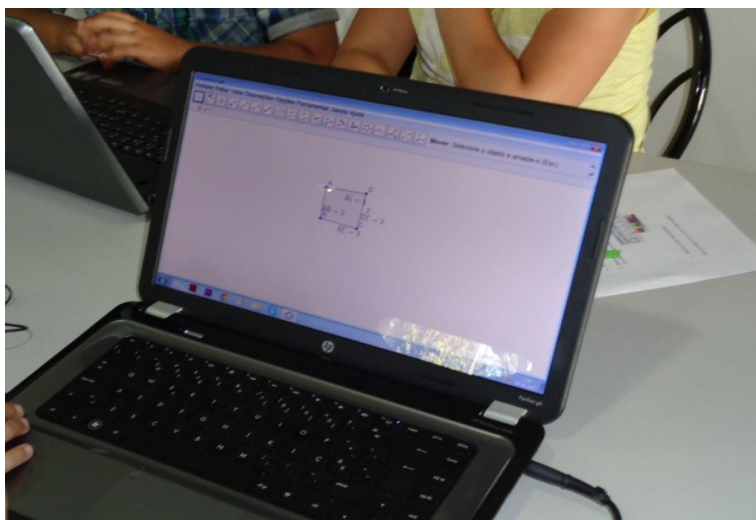


Figura 37 – Construção Quadrilátero – Caso 1

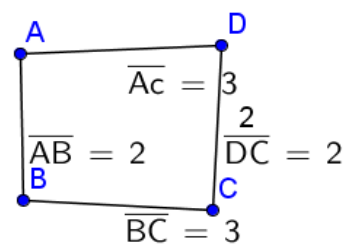
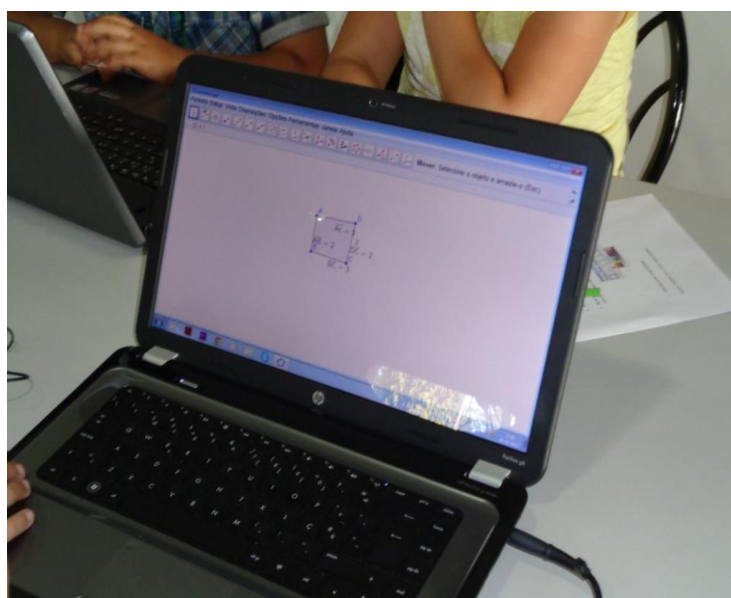


Figura 38 – Construção Quadrilátero – Caso 2

Na realização das tarefas 4 e 5 que tinham por objetivo principal explorar o *GeoGebra*, como já referimos, foi notório o entusiasmo dos alunos por estarem a trabalhar com o computador.

Relativamente aos conceitos trabalhados, o *Geogebra* ajudou na sua compreensão, tendo contribuído naturalmente para o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos dos alunos.

4.3.3. Tarefa 6 – Construção dos Quadriláteros com o *Geogebra*: Quadrado, Retângulo e Losango

Na realização desta tarefa, a professora começou por dizer aos alunos para utilizarem a malha quadriculada para que a representação das figuras geométricas seja mais rápida. Os alunos tiveram algumas dificuldades na construção do quadrado, retângulo e losango, tendo havido um pequeno diálogo, em conjunto.

P: Porque é que puseste assim os pontos nessa posição?

João: Para fazermos um quadrado

Joana: Porque o quadrado tem os lados todos iguais

P: E porque desenhaste assim o retângulo?

Joana: Porque tem os lados iguais dois a dois.

Pedro: O quadrado tem os lados todos iguais

Sofia: Já sei

Pedro: Os ângulos do quadrado e do retângulo são retos.

Joana: E os do losango?

João: São diferentes

Pedro: São iguais dois a dois.

.....

As Figuras 39 e 40, representam respetivamente os trabalhos dos grupos dos Casos 1 e 2.

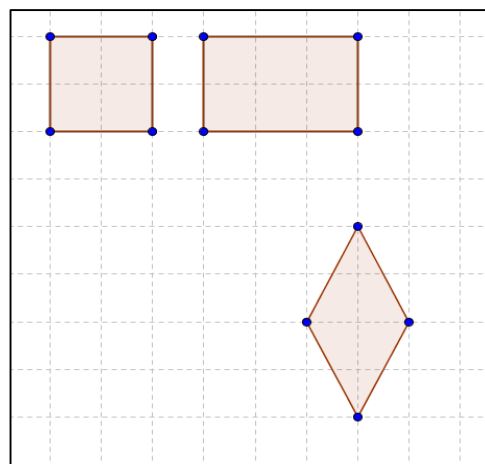
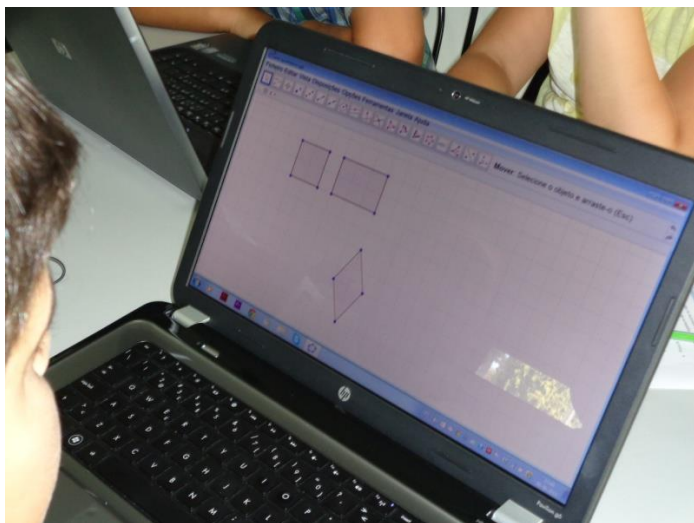


Figura 39 – Construção diferentes Quadriláteros – Caso 1

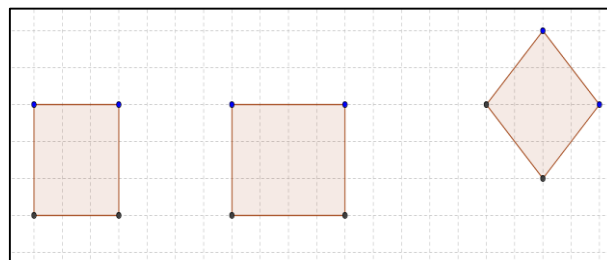
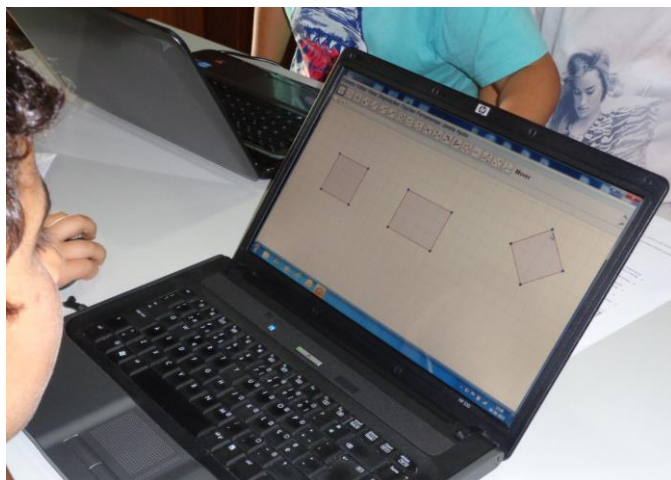


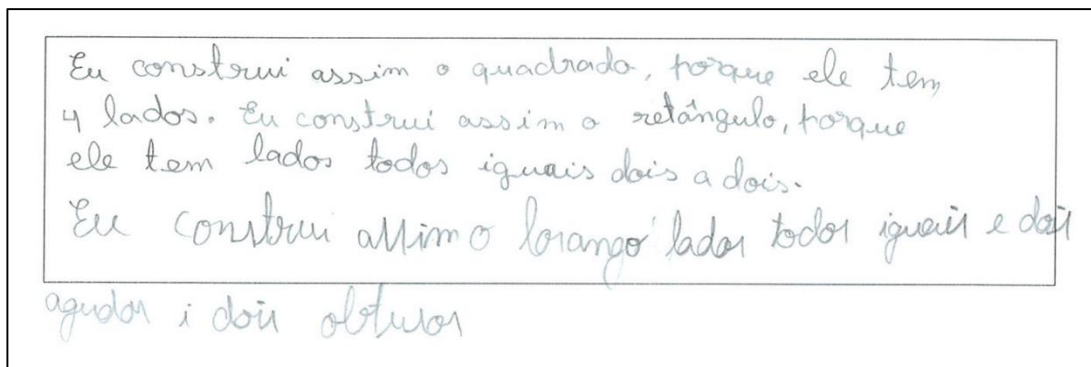
Figura 40 – Construção diferentes Quadriláteros – Caso 2

Na construção das figuras geométricas, os alunos valorizaram os seus conhecimentos sobre as propriedades dos quadriláteros, neste estudo. Depois de analisarem as semelhanças e diferenças, foi referido que o quadrado era um retângulo e era um losango, porque tinha propriedades comuns.

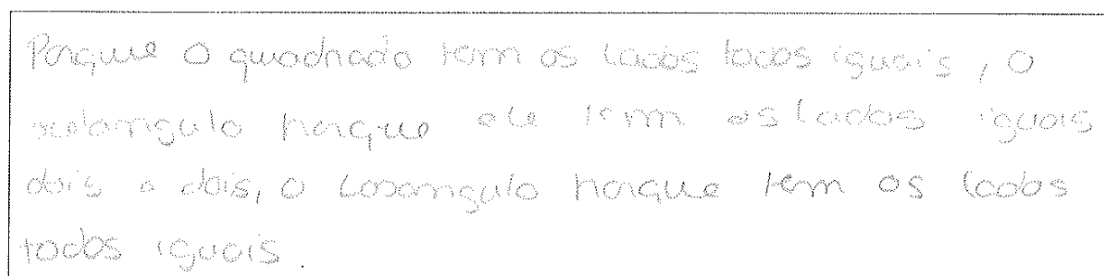
As atividades realizadas levaram os alunos a formar melhor os seus conhecimentos, pois os recursos utilizados permitiram construir e desfazer, alterar e

fazer de novo, pelo que num ambiente de investigação, os alunos encontram condições que favorecem a sua aprendizagem.

Na realização da questão “*explica como construístes*”, a figura 41 refere o trabalho dos alunos.



Eu construí assim o quadrado, porque ele tem 4 lados. Eu construí assim o retângulo, porque ele tem lados todos iguais dois a dois.
Eu construí assim o losango, lados todos iguais e dois agudos e dois obtusos.



Porque o quadrado tem os lados todos iguais, o retângulo porque ele tem os lados iguais dois a dois, o losango porque tem os lados todos iguais.

Figura 41 - Explica como construístes – Caso 1 e 2

Nesta tarefa, as aprendizagens visadas eram: construir os polígonos, quadrado, retângulo e losango, com o recurso ao *GeoGebra*. Pretendia-se que consolidassem as propriedades das figuras geométricas e que indicassem as que eram comuns e não comuns.

Analisando nas explicações dos alunos, como podemos ver nas figuras 50 e 51, todos se referiram aos lados das figuras geométricas, talvez por ser um dos elementos mais básicos. Só o grupo 1 se refere aos ângulos do losango, afirmando que tinha dois agudos e dois obtusos. As definições escritas dos alunos estão naturalmente incompletas, quando comparadas com as definições orais, pois como já foi referido, eles têm dificuldades na expressão escrita.

4.3.4. Tarefa 7 – Construção de Quadriláteros

Nesta tarefa, as aprendizagens visadas eram: construir um retângulo e um quadrado dinâmicos com o recurso ao *GeoGebra*. Pretendia-se que compreendessem que ao movimentar os seus vértices, as propriedades não se alteram.

Os alunos não podiam utilizar a malha quadriculada, o que dificultou a realização desta tarefa. Foi preciso recordarem o trabalho já realizado anteriormente, ou seja, rever as propriedades já trabalhadas das figuras geométricas. Recorreram ao Geoplano que facilitou a sua compreensão.

Joana- Professora, mas eu não estou a conseguir fazer um retângulo.

Sofia: Já percebi.

P: Reparem neste lado e neste.

(lados da figura geométrica)

Sofia: Ah, tenho de fazer paralelas. Ainda falta uma reta assim.

Pedro: Já estou a perceber,

...

Os alunos conseguiram construir um retângulo, traçando retas paralelas e perpendiculares. Repetiram depois sem a ajuda da professora e construíram um outro retângulo dinâmico, de acordo com o enunciado da tarefa.

O grupo 1 construiu um quadrado dinâmico e o grupo 2 construiu um retângulo dinâmico..

P: O que é que têm aí?

João: Um quadrado

Alunos: Um quadrado e um retângulo.

Sofia: Nós, um retângulo.

A figura 42, apresenta os trabalhos dos Casos 1 e 2.

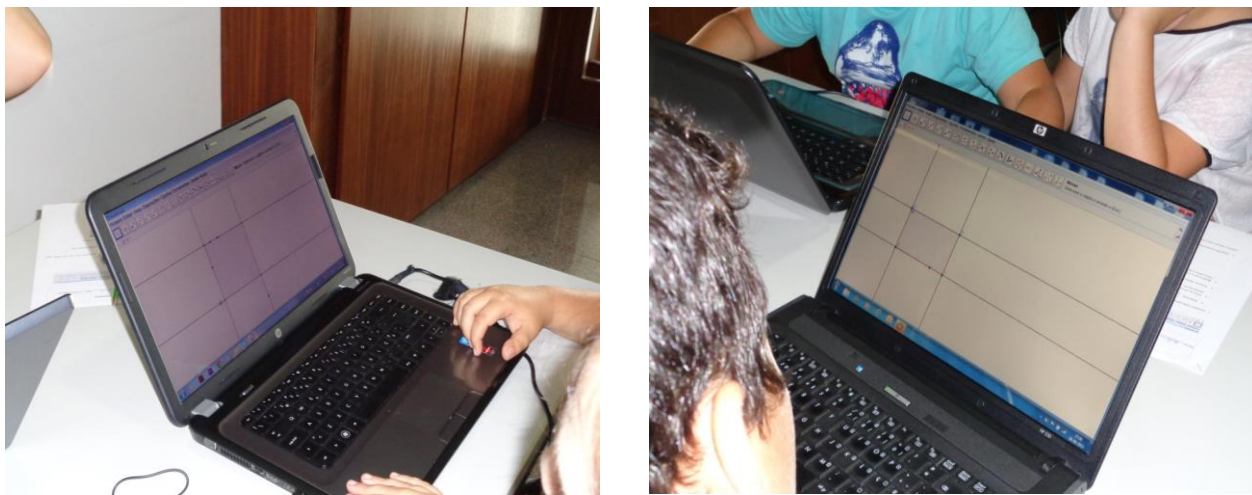


Figura 42 – Construção Quadrado Dinâmico – Caso 1 e 2

Os alunos verificaram que ao mover ou arrastar os vértices a partir da construção de um quadrado dinâmico, podiam construir um retângulo dinâmico, como também a partir do retângulo podiam construir um quadrado, pois estas figuras geométricas têm propriedades comuns (ângulos congruentes, retos).

Na realização da questão:

“Consegues transformar o quadrado num retângulo? O que podes concluir?”

“Consegues transformar o retângulo num quadrado? O que podes concluir?”

De acordo com as construções que realizaram, o caso 1 responde à primeira questão e o caso 2 à segunda. A Figura 43 mostra as respostas, respetivamente dos casos 1 e 2.

Posso concluir que o quadrado é um retângulo especial e que ambos têm ângulos retos.

Sim, porque tem propriedades comuns.

Figura 43 - Respostas do Caso 1 e 2

Na realização desta tarefa, os alunos demonstraram algumas dificuldades, sendo necessário rever os conteúdos da tarefa 4 e 5. Na parte final, foi feita uma síntese dos conteúdos trabalhados sobre as propriedades comuns do quadrado e o retângulo (ângulos congruentes, ou seja, iguais e retos). Todos perceberam e concluíram que os ângulos eram retos e os lados eram os quatro congruentes (quadrado) ou congruentes dois a dois (retângulo).

4.3.5. Tarefas 8 – Análise da Construção do Losango

Nesta tarefa, as aprendizagens visadas eram: analisar a construção de um losango, com o recurso ao *GeoGebra*; desenhar as diagonais, medir o comprimento dos lados e das diagonais da figura geométrica. Seguidamente iriam indicar, justificar e concluir as suas afirmações.

Esta tarefa foi realizada a partir de uma figura geométrica losango de um ficheiro do *GeoGebra Prim*. Depois de terem explorado, investigado e recordado os conteúdos trabalhados nas tarefas anteriores, procederam à realização da tarefa.

Depois de analisarem o Losango, desenharam as diagonais e mediram o seu comprimento, como também o dos lados, tendo concluído que tem os lados iguais (congruentes), que as diagonais são perpendiculares e coincidem com os eixos de simetria. A figura 44 representa o trabalho dos casos 1 e 2.

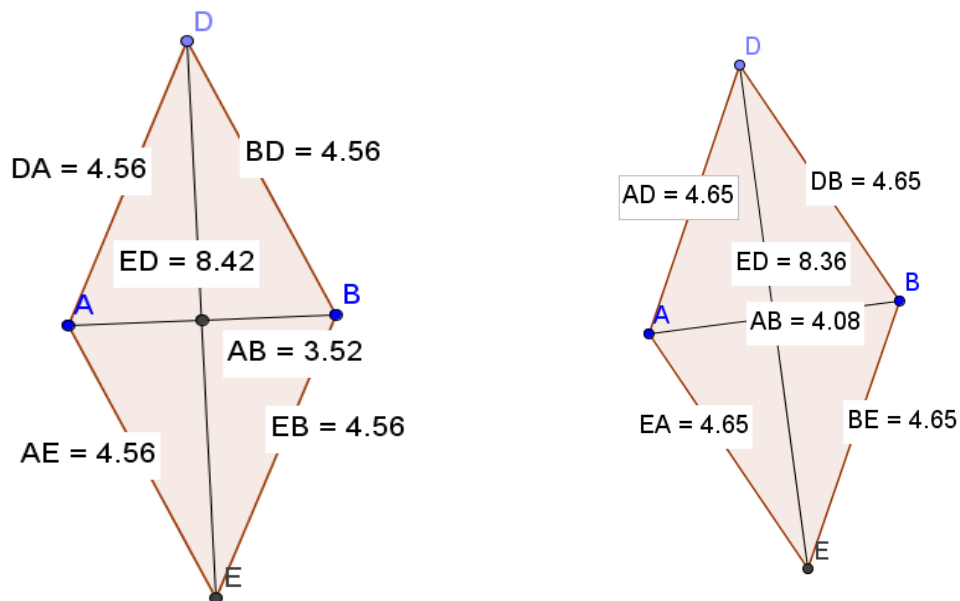


Figura 44 – Análise Construção do Losango – Caso 1 e 2

Seguidamente, os alunos explicaram o trabalho que tinham realizado. Como alguns tinham demonstrado hesitações, na parte final, novamente em diálogo, identificaram as propriedades comuns do losango e do quadrado (lados todos iguais) tendo chegado à conclusão que o losango era um caso particular do quadrado, porque este tinha propriedades comuns, os lados todos iguais e diagonais perpendiculares.

P: O que podemos concluir acerca dos lados?

Sofia: Que são iguais.

P: E as diagonais?

Pedro: São iguais aos eixos de simetria.

Joana: São.

João: As diagonais não são iguais.

Joana: Não são iguais, mas são iguais aos eixos de simetria.

Sofia: E são perpendiculares.

.....

Nas questões:

“o que observas?”

Consegues transformar o Losango num Quadrado, os alunos responderam. As Figuras 45 e 46 referem o trabalho dos alunos, respetivamente casos ou grupos 1 e 2.

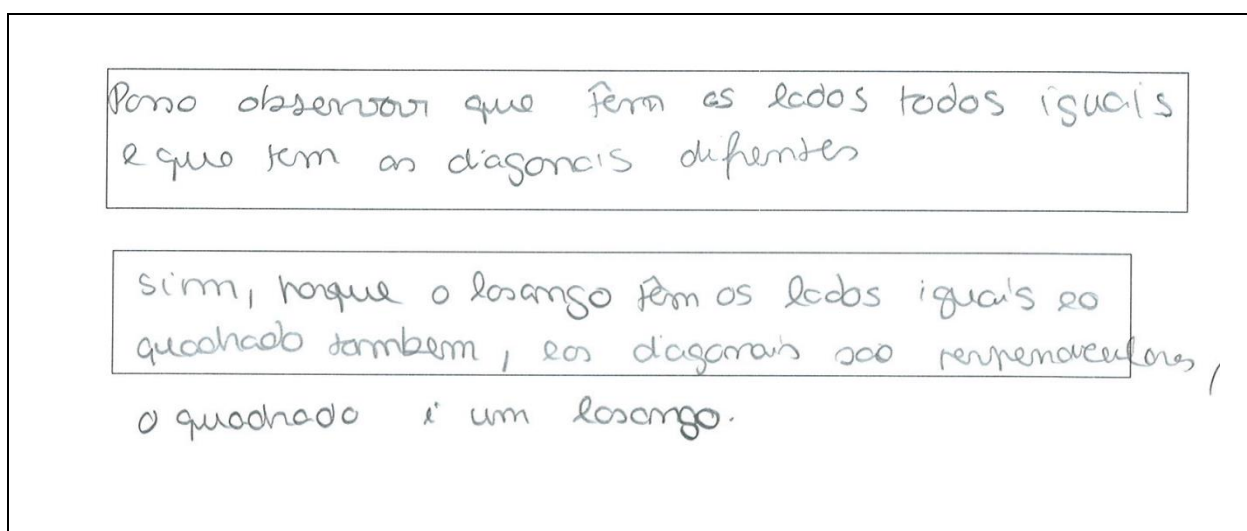


Figura 45 – Resposta do Caso 1

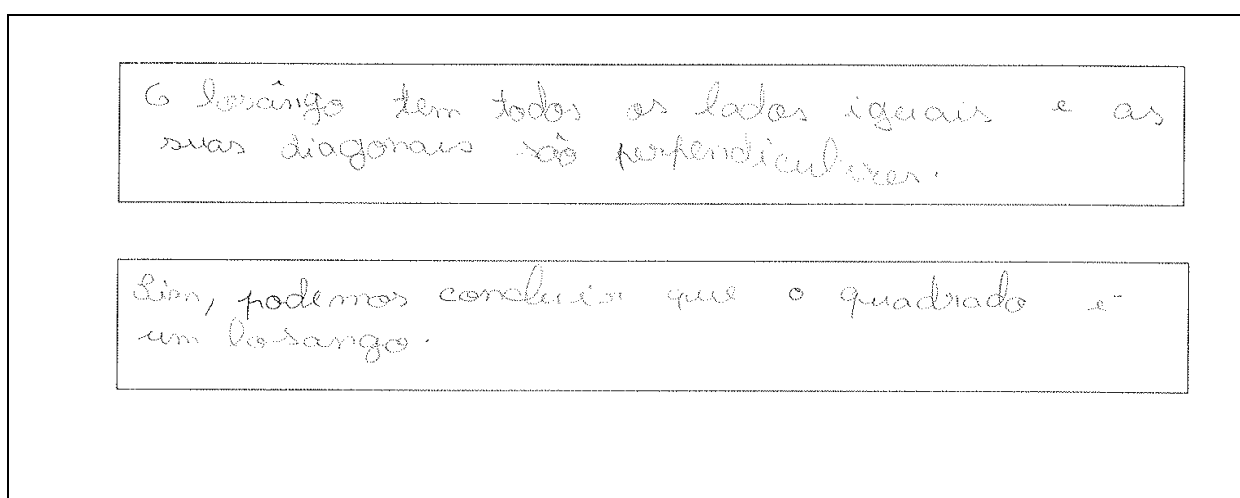


Figura 46 – Resposta do Caso 2

Podemos concluir que o *software GeoGebra* ajudou os alunos a construir o seu conhecimento e superar dificuldades, a desenvolver a capacidade de visualização, através de experiências concretas, a construir figuras geométricas e aprender técnicas de construção. Tornou as aulas mais ativas e menos monótonas. Por outro lado, a combinação do arrastar e do medir, permitido por estas ferramentas, foi muito importante para que os alunos conseguissem explorar as propriedades das figuras geométricas.

4.4. Tarefas 9 – Classificação de Quadriláteros

Esta tarefa engloba duas questões.

- Identificar os quadriláteros segundo as propriedades
Quadrilátero com os lados todos iguais e dois eixos de simetria.
Quadrilátero com ângulos iguais e dois eixos de simetria.
Quadrilátero com quatro eixos de simetria.
- Agrupar os quadriláteros no diagrama de Venn

Os alunos poderiam utilizar os recursos *GeoGebra* ou *Geoplano*, se tivessem dúvidas. Como tiveram algumas dificuldades na identificação dos quadriláteros, utilizaram o *Geoplano* que ajudou na compreensão das propriedades das figuras geométricas. Com este recurso, os alunos construíram os quadriláteros e os eixos de simetria, conseguindo assim responder à primeira questão. Os alunos sentiram algumas dúvidas em classificar os quadriláteros por definições económicas, ou seja, pela referência apenas às propriedades que os permitem distinguir dos uns dos outros.

1. Adivinha qual é o quadrilátero.

Quadrilátero com os lados todos iguais e dois eixos de simetria.

É o losango.

Quadrilátero com ângulos iguais e dois eixos de simetria.

É o retângulo.

Quadrilátero com quatro eixos de simetria.

É o quadrado.

1. Adivinha qual é o quadrilátero.

Quadrilátero com os lados todos iguais e dois eixos de simetria.

É o losango.

Quadrilátero com ângulos iguais e dois eixos de simetria.

É o retângulo.

Quadrilátero com quatro eixos de simetria.

É o quadrado.

Figura 47 – Adivinha o quadrilátero – Caso 1 e 2

Seguidamente os alunos vão agrupar os quadriláteros no diagrama de Venn, de acordo com as suas propriedades.

Sentiram também algumas dificuldades, mas chegaram à conclusão que o quadrado era a interseção do retângulo e do losango, ou seja, possuía propriedades comuns. Pois o quadrado tem os lados todos iguais como o losango e ângulos retos como o retângulo. As Figuras 48 e 49 traduzem respetivamente os trabalhos dos casos 1 e 2.

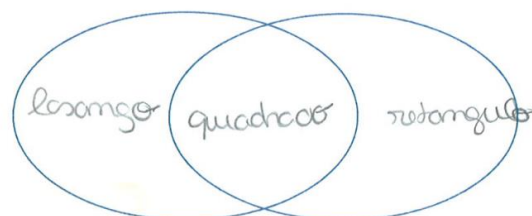


Figura 48 – Classificar Quadriláteros e Completar Diagrama de Venn – Caso 1

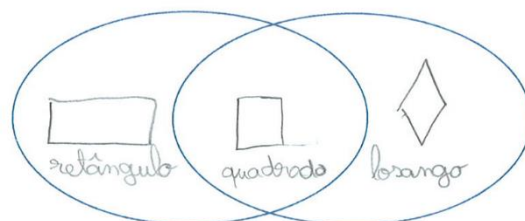
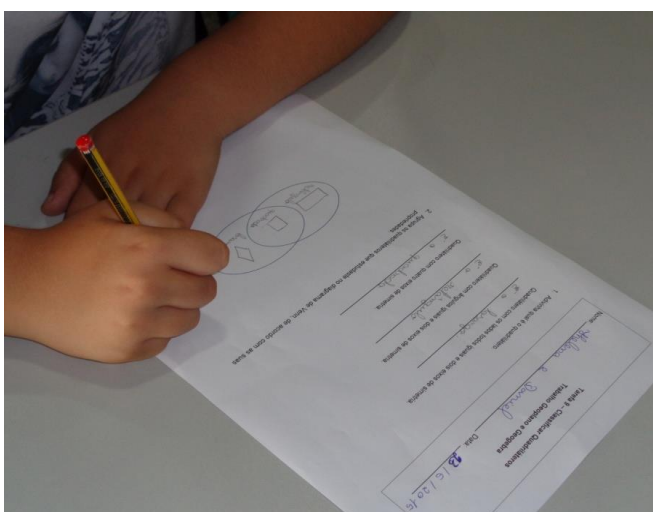


Figura 49 – Classificar Quadrilátero e Completar Diagrama de Venn – Caso 2

Em suma, durante o período da aplicação deste estudo, observou-se que os alunos realizaram as tarefas com alguma satisfação e empenho, embora algumas vezes houvesse necessidade da intervenção da professora. Analisando o seu trabalho, poderemos referir que desenvolveram o conhecimento das figuras geométricas (quadrado, retângulo e losango), como também que os recursos utilizados, neste estudo, ajudaram na compreensão e indicação das suas propriedades. Note-se também que os alunos tiveram sempre o suporte do Geoplano, e do *GeoGebra* que utilizaram e que permitiram a observação, a experimentação e a análise dos conceitos, desenvolvendo uma melhor compreensão no estudo das propriedades dos quadriláteros.

Considerando a nossa conversa informal final, os alunos revelaram ter gostado de participar neste estudo, porque disseram ter aprendido a trabalhar com o *GeoGebra* que desconheciam, que este *software* os ajudou a compreender melhor os conteúdos trabalhados. Afirmaram também que foi fácil trabalhar com o *GeoGebra*, que gostaram de realizar as tarefas com os comandos. Por outro lado, gostaram de trabalhar em equipa, de conviverem e de se ajudarem mutuamente.

Relativamente ao Geoplano, os alunos consideraram que era um recurso muito funcional, já o conheciam, embora não o utilizassem frequentemente.

Assim, este estudo pode enquadrar-se no referem diferentes autores, ao apontar que os alunos devem ter contacto com diferentes materiais, pois o desenvolvimento de um indivíduo progride do pensamento concreto para o abstrato (Matos & Serrazina, 1996).

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresenta-se uma síntese do estudo realizado, seguida das conclusões e reflexões sobre os resultados da investigação, das recomendações e limitações do estudo, como também de uma reflexão final.

5.1. Síntese do Estudo

Este estudo procurou compreender e avaliar o conhecimento dos alunos sobre Geometria, em particular, sobre as figuras geométricas, quadrado, retângulo e losango. Assim, através da implementação de uma sequência de tarefas de investigação e exploração, pretendeu-se analisar e entender de que forma o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, na área dos quadriláteros, com os recursos Geoplano e *GeoGebra*, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Neste sentido, definiram-se as seguintes questões de investigação: (1) Qual a imagem concetual que os alunos possuem de cada um dos quadriláteros? (2) Que conhecimentos têm os alunos sobre as propriedades dos quadriláteros: quadrados, retângulos e losangos? (3) Quais os contributos do Geoplano e do *GeoGebra* na compreensão e identificação das propriedades dos quadriláteros?

Na revisão da literatura, foram analisadas algumas perspetivas de conceituados autores sobre o ensino e aprendizagem da Geometria, como também as normas, os programas e as metas curriculares oficiais.

Na realização deste estudo, optou-se por uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, baseada em dois estudos de caso. Na recolha de dados, foram utilizados os seguintes instrumentos: observação, questionário, documentos produzidos pelos alunos, entrevistas informais, registos áudio e fotografias dos trabalhos realizados. Na

análise dos dados, procurou-se descrever e interpretar os dados recolhidos, compreender o significado das respostas dos alunos, no âmbito do objeto do estudo. A seguir, serão apresentadas as conclusões.

5.2. Conclusões e Reflexões sobre os Resultados

Neste estudo, os alunos estiveram empenhados e colaboraram com a investigadora. Demonstraram interesse e empenho, na realização das tarefas, com os recursos Geoplano e do *GeoGebra*, na realização das tarefas.

As conclusões que se apresentam a seguir, procuraram dar resposta às questões de investigação, tendo-se baseado nos dados recolhidos e na revisão de literatura.

Qual a imagem concetual que os alunos possuem de cada um dos quadriláteros?

Analisando os trabalhos produzidos pelos alunos, poderemos dizer que em relação aos quadriláteros estudados (quadrado, retângulo e losango), os alunos, no início deste estudo, tinham uma imagem concetual destes quadriláteros, na posição prototípica. Reconheciam as figuras geométricas pela sua forma, como um todo, e revelavam dificuldades na identificação das suas propriedades.

Como podemos ver nos trabalhos realizados pelos alunos, relativamente ao quadrado, identificaram-no como uma “forma geométrica” “forma com quatro lados geometricamente iguais”, “quadrado é um losango virado”, “é que tem quatro lados”. Revelaram mais facilidade em reconhecer e representar o quadrado na posição *standart* do que na oblíqua. Igualmente consideravam quadrados retângulos, quando a medida dos lados maiores era próxima da dos lados menores.

Consideraram o retângulo como a “forma de uma parede” “é um retângulo cumprido com quatro faces” “o retângulo é um quadrado especial com maior comprimento do que o quadrado” “tem quatro lados e quatro vértices”.

Em relação ao losango, foi considerado pelos alunos como “um losango é um quadrado virado ao contrário”, “é uma figura torta”, “é um losango com duas faces e quatro vértices”, “o losango é um triângulo”. Mostraram que os conhecimentos sobre os quadrados e os retângulos estavam mais consolidados do que sobre os losangos. Ainda

na definição das figuras geométricas, os alunos utilizavam essencialmente os lados, algumas vezes os ângulos, quase nunca as diagonais e os eixos de simetria.

Em relação aos eixos de simetria e às diagonais, também demonstraram dificuldades, que foram desvanecendo com o desenvolvimento deste estudo.

De uma maneira geral, os alunos, no início deste estudo, reconheciam visualmente os quadriláteros estudados, mas não reconheciam as suas propriedades de identificação. Assim, a realização das tarefas ajudou no seu desenvolvimento, pois o sentido espacial e a visualização são aspetos essenciais, em Geometria, e devem ser desenvolvidos PMEB (2007).

Os dados indicam que os alunos apresentavam algumas lacunas em termos de conhecimento sobre as figuras geométricas. Contudo, os trabalhos realizados, durante a implementação das tarefas, contribuíram para um melhor desempenho e interesse pelas aulas de Geometria, melhorando os seus conhecimentos. Neste contexto, estudos recentes indicam que alunos que participaram por experiências semelhantes demonstraram uma evolução, em relação à compreensão dos conceitos geométricos (Alves & Sampaio, 2010).

Que conhecimentos têm os alunos sobre as propriedades dos quadriláteros: quadrados, retângulos e losangos?

Os alunos demonstram dificuldades no reconhecimento das propriedades dos quadriláteros, como já referimos. No desenvolvimento do estudo, foram constatadas dificuldades ao nível dos lados, ângulos, diagonais e simetrias. Nas suas definições, muitas vezes incompletas, apenas se referem aos lados. Mostraram também dificuldades na classificação hierárquica dos quadriláteros e na inclusão de classes, pois revelaram dificuldades na compreensão e na análise das propriedades das figuras geométricas. Neste âmbito, vários autores, como Fujita e Jones (2007), Villers (1994), referem que os alunos têm dificuldades na compreensão e análise das figuras geométricas, pois a classificação implica dedução lógica entre os conceitos e as imagens, o que para os alunos é difícil.

Em suma, analisando os dados deste estudo, podemos aferir que a implementação da sequência de tarefas contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento geométrico, nomeadamente, no estudo dos quadriláteros: quadrado,

retângulo e losango. De acordo com o modelo de Van Hiele, no final deste estudo, poderemos situar os alunos no nível 2 (Análise) e no nível 3 (Dedução Informal ou Ordenação), pois identificaram as propriedades das figuras geométricas estudadas embora com algumas dificuldades e fizeram a inclusão de classes relativamente aos quadriláteros estudados, ao completar o diagrama de Venn.

Quais os contributos do Geoplano e do GeoGebra na compreensão e identificação das propriedades dos quadriláteros?

O *GeoGebra* demonstrou ser um *software* de fácil manuseamento para os alunos, favoreceu o ensino e aprendizagem da Geometria, permitiu aos alunos construir o seu conhecimento e superar dificuldades. Construíram diferentes figuras, analisaram as diferenças e semelhanças, aprenderam técnicas de construção e consolidaram conhecimentos. Através de experiências reais, desenvolveram a capacidade de visualização, pois puderam comparar figuras, rodar, ampliar, reduzir, o que facilitou a compreensão das propriedades dos quadriláteros, como também estabelecer relações entre eles (Ponte & Serrazina 2000).

O *GeoGebra* permitiu também construir as figuras com rigor e possibilitou a sua modificação, por arrastamento de um ou mais elementos, levando os alunos a observar que as propriedades permanecem invariantes. Assim, foi possível aos alunos obter inúmeras construções a partir da figura original, o que contribuiu para a modificação e correção dos conceitos (Candeias, 2005).

Facilitou ainda a abordagem dos conteúdos matemáticos, fez com que a realização das tarefas fosse de forma mais ativa, mais dinâmica e favoreceu a construção do conhecimento, pois de acordo com Laborde (2008), o *GeoGebra* influencia o modo como os alunos constroem os conceitos e os conhecimentos. São vários os estudos que referem a importância dos ambientes dinâmicos na educação, nomeadamente, do *GeoGebra*, (Assude e Gelis, 2000; Bravo,2005; Oliveira, 2010).

O Geoplano motivou os alunos na realização das tarefas, desenvolveu a sua atenção, o poder de observação, a descoberta, a orientação espacial e a destreza manual. Os alunos investigaram, exploraram e argumentaram sobre os quadriláteros que estudaram. Desenvolveram o conhecimento visual acerca dos quadriláteros estudados, aumentaram a sua capacidade de representação, através do desenho das figuras do Geoplano para a folha pontuada.

Com este recurso, Geoplano, os alunos identificaram também as propriedades e características das figuras geométricas estudadas, relacionaram as propriedades comuns e realizaram relações de inclusão.

Segundo Coelho, Tavares & Costa, (2012), este recurso favoreceu o desenvolvimento do raciocínio e a compreensão de conceitos, pois num ambiente de manipulação e investigação, o aluno encontra condições para produzir o conceito, produzir conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade e resolver problemas.

Podemos concluir que o Geoplano e o *GeoGebra* tiveram um contributo importante neste estudo, pois contribuíram, como já referimos, para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Geometria. Os dois recursos desempenharam uma função complementar, valorizando o estudo.

5.3. Recomendações e Limitações do Estudo

Esta investigação permitiu a reflexão sobre o ensino e aprendizagem da Geometria. Considerando a importância do Geoplano e do *GeoGebra* no desenvolvimento deste estudo, estes recursos deverão ser utilizados sempre que possível, nomeadamente, os ambientes de Geometria dinâmica, tal como defendem vários autores já referidos.

Não se pretende a generalização dos resultados obtidos, uma vez que este estudo foi realizado apenas com dois pares (grupos) de alunos, num contexto específico, podendo naturalmente constituir um contributo para outros estudos sobre a mesma temática, noutros contextos.

Consideramos que as principais dificuldades, na realização deste estudo, foram: o espaço de tempo limitado e o contexto em que foi desenvolvido.

5.4. Reflexão Final

Durante a implementação das tarefas, o desenvolvimento do estudo valorizou os conhecimentos dos alunos, como já foi mencionado, pois permitiu-lhes compreender conceitos, termos geométricos que favorecem a assimilação e a compreensão. As atividades permitiram uma exploração livre, levando os alunos a relacionarem os conhecimentos novos com os anteriores.

Este estudo ajudou a professora a compreender as dificuldades que os alunos revelam e a refletir sobre as suas práticas, pois, segundo Oliveira e Serrazina (2002), a prática reflexiva proporciona aos professores oportunidades para o seu desenvolvimento, tornando-os profissionais mais responsáveis, melhores e mais conscientes, na medida em que a reflexão pode abrir novas possibilidades para a ação e conduzir a novos melhoramentos.

Foi um trabalho enriquecedor para os alunos, como também para a investigadora. Os recursos utilizados *GeoGebra* e *Geoplano* valorizaram a experiência e motivaram os alunos para o ensino da Matemática.

Considerando a globalidade dos aspetos evidenciados, o *GeoGebra* demonstrou ser um *software* de fácil utilização, como já referimos, uma vez que os alunos aprenderam facilmente a trabalhar com ele e tiraram proveito das suas potencialidades educativas, explorando construções, manipulações e visualizações, que ajudaram no desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Também o *Geoplano* foi um recurso funcional e importante na realização de tarefas, pois de acordo com diferentes autores (Coelho et al, 2012), este facilita a investigação, a exploração e a argumentação na Matemática.

Em suma, o trabalho desenvolvido foi enriquecedor para todos os envolvidos, alunos e professora.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre currículos do ensino básico*. Lisboa: ME-DEB.
- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-168). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abreu, A. (2013) *O ensino e a aprendizagem de geometria com recurso a materiais manipuláveis: uma experiência com alunos do 9º ano de escolaridade*. Braga: Universidade do Minho.
- Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM.
- Alves, G., & Sampaio, F. (2010). O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, n. 5, 69-76.
- Alvez, G., & Soares, A. (2003). *Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae*. XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Campinas, 2003.

- Assude, T., & Gelis, J. M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans L'integration de Cabri-géomètre a L'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Reston, VA:NCTM.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011) *Geometria e Medida no Ensino Básico. Brochura de apoio ao Programa do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida*. Lisboa: Direção geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).
- Bogdan, R., & Biken, S. (2013). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora
- Botas, D. (2008). *A utilização de materiais didáticos nas aulas de Matemática. Um estudo no 1.ºciclo*. Tese de mestrado em ensino das Ciências, Universidade Aberta, Lisboa, Portugal.
- Bravo, J. F. (2005). *Impacto da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem da geometria por alunos do 4ºano do Ensino Básico*. Braga: Universidade do Minho.
- Cabrita, I., & Silveira, A. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas. *Indagatio Didactica*, 5 (1).149-170.
- Candeias, N. J. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica*. Tese de Mestrado. Coleção Teses. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Candeias, N., & Ponte J. P. (2006). *Uma proposta curricular para o ensino da geometria do 8º ano*. Acedido em 5 de Dezembro de 2014 em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2006/2006_07_NCandeias.pdf

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482–487.

Coelho, E. B., Tavares, L. C., & Costa A. P. (2012). Recursos Educativos para o Ensino da Geometria: o caso prático do “Medir-Medindo – Tarefas com o Geoplano”. *Aprendizagem formal e informal, 7 a 9 de Maio, Redondo*.

Costa, C. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Acedido em 26 de Janeiro de 2015 em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_08_CCosta.pdf

Costa, M. C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas*. Almedina, Coimbra.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação* 15 (1), 221-243.

- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Handbook of qualitative research. London, Sage Publication.
- Domingues, C., & Martinho, M. H. (2012). Desenvolvimento Matemático e as Práticas de comunicação numa aula. *Práticas de ensino da Matemática*, 321-334.
- Duval, Raymond (1998), Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V., Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 29-83.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9 (1) 3-20.
- Gafanhoto, A., & Canavaro, A. P. (2012). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 121-134).
- González, G. & Herbst, P. G. (2009). Students' Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14, 153-182.

- Hamazaki, A. C. (2004). *O ensino da Geometria por meio da Metodologia van Hiele*:
Acedido em 11 de Dezembro de 2014 em
<http://www.drb-sessoria.com.br/1ENSINODAGEOMETRIAVANHIELE.pdf>
- Hébert, M. L., Goyette, G., & Boutin, G. (2012). *Investigação Qualitativa*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Hershkowitz, R. (1998). About Reasoning in Geometry. In C. Mammana, & V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 29-37). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004) *Combination of dynamic geometry, álgebra and calculus in he softwares system GeoGebra*. Acedido em 3 de Novembro de 2015 - http://archive.geogebra.org/static/publications/pecs_2004
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.
- Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching and learning* (pp. 3-15). London: Open University Press.
- Laborde, C. (2008). Technology as an instrument for teachers, IAM (Computer Science and Mathematics Learning), ICME11.
- Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista, SBEM, 4*, 3-13.

- Loureiro, C. (2008). Geometria Viva no Ensino Básico Acedido em 8 de junho de 2015 em http://www.apm.pt/files/_Cd_Loureiro_4a70368e0a087.pdf.
- Lopes, M. (2013) Sequência Didática para o ensino de Trigonometria usando o *software GeoGebra*. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, 27 (46), 631-644.
- Maia, C. (2014) *As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento em Educação. Porto: Universidade Portucalense.
- Matos, J. M., & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas atividades. *Educação e Matemática*, 26, 13-17.
- Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso de investigação em educação. *Eduser: revista de educação*, 2 (2), 49-65.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa do Ensino Básico Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, DGE.
- Morais, C., Cadavez, C., Cadavez, V., & Miranda, L. (2013). Utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra por alunos do 3.º ciclo do ensino básico. In *Congreso Ibérico Internacional en Innovación Educativa con TIC: Aprender, colaborar e innovar a través de las TIC*, pp.1-11. Salamanca: Ediciones Bracamonte.
- Nasser, L. (1992) Níveis de van Hiele: uma explicação para as dificuldades em Geometria? *Boletim do GEPEM*. Rio de Janeiro, (29), 33-38.
- NCTM (1991). *Princípios e Normas para Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (1995). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics, addenda series, grades K-6, geometry and spatial sense*. Reston: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas para a matemática escolar* (2.ª ed.) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).
- Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Eds.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp.29-42). Lisboa: APM.

- Oliveira, L. D. (2010) O uso do *GeoGebra* como instrumento mediador no ensino e aprendizagem de Geometria. X *Encontro Nacional de Educação Matemática*. Brazil: Salvador.
- Palles, C., & Silva, M. (2012). Visualização em geometria dinâmica. *Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul*. (pp. 1-9). São Paulo
- Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in Evaluation*, Sage Publications
- Pereira, M. (2012). *Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra) e do Geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros*. Dissertação de Mestrado. Lisboa: Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação.
- Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In *GTI (ed.), O Professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte; J. P. (2006). *Estudos de caso em educação matemática*, Acedido em 29 de Janeiro de 2014 em <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3007>
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In *GTI (Org.), O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

- Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática (ISSN: 1815-0640)*, 21, 13-30.
- Ponte, J. P., Nunes, C., & Quaresma, M. (2012). *Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática. Elementos Fundamentais para a Aprendizagem*. Acedido em 4 de Dezembro de 2014 em <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334366.PDF>
- Ponte, J. P., (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Ponte, J. P., & Velez, I., (2013). *Promover o raciocínio dos alunos: Planificar, Conduzir e Refletir sobre o trabalho na sala de aula*. Acedido em 4 de Dezembro de 2014 em <http://eiem2013.spiem.pt/wp-content/uploads/2013/05/GD2C7VelezPonte.pdf>
- Robichaux, R. R., & Rodrigue, P. R. (2010). Polygon Properties: What Is Possible? *Teaching Children Mathematics*, 16(9), 524-531
- Rodrigues, M.; & Bernardo, M. (2011). Ensino e Aprendizagem da Geometria. *Atas do XXII SIEM*, 339-334.
- Serrão, A., (2013). O PISA e a participação de Portugal. *CIES e-Working Paper nº 162*.
- Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In *GTI (Ed.), O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp.43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.

- Serrazina, L., & MATOS, J. M. (1996), *O geoplano na sala de aula*. Lisboa: APM.
- Silva, P., & Santos, L. (2013). *O raciocínio geométrico nas provas de avaliação externa do 2º ciclo do Ensino Básico*. Acedido em 5 de Dezembro de 2014 em http://www.apm.pt/files/_S1-C1-Silva_529d2787994e7.pdf
- Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). *O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas*. Acedido em 3 de Dezembro de 2014 em <http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/viewFile/2425/2296>
- Skovsmose, O. (2008). *Educação Matemática Crítica - A Questão da Democracia*. (4ª Edição). Campinas: Papirus.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics* , 69, 81–95.
- Vale (1999). *Materiais manipuláveis*. Viana do Castelo: ESE.
- Veloso, E. (1998). *Geometria, temas atuais: materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Viseu, F., Almeida, J., & Fernandes, J., (2013). O Conhecimento didático de duas Professoras do 1º Ciclo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (34), 113-130.
- Villiers, M. (1994), O Papel e a Função de uma Classificação Hierárquica de Quadriláteros. Acedido em 8 de junho de 2015 em http://www.apm.pt/files/_traducao_do_Villiers_v_FINAL_4a6423ce36ef5.pdf

Villers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele1 *Some reflections on the Van Hiele Theory Educ. Matem. Pesq., São Paulo, 12, (3), 400-431.*

APÊNDICES

Apêndice 1

Exmo. Senhor Encarregado de Educação

Venho solicitar a vossa autorização para a colaboração do vosso educando, num estudo, no âmbito do Mestrado em Educação, na área da Matemática, no domínio da Geometria.

O objetivo do trabalho é recolher informação, compreender e analisar o contributo dos recursos *GeoGebra* e *Geoplano* no ensino e aprendizagem da Matemática.

É garantida a confidencialidade dos resultados, como o anonimato dos participantes.

Agradeço a vossa atenção.

Solicito a devolução do destacável, caso **autorize** a participação do vosso educando.

Atenciosamente,

Carla Sousa

Autorizo que o meu educando,

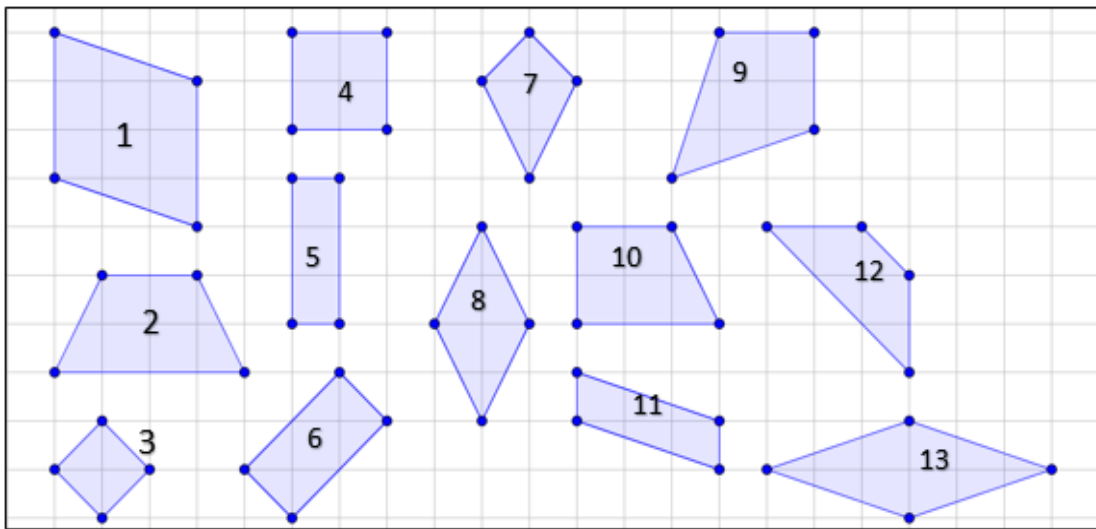
do ano _____ participe no estudo acima referido.

O Encarregado de Educação

Apêndice 2
Questionário Inicial

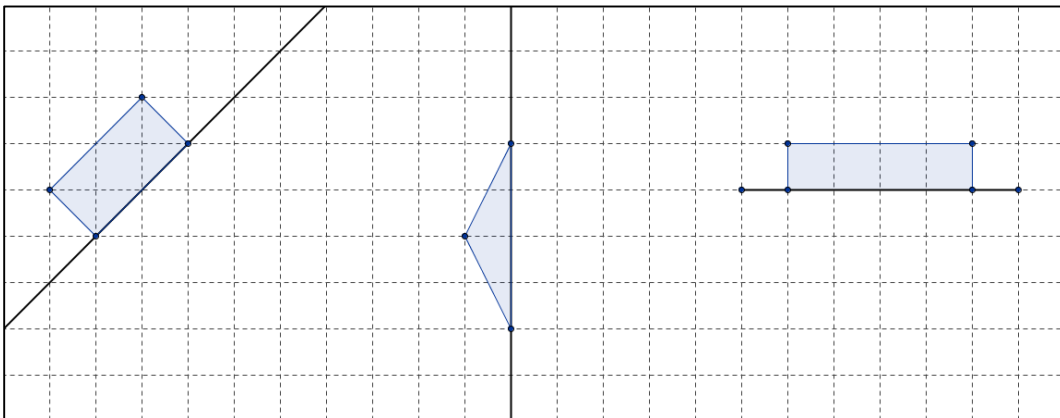
Nome: _____ Data _____

1. Observa as figuras e indica as que são:

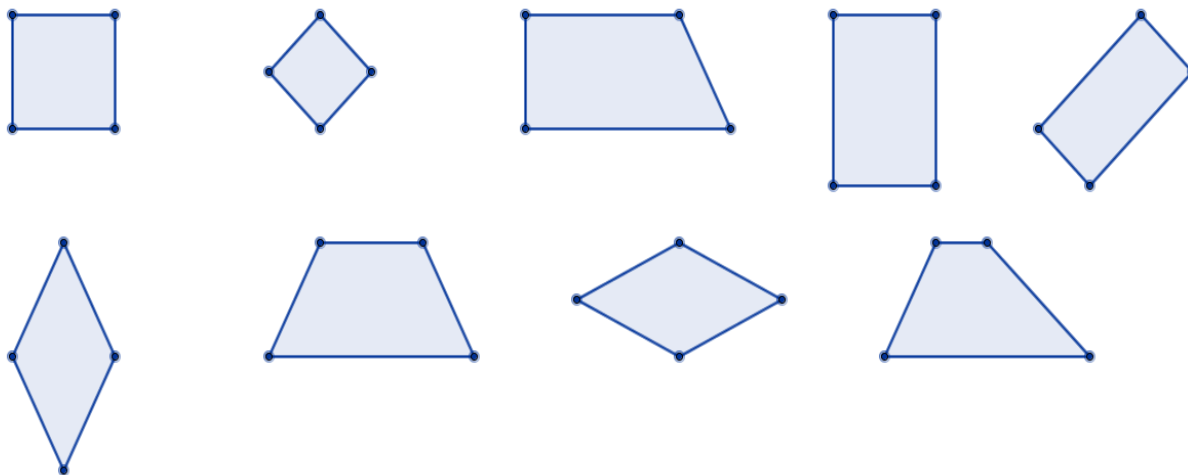


- a) Quadrados. _____
- b) Retângulos. _____
- c) Losangos. _____

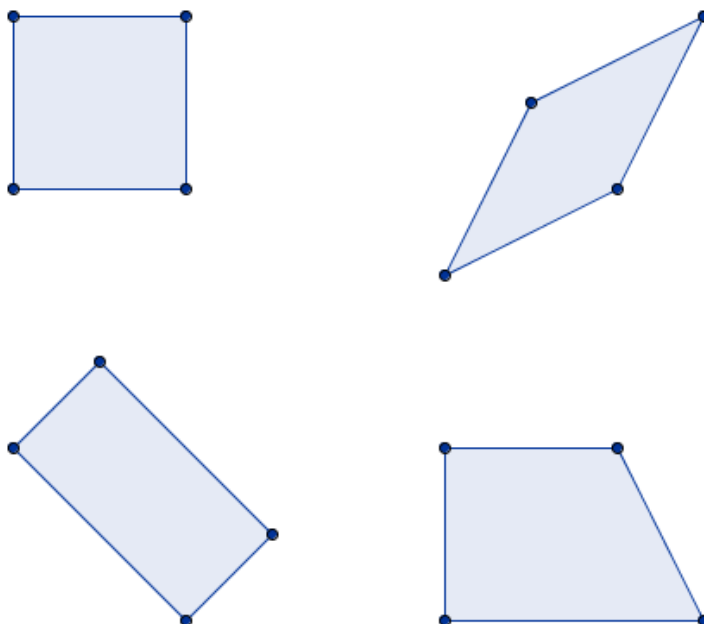
2. Completa as figuras para que fiquem simétricas, relativamente aos eixos indicados.



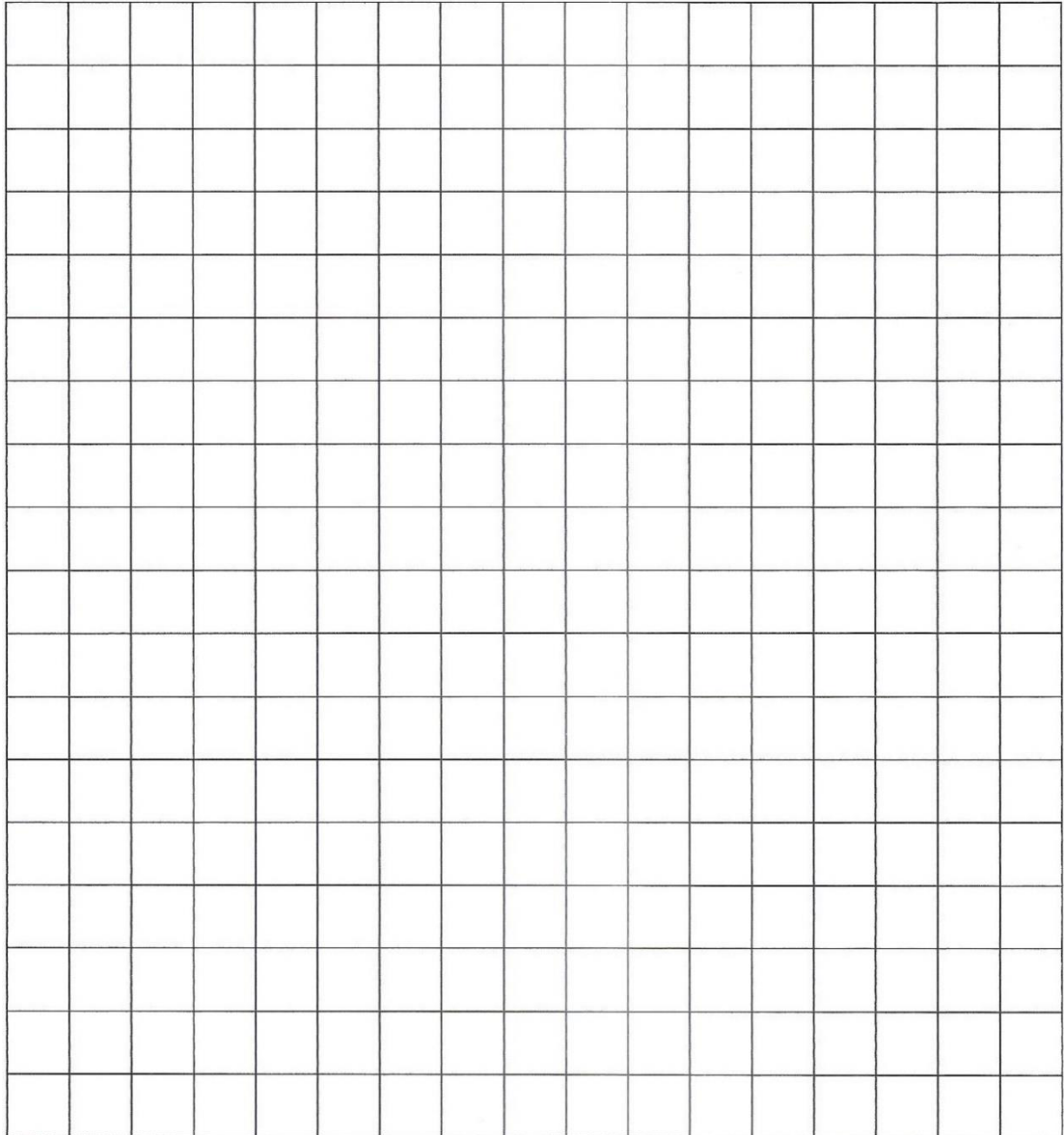
3. Desenha, se houver, os eixos de simetria dos seguintes quadriláteros.



4. Desenha as diagonais dos seguintes quadriláteros.



5. Desenha três quadrados, três retângulos e três losangos não congruentes.



6. O que é para ti, um quadrado?

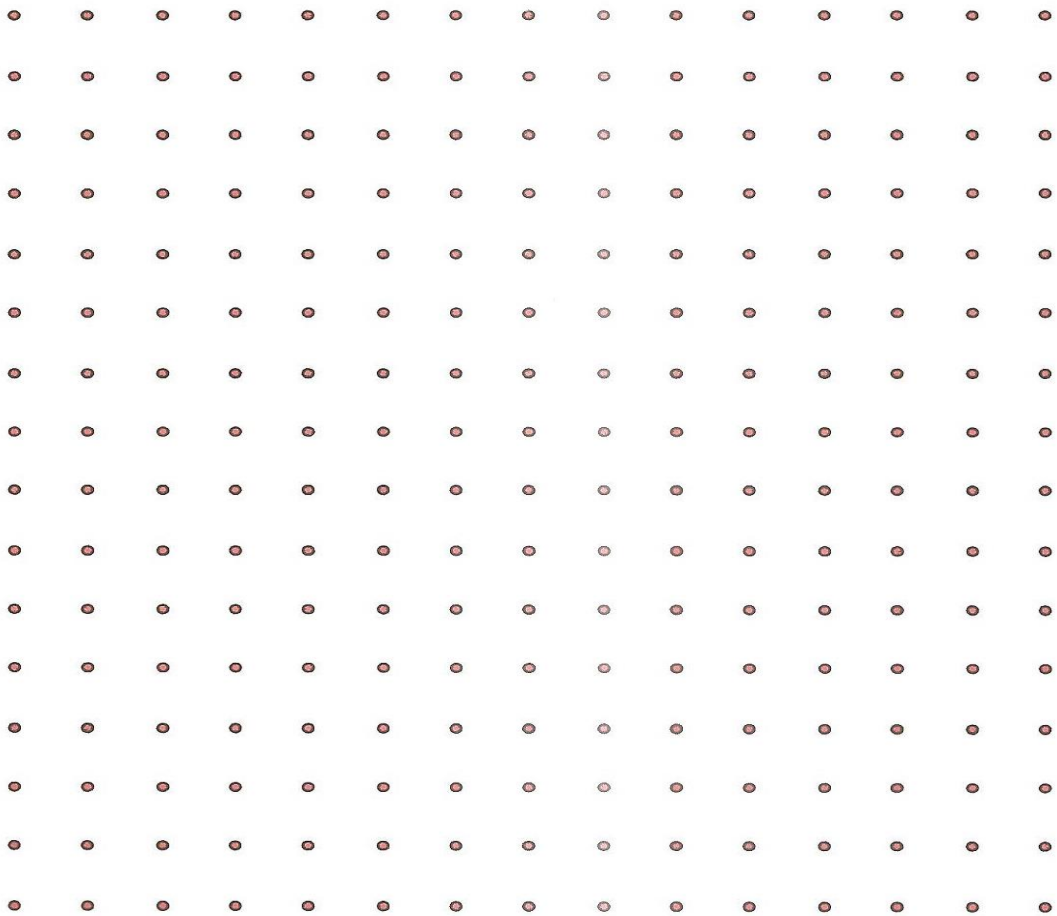
7. O que é para ti, um retângulo?

8. O que é para ti, um losango?

Apêndice 3
Tarefa 1 – Construção de Quadriláteros
Trabalho com o Geoplano

Nome: _____ Data: _____

1. Os quadriláteros são figuras geométricas com quatro lados.
 - Constrói, no Geoplano, todos os tipos de quadriláteros que conheces.
 - Copia para este ponteados os quadriláteros que construístes no Geoplano e escreve o seu nome.
 - Desenha as diagonais dos quadriláteros construídos.



2. Completa a tabela

Escreve o nome dos quadriláteros que conheces e coloca uma cruz (X) onde se verificarem as respetivas propriedades das diagonais.

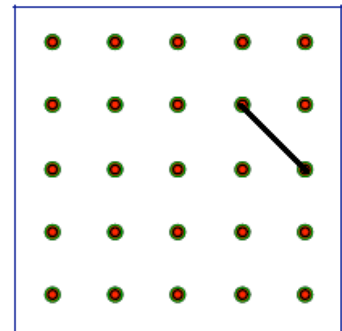
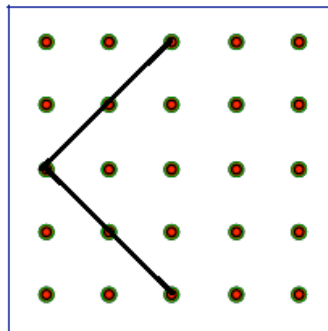
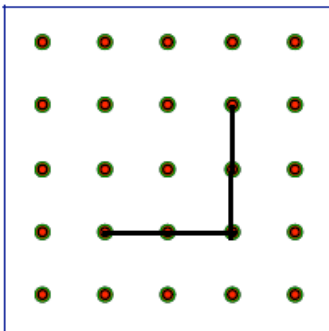
Quadrilátero	Diagonais		
	Perpendiculares	Intersectam-se nos pontos médios (bissetam-se)	Congruentes

Apêndice 4
Tarefa 2 – Quadrado, Retângulo, Losango
Trabalho com o Geoplano

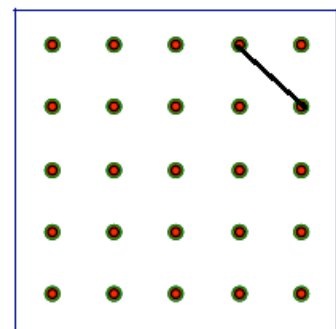
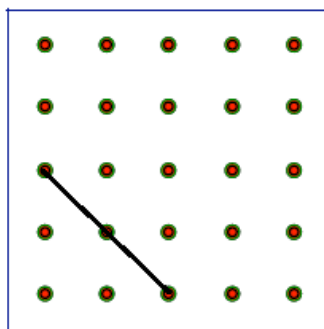
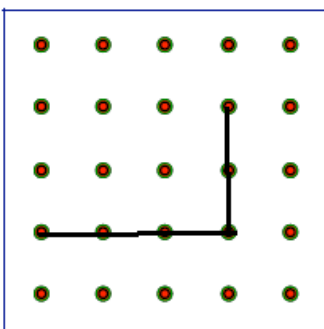
Nome: _____ Data: _____

1. No Geoplano, completa os seguintes quadriláteros.

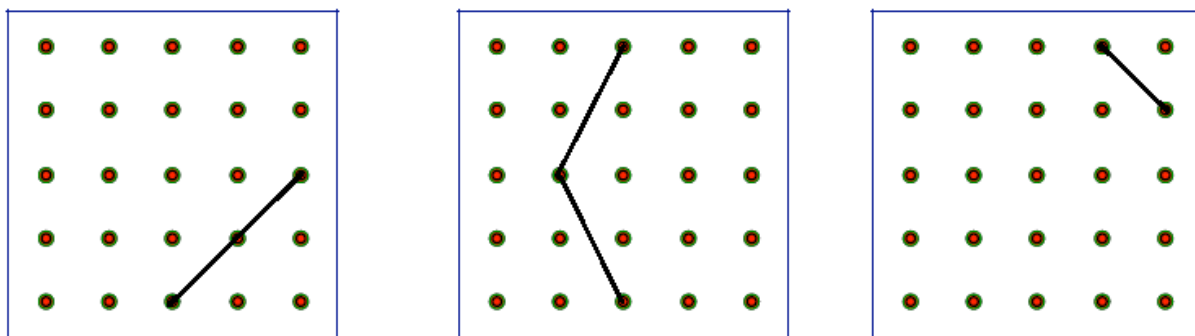
Quadrados



Retângulos



Losangos



a) Explica por palavras tuas como completaste os quadrados, os retângulos e os losangos.

2. Desenha os eixos de simetria dos quadriláteros que construístes.

3. Preenche o quadro abaixo.

Quadrilátero	Número de eixos de simetria
Retângulo	
Losango	
Quadrado	

Apêndice 5
Tarefa 3 – Reconhecer as Propriedades dos Quadriláteros
Trabalho com o Geoplano

Nome: _____ Data: _____

1. Recorda as atividades realizadas. Podes utilizar o Geoplano, se for preciso.

Observa as propriedades dos quadriláteros que desenhaste: lados, ângulos, diagonais, simetrias.

Preenche o quadro seguinte.

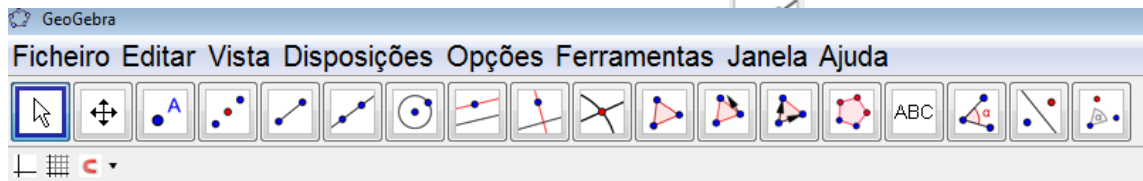
Quadriláteros	Lados	Ângulos	Diagonais	Eixos Simetria
Retângulo				
Losango				
Quadrado				


Apêndice 6 Tarefa 4 – Explorar o GeoGebra

Nome: _____ Data: _____

1. Construir retas paralelas.

- Seleciona  e marca os pontos A e B.



- Procura no menu “Reta (Dois Pontos)” e desenha uma reta que passe pelos pontos A e B.
- Procura “Reta Paralela”  e desenha uma reta paralela a AB.
- Muda a cor e a espessura da reta.


Clica sobre a reta e seleciona no menu a cor e a espessura.



- Desenha outras retas paralelas.

Grava o trabalho com o nome “retas paralelas”.

2. Construir retas perpendiculares.

- Desenha uma reta.
- Procura “reta perpendicular”  no menu e desenha uma reta perpendicular a reta anterior.
- Desenha outras retas perpendiculares.

Grava o trabalho com o nome “retas perpendiculares”.

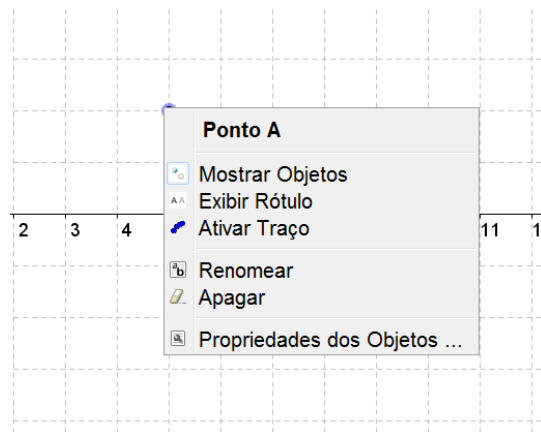
Apêndice 7
Tarefa 5 – Explorar o GeoGebra


Nome: _____ Data: _____


1. Construir segmento e ponto médio.

- Marca os pontos L e M.

Clica com o botão direito do rato em cima de cada ponto e seleciona renomear.



- Procura no menu “segmento de reta”  e une os pontos com um segmento de reta.


- Seleciona “ponto médio”  e marca o ponto médio do segmento de reta [LM] designa-o por P.

- Move os vértices.

O ponto médio mantém-se?


Grava o trabalho com o nome “segmento de reta”.

2. Construir um triângulo.

- Marca três pontos A, B e C.
- Selecciona no menu, Polígono e  desenha o triângulo ABC.

Grava o trabalho com o nome “triângulo”.

3. Construir um quadrilátero qualquer.

- Marca quatro pontos A, B, C e D.
- Desenha os segmentos de reta [AB], [BC], [CD] e [DA].
- Mede os lados do quadrilátero, selecciona no menu, Distância ou Comprimento. 

Grava o trabalho com o nome “quadrilátero”.

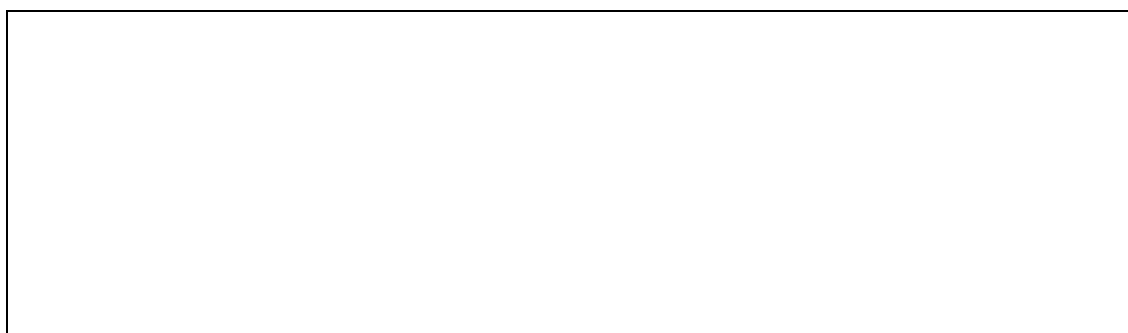
Apêndice 8
Tarefa 6 – Construção de Quadriláteros
Trabalho com o GeoGebra

Nome: _____ Data: _____

1. Construir os seguintes quadriláteros:

- a) Quadrado
- b) Retângulo
- c) Losango.

Explica como construístes.



Grava com o nome “vários quadriláteros”.

Apêndice 9
Tarefa 7 – Construção de Quadriláteros
Trabalho com o GeoGebra

Nome: _____ Data: _____

1. Constrói um retângulo dinâmico, ou seja, independentemente da transformação que se consiga fazer à figura, este continuará a ser um retângulo, mantendo as suas propriedades.

Tens de ocultar a malha quadriculada.

Consegues transformar o retângulo num quadrado? O que podes concluir?

Grava com o nome “retângulo”.

2. Constrói um quadrado dinâmico.

Grava com o nome “quadrado”.

Apêndice 10
Tarefa 8 – Análise da Construção do Losango
Trabalho com o *GeoGebra*

Nome: _____ Data: _____

1. Analisar a construção de um losango.

- Abre o ficheiro “Losango”.
- Desenha as diagonais.
- Mede o comprimento dos lados e das diagonais.

O que observas?

Consegues transformar o losango num quadrado? O que podes concluir?

Apêndice 11
Tarefa 9 – Classificar Quadriláteros
Trabalho Geoplano e Geogebra

Nome: _____ Data: _____

1. Adivinha qual é o quadrilátero.

Quadrilátero com os lados todos iguais e dois eixos de simetria.

Quadrilátero com ângulos iguais e dois eixos de simetria.

Quadrilátero com quatro eixos de simetria.

2. Agrupa os quadriláteros que estudaste no diagrama de Venn, de acordo com as suas propriedades.

