

LEIS DE POTÊNCIA EM ECONOMIA E FINANÇAS

Filipe Moisés Pinto Monteiro



Mestrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Área de Especialização de Telecomunicações

Departamento de Engenharia Eletrotécnica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

2014

Este relatório satisfaz, parcialmente, os requisitos que constam da Ficha de Disciplina de Tese/Dissertação, do 2º ano, do Mestrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Candidato: Filipe Moisés Pinto Monteiro, N° 1090388, 1090388@isep.ipp.pt

Orientação científica: Carla Pinto, cap@isep.ipp.pt

Coorientação Científica: J. A. Tenreiro Machado, jtm@isep.ipp.pt



Mestrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Área de Especialização de Telecomunicações

Departamento de Engenharia Eletrotécnica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

17 de novembro de 2014

Agradecimentos

Quero deixar aqui um agradecimento aos meus pais por todo o apoio e compreensão que me deram ao longo de todo o meu percurso até este momento, não me deixando desistir nem retroceder perante as dificuldades que foram surgindo.

Quero também agradecer à minha namorada pela paciência e motivação que me deu, ajudando-me assim a aguentar esta jornada final.

No meio académico, quero deixar o meu agradecimento à professora Carla Pinto, pelo apoio incondicional demonstrado, desde o início até ao final deste trabalho. Ainda bem que insistiu comigo e por isso agradeço por ter sido a minha orientadora nesta fase importante.

Resumo

Nesta dissertação aborda-se a aplicação de Leis de Potência (LPs), também designadas de Leis de Pareto ou Leis de Zipf, a dados económicos. As LPs são distribuições estatísticas amplamente usadas na compreensão de sistemas naturais e artificiais. O aparecimento das LPs deve-se a Vilfredo Pareto que, no século XIX, publicou o manual de economia política, “*Cours d’Economie Politique*”. Nesse manual refere que grande parte da economia mundial segue uma LP, em que 20% da população reúne 80% da riqueza do país. Esta propriedade caracteriza uma variável que segue uma distribuição de Pareto (ou LP). Desde então, as LPs foram aplicadas a outros fenómenos, nomeadamente a ocorrência de palavras em textos, os sobrenomes das pessoas, a variação dos rendimentos pessoais ou de empresas, o número de vítimas de inundações ou tremores de terra, os acessos a sítios da internet, etc.

Neste trabalho, é estudado um conjunto de dados relativos às fortunas particulares ou coletivas de pessoas ou organizações. Mais concretamente são analisados dados recolhidos sobre as fortunas das mulheres mais ricas do mundo, dos homens mais ricos no ramo da tecnologia, das famílias mais ricas, das 20 mulheres mais ricas da América, dos 400 homens mais ricos da América, dos homens mais ricos do mundo, dos estabelecimentos mais ricos do mundo, das empresas mais ricas do mundo e dos países mais ricos do mundo, bem como o valor de algumas empresas no mercado de ações. Os resultados obtidos revelam uma boa aproximação de parte desses dados a uma LP simples e uma boa aproximação pelos restantes dados a uma LP dupla. Observa-se, assim, diferenciação na forma de crescimento das fortunas nos diferentes casos estudados.

Como trabalho futuro, procurar-se-á analisar estes e outros dados, utilizando outras distribuições estatísticas, como a exponencial ou a lognormal, que possuem comportamentos semelhantes à LP, com o intuito de serem comparados os resultados. Um outro aspeto interessante será o de encontrar a explicação analítica para as vantagens da aproximação de dados económicos por uma LP simples vs por uma LP dupla.

Palavras-Chave

Leis de Potência (LP), Lei de Pareto, Lei de Zipf, dados económicos, LP simples, LP dupla

Abstract

In this study we consider Power Laws (PLs), also known as Pareto Laws or Zipf Laws. PLs are statistical distributions. Vilfredo Pareto, in the XIX century, was a pioneer in the study of PLs. He states, in his manual of political economy, "Cours d'Economie Politique", that a large part of the world economy follows a particular distribution, in which 20% of the population gathers 80% of the total wealth, and so, a small fraction of the society controls the largest share of the money. This summarizes the behavior of a variable that follows a Pareto distribution (or, PL). Until now, several researchers applied PLs to other natural and human-made phenomena, such as the occurrence of words in texts, person's surnames, the variation in personal incomes or businesses, the number of casualties in floods and earthquakes, on the internet, amongst others.

This work focuses on the application of PLs to economic data from private persons and organizations. More specifically, it is studied data concerning fortunes of the richest women in the world, of the richest men in any branch of technology, of the richest families, of the 20 richest women of America, of the 400 richest men in America, the world's richest men, the world's richest companies, the companies' values at stock market. The results obtained reveal a good approximation of certain data by a single PL and the remaining data is better approximated by a double PL. There is, thus, differentiation in the form of growth of fortunes in the different cases studied.

As future work, we will analyze these and other data, using other statistical distributions, such as exponential or lognormal, that have similar behaviors to the PL, with the intent to compare the outcomes. Another interesting aspect will be to find the analytic explanation of the benefits of economic data approximation by a simple LP vs for a double LP.

Keywords

Power Laws (PL), Pareto Laws, Zipf Law, economic data, single PL, double PL.

Índice

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABELAS	XI
ACRÓNIMOS	XIII
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO	2
1.2. OBJETIVOS	3
1.3. CALENDARIZAÇÃO	3
1.4. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO	4
2. LEIS DE POTÊNCIA E SUA APLICAÇÃO À ECONOMIA	5
2.1. LEI DE POTÊNCIA	5
2.2. MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA LP.....	6
2.3. ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LP.....	8
2.4. APLICAÇÃO À ECONOMIA	9
2.5. OUTRAS APLICAÇÕES	12
3. APLICAÇÃO DAS LEIS DE POTÊNCIA A DADOS ECONÓMICOS	16
3.1. OS 400 HOMENS MAIS RICOS DA AMÉRICA	17
3.2. OS MAIORES BILIONÁRIOS DO MUNDO	18
3.3. VALOR DAS EMPRESAS NO MERCADO DE AÇÕES	19
3.4. AS 20 MULHERES MAIS RICAS NA AMÉRICA.....	20
3.5. AS MULHERES MAIS RICAS DO MUNDO.....	21
3.6. AS EMPRESAS MAIS RICAS DO MUNDO	22
3.7. AS FAMÍLIAS MAIS RICAS DO MUNDO.....	23
3.8. OS PAÍSES MAIS RICOS DO MUNDO	24
3.9. OS HOTÉIS/RESTAURANTES MAIS RICOS DO MUNDO.....	24
3.10. OS HOMENS MAIS RICOS NO RAMO DA TECNOLOGIA	25
3.11. PERSPETIVA GLOBAL	26
4. CONCLUSÕES	31
REFERÊNCIAS DOCUMENTAIS	33

Índice de Figuras

Figura 1	Gráfico classificação/frequência antes da normalização, referente aos 400 homens mais ricos da América.	17
Figura 2	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos 400 homens mais ricos da América. Aproximação por uma LP simples.	18
Figura 3	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos 400 homens mais ricos da América. Aproximação por uma LP dupla.	18
Figura 4	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos maiores bilionários do mundo. Ajustada uma LP simples.	19
Figura 5	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente ao valor das empresas no mercado de ações. Foi ajustada uma LP.	20
Figura 6	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente ao valor das empresas no mercado de ações. Foi aproximada uma LP dupla.	20
Figura 7	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às 20 mulheres mais ricas da América. Foi ajustada uma LP simples.	21
Figura 8	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às mulheres mais ricas do mundo. Foi ajustada uma LP simples.	21
Figura 9	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às empresas mais ricas do mundo. Foi ajustada uma LP simples.	22
Figura 10	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às empresas mais ricas do mundo. Os dados foram ajustados por uma LP dupla.	23
Figura 11	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às famílias mais ricas do mundo. Foi aproximada uma LP simples.	23
Figura 12	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos países mais ricos do mundo. Foi ajustada uma LP simples.	24
Figura 13	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos estabelecimentos mais ricos do mundo. Foi ajustada uma LP simples.	25
Figura 14	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos estabelecimentos mais ricos do mundo. Foi ajustada uma LP dupla.	25
Figura 15	Gráfico classificação/frequência após a normalização, referentes aos homens mais ricos do mundo, no ramo da tecnologia. Foi ajustada uma LP simples.	26
Figura 16	Variação dos parâmetros C e α das LP dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP simples.	26
Figura 17	Variação dos parâmetros C e α das LPs dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP dupla.	28
Figura 18	Variação dos parâmetros \hat{C}_i das LP dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP dupla.	29
Figura 19	Variação dos parâmetros $\hat{\alpha}_i$ das LP dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP dupla.	29

Índice de Tabelas

Tabela 1	Calendarização do Projeto.....	4
----------	--------------------------------	---

Acrónimos

LP – Lei de Potência

fdp – Função Densidade de Probabilidade

1. INTRODUÇÃO

As distribuições de leis de potência (LPs), também conhecidas como leis de Pareto ou de Zipf, são distribuições de cauda longa e têm sido largamente referidas na modelação de fenómenos reais distintos. No entanto, esta ainda é uma questão controversa visto que há autores que afirmam que as LPs são simplesmente fenómenos estatísticos, dos quais nada se pode inferir. [40] Outros sugerem que o debate em torno das leis de Pareto ou Zipf deve ser sobre quão bem ou mal essas distribuições podem adaptar-se aos dados e não sobre se elas podem ser rejeitadas ou não. Em conclusão, as LPs constituem uma ferramenta extraordinariamente interessante para analisar os dados, que deve ser apoiada por uma forte validação e controlo analítico [40].

Em 1986, o italiano Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923)[37] estudou as distribuições LP e verificou que, para muitos eventos, 80% dos efeitos provêm de 20% das causas. Este princípio ficou conhecido como o Princípio de Pareto ou regra 80-20. Uma das mais polémicas “descobertas” de Pareto, devido às questões políticas da época, foi que 80% das terras em Itália eram detidas por 20% da população, verificando-se a mesma situação para os rendimentos, onde 20% das pessoas detinham 80% da riqueza do país.

Os seus estudos foram seguidos por outros investigadores, que aplicaram as LPs a outros fenómenos [54]. Auerbach [3], em 1913, descobriu que o tamanho de uma cidade era inversamente proporcional à sua frequência. Este estudo trouxe uma forte motivação para o estudo da distribuição do tamanho de cidades [55][28][38][48]. Outros exemplos de aplicação de LPs são a produção científica de químicos e físicos [30], o número de citações de artigos [41][42], o número de vezes que uma página da internet é acessada [1], a frequência de nomes próprios na maioria das culturas, a distribuição de espécies biológicas

[23][52], a frequência de terremotos [22][7], a frequência de precipitação [39], a frequência de crateras na lua [35], a frequência das erupções solares [31], a frequência de guerras e ataques terroristas [45][47][15], a venda de livros [36][24], a decodificação de sequências de ADN [26], entre muitas outras.

Nesta tese pretende-se aplicar as LPs ao tratamento de dados económicos. Será considerado o ajuste dos dados por uma LP simples e por uma LP dupla. Uma LP dupla resulta da aplicação de duas LPs a um mesmo conjunto de dados, sendo uma das LPs aproximada à cauda e outra LP aproximada ao início da distribuição.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Em 1896, Pareto [37][37] introduziu a distribuição de Pareto para descrever a distribuição dos rendimentos. Foi a primeira LP a aparecer na literatura. Hoje em dia, numa sociedade altamente globalizada, existem bases de dados muito completas sobre preços de mercados, empresas e a riqueza das pessoas. Muitas vão sendo dadas a conhecer através de pequenas amostragens ou análises ao longo do tempo. Estas informações são cruciais para a compreensão da atividade económica mundial.

O estudo da verificação da lei de Pareto na descrição dos rendimentos ou na distribuição da riqueza é muito importante. Esse estudo recai sobre uma pequena percentagem da população porém, essa pequena percentagem detém a maioria da riqueza mundial e qualquer decisão pode, assim, afectar largamente a economia global. Têm sido propostas muitas teorias para explicar o comportamento de cauda longa na Lei de Pareto, como, por exemplo, séries de Markov, para modelar os rendimentos dos indivíduos [9], ou as distribuições de Lévy [32]. O valor do expoente de Pareto situa-se entre 1 e 2 variando de economia para economia [29].

A riqueza ou os ganhos da maioria da população e das empresas, ou seja, dos pobres e do grupo de baixos rendimentos da população, não segue uma LP e alguns autores sugerem que obedece a uma distribuição de Gibbs [16].

No decorrer desta tese será estudada a aplicação das LPs a fenómenos relacionados com a economia.

1.2. OBJETIVOS

O objectivo principal deste trabalho é o estudo das LPs e a sua aplicação a dados económicos.

Os pontos fundamentais tratados nesta tese são:

- estado da arte das LPs e suas aplicações mais comuns;
- estudo da função de distribuição estatística da LP e dos seus parâmetros;
- aplicação das LPs a fenómenos relacionados com a economia.

1.3. CALENDARIZAÇÃO

A calendarização das várias fases de desenvolvimento do trabalho é apresentada na Tabela 1. As tarefas desenvolvidas consistiram no estudo de bibliografia, que teve como base artigos científicos na área; na obtenção e análise de informação existente em bases de dados públicas e de confiança, sobre dados económicos; e, por fim, na elaboração do relatório final. O estudo de bibliografia foi a tarefa que se prolongou mais no tempo, dada a falta de conhecimento do mestrando sobre este assunto.

Tabela 1 Calendarização do Projeto

ETAPAS	SEMANAS	Mar.				Abr.				Mai.				Jun.				Jul.				Ago.				Set.				Out.			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Recolha de Bibliografia	15 S																																
Estudo da Bibliografia	11 S																																
Implementação	10 s																																
Análise de dados	9 S																																
Elaboração do Relatório Final	12 S																																

1.4. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO

No Capítulo 1, é feita uma introdução às leis de potência. No capítulo seguinte, é apresentada uma descrição mais detalhada da distribuição estatística LP e as suas principais aplicações, relacionadas com dados económicos e outros tipos de dados. No terceiro capítulo, mostram-se os resultados das aplicações das LPs, em forma de gráficos das distribuições cumulativas dos fenómenos estudados. Por último, no quarto capítulo conclui-se o trabalho e projeta-se trabalho futuro.

2. LEIS DE POTÊNCIA E SUA APLICAÇÃO À ECONOMIA

Neste capítulo descreve-se o estado da arte da aplicação das LPs a dados económicos. Faz-se ainda um resumo da distribuição estatística da LP.

2.1. LEI DE POTÊNCIA

A função densidade de probabilidade (fdp) de uma variável aleatória contínua, X , que segue uma distribuição LP é dada por [27]:

$$f(x) = Cx^{-\alpha} \quad (1)$$

Esta função densidade diverge quando x tende para zero, pelo que existe um valor x_{min} a partir do qual a função está definida. Assumindo que $\alpha > 1$ e calculando C por normalização da fdp vem:

$$1 = \int_{x_{min}}^{\infty} f(x)dx = C \int_{x_{min}}^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{C}{1-\alpha} [x^{-\alpha+1}]_{x_{min}}^{\infty} \quad (2)$$

obtendo-se:

$$C = (\alpha - 1)x_{min}^{\alpha-1} \quad (3)$$

Assim, a fdp de uma variável aleatória contínua X que segue uma distribuição LP é dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha-1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha} \quad (4)$$

A função de distribuição acumulada complementar é a função que retorna a probabilidade de uma variável aleatória X tomar valores maiores ou iguais a x . A função de distribuição devolve o valor da probabilidade de uma variável X tomar valores menores ou iguais a x . A função de distribuição complementar de X é dada por:

$$F(x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha+1} \quad (5)$$

O cálculo do limite inferior x_{min} a partir do qual uma dada distribuição deixa de ter comportamento de uma LP pode constituir um desafio. É frequente existirem dados cujo comportamento não se adequa a uma LP na “cauda” da distribuição. A forma mais simples e usual de determinar x_{min} é através da visualização num gráfico, em dupla escala logarítmica, do ponto onde os dados deixam de estar alinhados numa recta e começam a ter um comportamento exponencial. A esse conjunto de dados não se aplica uma LP.

2.2. MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA LP

Nesta seção abordamos a estimação dos parâmetros média e variância de uma distribuição LP. As respetivas estimativas podem ser obtidas com base no método dos momentos, usando o procedimento seguinte [49]:

1. Igualam-se os momentos da população aos momentos amostrais;
2. Resolvem-se as equações em função dos parâmetros desconhecidos.

Os primeiros momentos da população e da amostra são dados pelas fórmulas abaixo, respetivamente.

$$\text{Primeiro momento (média) da população: } E(x) = \mu \quad (6)$$

$$\text{Primeiro momento (média) da amostra: } M_1 = \bar{X} \quad (7)$$

Aplicando o 1º passo do procedimento obtém-se $\hat{\mu} = \bar{X}$, ou seja, observa-se que a média amostral é o estimador da média da população. O primeiro momento da amostra de uma distribuição LP retira-se de [36]:

$$\bar{x} = \int_{x_{min}}^{\infty} x f(x) dx = \frac{c}{2-\alpha} [x^{-\alpha+2}]_{x_{min}}^{\infty} \quad (8)$$

Para valores de **α inferiores ou iguais a 2**, a função acima diverge, isto é, não tem média finita. Esta conclusão é puramente teórica, pois seria preciso, na prática, um número infinito de amostras para mostrar que a média é infinita. Para α superior a 2, o primeiro momento, que corresponde à média amostral, é dado pela igualdade:

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} x_{min} \quad (9)$$

O segundo momento, representando a média quadrática da distribuição LP, vem:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{c}{3-\alpha} [x^{-\alpha+3}]_{x_{min}}^{\infty} \quad (10)$$

A função diverge para valores de α inferiores ou iguais a 3, isto é, não tem média quadrática, e, por consequência, não tem variância nem desvio-padrão finitos. Para α superior a 3, o segundo momento é o seguinte:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\alpha-1}{\alpha-3} x_{min}^2 \quad (11)$$

A fórmula geral para o cálculo dos momentos de ordem m é:

$$\langle x^m \rangle = \frac{\alpha-1}{\alpha-1-m} x_{min}^m \quad (12)$$

A expressão (12) só é válida para valores de m inferiores a $\alpha - 1$, uma vez que se forem iguais ou superiores a média irá divergir.

2.3. ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS C E α DA LP

A estimação dos parâmetros c e α de uma LP reveste-se de uma extraordinária importância. Uma boa aproximação da distribuição dos dados por uma LP permite inferir comportamentos futuros, independentemente da natureza dos dados. Nesta secção, usa-se o método dos mínimos quadrados para estimar esses parâmetros.

O método dos mínimos quadrados permite estimar os valores dos parâmetros a e b de uma reta do tipo $Y = a + bX$, que aproxima os dados de uma população. A reta é calculada minimizando a soma do quadrado dos resíduos [18], isto é, minimizando S , dado por:

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - a - bX_i)^2 \quad (13)$$

Os resíduos consistem nas diferenças entre os valores estimados pela reta de regressão e os valores reais.

Derivando a expressão (13) e igualando a zero é possível encontrar os estimadores \hat{a} e \hat{b} dos parâmetros a e b da reta, obtendo-se [53]:

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (14)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{b} \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (15)$$

Para calcular os parâmetros de uma distribuição LP pelo método dos mínimos quadrados, segue-se o seguinte procedimento. A função de distribuição complementar (5) pode ser linearizada, aplicando a função logaritmo a ambos os lados da igualdade. Obtém-se:

$$\ln F(x) = (\alpha - 1) \ln x_{min} + (1 - \alpha) \ln x \quad (16)$$

com:

$$Y = \ln F(x); a = (\alpha - 1) \ln x_{min}; b = 1 - \alpha; X = \ln x \quad (17)$$

Basta considerar agora as fórmulas (16) e (17) e a partir daí aplicar as fórmulas abaixo para retirar os estimadores \hat{a} e \hat{C} .

$$\hat{a} = 1 - \hat{b}; \quad \hat{C} = (\hat{a} - 1)e^{\hat{a}} \quad (18)$$

2.4. APLICAÇÃO À ECONOMIA

O estudo da verificação da lei de Pareto na descrição dos rendimentos ou na distribuição da riqueza começou com Pareto, no séc. XIX. A partir desse momento, muitos investigadores debruçaram-se sobre a aplicação das LPs à economia, em particular.

Mantegna e Stanley [33] estudaram aproximadamente 1.5 milhões de registos, entre 1984 e 1989, da Standard&Poor's 500 cash index. Estes autores mediram as diferenças de preços e os retornos. Os resultados mostraram que a parte central da distribuição era modelada por um processo estável de Lévy, enquanto as caudas eram bem aproximadas por uma distribuição exponencial. O valor do expoente de Lévy estava perto de 1.4. O gráfico em

dupla escala logarítmica da probabilidade de retorno do índice das variações em função do tempo era uma linha reta, com declive -1.4.

Lévy e Soloman [29] analisaram a riqueza das 400 pessoas mais ricas dos EUA em 1996 (Forbes), em função da sua classificação. Com isto obtiveram um ajuste da LP com expoente 1.36. Os autores concluíram que este valor estava de acordo com a relação entre a distribuição da riqueza e as flutuações do mercado de ações.

Em 2003, Reed [43] desenvolveu um modelo estocástico para a distribuição de riqueza, que previu um comportamento de LP em ambas as caudas. O autor derivou uma distribuição de quatro parâmetros, a dupla distribuição Pareto-Lognormal. Esta distribuição forneceu um ajuste muito bom dos dados retirados sobre ganhos e rendimentos, de diferentes países, rendimentos e épocas (EUA , 1997; Canadá,1996; Sri Lanka , 1981; Bohemia , 1933). A dupla distribuição de Pareto - Lognormal foi obtida sob a suposição de uma força de trabalho ou população crescente a uma taxa constante.

Chatterjee *et al* [10] introduziu um modelo de gás ideal para trocas nos mercados. Cada molécula de gás foi considerada um agente económico, sendo as colisões entre 2 moléculas identificadas como uma troca. Foi introduzida no modelo a propensão para poupança e alguma aleatoriedade. Os resultados mostraram que a distribuição de Gibbs se ajustava bem à troca de bens sem poupança e a LP se ajustava à troca com poupança.

Em 2004, Fujiwara *et al* [20] estudaram conjuntos de dados de empresas europeias, a fim de explicar a distribuição do tamanho de empresa e o respetivo crescimento. Estes consideraram as empresas maiores, onde o comportamento de Pareto foi observado na cauda superior e verificaram a validade da lei de Gibrat nesse regime. Na maior parte da distribuição, sobre as empresas de tamanho inferior, o comportamento Lognormal foi predominante. Os resultados mostraram que a lei de Pareto era um bom ajuste para empresas de tamanhos superiores a determinado limite. A lei de Gibrat era válida, apoiando o facto da taxa de crescimento de cada empresa ser independente do tamanho inicial. Os autores também analisaram dados de 16.526 empresas japonesas falidas no ano de 1997. O seu objetivo era lançar alguma luz no fenómeno da morte de um grande número das empresas. Eles argumentaram que os resultados poderiam ajudar a

compreender o crescimento das empresas. Os resultados obtidos mostraram que a distribuição de LP, em particular, a distribuição de Zipf, era um bom ajuste.

Aoyama *et al* [4] desenvolveram um modelo, usando a lei de equilíbrio detalhada, para encontrar as relações entre a lei de Pareto e a lei de Gibrat . A lei de Gibrat pôde ser observada na distribuição dos rendimentos pessoais ou de empresas, no tamanho das empresas, no número de trabalhadores das mesmas, entre outros factores.

Andersson *et al* [2] propuseram um novo modelo para a distribuição geográfica dos valores das terras, que combinava os custos de transporte e o crescimento multiplicativo. Os autores compararam os resultados do modelo com dados de mapas geográficos, com valores das terras da Suécia, no ano 2000. Observaram que os valores dos transportes não afetavam as distribuições LPs associadas aos valores das terras por unidade de área. No entanto, podiam forçar novas LPs em níveis mais elevados de agregação.

Das e Yarlagadda [14] estudaram os processos que conduzem à distribuição da riqueza na sociedade. Eles consideraram pequenos e grandes comércios. O primeiro caso consistia na negociação entre duas pessoas (pobres), enquanto o segundo envolvia uma negociação entre uma pessoa e o sistema bruto (entidades ricas). Foi observado um comportamento de LP para a distribuição da interação de entidades ricas, enquanto a distribuição de Boltzmann - Gibbs foi associada ao comércio pequeno.

Em 2005, Ishikawa [25] aplicou a lei de Pareto a dados de lucros de empresas japonesas, durante dois anos, 2002 e 2003. O autor dividiu as empresas em duas categorias, umas de pequena escala e outras de grande escala. O expoente de Pareto foi maior na categoria de pequena escala, revelando que estas podiam crescer mais do que as empresas de maior escala. O coeficiente de Pareto variou perto de 1.

Em 2006, Chebotarev [11] propôs um modelo hierárquico para a distribuição de rendimentos dos agentes. A interação entre os agentes era assimétrica e o preço era invariante. O comércio assimétrico foi definido como a negociação onde as comodidades passaram dos mais velhos para os mais jovens, no caso do dinheiro acontecia o inverso. A propriedade da invariância do preço significava que a proporção de rendimentos

influenciava a interação entre pares, que era independente do preço ou da renda absoluta. Este tipo de distribuição de rendimentos seguiu uma dupla lei de Pareto, com caudas superiores e inferiores de Pareto. Chebotarev calculou os expoentes de Pareto para o ganho superior, tendo obtido 1 para comércio bruto e 2 para comércio online, para procura linear. Para uma variação lenta e ilimitada da procura, o coeficiente de Pareto era 1, para ambos os tipos de comércio. A distribuição do baixo rendimento tinha um expoente de Pareto igual a 3.

Em 2008, Mizuno *et al* [34] estudaram os gastos das pessoas em lojas de conveniência. Analisaram 100 milhões de recibos, entre janeiro e março de 2007, de clientes de uma cadeia de lojas de conveniência japonesa. Os resultados mostraram que a função de densidade das despesas tinha uma cauda longa, própria de uma distribuição LP, com um coeficiente de Pareto igual a 2.

Figueira *et al* [19] desenvolveram um modelo de distribuição de rendimentos que combinava a curva de Gompertz e a lei de Pareto. A LP modelou os rendimentos da parte mais rica da população, sendo a curva de Gompertz mais adequada para a parte mais pobre da população. Usaram dados do Brasil de 1981 a 2007.

2.5. OUTRAS APLICAÇÕES

As cidades são sistemas complexos, que diferem em muitos aspectos, tais como o tamanho, a forma e a dimensão. Estas questões têm sido tema de grande pesquisa numa variedade de áreas científicas, desde a geografia até à economia [5].

Em 1980, Rosen e Resnick [28] desenvolveram uma investigação sobre o tamanho das cidades em 44 países e descobriram que o expoente de Pareto estava no intervalo [0.81,1.96], com média amostral 1.14. Esses valores indicavam que a população era mais uniformemente distribuída do que era esperado pela lei de Zipf (expoente igual a 1), uma vez que quanto maior o valor do expoente mais parecidos são os tamanhos das diferentes cidades. No limite, se o expoente tendesse para infinito todas as cidades teriam tamanhos idênticos. Os autores também tentaram explicar as variações no expoente de Pareto e

mostraram que este é sensível à definição da cidade e do tamanho da amostra. O coeficiente de Pareto foi menor quando se considerou a população das áreas metropolitanas em vez do aglomerado da cidade, sugerindo que os resultados dependem da definição de cidade. Quanto ao tamanho da amostra, os autores compararam os valores do coeficiente de Pareto para 6 países usando dois métodos. O primeiro foi considerar apenas as 50 maiores cidades e o outro foi considerar as cidades com mais de 100,000 habitantes. Aqui, mais uma vez, foram observadas mudanças no expoente de Pareto. Estes resultados foram explicados pelos termos não lineares incluídos na versão logarítmica da distribuição de Pareto. Davis e Weinstein [15] tentaram resolver o problema da desigualdade na atividade económica entre as regiões. Para isso, estudaram dados de 39 regiões japonesas, desde a Idade da Pedra até à era moderna (até 1998), cerca de 8000 anos. Exploraram também 303 cidades japonesas (com mais de 30.000 habitantes em 1925), com o objetivo de estudar as implicações do bombardeamento de cidades japonesas durante a Segunda Guerra Mundial, nos tamanhos relativos da cidade. Descobriram que a variação da população regional japonesa, bem como a distribuição dos tamanhos das cidades, obedeciam a uma distribuição de Pareto, em todas as épocas. Todavia, estes autores sugeriram uma teoria híbrida na qual padrões espaciais de densidades regionais fossem explicados por fundamentos locais, enquanto o grau de diferenciação espacial fosse devido ao aumento do retorno. A distribuição específica desses recursos era suportada pela distribuição de Pareto [21].

As distribuições dos fogos nas cidades e nas florestas também mereceu a atenção dos investigadores que trabalhavam com LPs. Mediu-se o tamanho de um incêndio, quer em cidade quer em floresta, através da área ardida. A distribuição da frequência-tamanho do mesmo obedecia a uma LP. Na literatura foram apresentados variados modelos para explicar este comportamento. Ricotta *et al* [46] estudaram 9.164 registos de incêndios de uma região do norte da Itália (Liguria), de 1986 a 1993. Estes descobriram que a relação entre a frequência de ocorrência e o tamanho da área queimada desses incêndios seguia uma LP, com coeficiente 0.723. Song *et al* [50], melhoraram o modelo de Drossel e Schwbal [17], incluindo os efeitos da chuva e os esforços humanos nos combates aos fogos. Os autores simularam o novo modelo e compararam os seus resultados com os registos de incêndios florestais chineses, entre 1950 e 1989. Chegaram à conclusão que havia uma boa concordância entre as informações reais e os resultados das simulações. Em

2006, Weiguo *et al* [51] exploraram três comportamentos de LP distintos observados em distribuições de fogos florestais, nomeadamente estudaram a relação frequência-tamanho, frequência-intervalo, e frequência-densidade de população. Usaram dados de 518 fogos, de 1950 a 1989, na China, 4284 incêndios, de 1986 a 1995, nos EUA, e 30.498 incêndios, de 1989 a 2000 e 5493 incêndios, nos anos de 1999 e 2000, no Japão. Todas as relações estudadas seguiam um comportamento de LP.

As vendas online constituem atualmente uma alternativa válida aos métodos tradicionais de venda. O número total de vendas de produtos como livros, discos de música, filmes, que são menos populares, é comparável ao número de vendas dos produtos mais vendidos. Isto deve-se ao comportamento de cauda longa (caraterístico de uma LP) [36]. Chevalier e Goolsbee [12], utilizaram dados públicos disponíveis sobre as vendas de 18000 livros, distribuídos por duas empresas de vendas, Amazon e Barnes & Noble. O número de vendas obedecia a uma distribuição de Pareto, com um valor de coeficiente de Pareto aproximado de 1.2, para as empresas de vendas. Newman [36], em 2005, usou informações dos 663 livros mais vendidos nos Estados Unidos, de 1895 até 1965, para mostrar que o gráfico índice-frequência do número de cópias vendidas seguia um comportamento de LP. Ele estimou a proporção de vendas de cauda através de técnicas de regressão. Newman também mostrou distribuições cumulativas de 12 quantidades diferentes, de sistemas físicos, biológicos, tecnológicos e sociais, como a frequência do uso das palavras, chamadas telefónicas, magnitude dos terremotos, citação de artigos científicos, entre outros.

Os comportamentos observados em guerras e em ataques terroristas têm sido estudados por diversos investigadores [22][45][44][7]. Na literatura há muitas tentativas de explicar esses padrões. No entanto, as influências políticas, ideológicas, históricas e geográficas tornam a compreensão destes padrões um objetivo complexo a alcançar. A natureza da guerra tem mudado nas últimas décadas, conflitos de grande escala, como a primeira e a segunda guerras mundiais, estão a regredir e um novo tipo de guerra está a tornar-se predominante. Neste último destacam-se a guerra tipo guerrilha e atividades de grupos terroristas. Estes eventos parecem ser ataques aleatórios e oportunos a alvos vulneráveis, e tentar prever futuros eventos é improvável. No entanto, considerando o número de vítimas e a frequência destes desastres naturais e humanos, parece existir um comportamento em

comum. Pode-se constatar que grandes baixas estão associadas a fenômenos de baixa frequência, ou seja, a grandes guerras que produzem números elevados de vítimas, e que são menos frequentes do que outras guerras não tão prejudiciais em termos de vida humana [45][44]. Clauset *et al* [13] centraram-se na frequência e gravidade dos ataques terroristas, desde 1968. Descobriram que o gráfico em dupla escala logarítmica da frequência em função da gravidade dos ataques seguia uma distribuição de LP. A severidade foi medida como o número de mortes e feridos. Fatores como o desenvolvimento económico, o tipo de arma usada no ataque, entre outros, não afectaram os resultados. Bohorquez *et al* [6] estudaram a relação quantitativa entre a insurgência humana, o terrorismo global e a ecologia. Consideraram um modelo unificado de insurgência humana para explicar os padrões universais que ocorriam durante as guerras. Os autores calcularam o coeficiente de Pareto para um valor perto de 2.5, concordando com o trabalho anterior nas guerras do Iraque e Colômbia. Como consequência destas descobertas, os investigadores afirmaram que as guerras insurgentes foram qualitativamente distintas das guerras tradicionais. Os investigadores também sugeriram que o seu modelo indicava uma ligação marcante entre as acções humanas violentas e não violentas, devido à sua semelhança com os modelos do mercado financeiro.

Comportamentos de LP são também observados em terremotos. Quando se pensa na frequência de ocorrência de terremotos, existe um grande número de terremotos com poucas vítimas, e um pequeno número de terremotos que causaram um número de causalidades extremamente elevado [22][8].

3. APLICAÇÃO DAS LEIS DE POTÊNCIA A DADOS ECONÓMICOS

Neste capítulo aplicam-se as LPs a dados reais de fenómenos relacionados com economia. Estuda-se a distribuição cumulativa das variáveis associadas a cada fenómeno.

A aplicação de uma LP a um determinado conjunto de dados é feita usando o procedimento seguinte. Recolhem-se os dados, de seguida ordenam-se por ordem decrescente de frequência e classificam-se de 1 até n , sendo 1 aquele que tem maior frequência. Para fazer o gráfico em dupla escala logarítmica da frequência (eixo dos xx) vs a classificação (eixo dos yy), normalizam-se os dados. A normalização consiste na divisão de todos os valores no eixo dos xx pelo máximo que tomam, analogamente para o eixo dos yy . Por último, aproxima-se uma reta ao conjunto de dados do gráfico, no sentido dos mínimos quadrados (a reta é calculada minimizando a soma dos quadrados dos resíduos).

3.1. OS 400 HOMENS MAIS RICOS DA AMÉRICA

Na Figura 1 pode-se observar o gráfico correspondente aos 400 homens mais ricos da América. A Figura 2 mostra o ajuste dos dados usando uma LP simples, enquanto a Figura 3 mostra o ajuste desses dados usando uma LP dupla. Ambos os gráficos em dupla escala logarítmica revelam um bom ajuste dos dados com coeficiente de correlação de $R = \sqrt{0.9772}$ no caso da LP simples e ($R = \sqrt{0.9941}$ e $R = \sqrt{0.9122}$) no caso da LP dupla, próximos de 1. Neste caso, observa-se que o melhor ajuste, tanto na LP simples como na LP dupla, é na cauda da distribuição. Os dados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/forbes-400/>).

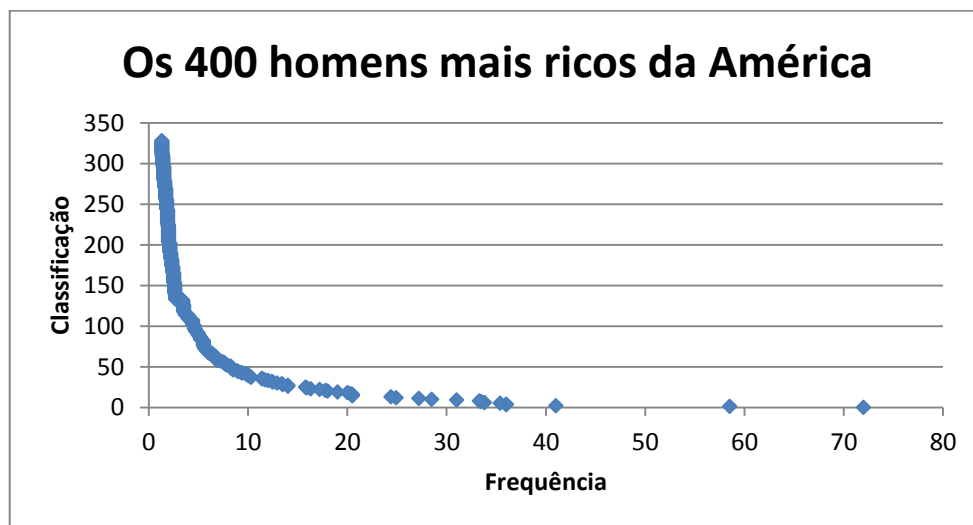


Figura 1 Gráfico classificação/frequência antes da normalização, referente aos 400 homens mais ricos da América.

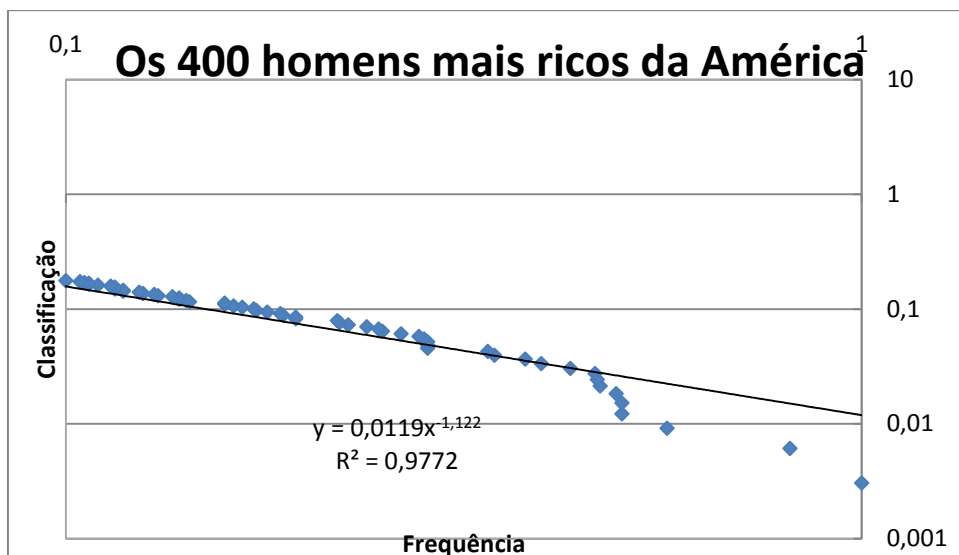


Figura 2 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos 400 homens mais ricos da América. Aproximação por uma LP simples.

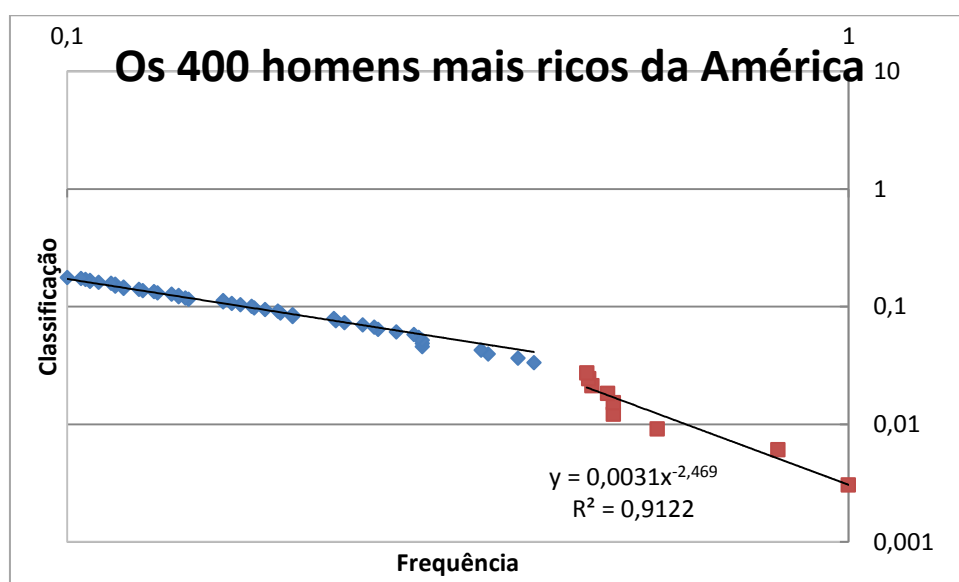


Figura 3 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos 400 homens mais ricos da América. Aproximação por uma LP dupla.

3.2. OS MAIORES BILIONÁRIOS DO MUNDO

Os dados estudados na Figura 4 dizem respeito aos maiores bilionários do mundo. É usada apenas uma LP no ajuste dos dados. Como se pode observar, os dados têm uma boa adequação à distribuição de LP, sendo o coeficiente de correlação ($R = \sqrt{0,9768}$) próximo de 1. Os dados estudados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/billionaires/>).

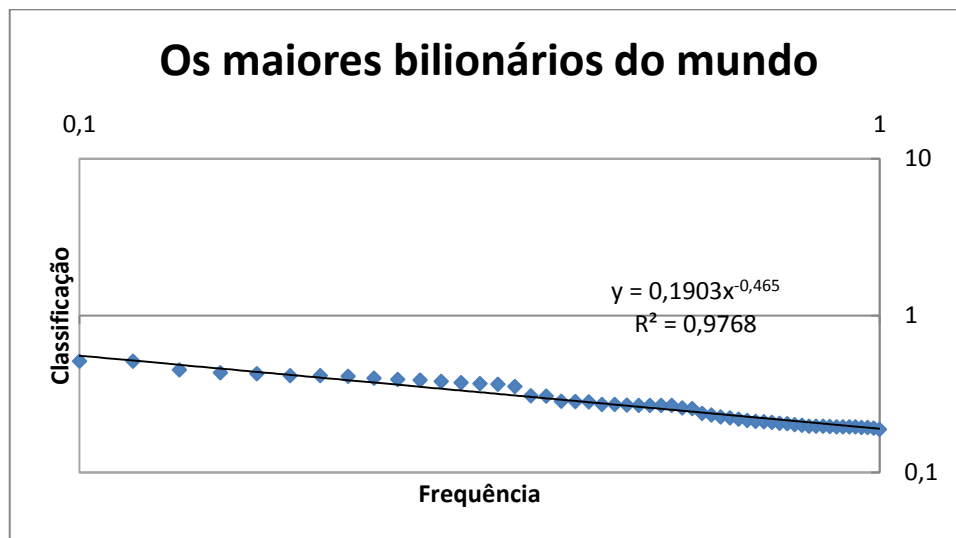


Figura 4 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos maiores bilionários do mundo. Ajustada uma LP simples.

3.3. VALOR DAS EMPRESAS NO MERCADO DE AÇÕES

Os dados estudados nas Figuras 5 e 6 dizem respeito ao valor de várias empresas no mercado de ações. Na Figura 5 é ajustada uma LP aos dados, obtendo-se um coeficiente de correlação igual a $R = \sqrt{0.7984}$. Este valor do coeficiente indica-nos um ajuste deficiente. Na Figura 6 os dados são ajustados por duas LP distintas. Como se pode observar, os dados têm uma boa adequação à distribuição de LP dupla, sendo os coeficientes de correlação ($R = \sqrt{0.9561}$ e $R = \sqrt{0.9378}$) próximos de 1. Os dados estudados foram retirados do “The Economic Times” (http://economictimes.indiatimes.com/indices/nifty_50_companies.cms?sortby=currentprice&sortorder=desc).

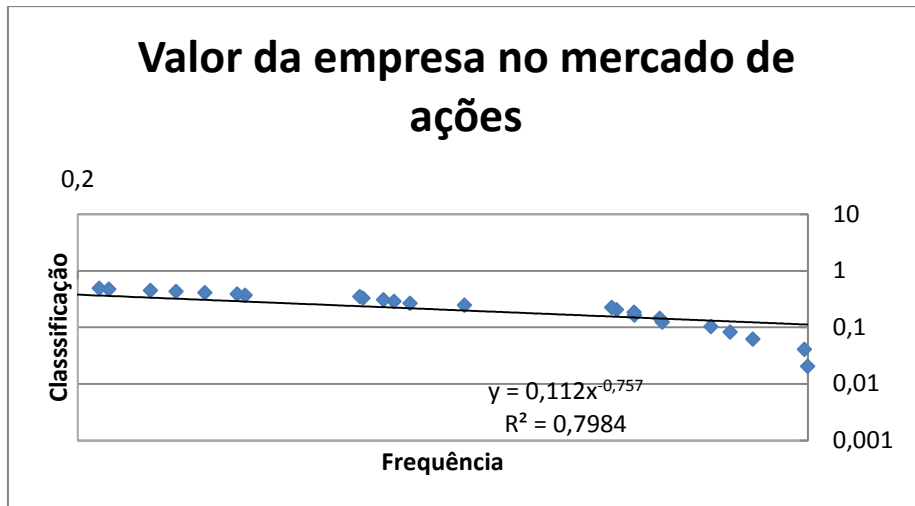


Figura 5 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente ao valor das empresas no mercado de ações. Foi ajustada uma LP.

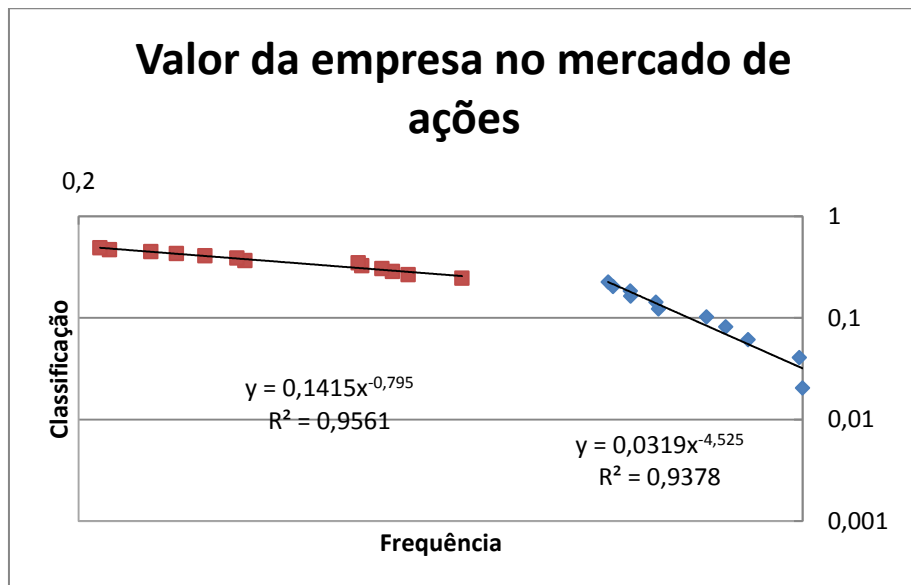


Figura 6 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente ao valor das empresas no mercado de ações. Foi aproximada uma LP dupla.

3.4. AS 20 MULHERES MAIS RICAS NA AMÉRICA

Os dados considerados na Figura 7 dizem respeito às mulheres mais ricas na América. É usada apenas uma LP no seu ajuste. Como se pode observar, os dados têm uma boa adequação à distribuição de LP, sendo o coeficiente de correlação ($R = \sqrt{0,9503}$) próximo de 1. Os dados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/pictures/lmj45kjjl/no-1-christy-walton/>).

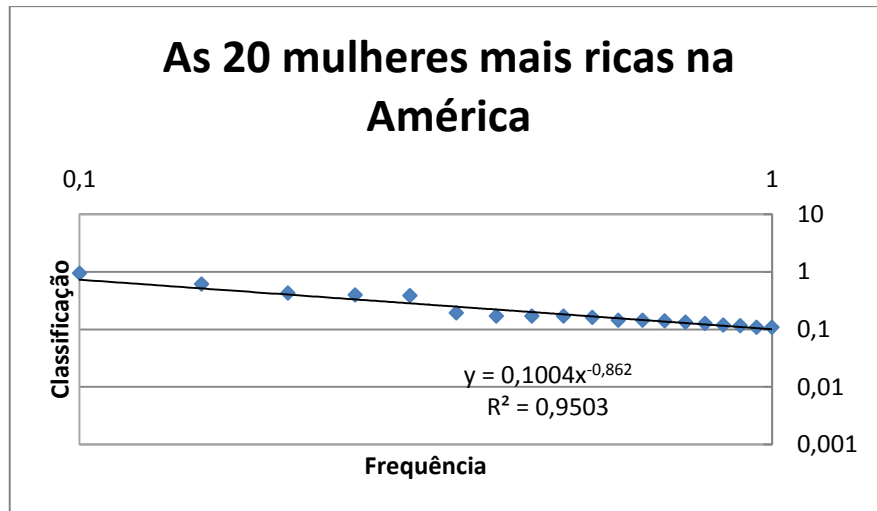


Figura 7 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às 20 mulheres mais ricas da América. Foi ajustada uma LP simples.

3.5. AS MULHERES MAIS RICAS DO MUNDO

Os dados usados na Figura 8 dizem respeito às mulheres mais ricas do mundo. É usada uma LP no ajuste dos dados. Como se pode observar, os dados têm uma boa adequação à distribuição de LP, sendo o coeficiente de correlação ($R = \sqrt{0,9453}$) próximo de 1. Os dados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/pictures/fkem45edj/gina-rinehart/>).

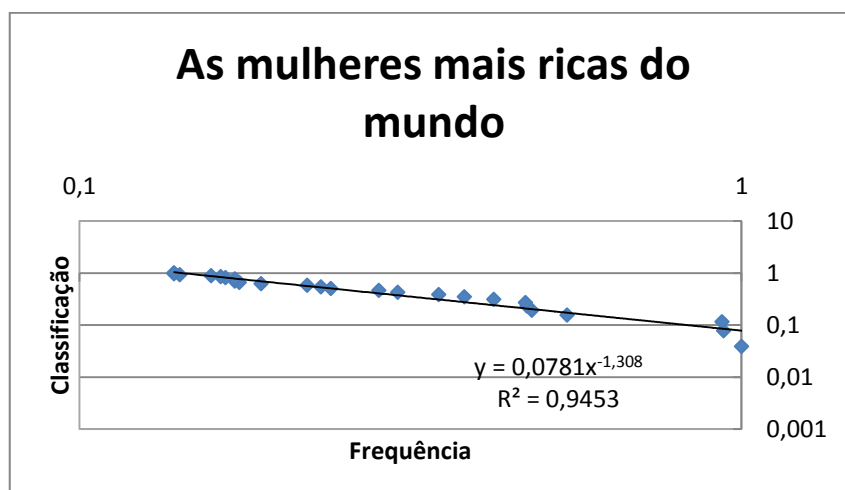


Figura 8 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às mulheres mais ricas do mundo. Foi ajustada uma LP simples.

3.6. AS EMPRESAS MAIS RICAS DO MUNDO

Os dados estudados nas Figuras 9 e 10 dizem respeito às empresas mais ricas do mundo. Na Figura 9, os dados foram aproximados usando uma LP, com um coeficiente de correlação $R = \sqrt{0.9628}$. Na Figura 10, é usada uma LP dupla no ajuste dos dados e obtém-se uma melhor aproximação, sendo os coeficientes de correlação ($R = \sqrt{0.9921}$ e $R = \sqrt{0.9797}$) ainda mais próximos de 1, do que no ajuste de apenas uma LP. Os dados estudados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/global2000/list/>).

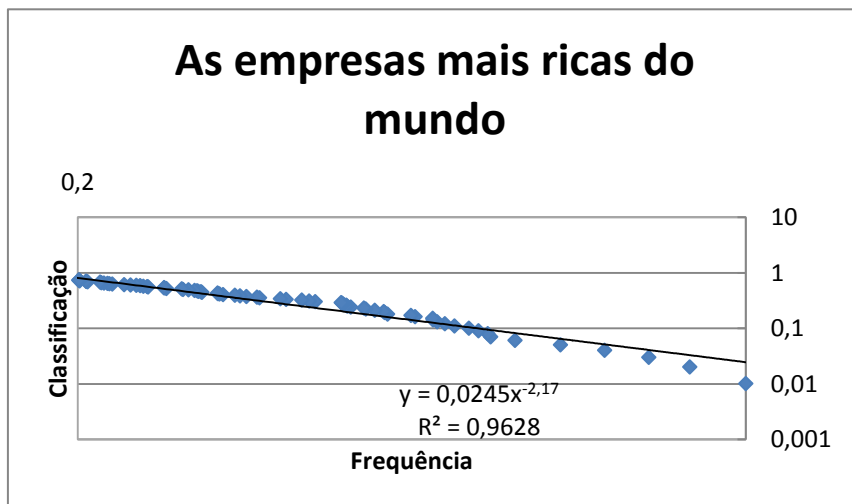


Figura 9 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às empresas mais ricas do mundo. Foi ajustada uma LP simples.

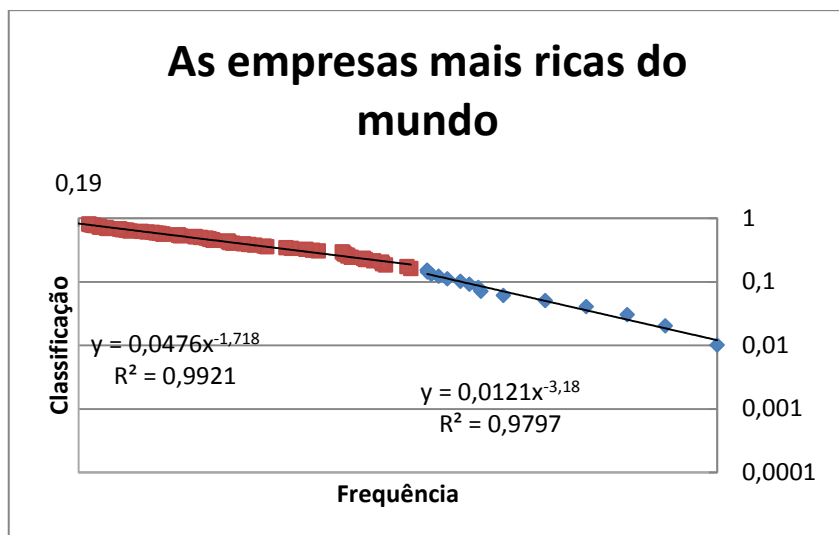


Figura 10 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às empresas mais ricas do mundo. Os dados foram ajustados por uma LP dupla.

3.7. AS FAMÍLIAS MAIS RICAS DO MUNDO

Os dados considerados na Figura 11 dizem respeito às famílias mais ricas do mundo. É usada uma LP no ajuste dos dados. O ajuste é bom, sendo o coeficiente de correlação ($R = \sqrt{0.9356}$) próximo de 1. Os dados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/sites/kerryadolan/2011/09/21/richest-families-on-the-forbes-400/>).

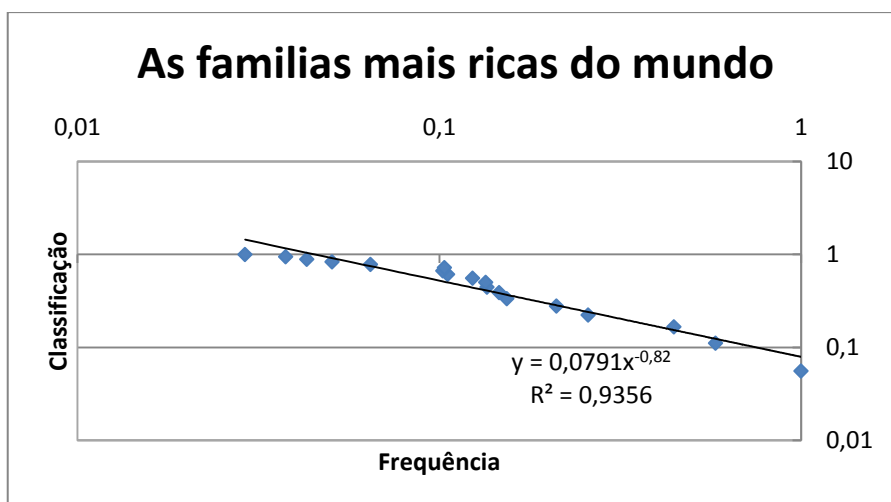


Figura 11 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente às famílias mais ricas do mundo. Foi aproximada uma LP simples.

3.8. OS PAÍSES MAIS RICOS DO MUNDO

Os dados estudados na Figura 12 dizem respeito aos países mais ricos do mundo. É usada uma LP no ajuste dos dados. Como se pode observar, os dados têm uma boa adequação à distribuição de LP, sendo o coeficiente de correlação ($R = \sqrt{0.9454}$) próximo de 1. Os dados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/pictures/egim45egde/15-kuwait/>).

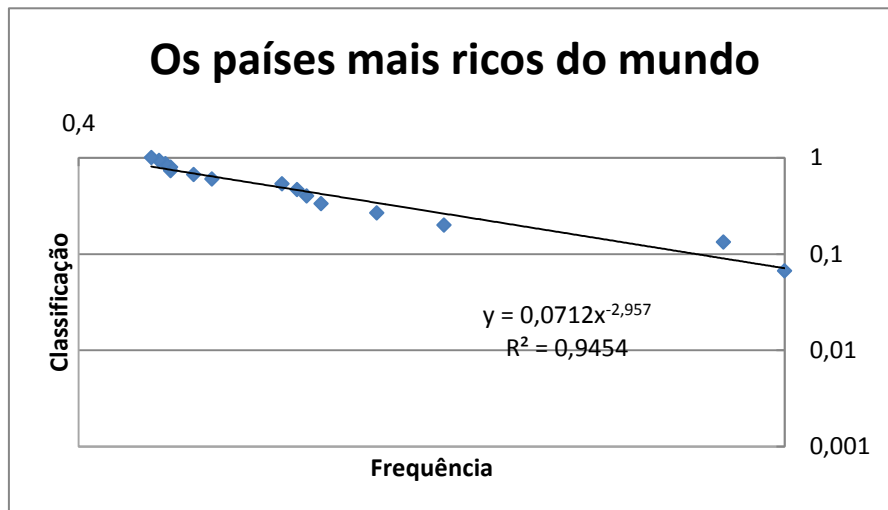


Figura 12 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos países mais ricos do mundo. Foi ajustada uma LP simples.

3.9. OS HOTÉIS/RESTAURANTES MAIS RICOS DO MUNDO

Os dados usados nas Figuras 13 e 14 dizem respeito aos estabelecimentos de hotelaria e de restauração mais ricos do mundo. Na Figura 13 os dados são aproximados por uma LP simples, com coeficiente de correlação $R = \sqrt{0.9542}$. Na Figura 14, é usada uma LP dupla no ajuste dos dados. Como se pode observar, os dados têm uma boa aproximação à distribuição de LP dupla, sendo os coeficientes de correlação ($R = \sqrt{0.9798}$ e $R = \sqrt{0.962}$) mais próximos de 1, do que no caso do ajuste de uma LP simples. Os dados estudados foram retirados do “Rediff Business” (<http://www.rediff.com/business/slide-show/slide-show-1-special-20-most-expensive-hotels-in-the-world/20130919.htm#20>).

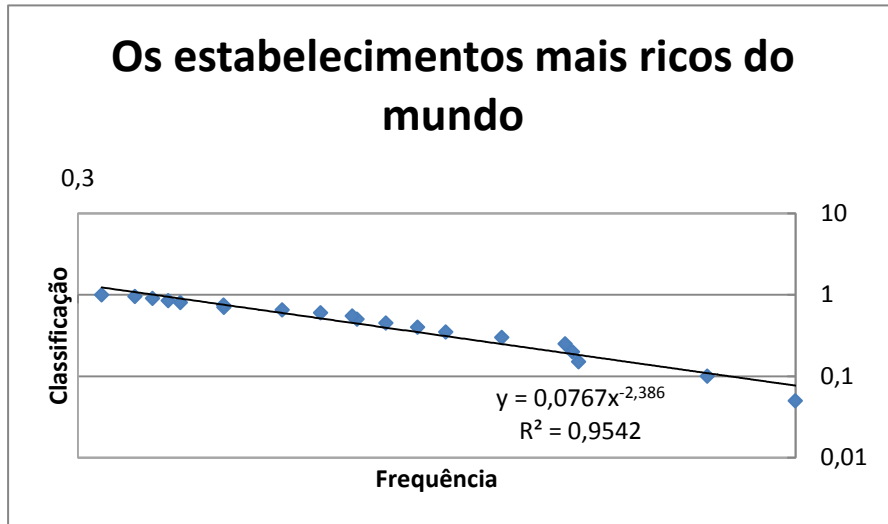


Figura 13 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos estabelecimentos mais ricos do mundo. Foi ajustada uma LP simples.

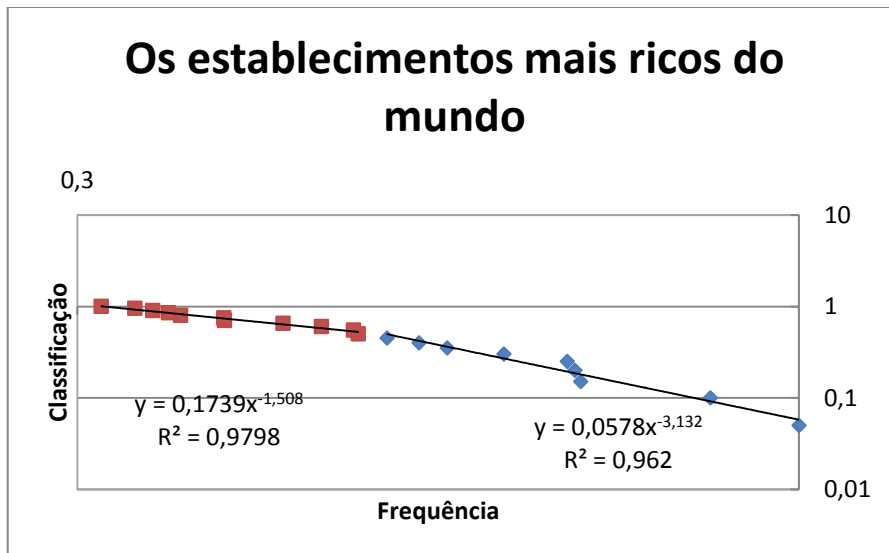


Figura 14 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referente aos estabelecimentos mais ricos do mundo. Foi ajustada uma LP dupla.

3.10. OS HOMENS MAIS RICOS NO RAMO DA TECNOLOGIA

Os dados estudados na Figura 15 dizem respeito aos homens mais ricos no ramo da tecnologia. É usada apenas uma LP no ajuste dos dados. Como se pode observar, os dados têm uma boa adequação à distribuição de LP, sendo o coeficiente de correlação ($R = \sqrt{0,9822}$) próximo de 1. Os dados foram retirados da “Forbes” (<http://www.forbes.com/pictures/emdh45ggih/no-9-mark-zuckerberg/>).

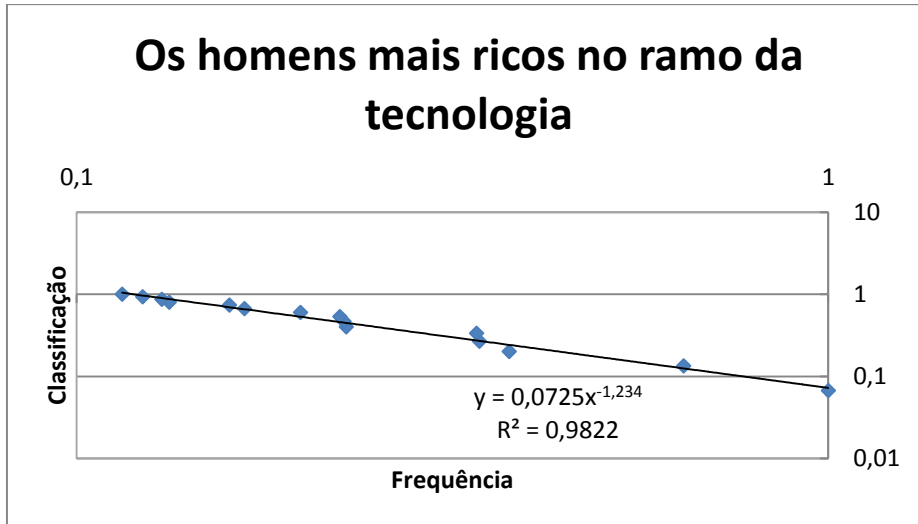


Figura 15 Gráfico classificação/frequência após a normalização, referentes aos homens mais ricos do mundo, no ramo da tecnologia. Foi ajustada uma LP simples.

3.11. PERSPETIVA GLOBAL

Na Figura 16 apresenta-se o estudo da variação dos parâmetros \hat{C} e $\hat{\alpha}$ dos exemplos estudados nas seções anteriores, onde foi bem aproximada uma LP simples.

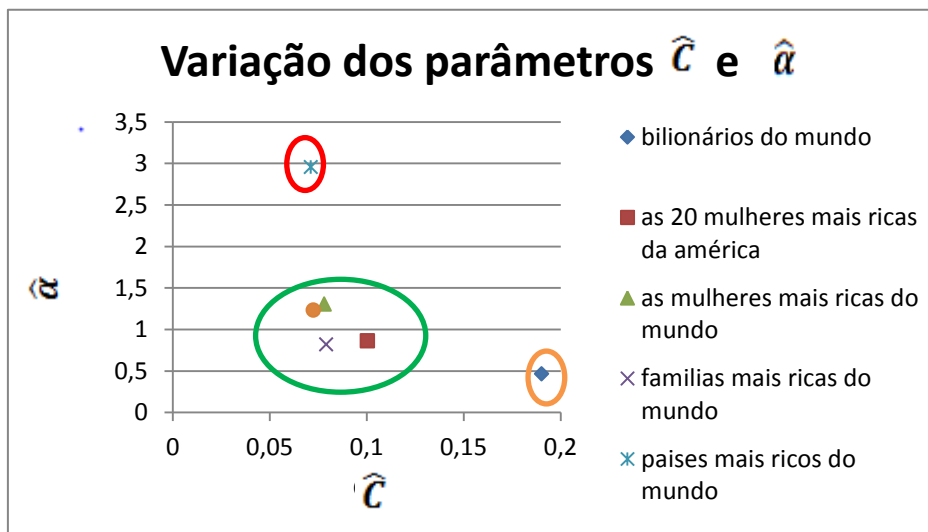


Figura 16 Variação dos parâmetros \hat{C} e $\hat{\alpha}$ das LP dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP simples.

Os valores calculados de \hat{C} estão situados no intervalo $0,0712 \leq \hat{C} \leq 0,1903$, onde os valores mínimos e máximos correspondem aos países mais ricos do mundo, no ramo da tecnologia, e aos bilionários do mundo, respetivamente. No que respeita ao parâmetro $\hat{\alpha}$, os

valores estimados encontram-se no intervalo $0.465 \leq \hat{\alpha} \leq 2.957$, sendo os valores mínimo e máximo associados aos bilionários do mundo e aos países mais ricos do mundo, respetivamente.

Na Figura 16 foram delimitadas 3 zonas distintas, uma a vermelho, outra a verde e outra a cor de laranja. Na região delimitada pela cor vermelha, considera-se o caso dos países mais ricos do mundo, com valor do parâmetro $\hat{\alpha}$ elevado e valor reduzido do parâmetro \hat{C} . Na região delimitada a cor de laranja, considera-se o caso dos bilionários do mundo, caracterizados por um valor elevado do parâmetro \hat{C} e um valor baixo do parâmetro $\hat{\alpha}$. Por fim, na zona a verde, estão os exemplos em que a relação $\frac{\hat{C}}{\hat{\alpha}}$ é menor.

Algumas aferições:

- a) o facto do valor de $\hat{\alpha}$ ser pequeno no caso dos bilionários do mundo, revela que não há grande diferenciação entre a forma de crescimento das fortunas desses indivíduos;
- b) no caso dos homens mais ricos do mundo, o parâmetro \hat{C} é muito elevado, enquanto que, no que diz respeito às mulheres mais ricas do mundo, o mesmo parâmetro é menor e mais aproximado do valor do parâmetro $\hat{\alpha}$. Isto revela uma diferenciação na forma de crescimento das fortunas das mulheres e dos homens;
- c) no caso dos países mais ricos do mundo, o facto do valor de $\hat{\alpha}$ ser muito elevado, é sinónimo da desigualdade entre países, onde os ricos são cada vez mais ricos, mesmo entre os mais ricos;
- d) os casos que se encontram na zona verde apresentam valores dos parâmetros \hat{C} e $\hat{\alpha}$ mais próximos. Neste caso, pode-se afirmar que a forma de crescimento das fortunas das mulheres mais ricas do mundo, dos homens mais ricos no ramo da tecnologia, das famílias mais ricas e das 20 mulheres mais ricas da América, é semelhante.

Seria interessante conseguir explicar analiticamente as variações no crescimento da fortuna entre as várias regiões do gráfico.

Na Figura 17 estão representados os valores dos parâmetros das LPs no caso em que foi ajustada uma LP dupla aos dados.

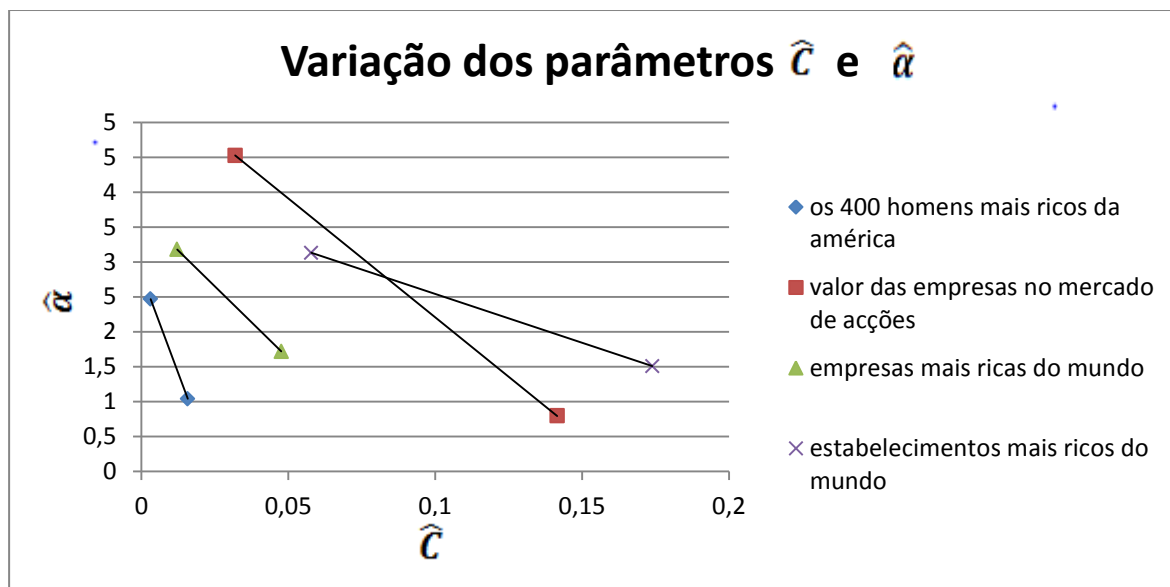


Figura 17 Variação dos parâmetros \hat{C} e $\hat{\alpha}$ das LPs dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP dupla.

Observa-se um padrão na variação de \hat{C} e $\hat{\alpha}$, no sentido em que as linhas que ligam os pares de pontos, que caracterizam as duas diferentes distribuições, para cada caso, possuem declives negativos com valores semelhantes. Este padrão geométrico reflete uma relação entre as distribuições LP duplas (dupla LP1 – parte junto ao início da curva; dupla LP2 – parte da cauda da distribuição no gráfico). Em todos os casos estudados nesta representação o $\hat{\alpha}_2$ ou seja, o $\hat{\alpha}$ estimado para a segunda LP aplicada a este caso, é sempre superior ao primeiro. Há um declive maior, em módulo, associado aos dados da cauda da distribuição. Em relação ao parâmetro \hat{C} , podemos observar um comportamento oposto no sentido em que o \hat{C}_2 , que corresponde ao \hat{C} estimado para a segunda LP é sempre mais pequeno do que o parâmetro correspondente na primeira LP.

Nas Figuras 18 e 19 pode-se analisar o comportamento dos parâmetros \hat{C}_i e $\hat{\alpha}_i$ referentes aos casos estudados, onde se aplicou uma LP dupla.

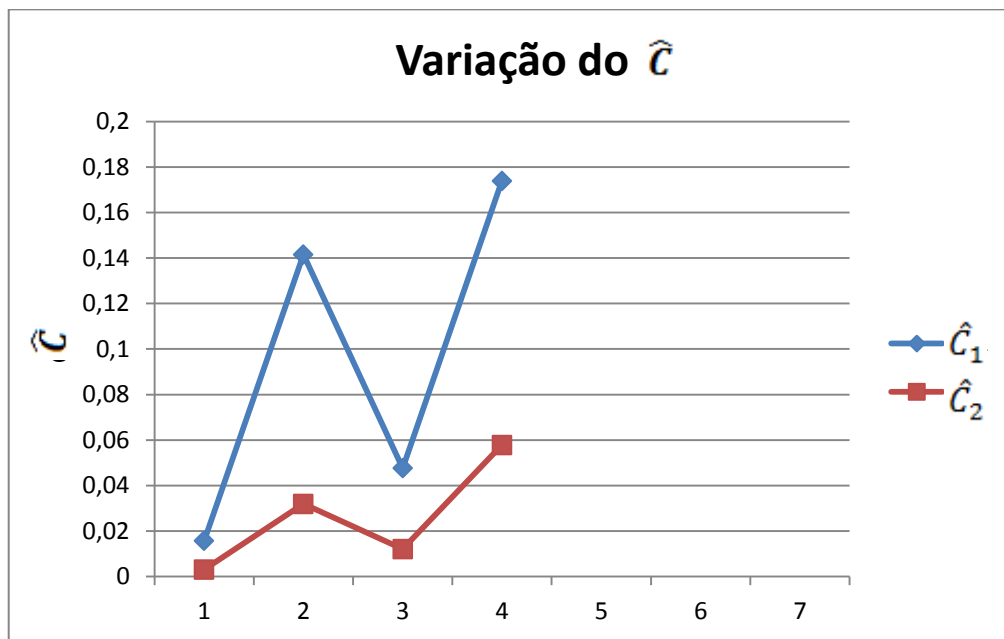


Figura 18 Variação dos parâmetros \hat{C}_i das LP dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP dupla.

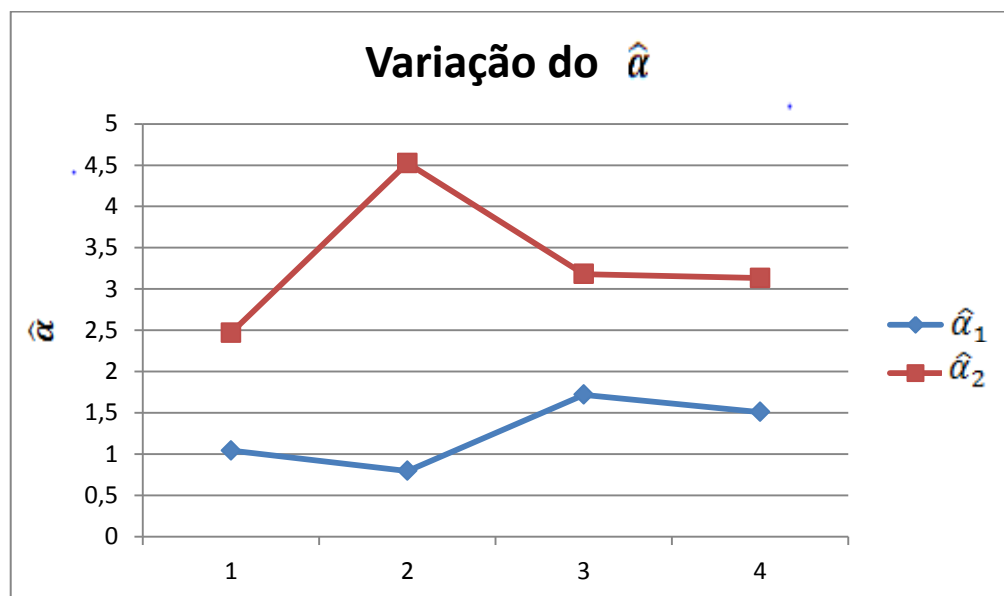


Figura 19 Variação dos parâmetros $\hat{\alpha}_i$ das LP dos exemplos estudados onde se aplicou uma LP dupla.

Observa-se que há uma variação semelhante nos valores dos parâmetros $\hat{C}_i, i = 1,2$. Todavia, a variação é mais acentuada no \hat{C}_1 . Relativamente aos valores dos parâmetros $\hat{\alpha}_i$, a sua variação é distinta, aumentando um quando o outro diminui. Acrescenta-se que a

variação é mais acentuada no valor de $\hat{\alpha}_1$ analogamente ao que acontece com o parâmetro \hat{C}_1 . Conclui-se que os acontecimentos pequenos (menos riqueza), no início da curva (modelada pela LP1), são menos similares entre si do que os acontecimentos grandes, modelados pela LP2. Este comportamento será de analisar mais profundamente num trabalho futuro.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho estudam-se distribuições estatísticas de LP e a sua aplicação a dados económicos. Os dados estudados revelam uma boa adequação dos mesmos às distribuições LPs. Isto é, o gráfico da frequência vs classificação, em dupla escala logarítmica, é bem aproximado por uma reta com declive negativo. Alguns dados são bem aproximados por uma LP simples e outros por uma LP dupla. Isto depende da natureza dos mesmos. São estudados vários dados económicos, referentes a empresas, estabelecimentos de hotelaria e restauração mais ricos do mundo, aos homens e mulheres mais ricas da América e do mundo, entre outros. Faz-se ainda um estudo comparativo da variação dos valores dos parâmetros das LPs simples e das LPs duplas. Observa-se diferenciação na forma de crescimento das fortunas nos diferentes casos estudados.

Como trabalho futuro, procurar-se-á analisar estes e outros dados, utilizando outras distribuições estatísticas, como a Exponencial ou a Lognormal, que possuem comportamentos semelhantes à LP, com o intuito de serem comparados os resultados das diferentes distribuições para as vantagens da aproximação de dados económicos por uma LP simples vs por uma LP dupla.

Referências Documentais

- [1] Adamic L.A., Huberman B.A., “The nature of markets in the World Wide Web,” *Q J Electron Comm*, vol. 1, pp. 512, 2000.
- [2] Andersson C., Hellervik A., Lindgren K., “A spatial network explanation for a hierarchy of urban power laws”, *Physica A*, vol. 345, pp. 227–44, 2005.
- [3] Auerbach F. “Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration,” *PetermannGeogr Mitt*, vol. 59, pp. 74-6, 1913.
- [4] Ayoama H., Fujiwara Y., Souma W., “Kinematics and dynamics of Pareto–Zipf’s law and Gibrat’s law.” *Physica A*, vol. 344, pp.117–21, 2004.
- [5] Batty M., “Cities and complexity: understanding cities through cellular automata, agent-based models, and fractals.” Cambridge, MA: MIT Press; 2005.
- [6] Bohorquez J.C., Gourley S., Dixon A.R., Spagat M., Johnson N.F., “Common ecology quantifies human insurgency.” *Nature*, vol.462(7275), pp.911–4, 2009.
- [7] Carson M., Langer J.S., “Mechanical model of an earthquake fault,” *Phys Rev A*, vol. 40, pp. 6470-84, 1989.
- [8] Cederman, L.E., “Modeling the size of wars: from billiard balls to sandpiles.” *Am PolitSci Rev*, vol. 97, pp.135–50, 2003.
- [9] Champernowne D.G., “A model of income distribution.” *Econ J*, vol. 63, pp.318–51, 1953.
- [10] Chatterjee A., Chakrabarti B.K., Manna S.S., “Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity.” *Physica A*, vol. 335, pp.155–63, 2004.
- [11] Chebotarev A.M., “On stable Pareto laws in a hierarchical model of economy.” *Physica A*, vol. 373, pp.541–59, 2007.
- [12] Chevalier J., Goolsbee A., “Measuring prices and price competition online: Amazon.com and BarnesandNoble.com.” *Quant Mark Econ*, vol. 1, pp.203–22, 2003.

- [13] Clauset A., Young M., Gleditsch K.S., “On the frequency of severe terrorist events.” *J Conflict Resolut*, vol. 51(1), pp.58–87, 2007.
- [14] Das A., Yarlagadda S., “An analytical treatment of the Gibbs–Pareto behavior in wealth distribution.” *Physica A*, vol. 353, pp.529–38, 2005.
- [15] Davis D.R., Weinstein D.E., “Bones, bombs, and break points: the geography of economic activity.” *Am Econ Rev*, vol.92(5), pp.1269–89, 2002.
- [16] Dragulescu A.A., Yakovenko V.M., “Statistical mechanics of money, income, and wealth: a short survey.” *EurPhys J B*, vol.20, pp.585–9, 2001.
- [17] Drossel B., Schwbal F., “Self-organized critical forest-fire model.” *Phys Rev Lett*, vol. 69(11), pp.1629–32, 1992.
- [18] Ehlers R. *Inferência Estatística (Notas de Aula)*, Departamento de Matemática Aplicada e Estatística USP, 2011.
- [19] Figueira F.C., Moura N.J., Ribeiro M.B., “The Gompertz–Pareto income distribution.” *Physica A*, vol.390, pp.689–98, 2011.
- [20] Fujiwara Y., Aoyamac H., Guilmb C.D., Souma W., Gallegati M., “Gibrat and ParetoZipf revisited with European firms.” *Physica A*, vol.344, pp.112–6, 2004.
- [21] Gabaix X., “Zipf’s law for cities: an explanation.” *Q J Econ*, vol.114, pp.739–67, 1999.
- [22] Gutenberg B., Richter R.F., “Frequency of earthquakes in California.” *Bull SeismolSoc Am*, vol.34, pp.185–8, 1944.
- [23] Harral J.E., Crawley M.J., “Scale dependence in plant biodiversity” *Science*, vol. 291, pp. 864-9, 2001.
- [24] Iba T., Yoshida M., Fukami Y., Saitoh M., “Power-law distribution in Japanese book sales market, in: Fourth joint Japan–North America mathematical sociology conference”, 2008.
- [25] Ishikawa A., “Pareto law and Pareto index in the income distribution of Japanese companies.” *Physica A*, vol.349, pp.597–608, 2005.
- [26] Israeloff N.E., Kagalenko M., Chan K. “Can Zipf distinguish language from noise in noncoding DNA?” *Phys Rev Lett*, vol.76 pp.1976–9, 1995.
- [27] Jiménez Y. A. and Gallego J., “Desigualdad y leyes de potencia, Cuadernos de Economía”, vol. XXIX, no. 53, pp. 57-95, 2010.

- [28] Kenneth T.R., Resnick M., “The size distribution of cities: an examination of the Pareto law and primacy,” em *J Urban Econ*, vol.8 pp. 165-86, 1980.
- [29] Lévy M., Solomon S., “New evidence for the power-law distribution of wealth.” *Physica A*, vol.242, pp.90, 1997.
- [30] Lotka, A.J., “The frequency distribution of scientific productivity”, *J Washington AcadSci*, vol. 16, pp.317-24, 1926.
- [31] Lu E.T, Hamilton, R.J., “Avalanches of the distribution of solar flares”, *Astrophys J*, vol. 380, pp. 89-92, 1991.
- [32] Mandelbrot B., “The Pareto–Levy law and the distribution of income.” *Int Econ Rev*, vol. 1, pp.79–106, 1960.
- [33] Mantegna RN, Stanley HE. The scaling behavior of an economic index. *Nature* vol.376 pp.46–9, 1995.
- [34] Mizunoa T., Toriyama M., Terano T., Takayasu M., “Pareto law of the expenditure of a person in convenience stores.” *Physica A*, vol. 387, pp.3931–5, 2008.
- [35] Neukum G., Ivanov, B.A., “Crater size distributions and impact probabilities on Earth from lunar, terrestrial-planet, and asteroid cratering data in: Tucson AZ, Gehrels T, editors. *Hazards due to comets and asteroids*”, University of Arizona Press, pp. 359-416, 1994.
- [36] Newman M.E.J., “Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law”, *ContemPhys*, vol. 46, pp. 323-51, 2005.
- [37] Pareto V., “*Cours d'Economie Politique*,” Switzerland, 1896.
- [38] Parr J., “Note on the size distribution of cities over time”, *J Urban Econ*, vol. 18, pp. 199-212, 1985.
- [39] Pinho S.T.R., Andrade R.F.S., “An abelian model for rainfall”, *Physica A*, vol. 255, pp. 483-95, 1998.
- [40] Pinto C.M., Lopes A.M., Machado J.T., “A review of power laws in real life phenomena,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, pp. 3558-3578, 2012.
- [41] Price D.J.S., “Networks of scientific papers”, *Science*, vol. 149, pp. 510-5, 1965.
- [42] Redner S., “How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution”, *EurPhys J B*, vol. 4, pp. 131-4, 1998.

- [43] Reed W.J., “The Pareto law of incomes – an explanation and an extension.” *Physica A*, vol.319 pp.469–86, 2003.
- [44] Richardson L.F., “Statistics of deadly quarrels.” Chicago: Quadrangle Books; 1960.
- [45] Richardson L.F., “Variation of the frequency of fatal quarrels with magnitude”, *J Am Stat Assoc*, vol. 43, pp. 523-46, 1948.
- [46] Ricotta C., Avena G., Marchetti M., “The flaming sandpile: self-organized criticality and wildfires.” *Ecol Model*, vol.119(1), pp.73–7, 1999.
- [47] Roberts D.C., Turcote D.L., “Fractality and selforganized criticality of wars”, *Fractals*, vol. 6, pp. 351-7, 1998.
- [48] Rozman G., “East Asian urbanization in the nineteenth century. In: van der Woude AD, Hayami Akira, Vries Jan de, editors. *Urbanization in history: a process of dynamic interactions*”, Oxford: Clarendon Press, pp. 61-73, 1990.
- [49] Sasse F.D., “Departamento de Matemática CCT- UDESC”, URL: http://deeke.org/point_estimation.pdf.
- [50] Song WG, Fan W, Wang B., “Self-organized criticality of forest fires in China.” *Chin Sci Bull*, vol. 46(13), pp.1134–7, 2001.
- [51] Weiguo S., Jiana W., Kohyub S., Weicheng F., “Three types of power-law distribution of forest fires in Japan.” *Ecol Model* , vol. 196, pp.527–32, 2006.
- [52] Willis J.C., Yule G.U., “Some statistics of evolution and geographical distribution in plants and animals, and their significance”, *Nature*, vol. 109, pp. 177-9, 1922.
- [53] Wolfram Mathworld, “Least Squares Fitting – Power Law”, URL: <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFittingPowerLaw.html>.
- [54] Zanette D.H., Manrubia S.C., ”Vertical transmission of culture and the distribution of family names”, *Physica A*, vol. 295, pp. 1-8, 2001.
- [55] Zipf G., “Human behavior and the priciple of least effort”, Cambridge, MA: Addison-Wesley, 1949.