



ANÁLISE DE TEMPOS DE FALHA EM TESTES DE VIDA ACELERADOS

BEATRIZ SANDRINI

novembro de 2017

ANÁLISE DE TEMPOS DE FALHA EM TESTES DE VIDA ACELERADOS

Beatriz Sandrini

2017

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Engenharia Mecânica



POLITÉCNICO
DO PORTO

isep

ANÁLISE DE TEMPOS DE FALHA EM TESTES DE VIDA ACELERADOS

Beatriz Sandrini

1161973

Dissertação apresentada ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação da Doutora Sandra Cristina de Faria Ramos e coorientação da Doutora Elisangela Aparecida da Silva Lizzi

2017

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Engenharia Mecânica



POLITÉCNICO
DO PORTO

isep

JÚRI

Presidente

Rui Pedro Cardoso da Silva Martinho

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Orientador

Sandra Cristina de Faria Ramos

Professor Adjunto, Instituto Superior de Engenharia do Porto

Coorientador

Elisangela Aparecida da Silva Lizzi

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Arguente

Aldina Isabel de Azevedo Correia

Professor Adjunto, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico do Porto

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a UTFPR-CP, pela oportunidade e apoio fornecido durante o programa de Dupla Formação. Aos professores Adriano Silva Borges, Paulo Moseli e minha coorientadora Elisangela Ap. da Silva Lizzi, pelo incentivo e suporte durante esse período.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer ao ISEP pelo acolhimento e recepção durante minha estadia. E principalmente ao Engenheiro Francisco Silva e a minha Orientadora Sandra Ramos, por todo suporte, dedicação, paciência e incentivo durante o desenvolvimento desse trabalho.

Para finalizar gostaria de agradecer a minha Família. Aos meus pais, Olívio Sandrini Junior e Meire Aparecida da Silva, pelo incentivo, suporte, dedicação e conselhos fornecidos durante a realização de mais um sonho. Ao meu avô, Olívio Sandrini, pelas oportunidades acadêmicas, que me proporcionou até hoje. Agradeço também a minha avó, tios, tias, padrinho, madrinhas, primos, primas que me forneceram palavras amigas e incentivos durante essa jornada. E principalmente aos amigos que conquistei durante essa caminhada, os quais, estiveram sempre presentes nos momentos bons e difíceis.

E também a minha irmã gêmea, Marina Sandrini, pelo seu companheirismo, suporte e amizade durante a realização de mais uma conquista que compartilhamos juntas. Obrigada, por todo apoio e convivência durante esse período.

PALAVRAS CHAVE

Fiabilidade; tempo até à falha; ensaios de vida acelerados; curvas de Kaplan-Meier; distribuição de Weibull; função potência inversa; extrapolação de valores

RESUMO

Os testes de vida acelerados consistem na exposição de componentes/sistemas a cargas de *stress* de forma a reduzir o tempo de falha a níveis aceitáveis. A informação obtida sob condições aceleradas é considerada na previsão do comportamento do componente/sistema em condições normais de operação.

Para relacionar os tempos obtidos em condição de *stress* com medidas de fiabilidade em condições normais são, frequentemente, considerados modelos físico-estatísticos. Entre os vários modelos físico-estatísticos mais populares, está o modelo Lei de Potência Inversa que se baseia na distribuição de Weibull e é indicado quando o fator de *stress* é a voltagem.

O modelo da Lei da Potência Inversa estipula que o parâmetro de forma β da distribuição de Weibull tome o mesmo valor em todos os níveis do fator de *stress*. Este pressuposto possibilitará que os vários testes acelerados possam ser comparados entre si, permitindo assim a extrapolação dos parâmetros para condições de normal operação. Quando este pressuposto não é verificado é habitual considerar como estimativa para β a média das estimativas deste parâmetro em cada nível do fator. Neste trabalho é proposta outra solução para este problema, que utiliza o β mediano.

As metodologias revistas, assim como as propostas são ilustradas com base num conjunto de dados real publicado na literatura.

KEYWORDS

Reliability; time to failure; accelerated life tests; Kaplan-Meier curves; Weibull distribution; inverse power function; extrapolation of values

ABSTRACT

Accelerated life tests consist of exposing components / systems to stress loads in order to reduce the failure time to acceptable levels. The information obtained under accelerated conditions is considered in the prediction of the behavior of the component / system under normal operating conditions.

To relate the times obtained in stress condition with measures of reliability under normal conditions are often considered physical-statistical models. Among the most popular physicist-statistical models is the Reverse Power Law model, which is based on the Weibull distribution and is indicated when the stress factor is the voltage.

The Reverse Power Law model stipulates that the β parameter of the Weibull distribution takes the same value at all levels of the stress factor. This assumption will enable the various accelerated tests to be compared to each other, thus allowing extrapolation of the parameters to normal operating conditions. When this assumption is not verified it is usual to consider as an estimate for β the average of the estimates of this parameter in each level of the factor. In this paper, other solutions to this problem are proposed.

Revised methodologies as well as proposals are illustrated on the basis of a real data set published in the literature.

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Lista de Abreviaturas

MTTF	Tempo Médio até a Falha
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MMV	Método de Máxima Verossimilhança
MB	Método Bayesiano
LPI-W	Lei Potência Inversa-Weibull

Lista de Unidades

kV	Quilovolt
Horas	Horas

Lista de Símbolos

$F(.)$	Função de distribuição acumulada
$R(.)$	Função de fiabilidade
$f(.)$	Função Densidade de probabilidade
$\lambda(.)$	Taxa de risco
$H(.)$	Taxa de risco acumulada
$W(.,.)$	Distribuição de Weibull
β	Parâmetro de forma da distribuição de Weibull
η	Parâmetro de escala da distribuição de Weibull
γ	Parâmetro de posição da distribuição de Weibull
$L(\theta)$	Função de Máxima Verossimilhança
$\hat{R}(.)$	Estimador de Kaplan-Meier
$E(.)$	Valor esperado ou valor médio
$V(.)$	Variância

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: $B > 0.5, 1, 2.5, 4, 7$ E $H = 1000$ CICLOS	38
FIGURA 2: $B = 2.5$ E $H = 1000, 2000, 3000$ CICLOS	38
FIGURA 3: INFORMAÇÕES COMPLETA	39
FIGURA 4: INFORMAÇÕES CENSURADAS TIPO I	40
FIGURA 5: INFORMAÇÃO CENSURADA TIPO II	40
FIGURA 6: TRAÇO DOS VALORES SIMULADOS PARA O CENÁRIO 1	53
FIGURA 7: TRAÇO DOS VALORES SIMULADOS PARA O CENÁRIO 2	53
FIGURA 8: TRAÇO DOS VALORES SIMULADOS PARA O CENÁRIO 3	54
FIGURA 9: GRÁFICO DA ESTIMATIVA KAPLAN-MEIER DA FUNÇÃO DE FIABILIDADE	56

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1: RESULTADOS DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO	52
TABELA 2: TEMPOS ATÉ À FALHA, EM HORAS	55
TABELA 3: DADOS DA ANÁLISE KAPLAN-MEIER PARA 5 KV.	57
TABELA 4: DADOS DA ANÁLISE KAPLAN-MEIER PARA 7 KV.	57
TABELA 5: DADOS DA ANÁLISE KAPLAN-MEIER PARA 10 KV.	57
TABELA 6: DADOS DA ANÁLISE KAPLAN-MEIER PARA 15 KV.	58
TABELA 7: ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	59
TABELA 8: VALORES COMBINADOS PARA β	60
TABELA 9: VALORES AJUSTADOS DE η	61
TABELA 10: ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DO MODELO LEI POTÊNCIA INVERSA.	62
TABELA 11: ESTIMATIVAS DE ALGUNS INDICADORES DE FIABILIDADE	63

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	ENQUADRAMENTO E MOTIVAÇÃO	23
1.2	OBJETIVOS	25
1.3	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	25
1.4	<i>SOFTWARE R</i>	26
2	MUITO BREVE REVISÃO DA LITERATURA	29
3	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	33
3.1	ALGUNS CONCEITOS E DEFINIÇÕES	33
3.2	MODELOS PROBABILISTICOS USADOS NA MODELAÇÃO DE TEMPOS DE VIDA	35
3.2.1	O MODELO DE WEIBULL.....	36
3.3	ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER	45
3.4	ENSAIOS DE VIDA ACELERADOS	46
3.4.1	LEI POTÊNCIA INVERSA.....	47
4	APLICAÇÕES	51
4.1	ESTUDO DE SIMULAÇÃO	51
4.2	DADOS REAIS	54
4.2.1	SOBRE OS DADOS.....	54
4.2.2	MODELAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA	55
4.2.3	AJUSTE DO MODELO LEI POTÊNCIA INVERSA – WEIBULL.....	58

5	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	67
5.1	CONCLUSÕES	67
5.2	PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS	68
6	BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO	71
7	ANEXOS	77

INTRODUÇÃO

1.1 ENQUADRAMENTO E MOTIVAÇÃO

1.2 OBJETIVOS

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

1.4 *SOFTWARE R*

1 INTRODUÇÃO

1.1 ENQUADRAMENTO E MOTIVAÇÃO

Atualmente, os fabricantes procuram qualidade e excelência para os seus produtos, com a finalidade de manter um padrão para o mercado consumidor e superar a concorrência. Afinal, com a globalização, sobreviver nos dias atuais é cada vez mais difícil. Perante esta forte concorrência, os fabricantes procuram mecanismos para uma produção em tempo recorde, sem descuidar da qualidade e da fiabilidade¹ dos produtos. Em termos práticos, estas exigências requerem que a informação relativa à fiabilidade dos produtos seja obtida rapidamente, para que possa ser incorporada em novos projetos e/ou na melhoria dos projetos já existentes.

As medidas de fiabilidade de interesse são, frequentemente, obtidas a partir de dados experimentais resultantes da execução de testes de vida durante um período. No entanto, muitos produtos modernos são projetados para operar, sem falhas, por períodos longos de tempos (meses ou mesmo anos). Portanto, é de esperar que poucas unidades falhem durante o período de observação.

Para obter informação sobre a fiabilidade de um produto de forma mais rápida, são aplicados, nos ensaios, testes de vida acelerados. Nesses testes, o produto em avaliação é submetido a um nível de *stress* (ou aceleração) maior do que o seria considerado em condições de uso normal. Entre os fatores *stress* existentes nesse tipo de ensaios, a temperatura, a pressão, a voltagem, a humidade e vibração são os fatores que mais se destacam pela frequência de utilização. Assim, a informação necessária à obtenção das quantidades de fiabilidade de interesse em condições de uso normal é rapidamente obtida.

Em geral, a informação obtida sob altos níveis de *stress* é extrapolada, por meio de um modelo físico-estatístico, de maneira a serem obtidos indicadores de fiabilidade para as condições de uso normal. Exemplo de indicadores são: tempo médio e tempo mediano até à falha e outros quantis de interesse.

Nos ensaios de vida acelerados, o tempo até a falha (T- variável resposta) é uma função do fator *stress* (S - variável de *stress*). Esta relação pode ser, matematicamente, expressa por:

¹ A fiabilidade está associada com a eficiência na operação de um produto ou equipamento.

$$T = f(S) + \varepsilon.$$

O erro ε representa a variabilidade que não controlada na experiência. A função f é designada de função stress-resposta. Na parametrização de f tem-se, frequentemente, em consideração características físicas e/ou químicas. Os modelos stress-resposta mais comuns em Engenharia são o modelo de Arrhenius, o modelo de Eyring e o modelo Potência Inversa.

A relação *stress-resposta* é uma relação determinística, ou seja, para um dado nível da variável de stress, obtém-se um único valor para o tempo até à falha. Contudo, considerando apenas uma relação determinística não é possível explicar a variabilidade observada em cada nível da variável *stress*. Importa assim acrescentar, ao componente determinístico, um componente probabilístico que seja capaz de explicar a variabilidade dos tempos de falha num determinado nível da variável de *stress*. Para dar resposta a este problema considera-se que, em cada nível da variável *stress*, os tempos de falha são modelados por uma distribuição de probabilidade adequada, sendo o componente probabilístico do modelo descrito por essa distribuição.

A distribuição de probabilidade de Weibull com dois parâmetros é, frequentemente, usada para modelar os tempos de falha em testes de vida acelerados, devendo os seus parâmetros ser estimados para cada nível da variável de *stress*.

Existem na literatura vários métodos para obter estimativas para os parâmetros do modelo de Weibull, tanto de um ponto de vista clássico, como de um ponto de vista paramétrico [vejam-se, por exemplo, as referências: De Almeida (2007), Barros Filho (2003), Binoti (2010)]. Um dos objetivos deste trabalho é estudar métodos de estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull e comparar o seu desempenho através de um pequeno estudo de simulação.

Assumindo um modelo *stress-resposta* e uma distribuição de probabilidade para os tempos de falha do sistema/produto sob teste, obtém-se a combinação que permite extrapolar os resultados do teste de vida acelerado para as condições de uso normal. Por exemplo, assumindo que os tempos de vida do sistema sob teste seguem uma distribuição de Weibull em cada nível do fator stress e admitindo o modelo Lei Potência Inversa, obtém-se a relação Lei Potência Inversa-Weibull.

Para que esta relação possa ser usada na extrapolação de resultados para condições normais de utilização, é suposto que, em todos os níveis do fator *stress*, o valor do parâmetro de forma da distribuição de Weibull seja o mesmo. Ora, na prática isso nem sempre acontece, pelo que são necessárias soluções para esse problema. Neste trabalho considera-se a solução mais frequentemente usada para este problema e

propõem-se uma nova solução.

1.2 OBJETIVOS

A presente dissertação de mestrado foi desenvolvida no âmbito do mestrado em Engenharia Mecânica, no ramo de Gestão Industrial, no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP).

A dissertação tem, essencialmente, 3 propósitos principais. O primeiro é estudar alguns métodos de estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull e comparar o desempenho desses métodos através de um pequeno estudo de simulação, em relação a dimensão da amostra. O segundo objetivo prende-se com métodos para ultrapassar o problema da não verificação do pressuposto de igualdade do valor do parâmetro de forma da distribuição de Weibull no modelo Lei Potência Inversa-Weibull. Por fim, o terceiro objetivo deste trabalho é aplicar as metodologias estudadas/propostas (e compará-las) na extrapolação de informação de fiabilidade para as condições normais de uso a partir de dados reais, publicados na literatura, obtidos num ensaio de vida acelerado [Hirose (1993)].

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é composta por sete capítulos, que foram divididos de forma a que o leitor tenha uma boa compreensão sobre o assunto apresentado. Para além deste capítulo introdutório, Capítulo 1, que apresenta, essencialmente, a motivação do trabalho e os seus objetivos, esta dissertação é composta por mais 6 capítulos, estruturados da forma seguinte:

Capítulo 2: Neste capítulo é apresentada uma breve revisão da literatura sobre o assunto estudado.

Capítulo 3: Este capítulo debruça-se sobre os conceitos fundamentais teóricos do estudo. Não se pretende fazer uma exposição exaustiva sobre os conceitos teóricos, mas apenas apresentar o detalhe necessário ao bom entendimento do leitor.

Capítulo 4: Este é o capítulo dedicado à apresentação de resultados. São apresentados resultados de um pequeno estudo de simulação que pretende comparar o desempenho de 3 métodos de estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull com dois parâmetros. Apresentam-se, ainda, resultados da aplicação das metodologias estudadas/propostas a dados reais, publicados em 1993.

Capítulo 5: Este capítulo é inteiramente dedicado à discussão dos resultados e à apresentação das principais conclusões obtidas com o estudo. São ainda discutidas algumas possibilidades de trabalho futuro.

Capítulo 6: Neste capítulo apresenta a lista de referências bibliográficas consideradas neste trabalho.

Capítulo 7: Este último capítulo, Anexos, apresenta todo o código desenvolvido no *software R*.

1.4 SOFTWARE R

Toda a implementação computacional realizada no âmbito deste trabalho foi realizada em linguagem R.

Em 1991, Ross Ihaka e Robert Gentleman [Ihaka e Gentleman (1996)], dois professores de Estatística, iniciaram o projeto *R* que surgiu da necessidade de se criar uma ferramenta gratuita e *open source* (código aberto) para utilização nas suas aulas da disciplina Estatística.

O projeto R [R Development Core Team (2007)], baseado na linguagem S, foi evoluindo e é, atualmente, uma linguagem de programação e ambiente para computação estatística e gráfica, desenvolvido sob a licença pública geral (GNU/GPL).

Sendo uma linguagem de código aberto, permite que qualquer programador disponibilize os seus códigos para a comunidade, através de bibliotecas de funções, conhecidas por *packages* do R. Os arquivos do *R* são organizados e distribuídos por uma rede de servidores espelhos em universidades, centros de investigação, empresas, organizações governamentais e não governamentais em mais de 20 países.

Atualmente, o *R* é um dos softwares mais utilizados nas Universidades, centros de investigação e ensino de todo o mundo.

REVISÃO DA LITERATURA

2 MUITO BREVE REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta uma revisão sobre alguns trabalhos que tratam o assunto dos ensaios de vida acelerados e o assunto da estimação de parâmetros de distribuições de probabilidade. Não se pretende, de modo algum, uma descrição completa e exaustiva dos trabalhos, mas apenas referir as principais contribuições de cada um deles.

Os testes acelerados de vida é um processo de teste de um produto submetendo-o a condições *stress* (tensão, tensão, temperatura, tensão, taxa de vibração, pressão, etc.) de maneira a forçar a ocorrência de falha e a descobrir possíveis modos de falha [Nelson, W. (1980); Spencer, F. W. (1991)]. Estes testes surgiram da necessidade de se obterem informações rápidas sobre a fiabilidade de elementos de maneira a usar essa informação na melhoria do processo de desenvolvimento. No âmbito industrial, utilizar a fiabilidade para estimar o tempo de vida dos elementos, seria útil para melhorar a qualidade, dos mesmos, e sua concorrência no mercado. Sendo assim, os testes de vida acelerados, estimam os indicadores de fiabilidade com maior rapidez e em condições normais.

Muitos são os trabalhos publicados que tratam o assunto dos testes de vida acelerados, tanto numa vertente aplicação prática, como na vertente do desenvolvimento de metodologias que permitem extrapolar a informação recolhida em sob condições aceleradas para as condições normais de uso. Referem-se aqui 3 dos muitos trabalhos publicados sobre o assunto.

Hideo Hirose, no seu trabalho “Estimation of Threshold Stress in Accelerated Life-Testing” [Hirose (1993)], utiliza informação sobre tempos de vida obtidos em condições de *stress* para estimar o limiar da variável de aceleração abaixo do qual não se espera que ocorrem falhas. Com isso os dados utilizados por Hirose, tiveram a intenção de avaliar os testes para cada nível de stress fornecidos, com a intenção de saber em qual nível de tensão não ocorreria falhas. Diferente do que foi proposto nesse trabalho que utilizou os dados fornecidos no artigo de Hirose, para descobrir os estimadores de fiabilidade em cada nível de tensão e nas condições normais.

Já no trabalho “Using Accelerated Life Tests to Estimate Time to Software Aging Failure” [Matias, Trivedi e Maciel (2010)], Rivalino Matias e companheiros, tratam o problema do envelhecimento de *software*, o qual é visto como uma degradação contínua dos sistemas do mesmo, sendo difícil de observar as falhas relacionadas com isso. Sendo assim, os autores coletaram uma amostra de tempos de falhas, e propuseram a avaliação desses tempos por meio de testes quantitativos de vida aceleradas para reduzir o tempo de teste. Os autores concluíram que o método

proposta diminui o tempo necessário para obter os tempos de falha por um fator de 7, para o sistema analisado.

Ronghua e companheiros de trabalho [Ronghua, W. et.al (2012)], em 2012 comparam a eficiência prática de testes de vida acelerados e testes acelerados com base em quatro critérios diferentes através de estudos teóricos e simulações intensas de Monte-Carlo. Consideram a distribuição de Weibull, e a distribuição lognormal para modelar a vida útil dos produtos em cada nível de *stress* e lidaram com esquemas de censura tipo I e tipo II.

Muitos outros trabalhos têm sido propostos e tratam o problema dos testes de vida acelerados de várias formas, pelo que este assunto é um assunto pertinente de investigação.

No que respeita à distribuição de Weibull, também muito se tem falado e escrito sobre este assunto. A distribuição de Weibull tem um leque alargado de aplicações e foi, em 1954, apresentada, originalmente, pelo Professor Wallodi Weibull [Weibull, W. (1954)] que a aplicou em estudos relacionados ao tempo de falha devido a fadiga de metais.

Embora se destaque também em outras áreas, como a medicina, é na engenharia da fiabilidade de apresenta grande destaque como referem os trabalhos de Lawless (1982, 2003).

A popularidade da distribuição deve-se ao facto de fornecer modelação adequada para diferentes tipos diferentes de dados, especialmente em áreas emergentes, como velocidade do vento e finanças (preços das ações e dados atuariais), além de suas aplicações de engenharia tradicionais.

No que respeita à estimação de parâmetros desta distribuição são também muitas as publicações que tratam este assunto, sendo os métodos mais frequentemente usados o método dos momentos, o método dos mínimos quadrados e o método de máxima verossimilhança. O método de Máxima Verossimilhança o método mais comumente usado pelas suas características robustas. Sendo que essas características, segundo a literatura, definem que os estimadores dos mínimos quadrados são muito sensíveis à presença de *outliers* e que uma pequena variação nos dados implica uma variação no valor das estimativas. Os estimadores de máxima verossimilhança são menos sensíveis a pequenas alterações nos dados.

CONCEITOS TEÓRICOS

3.1 ALGUNS CONCEITOS E DEFINIÇÕES

3.2 MODELOS PROBABILÍSTICOS USADOS NA MODELAÇÃO DE TEMPOS DE VIDA

3.2.1 O MODELO DE WEIBULL

3.3 ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER

3.4 ENSAIOS DE VIDA ACELERADOS

3.4.1 LEI POTÊNCIA INVERSA

3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Este capítulo apresenta uma revisão sobre as ideias e os instrumentos teóricos fundamentais que constituíram o suporte teórico do trabalho desenvolvido. Esta revisão foca, essencialmente, três assuntos: notação e terminologia da área; a distribuição de Weibull e métodos para estimar os seus parâmetros e, por fim, uma referência aos testes acelerados de vida.

3.1 ALGUNS CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Avaria [NP EN 13306 (2007)]

“Cessação da aptidão de um bem para cumprir uma função requerida.”

Os termos “avaria” e “falha” são, praticamente, sinónimos e podem utilizar-se indistintamente. É comum, no entanto, utilizar o termo “avaria” com mais amplitude, para um equipamento como um todo, e o termo “falha”, sem sentido mais restrito, dirigido ao elemento. Exemplo, a máquina avariou por falha do componente.

Em nota adicional à definição de avaria na Norma NP EN 13306, Saraiva Cabral [Saraiva Cabral (2006)] refere que

“Os termos ‘avaria’ e ‘falha’ são praticamente sinónimos e podem utilizar-se indistintamente. É comum, no entanto, utilizar o termo ‘avaria’ com mais amplitude, para um equipamento como um todo, e o termo ‘falha’, em sentido mais restrito, dirigido ao órgão. O primeiro utiliza-se, normalmente, dirigido ao equipamento e nas situações reparáveis..., enquanto que o segundo se utiliza nas situações irreversíveis. ”

Daqui em diante vai aplicar-se sempre o termo “falha” pois o estudo apresentado neste documento centrou-se em elementos não reparáveis, não em equipamentos reparáveis. Note-se também que os conceitos teóricos apresentados em seguida foram adaptados ao caso do estudo de elementos não reparáveis.

Fiabilidade [NP EN 13306 (2007)]

“Aptidão de um bem para cumprir uma função requerida, sob determinadas condições, durante um dado intervalo de tempo.”

Na prática este termo, exprime o grau de confiança que se pode ter no bem quanto ao cumprimento da sua função ou serviço, ou seja, funcionar sem problemas.

A fiabilidade tem como base quatro elementos principais. O primeiro é a probabilidade: demonstrando que fiabilidade pode ser traduzida em termos mensuráveis, através da distribuição de probabilidade do tempo de falha. O segundo é o desempenho: conjunto de requisitos que definem a função a ser executada. O terceiro: tempo de operação para o qual se pretende que o elemento funcione sem falha. Por último, as condições de operação que são as circunstâncias ambientais e operacionais [Pereira (1996)].

Matematicamente, a fiabilidade será então expressa pela probabilidade do elemento funcionar, nas condições fixas estabelecidas, por um período de tempo definido. Esse período de tempo pode ser mensurado em unidades como horas, quilómetros, ciclos, etc.

Sejam, então, T a variável aleatória (v.a.) que representa o tempo de falha de um elemento com função densidade de probabilidade dada por f e função de distribuição dada por F . A função de fiabilidade, R , é dada por

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{+\infty} f(u)du, t > 0.$$

Como $F(t) = P(T \leq t)$, a função de fiabilidade e a função de distribuição complementam-se para 1, ou seja

$$F(t) + R(t) = 1$$

Uma vez que $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, nos pontos onde a derivada existe, $\frac{dR(t)}{dt} = -f(t)$.

Tempo médio até à falha

Sendo a v.a. T uma variável absolutamente contínua, o tempo médio até à falha, é dado por:

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t)dt.$$

Na literatura Inglesa é habitual encontrar a sigla MTTF² para representar o tempo este tempo médio.

Tempo mediano até à falha

O tempo mediano até à falha, $t_{0.5}$, é outro indicador de fiabilidade muito utilizado na prática e é dado, matematicamente, por:

$$t_{0.5}: P(T \leq t_{0.5}) = 0.5$$

Variância do tempo até à falha

A variância da v.a. T é outro indicador de fiabilidade importante, pois fornece informação sobre a dispersão e é obtida pela fórmula:

$$V(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt - \left[\int_0^{+\infty} t f(t) dt \right]^2.$$

Função de Risco

A função de risco pode ser vista como a probabilidade de um componente vir a falhar no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, sabendo que no instante t está funcionando:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}, \quad t > 0.$$

Mostra-se que:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}, t > 0.$$

3.2 MODELOS PROBABILISTICOS USADOS NA MODELAÇÃO DE TEMPOS DE VIDA

De um ponto de vista paramétrico, a obtenção de indicadores de fiabilidade exige a especificação adequada da distribuição de probabilidade para a v.a. T . Existem várias distribuições de probabilidade que podem ser usadas nesta modelação, sendo as distribuições mais populares: a distribuição uniforme, a distribuição normal (ou norma

² Mean Time To Failure.

truncada devido ao facto de estarmos a trabalhar com tempos), a distribuição log-normal, a distribuição de Rayleigh e a distribuição de Weibull. Nesta pequena revisão, escrevemos apenas sobre a distribuição de Weibull por ser uma das mais versáteis pois dispõem de um parâmetro de forma que lhe permite acomodar-se a muitas situações práticas. Por exemplo, quando o parâmetro de forma da distribuição de Weibull assume o valor 1, temos a distribuição exponencial. A distribuição de Weibull também coincide com a distribuição normal quando o seu parâmetro de forma assume um valor perto de 4.

Faz-se, de seguida, uma revisão sobre a distribuição de Weibull, definindo-se através da sua função densidade de probabilidade. São ainda apresentados 3 métodos para a estimação dos parâmetros desta distribuição.

3.2.1 O MODELO DE WEIBULL

A distribuição Weibull surgiu devido a um estudo relacionado com o tempo de falha provocado por fadiga. Esta distribuição foi proposta originalmente por, em 1953, W. Weibull (1954) [Barros Filho (2003), De Almeida (2007)].

Como já referido, a sua popularidade em aplicações práticas deve-se ao facto dela apresentar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a sua função de taxa de falha é monótona. Isto é, ou é crescente ou decrescente ou constante.

A função de densidade de probabilidade da distribuição de Weibull é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta(t - \gamma)^{\beta-1}}{\eta^\beta} \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right], t \geq \gamma,$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de posição ou vida mínima, $\eta > 0$ o parâmetro de escala ou vida característica $\beta > 0$ o parâmetro de forma. Não existem razões matemáticas que impeçam que γ tome valores negativos, embora, na prática, este parâmetro assume valores positivos. $\gamma < 0$ implica que o elemento pode falhar antes de entrar em operação. Quando $\gamma = 0$, tem-se uma distribuição de Weibull com 2 parâmetros, simbolicamente, Weibull(β, η), cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right], t \geq 0.$$

Interpretação dos parâmetros do modelo

De acordo com Ramos, S [Ramos (2017)], os parâmetros da distribuição de Weibull tem a seguinte interpretação.

Parâmetro de forma: β

O parâmetro de forma caracteriza a forma de distribuição. E o mesmo parâmetro pode ser utilizado como indicador para diagnósticos, afinal, este o valor desse parâmetro reflete o estado do elemento.

- $\beta < 1$: indica mortalidade infantil: taxas de falha altas e decrescentes no início da vida do produto ou sistema;
- $\beta = 1$: indicam falhas aleatórias: taxas de falha constantes ao longo do tempo e geralmente baixas;
- $1 < \beta < 4$: indicam desgaste antecipado. Torna-se um problema caso as falhas ocorram dentro da vida projetada para o sistema ou produto;
- $\beta > 4$: indicam desgaste de fim de vida.

Parâmetro de localização: η

O parâmetro escala ou localização corresponde ao tempo para o qual a probabilidade de avaria é de aproximadamente 0.632, isto é, indica o tempo de funcionamento que não é ultrapassado por 63.2% dos elementos.

Parâmetro de posição: γ

O parâmetro de posição corresponde ao período de vida garantida ou período de garantia da componente. Na maior parte das aplicações é costume ter-se $\gamma \geq 0$:

- $\gamma > 0$ há sobrevivência total entre $t = 0$ e $t = \gamma$;
- $\gamma = 0$ as falhas começam na origem dos tempos;
- $\gamma < 0$ as falhas começam antes da origem dos tempos.

Neste trabalho vai considerar-se o caso de uma distribuição de Weibull com dois parâmetros, ou seja, com $\gamma = 0$, por tratar-se do caso mais frequente na prática.

As Figuras 1 e 2 são exemplos do comportamento da distribuição de Weibull com dois parâmetros. É apresentada a função densidade de probabilidade para diferentes

valores do parâmetro de forma e do parâmetro de localização. Pode observar-se na Figura 1 que a forma da distribuição varia com a variação do parâmetro de forma e que à medida que o valor desse parâmetro aumenta, a distribuição tende a apresentar uma distribuição simétrica.

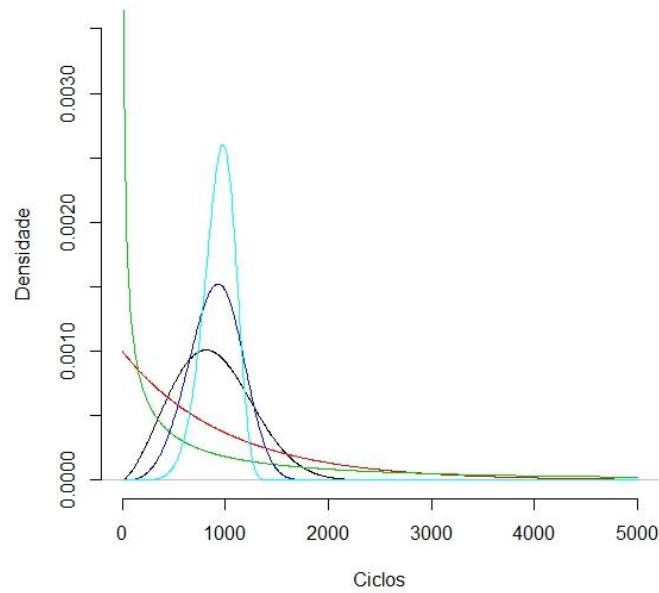


Figura 1: $\beta > 0.5, 1, 2.5, 4, 7$ e $\eta = 1000$ ciclos

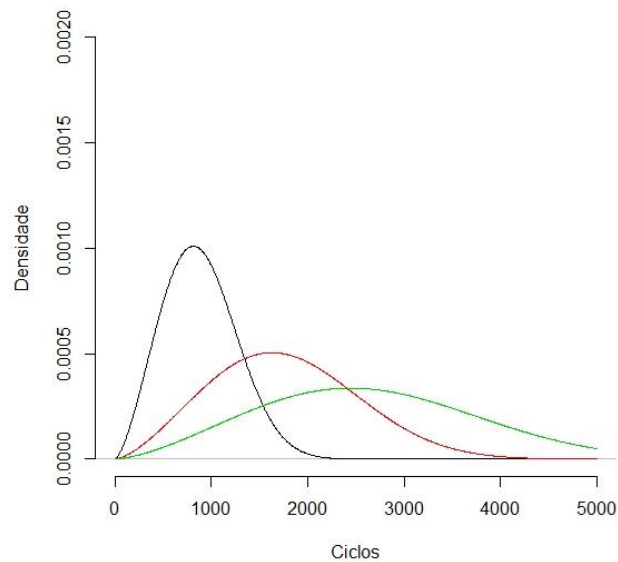


Figura 2: $\beta = 2.5$ e $\eta = 1000, 2000, 3000$ ciclos

O tempo médio até à falha [$E(T)$ ou MTTF], o tempo mediano e a variância considerando a distribuição de Weibull, são dados, respectivamente, pelas expressões:

$$E(T) = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

$$F^{-1}(0.5) = t_{0.5} = \eta[-\ln(0.5)]^{\frac{1}{\beta}},$$

$$V(T) = \eta \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\},$$

onde $\Gamma(\cdot)$ representa a função gama que é parametrizada por $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$.

3.2.1.1 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO WEIBULL(β, η)

Antes de apresentar os 3 métodos de estimação de parâmetros, importa introduzir a noção de informação completa e informação censurada, porque é frequente, na prática, encontrar informação censurada.

Diz-se que estamos perante informação completa se foram conhecidos os tempos de falha de todos os elementos observados [PortalAction].

Quando não se conhecem os tempos de falha de todos os itens em observação, porque foram retirados antes de falharem ou porque não ocorreu a falha antes do final da observação, diz-se que estamos perante informação censurada do tipo I.

Pode também acontecer que estejam disponíveis apenas os r tempos de falhas baixos, de n tempos totais. Neste caso temos censura do tipo II. Essa situação acontece quando se colocam n itens em teste ao mesmo tempo e o teste termina depois dos primeiros r itens falharem.

As Figuras 3, 4 e 5 exemplificam o caso de informação completa e informação censurada tipo I e tipo II.

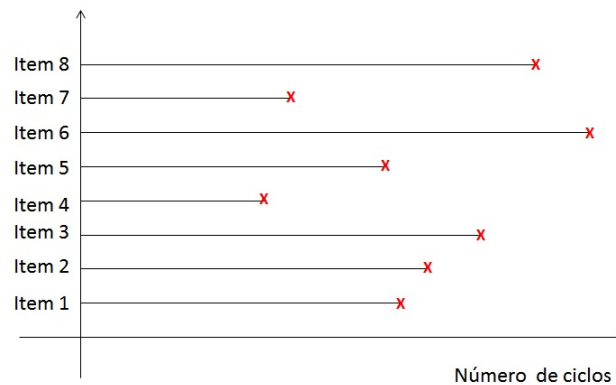


Figura 3: Informações completa

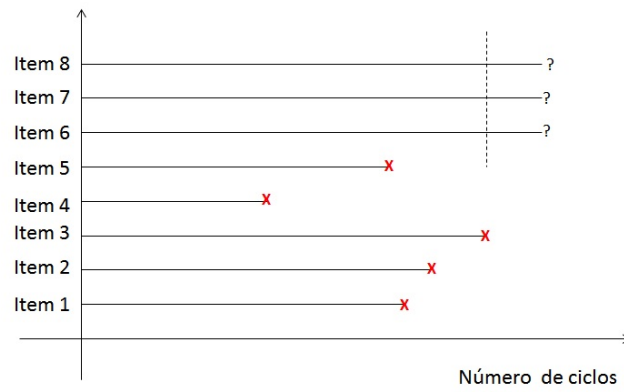


Figura 4: Informações censuradas tipo I

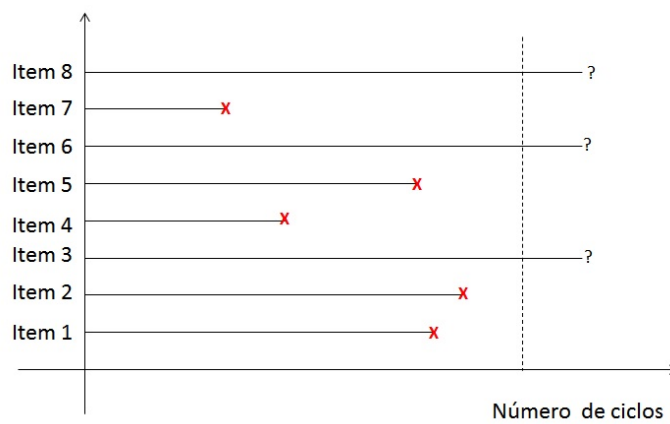


Figura 5: Informação censurada tipo II

Apresentam-se, de seguida, 3 métodos distintos para estimar os parâmetros de β, η , dois em contexto clássico e um em contexto bayesiano: regressão com o método dos mínimos quadrados, método de máxima verossimilhança e um método bayesiano.

Método dos mínimos quadrados

Este método é utilizado para dois objetivos, o primeiro analisar dados e estimar os parâmetros do modelo. E o segundo, como meio de apresentação dos dados [Ramos (2017)].

Neste método parte-se a expressão da função de distribuição de Weibull:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right],$$

que não tem uma forma linear, como é fácil de constatar. Contudo é passível de linearização, aplicando transformações logarítmicas. Linearizando, então, a equação anterior, obtém-se:

$$\ln[-\ln(1 - F(t))] = \beta \ln t - \beta \ln \eta.$$

Considerando $y = \ln[-\ln(1 - F(t))]$, $x = \ln(t)$; $a = \beta$ e $b = -\beta \ln \eta$, obtém-se a expressão linear $y = ax + b$.

A variável dependente, y , depende de $F(t)$ que é uma quantidade desconhecida, pelo que antes de se aplicar o método para estimar os parâmetros a e b da reta é preciso decidir sobre como aproximar esta quantidade. Na prática, é habitual usar a função de distribuição empírica para aproximar a função de distribuição teórica. Outra solução é usar o estimador $\hat{F}_i = \frac{(i-0.3)}{(N+0.4)}$ na estimação de $F(t)$, onde N é o número de tempos ($N=n$).

Considerando este último estimador e o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) obtêm-se as estimativas dos parâmetros da reta, \hat{a} e \hat{b} [Dillenburg (2005)]. Segundo a literatura, o MMQ³ é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados (tais diferenças são chamadas resíduos).

Para obter as estimativas dos parâmetros da distribuição de Weibull tem apenas que considerar-se que $\hat{\beta} = \hat{a}$ e que $\hat{\eta} = \exp\left(-\frac{\hat{b}}{\hat{\beta}}\right)$.

A caso apresentado é, facilmente adaptado ao caso de informação censurada. Num cenário de censura o procedimento é exatamente o mesmo, considerando-se nas expressões anteriores um valor de n igual número de itens avaliados, embora se conheçam apenas $r < n$ tempos de falha.

Método de Máxima Verossimilhança

O Método de Máxima Verossimilhança (MMV) é o método mais utilizado para a estimação dos parâmetros de uma distribuição de probabilidade, sendo utilizado pela primeira vez por Fisher (1912) [Peres (2016)]. O método tem como base uma amostra e determina os parâmetros de uma distribuição maximizando a probabilidade dessa distribuição ter gerado aquela amostra.

³ Ou OLS do Inglês *Ordinary Least Squares*.

Considerando então uma amostra de tempos de falha, t_1, \dots, t_n , provenientes de uma distribuição com função densidade de probabilidade $f_{\theta}(\cdot)$. A função verossimilhança é dado por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(t_i).$$

$\boldsymbol{\theta}$ é o vetor dos parâmetros da distribuição. Sendo, neste trabalho, $\boldsymbol{\theta} = (\beta, \eta)$ então tem-se:

$$L(\beta, \eta) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta t_i^{\beta-1}}{\eta^{\beta}} \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^{\beta} \right].$$

A expressão anterior refere-se ao caso em que dispõem de informação completa.

Num cenário de dados censurados, a função de verossimilhança deve ter em consideração que, para os casos censurados, o tempo de falha é maior que o tempo de censura observado, pelo que a contribuição desta informação para $L(\boldsymbol{\theta})$ é dada a através da função de fiabilidade $R(t)$. Assim, as observações são divididas em r tempos não censurados e os restantes $n - r$ tempos censurados, sendo a função de verossimilhança parametrizada da forma seguinte:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^r f_{\theta}(t_i) \prod_{i=r+1}^n R_{\theta}(t_i).$$

No caso da distribuição de Weibull a expressão anterior toma a seguinte forma:

$$L(\beta, \eta) = \prod_{i=1}^r \frac{\beta t_i^{\beta-1}}{\eta^{\beta}} \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^{\beta} \right] \prod_{i=r+1}^n \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^{\beta} \right].$$

A obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do vetor $\boldsymbol{\theta}$ é feita maximizado $L(\boldsymbol{\theta})$ ou o seu logaritmo⁴, $\log[L(\boldsymbol{\theta})]$. A estimativa de $\boldsymbol{\theta}$ é então obtida resolvendo, em ordem a $\boldsymbol{\theta}$, a equação:

$$\frac{d \log(L(\boldsymbol{\theta}))}{d\boldsymbol{\theta}} = 0,$$

⁴ A função de verossimilhança é uma função, geralmente, difícil de tratar, pelo que é habitual considerar uma transformação logarítmica que conduz a uma expressão de tratamento matemático mais simples.

ou o sistema de equações seguinte, no caso particular da distribuição de Weibull com dois parâmetros:

$$\begin{cases} \frac{\partial \log(L(\beta))}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial \log(L(\eta))}{\partial \eta} = 0 \end{cases}.$$

No caso da distribuição de Weibull, não existem expressões fechadas para os estimadores os parâmetros β e η , pelo que os valores das estimativas desses parâmetros são obtidos numericamente através de uma ferramenta computacional.

É frequentemente utilizado o método de Newton-Raphson na resolução do sistema de equações de interesse. Mais detalha sobre este assunto, pode encontra-se, por exemplo, em [Fonseca (2008), De Matos (2010)].

Métodos Bayesianos

Na descrição desta abordagem acrescenta-se um pouco mais de detalhe visto tratar-se de uma ferramenta menos utilizada na prática.

Os métodos Bayesianos (MB) são uma ferramenta cada vez mais poderosa na análise de dados. Contudo, esta escola de pensamento não é recente. Em 1763, o reverendo e matemático inglês Thomas Bayes [Bayes (1763)], apresentou os seus fundamentos, através de probabilidades condicionadas, o famoso Teorema de Bayes. Na escola Bayesiana, a informação que se tem sobre um parâmetro θ , assume diferentes graus de incerteza, representados através de modelos probabilísticos para θ . Nesse método, tanto os dados como os parâmetros do modelo para os dados são variáveis aleatórias. Na escola clássica os parâmetros são fixos e os dados aleatórios [Paulino e Turkman, 2003].

A base da ideologia Bayesiana é o teorema de Bayes, descrito em seguida. Sejam A_1, A_2, \dots, A_k , acontecimentos mutuamente exclusivos associados a uma experiência aleatória e que formam uma partição do espaço amostral Ω . Então, para qualquer outro evento não vazio B , $B \subset \Omega$ e para todo $i = 1, 2, \dots, k$, o Teorema de Bayes diz que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^k P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Este teorema pode ter a seguinte interpretação. Antes de se conhecer qualquer informação sobre o acontecimento A_i , atribui-se uma probabilidade *a priori* a esse acontecimento, dada por $P(A_i)$, e atualiza-se essa probabilidade a partir da ocorrência de um acontecimento B . Essa probabilidade atualizada, $P(A_i|B)$, é dada pelo Teorema de Bayes.

Considere-se agora que se tem interesse numa quantidade θ , unidimensional ou multidimensional, que representa os parâmetros de uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória T que foi observada de maneira a se obter uma amostra de observações (t_1, t_2, \dots, t_n) , sendo a informação amostral representada por $p(t|\theta)$. Por exemplo, $\theta = (\beta, \eta)$ – parâmetros da distribuição de Weibull. Admita-se ainda que a informação que se dispõem sobre θ é probabilisticamente representada por $p(\theta)$. Observando-se $T_i = t_i$ a quantidade de informação sobre θ aumenta, sendo o Teorema de Bayes usado para medir esse aumento de informação [Paulino e Turkman (2003)]. Assumindo o caso de valores discretos para θ , a distribuição *a posteriori* de θ , é dada por:

$$p(\theta_i|\mathbf{t}) = \frac{p(\mathbf{t}|\theta_i)p(\theta_i)}{\sum_{i=1}^k p(\mathbf{t}|\theta_i)p(\theta_i)}$$

Para um valor fixo de t_i , $p(\mathbf{t}|\theta) = L(\theta; t_i)$. A distribuição *a priori* e a verossimilhança são combinadas para obter a distribuição *a posteriori* de θ .

Quando não se tem grande conhecimento inicial sobre θ são consideradas distribuições *a priori* não informativas. Mais detalhes sobre distribuições *a priori* podem ser obtidas em [Paulino e Turkman (2003)].

É frequente que a distribuição marginal *a posteriori* não tenha forma fechada, pelo que nestes casos é necessário recorrer a métodos de simulação computacional, como o método de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC), para realizar inferências baseadas nessa distribuição analítica da distribuição marginal. Não se apresentam aqui detalhes sobre métodos MCMC (uma descrição detalhada por der encontrada em [Paulino (2003)], referindo-se apenas que é necessário verificar a estacionaridade e a convergência das cadeias de Markov para que se possam considerar os resultados deste método de forma credível. A análise da convergência e da estacionaridade do processo pode ser feita por técnicas gráficas e por métodos estatísticos [Gelman e Rubin (1992)]. Neste trabalho consideram-se apenas métodos gráficos.

Para terminar, apresenta-se o conceito de Intervalo de Credibilidade (*IC*). Como na escola Bayesiana toda informação que se tem sobre um parâmetro θ é explicada por meio de sua distribuição *a posteriori*, é possível, a partir dessa distribuição estimar

algumas medidas descritivas do parâmetro θ , como média, mediana e moda a *posteriori*. Dessa forma, toda a informação sobre o parâmetro ficaria restrita a uma estimação pontual. Torna-se então necessário utilizar uma medida de precisão de tais estimativas. Para isso, utiliza-se o conceito de intervalo de credibilidade que permite medir a precisão com que estes valores foram estimados. O intervalo de credibilidade (IC) de $100 \times (1 - \alpha)\%$ é definido como, um intervalo $IC = [LI, LS]$ é um IC para θ se $P(\theta \in IC) \geq p$, sendo p uma probabilidade [Paulino e Turkman (2003)].

3.3 ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER

O que se mostrou até agora, está relacionado a uma modelação paramétrica do tempo de vida de um elemento. No entanto, na prática, nem sempre é possível modelar este tempo parametricamente, sendo a modelação não paramétrica fulcral nessas situações. Para estimar a função de fiabilidade pode ser utilizado um estimador não-paramétrico chamado de limite-produto ou Kaplan-Meier. Esse estimador é uma adaptação da função de fiabilidade empírica, que na ausência de censuras é definida como [Goel, Khanna e Kishore (2010), Bewick, Cheek e Ball (2004)]:

$$\hat{R}(t) = \frac{\text{número de itens em operação até o tempo } t}{\text{número total de itens em teste}}.$$

O estimador de Kaplan-Meier de $R(t)$ é definido como sendo 1, para $0 \leq t < t_1$ e para $t > t_1$ é definido pela expressão seguinte:

$$\hat{R}(t) = \left(\frac{n_1 - d_1}{n_1}\right) \left(\frac{n_2 - d_2}{n_2}\right) \dots \left(\frac{n_j - d_j}{n_j}\right),$$

onde t_j o maior tempo de falha menor que t , d_j é número falhas no tempo t_j e n_j é o número de itens em risco no tempo t_j (não falhou e não foi censurado antes de t_j). Sendo $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

A última parte desta revisão teórica diz respeito a testes acelerados de vida. Introduz-se a definição de teste acelerado e apresentam-se algumas leis físico-estatísticas usadas para extrapolar a informação obtida em condições aceleradas para as condições de uso normal.

3.4 ENSAIOS DE VIDA ACELERADOS

Os testes acelerados de vida são realizados com o objetivo de estimar determinados indicadores de fiabilidade referentes a um determinado elemento. Por meio da utilização dos testes acelerados de vida e dos modelos físico-estatísticos de extrapolação de dados é possível prever a ocorrência de falha em condições normais, o que permite um papel mais proativo das empresas, já que o conhecimento de indicadores de fiabilidade permite que sejam feitas alterações nos projetos em desenvolvimento antes do produto ser disponibilizados no mercado [Fogliatto (2011), Oliveira (2012)].

O principal objetivo dos testes acelerados de vida é obter de forma mais rápida o tempo de ocorrência de falhas do elemento, utilizando para isso níveis de solicitação mais elevados dos considerados normais, ou seja, a sua utilização em condições de serviço mais severas do que as encontradas em condições normais de operação. Essas condições aceleradas não podem de modo algum modificar os modos de falha associados ao elemento em estudo, sob pena de inviabilizar toda a análise do mesmo.

A extrapolação da informação obtida sob condições aceleradas para condições normais de uso é, frequentemente, feita via modelos físico-estatísticos. Dos vários modelos descritos na literatura, sendo os mais populares o modelo de Arrhenius, o modelo Lei Potência Inversa e o modelo de Eyring.

A escolha do modelo a considerar depende da natureza da variável de *stress*. Na prática, quando essa variável é a voltagem é habitual considerar-se o modelo Lei de Potência Inversa, já o modelo de Arrhenius é considerado quando a variável de *stress* é, por exemplo, a temperatura e o modelo de Eyring é aplicado em cenários em que a variável de aceleração é o campo magnético ou a temperatura.

Com foi já referido no Capítulo 1, a relação *stress*-resposta é uma relação determinística, ou seja, para um dado nível da variável de *stress*, obtém-se um único valor para o tempo até à falha. Contudo, considerando apenas uma relação determinística não é possível explicar a variabilidade observada em cada nível da variável *stress*. Importa assim acrescentar, ao componente determinístico, um componente probabilístico que seja capaz de explicar a variabilidade dos tempos de falha num determinado nível da variável de *stress*. Para dar resposta a este problema considera-se que, em cada nível da variável *stress*, os tempos de falha são modelados por uma distribuição de probabilidade adequada, sendo a componente probabilística do modelo descrito por essa distribuição. A combinação de um modelo físico com um modelo probabilístico tem a designação de paramétrico de aceleração.

No âmbito deste trabalho destacamos a combinação Lei Potência Inversa com a distribuição de Weibull por ser a combinação de alta aplicação prática. Considerando

as devidas adaptações, a partir desta combinação, a compreensão de outras combinações é um problema quase trivial.

3.4.1 LEI POTÊNCIA INVERSA

O modelo Lei potência Inversa é usado na modelação do tempo até à ocorrência de falha de um elemento em função do fator de *stress*. Aqui considera-se o caso em que os níveis de aceleração são constantes (não variam com o tempo de teste). Nesta dissertação será usado o fator de *stress* voltagem [Kececioglu (1991), Fogliatto (2011)].

A Lei Potência Inversa é dada pela expressão:

$$L(V) = \frac{1}{K \cdot V^m},$$

onde L representa uma medida do tempo de vida, como por exemplo, a vida média, a vida mediana, a vida característica, etc.... V representa o nível da variável de *stress*, $K (> 0)$ e $m (> 0)$ são parâmetros do modelo, característicos do componente sob teste e do tipo de teste executado. Esta parâmetros são estimados a partir dos dados observados.

Na prática, é habitual considerar $L(V) = \eta(V)$, ou seja, é habitual modelar a vida característica do elemento.

Admita-se agora que a distribuição de Weibull modela adequadamente os tempos de vida em cada nível do fator de *stress*. A função densidade de probabilidade é, então, função do tempo de falha e de outra variável de aceleração (V). Essa função é ainda afetada pelo parâmetro de forma β :

$$f(t; V) = \frac{\beta}{\eta(V)} \left[\frac{t}{\eta(V)} \right]^{\beta-1} e^{-\left[\frac{t}{\eta(V)} \right]^\beta}, \quad t \geq 0.$$

A expressão que permite o cálculo da fiabilidade do componente é expressa por

$$R(t; V) = e^{-\left[\frac{t}{\eta(V)} \right]^\beta}.$$

O tempo médio até à falha, o tempo mediano e a variância são dados, respectivamente, por

$$MMTF(T) = \eta(V) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

$$F^{-1}(0.5) = t_{0.5} = \eta(V)[- \ln(0.5)]^{\frac{1}{\beta}},$$
$$V(T) = \eta(V) \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\},$$

onde $\Gamma(\cdot)$ representa a função gama que é parametrizada por $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$.

ESTUDO DE SIMULÇÃO

4.1 ESTUDO DE SIMULÇÃO

4.2 DADOS REAIS

4.2.1 SOBRE OS DADOS

4.2.2 MODELAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA

4.2.3 AJUSTE DO MODELO LEI POTÊNCIA INVERSA – WEIBULL

4 APLICAÇÕES

No capítulo anterior foram definidos conceitos teóricos relacionados com os temas considerados para o desenvolvimento do trabalho apresentado nesta dissertação. Nesse capítulo serão apresentados os resultados da aplicação dos métodos estudados a dados simulados e a dados reais publicados na literatura. A apresentação dos resultados divide-se em duas partes: a primeira parte mostra os resultados do estudo de simulação que pretendeu comparar dos 3 métodos de estimação de parâmetros da distribuição de Weibull; a segunda parte apresenta os resultados de aplicação do modelo Lei de Potência Inversa-Weibull para obter indicadores de fiabilidade de interesse, como o MTTF, o tempo mediano e a variância, em condições de uso normais a partir de tempos de vida obtidos via ensaios acelerados de vida.

O trabalho computacional necessário neste trabalho foi, essencialmente, desenvolvido com a linguagem R, encontrando-se no último capítulo deste documento uma compilação do código desenvolvido.

4.1 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Para um melhor conhecimento sobre o desempenho de cada um dos métodos de estimação apresentados, foi levado a cabo um pequeno estudo de simulação com três cenários. Em todos os cenários foi considerada uma amostra proveniente de uma distribuição de Weibull com dois parâmetros.

Cenário 1:

Simulou-se uma amostra de tamanho 10 a partir de uma distribuição de Weibull com o parâmetro de forma igual a 3 e o parâmetro de escala igual a 1000 u.t.

Cenário 2:

Simulou-se uma amostra de tamanho 30 a partir de uma distribuição de Weibull com o parâmetro de forma igual a 3 e o parâmetro de escala igual a 1000 u.t.

Cenário 3:

Simulou-se uma amostra de tamanho 100 a partir de uma distribuição de Weibull com o parâmetro de forma igual a 3 e o parâmetro de escala igual a 1000 u.t.

Para o método dos com os MMQ (MÉTODO 1) implementou-se o procedimento de linearização exposto no capítulo anterior e usou-se a função do R `lm` para ajustar o

modelo linear. Para a estimação dos dois parâmetros da distribuição de Weibull através do método de máxima verossimilhança (MÉTODO 3) considerou-se a função `survreg` disponível na biblioteca `survival` do R. Já para o método Bayesiano (MÉTODO 3) considerou-se como estimativa dos dois parâmetros de interesse a média da distribuição *a posteriori* de cada um desses parâmetros. Nesta abordagem foi considerada a biblioteca do R `rstan` que inclui um conjunto de função que implementa inferência estatística Bayesiana completa via MCMC. O modelo proposto e implementado nesta abordagem foi:

$$T_i \sim \text{Weibull}(\beta, \eta), i = 1, \dots, n,$$

$$\beta \sim \text{Lognormal}(a, b),$$

$$\eta \sim \text{Normal}(c, d).$$

Os parâmetros das distribuições *a priori* (os chamados hiperparâmetros) foram especificados de maneira a se obterem distribuições vagas⁵.

A Tabela 1 mostra os resultados do estudo de simulação executados.

Tabela 1: Resultados do Estudo de Simulação

	Real	Cenário 1 ($n = 10$)	Cenário 2 ($n = 30$)	Cenário 3 ($n = 100$)
MÉTODO 1	$\beta = 3$ $\eta = 1000$	$\hat{\beta} = 2.90$ $\hat{\eta} = 1118,67$	$\hat{\beta} = 1.81$ $\hat{\eta} = 902.29$	$\hat{\beta} = 2.25$ $\hat{\eta} = 955.7$
MÉTODO 2	$\beta = 3$ $\eta = 1000$	$\hat{\beta} = 2.23$ $\hat{\eta} = 901.05$	$\hat{\beta} = 2.07$ $\hat{\eta} = 892.44$	$\hat{\beta} = 2.08$ $\hat{\eta} = 892.45$
MÉTODO 3	$\beta = 3$ $\eta = 1000$	$\hat{\beta} = 3.93$ $\hat{\eta} = 1001.25$	$\hat{\beta} = 2.11$ $\hat{\eta} = 998.68$	$\hat{\beta} = 2.72$ $\hat{\eta} = 996.04$

Como se pode constatar na Tabela 1, o método Bayesiano (MÉTODO 3) é o que apresenta o melhor desempenho entre 3 métodos investigados. No que respeita ao parâmetro de escala, o MÉTODO 3 forneceu estimativas sempre muito próximas do valor real. Para o parâmetro de forma, parece que em pequenas amostras o MÉTODO

⁵ Usadas quando se espera que a informação dos dados seja dominante. Obtém-se uma distribuição considerando um valor elevado para o hiperparâmetro correspondente à variabilidade da distribuição.

3 não fornece boas estimativas, sendo o melhor valor obtido com o MÉTODO 1. O MÉTODO 2 fornece estimativas um pouco afastadas do valor real e parece não sofrer influência do tamanho da amostra. Já para o MÉTODO 3, as estimativas parecem melhorar com o aumento do valor da amostra.

Como foi referido no capítulo anterior (secção do método de estimação Bayesiano), as estimativas bayesianas são apenas válidas caso haja convergência e estacionaridade dos valores simulados. As Figuras 6, 7 e 8 mostram os traços (gráfico dos valores simulados *versus* número de simulação) obtidos para os 3 cenários considerados. Foram consideradas 30000 simulações e um período de aquecimento de 10000.

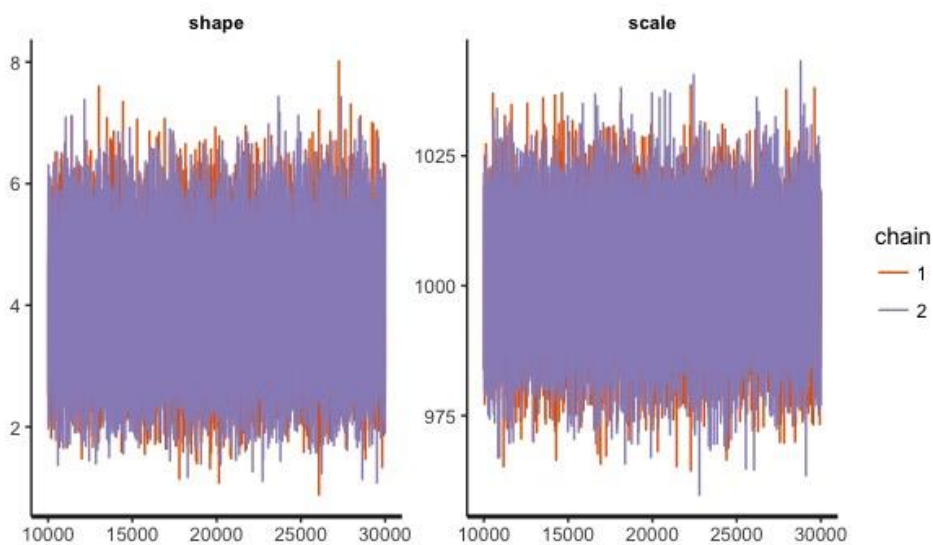


Figura 6: Traço dos valores simulados para o cenário 1

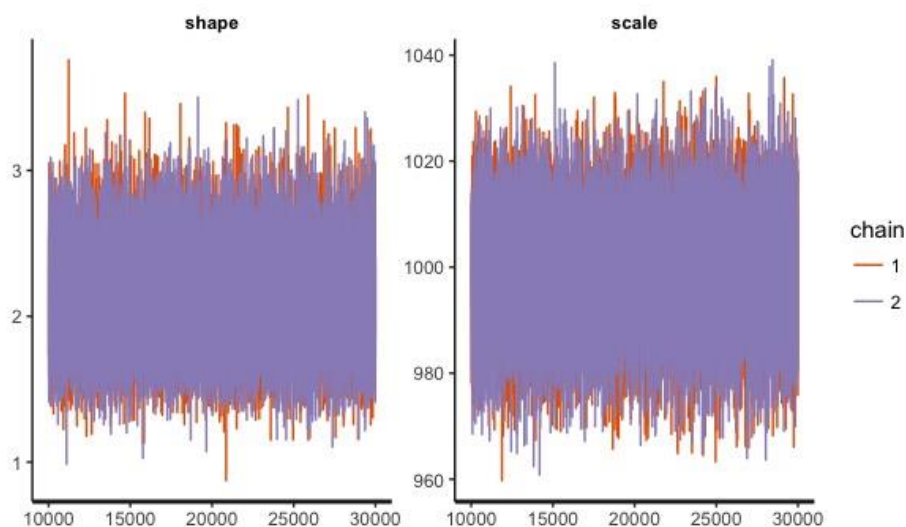


Figura 7: Traço dos valores simulados para o cenário 2

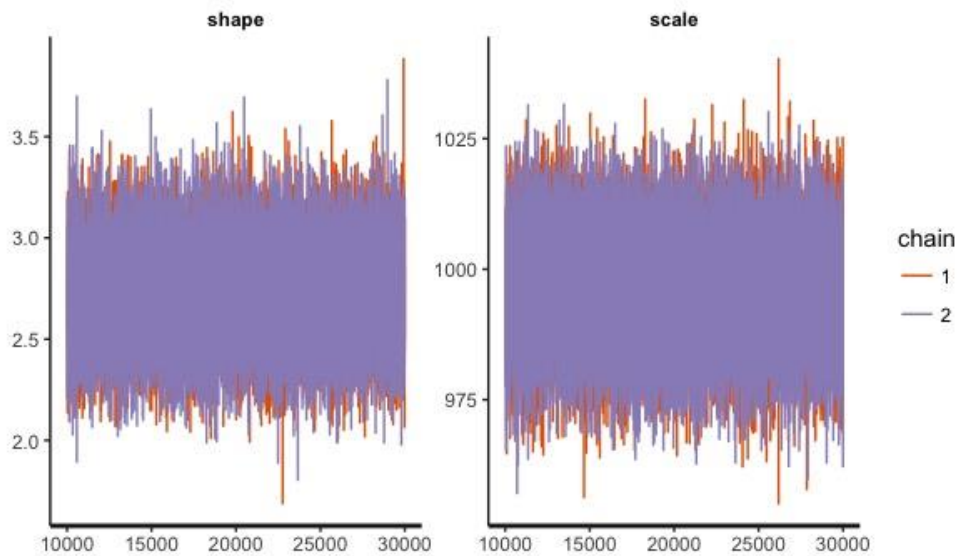


Figura 8: Traço dos valores simulados para o cenário 3

Pela observação das Figuras 6, 7 e 8, pode-se dizer que parece haver existido convergência e estacionariedade dos valores simulados (parece não existir tendência e os valores distribuem-se em torno de mesmo valor médio).

4.2 DADOS REAIS

Apresentam-se agora os resultados da aplicação das metodologias estudadas a um conjunto de dados reais publicados, por Hirose, H. em 1993 [Hirose (1993)]. Neste trabalho, o autor apresenta um método que considera dados de testes de vida acelerados para estimar de limiar (*threshold*) abaixo do qual é improvável que ocorra uma falha. Aqui os mesmos dados vão ser usados para obter indicadores de fiabilidade em condições de uso normal.

4.2.1 SOBRE OS DADOS

Os dados dizem respeito a 44 amostras de filme de poliéster usado para isolar transformadores. Estas amostras foram sujeitas a diferentes níveis de tensão de maneira a acelerar a ocorrência da sua falha. Aqui os níveis do fator de stress são: 5, 7, 10 e 15kV. A duração do teste foi de 9104.25 horas.

O filme de Poliéster é um isolante elétrico flexível e apresenta boas propriedades de isolamento térmico e elétrico. Além disso, apresenta uma elevada resistência mecânica com grande estabilidade dimensional e durabilidade, baixa absorção de água e boa resistência química [Anelk]. Quando um isolante é submetido a uma tensão elevada, a corrente de fuga toma uma importância cada vez maior. Pois, acima de um certo valor, é produzida uma faísca ou um arco elétrico e, com isso, o isolante é danificado. Por isso, é importante que a tensão nunca atinja o valor crítico que destrua o isolante.

Os dados estudados, que correspondem ao tempo até à falha, em horas, são apresentados na Tabela 2. Note-se que para o nível 5kV tem-se informação censurada, uma vez que 3 dos itens testados não falharam antes do teste terminar.

Tabela 2: Tempos até à falha, em horas

5kV	7kV	10kV	15kV
7131.00	50.25	15.17	2.40
8482.00	87.75	19.87	2.42
8559.00	87.76	20.18	3.17
8762.00	87.77	21.50	3.75
9026.00	92.90	21.88	4.65
9034.00	92.91	22.23	4.95
9104.00	95.96	23.02	6.23
9104.25+	108.30	23.90	6.68
9104.25+	108.30	28.17	7.30
9104.25+	117.90	29.70	
	123.90		
	124.30		
	129.70		
	135.60		
	135.60		

4.2.2 MODELAÇÃO NÃO PARAMÉTRICA

Iniciou-se a estudo com uma modelação não paramétrica da função de fiabilidade, de forma a obter-se uma apreciação preliminar e rápida do comportamento dos tempos de falha. Nesta modelação, foram considerados o estimador de Kaplan-Meier

apresentado anteriormente. A Figura 9, ilustra, para cada nível do fator *stress* considerado, a estimativa de Kaplan-Meier da função de fiabilidade. A linha sólida representa a estimativa de $R(t)$, sendo essa a probabilidade de sobrevivência da amostra, e as linhas a tracejado representam os limites do intervalo de confiança ($LI_{l.c}$ e $LS_{l.c}$) a 95% para $R(t)$. Os resultados desta análise são também apresentados, sob forma de tabela que mostra, para cada tempo observado, a estimativa da probabilidade de sobrevivência, o erro padrão em relação ao $R(t)$ e o intervalo de confiança a 95% para a probabilidade de sobrevivência. Essas tabelas são apresentadas após a Figura 9 (Tabela 3, Tabela 4, Tabela 5 e Tabela 6).

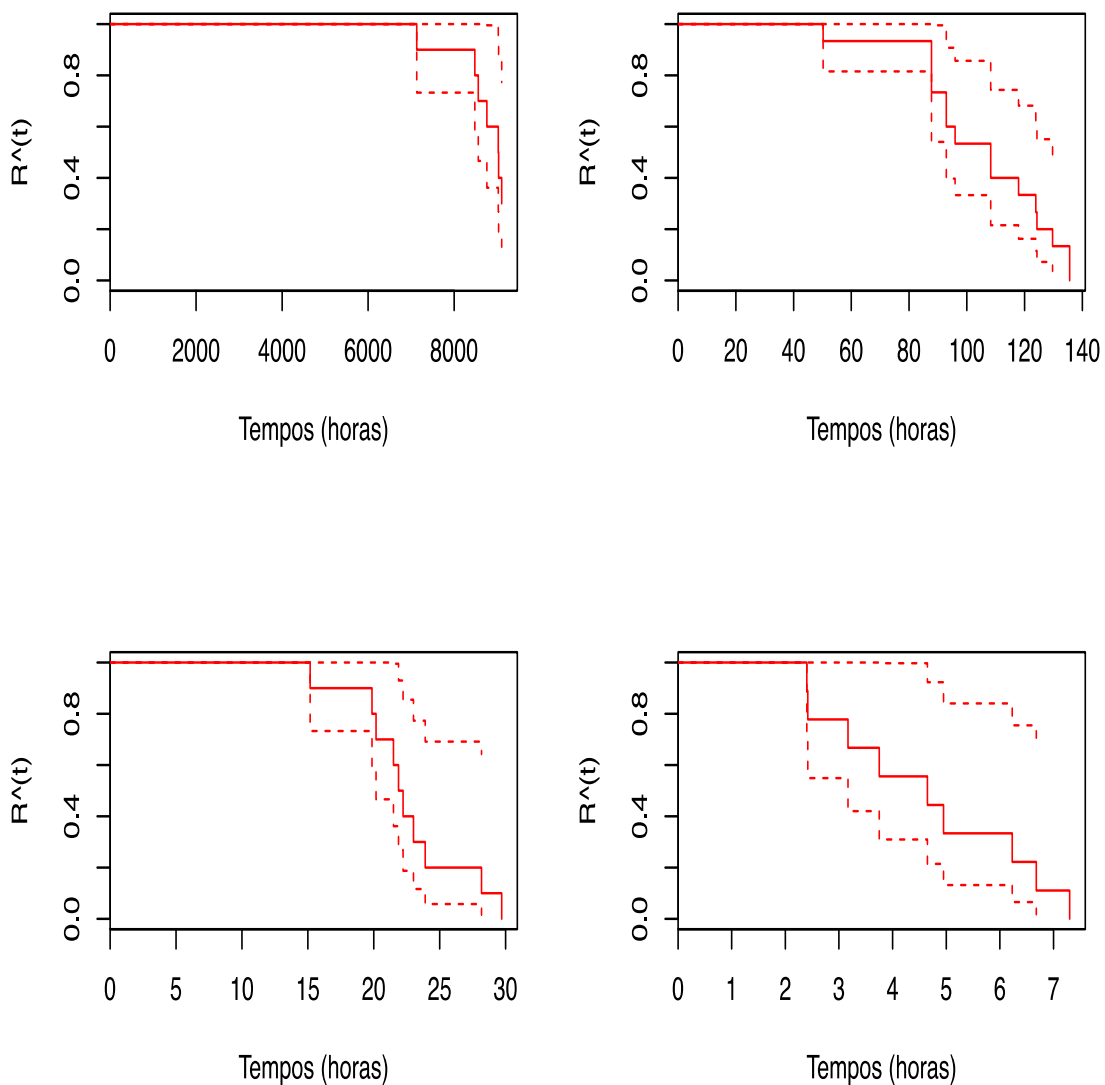


Figura 9: Gráfico da estimativa Kaplan-Meier da função de fiabilidade

Tensão de 5 kV

Tabela 3: Dados da análise Kaplan-Meier para 5 kV.

t_i	$\hat{R}(t_i)$	Erro padrão	$LI_{IC(95\%)}$	$LS_{IC(95\%)}$
7131	0.9	0.0949	0.732	1.000
8482	0.8	0.1265	0.587	1.000
8559	0.7	0.1449	0.467	1.000
8762	0.6	0.1549	0.362	0.995
9026	0.5	0.1581	0.269	0.929
9034	0.4	0.1549	0.187	0.855
9104	0.3	0.1449	0.116	0.773

Tensão de 7 kV

Tabela 4: Dados da análise Kaplan-Meier para 7 kV.

t_i	$\hat{R}(t_i)$	Erro padrão	$LI_{IC(95\%)}$	$LS_{IC(95\%)}$
50.20	0.933	0.0644	0.8153	1.000
87.75	0.867	0.0878	0.7106	1.000
87.76	0.800	0.1033	0.6212	1.000
87.77	0.733	0.1142	0.5405	0.995
92.90	0.667	0.1217	0.4661	0.953
92.91	0.600	0.1265	0.3969	0.907
96.00	0.533	0.1288	0.3322	0.856
108.30	0.400	0.1265	0.2152	0.743
117.90	0.333	0.1217	0.1630	0.682
123.90	0.267	0.1142	0.1152	0.617
124.30	0.200	0.1033	0.0727	0.550
129.70	0.133	0.0878	0.0367	0.484

Tensão de 10 kV

Tabela 5: Dados da análise Kaplan-Meier para 10 kV.

t_i	$\hat{R}(t_i)$	Erro padrão	$LI_{IC(95\%)}$	$LS_{IC(95\%)}$
15.2	0.9	0.0949	0.7320	1.000
19.9	0.8	0.1265	0.5868	1.000
20.2	0.7	0.1449	0.4665	1.000
21.5	0.6	0.1549	0.3617	0.995
21.9	0.5	0.1581	0.2690	0.929
22.2	0.4	0.1549	0.1872	0.855
23.0	0.3	0.1449	0.1164	0.773
23.9	0.2	0.1265	0.0579	0.691
28.2	0.1	0.0949	0.0156	0.642

Tensão de 15 kV

Tabela 6: Dados da análise Kaplan-Meier para 15 kV.

Tempo	% de sobrevivência	Desvio padrão	I.C<95%	I.C>95%
2.40	0.889	0.105	0.7056	1.000
2.42	0.778	0.139	0.5485	1.000
3.17	0.667	0.157	0.4200	1.000
3.75	0.556	0.166	0.3097	0.997
4.65	0.444	0.166	0.2141	0.923
4.95	0.333	0.157	0.1323	0.840
6.23	0.222	0.139	0.0655	0.754
6.68	0.111	0.105	0.0175	0.705

Considerando a Figura 9 e as Tabelas 3, 4, 5 e 6, pode-se constatar que existe uma grande diferença entre os tempos de falha nos diferentes níveis de aceleração. Por exemplo, para o caso dos 5kV, estima-se que exista sobrevivência total até às 7131 horas, já para o caso dos 7 kV, existe sobrevivência total apenas até às 50.2 horas. No caso 10kV e 15kV, prevê-se que existe sobrevivência total apenas até às 15.2 horas e até às 2.4 horas, respectivamente. Para além destas conclusões, pode ainda referir-se que, aparentemente, a forma como se distribuem os tempos de falha difere entre os níveis do fator de *stress*, o que a verificar-se terá impacto na forma como se estima o modelo Lei Potência Inversa – Weibull. É sabido que a extrapolação de informação para condições normais de uso a partir desse modelo, pressupõe que, em todos os níveis do fator, o parâmetro de forma da distribuição de Weibull assume o mesmo valor. Já o valor do parâmetro de localização pode variar com o nível da variável de *stress*.

4.2.3 AJUSTE DO MODELO LEI POTÊNCIA INVERSA – WEIBULL

No ajuste do modelo Lei de Potência Inversa – Weibull (LPI-W) executou-se um procedimento desenvolvido com esse propósito e apresentado em seguida.

Procedimento para ajustar o modelo LPI-W

1. Verificar se o modelo de Weibull é adequado aos dados;
2. Caso seja, estimar dos parâmetros da distribuição de Weibull em cada nível do fator *stress*;
3. Verificar se o pressuposto de igualdade de valores de parâmetro de forma em todos os níveis é verificado;

- a. Caso seja verificado, considerar o procedimento apresentado na última secção do capítulo anterior.
- b. Caso o pressuposto não seja verificado:
 - i. Obter uma aproximação para o valor comum do parâmetro de forma;
 - ii. Ajustar os valores dos parâmetros de escala em cada nível do fator;
 - iii. Finalmente, considerar o procedimento apresentado na última secção do capítulo anterior.

Como referido, o primeiro passo do procedimento de ajuste LPI-W, passa pela verificação da adequabilidade do modelo Weibull aos tempos de falha para cada nível de tensão. Nesta análise foi usado o teste de Anderson-Darling [Stephens (1977)], tendo-se concluído que a distribuição de Weibull é adequada para a modelação dos tempos de falha.

O passo seguinte do procedimento contempla a estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull. Embora pareça, pelo estudo de simulação considerado na secção anterior, que MB é o que tem melhor desempenho na estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull, em comparação com o MMQ e o MMV, este método não foi considerado na análise cujos resultados se apresentam de seguida pelo facto de não acomodar o caso dos dados censurados. Assim, foram executados os 2 outros procedimentos de estimação estudados tendo-se obtido os seguintes resultados:

Tabela 7: Estimação de Parâmetros

Tensão (kV)	MÉTODO 1 MMQ	MÉTODO 2 MMV
05	$\hat{\beta} = 10.25$ $\hat{\eta} = 9452.48$	$\hat{\beta} = 19.53$ $\hat{\eta} = 9086.33$
07	$\hat{\beta} = 4.28$ $\hat{\eta} = 116.08$	$\hat{\beta} = 5.65$ $\hat{\eta} = 114.06$
10	$\hat{\beta} = 5.73$ $\hat{\eta} = 24.34$	$\hat{\beta} = 6.19$ $\hat{\eta} = 24.22$
15	$\hat{\beta} = 2.54$ $\hat{\eta} = 5.25$	$\hat{\beta} = 2.99$ $\hat{\eta} = 5.19$

Pela observação da Tabela 7, é possível notar que para o nível de tensão de 5 kV existe diferença numérica entre as estimativas dos parâmetros de forma e escala obtidas pelos 2 métodos de estimação é bem elevada. Esta diferença é maior parâmetro forma

β . Esta diferença pode ser justificada com o facto de, no nível de tensão de 5 kV, a informação é censurada. Contudo, para os próximos níveis de tensão a diferença diminui, sendo os resultados relativamente próximos.

Tendo em consideração os valores das estimativas obtidas para o parâmetro de forma nos diferentes níveis, é fácil constatar a existência de diferença de valores, pelo que é necessário considerar soluções para este problema. De acordo com a literatura a solução mais utilizada é considerar como estimativa do parâmetro de forma global a média ponderada, ao número de observações em cada nível, das estimativas obtidas para o parâmetro de forma em cada nível de tensão, matematicamente escrevendo,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^k n_k \hat{\beta}_k}{\sum_{i=1}^k n_k},$$

onde k representa o número de níveis do fator e n_k o número de itens testados em cada nível.

Nos casos em que os valores das estimativas dos diferentes parâmetros de forma assumem valores muito dispare (como o caso de estudo, 3 valores próximos e um muito afastado da maioria), a média pode não ser a melhor solução pelo que se propõem, neste trabalho, uma solução baseada na mediana: $\hat{\beta}$ é obtido pela mediana da amostra

$$\underbrace{\hat{\beta}_1 \cdots \hat{\beta}_1}_{n_1 \text{ vezes}} \quad \dots \quad \underbrace{\hat{\beta}_k \cdots \hat{\beta}_k}_{n_k \text{ vezes}}$$

Os resultados destas duas soluções, são apresentados em seguida.

Tabela 8: Valores combinados para $\hat{\beta}$

Tensão (kV)	MÉTODO 1 MMQ	MÉTODO 2 MMV
05	$\hat{\beta} = 10.25$	$\hat{\beta} = 19.53$
07	$\hat{\beta} = 4.28$	$\hat{\beta} = 5.65$
10	$\hat{\beta} = 5.73$	$\hat{\beta} = 6.19$
15	$\hat{\beta} = 2.54$	$\hat{\beta} = 2.99$
Média	$\hat{\beta} = 10.25$	$\hat{\beta} = 13.12$
Mediana	$\hat{\beta} = 4.28$	$\hat{\beta} = 5.65$

Considerando os valores combinados é agora necessário ajustar os valores os parâmetros de localização a esta nova informação. Para efeito, considerou-se que a seguinte expressão deduzida anteriormente:

$$\hat{\eta}_k = \exp \left[\overline{\ln(t_k)} - \frac{\overline{\ln(-\ln(1 - \hat{F}_k))}}{\hat{\beta}} \right].$$

A Tabela 9 mostra os novos valores do parâmetro de escala que foi ajustado ao valor do parâmetro de forma combinado. São mostrados resultados para os 2 métodos de estimação e para as duas soluções apresentadas para a obtenção do parâmetro de forma combinado. Para cada nível de tensão e para cada método de estimação, o primeiro valor $\hat{\eta}$ mostrado corresponde ao valor de $\hat{\beta}$ combinado médio e o segundo ao valor de $\hat{\beta}$ combinado mediano.

Os novos valores do parâmetro de escala são maiores nos casos resultantes da aplicação do β combinado mediano. Este resultado era o esperado, pois neste caso, a regra baseada na mediana conduz a valores de β combinado menores do que o método baseado na média.

Tabela 9: Valores ajustados de $\hat{\eta}$

Tensão (kV)	MÉTODO 1	MÉTODO 2
	MMQ	MMV
05	$\hat{\eta} = 9176.27 \hat{\eta} = 9853.31$	$\hat{\eta} = 9074.39 \hat{\eta} = 9565.58$
07	$\hat{\eta} = 107.91 \hat{\eta} = 116.09$	$\hat{\eta} = 106.68 \hat{\eta} = 112.61$
10	$\hat{\eta} = 23.38 \hat{\eta} = 25.10$	$\hat{\eta} = 23.12 \hat{\eta} = 24.37$
15	$\hat{\eta} = 4.50 \hat{\eta} = 4.83$	$\hat{\eta} = 4.45 \hat{\eta} = 4.69$

Dispondo de estimativas dos valores dos parâmetros de localização em cada nível e o valor do parâmetro de forma global, é agora altura de estimar os parâmetros do modelo LPI-Weibull. Recorreu-se, mais uma vez a um modelo de regressão linear para estimar estes parâmetros desconhecidos, conforme se mostra em seguida. Partindo de uma linearização do modelo Lei Potência Inversa

$$\eta(V) = \frac{1}{KV,m} \Leftrightarrow \ln[\eta(V)] = -m \ln(KV) \Leftrightarrow \ln[\eta(V)] = -m \ln(K) - m \ln(V).$$

Considerando $\ln[\eta(V)] = y$, $-m \ln(K) = a$, $-m = b$ e $\ln(V) = x$ a expressão anterior pode ser escrita como $y = a + bx$.

Posto isto, considerando a informação já obtida, e aplicado o método dos mínimos quadrados para obter estimativas dos parâmetros a e b e, por fim, aplicando as

transformações inversas adequadas, obtêm-se as seguintes estimativas para os parâmetros do modelo Lei Potência Inversa (Tabela 10):

Tabela 10: Estimativas dos parâmetros do modelo Lei Potência Inversa.

	MÉTODO 1 MMQ	MÉTODO 2 MMV
$\hat{\beta}$ médio	$\hat{K} = 7.20e-09 \mid \hat{m} = 6.60$	$\hat{K} = 7.29e-09 \mid \hat{m} = 6.59$
$\hat{\beta}$ mediano	$\hat{K} = 6.69e-09 \mid \hat{m} = 6.61$	$\hat{K} = 6.90e-09 \mid \hat{m} = 6.60$

Como se pode observar na Tabela 10, as estimativas dos parâmetros do modelo Lei Potência Inversa assumem valores muito próximos em todos os cenários.

Finalmente, estão reunidas as informações necessárias para obter os indicadores de fiabilidade de interesse. A Tabela 11, mostra, para dois métodos de estimação e para as duas soluções de aproximação da estimativa do parâmetro de forma global, o MTTF (em horas), o desvio padrão e o tempo mediano até à falha (em horas) para os 4 níveis de tensão considerados e para uma tensão de 4kV, que se admitiu ser o nível correspondente às condições de uso normais.

Considerando a informação mostrada na Tabela 11, para o cenário do método de estimação MMQ combinado com um $\hat{\beta}$ global médio, pode dizer-se que, em condições de uso normais, se estima que, em média, o filme de poliéster só falha depois das 14054.44 horas de utilização e que em 50% dos isolamentos com este tipo de filme têm uma durabilidade superior a 14239.44 horas. Para o cenário do método de estimação MMV combinado com um $\hat{\beta}$ global médio, estima-se que, em média, o filme de poliéster só falha depois das 140667.14 horas de utilização e que em 50% dos isolamentos com este tipo de filme tem uma durabilidade superior a 14251.26 horas, sob condições normais de utilização.

Pode também concluir-se que, para os dois métodos de estimação, as estimativas dos indicadores mostrados assumem sempre um valor mais elevado no caso em que se considera um parâmetro de forma combinado pela mediana. Esta conclusão era a esperada já que no caso da mediana o valor $\hat{\beta}$ global é menor do que o correspondente valor obtido com a média, o que implica que, nos dois casos, a taxa de falhas apresenta um comportamento crescente com o tempo, sendo este comportamento mais vincado no caso da vincado.

Por outro lado, os valores das estimativas obtidas para os tempos médio e mediano, são superiores quando obtidas via MMV. Em geral, o MMV fornece os menores valores do desvio padrão estimado.

Tabela 11: Estimativas de alguns indicadores de fiabilidade

Tensão (KV)	MMQ	MMV
Condições normais de uso (04)	$\widehat{MTTF} = 14054.44 14464.09$ $\hat{t}_{0.5} = 14239.44 14591.31$ $\hat{\sigma} = 13.54 30.27$	$\widehat{MTTF} = 14667.14 14232.36$ $\hat{t}_{0.5} = 142351.26 14426.02$ $\hat{\sigma} = 10.86 23.49$
05	$\widehat{MTTF} = 3222.80 3312.30$ $\hat{t}_{0.5} = 3265.25 3341.43$ $\hat{\sigma} = 6.51 14.49$	$\widehat{MTTF} = 3253.40 3362.59$ $\hat{t}_{0.5} = 3290.87 3408.35$ $\hat{\sigma} = 5.19 11.42$
07	$\widehat{MTTF} = 349.80 358.80$ $\hat{t}_{0.5} = 354.41 361.95$ $\hat{\sigma} = 2.16 4.77$	$\widehat{MTTF} = 353.23 364.85$ $\hat{t}_{0.5} = 357.20 369.65$ $\hat{\sigma} = 1.71 3.76$
10	$\widehat{MTTF} = 33.23 34.01$ $\hat{t}_{0.5} = 33.67 34.31$ $\hat{\sigma} = 0.66 1.47$	$\widehat{MTTF} = 33.54 34.65$ $\hat{t}_{0.5} = 33.93 35.12$ $\hat{\sigma} = 0.53 1.16$
15	$\widehat{MTTF} = 2.29 2.24$ $\hat{t}_{0.5} = 2.32 2.36$ $\hat{\sigma} = 0.17 0.38$	$\widehat{MTTF} = 2.31 2.38$ $\hat{t}_{0.5} = 2.34 2.42$ $\hat{\sigma} = 0.14 0.31$

CONCLUSÕES

5.1 CONCLUSÕES

5.2 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

5 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Esse capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho desenvolvido e apresentado neste relatório. Apresenta ainda as limitações do estudo assim com algumas perspectivas de trabalho futuro.

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho tinha três objetivos principais. O primeiro era a comparação do desempenho de 3 métodos de estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull com dois parâmetros. Os métodos estudados – regressão com o método dos mínimos quadrados, o método de máxima verossimilhança e um método Bayesiano – foram selecionados pela sua popularidade científica e também prática. O segundo era por meio dos métodos para ultrapassar o problema da não verificação do pressuposto de igualdade do valor do parâmetro de forma da distribuição de Weibull no modelo Lei Potência Inversa-Weibull. E por último, o terceiro, era estimar indicadores de fiabilidade de interesse a partir de tempos de falha obtidos em ensaios de vida acelerados. Para atingir esse segundo objetivo, foi desenvolvido um procedimento com várias etapas que envolviam os métodos de estimação de parâmetros referidos na primeira etapa, dois problemas de regressão linear e o recurso a metodologias que permitiram ultrapassar a violação de um pressuposto do modelo considerado para extrapolar a informação obtida em condições aceleradas para as condições de uso normais.

O trabalho foi desenvolvido em 2 fases. Numa primeira etapa, foram estudados 3 métodos de estimação de parâmetros de distribuições de probabilidade e implementado um pequeno estudo de simulação que tinha como objetivo comparar o desempenho dos 3 métodos. Os resultados desta fase foram considerados com *input* da fase II do trabalho. A segunda fase do trabalho incidiu no ajuste de um modelo Físico-Estatístico para extrapolar informação de fiabilidade obtida em condições de *stress* para as condições normais de utilização. Nesta fase foram considerados dados reais publicados na literatura. O modelo considerado para o efeito foi o modelo combinado Lei Potência Inversa de Weibull cujo o ajuste envolveu várias etapas, destacando-se a estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull e os métodos de combinação dos valores dos parâmetros de forma para cada nível do fator *stress*.

As principais conclusões deste estudo foram:

- O estudo de simulação parece indicar uma superioridade do método Bayesiano, relativamente aos outros métodos estudados. O MMV e o MMQ são semelhantes no que respeita ao seu desempenho no contexto estudado.

- Na modelação de dados reais obtidos de ensaios de vida acelerados com fator de aceleração voltagem, os diferentes cenários considerados fornecem resultados próximos para as estimativas dos indicadores de fiabilidade de interesse. Contudo foi possível constatar que, para os dois métodos de estimação, as estimativas dos indicadores assumem sempre um valor mais elevado no caso em que se considera um parâmetro de forma combinado pela mediana. Por outro lado, os valores das estimativas obtidas para os tempos médio e mediano, são superiores quando obtidas via MMV. Em geral, o MMV fornece os menores valores do desvio padrão estimado.
- Em média, o filme de poliéster só falha depois das 14054.44 horas de utilização e que em 50% dos isolamentos com este tipo de filme têm uma durabilidade superior a 14239.44 horas (conclusões obtidas com um dos cenários considerado, sendo as conclusões semelhantes para os outros cenários considerados).

Em suma, se, com base neste estudo, tivéssemos que sugerir um método de estimação dos parâmetros da distribuição de Weibull, seria sugerido o método Bayesiano. No ajustamento do modelo Físico-Estatístico Lei Potência Inversa Weibull, selecionaríamos a mediana para obter o valor combinado do parâmetro de forma do modelo, por esta medida estatística ser mais robusta a valores dispares na amostra.

5.2 PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

Uma das limitações deste estudo prende-se com o pequeno estudo de simulação considerado, pois este foi baseado apenas numa amostra simulada. A utilização de outras amostras mais permitiria obter, certamente, conclusões mais fundamentadas. A elaboração de um estudo de simulação mais alargado, constitui uma perspectiva interessante de trabalho futuro.

Por outro lado, o modelo Bayesiano proposto não contempla o caso de dados censurados pelo que a procura de um modelo Bayesiano mais geral poderá ser também interessante como trabalho futuro.

**BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES
DE INFORMAÇÃO**

6 BIBLIOGRAFIA E OUTRAS FONTES DE INFORMAÇÃO

BARROS FILHO, Adail, **Utilização de Ferramentas de Confiabilidade em um Ambiente de Manufatura de Classe Mundial**, tese de pós-graduação, Unicamp – Faculdade de Engenharia Mecânica, Julho de 2003.

BEWICK, Viv, CHEEK, Liz e BALL, Jonathan, **Statistics review 12: Survival analysis**, Critical Care - **BioMed Central**, 8:389, 2004.

BINOTI, Daniel Henrique Breda, **Uso da Função de Weibull de Três Parâmetros em um Modelo de Distribuição Diamétrica para Plantios de Eucalipto Submetidos a Desbaste**, Revista *Árvore*, vol.34, n.1, pp. 147-156. Disponível em < http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0100-67622010000100016&script=sci_abstract&tlng=pt>, 2010.

DE ALMEIDA, José Renato Monteiro Nascimento, **Metodologia para a análise da confiabilidade de um conjunto de alta criticidade de uma planta siderúrgica integrada**, tese de pós-graduação, Universidade Federal da Paraíba, 2007.

DE MATOS, Paulo Zaleski e MARA, Daianne, **Análise de Confiabilidade Aplicada à Indústria para Estimação de Falhas e Provisionamento de Custos**, monografia de Estatística, UFPR, Curitiba. Disponível em < http://www.coordest.ufpr.br/wp-content/uploads/2011/11/PauloMatos_DaianneMazarotti.pdf> 2010.

DILLENBURG, Marcos Rebello, **Estimativas de Confiabilidade de Produto Apartir das Contagens Mensais de Vendas e Falhas ao Longo do Período de Garantia**, tese de mestrado, UFRGS, Porto Alegre. Disponível em < <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/6130/000481108.pdf?sequence=1>>, 2005.

FOGLIATTO, Flávio Sanson e RIBEIRO, José Luis, **Confiabilidade e Manutenção Industrial**, Elsevier Editora, 2011.

FONSECA, Daniele da Rocha, **O Estimador de Máxima Verossimilhança Utilizado em Testes de Vida Seqüenciais com Truncagem: Uma Aplicação com um Modelo de Weibull de Três Parâmetros**, tese de mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Setembro de 2008.

GELMAN, Andrew, RUBIN, Donald B., **Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences**, Statistical Science, vol. 7, no.4, pp.457-472, novembro de 1992.

GOEL, Manish Kumar, KHANNA, Pardeep e KISHORE, Jugal, **Understanding survival analysis: Kaplan-Meier estimate**, Journal of Ayurveda Research, 1(4) 274-278, outubro – dezembro de 2010.

HIROSE, H., **Estimation of threshold stress in accelerated life-testing**, IEEE Transactions on Reliability 42 (4), 650-657, 1993.

IHAKA, R. e GENTLEMAN, R, **R: A language for data analysis and graphics**, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3):299--314, 1996.

KECECIOGLU, D. B., **Reliability & Life Testing Handbook Vol. 2**, DEStech Publications, Inc. Lancaster, Pennsylvania, U.S.A, 1991.

MATIAS JR, Rivalino, TRIVEDI, Kishor S. e MACIEL, Paulo R., **Using Accelerated Life Tests to Estimate Time to Software Aging Failure**, IEEE 21st International Symposium on Software Reliability Engineering, 2010.

NP EN 13306, **Norma Portuguesa NP EN 13306:2007** – Terminologia da Manutenção, 2007.

OLIVEIRA, Francisco Miguel Chelmik, **Determinação de Dados Fiabilísticos Baseados em Testes Acelerados de Vida**, tese de mestrado, Isel, setembro de 2012.

PAULINO, D., TURKMAN, Amaral M.A., **Estatística Bayesiana**, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2003.

PEREIRA, Felipe José Didelet, **Modelos de Fiabilidade em Equipamentos Mecânicos**, tese de doutorado, Universidade do Porto, 1996.

PERES, Marcos Vinicius de Oliveira, **Aplicações das Distribuições Weibull Modificada e Beta-Weibull na Presença de Frações de Cura sob o Enfoque Frequentista e Bayesiano**, tese de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 2016.

RAMOS, Sandra, **Material Didático**, ISEP, maio de 2017.

R DEVELOPMENT CORE TEAM, **R: A language and environment for statistical computing**, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em < <http://www.R-project.org>>, 2007.

SARAIVA, J.P. Cabral, **Organização e Gestão da Manutenção – dos conceitos à prática**, Edições Lidel, 2006.

STEPHENS, M. A., **Goodness of Fit with Special Reference to Tests for Exponentiality**, Technical Report No. 262, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA, 1977.

SITE **PortalAction**.

Disponível em < <http://www.portalaction.com.br/confiabilidade/431-metodos-graficos> >Acessado em setembro de 2017.

SITE **Anelk**. Disponível em < <http://www.anelk.com.br/filmes.htm> >Acessado em agosto de 2017.

Nelson, W., **Accelerated Life Testing - Step-Stress Models and Data Analyses**. IEEE Transactions on Reliability (2): 103. doi:10.1109/TR.1980.5220742, 1980.

Spencer, F. W, **Statistical Methods in Accelerated Life Testing**. *Technometrics*. 33 (3): 360–362. doi:10.1080/00401706.1991.10484846, 1991.

Wang, Ronghua; Sha, Naijun; Gu, Beiqing; Xu, Xiaoling, **Comparison Analysis of Efficiency for Step-Down and Step-Up Stress Accelerated Life Testing**, IEEE Transactions on Reliability. 61 (2): 590–603. ISSN 0018-9529. doi:10.1109/TR.2012.2182816., 2012.

Lawless, J.F., **Statistical Models and Methods for Lifetime Data**. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1982, 2003.

ANEXOS

7 ANEXOS

Esse anexo corresponde ao código, desenvolvido no *software R*, o qual serviu de base para o desenvolvimento desse trabalho.

Código desenvolvido no *software R*.

```
#####Dados
# hirose
#O filme de PET é usado em isolamento elétrico. Neste teste
de vida acelerada,
#os tempos de falha de 44 amostras de transformadores
isolados a gás.
#Foram utilizados 4 níveis de tensão diferentes.
# Coluna 1 - tensão (KV)
# Coluna 2 - Tempo de falha
# Coluna 3 - Indicador de censura - 1
library(boot)
table(hirose[,1])
indicet5<-hirose[,1]==5
indicet7<-hirose[,1]==7
indicet10<-hirose[,1]==10
indicet15<-hirose[,1]==15

#####
# Para cada valor de tensão
## KM
## Weibull
## Lognormal
##
#####
require(survival)
# Voltagem 5
falhas5<-hirose[indicet5,2]
y5 <-Surv(falhas5, c(rep(1,7), rep(0, 3)))

## Estimação não paramétrica da função de fiabilidade
## estimados de Kaplan-Meier
ys5 = survfit(y5 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys5)
plot(ys5, xlab="Tempos (horas)", ylab="R^(t)",pch=19,
col="red")

ys7 = survfit(y7 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys7)
plot(ys7, xlab="Tempos (horas)", ylab="R^(t)",pch=19,
col="red")
```

```

ys10 = survfit(y10 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys10)
plot(ys10, xlab="Tempos (horas)", ylab="R^(t)", pch=19,
col="red")

ys15 = survfit(y15 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys15)
plot(ys15, xlab="Tempos (horas)", ylab="R^(t)", pch=19,
col="red")

## Estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros da
distribuição Weibull:
# Para o modelo de Weibull  $\log(T) = \log(\eta) +$ 
 $(1/\beta) \cdot \log(E)$ ,
# onde E tem distribuição exponencial de média 1
## eta - vida característica (parâmetro de escala)
## beta - parâmetro de forma
yw5 = survreg(y5 ~ 1, dist="weibull")
summary(yw5)
etaHAT5 <- exp(coefficients(yw5)[1])
betaHAT5 <- 1/yw5$scale
signif(c(eta=etaHAT5, beta=betaHAT5), 6)

##### Média e variância da Weibull
muHAT5 = etaHAT5 * gamma(1 + 1/betaHAT5)
sigmaHAT5 = etaHAT5 * sqrt(gamma(1+2/betaHAT5) -
(gamma(1+1/betaHAT5))^2)
names(muHAT5) = names(sigmaHAT5) = names(betaHAT5) =
names(etaHAT5) = NULL
signif(c(mu=muHAT5, sigma=sigmaHAT5), 6)

##### MMQ - Median rank#####
temposordenados<-sort(falhas5[1:7])
n<-length(temposordenados)
i<-1:7
Fhat<-(i-0.3)/(10+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
plot(x,y)
modelo<-lm(y~x)
beta<-modelo$coefficients[2]
eta<-exp((-
(modelo$coefficients[1])/modelo$coefficients[2]))
print(paste("beta =",beta))
print(paste("eta =",eta))
signif(c(eta=eta, beta=beta), 6)

##### Média e variância
muHAT = eta * gamma(1 + 1/beta)
sigmaHAT = eta * sqrt(gamma(1+2/beta) -
(gamma(1+1/beta))^2)

```

```

names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)
#####

curve(dweibull(x, shape=betaHAT, scale=etaHAT),
      from=0, to=muHAT+6*sigmaHAT, col="blue",
      xlab="Hours", ylab="Probability Density")

#curve(dweibull(x, shape=betamedianHAT, scale=etaHAT),
#      from=0, to=muHAT+6*sigmaHAT, col="blue",
#      xlab="Hours", ylab="Probability Density")

rweibullplot<-function(tempos,beta,eta) {
  r<-exp(-(tempos/etaHAT)^betaHAT)
  return(r)
}

# KM e Weibull
plot(ys5,
      xlab="Tempos (horas)",
      ylab=expression(paste("Probabilidade de sobrevivência: ",
P(T>=t))),pch=19, col="red")
tempos5<-seq(0,max(falhas5),by=10)
points(tempos5,rweibullplot(tempos5,betaHAT,etaHAT),col="blue",type = "l", xlab="Horas")

#####
# voltagem 7
falhas7<-hirose[indicet7,2]
y7 <-Surv(falhas7,rep(1,15))

## Estimação não paramétrica da função de fiabilidade
## estimados de Kaplan-Meier
ys7 = survfit(y7 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys7)
plot(ys7, xlab="Tempos (horas)", ylab="Probabilidade de
sobrevivência",pch=19, col="red")

## Estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros da
distribuição Weibull:
# Para o modelo de Weibull  $\log(T) = \log(\eta) +$ 
 $(1/\beta) \cdot \log(E)$ ,
# onde E tem distribuição exponencial de média 1
## eta - vida característica (parâmetro de escala)
## beta - parâmetro de forma
yw7 = survreg(y7 ~ 1, dist="weibull")
summary(yw7)
etaHAT7 <- exp(coefficients(yw7)[1])
betaHAT7 <- 1/yw7$scale
signif(c(eta=etaHAT7, beta=betaHAT7), 6)

```

```

etaHAT7 <-etaHAT
betaHAT7 <-betaHAT

##### Média e variância da Weibull
muHAT = etaHAT * gamma(1 + 1/betaHAT)
sigmaHAT = etaHAT * sqrt(gamma(1+2/betaHAT) -
(gamma(1+1/betaHAT))^2)
names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)

##### MMQ - Median rank#####
temposordenados<-sort(falhas7)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
plot(x,y)
modelo<-lm(y~x)
beta<-modelo$coefficients[2]
eta<-exp((-
(modelo$coefficients[1])/modelo$coefficients[2]))
print(paste("beta =",beta))
print(paste("eta =",eta))
signif(c(eta=eta, beta=beta), 6)

##### Média e variância
muHAT = eta * gamma(1 + 1/beta)
sigmaHAT = eta * sqrt(gamma(1+2/beta) -
(gamma(1+1/beta))^2)
names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)
#####

rweibullplot<-function(tempos,beta,eta) {
  r<-exp(-((tempos/etaHAT)^betaHAT))
  return(r)
}

# KM e Weibull
plot(ys7,xlab="Tempos (horas)",
ylab=expression(paste("Probabilidade de sobrevivência: ",
P(T>=t))),pch=19, col="red")
tempos7<-seq(0,max(falhas7),by=5)
points(tempos7,rweibullplot(tempos7,betaHAT,etaHAT),col="blue",type = "l", xlab="Horas")

#####
#####
# voltagem 10

```

```

falhas10<-hirose[indicet10,2]
y10 <-Surv(falhas10,rep(1,10))

## Estimação não paramétrica da função de fiabilidade
## estimados de Kaplan-Meier
ys10 = survfit(y10 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys10)
plot(ys10, xlab="Tempos (horas)", ylab="Probabilidade de
sobrevivência",pch=19, col="red")

## Estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros da
distribuição Weibull:
# Para o modelo de Weibull  $\log(T) = \log(\eta) +$ 
 $(1/\beta) \cdot \log(E)$ ,
# onde E tem distribuição exponencial de média 1
## eta - vida característica (parâmetro de escala)
## beta - parâmetro de forma
yw10 = survreg(y10 ~ 1, dist="weibull")
summary(yw10)
etaHAT <- exp(coefficients(yw10)[1])
betaHAT <- 1/yw10$scale
signif(c(eta=etaHAT, beta=betaHAT), 6)

etaHAT10 <-etaHAT
betaHAT10 <-betaHAT

##### Média e variância da Weibull
muHAT = etaHAT * gamma(1 + 1/betaHAT)
sigmaHAT = etaHAT * sqrt(gamma(1+2/betaHAT) -
(gamma(1+1/betaHAT))^2)
names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)

##### MMQ - Median rank#####
temposordenados<-sort(falhas10)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
plot(x,y)
modelo<-lm(y~x)
beta<-modelo$coefficients[2]
eta<-exp((-
(modelo$coefficients[1])/modelo$coefficients[2]))
print(paste("beta =",beta))
print(paste("eta =",eta))
signif(c(eta=eta, beta=beta), 6)

##### Média e variância

```

```

muHAT = eta * gamma(1 + 1/beta)
sigmaHAT = eta * sqrt(gamma(1+2/beta) -
(gamma(1+1/beta))^2)
names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)

rweibullplot<-function(tempos,beta,eta) {
  r<-exp(-(tempos/etaHAT)^betaHAT)
  return(r)
}

# KM e Weibull
plot(ys10,xlab="Tempos (horas)",
ylab=expression(paste("Probabilidade de sobrevivência: ",
P(T>=t))),pch=19, col="red")
tempos10<-seq(0,max(falhas10))
points(tempos10,rweibullplot(tempos10,betaHAT,etaHAT),col="
blue",type = "l", xlab="Horas")

points(tempos10,rweibullplot(tempos10,betamediaHAT,etaFIT10
),col="green",type = "p", xlab="Horas")
points(tempos10,rweibullplot(tempos10,betamrdianHAT,etaFIT1
0),col="red",pch=19,type = "p", xlab="Horas")

#####
#####
# Voltagem 15
falhas15<-hirose[indicet15,2]
y15 <-Surv(falhas15,rep(1,9))

## Estimação não paramétrica da função de fiabilidade
## estimados de Kaplan-Meier
ys15 = survfit(y15 ~ 1, type="kaplan-meier")
summary(ys15)
plot(ys15, xlab="Tempos (horas)", ylab="Probabilidade de
sobrevivência",pch=19, col="red")

## Estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros da
distribuição Weibull:
# Para o modelo de Weibull  $\log(T) = \log(\eta) +
(1/\beta) \cdot \log(E)$ ,
# onde E tem distribuição exponencial de média 1
## eta - vida característica (parâmetro de escala)
## beta - parâmetro de forma
yw15 = survreg(y15 ~ 1, dist="weibull")
summary(yw15)
etaHAT <- exp(coefficients(yw15)[1])
betaHAT <- 1/yw15$scale
signif(c(eta=etaHAT, beta=betaHAT), 6)

etaHAT15 <-etaHAT
betaHAT15 <-betaHAT

```

```
##### Média e variância da Weibull
muHAT = etaHAT * gamma(1 + 1/betaHAT)
sigmaHAT = etaHAT * sqrt(gamma(1+2/betaHAT) -
(gamma(1+1/betaHAT))^2)
names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)
```

```
##### MMQ - Median rank#####
temposordenados<-sort(falhas15)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
plot(x,y)
modelo<-lm(y~x)
beta<-modelo$coefficients[2]
eta<-exp((-
(modelo$coefficients[1])/modelo$coefficients[2]))
print(paste("beta =",beta))
print(paste("eta =",eta))
signif(c(eta=eta, beta=beta), 6)
```

```
##### Média e variância
muHAT = eta * gamma(1 + 1/beta)
sigmaHAT = eta * sqrt(gamma(1+2/beta) -
(gamma(1+1/beta))^2)
names(muHAT) = names(sigmaHAT) = names(betaHAT) =
names(etaHAT) = NULL
signif(c(mu=muHAT, sigma=sigmaHAT), 6)
```

```
rweibullplot<-function(tempos,beta,eta) {
  r<-exp(-((tempos/etaHAT)^betaHAT))
  return(r)
}
```

```
# KM e Weibull
plot(ys15,xlab="Tempos (horas)",
ylab=expression(paste("Probabilidade de sobrevivência: ",
P(T>=t))),pch=19, col="red")
tempos15<-seq(0,max(falhas15))
points(tempos15,rweibullplot(tempos15,betaHAT,etaHAT),col="
blue",type = "l", xlab="Horas")
points(tempos15,rweibullplot(tempos15,betamediaHAT,etaFIT15
),col="green",type = "p", xlab="Horas")
points(tempos15,rweibullplot(tempos15,betamedianHAT,etaFIT1
5),col="red",pch=19,type = "p", xlab="Horas")
```

```
#####
###
## MODELO DE VIDA ACELERADOS
```

```

install.packages('survival')
install.packages('KMSurv')

# beta médio
betamediaHAT=(betaHAT5*length(falhas5)+betaHAT7*length(falhas7)+
betaHAT10*length(falhas10)+betaHAT15*length(falhas15))/(length(falhas5)+
length(falhas7)+length(falhas10)+length(falhas15))

(10.25*length(falhas5)+4.28*length(falhas7)+
5.73*length(falhas10)+2.54*length(falhas15))/
(length(falhas5)+length(falhas7)+length(falhas10)+length(falhas15))

#beta mediano
betavect1<-c(betaHAT5, betaHAT7,betaHAT10,betaHAT15)
betamedianHAT=median(betavect)

# novo eta para cada ensaio
## 5

temposordenados<-sort(falhas5)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
ybarra5<-mean(y)
xbarra5<-mean(x)
etaFIT5<-exp(xbarra5-ybarra5/4.28)
etaFIT5
## 7
temposordenados<-sort(falhas7)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
ybarra7<-mean(y)
xbarra7<-mean(x)
etaFIT7<-exp(xbarra7-ybarra7/4.28)
etaFIT7

## 10
temposordenados<-sort(falhas10)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))

```

```

x<-log(temposordenados)
ybarra10<-mean(y)
xbarra10<-mean(x)
etaFIT10<-exp(xbarra10-ybarra10/4.28)
etaFIT10

## 15
temposordenados<-sort(falhas15)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
ybarra15<-mean(y)
xbarra15<-mean(x)
etaFIT15<-exp(xbarra15-ybarra15/4.28)
etaFIT15

#### estimar os parâmetros da lei potência

yplp<-c(9853.3,116,25.1,4.8)
YLP=log(yplp)

xplp<-c(5,7,10,15)
XLP=log(xplp)

modelolp<-lm(YLP~XLP)
nlp<--modelolp$coefficients[2]
klp<-exp(-modelolp$coefficients[1])
nlp
klp
### calcular a vida característica para cada valor da
potência
vc<-function(n,k,potencia){
  vchat<-1/(k*(potencia)^n)
  print(vchat)
}

vc4<-vc(nlp,klp,4)
vc5<-vc(nlp,klp,5)
vc7<-vc(nlp,klp,7)
vc10<-vc(nlp,klp,10)
vc15<-vc(nlp,klp,15)

mediat<-function(beta,vc){
  media<-vc*gamma(1+1/beta)
  mediana<-vc*(-log(0.5))^(1/beta)
  var<-vc*(gamma(1+2/beta)-(gamma(1+1/beta))^2)
  dp<- (var)^0.5
  print(media)
  print(mediana)
  print(dp)
}

```



```

mu ~ normal(1000, 100);
sigma ~ lognormal(0, 4);
}"

# Running the model
mcmc_samples <- stan(model_code=model_string,
data=list(N=length(y), y=y), pars=c("mu", "sigma"),
chains=3, iter=3000, warmup=1000)

plot(mcmc_samples)

#####

library(boot)
table(hirose[,1])
indicet5<-hirose[,1]==5
indicet7<-hirose[,1]==7
indicet10<-hirose[,1]==10
indicet15<-hirose[,1]==15

y<-hirose[indicet7,2]

# The model specification
set.seed(1337)
y <- rweibull(n = 100, shape =3, scale = 1000)
mean(y)
sd(y)

model_string <- "
data {
int<lower=0> N;
real y[N];
}

parameters {
real<lower=0> shape;
real<lower=0> scale;
}
model{
y ~ weibull(shape, scale);
shape ~ normal(5, 1);
scale ~ normal(100, 5);
}"

# Running the model
mcmc_samples <- stan(model_code=model_string,
data=list(N=length(y), y=y),
pars=c("shape", "scale"), chains=1,
iter=30000, warmup=10000)

summary(mcmc_samples)
traceplot(mcmc_samples)

```

```
plot(mcmc_samples)

# MMV
y <-Surv(y, rep(1,length(y)))

yw = survreg(y ~ 1, dist="weibull")
summary(yw)
etaHAT <- exp(coefficients(yw)[1])
betaHAT <- 1/yw$scale
signif(c(eta=etaHAT, beta=betaHAT), 6)

#MMQ
set.seed(1337)
y <- rweibull(n = 10, shape = 3, scale = 1000)
mean(y)
sd(y)
temposordenados<-sort(y)
n<-length(temposordenados)
i<-1:n
Fhat<-(i-0.3)/(n+0.4)
y<-log(-log(1-Fhat))
x<-log(temposordenados)
plot(x,y)
modelo<-lm(y~x)
beta<-modelo$coefficients[2]
eta<-exp((-
(modelo$coefficients[1])/modelo$coefficients[2]))
print(paste("beta =",beta))
print(paste("eta =",eta))
signif(c(eta=eta, beta=beta), 6)
```