

**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

DOUTORAMENTO EM: Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

**FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO ESTENDIDA
GENERALIZADA AMOSTRAL:
CONTRIBUTO PARA A IDENTIFICAÇÃO DOS
MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA**

Cristina Maria Correia Teles Garcia de Oliveira

Orientação: Professor Doutor Daniel de Assunção Müller

Júri:

Presidente: Reitor da Universidade Técnica de Lisboa

Vogais: Professora Doutora M^a da Nazaré Simões Quadros Mendes Lopes

Professor Doutor Carlos Alberto da Silva Ribeiro

Professor Doutor Daniel de Assunção Müller

Professor Doutor Paulo João Figueiredo Cabral Teles

Professor Doutor Nuno Paulo de Sousa Arrobas Crato

Junho — 2001

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Daniel Müller, pela sua incondicional amizade e, essencialmente, pela sua exemplar orientação, pelo seu apoio e dedicação.

Aos meus Pais, por serem quem são e por, ao longo da minha vida, me terem apoiado em tudo, incondicionalmente.

Ao meu Marido, Fernando, por todo o seu carinho, disponibilidade, ajuda, paciência, ..., enfim!

À minha Amiga Natércia, que está sempre presente com a sua sabedoria, a sua sensatez e o seu bom humor.

Ao Doutor Paulo Teles, pela sua preciosa ajuda na minha iniciação no “mundo” da programação em Splus.

Ao Doutor António Pascoal, pela sua amizade, interesse e disponibilidade.

A todos os meus Amigos, que, naturalmente, entenderam a minha falta de disponibilidade e, principalmente, ao Tomás, pelas brincadeiras que lhe devo.

A todos os Colegas e Amigos da Universidade Portucalense, cujo apoio e boa disposição foram essenciais.

Ao Departamento de Matemática do ISEG, pela colaboração prestada e por toda a simpatia com que sempre me receberam.

À Universidade Portucalense, pela minha constante presença e pela sua plena disponibilidade.

Ao programa PRODEP, pela bolsa concedida ao longo deste trabalho.

Ao ISCAP/IPP, por me ter proporcionado as condições necessárias para a realização desta dissertação.

FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO ESTENDIDA GENERALIZADA AMOSTRAL: CONTRIBUTO PARA A IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA

RESUMO

Tradicionalmente, a identificação de um modelo de função transferência bivariado é realizada através da análise da função de correlação cruzada amostral entre as séries temporais *input* e *output*. No entanto, a prática tem mostrado que aquela função, como instrumento de identificação, apresenta um apreciável grau de subjectividade na especificação das ordens r e s , associadas aos polinómios *output* e *input*, respectivamente. Com base no estabelecimento de estimadores dos mínimos quadrados iterados consistentes, é introduzida uma generalização do conceito de função de autocorrelação estendida amostral e é proposta uma metodologia de identificação dos modelos de função transferência bivariados. Um exemplo prático e um estudo de simulação são apresentados, ilustrando as potencialidades do procedimento proposto.

Palavras chave: modelo de função transferência bivariado; função de correlação cruzada; estimadores dos mínimos quadrados; função de autocorrelação estendida amostral.

GENERALIZED EXTENDED SAMPLE AUTOCORRELATION FUNCTION: CONTRIBUTION TO THE IDENTIFICATION OF THE TRANSFER FUNCTION MODELS

ABSTRACT

Commonly the identification of a bivariate transfer function model is done through the sample cross-correlation function analysis between the input and the output time series. However, practice shows that this kind of procedure is generally not sufficient due to the subjectivity associated to the identification of the polynomial orders r and s related to the output and input polynomials, respectively. On the basis of consistent iterated least-squares estimates, a generalization of the extended sample autocorrelation function is introduced and a method of model specification is proposed to the transfer function models. A practical example and a simulation study are presented to illustrate the procedure potentiality.

Key words: bivariate transfer function model; cross-correlation function; least-squares estimates; extended sample autocorrelation function.

ÍNDICE

| | Página |
|--|-----------|
| CAPÍTULO 1. | |
| INTRODUÇÃO | 13 |
| 1.1 Introdução | 13 |
| 1.2 Notações e Conceitos | 16 |
| | |
| CAPÍTULO 2. | |
| A PROBLEMÁTICA DE IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA | 19 |
| 2.1 O Modelo de Função Transferência e a Função de Correlação Cruzada | 20 |
| 2.2 A Identificação dos Modelos de Função Transferência através dos estimadores dos mínimos quadrados iterados | 30 |
| | |
| CAPÍTULO 3. | |
| PROCEDIMENTO ALTERNATIVO DE IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA | 53 |
| 3.1 Função de Autocorrelação Estendida Generalizada Amostral | 54 |
| 3.2 Correlação Cruzada entre as séries residual e “ <i>input</i> ” | 76 |
| 3.3 Metodologia de Identificação do Modelo de Função Transferência | 82 |
| 3.4 Exemplo | 89 |

| | Página |
|---|------------|
| 3.5 Propriedades dos Estimadores dos Mínimos Quadrados Iterados | 97 |
| 3.6 Um caso particular de Sobreajustamento | 104 |
| CAPÍTULO 4. | |
| ESTUDO DE SIMULAÇÃO | 123 |
| 4.1 Função de Autocorrelação Estendida Amostral | 124 |
| 4.2 Função de Autocorrelação Estendida Generalizada Amostral | 132 |
| CAPÍTULO 5. | |
| CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA O TRABALHO FUTURO | 143 |
| ANEXO 1. | 149 |
| ANEXO 2. | 167 |
| ANEXO 3. | 179 |
| BIBLIOGRAFIA | 201 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | Página |
|---|--------|
| Figura 2.1.1: Correlações cruzadas entre as sucessões branqueadas, $r_{\alpha\beta}(k)$ - Bandas $\pm 1.5 \times \hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$ | 27 |
| Figura 2.1.2: Correlações cruzadas entre as sucessões branqueadas, $r_{\alpha\beta}(k)$ - Bandas $\pm 1.5 \times \hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$ | 29 |
| Figura 2.2.1: Autocorrelações dos resíduos - Bandas $\pm 1.96 \times \hat{\sigma}(r_\epsilon)$ | 48 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 2.1.1: Função de correlação cruzada amostral após o branqueamento das séries | 27 |
| Tabela 2.1.2: Função de correlação cruzada amostral após o branqueamento das séries | 29 |
| Tabela 2.2.1: Os coeficientes de $\hat{\delta}_m^{(j)}(B)$ | 45 |
| Tabela 2.2.2: Os coeficientes de $\hat{\omega}_m^{(j)}(B)$ | 45 |
| Tabela 2.2.3: Função de autocorrelação amostral da série residual | 48 |
| Tabela 2.2.4: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ para $j = 2$ | 49 |
| Tabela 2.2.5: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ para $j = 2$ | 49 |

| | Página |
|---|--------|
| Tabela 2.2.6: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ para $j = 3$ | 50 |
| Tabela 2.2.7: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\omega}_{1(m)}^{(j)}$ para $j = 3$ | 51 |
| Tabela 3.3.1: $r_{y_{m,t}^{s'(j)}}(k)$, $k = q, q+1, \dots$ com $s' = 0, 1, \dots$, $m = p, p+1, \dots$ e $j = 0, 1, 2, \dots$ | 84 |
| Tabela 3.3.2: $r_{y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \neq 0$, $k^* = r+q$ e $r_{y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0$, $k > k^*$, para $j \geq j^*$ | 85 |
| Tabela 3.3.3: $r_{y_{3,t}^{1(j)}}(k) \neq 0$, $k = 3$ e $r_{y_{3,t}^{1(j)}}(k) \doteq 0$, $k > 3$, para $j \geq \max(2, 3)$ | 88 |
| Tabela 3.4.1: Tabela FACEG amostral para as séries sobre fornos a gás | 91 |
| Tabela 3.4.2: Modelo $(1, 2, 3) \times (0, 2)$ | 94 |
| Tabela 3.4.3: Modelo $(1, 3, 3) \times (0, 2)$ | 95 |
| Tabela 3.4.4: Modelo $(0, 4, 3) \times (0, 2)$ | 96 |
| Tabela 3.4.5: Variância residual e AIC dos modelos identificados pela FACEG amostral | 97 |
| Tabela 3.6.1: $r_{y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \neq 0$, $k = r+q + \min(m-m^*, j-q^*)$ e $r_{y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0$, $k > r+q + \min(m-m^*, j-q^*)$, com $m^* = p+r$, $q^* = \max(p+s', r+q) = r+q$ e $s-s' = m-m^*$ | 121 |
| Tabela 4.1.1: Tabela da função de autocorrelação estendida amostral | 127 |
| Tabela 4.1.2: Tabela da função de autocorrelação estendida amostral para um modelo $ARMA(p^*, q^*)$ | 128 |
| Tabela 4.1.3: Percentagem de modelos $ARMA(p, q)$ gerados e identificados através da função de autocorrelação estendida amostral | 131 |
| Tabela 4.2.1: Modelo $(0, 1, 3) \times (p, q)$ | 135 |

| | Página |
|--|--------|
| Tabela 4.2.2: Modelo $(0,2,3) \times (p,q)$ | 136 |
| Tabela 4.2.3: Modelo $(1,0,3) \times (p,q)$ | 137 |
| Tabela 4.2.4: Modelo $(2,0,3) \times (p,q)$ | 138 |
| Tabela 4.2.5: Modelo $(1,1,3) \times (p,q)$ | 139 |
| Tabela 4.2.6: Modelo $(1,2,3) \times (p,q)$ | 140 |
| Tabela 4.2.7: Modelo $(2,1,3) \times (p,q)$ | 141 |
| Tabela 4.2.8: Modelo $(2,2,3) \times (p,q)$ | 142 |

CAPÍTULO 1.

INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

Como é bem conhecido, os modelos de função transferência combinam características dos modelos univariados de Box-Jenkins com a análise da regressão linear múltipla e representam uma interessante “mistura” de metodologias não causais e causais, permitindo descrever, no caso bivariado, uma série cronológica, designada por “output”, como função de outra, que forma o “input”. São modelos de resposta dinâmica, no sentido em que uma variação no “input” em determinado instante provoca no “output” uma resposta retardada. Este facto, tem particular importância em economia, uma vez que permite definir a variável “input” como indicador avançado do “output”.

O modelo bivariado de função transferência na sua versão racional pode ser escrito, como se verá adiante, na forma

$$\beta_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} \alpha_{t-b} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t,$$

onde a_t representa um ruído branco, $\omega_s(B)$, $\delta_r(B)$, $\theta_q(B)$ e $\phi_p(B)$ são polinómios em B de graus, respectivamente, s , r , q e p , e b é um parâmetro de desfasamento entre o “input” e o “output”.

Deste modo, como pode verificar-se, estes modelos ficam completamente caracterizados pelo conjunto de inteiros s , r , b , p e q , sendo, por esta razão, designados por modelos de função transferência $(r,s,b) \times (p,q)$.

Em situações práticas, a especificação das ordens p e q é efectuada recorrendo à metodologia de identificação univariada, através do estudo do comportamento das funções de autocorrelação, autocorrelação parcial e autocorrelação estendida amostrais, enquanto que a identificação dos inteiros b , r e s é, tradicionalmente, realizada pela análise do padrão apresentado pela função de correlação cruzada amostral entre as séries “input” e “output”.

Ora, acontece que este último procedimento referido, sendo eficaz em relação à especificação do parâmetro de defasamento, revela-se, devido ao seu carácter subjectivo, insuficiente na identificação das ordens r e s . Em geral, esta é realizada por tentativas, com o auxílio dos meios informáticos actualmente ao dispor, e conduz, por vezes, para um mesmo conjunto de séries, à especificação de diferentes funções de transferência racionais.

Em 1997, a fim de ultrapassarem os problemas de subjectividade inerentes à utilização da função de correlação cruzada amostral na especificação das referidas ordens r e s , Müller, D. e Wei, W.W.S propuseram uma nova metodologia de identificação daqueles valores, baseada no estabelecimento de estimadores dos mínimos quadrados iterados, os quais, ao serem dispostos em tabelas, permitem, através das suas propriedades, estabelecer a referida metodologia de identificação.

Tomando como ponto de partida os resultados obtidos por aqueles dois autores, este trabalho tem como principal objectivo a apresentação de um novo procedimento de identificação dos modelos de função transferência bivariados racionais, o qual se baseia

na generalização do conceito de função de autocorrelação estendida amostral introduzido por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. em 1984. Este novo procedimento apoia-se num conjunto de desenvolvimentos teóricos que generalizam, em condições de maior complexidade, grande parte dos resultados estabelecidos por estes dois autores e que conduzem ao conceito de função de autocorrelação estendida generalizada (FACEG) amostral. Os valores desta função serão dispostos em tabelas de múltipla entrada e permitem, tendo em conta as suas propriedades, estabelecer o novo procedimento de identificação acima mencionado, o qual constitui, em nosso entender, um importante contributo para a resolução do problema da identificação dos modelos de função transferência e que deverá ser utilizado em complemento e a par das metodologias tradicionais referidas anteriormente.

Com a finalidade de testar as potencialidades deste procedimento, procedeu-se, em seguida, a um exaustivo estudo de simulação.

Assim, de acordo com os objectivos que se propuseram alcançar neste trabalho, o seu texto será estruturado do seguinte modo: no capítulo 2. apresenta-se a problemática de identificação dos modelos de função transferência bivariados através da função de correlação cruzada amostral entre as sucessões “input” e “output” e, expõe-se a metodologia proposta por Müller, D. e Wei, W.W.S (1997). No capítulo 3. desenvolvem-se todas as formulações teóricas relativas à generalização da função de autocorrelação estendida amostral, que conduzem ao estabelecimento de um procedimento alternativo de especificação das ordens polinomiais r e s . O quarto capítulo inicia-se com um estudo de simulação referente à metodologia de identificação de modelos univariados $ARMA(p,q)$ através da função de autocorrelação estendida amostral, de forma a que os seus resultados possam ser confrontados com o estudo de

simulação realizado no âmbito da identificação dos modelos de função transferência bivariados $(r,s,b) \times (p,q)$ com base na função de autocorrelação estendida generalizada amostral. Finalmente, a análise dos resultados obtidos é feita no capítulo 5., sendo também referidos alguns possíveis problemas para estudo e desenvolvimento futuros.

1.2 Notações e Conceitos

Tendo-se optado pela notação convencionada por Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1995), resumem-se, nesta secção, os principais conceitos e proposições aí referidos e que serão utilizados nos desenvolvimentos teóricos desta dissertação.

Assim, considerem-se as sucessões $\{a_n, n=1,2,\dots\}$ e $\{b_n, n=1,2,\dots\}$ de valores reais positivos e, $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ e $\{Y_n, n=1,2,\dots\}$ de variáveis aleatórias pertencentes a um dado espaço de probabilidade.

Quanto às definições, destacam-se as seguintes:

(1) Convergência em Probabilidade:

X_n converge em probabilidade para zero, i.e.,

$$X_n = o_p(1) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{p} 0,$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ P(|X_n| > \varepsilon) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

(2) Limitado em Probabilidade:

A sequência $\{X_n\}$ é limitada em probabilidade, i.e.,

$$X_n = O_p(1),$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \infty) : P(|X_n| > \delta(\varepsilon)) < \varepsilon \ \forall n$.

A relação entre (1) e (2) é estabelecida na seguinte definição de convergência em probabilidade para zero, equivalente à primeira. Assim,

$$X_n = o_p(1) \text{ se e só se } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_n(\varepsilon) \downarrow 0 : P(|X_n| > \delta_n(\varepsilon)) < \varepsilon \quad \forall n .$$

(3) Convergência em Probabilidade e Ordem em Probabilidade:

(i) X_n converge em probabilidade para a variável aleatória X , $X_n \xrightarrow{p} X$, se e só se $X_n - X = o_p(1)$.

Assim, $X_n - Y_n \xrightarrow{p} 0$ representa-se por $X_n - Y_n = o_p(1)$ ou $X_n \doteq Y_n$, referindo-se que X_n e Y_n são assintoticamente equivalentes em probabilidade.

(ii) $X_n = o_p(a_n)$ se e só se $a_n^{-1}X_n = o_p(1)$.

(iii) $X_n = O_p(a_n)$ se e só se $a_n^{-1}X_n = O_p(1)$.

No que diz respeito às proposições, referem-se as seguintes:

(a) Se $X_n = o_p(a_n)$ e $Y_n = o_p(b_n)$, então

$$X_n \cdot Y_n = o_p(a_n \cdot b_n) ,$$

$$X_n + Y_n = o_p(\max(a_n, b_n)) ,$$

$$|X_n|^r = o_p(a_n^r) , \quad r > 0 .$$

(b) (a) mantém-se válido substituindo $o_p(\cdot)$ por $O_p(\cdot)$.

(c) Se $X_n = o_p(a_n)$ e $Y_n = O_p(b_n)$, então $X_n \cdot Y_n = o_p(a_n \cdot b_n)$.

(d) Se $X_n - X = o_p(1)$ e $\psi : R^k \rightarrow R^m$ é uma função contínua no seu domínio, então

$$\psi(X_n) - \psi(X) = o_p(1) .$$

(e) Se $X_n = O_p(n^{-\delta})$ com $\delta > 0$, então $X_n = o_p(1)$.

CAPÍTULO 2.

A problemática de identificação dos Modelos de Função Transferência

Os modelos de função transferência surgem naturalmente quando se pretende estudar simultaneamente diversas sucessões cronológicas relacionadas entre si, onde uma das sucessões, a sucessão “*output*”, é influenciada por uma ou mais sucessões, as sucessões “*input*”. Este sentido de causalidade do “*input*” para o “*output*”, ou seja, a não existência de “*feedback*” entre as variáveis (não há influência do “*output*” sobre o “*input*”) indica que nem todas as sucessões cronológicas correlacionadas permitem a modelização através de funções transferência.

Aliando as características dos modelos univariados de Box-Jenkins com a análise da regressão linear múltipla, o modelo de função transferência bivariado – modelo onde apenas está presente uma série “*input*” - traduz, em particular, uma relação entre duas séries cronológicas, que permite:

- (a) a descrição da sucessão “*output*”, em função do seu próprio passado, dos valores da sucessão “*input*”, e de um resíduo que integra os efeitos de outros factores que podem influenciar o comportamento do “*output*”;
- (b) a representação de um modelo de resposta dinâmica onde uma variação do “*input*” num dado instante, produz, instantes mais tarde, um impacto no “*output*”, funcionando o primeiro como um indicador avançado do segundo.

Este capítulo, que trata, conforme o nome indica, dos problemas que se colocam, em situações práticas, na identificação dos modelos de função transferência, será

estruturado do seguinte modo: na primeira secção definem-se os conceitos de modelo de função transferência bivariado e de função de correlação cruzada, e ilustra-se a utilização desta como instrumento de identificação do modelo associado às séries em estudo. Na segunda secção expõe-se uma metodologia de identificação dos modelos de função transferência desenvolvida por Müller, D. e Wei, W.W.S., (1997) e baseada no estabelecimento de estimadores dos mínimos quadrados no quadro de um sistema de regressões iteradas.

2.1 O Modelo de Função Transferência e a Função de Correlação Cruzada

O modelo de função transferência bivariado é aplicado a processos estocásticos conjuntamente estacionários, ou seja, a dois processos estocásticos $\{X_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ e $\{Y_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ tais que verificam as seguintes propriedades:

(a) individualmente, cada um dos processos é estacionário até à 2ª ordem, i.e.,

$$E(X_t^2) < \infty, E(Y_t^2) < \infty, t = 0, 1, 2, \dots,$$

$$E(X_t) = \mu_x, E(Y_t) = \mu_y, t = 0, 1, 2, \dots,$$

$$C(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{xx}(k), C(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_{yy}(k), t = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots;$$

(b) existe a covariância cruzada $C(X_t, Y_{t+k})$, dependente, somente, da diferença entre os instantes t e $t+k$, i.e.,

$$E(X_t Y_{t+k}) < \infty, t = 0, 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C(X_t, Y_{t+k}) = \gamma_{xy}(k), t = 0, 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nestas circunstâncias, a respectiva função de correlação cruzada é definida por

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sqrt{\gamma_{xx}(0)\gamma_{yy}(0)}} ,$$

e verifica as propriedades seguintes:

$$(1) |\rho_{xy}(k)| \leq 1 , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

$$(2) \rho_{xy}(k) = \rho_{yx}(-k) , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

$$(3) \max_k |\rho_{xy}(k)| \leq 1 ,$$

$$(4) \text{ geralmente, } \rho_{xy}(k) \text{ não é uma função simétrica, i.e., } \exists k \neq 0 : \rho_{xy}(k) \neq \rho_{xy}(-k).$$

Devido à estreita relação existente entre a caracterização dos modelos de função transferência e o comportamento da função de correlação cruzada, a estimação desta adquire particular relevância. Assim, observando-se as sucessões cronológicas (X_1, X_2, \dots, X_n) e (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) , a função de covariância cruzada, $\gamma_{xy}(k)$, é habitualmente estimada através da expressão

$$\hat{\gamma}_{xy}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}) , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

resultando, conseqüentemente, como estimador da função de correlação cruzada

$$\hat{\rho}_{xy}(k) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(k)}{\sqrt{\hat{\gamma}_{xx}(0)\hat{\gamma}_{yy}(0)}} ,$$

em que $\hat{\gamma}_{xx}(0) = \hat{\sigma}_x^2$ e $\hat{\gamma}_{yy}(0) = \hat{\sigma}_y^2$.

De uma forma geral, é difícil a dedução da distribuição assintótica de $\hat{\rho}_{xy}(k)$. No entanto, quando $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ são processos Gaussianos independentes de ruído branco, i.e., processos Gaussianos tais que:

$$C(X_s, Y_t) = 0 , s, t = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$E(X_t) = \mu_x \text{ (usualmente, } \mu_x = 0), V(X_t) = \sigma_x^2 \text{ e } \rho_x(k) = 0 \text{ para } k \neq 0, \text{ e}$$

$E(Y_t) = \mu_y$ (usualmente, $\mu_y = 0$), $V(Y_t) = \sigma_y^2$ e $\rho_y(k) = 0$ para $k \neq 0$,

prova-se que $\hat{\rho}_{xy}(k) \sim N\left(0, \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ [Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1995)]. Este resultado foi estendido, por Bartlett, M.S. (1955), à situação de duas sucessões não correlacionadas, onde uma delas é um ruído branco. Neste caso, tem-se os seguintes resultados assintóticos, $E(\hat{\rho}_{xy}(k)) \approx 0$ e $V(\hat{\rho}_{xy}(k)) \approx \frac{1}{n-k}$ para $k > 0$, que permitem testar a hipótese da nulidade da correlação cruzada amostral para diferentes valores de k .

Sendo X_t e Y_t , respectivamente, as sucessões cronológicas "input" e "output" conjuntamente estacionárias (os respectivos processos subjacentes são conjuntamente estacionários), o modelo de função transferência bivariado é definido pela expressão,

$$Y_t = \nu(B)X_t + N_t, \quad (2.1.1)$$

onde $\nu(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j B^j$ é um polinómio em B , designado função transferência, cujos coeficientes ν_j são os seus pesos e $\sum_{j=0}^{\infty} |\nu_j| < \infty$. B é o operador atraso definido pela relação $B^k X_t = X_{t-k}$, $k = 1, 2, \dots$ e N_t é uma sucessão residual estacionária de valor médio nulo não correlacionada com a série "input" X_t , [$C(N_s, X_t) = 0$, $s, t = 0, 1, 2, \dots$].

Nas aplicações práticas, os pesos da função transferência, ν_j , e a estrutura de N_t são, habitualmente, desconhecidos e é através da análise das observações de X_t e de Y_t disponíveis que se pode inferir sobre o modelo de função transferência mais adequado à descrição conjunta das duas séries temporais em estudo. Sem perda de generalidade, assume-se que os valores médios de X_t e de Y_t são nulos [$E(X_t) = 0$; $E(Y_t) = 0$].

Multiplicando ambos os membros de (2.1.1) por X_{t-k} , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e tomando os valores esperados, vem

$$\gamma_{xy}(k) = v_0 \gamma_x(k) + v_1 \gamma_x(k-1) + v_2 \gamma_x(k-2) + \dots,$$

o que é equivalente a

$$\rho_{xy}(k) = \left[\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right] [v_0 \rho_x(k) + v_1 \rho_x(k-1) + v_2 \rho_x(k-2) + \dots]. \quad (2.1.2)$$

No entanto, se X_t for um ruído branco, a equação (2.1.2) reduz-se a

$$v_k = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy}(k),$$

verificando-se uma proporcionalidade directa entre os pesos da função transferência, v_k , e a função de correlação cruzada, $\rho_{xy}(k)$.

Admitindo, agora, que a série "input" X_t se desenvolve de acordo com um processo *ARMA* invertível e estacionário,

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x(B)\alpha_t,$$

onde α_t é um ruído branco tal que $E(\alpha_t) = 0$ e $V(\alpha_t) = \sigma_\alpha^2$, o modelo (2.1.1) é equivalente a

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + e_t, \quad (2.1.3)$$

em que $\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} Y_t$ é a série "output" filtrada pela aplicação a Y_t dos operadores de

branqueamento de X_t , $\left(\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} X_t = \alpha_t \right)$, e $e_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} N_t$.

Então, com base nas observações da série “input” branqueada, α_t , e da série “output” filtrada, β_t , podem estimar-se os pesos da função transferência, ν_j , através da expressão

$$\hat{\nu}_k = \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\hat{\sigma}_\alpha} \hat{\rho}_{\alpha\beta}(k).$$

O problema que surge na aplicação prática de um modelo de função transferência, seja na forma (2.1.1) ou (2.1.3), reside no facto de ambas as formas conterem um número infinito de parâmetros a estimar dispondo-se de informação limitada para tal. A fim de ultrapassar esta dificuldade, Box, Jenkins e Reisel (1976) sugeriram o modelo de função transferência racional com

$$\nu(B) = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} B^b,$$

onde $\delta_r(B) = 1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r$, $\omega_s(B) = \omega_0 + \omega_1 B + \dots + \omega_s B^s$ e $b \in N_0$ é o parâmetro de desfasamento que representa o número de períodos (“lags”) que uma variação no “input” demora a produzir um efeito no “output”. Para garantir a estabilidade do sistema, assume-se que as raízes dos polinómios $\delta_r(B)$ e $\omega_s(B)$ se encontram fora do círculo unitário.

Assumindo que a sucessão residual e_t segue um modelo *ARMA* (p, q) invertível e estacionário,

$$e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t,$$

onde $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ e a_t é um ruído branco tal que $E(a_t) = 0$ e $V(a_t) = \sigma_a^2$, o modelo (2.1.3) será, então, equivalente ao seguinte modelo de função transferência racional $(r, s, b) \times (p, q)$

$$\beta_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} \alpha_{t-b} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t. \quad (2.1.4)$$

A obtenção de estimadores eficientes para os parâmetros deste modelo pode realizar-se através do método da máxima verosimilhança, o que implica a especificação completa do modelo, ou seja, o conhecimento prévio dos valores de r , s , b , p e q . Quanto à especificação das ordens p e q , associadas, respectivamente, aos polinómios autoregressivo e de médias móveis do modelo *ARMA* ajustado à sucessão residual, é realizada através das metodologias tradicionais, onde se analisam os comportamentos das funções de autocorrelação, autocorrelação parcial e autocorrelação estendida amostrais dos resíduos $\hat{e}_t = \beta_t - \hat{v}(B)\alpha_t$, em que $\hat{v}(B)$ é uma aproximação de ordem finita de $v(B)$. A identificação do parâmetro de defasamento b e das ordens r e s , associadas respectivamente aos polinómios “*output*” e “*input*”, é usualmente efectuada pela análise dos padrões apresentados pela função de correlação cruzada amostral, $r_{\alpha\beta}(k)$, ou pela função transferência estimada, $\hat{v}(B)$.

Com efeito, ao comportamento da função de correlação cruzada entre as séries α_t e β_t , encontram-se associadas determinadas características gerais que podem auxiliar na identificação do modelo que relaciona as duas sucessões em estudo¹. Em particular, tem-se:

- (a) a função de correlação cruzada é sempre nula para valores inferiores a b , i.e.,

$$\rho_{\alpha\beta}(k) = 0, \quad k < b;$$

- (b) os gráficos das funções de correlação cruzada verificam, em geral, duas configurações diferentes: a primeira referente aos “*lags*” $b+1$, $b+2$, ..., $b+s$

¹ Uma descrição detalhada do comportamento da função de correlação cruzada, relativamente a diferentes modelos de função transferência, pode ser vista em Murteira et al. (1993).

com um figurino fixo, incharacterístico e dependente dos valores dos parâmetros do modelo, e, a segunda, a partir do "lag" $b + s + 1$, com um figurino amortecido tipo exponencial, eventualmente alternado.

Assim, de acordo com (a) retira-se, como primeira consequência, que os modelos de função transferência apenas se aplicam a séries temporais cuja função de correlação cruzada amostral, $r_{\alpha\beta}(k)$, seja assintoticamente nula para valores inferiores a um determinado desfasamento. Este facto permite a identificação imediata de b , uma vez que $r_{\alpha\beta}(k) \neq 0$ para $k < b$. Além disso, realça que nem todos os pares de sucessões cronológicas correlacionadas podem ser modelizados através de um modelo de função transferência.

A especificação de r e s , tendo em conta (b), não é trivial e, atendendo ao seu carácter subjectivo, é realizada, na maioria das aplicações práticas, por tentativas. Com efeito, o valor de s poderia ser definido correctamente se na estrutura da função de correlação cruzada fosse possível separar, com exactidão, os dois tipos de figurinos, o que não é transparente. Quanto à identificação de r é ainda mais complexa, devido ao facto de a modelos diferentes estarem associados gráficos idênticos de funções de correlação cruzada. Em situações práticas, desde que se detecte no gráfico a existência de um figurino amortecido, considera-se $r \neq 0$ e toma-se $r = 1$ como primeira tentativa de identificação.

Apresentam-se, em seguida, dois exemplos que, simultaneamente, ilustram a simplicidade e a dificuldade inerentes à determinação dos inteiros r e s . Em qualquer dos exemplos, a metodologia tradicional de identificação da função transferência, através da análise das correlações cruzadas amostrais, leva à especificação de modelos bem distintos, evidenciando claramente a subjectividade de tal metodologia.

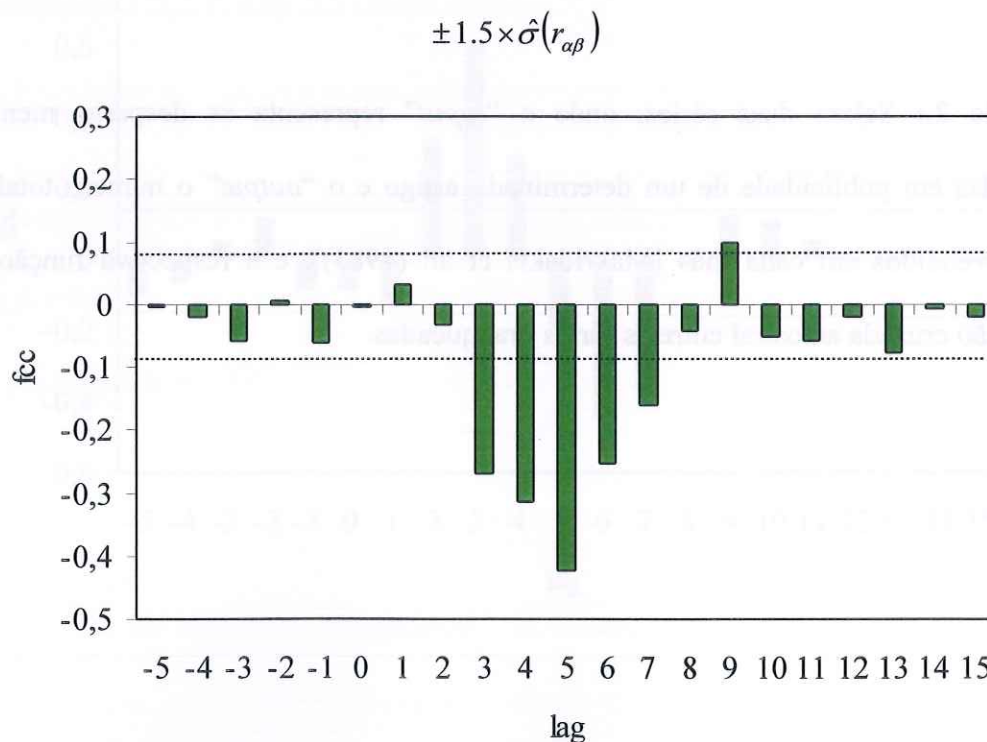
Exemplo 1.: Considerem-se as duas séries sobre fornos a gás apresentadas em Box et al. (1994) e a respectiva função de correlação cruzada amostral entre a sucessão “output” filtrada, β_t , e a sucessão “input” branqueada, α_t .

Tabela 2.1.1: Função de correlação cruzada amostral após o branqueamento das séries

| k | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------------------------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|
| $r_{\alpha\beta}(k)$ | -0.002 | -0.021 | -0.057 | 0.003 | -0.06 | -0.001 | 0.031 | -0.034 | -0.268 | -0.314 |
| $\hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$ | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 |

| k | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| $r_{\alpha\beta}(k)$ | -0.424 | -0.254 | -0.161 | -0.041 | 0.10 | -0.053 | -0.058 | -0.02 | -0.078 | -0.007 | -0.02 |
| $\hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$ | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 | .06 |

Figura 2.1.1: Correlações cruzadas entre as sucessões branqueadas, $r_{\alpha\beta}(k)$ – Bandas $\pm 1.5 \times \hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$



Analisando o comportamento das correlações cruzadas amostrais, o primeiro valor estatisticamente significativo é $r_{\alpha\beta}(3)$, identificando-se, de imediato, $b = 3$. Constatase, também, no gráfico, a presença dos dois tipos de figurino, fixo e amortecido, podendo a fronteira entre estes ser estabelecida nos desfasamentos $b + s = 5$ ou $b + s = 6$, o que resulta para s os valores 2 ou 3, respectivamente. A existência da estrutura amortecida indica que $r \neq 0$, podendo tomar-se $r = 1$ ou $r = 2$ como primeiras hipóteses de trabalho. Assim, para estas duas séries, poder-se-á identificar, eventualmente entre outras, as funções transferência racionais com $(r, s, b) = (1, 2, 3)$, $(r, s, b) = (1, 3, 3)$ ou $(r, s, b) = (2, 2, 3)$.

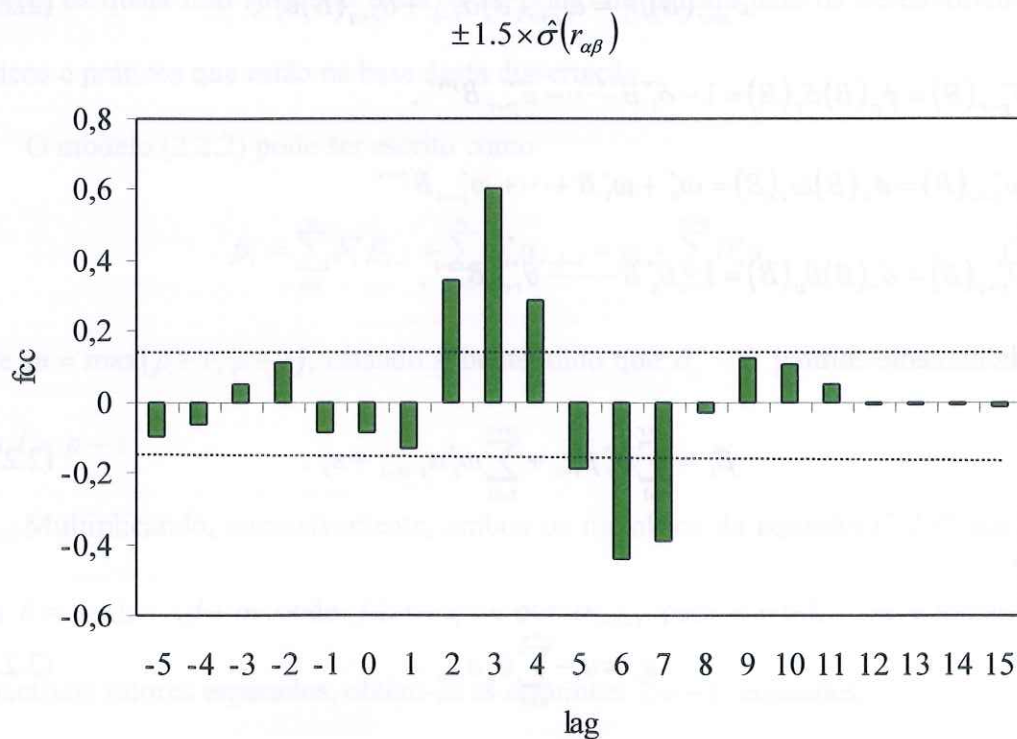
No entanto, é possível considerar a ausência de um figurino amortecido na configuração da função de correlação cruzada amostral, uma vez que $r_{\alpha\beta}(9) \cong 1.5 \times \hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$. Sendo assim, o final da estrutura fixa situar-se-ia no desfasamento $b + s = 7$, identificando-se a função transferência racional com $(r, s, b) = (0, 4, 3)$.

Exemplo 2.: Sejam duas séries, onde o “input” representa as despesas mensais efectuadas em publicidade de um determinado artigo e o “output” o número total de artigos vendidos em cada mês [Makridakis et al. (1983)], e a respectiva função de correlação cruzada amostral entre as séries branqueadas.

Tabela 2.1.2: Função de correlação cruzada amostral após o branqueamento das séries

| k | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------------------------|-------|-------|------|------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------------|
| $r_{\alpha\beta}(k)$ | -.098 | -.065 | .048 | .114 | -.087 | -.084 | -.133 | .344 | .601 | .286 |
| $\hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$ | .10 | .10 | .10 | .10 | .10 | .10 | .10 | .10 | .10 | .10 |

| k | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------------------------------|--------------|-------------|-------------|-------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $r_{\alpha\beta}(k)$ | -.189 | -.44 | -.39 | -.031 | .123 | .106 | .051 | -.009 | -.006 | -.008 | -.014 |
| $\hat{\sigma}(r_{\alpha\beta})$ | .10 | .10 | .11 | .11 | .11 | .11 | .11 | .11 | .11 | .11 | .11 |

Figura 2.1.2: Correlações cruzadas entre as sucessões branqueadas, $r_{\alpha\beta}(k)$ – Bandas

Para estas duas sucessões e seguindo um raciocínio semelhante ao do exemplo anterior, podem considerar-se, como possíveis funções transferência racionais, as funções com $(r, s, b) = (1, 1, 2)$, $(r, s, b) = (2, 1, 2)$, $(r, s, b) = (1, 2, 2)$ ou $(r, s, b) = (2, 2, 2)$.

2.2 A identificação dos Modelos de Função Transferência através dos estimadores dos mínimos quadrados iterados

O modelo de função transferência racional $(r, s, b) \times (p, q)$ (2.1.4),

$$\beta_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} \alpha_{t-b} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t,$$

pode, também, ser escrito na forma

$$\delta_{p+r}^*(B) \beta_t = \omega_{p+s}^*(B) \alpha_{t-b} + \theta_{r+q}^*(B) a_t, \quad (2.2.1)$$

onde $\delta_{p+r}^*(B) = \phi_p(B) \delta_r(B) = 1 - \delta_1^* B - \dots - \delta_{p+r}^* B^{p+r}$,

$$\omega_{p+s}^*(B) = \phi_p(B) \omega_s(B) = \omega_0^* + \omega_1^* B + \dots + \omega_{p+s}^* B^{p+s}$$

e $\theta_{r+q}^*(B) = \delta_r(B) \theta_q(B) = 1 - \theta_1^* B - \dots - \theta_{r+q}^* B^{r+q}$,

ou explicitamente como

$$\beta_t = \sum_{i=1}^{p+r} \delta_i^* \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s} \omega_l^* \alpha_{t-b-l} + \varepsilon_t, \quad (2.2.2)$$

em que

$$\varepsilon_t = a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u}. \quad (2.2.3)$$

O modelo (2.2.2) é designado por modelo de regressão para sucessões cronológicas ou por modelo autoregressivo-regressivo misto. Para estes modelos,

Durbin, J. (1960) mostrou que os correspondentes estimadores dos mínimos quadrados são consistentes no caso de ε_t em (2.2.3) ser um ruído branco, i.e., $\varepsilon_t = a_t$. Contudo, para o modelo de função transferência geral, (2.1.4) ou (2.2.1), os estimadores dos mínimos quadrados não são convergentes em probabilidade [Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984); Wei, W.W.S. (1990)]. No entanto, Müller, D. e Wei, W.W.S (1997), provaram, para o modelo de função transferência acima referido, a consistência dos estimadores dos mínimos quadrados estabelecidos num quadro de regressões lineares múltiplas iterativas. Com base nesse resultado teórico, propuseram uma metodologia de identificação das ordens polinomiais r e s , a fim de ultrapassar os problemas de subjectividade inerentes ao procedimento tradicional de especificação daqueles valores através da função de correlação cruzada amostral.

Seguidamente, serão delineados os traços principais do trabalho daqueles dois autores, os quais irão sustentar e servir de ponto de partida para os desenvolvimentos teóricos e práticos que estão na base desta dissertação.

O modelo (2.2.2) pode ser escrito como

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_i^* \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^m \omega_l^* \alpha_{t-b-l} + a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u}, \quad (2.2.4)$$

onde $m = \max(p+r, p+s)$, estando subentendido que $\delta_i^* = 0$ para $i > p+r$ e $\omega_l^* = 0$ para $l > p+s$.

Multiplicando, sucessivamente, ambos os membros da equação (2.2.4) por β_{t-h} para $h = j+1, \dots, j+m$ onde $j \geq r+q$, e por α_{t-b-k} para $k = 0, 1, \dots, m$ e tomando os respectivos valores esperados, obtêm-se as seguintes $2m+1$ equações,

$$\gamma_\beta(h) = \sum_{i=1}^m \delta_i^* \gamma_\beta(h-i) + \sum_{l=0}^m \omega_l^* \gamma_{\alpha\beta}(b+l-h), \quad h = j+1, \dots, j+m; \quad j \geq r+q \quad (2.2.5a)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(b+k) = \sum_{i=1}^m \delta_i^* \gamma_{\alpha\beta}(b+k-i) + \sum_{l=0}^m \omega_l^* \gamma_{\alpha}(k-l), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (2.2.5b)$$

onde $\gamma_{\alpha\beta}(\cdot)$ representa a função de covariância cruzada entre a série "input" branqueada α_t e a série "output" filtrada β_t e, $\gamma_{\alpha}(\cdot)$ e $\gamma_{\beta}(\cdot)$ são as funções de autocovariância respectivas.

Substituindo as funções de covariância teóricas pelas correspondentes funções de covariância amostrais no sistema de equações (2.2.5), obtém-se pelo método dos momentos os estimadores para os parâmetros $(\delta_1^*, \dots, \delta_m^*)$ e $(\omega_0^*, \omega_1^*, \dots, \omega_m^*)$, através da resolução do seguinte sistema de equações, onde $(\hat{\delta}_1^j, \dots, \hat{\delta}_m^j)$ e $(\hat{\omega}_0^j, \hat{\omega}_1^j, \dots, \hat{\omega}_m^j)$ representam os estimadores correspondentes,

$$\hat{\gamma}_{\beta}(h) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_i^j \hat{\gamma}_{\beta}(h-i) + \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_l^j \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(b+l-h), \quad h = j+1, \dots, j+m; \quad j \geq r+q \quad (2.2.6a)$$

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta}(b+k) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_i^j \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(b+k-i) + \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_l^j \hat{\gamma}_{\alpha}(k-l), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.2.6b)$$

A consistência destes estimadores é estabelecida de acordo com os lemas a seguir enunciados.

Lema 2.1: Considere-se que β_t e α_t seguem o modelo de função transferência (2.2.1).

Então, β_t satisfaz o modelo $ARMA(p+r, q^*)$, onde $q^* = \max(p+s, r+q)$.

Demonstração:

Uma vez que, em (2.2.1), α_t e a_t representam ruídos brancos não correlacionados, o segundo membro desta equação é a soma de dois processos de médias móveis de ordens $(p+s)$ e $(r+q)$, respectivamente. Então, a função de autocovariância da soma destes dois processos apresentará um corte brusco para zero a

partir do "lag" $q^* = \max(p+s, r+q)$, ou seja, o segundo membro de (2.2.1) satisfaz um modelo $MA(q^*)$. Logo, $\beta_t \sim ARMA(p+r, q^*)$. ■

Lema 2.2: Sejam β_t e α_t duas sucessões cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ definido em (2.2.1), tal que as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ se encontram fora do círculo unitário. Então, para $h \geq 0$,

$$a) \hat{\gamma}_\alpha(B) = \gamma_\alpha(B) + o_p(1) \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}_\beta(B) = \gamma_\beta(B) + o_p(1),$$

$$b) \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(B) = \gamma_{\alpha\beta}(B) + o_p(1),$$

$$c) \hat{\gamma}_\alpha(B) = \tilde{\gamma}_\alpha(B) + o_p(1), \quad \hat{\gamma}_\beta(B) = \tilde{\gamma}_\beta(B) + o_p(1) \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(B) = \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(B) + o_p(1),$$

$$\text{onde } \tilde{\gamma}_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \alpha_t \alpha_{t-h}, \quad \tilde{\gamma}_\beta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \beta_t \beta_{t-h} \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \alpha_t \beta_{t-h}.$$

Demonstração:

A condição imposta ao polinómio $\delta_{p+r}^*(B)$ permite expressar (2.2.1) como

$$\beta_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \alpha_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j a_{t-j},$$

onde $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ e $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$. Por sua vez, a sucessão α_t pode ser escrita na forma

$$\alpha_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \alpha_{t-j},$$

com $\phi_0 = 1$ e $\phi_j = 0$ para $j > 0$. Assim sendo, $(\alpha_t, \beta_t)'$ admite a seguinte representação bivariada

$$\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_j & 0 \\ \psi_j & \pi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{t-j} \\ a_{t-j} \end{bmatrix}.$$

O lema resulta, então, como uma consequência directa do teorema 11.2.1 apresentado em Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1995). ■

Considere-se, agora, a matriz A_m^j , de ordem $(2m+1) \times (2m+1)$, constituída pelos coeficientes dos segundos membros do sistema de equações (2.2.5),

$$A_m^j = \begin{bmatrix} B_m^j & C_m^j \\ D_m & \sigma_\alpha^2 I_{m+1} \end{bmatrix},$$

onde I_{m+1} é a matriz identidade de ordem $(m+1) \times (m+1)$ e as matrizes B_m^j , C_m^j e D_m , de ordens $(m \times m)$, $(m \times (m+1))$ e $((m+1) \times m)$, respectivamente, são definidas por

$$B_m^j = \begin{bmatrix} \gamma_\beta(j) & \gamma_\beta(j-1) & \cdots & \gamma_\beta(j-m+1) \\ \gamma_\beta(j+1) & \gamma_\beta(j) & \cdots & \gamma_\beta(j-m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_\beta(j+m-1) & \gamma_\beta(j+m-2) & \cdots & \gamma_\beta(j) \end{bmatrix},$$

$$C_m^j = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta}(b-j-1) & \gamma_{\alpha\beta}(b-j) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-j+m-1) \\ \gamma_{\alpha\beta}(b-j-2) & \gamma_{\alpha\beta}(b-j-1) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-j+m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\alpha\beta}(b-j-m) & \gamma_{\alpha\beta}(b-j-m+1) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-j) \end{bmatrix}$$

e

$$D_m = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta}(b-1) & \gamma_{\alpha\beta}(b-2) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-m) \\ \gamma_{\alpha\beta}(b) & \gamma_{\alpha\beta}(b-1) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\alpha\beta}(b+m-1) & \gamma_{\alpha\beta}(b+m-2) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b) \end{bmatrix}.$$

Designa-se por $\det(A_m^j)$ o determinante da matriz A_m^j . Então, tem-se

$$\det(A_m^j) = \det(B_m^j) \cdot \det(\sigma_\alpha^2 I_{m+1} - D_m (B_m^j)^{-1} C_m^j),$$

podendo estabelecer-se o lema seguinte.

Lema 2.3: Se β_i e α_i seguem o modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$

(2.2.1), com as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ fora do círculo unitário, então

(a) se $r \geq s$, $\det(A_m^j) \neq 0$ para $m = p+r$ e $j \geq \max(p+r, r+q)$,

(b) se $r \leq s$, $\det(A_m^j) \neq 0$ para $p+s \leq m \leq \max(p+s, r+q)$ e $j = \max(p+s, r+q)$.

Demonstração:

Pelo lema 2.1, $\beta_i \sim ARMA(p+r, \max(p+s, r+q))$ e, por esta razão, $\det(B_m^j)$ representa o determinante das correspondentes equações de Yule-Walker generalizadas.

Assim, pelo lema 5.6 em Tsay, R.S e Tiao, G.C. (1984), tem-se para este caso,

$$\det(B_m^j) \neq 0 \quad \text{se } m = p+r \text{ e } j \geq \max(p+s, r+q) \quad (2.2.7a)$$

e

$$\det(B_m^j) \neq 0 \quad \text{se } m \geq p+r \text{ e } j = \max(p+s, r+q). \quad (2.2.7b)$$

Além disso,

$$C_m^j = 0 \quad \text{para } j \geq m, \quad (2.2.8)$$

o que conduz a,

$$\det(A_m^j) = \det(B_m^j) \cdot \sigma_\alpha^{2(m+1)} \quad \text{para } j \geq m. \quad (2.2.9)$$

Nestas condições, se $r \geq s$ implica que $m = \max(p+r, p+s) = p+r$ e tomando $j \geq \max(p+r, r+q)$, tem-se, por (2.2.7a), (2.2.8) e (2.2.9),

$$\det(A_{p+r}^j) \neq 0 \quad \text{para } j \geq \max(p+r, r+q),$$

o que prova (a).

Caso $r \leq s$ e tomando $j = \max(p+s, r+q)$, tem-se $j \geq m$ e por (2.2.8), $C_m^j = 0$. Deste modo, fazendo m tal que $p+s \leq m \leq \max(p+s, r+q)$, fica demonstrado (b) por (2.2.7b) e (2.2.9). ■

De acordo com os lemas 2.2 e 2.3, pode estabelecer-se a consistência dos estimadores obtidos pelo método dos momentos. De facto, o sistema de equações (2.2.6) converge em probabilidade para (2.2.5), sendo a matriz associada a este último sistema não singular sob as condições indicadas no lema 2.3, permitindo estabelecer o teorema seguinte:

Teorema 2.1: Sejam β_i e α_i duas sucessões cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ dado em (2.2.1), com as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ fora do círculo unitário. Então, tem-se

$$\hat{\delta}_i^j = \delta_i^* + o_p(1), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{\omega}_l^j = \omega_l^* + o_p(1), \quad l = 0, 1, \dots, m,$$

quando

(a) $m = p + r$ e $j \geq \max(p + r, r + q)$, se $r \geq s$,

(b) $p + s \leq m \leq \max(p + s, r + q)$ e $j = \max(p + s, r + q)$, se $r \leq s$,

estando subentendido que $\delta_i^* = 0$ para $i > p + r$ e $\omega_l^* = 0$ para $l > p + s$. ■

Note-se que o teorema 2.1 generaliza o resultado obtido por Gersch, W. (1970). De facto, se $\alpha_i \doteq 0$, quase certamente nula, β_i segue um modelo $ARMA(p + r, r + q)$. Nestas condições, as equações (2.2.5) são equivalentes às equações de Yule-Walker generalizadas e os estimadores, $\hat{\delta}_i^j$, $i = 1, 2, \dots, p + r$, convergem em probabilidade para os parâmetros autoregressivos, tal como foi estabelecido por aquele autor.

Estudadas as propriedades dos estimadores obtidos pelo método dos momentos, ir-se-á expor, em seguida, as correspondentes propriedades dos estimadores dos mínimos quadrados num quadro de regressões iterativas, conforme foram apresentadas por Müller, D. e Wei, W.W.S. (1997).

Para tal, suponha-se que se encontram disponíveis n observações de β_t e α_t de acordo com o modelo (2.2.4) e considere-se o seguinte quadro de regressões iterativas:

(1) Ajusta-se às observações o modelo de regressão linear múltiplo,

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{(0)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^m \omega_{l(m)}^{(0)} \alpha_{t-b-l} + e_{m,t}^{(0)}, \quad t = m+b+1, \dots, n \quad (2.2.10)$$

onde o sub-índice (m) indica a ordem da regressão, o sobre-índice (0) representa o estágio inicial da regressão simples e $e_{m,t}^{(0)}$ é o termo residual correspondente.

O resíduo estimado de (2.2.10), $\hat{e}_{m,t}^{(0)}$, vem dado por,

$$\hat{e}_{m,t}^{(0)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(0)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(0)} \alpha_{t-b-l}, \quad (2.2.11)$$

onde $\hat{\delta}_{i(m)}^{(0)}$ e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(0)}$ representam as estimativas dos mínimos quadrados referentes ao estágio inicial do ajustamento efectuado.

Em relação ao modelo de função transferência $(r,s,b) \times (p,q)$ considerado, é bem sabido que os estimadores dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(0)}$ e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(0)}$ são não consistentes e que os resíduos $\hat{e}_{m,t}^{(0)}$, calculados em (2.2.11), são autocorrelacionados. Assim, reformule-se o anterior modelo de regressão adicionando-lhe uma nova variável, $\hat{e}_{m,t}^{(0)}$.

(2) Considere-se, então, a primeira regressão iterada de ordem m ,

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{(1)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^m \omega_{l(m)}^{(1)} \alpha_{t-b-l} + \theta_{1(m)}^{(1)} \hat{e}_{m,t-1}^{(0)} + e_{m,t}^{(1)}, \quad t = m+b+2, \dots, n \quad (2.2.12)$$

onde o sobre-índice (1) indica a primeira regressão iterada e $e_{m,t}^{(1)}$ representa o correspondente termo residual.

O resíduo estimado de (2.2.12), $\hat{e}_{m,t}^{(1)}$, é dado por

$$\hat{e}_{m,t}^{(1)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(1)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(1)} \alpha_{t-b-l} - \hat{\theta}_{1(m)}^{(1)} \hat{e}_{m,t-1}^{(0)} \quad (2.2.13)$$

onde $\hat{\delta}_{i(m)}^{(1)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{(1)}$ e $\hat{\theta}_{1(m)}^{(1)}$ são as estimativas dos mínimos quadrados correspondentes à primeira regressão iterada.

(3) Generalizando, para $j = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 1, 2, \dots$, define-se a j -ésima regressão iterativa de ordem m do seguinte modo

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{(j)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^m \omega_{l(m)}^{(j)} \alpha_{t-b-l} + \sum_{u=1}^j \theta_{u(m)}^{(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)} + e_{m,t}^{(j)}, \quad t = m + b + j + 1, \dots, n \quad (2.2.14)$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{(v)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(v)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(v)} \alpha_{t-b-l} - \sum_{u=1}^v \hat{\theta}_{u(m)}^{(v)} \hat{e}_{m,t-u}^{(v-u)}$ é o resíduo estimado da v -

ésima regressão iterativa de ordem m e, $\hat{\delta}_{i(m)}^{(v)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{(v)}$ e $\hat{\theta}_{u(m)}^{(v)}$ são as correspondentes estimativas dos mínimos quadrados.

A convergência em probabilidade dos estimadores dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$, do modelo (2.2.14), para os parâmetros δ_i^* e ω_l^* , respectivamente, é estabelecida com base nos lemas a seguir apresentados.

Lema 2.4: Para quaisquer inteiros positivos m e j ,

$$\hat{e}_{m,t}^{(j)} = \hat{e}_{m+j,t}^{(0)},$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{(j)}$ é a série residual estimada da j -ésima regressão iterada de ordem m e

$\hat{e}_{m+j,t}^{(0)} = \hat{\delta}_{m+j}^{(0)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_{m+j}^{(0)}(B)\alpha_{t-b}$ é o resíduo estimado do modelo de regressão linear múltiplo de ordem $m + j$.

Demonstração:

Sejam

$$\hat{\delta}_m^{(j)}(B) = 1 - \hat{\delta}_{1(m)}^{(j)}B - \dots - \hat{\delta}_{m(m)}^{(j)}B^m$$

e

$$\hat{\omega}_m^{(j)}(B) = \hat{\omega}_{0(m)}^{(j)} + \hat{\omega}_{1(m)}^{(j)}B + \cdots + \hat{\omega}_{m(m)}^{(j)}B^m$$

os polinômios estimados associados à j -ésima regressão iterada de ordem m (2.2.14).

Uma vez que,

$$\hat{e}_{m,t-1}^{(0)} = \hat{\delta}_m^{(0)}(B)\beta_{t-1} - \hat{\omega}_m^{(0)}(B)\alpha_{t-b-1}$$

e substituindo este valor em (2.2.12), a primeira regressão iterada de ordem m pode ser reescrita como uma regressão linear múltipla de ordem $m+1$. Então, resulta que

$$\hat{e}_{m,t}^{(1)} = \hat{e}_{m+1,t}^{(0)}.$$

Repetindo, sucessivamente, o mesmo argumento, completa-se a demonstração do lema. ■

Admita-se, agora, que existem os estimadores dos mínimos quadrados, $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ ($i = 1, \dots, m$), $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, m$) e $\hat{\theta}_{u(m)}^{(j)}$ ($u = 1, \dots, j$). Então, a partir das equações normais da j -ésima regressão iterada (2.2.14), tem-se o seguinte conjunto de equações:

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad h = 1, \dots, m \quad (2.2.15a)$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (2.2.15b)$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad u = 1, \dots, j. \quad (2.2.15c)$$

Ora, pelo lema 2.4, (2.2.15) é equivalente ao conjunto de equações normais [Müller, D. e Wei, W.W.S. (1993)],

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad h = 1, \dots, m+j \quad (2.2.16a)$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m+j, \quad (2.2.16b)$$

podendo as estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ e $\hat{\theta}_{u(m)}^{(j)}$ da j -ésima regressão iterada de ordem m serem determinadas tanto pelo sistema de equações (2.2.15) como pelo sistema (2.2.16).

Lema 2.5: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, m$), obtidas na regressão iterada (2.2.14), são equivalentes à solução do sistema de equações

$$\gamma_{\rho}^*(h) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(j)} \gamma_{\rho}^*(h-i) + \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(j)} \gamma_{\alpha\beta}^*(b+l-h), \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (2.2.17a)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^*(b+k) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(j)} \gamma_{\alpha\beta}^*(b+k-i) + \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(j)} \gamma_{\alpha}^*(k-l), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (2.2.17b)$$

onde $\gamma_{\alpha}^*(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-h} \alpha_t$, $\gamma_{\rho}^*(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \beta_t$ e $\gamma_{\alpha\beta}^*(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-h} \beta_t$.

Demonstração:

A partir de (2.2.16), considere-se o conjunto particular de equações

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (2.2.18a)$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t}^{(j)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.2.18b)$$

Tomando

$$\Omega_{j,t} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(j)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(j)} \alpha_{t-b-l}, \quad (2.2.19)$$

tem-se, da j -ésima estimação dos mínimos quadrados iterada,

$$\hat{e}_{m,t}^{(j)} = \Omega_{j,t} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)},$$

podendo o sistema (2.2.18) ser escrito na forma

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \Omega_{j,t} = \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{(j)} \sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)}, \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (2.2.20a)$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \Omega_{j,t} = \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{(j)} \sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.2.20b)$$

Ora, pelo lema 2.4,

$$\hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)} = \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{(0)},$$

onde $\hat{e}_{m+j-u,t-u}^{(0)} = \hat{\delta}_{m+j-u}^{(0)}(B)\beta_{t-u} - \hat{\omega}_{m+j-u}^{(0)}(B)\alpha_{t-b-u}$, $t = m+j+b+1, \dots, n$, é a série residual estimada da regressão linear múltipla de ordem $m+j-u$ e cujas equações normais correspondentes são

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{(0)} = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m; \quad u = 1, \dots, j$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{(0)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad u = 1, \dots, j,$$

isto é,

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)} = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m; \quad u = 1, \dots, j$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-u)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad u = 1, \dots, j.$$

Assim, as equações (2.2.20) reduzem-se a

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \beta_{t-h} \Omega_{j,t} = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (2.2.21a)$$

$$\sum_{t=m+b+j+1}^n \alpha_{t-b-k} \Omega_{j,t} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (2.2.21b)$$

em que $\Omega_{j,t}$ é dado por (2.2.19).

Dividindo o sistema (2.2.21) por n , com $\Omega_{j,t}$ substituído pelo seu valor em (2.2.19), completa-se a demonstração do lema. ■

Sob a suposição de as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ se encontrarem fora do círculo unitário, tem-se, pelo lema 2.2 e para $h \geq 0$,

$$\tilde{\gamma}_\alpha(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} \alpha_t \alpha_{t+h} = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{m+b+j} \alpha_{t-h} \alpha_t + \gamma_\alpha^*(h) \quad , \quad \tilde{\gamma}_\beta(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{m+b+j} \beta_{t-h} \beta_t + \gamma_\beta^*(h) \quad e$$

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{m+b+j} \alpha_{t-h} \beta_t + \gamma_{\alpha\beta}^*(h).$$

Ora, uma vez que $\frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{m+b+j} \alpha_{t-h} \alpha_t = O_p(n^{-1}) = o_p(1)$, $\frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{m+b+j} \beta_{t-h} \beta_t = o_p(1)$ e

$$\frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^{m+b+j} \alpha_{t-h} \beta_t = o_p(1), \text{ vem}$$

$$\gamma_\alpha^*(h) = \gamma_\alpha + o_p(1) \quad , \quad \gamma_\beta^*(h) = \gamma_\beta + o_p(1) \quad e \quad \gamma_{\alpha\beta}^*(h) = \gamma_{\alpha\beta} + o_p(1). \quad (2.2.22)$$

Assim, tendo em conta (2.2.22) pode verificar-se que as equações (2.2.17) convergem em probabilidade para as equações (2.2.5), as quais apresentam uma matriz associada não singular nas condições estabelecidas no lema 2.3. Nestas condições, fica demonstrada a consistência dos estimadores dos mínimos quadrados iterados e o teorema seguinte pode, então, ser enunciado:

Teorema 2.2: Sejam β_t e α_t duas sucessões cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ dado em (2.2.1), tal que as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ se encontram fora do círculo unitário. Então, tem-se

$$\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)} = \delta_i^* + o_p(1) \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)} = \omega_l^* + o_p(1) \quad , \quad l = 0, 1, \dots, m \quad ,$$

quando

(a) $m = p + r$ e $j \geq \max(p + r, r + q)$, se $r \geq s$,

(b) $p + s \leq m \leq \max(p + s, r + q)$ e $j = \max(p + s, r + q)$, se $r \leq s$,

onde está subentendido que $\delta_i^* = 0$ para $i > p + r$ e $\omega_l^* = 0$ para $l > p + s$. ■

Como facilmente pode ser verificado, este teorema generaliza o resultado obtido por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984). Com efeito, se $\alpha_i \doteq 0$, quase certamente nula, o modelo reduz-se a um processo do tipo $ARMA(p, q)$, e o procedimento, acima exposto, torna-se equivalente à estimação dos parâmetros AR através de regressões iterativas considerada por aqueles dois autores.

Da definição do modelo (2.2.1), tem-se

$$\delta_r(B) = [\phi_p(B)]^{-1} \delta_{p+r}^*(B) \quad \text{e} \quad \omega_s(B) = [\phi_p(B)]^{-1} \omega_{p+s}^*(B).$$

Sejam $\bar{\delta}_m^{(j)}(B)$ e $\bar{\omega}_m^{(j)}(B)$ os polinómios estimados de $\delta_r(B)$ e $\omega_s(B)$, respectivamente, definidos por

$$\bar{\delta}_m^{(j)}(B) = [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} \hat{\delta}_m^{(j)}(B) \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_m^{(j)}(B) = [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} \hat{\omega}_m^{(j)}(B),$$

onde $\hat{\phi}_p(B)$ é o polinómio AR estimado consistente para a sucessão residual,

$$\hat{\delta}_m^{(j)}(B) = 1 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{(j)} B^i \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_m^{(j)}(B) = \sum_{l=0}^m \hat{\omega}_{l(m)}^{(j)} B^l. \quad \text{Então, como consequência do}$$

Teorema 2.2, obtém-se o seguinte resultado:

Corolário: Nas condições de convergência estabelecidas no teorema 2.2, tem-se

$$\bar{\delta}_m^{(j)}(B) = \delta_r(B) + o_p(1) \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_m^{(j)}(B) = \omega_s(B) + o_p(1),$$

i.e., todos os coeficientes estimados dos polinómios $\bar{\delta}_m^{(j)}(B)$ e $\bar{\omega}_m^{(j)}(B)$ convergem em probabilidade para os coeficientes correspondentes em $\delta_r(B)$ e $\omega_s(B)$, respectivamente. ■

A partir dos resultados teóricos obtidos, Müller, D. e Wei, W.W.S. (1997) propuseram, então, uma metodologia de identificação dos modelos de função transferência racionais, que se passa a descrever.

A identificação de um modelo de função transferência racional diz respeito ao procedimento utilizado para determinar os valores do parâmetro de desfasamento b , das ordens polinomiais r e s da função transferência racional $v(B)$, e das ordens p e q do modelo *ARMA* ajustado à sucessão residual de (2.1.4).

Como foi referido na secção anterior, as identificações de b , p e q são relativamente simples. De facto, a especificação de b é imediata através da função de correlação cruzada amostral entre α_i e β_i , uma vez que $r_{\alpha\beta}(k) \doteq 0$ para $k < b$ e, como consequência, o valor de b será correspondente ao primeiro desfasamento que torna esta função de correlação não nula. Os valores de p e q são determinados da forma habitual por análise dos comportamentos das funções de autocorrelação, autocorrelação parcial e autocorrelação estendida amostrais dos resíduos $\hat{e}_i = \beta_i - \hat{v}(B)\alpha_i$.

No que se refere à especificação das ordens r e s associadas aos polinómios “output” e “input”, respectivamente, a problemática de identificação não é óbvia. Com efeito, reveste-se de grande subjectividade quando realizada apenas e através do padrão apresentado pela função $r_{\alpha\beta}(k)$, consoante foi exemplificado anteriormente.

De acordo com a metodologia de identificação proposta por aqueles dois autores, pressupõe-se previamente determinados os valores de b , p , e q pelos métodos acima mencionados. Em seguida, a especificação de r e s é realizada através do ajustamento sucessivo do modelo de regressão definido em (2.2.14), com $m = \max(p+r, p+s)$, ou seja, mais concretamente, para cada j -ésima regressão iterada descrita em (2.2.14), com

$j \geq \max(p, q)^2$, calculam-se as estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ para $m = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, m$ e $l = 0, 1, \dots, m$, as quais serão dispostas em quadros de duas entradas conforme é indicado nas Tabelas 2.2.1 e 2.2.2.

Tabela 2.2.1: Os coeficientes de $\hat{\delta}_m^{(j)}(B)$

| $m \backslash i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----|
| 1 | $\hat{\delta}_{1(1)}^{(j)}$ | | | | |
| 2 | $\hat{\delta}_{1(2)}^{(j)}$ | $\hat{\delta}_{2(2)}^{(j)}$ | | | |
| 3 | $\hat{\delta}_{1(3)}^{(j)}$ | $\hat{\delta}_{2(3)}^{(j)}$ | $\hat{\delta}_{3(3)}^{(j)}$ | | |
| 4 | $\hat{\delta}_{1(4)}^{(j)}$ | $\hat{\delta}_{2(4)}^{(j)}$ | $\hat{\delta}_{3(4)}^{(j)}$ | $\hat{\delta}_{4(4)}^{(j)}$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Tabela 2.2.2: Os coeficientes de $\hat{\omega}_m^{(j)}(B)$

| $m \backslash l$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----|
| 1 | $\hat{\omega}_{0(1)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(1)}^{(j)}$ | | | | |
| 2 | $\hat{\omega}_{0(2)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(2)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{2(2)}^{(j)}$ | | | |
| 3 | $\hat{\omega}_{0(3)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(3)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{2(3)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{3(3)}^{(j)}$ | | |
| 4 | $\hat{\omega}_{0(4)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(4)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{2(4)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{3(4)}^{(j)}$ | $\hat{\omega}_{4(4)}^{(j)}$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

² De acordo com o teorema 2.2, $j = \max(p, q)$ representa a iteração a partir da qual os estimadores dos mínimos quadrados iterados poderão, eventualmente, ser consistentes.

Então, com base no resultado estabelecido no teorema 2.2, a identificação de r e s é feita da seguinte forma:

(a) Se para uma iteração concreta j surgem, pela primeira vez em determinada linha m de uma das tabelas, elementos estatisticamente não significativos a partir de certo valor de i ou de l , consoante a tabela, i.e., $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)} \neq 0$ e $\hat{\delta}_{i'(m)}^{(j)} \equiv 0$ para $i' > i$ ou $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)} \neq 0$ e $\hat{\omega}_{l'(m)}^{(j)} \equiv 0$ para $l' > l$, então, pára-se o processo iterativo e analisam-se as respectivas tabelas.

Assim, verificando-se a ocorrência acabada de referir na m -ésima linha na tabela $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$, considera-se $m = p + s$ e toma-se $s = \max(0, m - p)$. O valor de $p + r$ é identificável com a coluna onde se posiciona o último valor significativo da linha em causa. Supondo que aquela se encontra na posição i , tem-se $r = \max(0, i - p)$. Se todos os elementos da linha forem estatisticamente nulos, então $r = 0$. De forma idêntica, se a linha m com elementos não significativos surgir primeiro na tabela $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$, então $m = p + r$ e toma-se $r = \max(0, m - p)$. Da posição da coluna do último elemento significativamente diferente de zero retira-se o valor de $p + s$. Sendo l essa coluna, tem-se $s = \max(0, l - p)$. Se todos os valores da linha são estatisticamente nulos, considera-se $s = 0$.

No caso em que a primeira linha com elementos não significativos ocorre, simultaneamente, na mesma linha das duas tabelas, ou seja na linha m de ambas, tem-se $m = p + r = p + s$, e então $r = s = \max(0, m - p)$.

(b) Se em nenhuma das m linhas dos quadros $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ aparecerem elementos significativamente iguais a zero a partir de determinado valor de i ou de l , será necessário incrementar o valor de j e repetir o processo anterior.

(c) Após os valores de r e s serem determinados, é preciso verificar se as condições de convergência do teorema 2.2 são satisfeitas, em particular, verificar se a iteração j corresponde a uma situação de convergência dos estimadores iterados. Em caso afirmativo, especifica-se o modelo $(r,s,b) \times (p,q)$ para as séries em estudo e termina-se o processo de identificação. Caso contrário, incrementa-se, novamente, a ordem j da regressão iterada e repetem-se os passos (a) e (b).

No procedimento acabado de descrever, faz-se apelo à necessidade de verificar a significância estatística dos parâmetros estimados. Ora, esta pode ser avaliada tendo em consideração que os estimadores dos mínimos quadrados possuem assintoticamente uma distribuição Normal multivariada [Wei, W.W.S. (1990)]. Assim, sendo φ um parâmetro arbitrário do qual se conhece uma sua estimativa dos mínimos quadrados, $\hat{\varphi}$, e o respectivo desvio padrão $\hat{\sigma}(\hat{\varphi})$, testa-se a hipótese da nulidade do parâmetro, $H_0 : \varphi = 0$, ao nível de, por exemplo, 5%, recorrendo à região crítica $|\hat{\varphi}| > 1.96 \hat{\sigma}(\hat{\varphi})$, ou seja, rejeita-se H_0 quando o rácio $|t| = \left| \frac{\hat{\varphi}}{\hat{\sigma}(\hat{\varphi})} \right|$ é superior a 1.96.

Seguidamente, apresenta-se um exemplo que ilustra o processo de identificação das ordens polinomiais r e s acima exposto.

Exemplo: Considerem-se as duas séries sobre fornos a gás referidas no exemplo 1 da secção anterior, onde foram identificadas, através do comportamento da função de correlação amostral entre as sucessões branqueadas, as possíveis funções transferência com $(r,s,b) = (1,2,3)$, $(r,s,b) = (1,3,3)$, $(r,s,b) = (2,2,3)$ ou $(r,s,b) = (0,4,3)$.

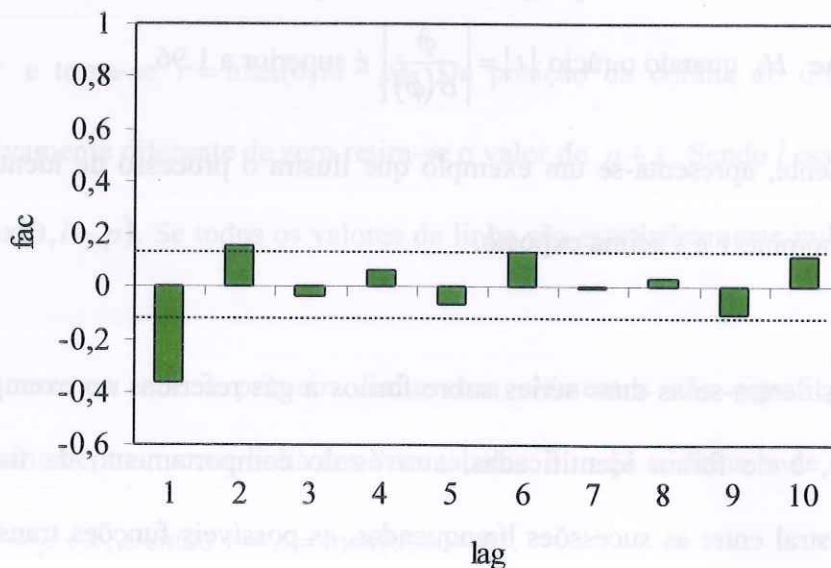
Após o branqueamento das séries "input" e "output" por um modelo $AR(3)$ para a sucessão "input", com $\hat{\phi}_1 = 1.97$, $\hat{\phi}_2 = -1.37$ e $\hat{\phi}_3 = 0.34$ [Box et al.(1994)], e a

especificação do parâmetro de desfasamento $b = 3$ (Tabela 2.1.1 - $r_{\alpha\beta}(k) \neq 0$ para $k \leq 2$), a análise da função de autocorrelação amostral dos resíduos (Tabela 2.2.3; Figura 2.2.1) sugere, para a série residual, um modelo *ARMA* com $p = 0$ e $q = 2$.

Tabela 2.2.3: Função de autocorrelação amostral da série residual

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------------|--------------|-------------|-------|------|-------|------|-------|------|-------|------|
| $r_e(k)$ | -.364 | .153 | -.036 | .063 | -.070 | .135 | -.002 | .034 | -.108 | .118 |
| $\hat{\sigma}(r_e)$ | .061 | .069 | .070 | .070 | .070 | .070 | .071 | .071 | .071 | .072 |

Figura 2.2.1: Autocorrelações dos resíduos – Bandas $\pm 1.96 \times \hat{\sigma}(r_e)$



Assim, com b , p e q já determinados, procede-se à identificação de r e s utilizando o quadro de regressões iterativas descritas anteriormente. O cálculo das estimativas dos

mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ e $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$, com $m = 1, 2, 3, \dots$ para $j = \max(p, q) = 2$, a primeira iteração considerada, permite obter os seguintes valores, apresentados nas Tabelas 2.2.4 e 2.2.5. Note-se que entre parênteses encontram-se os rácios t associados.

Tabela 2.2.4: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ para $j = 2$

| $m \backslash i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|-----------------|------------------|------------------|----------------|
| 1 | 0.83 (10.07) | | | |
| 2 | 0.34 (3.09) | 0.21 (2.22) | | |
| 3 | 1.27 (1.46) | -0.11 (-0.46) | -0.27 (-1.18) | |
| 4 | 0.05 (0.02) | 0.11 (0.85) | 0.01 (0.12) | 0.00 (0.18) |

Tabela 2.2.5: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ para $j = 2$

| $m \backslash l$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 | -0.51 (-5.57) | -0.20 (-2.22) | | | |
| 2 | -0.52 (-6.22) | -0.49 (-4.99) | -0.53 (-5.38) | | |
| 3 | -0.54 (-6.41) | 0.00 (0.01) | -0.08 (-0.17) | 0.40 (0.84) | |
| 4 | -0.54 (-6.34) | -0.63 (-1.69) | -0.78 (-1.78) | -0.36 (-0.77) | -0.19 (-0.97) |

A primeira linha com elementos estatisticamente nulos, de acordo com o critério anteriormente definido, surge, simultaneamente, na terceira linha das duas tabelas

(rácio $|t| < 1.96$) , resultando $m = 3 = p + r = p + s$ e, conseqüentemente, $r = s = \max(0,3) = 3$. Identifica-se, assim, o modelo $(3,3,3) \times (0,2)$ relativamente ao qual é necessário verificar se as condições de convergência do teorema 2.2 são satisfeitas. Ora, como o modelo foi escolhido para uma iteração com $j = 2$ e, pelas condições de convergência, ter-se-ia de ter para este modelo concreto $j \geq \max(p + r, p + s, r + q) = \max(3,3,5) = 5$, conclui-se que estas claramente não são verificadas, sendo, por isso, necessário incrementar o valor de j .

Repete-se, então, o mesmo procedimento para $j = 3$, encontrando-se as estimativas dos mínimos quadrados iteradas e os rácios t associados nas Tabelas 2.2.6 e 2.2.7.

Tabela 2.2.6: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ para $j = 3$

| $m \backslash i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|-----------------|------------------|------------------|----------------|
| 1 | 0.85 (10.87) | | | |
| 2 | 0.44 (2.58) | 0.09 (0.66) | | |
| 3 | 0.37 (0.59) | -0.15 (-0.55) | -0.04 (-0.36) | |
| 4 | 0.98 (0.78) | -0.89 (-1.16) | 0.06 (0.57) | 0.22 (1.37) |

Tabela 2.2.7: As estimativas dos mínimos quadrados $\hat{\omega}_{l(m)}^{(j)}$ para $j = 3$

| $m \backslash l$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 | -0.63 (-5.57) | -0.20 (-1.97) | | | |
| 2 | -0.53 (-6.31) | -0.49 (-3.58) | -0.52 (-5.03) | | |
| 3 | -0.53 (-6.29) | -0.47 (-1.26) | -0.54 (-1.59) | -0.08 (-0.18) | |
| 4 | -0.54 (-6.33) | -0.13 (-0.56) | -0.70 (-1.17) | -0.19 (-0.68) | -0.47 (-1.76) |

O primeiro elemento estatisticamente nulo aparece, agora, na segunda linha do quadro $\hat{\delta}_{i(m)}^{(j)}$ (Tabela 2.2.6), tendo-se $m = 2 = p + s$ resultando $s = \max(0, m - p) = 2$. De igual modo, o último elemento significativo surge na primeira coluna da mesma linha e, então, $i = p + r = 1$ e $r = \max(0, 1 - p) = 1$. Para $r = 1$, $s = 2$, $p = 0$ e $q = 2$ as condições de convergência estabelecidas no teorema 2.2 encontram-se agora satisfeitas, especificando-se, assim, o modelo de função transferência racional (1,2,3)×(0,2) tal como foi identificado por Box et al. (1994), i.e.,

$$\beta_t = \frac{\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B} \alpha_{t-3} + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t.$$

Uma vez que $\alpha_t = \phi_x(B)X_t$ e $\beta_t = \phi_y(B)Y_t$, onde $\phi_x(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3$,

o modelo pode ser reescrito em termos de X_t e Y_t como

$$Y_t = \frac{\omega_0 + \omega_1 B + \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B} X_{t-3} + \frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3} a_t.$$

Os parâmetros associados a este modelo podem ser estimados pelo método da máxima verosimilhança ou por um método dos mínimos quadrados não linear generalizado, utilizando software apropriado, tal como o AUTOBOX ou o SCA.

Assim, aplicando o software AUTOBOX, procedeu-se à estimação dos parâmetros, resultando

$$Y_t = \frac{-0.53 - 0.38B - 0.52B^2}{1 - 0.55B} X_{t-3} + \frac{1 - 0.54B - 0.14B^2}{1 - 1.97B + 1.37B^2 - 0.34B^3} a_t,$$

valores muito próximos dos obtidos, na regressão iterada para $j = 3$ e $m = 2$ (Tabelas 2.2.6 e 2.2.7), para as estimativas de δ_l e ω_l , $l = 0, 1, 2$, i.e.,

$$\hat{\delta}_{1(2)}^{(3)} = 0.44, \hat{\omega}_{0(2)}^{(3)} = -0.53, \hat{\omega}_{1(2)}^{(3)} = -0.49 \text{ e } \hat{\omega}_{2(2)}^{(3)} = -0.52.$$

CAPÍTULO 3.

Procedimento Alternativo de Identificação dos Modelos de Função Transferência

Tomando como ponto de partida os resultados obtidos por Müller, D. e Wei, W.W.S. (1997), desenvolve-se, neste capítulo, uma nova formulação teórica relativa ao processo de identificação das ordens r e s associadas aos polinómios "output" e "input", respectivamente, com o propósito de melhorar o procedimento de especificação das referidas ordens, suprimindo o seu carácter subjectivo.

Assim, na sequência do trabalho desenvolvido para os modelos *ARMA* por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), é introduzida, na primeira secção, uma generalização do conceito de Função de Autocorrelação Estendida Amostral aos modelos de função transferência.

Na segunda secção apresenta-se um resultado assintótico para a função de correlação cruzada entre a série "input" e a sucessão residual, no quadro dos estimadores dos mínimos quadrados obtidos por regressões iteradas.

Os desenvolvimentos teóricos resultantes levam, então, ao estabelecimento de uma metodologia de identificação dos modelos de função transferência, que é exposta na secção 3.3., sendo apresentado, na quarta secção, um exemplo que ilustra as potencialidades do procedimento proposto.

Na secção 3.5 são demonstradas duas propriedades dos estimadores dos mínimos quadrados iterados, sendo referido, na sexta e última secção, um caso particular de sobreajustamento.

3.1 Função de Autocorrelação Estendida Generalizada Amostral

O modelo de função transferência racional (2.2.1),

$$\delta_{p+r}^*(B)\beta_t = \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b} + \theta_{r+q}^*(B)a_t,$$

pode ser escrito na forma

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_i^* \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_l^* \alpha_{t-b-l} + a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u}, \quad (3.1.1)$$

onde $m \geq p+r$ e $s' \geq s$, estando subentendido que $\delta_i^* = 0$ para $i > p+r$ e $\omega_l^* = 0$ para $l > p+s$.

Multiplicando ambos os membros de (3.1.1), sucessivamente, por β_{t-h} para $h = j+1, \dots, j+m$ e $j \geq r+q$, e por α_{t-b-k} para $k = 0, 1, \dots, p+s'$, e tomando os respectivos valores esperados, tem-se

$$E(\beta_t \beta_{t-h}) = \sum_{i=1}^m \delta_i^* E(\beta_{t-i} \beta_{t-h}) + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_l^* E(\alpha_{t-b-l} \beta_{t-h}) + E(a_t \beta_{t-h}) - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* E(a_{t-u} \beta_{t-h})$$

e

$$E(\alpha_{t-b-k} \beta_t) = \sum_{i=1}^m \delta_i^* E(\alpha_{t-b-k} \beta_{t-i}) + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_l^* E(\alpha_{t-b-k} \alpha_{t-b-l}) + E(\alpha_{t-b-k} a_t) - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* E(\alpha_{t-b-k} a_{t-u}).$$

Ora, tendo em consideração que

$$E(\beta_t) = E(\alpha_t) = E(a_t) = 0, \quad \forall t$$

e que α_t e a_t são dois ruídos brancos não correlacionados, i.e.,

$$\text{Cov}(\alpha_t, a_s) = \gamma_{\alpha a}(s-t) = 0, \quad \forall t, s,$$

obtem-se, então, as seguintes $(m + p + s' + 1)$ equações,

$$\gamma_{\beta}(h) = \sum_{i=1}^m \delta_i^* \gamma_{\beta}(h-i) + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_l^* \gamma_{\alpha\beta}(b+l-h), \quad h = j+1, \dots, j+m; \quad j \geq r+q \quad (3.1.2a)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(b+k) = \sum_{i=1}^m \delta_i^* \gamma_{\alpha\beta}(b+k-i) + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_l^* \gamma_{\alpha}(k-l), \quad k=0,1,\dots,p+s'. \quad (3.1.2b)$$

Assim, os estimadores obtidos pelo método dos momentos $(\hat{\delta}_1^j, \dots, \hat{\delta}_m^j)$ e $(\hat{\omega}_0^j, \dots, \hat{\omega}_{p+s'}^j)$ dos parâmetros δ_i^* ($i=1, \dots, m$) e ω_l^* ($l=0, 1, \dots, p+s'$), respectivamente, podem ser determinados como soluções do seguinte sistema de equações, onde as funções de covariância teóricas foram substituídas em (3.1.2) pelas correspondentes funções amostrais,

$$\hat{\gamma}_{\beta}(h) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_i^j \hat{\gamma}_{\beta}(h-i) + \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_l^j \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(b+l-h), \quad h=j+1, \dots, j+m; \quad j \geq r+q \quad (3.1.3a)$$

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta}(b+k) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_i^j \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(b+k-i) + \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_l^j \hat{\gamma}_{\alpha}(k-l), \quad k=0,1,\dots,p+s'. \quad (3.1.3b)$$

Note-se que este sistema de equações é aparentemente igual ao sistema (2.2.6). Com efeito, os somatórios dos segundos membros das equações (3.1.3) apresentam limites de variação diferentes. Por esta razão, ter-se-á de fazer um novo estudo sobre as condições de convergência dos estimadores obtidos através destas últimas equações. Como se verá adiante, apesar das demonstrações serem semelhantes às desenvolvidas no capítulo anterior, os resultados surgem, agora, ligeiramente alterados.

Considere-se, então, a matriz, de ordem $(m+p+s'+1) \times (m+p+s'+1)$, associada ao sistema de equações (3.1.2),

$$\mathbf{A}_m^{s'(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^{(j)} & \mathbf{C}_m^{s'(j)} \\ \mathbf{D}_m^{s'} & \sigma_{\alpha}^2 \mathbf{1}_{p+s'+1} \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{B}_m^{(j)} = \begin{bmatrix} \gamma_\beta(j) & \gamma_\beta(j-1) & \cdots & \gamma_\beta(j-m+1) \\ \gamma_\beta(j+1) & \gamma_\beta(j) & \cdots & \gamma_\beta(j-m+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_\beta(j+m-1) & \gamma_\beta(j+m-2) & \cdots & \gamma_\beta(j) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_m^{s'(j)} = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta}(b-j-1) & \gamma_{\alpha\beta}(b-j) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-j+p+s'-1) \\ \gamma_{\alpha\beta}(b-j-2) & \gamma_{\alpha\beta}(b-j-1) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-j+p+s'-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\alpha\beta}(b-j-m) & \gamma_{\alpha\beta}(b-j-m+1) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-j+p+s'-m) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_m^{s'} = \begin{bmatrix} \gamma_{\alpha\beta}(b-1) & \gamma_{\alpha\beta}(b-2) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-m) \\ \gamma_{\alpha\beta}(b) & \gamma_{\alpha\beta}(b-1) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b-m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\alpha\beta}(b+p+s'-1) & \gamma_{\alpha\beta}(b+p+s'-2) & \cdots & \gamma_{\alpha\beta}(b+p+s'-m) \end{bmatrix}$$

e

$$\sigma_\alpha^2 \mathbf{I}_{p+s'+1} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \sigma_\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

são matrizes de ordem, respectivamente, $(m \times m)$, $(m \times (p+s'+1))$, $((p+s'+1) \times m)$ e $((p+s'+1) \times (p+s'+1))$, formadas pelos coeficientes dos segundos membros das equações (3.1.2).

As condições em que a matriz $\mathbf{A}_m^{s'(j)}$ é não singular são, agora, estabelecidas no lema seguinte:

Lema 3.1: Se β_i e α_i seguem o modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$

(2.2.1), com as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ fora do círculo unitário, então, o determinante da

matriz $\mathbf{A}_m^{s'(j)}$, $\det(\mathbf{A}_m^{s'(j)})$, é diferente de zero, quando

(a) $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$.

- (b) $s' = s$, $m \geq p+r$ e $j = \max(p+s, r+q)$,
 (c) $s' > s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s', r+q)$,
 (d) $s' > s$, $m \geq p+r$ e $j = \max(p+s', r+q) = r+q$.

Demonstração:

O determinante da matriz $A_m^{s'(j)}$ é dado por

$$\det(A_m^{s'(j)}) = \det(B_m^{(j)}) \cdot \det(\sigma_\alpha^2 \mathbf{1}_{p+s'+1} - \mathbf{D}_m^{s'} (B_m^{(j)})^{-1} \mathbf{C}_m^{s'(j)}).$$

Ora, pelo lema 2.1, $\beta_t \sim ARMA(p+r, q^*)$, onde $q^* = \max(p+s, r+q)$. Nestas condições, a matriz

$$\mathbf{B}_{p+r}^{q^*} = \begin{bmatrix} \gamma_\beta(q^*) & \gamma_\beta(q^*-1) & \cdots & \gamma_\beta(q^*-(p+r)+1) \\ \gamma_\beta(q^*+1) & \gamma_\beta(q^*) & \cdots & \gamma_\beta(q^*-(p+r)+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_\beta(q^*+(p+r)-1) & \gamma_\beta(q^*+(p+r)-2) & \cdots & \gamma_\beta(q^*) \end{bmatrix},$$

de ordem $((p+r) \times (p+r))$, é constituída pelos coeficientes $\gamma_\beta(\cdot)$, dos segundos membros das correspondentes equações de Yule-Walker generalizadas, i.e.,

$$\gamma_\beta(h) = \sum_{i=1}^{p+r} \delta_i^* \gamma_\beta(h-i), \quad h = q^*+1, \dots, q^*+(p+r).$$

Deste modo, comparando $\mathbf{B}_m^{(j)}$ com $\mathbf{B}_{p+r}^{q^*}$, e fazendo apelo ao lema 5.6 em Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), tem-se

$$\det(\mathbf{B}_m^{(j)}) \neq 0 \quad \text{para} \quad m = p+r \quad \text{e} \quad j \geq \max(p+s, r+q), \quad \forall s', \quad (3.1.4a)$$

e

$$\det(\mathbf{B}_m^{(j)}) \neq 0 \quad \text{para} \quad m \geq p+r \quad \text{e} \quad j = \max(p+s, r+q), \quad \forall s'. \quad (3.1.4b)$$

Além disso, tendo em conta que $\gamma_{\alpha\beta}(k) = 0$, $k < b$, e que se tomou $j \geq r+q$, vem

$$C_m^{s'(j)} = 0 \quad \text{para } j \geq \max(p+s', r+q) \quad \text{com } s' \geq s. \quad (3.1.5)$$

Assim, por (3.1.4) e (3.1.5), tem-se, para $s' = s$,

$$\det(A_m^{s'(j)}) = \det(B_m^{(j)}) \cdot \sigma_a^{2(p+s'+1)} \neq 0 \quad \text{se } m = p+r \quad \text{e } j \geq \max(p+s, r+q)$$

e

$$\det(A_m^{s'(j)}) \neq 0 \quad \text{se } m \geq p+r \quad \text{e } j = \max(p+s, r+q),$$

o que prova (a) e (b).

Tomando $s' > s$, resulta de (3.1.4a) e (3.1.5) que

$$\det(A_m^{s'(j)}) \neq 0 \quad \text{para } m = p+r \quad \text{e } j \geq \max(p+s', r+q)$$

e, de (3.1.4b) e (3.1.5), que

$$\det(A_m^{s'(j)}) \neq 0 \quad \text{para } m \geq p+r \quad \text{e } j = \max(p+s', r+q) = r+q,$$

ficando demonstrados (c) e (d). ■

Está-se, agora, em condições de estabelecer a consistência dos estimadores dos momentos. Com efeito, pelo lema 2.2, o sistema de equações (3.1.3) converge em probabilidade para o sistema (3.1.2), em que a respectiva matriz associada é não singular nas condições do lema 3.1. Deste modo, segue-se o lema:

Lema 3.2: Sejam β_i e α_i duas sucessões cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ definido em (2.2.1), em que as raízes de

$\delta_{p+r}^*(B)$ se encontram fora do círculo unitário. Então, tem-se

$$\hat{\delta}_i^j = \delta_i^* + o_p(1), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{\omega}_l^j = \omega_l^* + o_p(1), \quad l = 0, 1, \dots, p+s',$$

quando

$$(a) \quad s' = s, \quad m = p+r \quad \text{e } j \geq \max(p+s, r+q),$$

$$(b) \quad s' = s, \quad m \geq p+r \text{ e } j = \max(p+s, r+q),$$

$$(c) \quad s' > s, \quad m = p+r \text{ e } j \geq \max(p+s', r+q),$$

$$(d) \quad s' > s, \quad m \geq p+r \text{ e } j = \max(p+s', r+q) = r+q,$$

onde está subentendido que $\delta_i^* = 0$ para $i > p+r$ e $\omega_i^* = 0$ para $s' > s$. ■

Estabelecida a consistência dos estimadores dos momentos, efectuar-se-á em seguida o estudo dos estimadores dos mínimos quadrados, num quadro de regressões iteradas diferente do definido na secção 2.2.

Assim, suponha-se que se dispõe de n observações de β_t e α_t , satisfazendo o modelo (2.2.1), admita-se conhecido o valor de p , e construam-se as regressões iteradas de ordem m ($m = p, p+1, p+2, \dots$), sucessivamente para $s' = 0, 1, 2, \dots$, cuja j -ésima regressão iterada é definida da seguinte forma:

(1) Para $s' = 0$:

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{0(j)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^p \omega_{l(m)}^{0(j)} \alpha_{t-b-l} + \sum_{u=1}^j \theta_{u(m)}^{0(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{0(j-u)} + e_{m,t}^{0(j)},$$

$$t = \max(m, b+p) + j + 1, \dots, n; \quad m = p, p+1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde o sub-índice (m) indica o ordem da regressão, o sobre-índice $0(j)$ representa, para $s' = 0$, o estágio da regressão (j) , $e_{m,t}^{0(j)}$ é o termo residual correspondente e

$$\hat{e}_{m,t}^{0(v)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{0(v)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^p \hat{\omega}_{l(m)}^{0(v)} \alpha_{t-b-l} - \sum_{u=1}^v \hat{\theta}_{u(m)}^{0(v)} \hat{e}_{m,t-u}^{0(v-u)}, \text{ em que } \hat{\delta}_{i(m)}^{0(v)}, \hat{\omega}_{l(m)}^{0(v)} \text{ e } \hat{\theta}_{u(m)}^{0(v)}$$

são as correspondentes estimativas dos mínimos quadrados.

(2) Para $s' = 1$, utilizando uma notação semelhante:

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{1(j)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+1} \omega_{l(m)}^{1(j)} \alpha_{t-b-l} + \sum_{u=1}^j \theta_{u(m)}^{1(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{1(j-u)} + e_{m,t}^{1(j)},$$

$$t = \max(m, b+p+1) + j + 1, \dots, n; \quad m = p, p+1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{1(\nu)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{1(\nu)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+1} \hat{\omega}_{l(m)}^{1(\nu)} \alpha_{t-b-l} - \sum_{u=1}^{\nu} \hat{\theta}_{u(m)}^{1(\nu)} \hat{e}_{m,t-u}^{1(\nu-u)}$, em que $\hat{\delta}_{i(m)}^{1(\nu)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{1(\nu)}$ e

$\hat{\theta}_{u(m)}^{1(\nu)}$ são as respectivas estimativas dos mínimos quadrados.

(3) Generalizando para s' :

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l} + \sum_{u=1}^j \theta_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} + e_{m,t}^{s'(j)},$$

$$t = \max(m, b + p + s') + j + 1, \dots, n; \quad m = p, p+1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.1.6)$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{s'(\nu)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(\nu)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(\nu)} \alpha_{t-b-l} - \sum_{u=1}^{\nu} \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(\nu)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(\nu-u)}$ é o resíduo estimado

da ν -ésima regressão iterada de ordem m para s' e, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(\nu)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(\nu)}$ e $\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(\nu)}$ são as correspondentes estimativas dos mínimos quadrados.

A consistência dos estimadores dos mínimos quadrados, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, p + s'$), do modelo (3.1.6), para os parâmetros δ_i^* ($i = 1, \dots, p + r$) e ω_l^* ($l = 0, 1, \dots, p + s$), respectivamente, é provada recorrendo aos lemas 3.3 e 3.4 a seguir apresentados.

Lema 3.3: Para quaisquer inteiros positivos s' , m e j ,

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)},$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{s'(j)}$ é a série residual estimada da j -ésima regressão iterada de ordem m para s'

e $\hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)} = \hat{\delta}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\alpha_{t-b}$ é o resíduo estimado do modelo de regressão linear múltiplo de ordem $(m + j)$ para $(s' + j)$.

Demonstração:

Sejam

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = 1 - \hat{\delta}_{1(m)}^{s'(j)}B - \dots - \hat{\delta}_{m(m)}^{s'(j)}B^m \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\omega}_{0(m)}^{s'(j)} + \hat{\omega}_{1(m)}^{s'(j)}B + \dots + \hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(j)}B^{p+s'}$$

os polinómios estimados associados à j -ésima regressão iterada de ordem m para s' em (3.1.6).

Como

$$\hat{e}_{m,t-1}^{s'(0)} = \beta_{t-1} - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(0)} \beta_{t-1-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(0)} \alpha_{t-b-1-l},$$

a primeira regressão iterada ($j=1$) de ordem m para s' ,

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(1)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(1)} \alpha_{t-b-l} + \theta_{1(m)}^{s'(1)} \hat{e}_{m,t-1}^{s'(0)} + e_{m,t}^{s'(1)},$$

é equivalente, por substituição, a

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(1)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(1)} \alpha_{t-b-l} + \theta_{1(m)}^{s'(1)} \left[\beta_{t-1} - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(0)} \beta_{t-1-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(0)} \alpha_{t-b-1-l} \right] + e_{m,t}^{s'(1)},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \beta_t = & \left[\left(\sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(1)} B^i \right) + \theta_{1(m)}^{s'(1)} \left(B - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(0)} B^{i+1} \right) \right] \beta_t + \\ & + \left[\left(\sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(1)} B^l \right) - \theta_{1(m)}^{s'(1)} \left(\sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(0)} B^{l+1} \right) \right] \alpha_{t-b} + e_{m,t}^{s'(1)}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Ora, o coeficiente da primeira parcela de (3.1.7) corresponde a um polinómio de grau $(m+1)$ e, o da segunda parcela, a um polinómio de grau $(p+s'+1)$, i.e.,

$$\beta_t = \left(\sum_{i=1}^{m+1} \Phi_i B^i \right) \beta_t + \left(\sum_{l=0}^{p+s'+1} \Theta_l B^l \right) \alpha_{t-b} + e_{m,t}^{s'(1)}. \quad (3.1.8)$$

Deste modo, (3.1.8) representa uma regressão linear múltipla de ordem $(m+1)$ para $(s'+1)$, donde, de acordo com a notação que se tem vindo a utilizar,

$$\beta_t = \left(\sum_{i=1}^{m+1} \delta_{i(m+1)}^{s'+1(0)} B^i \right) \beta_t + \left(\sum_{l=0}^{p+s'+1} \omega_{l(m+1)}^{s'+1(0)} B^l \right) \alpha_{t-b} + e_{m+1,t}^{s'+1(0)}. \quad (3.1.9)$$

Assim, de (3.1.8) e (3.1.9), respectivamente, tem-se

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(1)} = \beta_t - \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\Phi}_i \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'+1} \hat{\Theta}_l \alpha_{t-b-l}$$

e

$$\hat{e}_{m+1,t}^{s'+1(0)} = \beta_t - \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(0)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'+1} \hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(0)} \alpha_{t-b-l},$$

o que implica que

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(1)} = \hat{e}_{m+1,t}^{s'+1(0)}. \quad (3.1.10)$$

Considere-se, agora, a segunda regressão iterada ($j = 2$) de ordem m para s' ,

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(2)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(2)} \alpha_{t-b-l} + \theta_{1(m)}^{s'(2)} \hat{e}_{m,t-1}^{s'(1)} + \theta_{2(m)}^{s'(2)} \hat{e}_{m,t-2}^{s'(0)} + e_{m,t}^{s'(2)}. \quad (3.1.11)$$

Ora,

$$\hat{e}_{m,t-2}^{s'(0)} = \beta_{t-2} - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(0)} \beta_{t-2-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(0)} \alpha_{t-b-2-l}$$

e, por (3.1.10),

$$\hat{e}_{m,t-1}^{s'(1)} = \hat{e}_{m+1,t-1}^{s'+1(0)} = \beta_{t-1} - \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(0)} \beta_{t-1-i} - \sum_{l=0}^{p+s'+1} \hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(0)} \alpha_{t-b-1-l}.$$

Assim, (3.1.11) equivale a

$$\begin{aligned} \beta_t = & \left[\left(\sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(2)} B^i \right) + \theta_{1(m)}^{s'(2)} \left(B - \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(0)} B^{i+1} \right) + \theta_{2(m)}^{s'(2)} \left(B^2 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(0)} B^{i+2} \right) \right] \beta_t + \\ & + \left[\left(\sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(2)} B^l \right) - \theta_{1(m)}^{s'(2)} \left(\sum_{l=0}^{p+s'+1} \hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(0)} B^{l+1} \right) - \theta_{2(m)}^{s'(2)} \left(\sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(0)} B^{l+2} \right) \right] \alpha_{t-b} + e_{m,t}^{s'(2)}. \quad (3.1.12) \end{aligned}$$

Os coeficientes das duas primeiras parcelas de (3.1.12) correspondem, respectivamente, a polinómios de grau $(m+2)$ e $(p+s'+2)$, ou seja,

$$\beta_t = \left(\sum_{i=1}^{m+2} \Phi_i B^i \right) \beta_t + \left(\sum_{l=0}^{p+s'+2} \Theta_l B^l \right) \alpha_{t-b} + e_{m,t}^{s'(2)}, \quad (3.1.13)$$

que representa uma regressão linear múltipla de ordem $(m+2)$ para $(s'+2)$, i.e.,

$$\beta_t = \left(\sum_{i=1}^{m+2} \delta_{i(m+2)}^{s'+2(0)} B^i \right) \beta_t + \left(\sum_{l=0}^{p+s'+2} \omega_{l(m+2)}^{s'+2(0)} B^l \right) \alpha_{t-b} + e_{m+2,t}^{s'+2(0)}. \quad (3.1.14)$$

Dos resíduos estimados de (3.1.13) e (3.1.14),

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(2)} = \beta_t - \sum_{i=1}^{m+2} \hat{\Phi}_i \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'+2} \hat{\Theta}_l \alpha_{t-b-l}$$

e

$$\hat{e}_{m+2,t}^{s'+2(0)} = \beta_t - \sum_{i=1}^{m+2} \hat{\delta}_{i(m+2)}^{s'+2(0)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'+2} \hat{\omega}_{l(m+2)}^{s'+2(0)} \alpha_{t-b-l},$$

retira-se que

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(2)} = \hat{e}_{m+2,t}^{s'+2(0)}. \quad (3.1.15)$$

Considerando, agora, a primeira regressão iterada ($j=1$) de ordem $(m+1)$ para $(s'+1)$,

$$\beta_t = \sum_{i=1}^{m+1} \delta_{i(m+1)}^{s'+1(1)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'+1} \omega_{l(m+1)}^{s'+1(1)} \alpha_{t-b-l} + \theta_{1(m+1)}^{s'+1(1)} \hat{e}_{m+1,t-1}^{s'+1(0)} + e_{m+1,t}^{s'+1(1)},$$

vem, por (3.1.10) e (3.1.15),

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(2)} = \hat{e}_{m+1,t}^{s'+1(1)}.$$

Assim, repetindo, sucessivamente, os mesmos argumentos, tem-se que a j -ésima regressão iterada de ordem m para s' pode ser reescrita como uma regressão múltipla de ordem $(m+j)$ para $(s'+j)$, donde $\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)}$, ou como a $(j-u)$ -ésima regressão iterada de ordem $(m+u)$ para $(s'+u)$, $u=1,2,\dots,j-1$, resultando $\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \hat{e}_{m+u,t}^{s'+u(j-u)}$. ■

Admita-se, agora, que existem os estimadores dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i=1,\dots,m$), $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l=0,1,\dots,p+s'$) e $\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)}$ ($u=1,\dots,j$) da j -ésima regressão iterada de ordem m para s' em (3.1.6). Então, a partir das equações normais desta

regressão, tem-se o conjunto de equações, para as quais os referidos estimadores serão suas soluções:

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad h=1, \dots, m \quad (3.1.16a)$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad k=0, 1, \dots, p+s' \quad (3.1.16b)$$

$$\sum_{t=T}^n \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad u=1, \dots, j, \quad (3.1.16c)$$

onde $T = \max(m, b+p+s') + j + 1$.

Ora, pelo lema 3.3,

$$\hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} = \hat{e}_{m+j-u, t-u}^{s'+j-u(0)}$$

e, substituindo o segundo membro desta igualdade por

$$\hat{e}_{m+j-u, t-u}^{s'+j-u(0)} = \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) \beta_{t-u} - \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) \alpha_{t-b-u},$$

(3.1.16c) pode ser escrito como

$$\sum_{t=T}^n \left[\hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) \beta_{t-u} - \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) \alpha_{t-b-u} \right] \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{i=m+1}^{m+j} \hat{\delta}_{i-u(m+j-u)}^{s'+j-u(0)} \left[\sum_{t=T}^n \beta_{t-i} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} \right] + \sum_{l=p+s'+1}^{p+s'+j} \hat{\omega}_{l-u(m+j-u)}^{s'+j-u(0)} \left[\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-l} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} \right] = 0, \quad u=1, \dots, j, \quad (3.1.17)$$

resultando o sistema de equações (3.1.16) equivalente ao sistema formado por (3.1.16a), (3.1.16b) e (3.1.17).

Por outro lado, pelo lema 3.3,

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)},$$

onde $\hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)}$ é o resíduo estimado da regressão linear múltipla de ordem $(m+j)$ para $(s'+j)$, i.e.,

$$\hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)} = \hat{\delta}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\alpha_{t-b}, \quad t = T, \dots, n.$$

Então, para os estimadores dos mínimos quadrados $\hat{\delta}_{i(m+j)}^{s'+j(0)}$ ($i=1, \dots, m+j$) e $\hat{\omega}_{l(m+j)}^{s'+j(0)}$ ($l=0, 1, \dots, p+s'+j$), tem-se o seguinte conjunto de equações normais,

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)} = 0, \quad h = 1, \dots, m+j$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s'+j,$$

ou seja,

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad h = 1, \dots, m+j \quad (3.1.18a)$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s'+j. \quad (3.1.18b)$$

Ora, se estas equações se verificam, implica que também se verificam as equações (3.1.16a), (3.1.16b) e (3.1.17). Deste modo, pode dizer-se que os $(m + (p+s'+1) + j)$ estimadores $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i=1, \dots, m$), $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l=0, 1, \dots, p+s'$) e $\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)}$ ($u=1, \dots, j$), da j -ésima regressão iterada de ordem m para s' em (3.1.6), satisfazem, também, o sistema de equações (3.1.18).

Restringindo (3.1.18) ao conjunto

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (3.1.19a)$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s', \quad (3.1.19b)$$

este é equivalente ao sistema de equações apresentado no lema seguinte.

Lema 3.4: Os estimadores $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i=1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l=0, 1, \dots, p+s'$), obtidos na j -ésima regressão iterada de ordem m para s' em (3.1.6), são soluções do sistema de equações

$$\gamma_{\beta}^*(h) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \gamma_{\beta}^*(h-i) + \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \gamma_{\alpha\beta}^*(b+l-h), \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (3.1.20a)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^*(b+k) = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \gamma_{\alpha\beta}^*(b+k-i) + \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \gamma_{\alpha}^*(k-l), \quad k = 0, 1, \dots, p+s', \quad (3.1.20b)$$

onde $\gamma_{\alpha}^*(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=T}^n \alpha_{t-h} \alpha_t$, $\gamma_{\beta}^*(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \beta_t$ e $\gamma_{\alpha\beta}^*(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=T}^n \alpha_{t-h} \beta_t$.

Demonstração:

Da j -ésima estimação dos mínimos quadrados iterada de ordem m para s' , tem-se

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) \beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) \alpha_{t-b} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)}.$$

Tomando $\Omega_{s'(j),t} = \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) \beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) \alpha_{t-b}$ e substituindo $\hat{e}_{m,t}^{s'(j)}$ em (3.1.19),

vem

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \left[\Omega_{s'(j),t} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} \right] = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \left[\Omega_{s'(j),t} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s',$$

ou seja,

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \Omega_{s'(j),t} = \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \left[\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} \right] = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m \quad (3.1.21a)$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \Omega_{s'(j),t} = \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \left[\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s'. \quad (3.1.21b)$$

Mas, pelo lema 3.3,

$$\hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} = \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{s'+j-u(0)}$$

onde $\hat{e}_{m+j-u,t-u}^{s'+j-u(0)} = \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B)\beta_{t-u} - \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B)\alpha_{t-b-u}$, $t = T, \dots, n$, é o resíduo estimado da regressão linear múltipla de ordem $(m+j-u)$ para $(s'+j-u)$ e cujas equações normais correspondentes são

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-u-h} \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{s'+j-u(0)} = 0, \quad h = 1, \dots, m+j-u; \quad u = 1, \dots, j$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-u-k} \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{s'+j-u(0)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s'+j-u; \quad u = 1, \dots, j,$$

as quais são equivalentes a

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} = 0, \quad h = 1, \dots, m+j; \quad u = 1, \dots, j$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s'; \quad u = 1, \dots, j.$$

Assim, as equações (3.1.21) reduzem-se a

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \Omega_{s'(j),t} = 0, \quad h = j+1, \dots, j+m$$

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \Omega_{s'(j),t} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p+s',$$

com $\Omega_{s'(j),t} = \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B)\alpha_{t-b}$, i.e.,

$$\sum_{t=T}^n \beta_{t-h} \beta_t = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \left[\sum_{t=T}^n \beta_{t-i} \beta_{t-h} \right] + \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \left[\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-l} \beta_{t-h} \right], \quad h = j+1, \dots, j+m$$

(3.1.22)

$$\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \beta_t = \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \left[\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \beta_{t-i} \right] + \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \left[\sum_{t=T}^n \alpha_{t-b-k} \alpha_{t-b-l} \right], \quad k = 0, 1, \dots, p+s'.$$

Dividindo o sistema de equações (3.1.22) por n , completa-se a demonstração. ■

No lema seguinte é estabelecida a consistência dos estimadores dos mínimos quadrados iterados. Assim,

Lema 3.5: Sejam β_i e α_i duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1), com as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ fora do círculo unitário. Então, tem-se

$$\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} = \delta_i^* + o_p(1), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} = \omega_l^* + o_p(1), \quad l = 0, 1, \dots, p + s',$$

quando

- (a) $s' = s$, $m = p + r$ e $j \geq \max(p + s, r + q)$,
- (b) $s' = s$, $m \geq p + r$ e $j = \max(p + s, r + q)$,
- (c) $s' > s$, $m = p + r$ e $j \geq \max(p + s', r + q)$,
- (d) $s' > s$, $m \geq p + r$ e $j = \max(p + s', r + q) = r + q$,

onde está subentendido que $\delta_i^* = 0$ para $i > p + r$ e $\omega_l^* = 0$ para $s' > s$.

Demonstração:

Por (2.2.22),

$$\gamma_\alpha^*(h) = \gamma_\alpha + o_p(1), \quad \gamma_\beta^*(h) = \gamma_\beta + o_p(1) \quad \text{e} \quad \gamma_{\alpha\beta}^*(h) = \gamma_{\alpha\beta} + o_p(1).$$

Nestas condições, as equações (3.1.20) convergem em probabilidade para as equações (3.1.2), cuja matriz associada é não singular na condições do lema 3.3. Fica, assim, demonstrada a consistência dos estimadores dos mínimos quadrados iterados no novo quadro de regressões iterativas definido em (3.1.6). ■

Da definição do modelo (2.2.1), tem-se

$$\delta_{p+r}^*(B) = \phi_p(B) \delta_r(B) \quad \text{e} \quad \omega_{p+s}^*(B) = \phi_p(B) \omega_s(B),$$

ou seja,

$$\delta_r(B) = [\phi_p(B)]^{-1} \delta_{p+r}^*(B) \quad \text{e} \quad \omega_s(B) = [\phi_p(B)]^{-1} \omega_{p+s}^*(B).$$

Sejam, então, $\bar{\delta}_m^{s'(j)}(B)$ e $\bar{\omega}_m^{s'(j)}(B)$ os polinómios estimados, respectivamente, de $\delta_r(B)$ e $\omega_s(B)$, definidos por

$$\bar{\delta}_m^{s'(j)}(B) = [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_m^{s'(j)}(B) = [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B),$$

onde $\hat{\phi}_p(B)$ é o polinómio autoregressivo estimado consistente para a série residual, e

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = 1 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} B^i \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} B^l \quad \text{são os polinómios dos mínimos}$$

quadrados estimados da j -ésima regressão iterada de ordem m para s' . Como consequência directa do lema 3.5, surge o resultado:

Lema 3.6: Nas condições de convergência estabelecidas no lema 3.5, tem-se

$$\bar{\delta}_m^{s'(j)}(B) = \delta_r(B) + o_p(1) \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \omega_s(B) + o_p(1),$$

i.e., todos os coeficientes estimados dos polinómios $\bar{\delta}_m^{s'(j)}(B)$ e $\bar{\omega}_m^{s'(j)}(B)$ convergem em probabilidade para os coeficientes correspondentes em $\delta_r(B)$ e $\omega_s(B)$, respectivamente.

Demonstração:

Nas condições do lema 3.5,

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = \delta_{p+r}^*(B) + o_p(1) \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \omega_{p+s}^*(B) + o_p(1),$$

e, como

$$\hat{\phi}_p(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i B^i \quad \text{com} \quad \hat{\phi}_i = \phi_i + o_p(1), \quad i = 1, \dots, p,$$

vem

$$\hat{\phi}_p(B) = \phi_p(B) + o_p(1) \text{ e, conseqüentemente, } [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} = [\phi_p(B)]^{-1} + o_p(1).$$

Logo,

$$\bar{\delta}_m^{s'(j)}(B) = [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) \xrightarrow{p} [\phi_p(B)]^{-1} \delta_{p+r}^*(B) = \delta_r(B)$$

e

$$\bar{\omega}_m^{s'(j)}(B) = [\hat{\phi}_p(B)]^{-1} \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) \xrightarrow{p} [\phi_p(B)]^{-1} \omega_{p+s}^*(B) = \omega_s(B). \blacksquare$$

Concluída a demonstração deste lema, encontram-se verificados, sob diferentes hipóteses, todos os principais resultados estabelecidos na secção 2.2, para o quadro de regressões iteradas definido em (3.1.6). A partir de agora, está-se em condições de definir o conceito de função de autocorrelação estendida generalizada amostral, o qual irá permitir descrever uma nova metodologia de identificação dos modelos de função transferência, como se constatará mais adiante.

Retome-se, então, o modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1),

$$\delta_{p+r}^*(B)\beta_t = \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b} + \theta_{r+q}^*(B)a_t.$$

Tomando

$$Y_{p+r,t}^s = \delta_{p+r}^*(B)\beta_t - \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b}, \quad (3.1.23)$$

tem-se

$$Y_{p+r,t}^s = \theta_{r+q}^*(B)a_t, \quad (3.1.24)$$

o que significa que $Y_{p+r,t}^s$ segue um processo $MA(r+q)$. Designando, genericamente,

$r_{Y_t}(k)$ a função de autocorrelação amostral de Y_t no desfasamento k , ter-se-á

$$r_{Y_{p+r,t}^s}(k) \doteq 0, \quad k > r+q \\ \neq 0, \quad k = r+q, \quad (3.1.25)$$

ou seja, a função de autocorrelação amostral de $Y_{p+r,t}^s$ é assintoticamente nula a partir do desfasamento $k = r + q$.

Considere-se, então, a sucessão

$$\begin{aligned} Y_{m,t}^{s'(j)} &= \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l}, \quad t = \max(m, b + p + s') + 1, \dots, n \\ &= \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) \beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) \alpha_{t-b}, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

definida a partir da j -ésima regressão iterada de ordem m para s' em (3.1.6),

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l} + \sum_{u=1}^j \theta_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} + e_{m,t}^{s'(j)},$$

$$t = \max(m, b + p + s') + j + 1, \dots, n; \quad m = p, p+1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)}$ é o correspondente resíduo estimado e, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ e $\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)}$ são os respectivos estimadores dos mínimos quadrados.

Relativamente a $Y_{m,t}^{s'(j)}$ pode estabelecer-se o seguinte resultado:

Teorema 3.1: Sendo β_t e α_t duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1), com as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ fora do círculo unitário, tem-se que $r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k)$ é assintoticamente equivalente a $r_{Y_{p+r,t}^s}(k)$, i.e.,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) - r_{Y_{p+r,t}^s}(k) = o_p(1),$$

quando $s' = s$, $m = p + r$ e $j \geq \max(p + s, r + q)$.

Demonstração:

De (3.1.23), vem

$$\beta_t = \frac{1}{\delta_{p+r}^*(B)} [Y_{p+r,t}^s + \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b}],$$

e substituindo β_t , em (3.1.26), tem-se

$$Y_{m,t}^{s'(j)} = \frac{\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)}{\delta_{p+r}^*(B)} [Y_{p+r,t}^s + \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b}] - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B)\alpha_{t-b},$$

ou seja,

$$Y_{m,t}^{s'(j)} = \frac{\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)}{\delta_{p+r}^*(B)} Y_{p+r,t}^s - \left[\left(1 - \frac{\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)}{\delta_{p+r}^*(B)} \right) \omega_{p+s}^*(B) + (\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) - \omega_{p+s}^*(B)) \right] \alpha_{t-b}. \quad (3.1.27)$$

Ora, pelo lema 3.5, para $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$, resulta que

$$\frac{\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)}{\delta_{p+r}^*(B)} = 1 + o_p(1) \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) - \omega_{p+s}^*(B) = o_p(1).$$

Uma vez que $\omega_{p+s}^*(B) = O(1)$, (3.1.27) vem

$$Y_{m,t}^{s'(j)} = (1 + o_p(1)) Y_{p+r,t}^s - o_p(1) \alpha_{t-b}, \quad (3.1.28)$$

o que implica que

$$[Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 = [1 + o_p(1)]^2 [Y_{p+r,t}^s]^2 - 2[1 + o_p(1)] o_p(1) Y_{p+r,t}^s \alpha_{t-b} + [o_p(1)]^2 \alpha_{t-b}^2.$$

Mas, por (3.1.24),

$$Y_{p+r,t}^s = \theta_{r+q}^*(B) a_t = O(1) a_t.$$

Então, recorrendo às propriedades sobre a convergência em probabilidade, $o_p(\cdot)$, e ao conceito de limitado em probabilidade, $O_p(\cdot)$, introduzidos na secção 1.2, obtém-se, após alguns cálculos,

$$[Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 = [1 + o_p(1)] [Y_{p+r,t}^s]^2 - o_p(1) a_t \alpha_{t-b} + o_p(1) \alpha_{t-b}^2.$$

Somando sobre t a igualdade anterior, onde $t_1 = \max(m, b + p + s') + 1$, vem

$$\sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 = [1 + o_p(1)] \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 - o_p(1) \sum_{t=l_1}^n a_t \alpha_{t-b} + o_p(1) \sum_{t=l_1}^n \alpha_{t-b}^2.$$

Ora, tendo em conta que α_{t-b} é um processo estacionário, tem-se que

$$\sum_{t=l_1}^n \alpha_{t-b}^2 = O_p(n) = n O_p(1) \text{ e, uma vez que } a_t \text{ e } \alpha_{t-b} \text{ são séries não correlacionadas, i.e.,}$$

$$\text{Cov}(a_t, \alpha_{t-b}) = 0, \forall t, \text{ resulta que } \sum_{t=l_1}^n a_t \alpha_{t-b} = n o_p(1).$$

Deste modo, pode escrever-se,

$$\sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 = [1 + o_p(1)] \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 + n o_p(1),$$

ou seja,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 - \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 = \frac{o_p(1)}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 + o_p(1).$$

Mas, por (3.1.24) e tendo em conta que a_t é uma sucessão estacionária, vem

$$\sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 = [\theta_{r+q}^*(B)]^2 \sum_{t=l_1}^n a_t^2 = O(1) O_p(n) = n O_p(1), \quad (3.1.29)$$

o que implica que, para $s' = s$, $m = p + r$ e $j \geq \max(p + s, r + q)$, se tem

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 - \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 = o_p(1). \quad (3.1.30)$$

Considere-se, agora, a expressão (3.1.28). Então, pode escrever-se

$$\begin{aligned} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)} &= [(1 + o_p(1)) Y_{p+r,t}^s - o_p(1) \alpha_{t-b}] [(1 + o_p(1)) Y_{p+r,t+k}^s - o_p(1) \alpha_{t+k-b}] = \\ &= [1 + o_p(1)] Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s - o_p(1) Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k-b} - o_p(1) Y_{p+r,t+k}^s \alpha_{t-b} + o_p(1) \alpha_{t-b} \alpha_{t+k-b}, \end{aligned}$$

e, somando sobre t esta igualdade,

$$\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)} = [1 + o_p(1)] \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s - o_p(1) \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k-b} -$$

$$-o_p(1) \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t+k}^s \alpha_{t-b} + o_p(1) \sum_{t=l_1}^{n-k} \alpha_{t-b} \alpha_{t+k-b}.$$

Ora, por (3.1.24) e sendo α_t um ruído branco estacionário, i.e.,

$\text{Cov}(\alpha_{t-b}, \alpha_{t+k-b}) = 0, \forall k \neq 0$, tem-se $\sum_{t=l_1}^{n-k} \alpha_{t-b} \alpha_{t+k-b} = n o_p(1)$, resultando que

$$\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)} = [1 + o_p(1)] \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s - o_p(1) \sum_{t=l_1}^{n-k} a_t \alpha_{t+k-b} - o_p(1) \sum_{t=l_1}^{n-k} a_{t+k} \alpha_{t-b} + n o_p(1).$$

Como α_t e a_t são dois processos estacionários não correlacionados e, por sua vez,

$$\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s = [\theta_{r+q}^*(B)]^2 \sum_{t=l_1}^{n-k} a_t a_{t+k} = n o_p(1),$$

virá, então,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)} - \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s = o_p(1). \quad (3.1.31)$$

Esta última expressão é equivalente a

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \right) \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)}}{\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2} - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \right) \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s}{\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2} = o_p(1).$$

A partir de (3.1.29), vem

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 = O_p(1),$$

e de (3.1.30), tem-se

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 + o_p(1) = O_p(1),$$

resultando que

$$\frac{\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)}}{\sum_{t=t_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2} - \frac{\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s}{\sum_{t=t_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2} = \frac{o_p(1)}{O_p(1)}.$$

Ora, pela proposição (c) apresentada na secção 1.2 que estabelece que

$$\frac{o_p(1)}{O_p(1)} = o_p(1), \text{ pode, finalmente, concluir-se}$$

$$\frac{\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)}}{\sum_{t=t_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2} - \frac{\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s Y_{p+r,t+k}^s}{\sum_{t=t_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2} = o_p(1),$$

ou seja,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq r_{Y_{p+r,t}^s}(k), \quad \forall k, \quad s' = s, \quad m = p+r \text{ e } j \geq \max(p+s, r+q). \blacksquare \quad (3.1.32)$$

Como consequência do teorema acabado de demonstrar, resulta que os verdadeiros valores dos parâmetros podem ser substituídos pelos respectivos estimadores dos mínimos quadrados iterados consistentes na discussão das propriedades assintóticas da função de autocorrelação amostral da série transformada $Y_{m,t}^{s'(j)}$.

Deste modo, se o modelo que relaciona β_t e α_t for o modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1), então, tendo em conta (3.1.25) e o teorema 3.1, $Y_{m,t}^{s'(j)}$ segue assintoticamente um processo $MA(r+q)$ para $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$, i.e.,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0, \quad k > r+q \\ \neq 0, \quad k = r+q, \quad (3.1.33)$$

desde que esteja verificada a condição de convergência $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$.

À função de autocorrelação amostral $r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k)$ passar-se-á a designar por m -ésima função de autocorrelação estendida generalizada (FACEG) amostral de β_t e α_t para s' .

Esta função generaliza o conceito de função de autocorrelação estendida (FACE) amostral introduzida por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984). Com efeito, se $\alpha_t \doteq 0$, quase certamente nula, o modelo de função transferência reduz-se a um processo $ARMA(p+r, r+q)$, ou seja, a um processo genérico do tipo $ARMA(p, q)$, e, neste caso, $r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k)$ representa a FACE amostral do processo β_t quando $k = j$, vindo

$$\begin{aligned} r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) &\doteq 0, \quad k > q, \quad m = p \text{ e } j \geq q \\ &\neq 0, \quad k = q, \quad m = p \text{ e } j \geq q \end{aligned}$$

o que traduz o resultado (3.5) apresentado em Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984).

3.2 Correlação Cruzada entre as séries residual e “input”

A definição de modelo de função transferência, introduzida na secção 2.1, apresenta como uma das suas hipóteses fundamentais a inexistência de correlação entre as séries residual e “input”.

Considere-se, então, o modelo (2.1.1),

$$Y_t = v(B)X_t + N_t,$$

onde N_t é uma sucessão residual estacionária de valor médio nulo não correlacionada com a série “input” X_t , i.e.,

$$C(N_s, X_t) = 0, \quad s, t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

Procedendo ao branqueamento do “input” por um processo *ARMA* invertível e estacionário, (2.1.1) é equivalente a

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + e_t,$$

$$\text{em que } \alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} X_t, \beta_t = \frac{\phi_y(B)}{\theta_y(B)} Y_t \text{ e } e_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} N_t.$$

Uma vez que a série “input”, α_t , é um processo invertível, admite o desenvolvimento

$$\alpha_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j X_{t-j}, \quad (3.2.2)$$

e, supondo que a sucessão residual, e_t , segue um processo *ARMA*(p,q) invertível e estacionário, também se tem o desenvolvimento

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_{t-i}. \quad (3.2.3)$$

Como consequência directa de (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3), tem-se

$$C(a_s, \alpha_t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_i \Lambda_j C(e_{s-i}, X_{t-j}) = 0, \quad s, t = 0, 1, 2, \dots,$$

ou seja, a hipótese fundamental (3.2.1) implica a inexistência de correlação entre o ruído branco residual a_t e a série “input” branqueada α_t .

Logo,

$$\rho_{a\alpha}(k) = \frac{C(a_t, \alpha_{t+k})}{(\sigma_a^2 \cdot \sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \forall t, k, \quad (3.2.4)$$

i.e., a função de correlação cruzada entre aquelas duas séries é sempre nula para qualquer desfasamento k .

Nestas circunstâncias, considerando o modelo de função transferência racional (2.2.1),

$$\delta_{p+r}^*(B)\beta_t = \omega_{p+s}^*(B)\alpha_t + \theta_{r+q}^*(B)\alpha_t,$$

e tendo em conta (3.1.24), $Y_{p+r,t}^s = \theta_{r+q}^*(B)\alpha_t$, e (3.2.4), pode concluir-se que

$$\rho_{Y_{p+r,t}^s, \alpha_t}(k) = 0, \quad \forall k.$$

Designando por $r_{Y_{p+r,t}^s, \alpha_t}(k)$ a função de correlação cruzada amostral entre as séries $Y_{p+r,t}^s$ e α_t no desfaseamento k , tem-se, como consequência,

$$r_{Y_{p+r,t}^s, \alpha_t}(k) \doteq 0, \quad \forall k. \quad (3.2.5)$$

Do ponto de vista das aplicações, em fase de avaliação do diagnóstico, no que diz respeito, em particular, à verificação da hipótese fundamental (3.2.1), este último resultado tem pouco alcance prático em virtude de não se conhecer a série $Y_{p+r,t}^s$, devido a ser dependente de parâmetros desconhecidos. Por esta razão, é necessário trabalhar com a série estimada $Y_{m,t}^{s'(j)}$ definida a partir das regressões iteradas (3.1.6). O lema seguinte permite estabelecer a equivalência assintótica da função de correlação cruzada amostral de $Y_{m,t}^{s'(j)}$ com a sucessão “input” α_t .

Lema 3.7: Sendo β_t e α_t duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1), com as raízes de $\delta_{p+r}^*(B)$ fora do círculo unitário, tem-se que $r_{Y_{m,t}^{s'(j)}, \alpha_t}(k)$ é assintoticamente equivalente a $r_{Y_{p+r,t}^s, \alpha_t}(k)$, ou seja,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}, \alpha_t}(k) - r_{Y_{p+r,t}^s, \alpha_t}(k) = o_p(1),$$

quando $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$.

Demonstração:

Multiplicando ambos os membros da igualdade (3.1.30),

$$\frac{1}{n} \sum_{t=t_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 - \frac{1}{n} \sum_{t=t_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 = o_p(1), \text{ com } t_1 = \max(m, b+p+s')+1,$$

por $\sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2$, e uma vez que α_t é um ruído branco estacionário, i.e., $\sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2 = nO_p(1)$,

vem

$$\frac{1}{n^2} \sum_{t=t_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{t=t_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2 = o_p(1),$$

o que implica que

$$\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=t_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=t_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2 + o_p(1) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.6)$$

Considere-se, agora, a expressão (3.1.28),

$$Y_{m,t}^{s'(j)} = (1 + o_p(1)) Y_{p+r,t}^s - o_p(1) \alpha_{t-b}.$$

Então,

$$Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k} = (1 + o_p(1)) Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k} - o_p(1) \alpha_{t-b} \alpha_{t+k},$$

e somando sobre t esta igualdade, com $t_1 = \max(m, b+p+s')+1$, obtém-se

$$\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k} = (1 + o_p(1)) \sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k} - o_p(1) \sum_{t=t_1}^{n-k} \alpha_{t-b} \alpha_{t+k},$$

que é equivalente, após alguns cálculos, a

$$\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k} - \sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k} = o_p(1) \sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k} - o_p(1) \sum_{t=t_1}^{n-k} \alpha_{t-b} \alpha_{t+k}.$$

Ora, por (3.1.24),

$$Y_{p+r,t}^s = \theta_{r+q}^*(B) a_t = O(1) a_t,$$

e tendo em conta que α_t e a_t são dois ruídos brancos estacionários não

correlacionados, ou seja, $\sum_{t=l_1}^{n-k} \alpha_{t-b} \alpha_{t+k} = n o_p(1)$ e $\sum_{t=l_1}^{n-k} a_t \alpha_{t+k} = n o_p(1)$, resulta que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k} - \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k} = o_p(1). \quad (3.2.7)$$

Assim, (3.2.7) é equivalente a

$$\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k}}{\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k}}{\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = o_p(1). \quad (3.2.8)$$

Ora,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 = O_p(1) \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 = [\theta_{r+q}^*(B)]^2 \frac{1}{n} \sum_{t=l_1}^n a_t^2 = O_p(1),$$

donde, tem-se

$$\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{O_p(1)}.$$

Por (3.2.6) e pela proposição (e) introduzida na secção 1.2, tem-se, também,

$$\left[\frac{1}{n^2} \sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{O_p(1)}.$$

Então, (3.2.8) é equivalente a

$$\frac{\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k}}{\left[\sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k}}{\left[\sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{o_p(1)}{\sqrt{O_p(1)}}.$$

Ora, pelas proposições (a) e (c) apresentadas na secção 1.2, $\frac{o_p(1)}{\sqrt{O_p(1)}} = o_p(1)$, o

que implica que

$$\frac{\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_{t+k}}{\left[\sum_{t=l_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sum_{t=l_1}^{n-k} Y_{p+r,t}^s \alpha_{t+k}}{\left[\sum_{t=l_1}^n [Y_{p+r,t}^s]^2 \sum_{t=l_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = o_p(1),$$

ou seja,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_t}(k) \doteq r_{Y_{p+r,t}^s \alpha_t}(k), \quad \forall k, s' = s, m = p+r \text{ e } j \geq \max(p+s, r+q). \blacksquare$$

Como consequência do lema acabado de demonstrar, além dos verdadeiros valores dos parâmetros poderem ser substituídos pelos seus estimadores dos mínimos quadrados iterados consistentes na discussão das propriedades assintóticas da função de correlação cruzada amostral entre as séries $Y_{m,t}^{s'(j)}$ e α_t , tem-se, por (3.2.5),

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)} \alpha_t}(k) \doteq 0, \quad \forall k, \quad (3.2.9)$$

desde que $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$.

Este resultado, como foi referido, irá permitir, em situações práticas, verificar a hipótese fundamental (3.2.1) em fase de avaliação do diagnóstico.

3.3 Metodologia de Identificação do Modelo de Função Transferência

Conforme já foi referido anteriormente, a metodologia de identificação de um modelo de função transferência racional, mais adequado à descrição conjunta de duas séries temporais, está relacionada com o procedimento aplicado para especificar os valores dos inteiros (r,s,b) e (p,q) . A determinação do parâmetro de desfasamento b é imediata, através da função de correlação cruzada amostral entre as séries “input” e “output”, $r_{\alpha\beta}(k)$, e a especificação das ordens polinomiais p e q , do modelo *ARMA* ajustado à sucessão residual, é realizada recorrendo à metodologia de Box-Jenkins univariada. O problema reside na identificação das ordens polinomiais r e s , devido à subjectividade associada à análise do padrão apresentado pela função $r_{\alpha\beta}(k)$.

Assim, determinados previamente os valores de b , p e q , propõe-se nesta secção, e com base nos resultados teóricos estabelecidos nas secções 3.1 e 3.2, um procedimento alternativo para a especificação das ordens r e s associadas aos polinómios “output” e “input”, respectivamente, concluindo-se, deste modo, o processo de identificação do modelo de função transferência.

Considerem-se, então, genericamente, as j -ésimas regressões iteradas de ordem m para s' em (3.1.6),

$$\beta_t = \sum_{i=1}^m \delta_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} \omega_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l} + \sum_{u=1}^j \theta_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} + e_{m,t}^{s'(j)},$$

$$t = \max(m, b + p + s') + j + 1, \dots, n; \quad s' = 0, 1, \dots; \quad m = p, p + 1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde $\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)}$ é o resíduo estimado

correspondente e, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$, $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ e $\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)}$ são as respectivas estimativas dos mínimos quadrados.

Para cada uma destas regressões, constroem-se as séries

$$Y_{m,t}^{s'(j)} = \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B)\alpha_{t-b}, \quad t = t_1, \dots, n \quad \text{e} \quad t_1 = \max(m, b + p + s') + 1,$$

e calculam-se os valores da função de autocorrelação estendida generalizada amostral,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) = \frac{\sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s'(j)} Y_{m,t+k}^{s'(j)}}{\sum_{t=t_1}^n [Y_{m,t}^{s'(j)}]^2} \quad \text{para } k = q, q+1, \dots, \text{ com } s' = 0, 1, \dots \text{ e } m = p, p+1, \dots$$

Note-se que $m = p$, $j = \max(p, q)$ e $k = q$ são a ordem da regressão, a iteração e o desfaseamento mínimos a partir dos quais se pode, eventualmente, verificar o resultado (3.1.33), i.e.,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0, \quad k > r + q, \\ \neq 0, \quad k = r + q, \quad s' = s, \quad m = p + r \quad \text{e} \quad j \geq \max(p + s, r + q).$$

Os valores $r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k)$, $k = q, q+1, \dots$ com $s' = 0, 1, \dots$, $m = p, p+1, \dots$ e $j = 0, 1, \dots$, serão, depois, dispostos em tabelas, conforme é indicado na Tabela 3.3.1.

Assim, tendo em conta (3.1.33) e para quaisquer p e q previamente identificados, as ordens r e s podem ser determinadas de acordo com o seguinte procedimento:

(a) Se para determinados valores de s^* e m^* surgem, na j^* -ésima linha e seguintes da respectiva tabela, elementos estatisticamente nulos a partir de um dado desfaseamento k^* , ou seja,

$$r_{Y_{m^*,t}^{s^*(j)}}(k) \doteq 0, \quad k > k^* \quad \text{e} \quad j \geq j^*,$$

toma-se $s = s^*$ e $r + q = k^*$, i.e., $r = k^* - q$.

O quadro relativo a esta situação, exposto na Tabela 3.3.2, apresentará um padrão rectangular de valores assintoticamente nulos e limitado à esquerda por uma coluna de

Tabela 3.3.1: $r_{y_{m,i}^{s'(k)}}$, $k = q, q+1, \dots$, com $s' = 0, 1, \dots$, $m = p, p+1, \dots$ e $j = 0, 1, 2, \dots$

| m | $p + s'$ | | p | | | $p + 1$ | | | ... | |
|----------|----------|----------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------|
| | k | j | q | $q + 1$ | $q + 2$ | q | $q + 1$ | $q + 2$ | | |
| p | 0 | | $r_{y_{p,i}^{0(0)}}(q)$ | $r_{y_{p,i}^{0(0)}}(q+1)$ | $r_{y_{p,i}^{0(0)}}(q+2)$ | ... | $r_{y_{p,i}^{1(0)}}(q)$ | $r_{y_{p,i}^{1(0)}}(q+1)$ | $r_{y_{p,i}^{1(0)}}(q+2)$ | ... |
| | 1 | | $r_{y_{p,i}^{0(1)}}(q)$ | $r_{y_{p,i}^{0(1)}}(q+1)$ | $r_{y_{p,i}^{0(1)}}(q+2)$ | ... | $r_{y_{p,i}^{1(1)}}(q)$ | $r_{y_{p,i}^{1(1)}}(q+1)$ | $r_{y_{p,i}^{1(1)}}(q+2)$ | ... |
| | 2 | | $r_{y_{p,i}^{0(2)}}(q)$ | $r_{y_{p,i}^{0(2)}}(q+1)$ | $r_{y_{p,i}^{0(2)}}(q+2)$ | ... | ... | ... | ... | ... |
| | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| $p + 1$ | 0 | | $r_{y_{p+1,i}^{0(0)}}(q)$ | $r_{y_{p+1,i}^{0(0)}}(q+1)$ | $r_{y_{p+1,i}^{0(0)}}(q+2)$ | ... | $r_{y_{p+1,i}^{1(0)}}(q)$ | $r_{y_{p+1,i}^{1(0)}}(q+1)$ | $r_{y_{p+1,i}^{1(0)}}(q+2)$ | ... |
| | 1 | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | 2 | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| \vdots | | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | |

elementos estatisticamente significativos correspondentes aos valores da função no desfasamento $k^* = r + q$ para $j \geq j^*$.

Tabela 3.3.2: $r_{Y^{s^*}(j)}^{m^*,t}(k^*) \neq 0, k^* = r + q$ e $r_{Y^{s^*}(j)}^{m^*,t}(k) \doteq 0, k > k^*$, para $j \geq j^*$

| $p + s'$ | | ... | $p + s^*$ | | | | | | | ... | | |
|----------|-----------|-----|-----------|-----|---------|-----|-------|-----------|-----------|-----------|-----|-----|
| m | j | k | ... | q | $q + 1$ | ... | k^* | $k^* + 1$ | $k^* + 2$ | $k^* + 3$ | ... | ... |
| | | | ... | ... | ... | | | | ... | | | |
| m^* | 0 | | | | | | ⋮ | | | | | |
| | 1 | | | | | | ⋮ | | | | | |
| | ⋮ | | | | | | ⋮ | | | | | |
| | j^* | ... | ... | ... | ... | × | 0 | 0 | 0 | ... | ... | |
| | $j^* + 1$ | | | | | × | 0 | 0 | 0 | ... | ... | |
| | $j^* + 2$ | | | | | × | 0 | 0 | 0 | ... | ... | |
| | $j^* + 3$ | | | | | × | 0 | 0 | 0 | ... | ... | |
| | ⋮ | | | | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ... | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ... | |

(b) Determinados os valores de r e s pelo procedimento descrito em (a), é necessário verificar se o modelo identificado satisfaz a condição de convergência do teorema 3.1, i.e., se os valores m^* e j^* para $s = s^*$ são tais que $m^* = p + r$ e $j^* = \max(p + s, r + q)$.

Em caso afirmativo, identifica-se um possível modelo $(r, s, b) \times (p, q)$ para as duas séries cronológicas em estudo, caso contrário incrementa-se o valor de j, m e/ou s' e repetem-se os passos (a) e (b).

Neste procedimento faz-se referência a valores de $r_{Y^{s^*}(j)}^{m^*,t}(k^*)$ estatisticamente nulos. Em aplicações práticas, a fim de se comprovar tais situações, terá todo o interesse

estabelecer uma região dentro da qual se possa afirmar, com determinado grau de credibilidade, que os valores da FACEG amostral que aí se encontram são estatisticamente não significativos. Esta região pode ser definida a partir de alguns resultados teóricos clássicos da teoria das séries temporais.

Suponha-se, então, observada a sucessão cronológica (X_1, X_2, \dots, X_n) . É bem conhecido que os valores da função de autocorrelação amostral de X , $\hat{\rho}_X(k)$, possuem distribuição assintótica Normal $N(\rho_X(k), V(\hat{\rho}_X(k)))$, onde $V(\hat{\rho}_X(k))$ é obtida a partir da fórmula de Bartlett [Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1995)]. No caso particular dos processos para os quais se tem $\rho_X(k) = 0$ para $k > k'$, vem [Murteira, B.J.F., Müller, D. e Turkman, K.F. (1993)]

$$V(\hat{\rho}_X(k)) \approx \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{k'} [\rho_X(i)]^2 \right).$$

Contudo, nas aplicações práticas, os verdadeiros valores dos $\rho_X(k)$ são desconhecidos e são substituídos pelas suas estimativas, vindo o desvio padrão estimado dado por

$$\hat{\sigma}(\hat{\rho}_X(k)) \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{k'} [\hat{\rho}_X(i)]^2 \right)}.$$

Assim, de acordo com o teste de Bartlett (1946), irão considerar-se estatisticamente nulos os valores de $r_{Y_{m,t}^{s(j)}}(k)$ tais que

$$\left| r_{Y_{m,t}^{s(j)}}(k) \right| \leq 1.96 \hat{\sigma} \left(r_{Y_{m,t}^{s(j)}}(k) \right).$$

No entanto, as estimativas dos desvios padrões das autocorrelações amostrais, ao aplicar a fórmula de Bartlett, podem ser sobrestimadas, especialmente nos desfaseamentos mais baixos, provocando, este facto, uma diminuição da significância

estatística da função de autocorrelação estimada. De forma a evitar esta situação [Pankratz, A. (1983)], irá utilizar-se, para os primeiros desfasamentos, o limite 1.25, em lugar do tradicional valor 1.96.

Irão, também, considerar-se estatisticamente nulos os valores de $r_{Y_{m,t}^{s(j)}}(k)$ que satisfazem o teste "Portmanteau" para k^* desfasamentos considerados, ou seja, testa-se globalmente a hipótese da nulidade dos valores da função de autocorrelação amostral,

$$H_0 : \rho_{k'+1} = \rho_{k'+2} = \dots = \rho_{k^*} = 0 .$$

Ora, admitindo que esta hipótese é verdadeira, sabe-se que a correspondente estatística Q converge para a distribuição Qui-Quadrado, i.e.,

$$Q = \left[\hat{\sigma}^2 \left(r_{Y_{m,t}^{s(j)}}(k) \right) \right]^{-1} \sum_{k=k'+1}^{k=k^*} \left[r_{Y_{m,t}^{s(j)}}(k) \right]^2 \sim \chi_{k^*-k'}^2 ,$$

o que implica que a hipótese H_0 é rejeitada quando $Q > \chi_{(k^*-k');0.05}^2$.

(c) Após a identificação de um modelo, deverá verificar-se a não existência de correlação entre as séries transformadas $Y_{m,t}^{s(j)}$, para $j \geq j^*$, e a série "input" α_t de acordo com a hipótese fundamental do modelo, ou seja, tendo em conta o estabelecido no resultado (3.2.9). Do ponto de vista das aplicações, a correlação cruzada amostral entre as referidas sucessões será considerada estatisticamente significativa se

$$\left| r_{Y_{m,t}^{s(j)} \alpha_t}(k) \right| = \frac{\left| \sum_{t=t_1}^{n-k} Y_{m,t}^{s(j)} \alpha_{t+k} \right|}{\left[\sum_{t=t_1}^n \left[Y_{m,t}^{s(j)} \right]^2 \sum_{t=t_1}^n \alpha_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}} > \frac{1.96}{\sqrt{(n-t_1+1)-k}} . \quad (3.3.1)$$

De forma a exemplificar a metodologia acima exposta, considere-se a seguinte situação particular:

O passo seguinte, de acordo com a metodologia exposta, seria verificar a inexistência de correlação entre as sucessões $Y_{3,t}^{1(j)}$, para $j \geq 3$, e a série “input” α_t , o que poderia ser feito através da expressão (3.3.1).

3.4 Exemplo

Nesta secção ir-se-á aplicar a uma situação real a metodologia de identificação dos modelos de função transferência racionais com base na função de autocorrelação estendida generalizada amostral, descrita anteriormente. Para tal, consideraram-se as duas séries sobre fornos a gás apresentadas em Box et al. (1994). Neste exemplo, os programas informáticos que permitiram realizar todos os cálculos efectuados foram desenvolvidos em Splus Versão 3.3 para Windows (Anexo 1.).

Relativamente àquelas duas sucessões, expôs-se no exemplo 1 da secção 2.1 a dificuldade inerente à especificação tradicional das ordens polinomiais r e s através da função de correlação cruzada amostral entre as séries “input” e “output” branqueadas. Em particular, foram identificadas como possíveis funções de transferência os modelos $(r, s, b) = (1, 2, 3)$, $(r, s, b) = (1, 3, 3)$, $(r, s, b) = (2, 2, 3)$ ou $(r, s, b) = (0, 4, 3)$. Posteriormente, no exemplo da secção 2.2, aplicando a metodologia desenvolvida por Müller, D. e Wei, W.W.S. (1997) baseada no estabelecimento de estimadores dos mínimos quadrados iterados consistentes, foi identificado para as duas séries em estudo o modelo de função transferência racional $(r, s, b) \times (p, q) = (1, 2, 3) \times (0, 2)$. Veja-se, agora, o que se passa com a nova metodologia proposta.

Assim, após a determinação dos valores do parâmetro de desfasamento, $b = 3$, pela função de correlação cruzada amostral entre as séries “input” e “output”

branqueadas, e das ordens, $p = 0$ e $q = 2$, do modelo *ARMA* ajustado à sucessão residual, pela metodologia univariada de Box-Jenkins, procede-se à especificação das ordens r e s associadas aos polinómios “*output*” e “*input*”, respectivamente, da seguinte forma:

No quadro das regressões iteradas descritas em (3.1.6), calculam-se os valores da função de autocorrelação estendida generalizada amostral para os desfasamentos $k = 2, 3, \dots$ com $s' = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$ e $j = 0, 1, 2, \dots$, notando que $k = 2$, $m = 0$ e $j = \max(0, 2) = 2$ são, respectivamente, o desfasamento, a ordem de regressão e a iteração mínimos a partir dos quais se pode verificar o resultado (3.1.33). Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 3.4.1, a qual deve ser lida tendo em consideração a seguinte notação:

- (1) o símbolo 0 indica que $r_{Y_{m,s'}^{(j)}}(k) \doteq 0$ para o desfasamento k e seguintes;
- (2) os símbolos \times , \bullet e \otimes seguidos de 0 indicam que $r_{Y_{m,s'}^{(j)}}(k) \neq 0$ e são tais que:
 - \times indicia que os valores de r e s identificados, a partir do último $r_{Y_{m,s'}^{(j)}}(k) \neq 0$, conduzem a modelos que não satisfazem a condição de convergência do teorema 3.1, i.e., $s' = s$, $m = p + r$ e $j \geq \max(p + s, r + q)$;
 - \bullet indicia que os valores de r e s identificados conduzem a modelos que satisfazem a condição de convergência do teorema 3.1, mas a correspondente correlação cruzada não verifica (3.2.9);
 - \otimes indicia que os valores de r e s identificados conduzem a modelos que satisfazem a condição de convergência do teorema 3.1 e a condição (3.2.9), ou seja, a uma identificação correcta de um modelo.

A análise da tabela 3.4.1 conduz, então, à identificação dos seguintes modelos de função transferência racionais para as duas séries em estudo:

$$- (1,2,3) \times (0,2),$$

i.e., $r_{y_{m,t}^{s(j)}}(k) = r_{y_{1,t}^{2(j)}}(k) \neq 0$, $k = r + q = 3$ e $r_{y_{1,t}^{2(j)}}(k) \doteq 0$, $k > r + q = 3$ para $j \geq \max(p + s, r + q) = \max(2,3)$, e a correlação cruzada $r_{y_{1,t}^{2(j)} \alpha_t}(k) \doteq 0 \quad \forall k$ e $j \geq \max(2,3)$, onde $m = p + r = 1$ e $s' = s = 2$;

$$- (1,3,3) \times (0,2),$$

i.e., $r_{y_{1,t}^{3(j)}}(k) \neq 0$, $k = 3$ e $r_{y_{1,t}^{3(j)}}(k) \doteq 0$, $k > 3$ para $j \geq \max(3,3)$, e a correlação cruzada $r_{y_{1,t}^{3(j)} \alpha_t}(k) \doteq 0 \quad \forall k$ e $j \geq \max(3,3)$;

$$- (0,4,3) \times (0,2),$$

i.e., $r_{y_{0,t}^{4(j)}}(k) \neq 0$, $k = 2$ e $r_{y_{0,t}^{4(j)}}(k) \doteq 0$, $k > 2$ para $j \geq \max(4,2)$, e a correlação cruzada $r_{y_{0,t}^{4(j)} \alpha_t}(k) \doteq 0 \quad \forall k$ e $j \geq \max(4,2)$.

Estes três modelos identificados foram, em seguida, estimados pelo software AUTOBOX, tendo-se verificado que satisfazem os diversos critérios de avaliação do diagnóstico, ou seja, conduzem, em particular, a resíduos com comportamento de ruído branco (funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais residuais assintoticamente nulas, excepto para o desfaseamento $k = 0$) e não correlacionados com a série "input" branqueada.

Nas tabelas seguintes, para cada um dos modelos especificados, apresentam-se as estimativas dos mínimos quadrados iteradas, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s(j)}$, $i = 1, \dots, m$, e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s(j)}$, $l = 0, 1, \dots, p + s$, e as obtidas pelo AUTOBOX. Ambas são acompanhadas entre parêntesis pelos respectivos rácios t (as estimativas são consideradas estatisticamente significativas se os respectivos rácios t forem em valor absoluto superiores a 1.96).

Tabela 3.4.2: Modelo (1,2,3)×(0,2)

| $p + s$ | | 2 | | | |
|---------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| m | j | $\hat{\delta}_{1(0)}^{2(j)}$ | $\hat{\omega}_{0(0)}^{2(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(0)}^{2(j)}$ | $\hat{\omega}_{2(0)}^{2(j)}$ |
| 1 | 3 | 0.56 (6.92) | -0.56 (-6.60) | -0.38 (-3.88) | -0.49 (-4.85) |
| | 4 | 0.55 (6.93) | -0.53 (-6.27) | -0.36 (-3.71) | -0.50 (-5.05) |
| | 5 | 0.55 (6.82) | -0.52 (-6.13) | -0.38 (-3.91) | -0.52 (-5.15) |
| | 6 | 0.55 (6.90) | -0.52 (-6.11) | -0.39 (-4.02) | -0.50 (-4.97) |
| | 7 | 0.56 (7.19) | -0.53 (-6.43) | -0.40 (-4.32) | -0.49 (-5.05) |
| | 8 | 0.54 (7.33) | -0.52 (-6.63) | -0.38 (-4.22) | -0.46 (-4.96) |
| AUTOBOX | | 0.55 (13.51) | -0.53 (-6.35) | -0.38 (-3.26) | -0.52 (-4.33) |

Modelo estimado pelo AUTOBOX:

$$\beta_i = \frac{-0.53 - 0.38B - 0.52B^2}{1 - 0.55B} \alpha_{i-3} + (1 - 0.54B + 0.14B^2) \alpha_i$$

Tabela 3.4.3: Modelo (1,3,3)×(0,2)

| $p + s$ | | 3 | | | | |
|---------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| m | j | $\hat{\delta}_{1(1)}^{3(j)}$ | $\hat{\omega}_{0(1)}^{3(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(1)}^{3(j)}$ | $\hat{\omega}_{2(1)}^{3(j)}$ | $\hat{\omega}_{3(1)}^{3(j)}$ |
| 1 | 3 | 0.55 (3.79) | -0.55 (-6.41) | -0.37 (-3.18) | -0.50 (-3.75) | 0.004 (0.03) |
| | 4 | 0.53 (3.64) | -0.52 (-6.11) | -0.38 (-3.26) | -0.52 (-3.89) | -0.015 (-0.09) |
| | 5 | 0.57 (3.87) | -0.52 (-6.06) | -0.37 (-3.20) | -0.50 (-3.69) | 0.02 (0.13) |
| | 6 | 0.58 (4.10) | -0.53 (-6.40) | -0.40 (-3.62) | -0.49 (-3.81) | 0.03 (0.18) |
| | 7 | 0.54 (4.09) | -0.52 (-6.59) | -0.37 (-3.57) | -0.46 (-3.67) | 0.01 (0.09) |
| | 8 | 0.61 (4.46) | -0.52 (-6.66) | -0.36 (-3.40) | -0.46 (-3.72) | 0.02 (0.13) |
| AUTOBOX | | 0.53 (7.02) | -0.53 (-6.34) | -0.39 (-3.16) | -0.52 (-4.23) | -0.03 (-0.25) |

Modelo estimado pelo AUTOBOX:

$$\beta_t = \frac{-0.53 - 0.39B - 0.52B^2 - 0.03B^3}{1 - 0.53B} \alpha_{t-3} + (1 - 0.53B + 0.14B^2) a_t .$$

Tabela 3.4.4: Modelo (0,4,3)×(0,2)

| $p+s$ | | 4 | | | | |
|---------|-----|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| m | j | $\hat{\omega}_{0(0)}^{4(j)}$ | $\hat{\omega}_{1(0)}^{4(j)}$ | $\hat{\omega}_{2(0)}^{4(j)}$ | $\hat{\omega}_{3(0)}^{4(j)}$ | $\hat{\omega}_{4(0)}^{4(j)}$ |
| 0 | 4 | -0.54 (-6.33) | -0.64 (-7.60) | -0.87 (-10.23) | -0.49 (-5.82) | -0.33 (-3.82) |
| | 5 | -0.57 (-6.74) | -0.67 (-8.10) | -0.88 (-10.63) | -0.50 (-6.03) | -0.34 (-4.07) |
| | 6 | -0.55 (-6.94) | -0.64 (-8.13) | -0.83 (-10.58) | -0.48 (-6.16) | -0.33 (-4.21) |
| | 7 | -0.54 (-6.91) | -0.65 (-8.34) | -0.86 (-11.02) | -0.51 (-6.56) | -0.34 (-4.43) |
| | 8 | -0.54 (-6.99) | -0.64 (-8.35) | -0.85 (-11.09) | -0.51 (-6.64) | -0.34 (-4.38) |
| AUTOBOX | | -0.56 (-6.57) | -0.65 (-6.99) | -0.86 (-9.26) | -0.48 (-5.16) | -0.37 (-4.38) |

Modelo estimado pelo AUTOBOX:

$$\beta_t = (-0.56 - 0.65B - 0.86B^2 - 0.48B^3 - 0.37B^4)\alpha_{t-3} + (1 - 0.52B + 0.16B^2)a_t$$

A análise dos resultados, acima expostos, permite retirar algumas conclusões.

Assim,

- (1) A aplicação da metodologia de identificação dos modelos de função transferência com base na função de autocorrelação estendida generalizada amostral leva à selecção, entre outros, do modelo (1,2,3)×(0,2), o qual foi sugerido em Box *et al.* (1994) para a descrição conjunta das duas séries sobre fornos a gás;

(2) Constatou-se que o modelo de regressão linear múltiplo que conduziu à especificação do modelo $(1,2,3) \times (0,2)$ é o que apresenta menor variância dos correspondentes resíduos, o que condiz com os valores do AIC calculados para os mesmos modelos estimados pelo AUTOBOX (Tabela 3.4.5). Por esta razão, pode ser considerado o modelo que melhor descreve as sucessões em estudo;

Tabela 3.4.5: Variância residual e AIC dos modelos identificados pela FACEG amostral

| Modelo | Var(residual) | AIC |
|------------------------|---------------|-------|
| $(1,2,3) \times (0,2)$ | 0.0732 | -2.62 |
| $(1,3,3) \times (0,2)$ | 0.0732 | -2.61 |
| $(0,4,3) \times (0,2)$ | 0.0737 | -2.60 |

(3) De notar, também, que as estimativas dos mínimos quadrados obtidas através das regressões iteradas apresentam, para todos os modelos identificados, valores próximos das obtidas pelo software AUTOBOX, que as calcula recorrendo a uma metodologia tradicional de estimação.

3.5 Propriedades dos Estimadores dos Mínimos Quadrados Iterados

Nesta secção, são apresentados dois resultados respeitantes aos estimadores dos mínimos quadrados iterados $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, p + s'$), uma vez que serão necessários para desenvolvimentos posteriores no quadro do problema do sobreajustamento. Tais resultados generalizam os lemas 5.2 e 5.3 de Tsay, R.S. e Tiao,

G.C. (1984) e as suas demonstrações, apesar de serem desenvolvidas em situação de maior complexidade, seguem de perto a técnica elaborada por aqueles dois autores.

Assim, sejam

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = 1 - \hat{\delta}_{1(m)}^{s'(j)} B - \dots - \hat{\delta}_{m(m)}^{s'(j)} B^m$$

e

$$\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\omega}_{0(m)}^{s'(j)} + \hat{\omega}_{1(m)}^{s'(j)} B + \dots + \hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(j)} B^{p+s'}$$

os polinómios estimados associados à j -ésima regressão iterada de ordem m para s' definida em (3.1.6).

Irá assumir-se, tal como o fizeram os dois autores acima mencionados, que todos os estimadores $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, p + s'$) são não nulos, uma vez que os processos β_l e α_l não são puramente determinísticos. Deste modo, todos os estimadores dos mínimos quadrados iterados são variáveis aleatórias contínuas e, portanto, serão não nulos com probabilidade 1, para um valor fixo de n .

Lema 3.8: Para quaisquer inteiros positivos s' , m e j ,

$$\hat{\delta}_{m+j}^{s'+j(0)}(B) = \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j(0)}(B) B^u \quad (3.5.1a)$$

$$\hat{\omega}_{m+j}^{s'+j(0)}(B) = \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j(0)}(B) B^u \quad (3.5.1b)$$

Demonstração:

Do lema 3.3,

$$\hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = \hat{e}_{m+j,t}^{s'+j(0)}$$

ou seja, tendo em consideração o significado destes termos residuais, esta igualdade vem

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B)\alpha_{t-b} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} = \hat{\delta}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\alpha_{t-b} . \quad (3.5.2)$$

Além disso, como se viu na secção 3.1, tem-se, também,

$$\hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} = \hat{e}_{m+j-u,t-u}^{s'+j-u(0)} ,$$

em que

$$\hat{e}_{m+j-u,t-u}^{s'+j-u(0)} = \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B)B^u\beta_t - \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B)B^u\alpha_{t-b} ,$$

donde, pode escrever-se, tendo em conta a igualdade (3.5.2),

$$\begin{aligned} \left[\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B)B^u \right] \beta_t - \left[\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B)B^u \right] \alpha_{t-b} = \\ = \hat{\delta}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_{m+j}^{s'+j(0)}(B)\alpha_{t-b} , \end{aligned}$$

ficando, deste modo, provado o lema. ■

Lema 3.9: Para quaisquer inteiros positivos s' , m e j ,

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\delta}_m^{s'(j-1)}(B)B$$

$$\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\omega}_m^{s'(j-1)}(B)B ,$$

em que $\hat{\xi}_m^{s'(j-1)} = -\frac{\hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}}{\hat{\delta}_m^{s'(j-1)}} = -\frac{\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(j-1)}}{\hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(j-1)}} e$

$$\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} = \hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\delta}_{i-1(m)}^{s'(j-1)} , \quad i = 1, \dots, m \quad \text{onde} \quad \hat{\delta}_{0(m)}^{s'(j)} = \hat{\delta}_{0(m+1)}^{s'+1(j-1)} = -1$$

$$\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} = \hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\omega}_{l-1(m)}^{s'(j-1)} , \quad l = 1, \dots, p+s' \quad \text{onde} \quad \hat{\omega}_{0(m)}^{s'(j)} = \hat{\omega}_{0(m+1)}^{s'+1(j-1)} .$$

Demonstração:

(1) Para $j=1$ e pelo lema 3.8,

$$\hat{\delta}_m^{s'(1)}(B) = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(0)}(B) + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\delta}_m^{s'(0)}(B)B$$

$$\hat{\omega}_m^{s'(1)}(B) = \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(0)}(B) + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\omega}_m^{s'(0)}(B)B .$$

Como os primeiros membros das duas equações são, respectivamente, polinómios de graus m e $p+s'$, e os segundos membros, polinómios de graus $m+1$ e $p+s'+1$, o estabelecimento destas igualdades implica que os correspondentes termos de ordens $m+1$ e $p+s'+1$ terão de ser nulos.

Assim, desenvolvendo cada um dos membros daquelas igualdades, tem-se

$$1 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'+1(1)} B^i = 1 - \left(\hat{\delta}_{1(m+1)}^{s'+1(0)} - \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \right) B - \sum_{i=2}^m \left(\hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(0)} + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\delta}_{i-1(m)}^{s'(0)} \right) B^i - \left(\hat{\delta}_{m+1(m+1)}^{s'+1(0)} + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\delta}_{m(m)}^{s'(0)} \right) B^{m+1}$$

e

$$\sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(1)} B^l = \hat{\omega}_{0(m+1)}^{s'+1(0)} + \sum_{l=1}^{p+s'} \left(\hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(0)} + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\omega}_{l-1(m)}^{s'(0)} \right) B^l + \left(\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(0)} + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(0)} \right) B^{p+s'+1},$$

em que os respectivos termos de ordem $m+1$ e $p+s'+1$ são nulos, i.e.,

$$\hat{\delta}_{m+1(m+1)}^{s'+1(0)} + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\delta}_{m(m)}^{s'(0)} = 0$$

$$\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(0)} + \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} \hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(0)} = 0,$$

ou seja,

$$\hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} = - \frac{\hat{\delta}_{m+1(m+1)}^{s'+1(0)}}{\hat{\delta}_{m(m)}^{s'(0)}} = - \frac{\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(0)}}{\hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(0)}}.$$

Logo, o lema fica demonstrado para $j=1$, tomando $\hat{\zeta}_m^{s'(0)} = \hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)}$.

(2) Para $j > 1$ e substituindo s' por $(s'+1)$, m por $(m+1)$ e j por $(j-1)$ em (3.5.1),

vem

$$\hat{\delta}_{m+j}^{s'+j(0)}(B) = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u$$

$$\hat{\omega}_{m+j}^{s'+j(0)}(B) = \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u .$$

Ora, por (3.5.1a) e (3.5.1b), respectivamente, tem-se que

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u$$

$$\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u = \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) &= \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \left(\hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} - \hat{\theta}_{1(m+1)}^{s'+1(j-1)} \right) \hat{\delta}_{m+j-1}^{s'+j-1(0)}(B) B + \\ &\quad + \sum_{u=2}^{j-1} \left(\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} - \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} \right) \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u + \hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_m^{s'(0)}(B) B^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) &= \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \left(\hat{\theta}_{1(m)}^{s'(1)} - \hat{\theta}_{1(m+1)}^{s'+1(j-1)} \right) \hat{\omega}_{m+j-1}^{s'+j-1(0)}(B) B + \\ &\quad + \sum_{u=2}^{j-1} \left(\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} - \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} \right) \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u + \hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_m^{s'(0)}(B) B^j . \end{aligned}$$

Fazendo

$$\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} - \hat{\theta}_{u(m+1)}^{s'+1(j-1)} = \hat{\gamma}_{u(m)}^{s'(j)} , \quad u = 1, 2, \dots, j-1 ,$$

e tendo-se, por (3.5.1),

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{m+j-1}^{s'+j-1(0)}(B) &= \hat{\delta}_m^{s'(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j-1)} \hat{\delta}_{m+j-1-u}^{s'+j-1-u(0)}(B) B^u \\ \hat{\omega}_{m+j-1}^{s'+j-1(0)}(B) &= \hat{\omega}_m^{s'(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j-1)} \hat{\omega}_{m+j-1-u}^{s'+j-1-u(0)}(B) B^u , \end{aligned}$$

vem, então,

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \left(\hat{\delta}_m^{s'(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j-1)} \hat{\delta}_{m+j-1-u}^{s'+j-1-u(0)}(B) B^u \right) B +$$

$$+ \sum_{u=2}^{j-1} \hat{\gamma}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u + \hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_m^{s'(0)}(B) B^j$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) &= \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \left(\hat{\omega}_m^{s'(j-1)}(B) - \sum_{u=1}^{j-1} \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j-1)} \hat{\omega}_{m+j-1-u}^{s'+j-1-u(0)}(B) B^u \right) B + \\ &+ \sum_{u=2}^{j-1} \hat{\gamma}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u + \hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_m^{s'(0)}(B) B^j, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) - \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_m^{s'(j-1)}(B) B &= \\ &= \sum_{u=2}^{j-1} \left(\hat{\gamma}_{u(m)}^{s'(j)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\theta}_{u-1(m)}^{s'(j-1)} \right) \hat{\delta}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u + \left(\hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\theta}_{j-1(m)}^{s'(j-1)} \right) \hat{\delta}_m^{s'(0)}(B) B^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) - \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_m^{s'(j-1)}(B) B &= \\ &= \sum_{u=2}^{j-1} \left(\hat{\gamma}_{u(m)}^{s'(j)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\theta}_{u-1(m)}^{s'(j-1)} \right) \hat{\omega}_{m+j-u}^{s'+j-u(0)}(B) B^u + \left(\hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\theta}_{j-1(m)}^{s'(j-1)} \right) \hat{\omega}_m^{s'(0)}(B) B^j. \end{aligned}$$

Deste modo, como pode verificar-se, os polinómios dos primeiros membros, das duas últimas igualdades, são, respectivamente, de graus $m+1$ e $p+s'+1$, e os dos segundos membros, de graus $m+j$ e $p+s'+j$. Ora, como se tomou $j > 1$ implica que os coeficientes de B^{m+j} e $B^{p+s'+j}$ para $j \geq 2$ terão de ser nulos.

Assim, tem-se, para $j \geq 2$,

$$\hat{\theta}_{j(m)}^{s'(j)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\theta}_{j-1(m)}^{s'(j-1)} = 0$$

$$\hat{\gamma}_{u(m)}^{s'(j)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\theta}_{u-1(m)}^{s'(j-1)} = 0, \quad u = 2, \dots, j-1,$$

e, conseqüentemente,

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_m^{s'(j-1)}(B) B$$

$$\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_m^{s'(j-1)}(B) B ,$$

ou seja, desenvolvendo cada um dos membros destas igualdades vem

$$1 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} B^i = 1 - \left(\hat{\delta}_{1(m+1)}^{s'+1(j-1)} - \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \right) B - \sum_{i=2}^m \left(\hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_{i-1(m)}^{s'(j-1)} \right) B^i - \\ - \left(\hat{\delta}_{m+1(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\delta}_m^{s'(j-1)} \right) B^{m+1}$$

$$\sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} B^l = \hat{\omega}_{0(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \sum_{l=1}^{p+s'} \left(\hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_{l-1(m)}^{s'(j-1)} \right) B^l + \\ + \left(\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} \hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(j-1)} \right) B^{p+s'+1} .$$

Como pode reparar-se, os polinómios dos segundos membros são, respectivamente, de graus $m+1$ e $p+s'+1$, enquanto os dos primeiros membros, são de graus m e $p+s'$. Então, tem-se

$$\hat{\gamma}_{1(m)}^{s'(j)} = - \frac{\hat{\delta}_{m+1(m+1)}^{s'+1(j-1)}}{\hat{\delta}_m^{s'(j-1)}} = - \frac{\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(j-1)}}{\hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(j-1)}} .$$

Logo, o lema fica demonstrado. Com efeito, tem-se

$$\hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\delta}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\delta}_m^{s'(j-1)}(B) B$$

$$\hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) = \hat{\omega}_{m+1}^{s'+1(j-1)}(B) + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\omega}_m^{s'(j-1)}(B) B ,$$

$$\text{onde } \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} = - \frac{\hat{\delta}_{m+1(m+1)}^{s'+1(j-1)}}{\hat{\delta}_m^{s'(j-1)}} = - \frac{\hat{\omega}_{p+s'+1(m+1)}^{s'+1(j-1)}}{\hat{\omega}_{p+s'(m)}^{s'(j-1)}} ,$$

ou seja,

$$1 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} B^i = 1 - \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(j-1)} B^i + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \left(1 - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j-1)} B^i \right) B$$

$$\sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} B^l = \sum_{l=0}^{p+s'+1} \hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(j-1)} B^l + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \left(\sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j-1)} B^l \right) B ,$$

o que implica que

$$\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} = \hat{\delta}_{i(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\delta}_{i-1(m)}^{s'(j-1)}, \quad i=1, \dots, m \text{ e } j \geq 1, \text{ onde } \hat{\delta}_{0(m)}^{s'(j)} = \hat{\delta}_{0(m+1)}^{s'+1(j-1)} = -1$$

$$\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} = \hat{\omega}_{l(m+1)}^{s'+1(j-1)} + \hat{\xi}_m^{s'(j-1)} \hat{\omega}_{l-1(m)}^{s'(j-1)}, \quad l=1, \dots, p+s' \text{ e } j \geq 1, \text{ onde } \hat{\omega}_{0(m)}^{s'(j)} = \hat{\omega}_{0(m+1)}^{s'+1(j-1)}. \blacksquare$$

3.6 Um caso particular de Sobreajustamento

Nas aplicações práticas, os valores das ordens r e s associadas, respectivamente, aos polinómios “output” e “input” são desconhecidos e, a sua identificação através da função de autocorrelação estendida generalizada amostral, assumindo os valores de b , p e q conhecidos, depende directamente da consistência dos estimadores dos mínimos quadrados iterados $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i=1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l=0, 1, \dots, p+s'$).

Um dos problemas que pode surgir com a utilização desta metodologia de identificação relaciona-se com a possibilidade de se poder identificar, para as séries em estudo, um modelo para o qual as ordens dos polinómios “input” e “output” são superiores às verdadeiras ordens s e r , respectivamente. Este facto pode surgir quando o modelo de regressão iterado fica “ajustado” para uma ordem m e para um valor de s' superiores a $p+r$ e s , respectivamente. Está-se, assim, perante um problema referido como de sobreajustamento. Este assunto foi tratado por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984) para os modelos *ARMA* no âmbito da sua identificação através da função de autocorrelação estendida amostral. Nesta secção tentar-se-á dar resposta a tal problema no quadro dos modelos bivariados de função transferência, tendo sido necessário generalizar os lemas 6.2 e 6.3 e o teorema 6.1 daqueles dois autores. No entanto, a maior complexidade destes modelos relativamente aos *ARMA* univariados, não permite

a sua completa resolução. Com efeito, como será visto mais à frente, devido às condições de convergência estabelecidas para os estimadores dos mínimos quadrados iterados, lema 3.5, e às propriedades destes, apresentadas na secção anterior, apenas se conseguiu tratar o caso particular em que, para quaisquer valores de p, q, r e s' , se tem $\max(p + s', r + q) = r + q$.

Para a situação referida, ir-se-á provar que o sobreajustamento de $m - (p + r) > 0$ desfasamentos associados à série "output" β_t , e de $(p + s') - (p + r) > 0$ desfasamentos associados à sucessão "input" α_t , onde $m - (p + r) = s' - s$, implica o aumento da ordem do polinómio de médias móveis associado às séries transformadas $Y_{m,t}^{s'(j)}$, sendo o número de termos adicional dado por $\min\{m - (p + r), j - q^*\}$, em que $q^* = \max(p + s', r + q) = r + q$.

Considerem-se, assim, as fórmulas recursivas definidas no lema 3.9. Tomando $s' = s + h$, $m = m^* + h$ e $j = q^* + i$, onde $m^* = p + r$ e $q^* = \max(p + s', r + q) = r + q$, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B) = \hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+i-1)}(B) + \hat{\xi}_h^{h(i-1)} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i-1)}(B)B \quad (3.6.1a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B) = \hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+i-1)}(B) + \hat{\xi}_h^{h(i-1)} \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i-1)}(B)B, \quad (3.6.1b)$$

em que
$$\hat{\xi}_h^{h(i-1)} = -\frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+i-1)}}{\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(m^*+h+1)}} = -\frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1}^{s+h+1(q^*+i-1)}}{\hat{\omega}_{p+s+h}^{s+h(q^*+i-1)}}.$$

Analisando o comportamento assintótico dos polinómios $\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B)$ e $\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B)$, para $i, h \geq 1$, poder-se-á, então, inferir sobre o comportamento assintótico das funções de autocorrelação amostrais das sucessões $Y_{m,t}^{s'(j)}$.

Assim, considerando, primeiro, o caso em que $i=1$ e $h \geq 1$, vem, a partir das igualdades (3.6.1),

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B) = \hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*)}(B) + \hat{\xi}_h^{h(0)} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*)}(B)B \quad (3.6.2a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B) = \hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*)}(B) + \hat{\xi}_h^{h(0)} \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*)}(B)B, \quad (3.6.2b)$$

$$\text{onde } \hat{\xi}_h^{h(0)} = \frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*)}}{\hat{\delta}_{m^*+h(m^*+h)}^{s+h(q^*)}} = \frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*)}}{\hat{\omega}_{p+s+h(m^*+h)}^{s+h(q^*)}}. \quad (3.6.3)$$

Ora, pelo lema 3.5, para $s' \geq s$, $m \geq p+r$ e $j = \max(p+s', r+q) = r+q$, tem-se, para $h \geq 0$,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*)}(B) = \delta_{p+r}^*(B) + o_p(1)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*)}(B) = \omega_{p+s}^*(B) + o_p(1),$$

e

$$\hat{\delta}_{m^*+h'(m^*+h)}^{s+h(q^*)} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_{p+s+h'(m^*+h)}^{s+h(q^*)} \xrightarrow{p} 0, \quad \text{para } h' = 1, \dots, h \text{ e } h \geq 1.$$

Assim, uma vez que estes últimos estimadores convergem com a mesma velocidade de convergência, pode concluir-se que (3.6.3) converge em probabilidade para uma variável aleatória real contínua, $\xi_h^{h(0)}$, não nula com probabilidade 1, i.e.,

$$\hat{\xi}_h^{h(0)} \xrightarrow{p} \xi_h^{h(0)}.$$

Consequentemente, obtém-se, para (3.6.2),

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) \left(1 + \xi_h^{h(0)} B\right) \quad (3.6.4a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) \left(1 + \xi_h^{h(0)} B\right). \quad (3.6.4b)$$

Por outro lado, pelo lema 3.5 e em particular para $s' = s$, $m = p+r$ e $j = \max(p+s', r+q) = r+q$,

$$\hat{\delta}_{m^*}^{s(q^*)}(B) = \delta_{p+r}^*(B) + o_p(1) \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_{m^*}^{s(q^*)}(B) = \omega_{p+s}^*(B) + o_p(1),$$

vindo, para $h = 0$,

$$\xi_0^{(0)} = \frac{\hat{\delta}_{m^*+1(m^*+1)}^{s+1(q^*)}}{\hat{\delta}_{m^*(m^*)}^{s(q^*)}} = \frac{\hat{\omega}_{p+s+1(m^*+1)}^{s+1(q^*)}}{\hat{\omega}_{p+s(m^*)}^{s(q^*)}} \xrightarrow{p} 0$$

e

$$\hat{\delta}_{m^*}^{s(q^*+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) \quad (3.6.5a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*}^{s(q^*+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B). \quad (3.6.5.b)$$

Assim, de (3.1.23) e (3.1.24), ou seja,

$$Y_{p+r,t}^s = \delta_{p+r}^*(B)\beta_t - \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b} = \theta_{r+q}^*(B)a_t,$$

obtem-se para séries transformadas,

$$Y_{m^*+h,t}^{s+h(q^*+1)} = \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B)\beta_t - \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B)\alpha_{t-b},$$

o seguinte resultado assintótico, tendo em conta (3.6.4) e (3.6.5),

$$\begin{aligned} Y_{m^*+h,t}^{s+h(q^*+1)} &\doteq \theta_{r+q}^*(B)a_t, & h = 0 \\ &\doteq (1 + \xi_h^{h(0)}B)\theta_{r+q}^*(B)a_t, & h > 0 \end{aligned}$$

com $m^* = p+r$ e $q^* = \max(p+s', r+q) = r+q$.

Ora,

$$\begin{aligned} Y_{m^*+h,t}^{s+h(q^*+1)} &\doteq (1 + \xi_h^{h(0)}B)\theta_{r+q}^*(B)a_t \\ &\doteq \left(1 - (\theta_1^* - \xi_h^{h(0)})B - \sum_{i=2}^{r+q} (\theta_i^* - \xi_h^{h(0)}\theta_{i-1}^*)B^i - (\xi_h^{h(0)}\theta_{r+q}^*)B^{r+q+1} \right) a_t \\ &\doteq \Theta_{r+q+1}(B)a_t, \end{aligned}$$

tendo-se, então, que

$$\begin{aligned} Y_{m^*+h,t}^{s+h(q^*+1)} &\sim MA(r+q) \quad , \quad h=0 \\ &\sim MA(r+q+1) \quad , \quad h>0 \end{aligned}$$

Nestas circunstâncias, as funções de autocorrelação amostrais têm o seguinte comportamento assintótico, respectivamente,

$$\begin{aligned} r_{Y_{m^*+h,t}^{s(q^*+1)}}(k) &\doteq 0 \quad , \quad k > r+q \\ &\neq 0 \quad , \quad k = r+q \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

e

$$\begin{aligned} r_{Y_{m^*+h,t}^{s+h(q^*+1)}}(k) &\doteq 0 \quad , \quad k > r+q+1 \\ &\doteq c(h,1) \quad , \quad k = r+q+1 \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

onde $c(h,1) \in [-1,1]$ é uma constante arbitrária não nula com probabilidade 1.

Comparando (3.6.6) e (3.6.7) com (3.1.33), i.e.,

$$\begin{aligned} r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) &\doteq 0 \quad , \quad k > r+q \\ &\neq 0 \quad , \quad k = r+q \end{aligned} \quad \text{para } s'=s, m=m^* \text{ e } j \geq q^*$$

verifica-se que $r_{Y_{m^*+h,t}^{s(q^*+1)}}(k)$, $i > 0$, possui a mesma propriedade de “corte brusco para zero” dos processos $MA(r+q)$, o mesmo não acontecendo com $r_{Y_{m^*+h,t}^{s+h(q^*+1)}}(k)$, $h \geq 1$, i.e.,

aquela propriedade deixa de ser válida quando mais de $(p+r)$ parâmetros $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ e

$(p+s)$ parâmetros $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ são incluídos nas regressões iteradas.

Estude-se, agora, o caso geral $i \geq 1$ e $h \geq 1$, de forma a estender o resultado anterior.

Comece-se por considerar a função polinomial $H_h^{h(i)}(B)$, $i \geq 0$ e $h \geq i$, definida por

$$H_h^{h(i)}(B) = H_{h+1}^{h+1(i-1)}(B) + \xi_h^{h(i-1)} H_h^{h(i-1)}(B) B \quad , \quad i > 0 \quad (3.6.8)$$

e $H_h^{h(0)}(B) = 1$, onde $\xi_h^{h(i-1)}$ é uma variável aleatória real contínua. Por substituições sucessivas de $H_h^{h(i-1)}(B)$, a igualdade (3.6.8) pode, também, ser escrita na forma

$$H_h^{h(i)}(B) = H_{h+1}^{h+1(i-1)}(B) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\prod_{\nu=1}^j \xi_h^{h(i-\nu)} \right) H_{h+1}^{h+1(i-j-1)}(B) B^j + \left(\prod_{\nu=1}^i \xi_h^{h(i-\nu)} \right) B^i,$$

verificando-se, então, que $H_h^{h(i)}(B)$ é um polinómio de grau i , cujo coeficiente de B^i é

$$\text{dado por } \prod_{\nu=1}^i \xi_h^{h(i-\nu)}.$$

No lema seguinte é estabelecido o comportamento assintótico dos polinómios

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B) \text{ e } \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B) \text{ para } i \geq 1 \text{ e } h \geq i. \text{ Assim,}$$

Lema 3.10: Sejam β_i e α_i duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1). Então, para $i \geq 1$ e $h \geq i$, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B) &\xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_h^{h(i)}(B) \\ \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B) &\xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_h^{h(i)}(B). \end{aligned}$$

Demonstração:

A demonstração do lema é feita por indução sobre i . Assim,

(1) O lema é verdadeiro para $i = 1$, como se viu anteriormente, i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B) &\xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_h^{h(1)}(B) \\ \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+1)}(B) &\xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_h^{h(1)}(B). \end{aligned}$$

Com efeito, este resultado verifica-se tendo em conta (3.6.4) e o facto de

$$H_h^{h(1)}(B) = H_{h+1}^{h+1(0)}(B) + \xi_h^{h(0)} B,$$

onde pela definição da função polinomial $H_h^{h(i)}(B)$, $h \geq i$, se tem $H_{h+1}^{h+1(0)}(B) = 1$.

(2) Suponha-se que o lema se verifica para $i = a \geq 1$, ou seja, para $h \geq a$, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B)H_h^{h(a)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B)H_h^{h(a)}(B).$$

Ir-se-á provar que o lema é verdadeiro para $i = a + 1$, ou seja, para $h \geq a + 1$,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B)H_h^{h(a+1)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B)H_h^{h(a+1)}(B).$$

Então, pelo lema 3.9, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) = \hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+a)}(B) + \hat{\mathcal{E}}_h^{h(a)} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B)B \quad (3.6.9a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) = \hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+a)}(B) + \hat{\mathcal{E}}_h^{h(a)} \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B)B. \quad (3.6.9b)$$

Ora, por hipótese, vem

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B)H_h^{h(a)}(B) \quad (3.6.10a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B)H_h^{h(a)}(B), \quad (3.6.10b)$$

e

$$\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+a)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B)H_{h+1}^{h+1(a)}(B) \quad (3.6.11a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+a)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B)H_{h+1}^{h+1(a)}(B). \quad (3.6.11b)$$

Vê-se, assim, que os polinómios $\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B)$ e $\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+a)}(B)$ de graus $m^* + h$ e $m^* + h + 1$ (note-se que $m^* = p + r$) e, os polinómios $\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a)}(B)$ e $\hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+a)}(B)$ de graus $p + s + h$ e $p + s + h + 1$ convergem em probabilidade para polinómios de graus $p + r + a$ e $p + s + a$, respectivamente, o que implica que, para $h \geq a + 1$, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+a)} \xrightarrow{p} 0$$

$$\hat{\omega}_{p+s+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+a)} \xrightarrow{p} 0$$

e

$$\hat{\delta}_{m^*+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+a)} \xrightarrow{p} 0$$

$$\hat{\omega}_{p+s+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+a)} \xrightarrow{p} 0 .$$

Então, resulta que

$$\hat{\xi}_h^{h(a)} = -\frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+a)}}{\hat{\delta}_{m^*+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+a)}} = -\frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+a)}}{\hat{\omega}_{p+s+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+a)}} \xrightarrow{p} \xi_h^{h(a)} , \quad (3.6.12)$$

onde, de forma análoga à situação anterior, $\xi_h^{h(a)}$ é uma variável aleatória real contínua.

Assim, por (3.6.9), (3.6.10), (3.6.11) e (3.6.12), vem

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) \left(H_{h+1}^{h+1(a)}(B) + \xi_h^{h(a)} H_h^{h(a)}(B) B \right)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) \left(H_{h+1}^{h+1(a)}(B) + \xi_h^{h(a)} H_h^{h(a)}(B) B \right) .$$

Mas, por (3.6.8), tem-se

$$H_{h+1}^{h+1(a)}(B) + \xi_h^{h(a)} H_h^{h(a)}(B) B = H_h^{h(a+1)}(B) , \quad h \geq a+1 .$$

Donde, para $h \geq a+1$,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_h^{h(a+1)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_h^{h(a+1)}(B) ,$$

o que prova o enunciado do lema. ■

O comportamento assintótico dos polinômios $\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B)$ e $\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+i)}(B)$, agora, para $h < i$, é dado pelo lema seguinte:

Lema 3.11: Sejam β_i e α_i duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1). Então, para $h \geq 0$ e $l = 0,1,2,\dots$, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+l)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{h+l}^{h+l}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+l)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{h+l}^{h+l}(B).$$

Demonstração:

O resultado do lema é provado por indução sobre l . Então,

(1) O lema é verdadeiro para:

(1.1) $l = 0$,

i.e., para $h \geq 0$, vem, pelo lema 3.10 e tomando $i = h$,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_h^{h(h)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_h^{h(h)}(B).$$

(1.2) $l = 1$,

i.e., pelo lema 3.9, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+1)}(B) = \hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}(B) + \hat{\xi}_h^{h(h)} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) B \quad (3.6.13a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+1)}(B) = \hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}(B) + \hat{\xi}_h^{h(h)} \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) B, \quad (3.6.13b)$$

onde $\hat{\xi}_h^{h(h)} = -\frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}}{\hat{\delta}_{m^*+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+h)}} = -\frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+h)}}{\hat{\omega}_{p+s+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+h)}}$ e, pelo lema 3.10,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_h^{h(h)}(B) \quad (3.6.14a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_h^{h(h)}(B) \quad (3.6.14b)$$

e

$$\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{h+1}^{h+1(h)}(B) \quad (3.6.15a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{h+1}^{h+1(h)}(B). \quad (3.6.15b)$$

Ora, desenvolvendo os polinômios de (3.6.14), i.e.,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) = 1 - \sum_{i=1}^{m^*+h} \hat{\delta}_{i(m^*+h)}^{s+h(q^*+h)} B^i,$$

$$\delta_{p+r}^*(B) H_h^{h(h)}(B) =$$

$$= \left(1 - \sum_{i=1}^{p+r} \delta_i^* B^i \right) \left(H_{h+1}^{h+1(h-1)}(B) + \sum_{j=1}^{h-1} \left(\prod_{\nu=1}^j \xi_h^{h(h-\nu)} \right) H_{h+1}^{h+1(h-j-1)}(B) B^j + \left(\prod_{\nu=1}^h \xi_h^{h(h-\nu)} \right) B^h \right),$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}(B) = \sum_{l=0}^{p+s+h} \hat{\omega}_{l(m^*+h)}^{s+h(q^*+h)} B^l$$

e

$$\omega_{p+s}^*(B) H_h^{h(h)}(B) =$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{p+s} \omega_l^* B^l \right) \left(H_{h+1}^{h+1(h-1)}(B) + \sum_{j=1}^{h-1} \left(\prod_{\nu=1}^j \xi_h^{h(h-\nu)} \right) H_{h+1}^{h+1(h-j-1)}(B) B^j + \left(\prod_{\nu=1}^h \xi_h^{h(h-\nu)} \right) B^h \right),$$

implica que

$$\hat{\delta}_{m^*+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+h)} \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^* \prod_{\nu=1}^h \xi_h^{h(h-\nu)} \quad (3.6.16a)$$

e

$$\hat{\omega}_{p+s+h(m^*+h)}^{s+h(q^*+h)} \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^* \prod_{\nu=1}^h \xi_h^{h(h-\nu)}. \quad (3.6.16b)$$

De forma semelhante, retira-se de (3.6.15) que

$$\hat{\delta}_{m^*+h+1(m^*+h+1)}^{s+h+1(q^*+h)} \xrightarrow{p} 0 \quad (3.6.17a)$$

e

$$\hat{\omega}_{p+s+h+1(m^*+h)}^{s+h+1(q^*+h)} \xrightarrow{p} 0. \quad (3.6.17b)$$

Logo, por (3.6.16) e (3.6.17), vem

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_h^{h(h)} &= \frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h)}{\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h)} \xrightarrow{p} \frac{0}{\delta_{p+r}^* \prod_{\nu=1}^h \xi_h^{h(h-\nu)}} \\ &= \frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1}^{s+h+1}(q^*+h)}{\hat{\omega}_{p+s+h}^{s+h}(q^*+h)} \xrightarrow{p} \frac{0}{\omega_{p+s}^* \prod_{\nu=1}^h \xi_h^{h(h-\nu)}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{\xi}_h^{h(h)} \xrightarrow{p} 0. \quad (3.6.18)$$

Assim, tendo em conta (3.6.14), (3.6.15) e (3.6.18), tem-se para as igualdades (3.6.13),

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+1)(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{h+1}^{h+1(h)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+1)(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{h+1}^{h+1(h)}(B),$$

o que prova o lema para $l = 1$.

(2) Suponha-se que o lema é verificado para $l = a$, ou seja, para $h \geq 0$, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{h+a}^{h+a(h)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{h+a}^{h+a(h)}(B).$$

Ir-se-á provar que o lema é verdadeiro para $l = a + 1$, i.e., para $h \geq 0$,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a+1)(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{h+a+1}^{h+a+1(h)}(B)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a+1)(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{h+a+1}^{h+a+1(h)}(B).$$

Pelo lema 3.9, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a+1)(B) = \hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a)(B) + \hat{\xi}_h^{h(h+a)} \hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B)B \quad (3.6.19a)$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a+1)(B) = \hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a)(B) + \hat{\xi}_h^{h(h+a)} \hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B)B, \quad (3.6.19b)$$

onde $\xi_h^{h(h+a)} = -\frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a)(B)}{\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B)} = -\frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a)(B)}{\hat{\omega}_{p+s+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B)}$.

Ora, por hipótese, tem-se

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B)H_{h+a}^{h+a}(h)(B) \tag{3.6.20a}$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a)(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B)H_{h+a}^{h+a}(h)(B) \tag{3.6.20b}$$

e

$$\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a)(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B)H_{h+a}^{h+a}(h+1)(B) \tag{3.6.21a}$$

$$\hat{\omega}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a)(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B)H_{h+a}^{h+a}(h+1)(B). \tag{3.6.21b}$$

Como se verifica, em (3.6.20), os polinômios do lado esquerdo, de graus $m^* + h$ e $p + s + h$, têm como últimas parcelas $\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a) B^{m^*+h}$ e $\hat{\omega}_{p+s+h}^{s+h}(q^*+h+a) B^{p+s+h}$, e os do lado direito, de graus $p + r + h$ e $p + s + h$, $\delta_{p+r}^* \left(\prod_{\nu=1}^h \xi_{h+a}^{h+a}(h-\nu) \right) B^{p+r+h}$ e $\omega_{p+s}^* \left(\prod_{\nu=1}^h \xi_{h+a}^{h+a}(h-\nu) \right) B^{p+s+h}$, o que implica,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h}(q^*+h+a) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^* \left(\prod_{\nu=1}^h \xi_{h+a}^{h+a}(h-\nu) \right) \tag{3.6.22a}$$

e

$$\hat{\omega}_{p+s+h}^{s+h}(q^*+h+a) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^* \left(\prod_{\nu=1}^h \xi_{h+a}^{h+a}(h-\nu) \right). \tag{3.6.22b}$$

De modo análogo, tem-se para (3.6.21),

$$\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1}(q^*+h+a) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^* \left(\prod_{\nu=1}^{h+1} \xi_{h+a}^{h+a}(h+1-\nu) \right) \tag{3.6.23a}$$

e

$$\hat{\omega}_{p+s+h+1}^{s+h+1(q^*+h+a)} \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^* \left(\prod_{\nu=1}^{h+1} \xi_{h+a}^{h+a(h+1-\nu)} \right). \quad (3.6.23b)$$

Então, por (3.6.22) e (3.6.23), vem

$$\begin{aligned} \xi_h^{h(h+a)} &= - \frac{\hat{\delta}_{m^*+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}}{\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h)}} \xrightarrow{p} - \frac{\prod_{\nu=1}^{h+1} \xi_{h+a}^{h+a(h+1-\nu)}}{\prod_{\nu=1}^h \xi_{h+a}^{h+a(h-\nu)}} \\ &= - \frac{\hat{\omega}_{p+s+h+1}^{s+h+1(q^*+h)}}{\hat{\omega}_{p+s+h}^{s+h(q^*+h)}} \xrightarrow{p} - \frac{\prod_{\nu=1}^{h+1} \xi_{h+a}^{h+a(h+1-\nu)}}{\prod_{\nu=1}^h \xi_{h+a}^{h+a(h-\nu)}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi_h^{h(h+a)} \xrightarrow{p} - \xi_{h+a}^{h+a(h)}. \quad (3.6.24)$$

Assim, por (3.6.20), (3.6.21) e (3.6.24), obtêm-se para as igualdades (3.6.19)

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) \left(H_{h+a}^{h+a(h+1)}(B) - \xi_{h+a}^{h+a(h)} H_{h+a}^{h+a(h)}(B) B \right)$$

e

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) \left(H_{h+a}^{h+a(h+1)}(B) - \xi_{h+a}^{h+a(h)} H_{h+a}^{h+a(h)}(B) B \right).$$

Mas, pela definição da função polinomial $H_h^{h(i)}(B)$, $i \geq 0$ e $h \geq i$,

$$H_{h+a}^{h+a(h+1)}(B) - \xi_{h+a}^{h+a(h)} H_{h+a}^{h+a(h)}(B) B = H_{h+a+1}^{h+a+1(h)}(B).$$

Logo, tem-se, para $h \geq 0$,

$$\hat{\delta}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{h+a+1}^{h+a+1(h)}(B)$$

e

$$\hat{\omega}_{m^*+h}^{s+h(q^*+h+a+1)}(B) \xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{h+a+1}^{h+a+1(h)}(B),$$

completando-se, assim, a demonstração do lema. ■

Tomando, agora, $h = m - m^* = s' - s \geq 0$ e $i = h + l = j - q^* \geq 0$, os lemas 3.10 e 3.11 podem ser condensados no lema seguinte:

Lema 3.12: Sejam β_t e α_t duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1). Então, para $m \geq m^*$, $s' \geq s$ e $j \geq q^*$, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) &\xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{m-m^*}^{s'-s(j-q^*)}(B) \quad , \quad 0 \leq j - q^* \leq m - m^* \\ &\xrightarrow{p} \delta_{p+r}^*(B) H_{j-q^*}^{j-q^*(m-m^*)}(B) \quad , \quad j - q^* > m - m^* \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) &\xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{m-m^*}^{s'-s(j-q^*)}(B) \quad , \quad 0 \leq j - q^* \leq m - m^* \\ &\xrightarrow{p} \omega_{p+s}^*(B) H_{j-q^*}^{j-q^*(m-m^*)}(B) \quad , \quad j - q^* > m - m^* \geq 0 \quad , \end{aligned}$$

onde $m^* = p + r$ e $q^* = \max(p + s', r + q) = r + q$, com $m - m^* = s' - s$. ■

Como consequência deste lema pode estabelecer-se, relativamente às sucessões transformadas,

$$Y_{m,t}^{s'(j)} = \hat{\delta}_m^{s'(j)}(B) \beta_t - \hat{\omega}_m^{s'(j)}(B) \alpha_{t-b} \quad , \quad t = \max(m, b + p + s') + 1, \dots, n,$$

o seguinte resultado:

Lema 3.13: Sejam β_t e α_t duas séries cronológicas relacionadas pelo modelo de função transferência racional $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1). Então, para $m \geq m^*$, $s' \geq s$ e $j \geq q^*$,

$$Y_{m,t}^{s'(j)} \doteq \theta_{r+q}^*(B) H_{m-m^*}^{s'-s(j-q^*)}(B) a_t \quad , \quad 0 \leq j - q^* \leq m - m^* \quad (3.6.25a)$$

$$\doteq \theta_{r+q}^*(B) H_{j-q^*}^{j-q^*(m-m^*)}(B) a_t \quad , \quad j - q^* > m - m^* \geq 0, \quad (3.6.25b)$$

onde $m^* = p + r$ e $q^* = \max(p + s', r + q) = r + q$, com $m - m^* = s' - s$.

Demonstração:

Pelo lema 3.12, vem

$$Y_{m,t}^{s'(j)} \xrightarrow{p} \left(\delta_{p+r}^*(B)\beta_t - \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b} \right) H_{m-m^*}^{s'-s(j-q^*)}(B) \quad , \quad 0 \leq j-q^* \leq m-m^*$$

$$\xrightarrow{p} \left(\delta_{p+r}^*(B)\beta_t - \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b} \right) H_{j-q^*}^{j-q^*(m-m^*)}(B) \quad , \quad j-q^* > m-m^* \geq 0 \quad .$$

Mas, por (3.1.23) e (3.1.24), tem-se

$$\delta_{p+r}^*(B)\beta_t - \omega_{p+s}^*(B)\alpha_{t-b} = \theta_{r+q}^*(B)a_t \quad ,$$

ficando, assim, provado o enunciado do lema. ■

Ora, de (3.6.25a) retira-se que

$$Y_{m,t}^{s'(j)} \sim MA\left((r+q) + (j-q^*)\right) \quad , \quad \text{onde } j-q^* = \min(m-m^*, j-q^*) \quad , \quad (3.6.26a)$$

e de (3.6.25b), que

$$Y_{m,t}^{s'(j)} \sim MA\left((r+q) + (m-m^*)\right) \quad , \quad \text{em que } m-m^* = \min(m-m^*, j-q^*) \quad . \quad (3.6.26b)$$

Estes dois resultados acabados de estabelecer ilustram bem o problema do sobreajustamento. Na realidade, pode constatar-se que, em situações práticas onde se assume que as ordens p e q foram previamente identificadas, restando desconhecidas as ordens r e s da função transferência, o efeito de sobreajustar $m-m^* > 0$ ($m^* = p+r$) desfasamentos associados a β_t e de $(p+s') - (p+s) > 0$ ($s' \geq s$) desfasamentos associados a α_t , com $m-m^* = s' - s$, provoca, em geral, um incremento na ordem do polinómio de médias móveis das séries transformadas $Y_{m,t}^{s'(j)}$, onde o número de termos adicionais vem dado por $\min\{m-m^*, j-q^*\}$, no caso em que se verifica a condição $q^* = \max(p+s', r+q) = r+q$.

Assim, de (3.6.25) e (3.6.26), para o modelo de função transferência $(r,s,b) \times (p,q)$ (2.2.1), a função de autocorrelação estendida generalizada amostral, para o caso particular em que $m^* = p+r$ e $q^* = \max(p+s', r+q) = r+q$, é definida por

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0, \quad k > r + q + (j - q^*)$$

$$\doteq c_1(m - m^*, j - q^*), \quad k = r + q + (j - q^*), \quad 0 \leq j - q^* \leq m - m^*, \quad (3.6.27a)$$

e

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0, \quad k > r + q + (m - m^*)$$

$$\doteq c_2(m - m^*, j - q^*), \quad k = r + q + (m - m^*), \quad j - q^* > m - m^* \geq 0. \quad (3.6.27b)$$

De (3.6.27), resulta, então, que

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0, \quad k > r + q + \min(m - m^*, j - q^*)$$

$$\doteq c(m - m^*, j - q^*), \quad k = r + q + \min(m - m^*, j - q^*), \quad (3.6.28)$$

com $s' - s = m - m^* \geq 0$ e $j - q^* \geq 0$, onde $c(m - m^*, j - q^*) \in [-1, 1]$ é uma constante arbitrária não nula ou uma variável aleatória real contínua.

A tabela referente ao resultado (3.6.28), ilustrada na Tabela 3.6.1, apresentará, sucessivamente, para os quadros $(m^*, p + s)$, $(m^* + 1, p + s + 1)$, $(m^* + 2, p + s + 2)$, ..., padrões rectangulares para a função de autocorrelação estendida generalizada amostral com elementos assintoticamente nulos e limitados à esquerda por colunas de valores estatisticamente significativos correspondentes aos valores daquela função nos desfasamentos $k = r + q, r + q + 1, r + q + 2, \dots$ para $j \geq q^*, q^* + 1, q^* + 2, \dots$, $(q^* = r + q)$, respectivamente.

Tabela 3.6.1: $r_{Y_m^{(j)}}(k) \neq 0, k = r + q + \min(m - m^*, j - q^*)$ e $r_{Y_m^{(j)}}(k) = 0, k > r + q + \min(m - m^*, j - q^*)$

| $p + s'$ | | ... | $p + s$ | | | | | | | | p | | | |
|----------|------------------|-----|---------|-----|-------|---------|---------|---------|---------|-----|-----|-----|-------|---------|
| m | $j \backslash k$ | ... | q | ... | $r+q$ | $r+q+1$ | $r+q+2$ | $r+q+3$ | $r+q+4$ | ... | q | ... | $r+q$ | $r+q+1$ |
| ⋮ | ⋮ | ... | ... | | | | | | | | | | | |
| m^* | 0 | | | | ⋮ | | | | | | | | | |
| | 1 | | | | ⋮ | | | | | | | | | |
| | ⋮ | | | | ⋮ | | | | | | | | | |
| | q^* | | ... | ... | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | | | | |
| | q^*+1 | ⋮ | | | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | | | | |
| | q^*+2 | | | | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | | | | |
| | q^*+3 | | | | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | | | | |
| | q^*+4 | | | | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... | | | | |
| ⋮ | | | | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | |
| m^*+1 | 0 | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ |
| | 1 | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ |
| | ⋮ | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ |
| | q^* | | | | | | | | | | ... | ... | × | 0 |
| | q^*+1 | ⋮ | | | | | | | | | ... | ... | × | × |
| | q^*+2 | | | | | | | | | | | | × | × |
| | q^*+3 | | | | | | | | | | | | × | × |
| | q^*+4 | | | | | | | | | | | | × | × |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ | |
| m^*+2 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | ⋮ | | | | | | | | | | | | | |
| | q^* | | | | | | | | | | | | | |
| | q^*+1 | ⋮ | | | | | | | | | | | | |
| | q^*+2 | | | | | | | | | | | | | |
| | q^*+3 | | | | | | | | | | | | | |
| | q^*+4 | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | | | | | | | | | | | |

$\min(m - m^*, j - q^*)$, com $m^* = p + r$, $q^* = \max(p + s', r + q) = r + q$ e $s' - s = m - m^*$

| | | | | | | | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-----|-------------|-----|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|-----|
| $p + s + 1$ | | | | $p + s + 2$ | | | | | | | | ... |
| $r + q + 2$ | $r + q + 3$ | $r + q + 4$ | ... | q | ... | $r + q$ | $r + q + 1$ | $r + q + 2$ | $r + q + 3$ | $r + q + 4$ | ... | ... |
| ... | | | | | | | | ... | | | | ... |
| | | | | | | | | | | | | ... |
| | | | | | | | | | | | | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | | | | | | | | | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | | | | | | | | | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | | | | | | | | | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | | | | | | | | | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | | | | | | ⋮ |
| | | | | | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | | | | ... | ... | × | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| | | | | | ... | ... | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| | | | | | | ... | ... | × | 0 | 0 | 0 | ... |
| | | | | | | | | × | 0 | 0 | 0 | ... |
| | | | | | | | | × | 0 | 0 | 0 | ... |
| | | | | | | | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ... | | | | | | | | ... | | | | ... |

CAPÍTULO 4.

Estudo de Simulação

No capítulo anterior foi desenvolvida uma nova metodologia de identificação dos modelos de função transferência baseada no comportamento da Função de Autocorrelação Estendida Generalizada (FACEG) amostral, a qual foi aplicada com sucesso ao estudo de uma situação concreta (secção 3.4 Exemplo). Contudo, este último aspecto nada comprova sobre as potencialidades práticas da referida metodologia. Por esta razão, foi necessário realizar um estudo de simulação que permitisse aferir as capacidades reais do procedimento proposto, ou seja, que indicasse a percentagem de sucessos obtidos através da identificação pela FACEG amostral, face aos modelos efectivamente identificados.

Tendo em conta que a metodologia proposta generaliza e baseia-se na metodologia de identificação dos modelos *ARMA* univariados através da Função de Autocorrelação Estendida (FACE) amostral, introduzida por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), faz todo o sentido comparar os resultados obtidos no referido estudo de simulação, com os obtidos num estudo de simulação semelhante realizado no âmbito da FACE amostral, de modo a comparar a eficácia de cada um dos procedimentos nas respectivas áreas de aplicação.

Assim, neste capítulo são apresentados dois estudos de simulação relativos ao procedimento de especificação das ordens que caracterizam os modelos univariados de Box-Jenkins e os modelos de função transferência bivariados.

O primeiro estudo, exposto na secção 4.1, incide sobre a metodologia de identificação de modelos univariados $ARMA(p,q)$ através da FACE amostral.

O segundo estudo, apresentado na secção 4.2, reporta-se à metodologia de identificação de modelos de função transferência bivariados $(r,s,b) \times (p,q)$ com base na FACEG amostral, descrita na secção 3.3.

4.1 Função de Autocorrelação Estendida Amostral

Como é bem sabido, nos modelos mistos $ARMA$ univariados as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial amostrais apresentam um decaimento amortecido sem cortes bruscos para zero o que dificulta, em situações práticas, a determinação das ordens p e q associadas, respectivamente, aos polinómios autoregressivo e de médias móveis.

De forma a complementar a acção daquelas duas funções, Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984) propuseram, então, uma metodologia de identificação das referidas ordens baseada no conceito de função de autocorrelação estendida amostral definida a partir do estabelecimento de estimadores dos mínimos quadrados iterados consistentes para os parâmetros autoregressivos.

O desenvolvimento desta metodologia tem como suporte o facto de numa série cronológica X_t que siga um processo $ARMA(p,q)$, i.e.,

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t,$$

onde a_t é um ruído branco tal que $E(a_t) = 0$ e $Var(a_t) = \sigma_a^2$, a correspondente série

$$Y_t = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t$$

segue um modelo de médias móveis de ordem q .

Assim, supondo que se encontram disponíveis n observações da sucessão X_t de um processo $ARMA(p, q)$ invertível e estacionário, aqueles dois autores definiram um quadro de regressões iterativas, cuja j -ésima regressão iterada de ordem m ($m = 1, 2, \dots$ e $j = 0, 1, \dots$) é definida do modo seguinte,

$$X_t = \sum_{i=1}^m \phi_{i(m)}^{(j)} X_{t-i} + \sum_{u=1}^j \Theta_{u(m)}^{(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-1)} + e_{m,t}^{(j)}, \quad t = m + j + 1, \dots, n,$$

onde

$$\hat{e}_{m,t}^{(j)} = X_t - \sum_{i=1}^m \hat{\phi}_{i(m)}^{(j)} X_{t-i} - \sum_{u=1}^j \hat{\Theta}_{u(m)}^{(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{(j-1)}, \quad t = m + j + 1, \dots, n,$$

é a sucessão residual estimada e, $\hat{\phi}_{i(m)}^{(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\Theta}_{u(m)}^{(j)}$ ($u = 1, \dots, j$) são as correspondentes estimativas dos mínimos quadrados.

Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984) estabeleceram as condições em que estes estimadores dos mínimos quadrados iterados são convergentes em probabilidade para os parâmetros autoregressivos, as quais se encontram enunciadas no teorema seguinte:

Teorema: Se X_t segue um processo $ARMA(p, q)$, então

$$\hat{\phi}_{i(m)}^{(j)} = \phi_i + o_p(1), \quad i = 1, \dots, m,$$

se $m = p$ e $j \geq q$ ou $m \geq p$ e $j = q$, estando subentendido que $\phi_i = 0$ para $i > p$. ■

Considere-se, então, a partir da j -ésima regressão iterada de ordem m , a sucessão transformada

$$Y_{m,t}^{(j)} = X_t - \sum_{i=1}^m \hat{\phi}_{i(m)}^{(j)} X_{t-i}, \quad t = m + 1, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Designando, genericamente, por $r_{X_t}(k)$ a função de autocorrelação estimada de X_t no desfasamento k , Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984) definem a m -ésima função de autocorrelação estendida amostral, $r_{j(m)}$, como a função de autocorrelação amostral da série transformada $Y_{m,t}^{(j)}$ no desfasamento j , i.e.,

$$r_{j(m)} = r_{Y_{m,t}^{(j)}}(j) = \frac{\sum_{t=m+1}^{n-j} Y_{m,t}^{(j)} Y_{m,t+j}^{(j)}}{\sum_{t=m+1}^n [Y_{m,t}^{(j)}]^2}, \quad m = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$$

Estes dois autores demonstraram que, para um processo $ARMA(p, q)$, a função de autocorrelação estendida amostral tem o seguinte comportamento assintótico

$$r_{j(m)} \doteq \begin{cases} c(m-p, j-q) & \text{se } 0 \leq j-q \leq m-p \\ 0 & \text{se } j-q > m-p \geq 0 \end{cases},$$

onde $c(m-p, j-q)$ é uma constante não nula ou uma variável aleatória limitada entre os valores -1 e 1 .

No processo de identificação das ordens p e q , os valores das funções $r_{j(m)}$ são dispostos numa tabela de duas entradas, conforme é indicado na Tabela 4.1.1, onde a primeira linha corresponde aos valores $r_{j(0)}$ ($j = 1, 2, \dots$) coincidentes com os valores da função de autocorrelação amostral da sucessão X_t para os progressivos desfasamentos, a segunda linha à primeira função de autocorrelação estendida amostral $r_{j(1)}$ ($j = 1, 2, \dots$), e assim sucessivamente. A numeração das linhas e das colunas, $m = 0, 1, 2, \dots$ e $j-1 = 0, 1, 2, \dots$, é feita de modo a poderem ser identificadas as ordens dos operadores AR e MA , respectivamente.

Tabela 4.1.1: Tabela da função de autocorrelação estendida amostral

| AR | MA | | | | | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| 0 | $r_{1(0)}$ | $r_{2(0)}$ | $r_{3(0)}$ | $r_{4(0)}$ | $r_{5(0)}$ | ... |
| 1 | $r_{1(1)}$ | $r_{2(1)}$ | $r_{3(1)}$ | $r_{4(1)}$ | $r_{5(1)}$ | ... |
| 2 | $r_{1(2)}$ | $r_{2(2)}$ | $r_{3(2)}$ | $r_{4(2)}$ | $r_{5(2)}$ | ... |
| 3 | $r_{1(3)}$ | $r_{2(3)}$ | $r_{3(3)}$ | $r_{4(3)}$ | $r_{5(3)}$ | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

De forma a ilustrar a especificação de p e q através da tabela definida, suponha-se que a sucessão cronológica X_t segue um processo $ARMA(p^*, q^*)$. De acordo com o resultado estabelecido para a função de autocorrelação estendida amostral, ter-se-á

$$r_{j(m)} \doteq \begin{cases} c(m-p^*, j-q^*) & \text{se } 0 \leq j-q^* \leq m-p^* \\ 0 & \text{se } j-q^* > m-p^* \geq 0 \end{cases}$$

ou seja, a tabela correspondente a esta situação apresentará uma região triangular de valores assintoticamente nulos com vértice na posição (p^*, q^*) e delimitada à esquerda por uma linha diagonal de valores não nulos. Na Tabela 4.1.2 encontra-se descrita esta situação, onde

- \times indicia que $r_{j(m)} \neq 0$,
- 0 designa que $r_{j(m)} \doteq 0$, e
- $*$ representa um valor entre -1 e 1 .

Tabela 4.1.2: Tabela da função de autocorrelação estendida amostral para um

modelo $ARMA(p^*, q^*)$

| | MA | | | | | | | | | |
|-----------|-----|---|-----|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| AR | 0 | 1 | ... | $q^* - 1$ | q^* | $q^* + 1$ | $q^* + 2$ | $q^* + 3$ | $q^* + 4$ | ... |
| 0 | * | | | | ⋮ | | | | | |
| 1 | * | | | | ⋮ | | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | ⋮ | | | | | |
| p^* | * | | ... | × | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| $p^* + 1$ | * | | | | × | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| $p^* + 2$ | * | | | | | × | 0 | 0 | 0 | ... |
| $p^* + 3$ | * | | | | | | × | 0 | 0 | ... |
| ... | ... | | ... | | | | | ⋮ | ... | ... |

Nas aplicações práticas e uma vez que as amostras são de dimensão finita, os valores $r_{j(m)}$ ($j = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots$) não são exactamente nulos. No entanto, as suas variâncias assintóticas podem ser obtidas, aproximadamente, utilizando a fórmula de Bartlett. Assim, sob a hipótese de as séries transformadas, $Y_{m,t}^{(j)}$, serem um ruído branco, tomam-se como aproximações daqueles valores $(n - m - j)^{-1}$, representando, então, \times um valor tal que $|r_{j(m)}| > 2 \cdot \hat{\sigma}(r_{j(m)})$, ou seja, um valor estatisticamente não nulo e 0 um valor assintoticamente nulo [Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984)].

Assim, realizou-se um estudo de simulação sobre a metodologia de identificação dos modelos $ARMA(p, q)$ através da função de autocorrelação estendida amostral, no qual foram considerados os modelos com $p = 0, 1, 2$ e $q = 0, 1, 2$, ou seja, os modelos que mais frequentemente surgem nas aplicações práticas.

Os programas de suporte foram desenvolvidos em Splus Versão 3.3 para Windows (Anexo 2.) e formulados do seguinte modo:

Para cada processo $ARMA(p, q)$, geraram-se 1000 ruídos brancos, i.e., $R.B. \sim N(0, \sigma_{RB}^2)$, os quais foram avaliados pelo teste “Portmanteau” (estatística de Ljung-Box), construindo-se a partir destes 1000 modelos $ARMA$ invertíveis e estacionários de média nula e 300 observações cada, com as ordens p e q e os parâmetros ϕ_i ($i = 1, \dots, p$) e θ_l ($l = 1, \dots, q$) definidos previamente. Seguidamente, para $m = p, \dots, p+3$ (p é a ordem da regressão a partir da qual os estimadores dos mínimos quadrados iterados poderão ser consistentes) e $j = 1, \dots, 8$, determinaram-se as respectivas regressões iteradas e calcularam-se os valores da função de autocorrelação estendida amostral.

Uma vez que, em aplicações reais, dificilmente se consegue obter o padrão triangular exposto na Tabela 4.1.2, a identificação do modelo foi realizada analisando a tabela dos valores $r_{j(m)}$, linha a linha, segundo os seguintes dois procedimentos:

(1) Impôs-se que os valores da diagonal que delimita a forma triangular fossem todos estatisticamente significativos, i.e., $r_{q+v(p+u)} \neq 0$, $u = 0, \dots, 3$ e $v = u - 1$,

e que os valores interiores do triângulo, até ao desfasamento 5, fossem assintoticamente nulos, i.e., $r_{q+v(p+u)} \doteq 0$, $u = 0, \dots, 3$ e $q + v = q + u, \dots, 5$;

permitiu-se que, em cada linha, um valor entre os três últimos desfasamentos se posicionasse fora da banda de significância 0.02.

(2) Apenas se exigiu que o valor que antecede o vértice do padrão triangular fosse estatisticamente significativo permitindo que os restantes valores da diagonal pudessem

ser nulos, i.e., $r_{q-1(p)} \neq 0$ e $r_{q+v(p+u)} \neq 0$ ou $\doteq 0$ para $u = 1, \dots, 3$ e $v = u - 1$, tendo sido mantidos os outros dois critérios.

Note-se que ambos os procedimentos adoptados, em especial o segundo, são menos restritivos relativamente à teoria desenvolvida por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984).

Na Tabela 4.1.3, onde (1) se refere ao primeiro procedimento e (2) ao segundo, encontram-se os resultados obtidos relativamente aos processos $ARMA(p, q)$ considerados, tendo sido definidos, para cada modelo, três conjuntos de parâmetros ϕ_i ($i = 1, \dots, p$) e θ_l ($l = 1, \dots, q$) diferentes.

A análise desta tabela evidencia que na realidade o procedimento (2) é menos restritivo que o (1). Com efeito, o número de sucessos obtidos com este último é, na maioria das situações, substancialmente inferior ao número obtido quando se utiliza o procedimento (2). Além disso, nota-se que para alguns modelos, sobretudo os do tipo MA , os resultados obtidos são medianamente satisfatórios, atingindo em alguns casos taxas de sucesso na ordem dos 70%, enquanto que para os modelos AR puros as respectivas taxas são muito pouco favoráveis.

Uma análise mais aprofundada da tabela será efectuada no capítulo das conclusões, onde, em particular, estes resultados serão confrontados com o estudo de simulação para a FACEG amostral.

Por último, é de realçar que se tivesse sido aplicada a metodologia de identificação exposta na Tabela 4.1.2, ou seja, em que todos os elementos da área triangular são estatisticamente nulos, os resultados do estudo de simulação seriam, concerteza, substancialmente inferiores aos obtidos na Tabela 4.1.3, onde algumas concessões foram feitas através dos procedimentos (1) e (2).

Tabela 4.1.3: Percentagem de modelos $ARMA(p, q)$ gerados e identificados através da função de autocorrelação estendida amostral

| ARMA | PARÂMETROS | | | | % SUCESSOS [em 1000] | |
|-------|------------|----------|------------|------------|----------------------|------|
| | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | (1) | (2) |
| (0,1) | | | -0.42 | | 5.1 | 68.2 |
| | | | 0.53 | | 10.8 | 67.5 |
| | | | -0.26 | | 0.6 | 72.3 |
| (0,2) | | | -0.81 | -0.25 | 1.0 | 41.7 |
| | | | 0.19 | -0.31 | 1.4 | 75.7 |
| | | | 0.34 | 0.12 | 0.0 | 34.0 |
| (1,0) | 0.62 | | | | 12.3 | 32.5 |
| | -0.34 | | | | 4.7 | 13.4 |
| | 0.27 | | | | 11.9 | 29.6 |
| (2,0) | -0.11 | 0.35 | | | 2.0 | 5.4 |
| | 0.61 | -0.15 | | | 0.5 | 2.0 |
| | 0.80 | -0.30 | | | 2.6 | 6.4 |
| (1,1) | 0.60 | | -0.35 | | 0.6 | 34.8 |
| | -0.41 | | 0.19 | | 0.0 | 18.6 |
| | 0.31 | | 0.57 | | 5.1 | 31.3 |
| (1,2) | 0.10 | | -0.30 | -0.20 | 0.1 | 36.0 |
| | -0.60 | | -0.10 | 0.20 | 1.9 | 56.0 |
| | -0.40 | | 0.25 | 0.15 | 4.1 | 56.4 |
| (2,1) | -0.23 | 0.17 | 0.41 | | 6.1 | 27.9 |
| | -0.92 | -0.37 | -0.26 | | 1.6 | 15.2 |
| | 0.58 | -0.39 | 0.33 | | 1.2 | 13.0 |
| (2,2) | -0.80 | -0.25 | 0.30 | 0.10 | 0.7 | 17.1 |
| | -0.11 | 0.35 | 0.19 | -0.31 | 0.0 | 13.7 |
| | -1.20 | -0.40 | -0.18 | -0.29 | 0.1 | 26.4 |

4.2 Função de Autocorrelação Estendida Generalizada Amostral

De acordo com a metodologia de identificação de modelos de função transferência bivariados através da função de autocorrelação estendida generalizada amostral descrita na secção 3.3, efectuou-se um estudo de simulação sobre o comportamento do procedimento proposto relativamente a diversos modelos.

Uma vez que, nas aplicações práticas, os modelos de função transferência que surgem mais frequentemente são modelos parcimoniosos, i.e., com um número reduzido de parâmetros, consideraram-se, neste estudo, os modelos $(r,s,b) \times (p,q)$ com $(r,s) = (0,1), (0,2), (1,0), (2,0), (1,1), (1,2), (2,1)$ e $(2,2)$ para $(p,q) = (0,1), (0,2), (1,0), (2,0), (1,1), (1,2), (2,1)$ e $(2,2)$, e parâmetro de desfasamento $b = 3$.

Os programas de suporte, desenvolvidos em Splus Versão 3.3 para Windows (Anexo 3.), foram estruturados do seguinte modo:

Para cada modelo de função transferência $(r,s,b) \times (p,q)$, geraram-se 1000 conjuntos de dois ruídos brancos α_t e a_t , de média nula e não correlacionados, os quais foram confirmados como ruídos brancos através de testes "Portmanteau" para as funções de autocorrelação amostrais de α_t e a_t (estatística de Ljung-Box). Relativamente à confirmação da inexistência de correlação, realizaram-se, para a função de correlação cruzada amostral entre aquelas duas séries, testes para $k' = 36$ desfasamentos através da estatística $Q = n \sum_{k=1}^{k'} r_{\alpha a}^2(k)$ que, sob a hipótese da nulidade, tem distribuição Qui-quadrado com k' graus de liberdade, sendo a hipótese nula rejeitada quando o valor observado para a estatística for superior ao nonagésimo quinto percentil daquela distribuição [Makridakis et al. (1983)].

A partir de a_t construiu-se o processo *ARMA* invertível e estacionário associado à sucessão residual, $e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$, com as ordens p e q e os parâmetros ϕ_i ($i = 1, \dots, p$) e θ_l ($l = 1, \dots, q$) previamente definidos. Seguidamente, procedeu-se à construção da série “output”, $\delta_r(B)\beta_t = \omega_s(B)\alpha_{t-b} + \delta_r(B)e_t$, a partir da sucessão “input” α_t e da série residual e_t , para os valores de b , r e s anteriormente especificados e com os parâmetros δ_i ($i = 1, \dots, r$) e ω_l ($l = 0, 1, \dots, s$) estabelecidos de forma a que as raízes dos correspondentes polinómios se situassem fora do círculo unitário.

Assim, para cada par, dos 1000 conjuntos gerados, de séries β_t e α_t de 300 observações e com médias nulas, determinaram-se, para $s' = s$, $m = p + r$ e $j = 0, 1, \dots, 8$, as respectivas regressões iteradas, definiram-se as sucessivas sucessões transformadas, $Y_{m,t}^{s'(j)}$, e calcularam-se os respectivos valores da função de autocorrelação estendida generalizada amostral para os defasamentos $k = 1, \dots, 10$.

A identificação do modelo foi realizada analisando cada linha do quadro correspondente segundo o critério seguinte:

- (1) Impôs-se que os valores da FACEG amostral, nos defasamentos $k = r + q$ para $j \geq \max(p + s, r + q)$, fossem todos estatisticamente significativos, ou seja,

$$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \neq 0, \text{ i.e., } \left| r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \right| > lc \cdot \hat{\sigma} \left(r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \right) \text{ para } k = r + q, \text{ } s' = s, \text{ } m = p + r \text{ e } j \geq \max(p + s, r + q) \text{ (} lc = 1.25 \text{ ou } 1.96\text{)}.$$

- (2) Para os defasamentos $k \geq r + q + 1$ para $j \geq \max(p + s, r + q)$, garantiu-se que os valores da FACEG amostral fossem assintoticamente nulos individualmente ou globalmente, ou seja,

$r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \doteq 0$, i.e., $\left| r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \right| \leq lc \cdot \hat{\sigma} \left(r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}(k) \right)$ para $k \geq r+q+1$, $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$ ($lc = 1.25$ ou 1.96),

ou

$$Q = \frac{n_{Y_{m,t}^{s'(j)}}}{1 + 2 \sum_{k'=1}^{r+q} r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}^2(k')} \sum_{k'=r+q+1}^{10} r_{Y_{m,t}^{s'(j)}}^2(k') \leq \chi_{(10-r-q);0.05}^2 \quad \text{para } s' = s, \quad m = p+r \quad \text{e}$$

$j \geq \max(p+s, r+q)$, onde $n_{Y_{m,t}^{s'(j)}}$ representa o número de observações das séries $Y_{m,t}^{s'(j)}$.

Nas tabelas seguintes encontram-se as percentagens de sucessos de modelos de função transferência $(r,s,b) \times (p,q)$ gerados e identificados através da função de autocorrelação estendida generalizada amostral em relação a cada um dos modelos definidos previamente. Foram considerados, para cada um destes, três conjuntos de parâmetros δ_i ($i=1, \dots, r$), ω_l ($l=0, 1, \dots, s$), ϕ_i ($i=1, \dots, p$) e θ_l ($l=1, \dots, q$) distintos.

Como se pode verificar, obtem-se, por exemplo, uma taxa de sucesso de 94.6% para os modelos do tipo $(0,1,3) \times (0,1)$, com $\omega_0 = 0.75$, $\omega_1 = -0.34$ e $\theta_1 = 0.22$, enquanto para o modelo $(0,1,3) \times (2,0)$, com $\omega_0 = 0.88$, $\omega_1 = -0.50$, $\phi_1 = 0.12$ e $\phi_2 = 0.24$, a correspondente taxa de sucesso na identificação é de apenas 0.2%.

Uma análise mais detalhada da totalidade dos resultados obtidos será efectuada no capítulo da conclusões.

Tabela 4.2.1: Modelo $(0,1,3) \times (p,q)$

$$\beta_t = \omega_0 \alpha_{t-3} + \omega_1 \alpha_{t-4} + e_t, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|------------------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|-------------------------|
| | ω_0 | ω_1 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| $(0,1,3) \times (0,1)$ | 1.28 | 0.22 | | | -0.12 | | 71.5 |
| | -1.24 | -0.74 | | | -0.59 | | 92.6 |
| | 0.75 | -0.34 | | | 0.22 | | 94.6 |
| $(0,1,3) \times (0,2)$ | -0.70 | 0.36 | | | -0.34 | -0.17 | 81.5 |
| | 0.55 | 0.11 | | | 0.10 | 0.30 | 94.2 |
| | 1.16 | -0.14 | | | 0.83 | -0.23 | 72.9 |
| $(0,1,3) \times (1,0)$ | -0.68 | -0.34 | -0.31 | | | | 1.9 |
| | 1.42 | -0.75 | -0.63 | | | | 6.1 |
| | 1.39 | 0.26 | 0.61 | | | | 4.4 |
| $(0,1,3) \times (2,0)$ | 1.42 | 0.82 | -0.46 | -0.34 | | | 0.5 |
| | 0.88 | -0.50 | 0.12 | 0.24 | | | 0.2 |
| | -1.45 | -0.30 | 0.47 | -0.34 | | | 0.4 |
| $(0,1,3) \times (1,1)$ | -0.66 | 0.28 | 0.45 | | 0.16 | | 35.4 |
| | 0.75 | -0.26 | -0.61 | | -0.20 | | 21.3 |
| | 0.98 | 0.36 | 0.52 | | 0.29 | | 42.0 |
| $(0,1,3) \times (1,2)$ | 0.56 | 0.22 | -0.50 | | -0.11 | 0.24 | 35.0 |
| | -0.87 | 0.23 | 0.52 | | -0.14 | 0.34 | 41.9 |
| | 1.40 | 0.64 | -0.50 | | -0.57 | -0.35 | 37.2 |
| $(0,1,3) \times (2,1)$ | 1.27 | 0.80 | 0.73 | -0.13 | 0.19 | | 11.6 |
| | 0.94 | -0.62 | -0.11 | 0.21 | 0.48 | | 9.4 |
| | 0.97 | 0.29 | -0.65 | -0.34 | -0.59 | | 10.6 |
| $(0,1,3) \times (2,2)$ | 1.18 | 0.39 | -0.14 | 0.29 | -0.20 | 0.12 | 38.4 |
| | 1.46 | 0.95 | 0.37 | -0.13 | -0.13 | 0.14 | 20.3 |
| | 1.34 | -0.43 | 0.17 | -0.33 | -0.28 | -0.12 | 22.6 |

Tabela 4.2.2: Modelo $(0,2,3) \times (p,q)$

$$\beta_t = \omega_0 \alpha_{t-3} + \omega_1 \alpha_{t-4} + \omega_2 \alpha_{t-5} + e_t, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|------------------------|------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|-------------------------|
| | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| $(0,2,3) \times (0,1)$ | -0.84 | -0.23 | 0.10 | | | -0.51 | | 92.6 |
| | 0.77 | -0.52 | 0.32 | | | 0.11 | | 70.7 |
| | -1.37 | 0.16 | 0.40 | | | -0.17 | | 90.2 |
| $(0,2,3) \times (0,2)$ | -0.96 | 0.73 | -0.13 | | | 0.39 | -0.12 | 60.9 |
| | -1.12 | -0.11 | 0.41 | | | -0.32 | 0.18 | 87.8 |
| | 0.79 | -0.38 | 0.30 | | | 0.15 | 0.32 | 94.3 |
| $(0,2,3) \times (1,0)$ | 1.43 | -0.60 | 0.49 | 0.29 | | | | 4.4 |
| | -0.60 | -0.75 | -0.25 | -0.65 | | | | 7.8 |
| | 0.79 | 0.10 | -0.28 | 0.36 | | | | 3.5 |
| $(0,2,3) \times (2,0)$ | -1.46 | -0.91 | -0.50 | 0.19 | 0.30 | | | 0.7 |
| | -1.44 | 1.34 | -0.53 | -0.13 | 0.34 | | | 0.9 |
| | 1.29 | 0.75 | 0.49 | -0.48 | -0.28 | | | 0.5 |
| $(0,2,3) \times (1,1)$ | -1.33 | -0.13 | 0.32 | -0.50 | | -0.25 | | 40.3 |
| | 1.35 | -0.23 | -0.42 | -0.38 | | -0.28 | | 60.4 |
| | 0.99 | -0.65 | 0.26 | 0.45 | | 0.29 | | 60.9 |
| $(0,2,3) \times (1,2)$ | -1.27 | 0.13 | 0.38 | 0.66 | | -0.16 | 0.30 | 47.0 |
| | -1.38 | -0.14 | 0.50 | 0.46 | | 0.74 | -0.12 | 29.4 |
| | -0.71 | 0.29 | -0.21 | 0.56 | | -0.42 | 0.11 | 33.8 |
| $(0,2,3) \times (2,1)$ | 1.12 | -0.22 | 0.38 | 0.89 | -0.44 | 0.45 | | 16.1 |
| | 1.37 | -0.42 | 0.27 | -1.16 | -0.42 | -0.25 | | 18.1 |
| | -1.31 | 0.14 | 0.47 | 0.66 | -0.21 | 0.39 | | 10.6 |
| $(0,2,3) \times (2,2)$ | 1.42 | -1.39 | 0.34 | -0.79 | -0.32 | 0.10 | 0.32 | 11.0 |
| | 1.28 | 0.23 | -0.35 | 0.71 | -0.29 | 1.19 | -0.37 | 14.8 |
| | -0.79 | 0.87 | -0.26 | -0.20 | -0.40 | -0.37 | 0.11 | 8.9 |

Tabela 4.2.3: Modelo $(1,0,3) \times (p,q)$

$$\beta_t = \delta_1 \beta_{t-1} + \omega_0 \alpha_{t-3} + e_t - \delta_1 e_{t-1}, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|------------------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|-------------------------|
| | δ_1 | ω_0 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| $(1,0,3) \times (0,1)$ | -0.62 | 1.29 | | | -0.58 | | 73.7 |
| | 0.40 | 0.66 | | | 0.35 | | 51.0 |
| | -0.50 | -1.15 | | | -0.51 | | 66.4 |
| $(1,0,3) \times (0,2)$ | 0.57 | 0.84 | | | -0.89 | -0.22 | 65.1 |
| | 0.65 | -0.66 | | | -0.15 | 0.25 | 69.0 |
| | -0.56 | 1.42 | | | 0.12 | 0.31 | 76.8 |
| $(1,0,3) \times (1,0)$ | -0.58 | -1.49 | -0.57 | | | | 53.6 |
| | 0.38 | 0.56 | 0.39 | | | | 47.3 |
| | 0.43 | -1.34 | 0.27 | | | | 38.6 |
| $(1,0,3) \times (2,0)$ | -0.42 | -1.42 | -0.12 | -0.39 | | | 8.1 |
| | 0.62 | 1.22 | 0.79 | -0.26 | | | 6.6 |
| | -0.50 | 1.16 | 0.16 | 0.33 | | | 16.8 |
| $(1,0,3) \times (1,1)$ | -0.25 | -0.55 | -0.38 | | 0.48 | | 31.6 |
| | 0.58 | -0.94 | 0.29 | | -0.36 | | 64.5 |
| | -0.50 | 1.34 | -0.41 | | -0.29 | | 33.5 |
| $(1,0,3) \times (1,2)$ | -0.65 | -0.75 | -0.22 | | 0.79 | -0.21 | 35.5 |
| | 0.45 | -0.91 | 0.47 | | 0.12 | 0.35 | 25.0 |
| | 0.26 | 0.50 | 0.39 | | -0.95 | -0.37 | 34.0 |
| $(1,0,3) \times (2,1)$ | 0.50 | 0.91 | 0.11 | 0.37 | -0.25 | | 27.5 |
| | 0.54 | 0.64 | -0.20 | 0.30 | -0.32 | | 13.5 |
| | 0.63 | -0.52 | -0.23 | 0.22 | 0.50 | | 17.1 |
| $(1,0,3) \times (2,2)$ | 0.47 | 1.27 | -0.14 | 0.23 | 0.57 | -0.23 | 15.8 |
| | -0.44 | 0.88 | -0.96 | -0.28 | -0.12 | 0.35 | 19.3 |
| | -0.39 | -1.33 | -0.18 | 0.24 | -0.80 | -0.34 | 19.7 |

Tabela 4.2.4: Modelo $(2,0,3) \times (p,q)$

$$\beta_t = \delta_1 \beta_{t-1} + \delta_2 \beta_{t-2} + \omega_0 \alpha_{t-3} + e_t - \delta_1 e_{t-1} - \delta_2 e_{t-2}, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|------------------------|------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------------------------|
| | δ_1 | δ_2 | ω_0 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| $(2,0,3) \times (0,1)$ | -0.51 | -0.32 | 1.45 | | | 0.34 | | 69.1 |
| | 0.17 | 0.31 | -1.48 | | | -0.60 | | 77.9 |
| | 0.74 | -0.42 | -0.74 | | | -0.27 | | 54.4 |
| $(2,0,3) \times (0,2)$ | 0.91 | -0.32 | -0.80 | | | -0.50 | -0.37 | 53.8 |
| | -0.11 | 0.35 | -0.91 | | | -0.20 | 0.29 | 43.3 |
| | -0.27 | -0.42 | -1.24 | | | 0.60 | -0.38 | 56.0 |
| $(2,0,3) \times (1,0)$ | -0.26 | 0.23 | 1.24 | -0.43 | | | | 54.7 |
| | 0.14 | 0.35 | -0.92 | 0.49 | | | | 42.6 |
| | -0.17 | 0.31 | -1.28 | -0.39 | | | | 60.7 |
| $(2,0,3) \times (2,0)$ | -0.15 | 0.34 | -0.95 | -0.16 | 0.32 | | | 31.2 |
| | 0.16 | -0.29 | -0.69 | 0.19 | -0.40 | | | 30.6 |
| | -0.44 | -0.27 | 0.70 | -0.64 | -0.37 | | | 26.7 |
| $(2,0,3) \times (1,1)$ | 0.10 | 0.36 | -0.84 | 0.56 | | -0.42 | | 31.9 |
| | 0.88 | -0.28 | 0.83 | 0.56 | | -0.66 | | 40.0 |
| | -0.10 | 0.37 | -1.36 | 0.43 | | 0.37 | | 20.8 |
| $(2,0,3) \times (1,2)$ | -0.16 | 0.24 | -0.72 | 0.56 | | -0.49 | -0.42 | 28.7 |
| | 0.81 | -0.42 | -1.15 | 0.43 | | -1.28 | -0.42 | 40.5 |
| | -0.23 | -0.44 | -0.52 | -0.57 | | -0.50 | -0.22 | 34.3 |
| $(2,0,3) \times (2,1)$ | 0.94 | -0.31 | -0.79 | 0.19 | -0.14 | -0.45 | | 16.4 |
| | -0.49 | -0.28 | 0.68 | 0.15 | 0.34 | -0.54 | | 20.0 |
| | -0.68 | -0.38 | -0.55 | -0.73 | -0.36 | -0.29 | | 16.1 |
| $(2,0,3) \times (2,2)$ | -0.21 | 0.28 | -0.59 | -0.76 | -0.41 | -0.70 | -0.34 | 29.9 |
| | 0.44 | -0.28 | -1.39 | 0.10 | -0.39 | 0.34 | -0.41 | 26.7 |
| | -0.94 | -0.42 | -0.81 | -0.78 | -0.24 | -0.78 | -0.28 | 37.0 |

Tabela 4.2.5: Modelo $(1,1,3) \times (p,q)$

$$\beta_t = \delta_1 \beta_{t-1} + \omega_0 \alpha_{t-3} + \omega_1 \alpha_{t-4} + e_t - \delta_1 e_{t-1}, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|------------------------|------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|-------------------------|
| | δ_1 | ω_0 | ω_1 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| $(1,1,3) \times (0,1)$ | -0.55 | 0.77 | 0.36 | | | 0.40 | | 46.9 |
| | 0.23 | 0.78 | 0.40 | | | 0.57 | | 44.4 |
| | 0.59 | -1.35 | -0.32 | | | -0.42 | | 95.5 |
| $(1,1,3) \times (0,2)$ | 0.51 | -1.31 | 0.54 | | | -0.17 | 0.28 | 43.6 |
| | -0.63 | 0.96 | -0.12 | | | 0.10 | 0.37 | 82.8 |
| | 0.30 | 0.68 | -0.31 | | | 0.23 | -0.32 | 31.4 |
| $(1,1,3) \times (1,0)$ | 0.50 | -1.40 | -0.74 | 0.30 | | | | 37.9 |
| | -0.47 | 1.31 | 0.50 | -0.60 | | | | 15.6 |
| | 0.42 | -1.16 | 0.34 | 0.62 | | | | 18.7 |
| $(1,1,3) \times (2,0)$ | -0.25 | 0.66 | 0.25 | 0.71 | -0.42 | | | 7.1 |
| | 0.56 | 0.88 | 0.35 | -0.12 | 0.30 | | | 12.2 |
| | -0.29 | -0.75 | -0.38 | -0.65 | -0.38 | | | 7.0 |
| $(1,1,3) \times (1,1)$ | -0.44 | -1.32 | -0.58 | -0.53 | | -0.60 | | 37.5 |
| | 0.50 | 1.38 | -0.47 | 0.49 | | 0.19 | | 23.2 |
| | -0.49 | -1.42 | 0.41 | -0.46 | | 0.61 | | 40.6 |
| $(1,1,3) \times (1,2)$ | 0.57 | -1.11 | 0.56 | 0.45 | | -0.15 | 0.25 | 32.0 |
| | -0.47 | -1.46 | -0.22 | -0.58 | | -0.50 | -0.29 | 33.9 |
| | 0.63 | 1.36 | 0.83 | 0.38 | | 0.12 | 0.36 | 20.3 |
| $(1,1,3) \times (2,1)$ | 0.58 | 1.23 | -0.36 | -0.11 | 0.36 | -0.38 | | 18.2 |
| | 0.34 | 0.69 | 0.37 | -0.20 | 0.28 | 0.36 | | 12.8 |
| | -0.62 | -1.49 | 0.51 | 0.12 | 0.27 | -0.40 | | 15.5 |
| $(1,1,3) \times (2,2)$ | -0.56 | 1.19 | 0.60 | -0.19 | 0.27 | -0.11 | 0.37 | 24.8 |
| | -0.30 | -1.35 | 0.61 | 0.85 | -0.38 | 0.60 | -0.43 | 18.4 |
| | -0.49 | -1.41 | 0.49 | -0.14 | 0.29 | -0.17 | 0.27 | 30.8 |

Tabela 4.2.6: Modelo (1,2,3)×(p,q)

$$\beta_t = \delta_1 \beta_{t-1} + \omega_0 \alpha_{t-3} + \omega_1 \alpha_{t-4} + \omega_2 \alpha_{t-5} + e_t - \delta_1 e_{t-1}, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|---------------|------------|------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------------------|
| | δ_1 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| (1,2,3)×(0,1) | -0.15 | 1.25 | 0.31 | -0.34 | | | 0.65 | | 51.3 |
| | 0.54 | -0.62 | -0.14 | 0.11 | | | 0.41 | | 47.2 |
| | 0.63 | 1.47 | 1.12 | 0.26 | | | -0.18 | | 56.7 |
| (1,2,3)×(0,2) | 0.44 | 0.96 | 0.33 | 0.19 | | | -0.13 | 0.34 | 66.5 |
| | -0.65 | -0.66 | 0.36 | -0.20 | | | 0.11 | 0.31 | 75.7 |
| | -0.58 | -0.70 | -0.45 | -0.21 | | | 0.86 | -0.33 | 64.6 |
| (1,2,3)×(1,0) | 0.62 | 0.52 | -0.26 | 0.20 | 0.48 | | | | 28.7 |
| | -0.52 | 0.96 | 0.19 | -0.30 | -0.46 | | | | 20.7 |
| | 0.23 | 1.39 | -0.79 | 0.38 | 0.61 | | | | 25.9 |
| (1,2,3)×(2,0) | -0.31 | 1.24 | 0.30 | -0.31 | -0.96 | -0.35 | | | 10.2 |
| | 0.25 | -1.35 | 0.16 | 0.36 | 1.13 | -0.43 | | | 11.9 |
| | 0.60 | 1.26 | 0.18 | -0.29 | -0.10 | 0.37 | | | 11.2 |
| (1,2,3)×(1,1) | 0.52 | 1.38 | 0.95 | 0.43 | -0.62 | | -0.42 | | 43.9 |
| | 0.31 | -1.14 | 0.33 | -0.19 | 0.65 | | 0.49 | | 35.7 |
| | 0.60 | -1.36 | -0.14 | 0.50 | -0.21 | | -0.36 | | 39.2 |
| (1,2,3)×(1,2) | -0.50 | -1.32 | 0.50 | -0.34 | -0.28 | | -0.68 | -0.38 | 38.4 |
| | -0.46 | 1.31 | -0.54 | 0.58 | -0.61 | | -0.16 | -0.34 | 32.1 |
| | 0.29 | -1.46 | 0.15 | -0.41 | 0.42 | | -0.86 | -0.43 | 35.5 |
| (1,2,3)×(2,1) | -0.27 | -1.33 | -0.20 | 0.33 | -0.71 | -0.37 | -0.57 | | 18.2 |
| | 0.62 | 0.72 | 0.75 | 0.30 | -0.15 | 0.32 | -0.46 | | 28.8 |
| | 0.25 | 1.29 | -0.22 | -0.37 | 0.73 | -0.38 | 0.64 | | 17.0 |
| (1,2,3)×(2,2) | -0.62 | -0.76 | 0.46 | -0.26 | 0.14 | -0.42 | 0.40 | -0.39 | 39.3 |
| | -0.52 | -1.18 | -0.28 | 0.28 | -0.11 | 0.36 | 0.75 | -0.25 | 24.0 |
| | 0.60 | 1.43 | -0.74 | 0.41 | 0.67 | -0.33 | -0.32 | 0.22 | 18.7 |

Tabela 4.2.7: Modelo $(2,1,3) \times (p,q)$

$$\beta_t = \delta_1 \beta_{t-1} + \delta_2 \beta_{t-2} + \omega_0 \alpha_{t-3} + \omega_1 \alpha_{t-4} + e_t - \delta_1 e_{t-1} - \delta_2 e_{t-2}, \text{ onde } e_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|-------------------------|
| | δ_1 | δ_2 | ω_0 | ω_1 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| $(2,1,3) \times (0,1)$ | -0.26 | 0.24 | 0.88 | -0.57 | | | 0.66 | | 51.5 |
| | 0.14 | -0.44 | 0.63 | 0.17 | | | 0.48 | | 67.6 |
| | -0.12 | 0.35 | -1.44 | -0.46 | | | -0.63 | | 75.0 |
| $(2,1,3) \times (0,2)$ | 0.96 | -0.37 | -0.84 | 0.52 | | | -0.14 | 0.35 | 42.0 |
| | -0.95 | -0.39 | 1.40 | 0.66 | | | 0.62 | -0.42 | 69.5 |
| | -0.23 | -0.34 | -1.28 | -0.35 | | | 0.95 | -0.32 | 41.8 |
| $(2,1,3) \times (1,0)$ | 0.12 | 0.33 | 1.24 | 0.55 | 0.66 | | | | 35.5 |
| | -0.73 | -0.25 | -0.86 | 0.27 | -0.65 | | | | 35.4 |
| | 0.14 | 0.34 | -1.36 | -0.52 | 0.57 | | | | 34.6 |
| $(2,1,3) \times (2,0)$ | 0.72 | -0.37 | 1.34 | 0.60 | 0.57 | -0.36 | | | 36.4 |
| | -0.80 | -0.27 | 0.79 | 0.51 | -0.23 | -0.40 | | | 20.6 |
| | 0.15 | -0.43 | -0.92 | -0.44 | -0.74 | -0.28 | | | 16.7 |
| $(2,1,3) \times (1,1)$ | -0.16 | 0.24 | 0.67 | -0.22 | -0.52 | | 0.58 | | 32.1 |
| | -0.58 | -0.38 | 1.19 | -0.23 | -0.59 | | -0.34 | | 29.3 |
| | 1.23 | -0.43 | -0.89 | 0.37 | 0.52 | | 0.41 | | 27.2 |
| $(2,1,3) \times (1,2)$ | 0.12 | 0.34 | -0.88 | -0.40 | 0.60 | | 0.74 | -0.43 | 25.9 |
| | 0.30 | -0.27 | -0.70 | 0.32 | 0.36 | | -0.11 | 0.37 | 30.1 |
| | -0.85 | -0.40 | -1.46 | -0.76 | -0.44 | | -0.91 | -0.30 | 31.6 |
| $(2,1,3) \times (2,1)$ | 0.60 | -0.42 | -0.90 | 0.33 | 0.42 | -0.33 | -0.45 | | 24.2 |
| | 0.20 | -0.42 | 1.49 | 0.67 | -0.89 | -0.39 | -0.65 | | 32.7 |
| | 0.13 | -0.37 | 0.71 | -0.26 | 0.44 | -0.42 | 0.62 | | 32.3 |
| $(2,1,3) \times (2,2)$ | -0.84 | -0.29 | -0.86 | -0.31 | -0.72 | -0.37 | -0.89 | -0.34 | 23.0 |
| | 0.78 | -0.39 | 0.61 | -0.40 | 0.11 | 0.37 | 0.16 | 0.33 | 29.6 |
| | -0.94 | -0.41 | -0.91 | 0.52 | -0.28 | 0.25 | -0.55 | -0.34 | 28.9 |

Tabela 4.2.8: Modelo (2,2,3)×(p,q)

$\beta_i = \delta_1 \beta_{i-1} + \delta_2 \beta_{i-2} + \omega_0 \alpha_{i-3} + \omega_1 \alpha_{i-4} + \omega_2 \alpha_{i-5} + e_i - \delta_1 e_{i-1} - \delta_2 e_{i-2}$, onde

$$e_i = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_i$$

| MODELO | PARÂMETROS | | | | | | | | | % SUCESSOS (em 1000) |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|----------------------|
| | δ_1 | δ_2 | ω_0 | ω_1 | ω_2 | ϕ_1 | ϕ_2 | θ_1 | θ_2 | |
| (2,2,3)×(0,1) | 0.92 | -0.30 | -1.14 | -0.26 | 0.30 | | | -0.65 | | 62.3 |
| | -0.10 | 0.36 | 1.11 | 0.52 | 0.13 | | | -0.33 | | 49.2 |
| | 0.16 | -0.41 | -1.28 | -0.28 | 0.35 | | | 0.46 | | 61.4 |
| (2,2,3)×(0,2) | -0.11 | 0.37 | 1.42 | -0.87 | 0.50 | | | 0.63 | -0.29 | 50.0 |
| | -0.86 | -0.37 | 1.40 | 0.38 | -0.31 | | | -0.14 | 0.31 | 40.3 |
| | 0.69 | -0.32 | -0.89 | -0.72 | -0.36 | | | 0.79 | -0.39 | 35.2 |
| (2,2,3)×(1,0) | 1.21 | -0.41 | -1.30 | -0.14 | 0.47 | 0.42 | | | | 40.8 |
| | -0.75 | -0.18 | -0.93 | 0.80 | -0.32 | -0.57 | | | | 29.1 |
| | 0.49 | -0.38 | -0.89 | -0.69 | -0.18 | 0.55 | | | | 43.2 |
| (2,2,3)×(2,0) | -0.74 | -0.22 | -1.24 | -1.51 | -0.55 | -0.98 | -0.44 | | | 18.4 |
| | 0.73 | -0.44 | -1.10 | -0.70 | -0.28 | 0.40 | -0.37 | | | 32.6 |
| | -0.82 | -0.32 | -1.26 | -0.26 | 0.34 | -0.73 | -0.37 | | | 28.0 |
| (2,2,3)×(1,1) | -0.21 | -0.35 | 0.85 | 0.11 | -0.20 | 0.62 | | 0.47 | | 30.8 |
| | 0.95 | -0.32 | -1.49 | -0.27 | 0.48 | 0.39 | | 0.54 | | 32.3 |
| | 0.11 | -0.39 | 1.11 | 0.33 | 0.46 | -0.42 | | -0.31 | | 30.0 |
| (2,2,3)×(1,2) | -0.13 | 0.30 | 1.29 | 0.14 | -0.45 | -0.38 | | -1.23 | -0.44 | 24.6 |
| | -0.46 | -0.29 | -0.83 | -0.88 | -0.27 | -0.62 | | 0.11 | 0.36 | 21.8 |
| | 1.16 | -0.43 | 0.74 | -0.12 | -0.23 | 0.42 | | 0.87 | -0.40 | 28.0 |
| (2,2,3)×(2,1) | 0.12 | 0.36 | -1.40 | 0.41 | -0.50 | -0.95 | -0.34 | -0.39 | | 30.5 |
| | -0.49 | -0.31 | 0.96 | 0.98 | 0.36 | 0.14 | 0.35 | 0.36 | | 23.3 |
| | -0.11 | -0.27 | -0.85 | 0.76 | -0.29 | -0.56 | -0.38 | -0.49 | | 31.4 |
| (2,2,3)×(2,2) | -0.80 | -0.42 | 1.31 | -0.52 | 0.38 | 1.14 | -0.33 | -0.76 | -0.25 | 26.7 |
| | -0.94 | -0.37 | -1.39 | -0.21 | 0.35 | -0.11 | 0.37 | -0.14 | 0.31 | 33.8 |
| | 0.41 | -0.42 | -1.34 | -1.26 | -0.54 | 0.49 | -0.29 | -0.12 | 0.26 | 29.5 |

CAPÍTULO 5.

Conclusões e Sugestões para o Trabalho Futuro

Tendo como motivação os artigos de Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), sobre estimadores consistentes para os parâmetros autoregressivos e a função de autocorrelação estendida amostral para os modelos *ARMA* estacionários e não estacionários, e de Müller, D. e Wei, W.W.S. (1997), acerca da estimação dos mínimos quadrados iterativa e a identificação de modelos de função transferência, desenvolveu-se, com algum sucesso, nesta dissertação, uma nova metodologia de identificação dos modelos de função transferência bivariados, conforme pode ser confirmado pelos resultados obtidos no estudo de simulação que adiante se referirá com algum detalhe.

Para tal, com base no trabalho dos primeiros autores e partindo dos resultados obtidos pelos segundos, generalizaram-se múltiplos lemas e teoremas e o conceito de função de autocorrelação estendida amostral, num âmbito bem mais complexo do que o dos modelos *ARMA* univariados.

Assente nos desenvolvimentos teóricos resultantes, estabeleceu-se, então, um novo procedimento de especificação dos modelos de função transferência bivariados $(r,s,b) \times (p,q)$ e, a fim de testar as suas potencialidades, realizou-se um estudo de simulação envolvendo os modelos que mais frequentemente surgem nas aplicações práticas.

A análise das tabelas, incluídas na secção 4.2, conduz a algumas constatações e reflexões, tais como:

- Para os modelos $(r,s,3) \times (0,1)$ e $(r,s,3) \times (0,2)$ obtiveram-se percentagens de sucesso acima da generalidade, como por exemplo 94.2% para $(0,1,3) \times (0,2)$, com $\omega_0 = 0.55$, $\omega_1 = 0.11$, $\theta_1 = 0.10$ e $\theta_2 = 0.30$, 92.6% para $(0,2,3) \times (0,1)$, com $\omega_0 = -0.84$, $\omega_1 = -0.23$, $\omega_2 = 0.10$ e $\theta_1 = -0.51$, e 75.7% para $(1,2,3) \times (0,2)$, com $\delta_1 = -0.65$, $\omega_0 = -0.66$, $\omega_1 = 0.36$, $\omega_2 = -0.20$, $\theta_1 = 0.11$ e $\theta_2 = 0.31$. Uma das possíveis razões para tal suceder poderá estar relacionada com o facto de, neste tipo de modelos, as sucessões residuais serem processos de médias móveis;
- Nos modelos $(0,1,3) \times (1,0)$, $(0,2,3) \times (1,0)$, $(0,1,3) \times (2,0)$ e $(0,2,3) \times (2,0)$, as taxas de sucesso são claramente inferiores à generalidade das taxas obtidas, não ultrapassando, nos dois últimos modelos, 1%. Note-se que nos quadros da tabela FACEG amostral relativos a estes modelos, os processos a identificar, para as séries transformadas $Y_{m,t}^{s'(j)}$, correspondem a ruídos brancos, podendo ser esta a justificação da obtenção de resultados tão baixos;
- Os modelos apresentam, de uma forma geral, uma certa instabilidade relativamente aos conjuntos de parâmetros definidos para cada um. Este facto está bem patente, por exemplo, nos modelos $(1,0,3) \times (1,1)$, onde se obtém uma taxa de sucesso de 64.5%, para $\delta_1 = 0.58$, $\omega_0 = -0.94$, $\phi_1 = 0.29$ e $\theta_1 = -0.36$, enquanto para os outros dois conjuntos de parâmetros os resultados são de 31.6% e 33.6%, e $(1,1,3) \times (0,2)$, em que, para os três conjuntos de valores δ_1 , ω_l ($l = 0,1$) e θ_i ($i = 1,2$) definidos, se tem percentagens de sucesso de 43.6, 82.2 e 31.4 .

Uma vez que a metodologia de identificação dos modelos de função transferência bivariados desenvolvida tem como base a metodologia de identificação

dos modelos *ARMA* univariados através da FACE amostral, introduzida por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), efectuou-se, sobre esta, um estudo de simulação idêntico ao anterior, com o objectivo de comparar o desempenho dos dois procedimentos nas suas correspondentes áreas de aplicação.

Assim, analisando os resultados obtidos para a FACE amostral, apresentados na Tabela 4.1.3, é evidente a acentuada diferença entre os dois procedimentos adoptados. No procedimento (1), onde se impôs que todos os elementos da diagonal que delimita a forma triangular fossem estatisticamente não nulos, as percentagens de modelos correctamente identificados são muito baixas, não indo além dos 12.3% para o modelo (1,0), com $\phi_1 = 0.62$. Em contraste, o procedimento (2), no qual se relaxou a condição imposta em (1), exigindo-se apenas que o elemento que antecede o vértice do padrão triangular fosse estatisticamente significativo e permitindo que os restantes valores da diagonal pudessem ser estatisticamente nulos, regista um aumento substancial das taxas de sucesso. De salientar os resultados obtidos para os modelos *MA*, como por exemplo, 72.3% para o modelo (0,1), com $\theta_1 = -0.26$, e 75.7% para o modelo (0,2), com $\theta_1 = 0.19$ e $\theta_2 = -0.31$, em comparação com os obtidos para os processos *AR* puros, cujas percentagens de sucesso são claramente inferiores, tais como, 6.4% para modelo (2,0), com $\phi_1 = 0.80$ e $\phi_2 = -0.30$, e 13.4% para o modelo (1,0), com $\phi_1 = -0.34$. Nestes últimos, a primeira linha da forma triangular tem de ser identificada com a função de autocorrelação amostral de um ruído branco, o que provavelmente poderá justificar a quebra na percentagem de modelos identificados. De notar, também, a instabilidade dos processos relativamente aos conjuntos de parâmetros definidos para cada um dos modelos, como por exemplo, no modelo (1,2), onde se obtém uma taxa de

sucesso de 56.4% para $\phi_1 = -0.40$, $\theta_1 = 0.25$ e $\theta_2 = 0.15$, enquanto para $\phi_1 = 0.10$, $\theta_1 = -0.30$ e $\theta_2 = -0.20$, o resultado é de 36.0%.

Comparando os desempenhos das duas metodologias, pode dizer-se que, de uma forma geral, as percentagens de sucesso obtidas para a identificação dos modelos de função transferência racionais através da FACEG amostral se encontram ao mesmo nível dos resultados obtidos para a identificação dos processos *ARMA* univariados pela FACE amostral. Este facto vem confirmar o sucesso da metodologia proposta neste trabalho. De salientar, igualmente, o paralelismo existente entre as constatações feitas relativamente aos dois procedimentos, tais como, o melhor comportamento dos modelos de função transferência $(r,s,b) \times (0,q)$ e dos processos de médias móveis em contraste com os modelos $(r,s,b) \times (p,0)$ e os processos autoregressivos puros, assim como a instabilidade tanto dos modelos de função transferência como dos processos *ARMA* relativamente aos parâmetros.

Apesar de generalizar os resultados obtidos por Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), o problema do sobreajustamento apenas foi tratado para uma situação particular, devido às propriedades e às condições de convergência estabelecidas para os estimadores dos mínimos quadrados iterados, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, p + s'$). Consequentemente e por se encontrar fora do âmbito deste trabalho, não foi realizado qualquer estudo de simulação sobre este assunto, uma vez que o seu tratamento computacional será de algum modo complexo e moroso.

Embora os resultados desenvolvidos e obtidos ao longo desta dissertação sejam bastante satisfatórios, é evidente que o assunto não está, de modo algum, esgotado. Assim, ficam em aberto, para possível tratamento futuro, questões, tais como:

- Estudo das prováveis razões apontadas relativamente a alguns dos resultados obtidos nos estudos de simulação efectuados;
- Estudos de simulação envolvendo modelos *ARMA* e modelos de função transferência bivariados menos parcimoniosos;
- Implementação de um estudo de simulação para o caso particular de sobreajustamento, já tratado, e generalização do problema, que passará, possivelmente, pelo estabelecimento de outras propriedades associadas aos estimadores dos mínimos quadrados iterados;
- A Função de Autocorrelação Estendida Generalizada Amostral nos modelos multivariados de função transferência;
- Estudo sobre a consistência dos parâmetros associados às sucessivas sucessões residuais iteradas, ou seja, considere-se o problema seguinte:

Sejam o modelo de função transferência bivariado, (2.2.1), e a j -ésima regressão iterada de ordem m para s' , (3.1.6), respectivamente,

$$\beta_t - \sum_{i=1}^{p+r} \delta_i^* \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s} \omega_l^* \alpha_{t-b-l} = a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u}$$

e

$$\beta_t - \sum_{i=1}^m \hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} \beta_{t-i} - \sum_{l=0}^{p+s'} \hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} \alpha_{t-b-l} = \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j)} + \hat{e}_{m,t}^{s'(j)}$$

$$t = \max(m, b + p + s') + j + 1, \dots, n; \quad m = p, p+1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots$$

Subtraindo membro a membro as duas equações, vem

$$\sum_{i=1}^m (\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} - \delta_i^*) \beta_{t-i} + \sum_{l=0}^{p+s'} (\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} - \omega_l^*) \alpha_{t-b-l} = a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u} - \sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} - \hat{e}_{m,t}^{s'(j)},$$

em que $m \geq p+r$, $s' \geq s$, $\delta_i^* = 0$ para $i > p+r$ e $\omega_l^* = 0$ para $s' > s$.

Nas condições de convergência dos estimadores dos mínimos quadrados iterados, estabelecidas no Lema 3.5, tem-se

$$\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)} - \delta_i^* \xrightarrow{p} 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)} - \omega_l^* \xrightarrow{p} 0, \quad l = 0, 1, \dots, p+s'.$$

Donde, resulta que

$$\sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} + \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u}.$$

Ora,

$$a_t - \sum_{u=1}^{r+q} \theta_u^* a_{t-u} = Y_{p+r,t}^s \sim MA(r+q)$$

e, pelo Teorema 3.1, para $s' = s$, $m = p+r$ e $j \geq \max(p+s, r+q)$, tem-se

$$\sum_{u=1}^j \hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)} \hat{e}_{m,t-u}^{s'(j-u)} + \hat{e}_{m,t}^{s'(j)} = Y_{m,t}^{s'(j)} \sim MA(r+q).$$

Assim, seria interessante investigar o problema da convergência dos estimadores $\hat{\theta}_{u(m)}^{s'(j)}$, em particular, se poderiam convergir e em que condições para os parâmetros θ_u^* do modelo (2.2.1).

ANEXO 1.

Neste anexo são apresentadas as sucessões cronológicas sobre fornos a gás utilizadas nos exemplos dados nos capítulos 2 e 3, secção 3.4, e os programas em Splus Versão 3.3 para Windows usados na identificação de modelos de função transferência através da função de autocorrelação estendida generalizada amostral, para as duas séries mencionadas, e na estimação dos parâmetros, $\hat{\delta}_{i(m)}^{s'(j)}$ ($i = 1, \dots, m$) e $\hat{\omega}_{l(m)}^{s'(j)}$ ($l = 0, 1, \dots, p + s'$), referentes aos modelos identificados.

Séries sobre fornos a gás [Box *et al.* (1994)]

| | | | |
|---------------|-----------|-----------|-----------|
| Série "input" | 1.34E-01 | 6.53E-02 | 1.38E-01 |
| α_i | 5.68E-02 | 6.02E-02 | 1.98E-01 |
| | 2.41E-03 | 1.23E-01 | 1.09E-01 |
| | -1.05E-01 | 1.45E-01 | 2.01E-02 |
| 2.54E-02 | -9.99E-02 | 5.38E-03 | -9.04E-02 |
| -5.10E-02 | -9.97E-03 | -2.49E-02 | -2.27E-01 |
| 1.10E-01 | 5.80E-02 | -6.00E-02 | -2.15E-01 |
| -1.20E-02 | 7.81E-02 | -2.09E-02 | 3.00E-01 |
| -8.28E-02 | 2.09E-01 | -1.09E-01 | 1.87E-02 |
| -7.69E-02 | 6.34E-02 | -2.43E-01 | 1.14E-02 |
| -1.10E-01 | 1.16E-01 | -3.90E-01 | -9.54E-02 |
| -1.78E-01 | 2.89E-01 | 1.06E-01 | -8.40E-02 |
| -1.86E-01 | 9.90E-01 | -1.28E-01 | 1.61E-02 |
| -8.70E-02 | -8.22E-01 | -3.86E-02 | 5.42E-02 |
| 3.39E-02 | 4.08E-01 | 2.02E-01 | 1.58E-01 |
| 1.04E-01 | -8.19E-02 | 3.57E-02 | 4.08E-02 |
| 1.52E-01 | -7.36E-02 | -8.45E-02 | -1.02E-01 |
| -1.38E-01 | 1.31E-01 | -1.06E-01 | -1.98E-01 |
| 7.03E-02 | 8.71E-02 | -1.88E-01 | -2.58E-01 |
| 9.42E-02 | 2.26E-01 | -2.20E-01 | -2.78E-01 |
| 1.59E-01 | 3.25E-01 | -3.69E-01 | -6.45E-01 |
| 1.00E-01 | 2.19E-02 | 1.90E-01 | 4.71E-01 |
| -8.68E-02 | 5.19E-02 | -8.48E-02 | -3.35E-01 |
| 7.74E-02 | -1.07E-01 | -4.00E-02 | 6.02E-02 |
| 9.15E-02 | -9.17E-01 | 1.25E-02 | 3.16E-01 |
| 1.36E-01 | 8.67E-01 | -4.63E-02 | -3.35E-01 |
| 2.42E-01 | -1.15E-01 | 1.32E-02 | -2.83E-02 |
| 3.36E-01 | 1.32E-01 | 1.58E-01 | -1.59E-02 |
| -1.26E-01 | 3.19E-01 | 2.11E-01 | -1.07E-01 |
| 4.36E-02 | -8.12E-02 | 3.07E-01 | -8.44E-03 |
| 1.60E-01 | 2.08E-03 | -3.76E-01 | -6.37E-03 |

| | | | Série "output" β_i |
|-----------|-----------|-----------|-----------------------------|
| 1.58E-01 | 1.45E-01 | 2.25E-01 | |
| -1.50E-01 | 1.77E-01 | -2.59E-01 | |
| 7.52E-02 | -6.89E-02 | -6.27E-02 | |
| 1.49E-01 | -2.04E-01 | 4.20E-02 | |
| 1.73E-01 | 3.51E-02 | -2.02E-01 | 0.031848 |
| 1.39E-01 | 9.47E-02 | -1.20E-01 | -0.137148 |
| 1.80E-01 | 1.78E-01 | 2.31E-02 | -0.206156 |
| 9.07E-02 | 1.46E-01 | 1.97E-01 | -0.152144 |
| 5.47E-02 | -2.73E-02 | 1.48E-01 | -0.041154 |
| 8.07E-03 | 8.12E-03 | 1.45E-01 | -0.096151 |
| 1.51E-02 | 1.10E-01 | 5.42E-02 | -0.177151 |
| -2.20E-01 | -3.69E-02 | -2.07E-01 | 0.04485 |
| 1.54E-01 | -3.16E-01 | 5.23E-02 | 0.238849 |
| 1.56E-01 | -2.87E-01 | 5.54E-02 | 0.118846 |
| -9.55E-03 | -2.02E-02 | 2.04E-01 | 0.484853 |
| 6.55E-02 | -5.26E-01 | 2.36E-01 | -0.79915 |
| 9.63E-02 | -5.98E-03 | 2.11E-02 | 2.366849 |
| 9.81E-02 | 2.79E-02 | -7.34E-02 | -1.113154 |
| 2.85E-02 | -1.91E-01 | -2.82E-01 | 0.050851 |
| -9.19E-03 | -7.33E-02 | -2.26E-01 | 0.066852 |
| -6.26E-02 | -1.25E-03 | 5.28E-01 | -0.117154 |
| -1.69E-01 | -4.59E-02 | 1.92E-01 | 0.013849 |
| -1.94E-01 | 1.44E-01 | 1.69E-01 | -0.130151 |
| 4.22E-02 | 2.31E-01 | -2.70E-01 | -0.572149 |
| 1.30E-01 | -1.52E-01 | -3.38E-02 | -0.026156 |
| 6.10E-02 | -1.05E-01 | -7.87E-02 | -0.222148 |
| 3.19E-03 | 3.05E-03 | -1.10E-01 | -0.102146 |
| -4.27E-02 | -2.28E-02 | -2.14E-01 | -0.367154 |
| 3.49E-02 | -7.04E-02 | 1.02E-01 | -0.189148 |
| 4.16E-02 | -1.58E-01 | -1.33E-01 | -0.510151 |
| 8.27E-02 | -1.51E-01 | -3.24E-02 | -0.600149 |
| 1.24E-01 | -1.65E-01 | 5.61E-02 | -0.407151 |
| -9.49E-02 | -2.00E-03 | 9.54E-02 | -0.25715 |
| 5.09E-02 | 6.06E-03 | -7.48E-02 | -0.396151 |
| 6.94E-02 | 7.75E-02 | -8.85E-03 | -0.318146 |
| 3.79E-02 | 4.29E-02 | 2.41E-02 | -0.362153 |
| 9.94E-02 | -1.59E-01 | 4.43E-02 | -0.29715 |
| 2.27E-01 | -4.73E-02 | 4.44E-02 | 0.039851 |
| 2.17E-01 | -7.06E-02 | 5.86E-02 | 0.091849 |
| -1.24E-01 | -6.35E-02 | -6.35E-02 | -0.030154 |
| -8.73E-03 | -1.02E-01 | -2.42E-01 | 0.162851 |
| -3.48E-01 | -1.33E-01 | -1.95E-01 | -0.24015 |
| 5.44E-02 | -2.19E-01 | 1.17E-01 | -0.352151 |
| -6.88E-02 | -1.11E-01 | -4.18E-03 | -0.164152 |
| -2.11E-01 | 9.74E-02 | 1.11E-02 | -0.371149 |
| -9.12E-02 | 2.68E-01 | 5.90E-02 | -0.894151 |
| -1.57E-03 | 1.11E-01 | 1.03E-01 | -0.847149 |
| 6.21E-02 | -2.22E-01 | -3.59E-02 | -0.27215 |
| 2.74E-01 | 3.03E-02 | 3.71E-02 | -0.832151 |
| 1.86E-01 | -1.31E-01 | -3.29E-02 | 0.128851 |
| -3.56E-02 | -3.94E-01 | -3.55E-02 | -0.279148 |
| -1.77E-01 | 1.17E-02 | 2.41E-02 | -0.033152 |
| -3.22E-02 | -2.04E-01 | -5.99E-02 | -0.290154 |
| -1.53E-01 | -1.31E-01 | -1.02E-01 | -0.566147 |
| -8.03E-02 | -8.87E-02 | 7.53E-02 | -0.327153 |
| -1.02E-01 | -5.38E-02 | | -0.682148 |
| -1.36E-01 | -1.22E-01 | | -0.593152 |
| -4.90E-03 | -1.72E-01 | | 0.203854 |
| 1.91E-02 | 5.30E-02 | | 0.280849 |

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.045854 | 0.630852 | -0.955153 | -0.603154 |
| -0.082158 | 0.252847 | 0.301852 | 0.955851 |
| -0.071146 | -0.149149 | -0.412151 | 0.532848 |
| -0.542154 | 0.264852 | 0.389845 | 0.24285 |
| -0.314144 | -0.099152 | 0.047855 | 0.177846 |
| -0.395154 | 0.316847 | 0.316851 | 0.36885 |
| 0.00185 | 0.026855 | 0.11385 | 0.408851 |
| -0.333149 | 0.149844 | 0.22885 | 0.273846 |
| -0.252152 | 0.047849 | 0.310851 | 0.363851 |
| -0.333145 | 0.088849 | 0.058847 | 0.210849 |
| -0.211157 | -0.098153 | -0.102149 | 0.182851 |
| -0.320145 | 0.114851 | -0.389152 | -0.091147 |
| -0.092156 | -0.340151 | 0.019851 | 0.216848 |
| 0.007855 | -0.133151 | -0.063152 | 0.244849 |
| -0.009156 | -0.37415 | 0.357849 | -0.185146 |
| 0.322851 | -0.556148 | -0.132148 | 0.552844 |
| 0.538848 | -0.187149 | -0.43115 | 0.163855 |
| 0.349854 | -0.755149 | -0.309156 | 0.033845 |
| 0.512847 | 0.046845 | 0.021849 | -0.195153 |
| -0.057145 | -0.375149 | -0.416149 | -0.241151 |
| 0.417845 | 0.001848 | -0.081153 | -0.413152 |
| -0.275149 | -0.099152 | -0.045146 | -0.00915 |
| -0.065152 | -0.108152 | 1.30785 | -0.41115 |
| 0.235851 | -0.073146 | -0.548152 | 0.196848 |
| -0.073149 | -0.303155 | 1.47385 | -0.045148 |
| 0.52485 | -0.076147 | 0.733853 | -0.75315 |
| 0.906851 | -0.46315 | 0.008848 | -0.332149 |
| -0.059152 | -0.097149 | 0.127852 | -0.038156 |
| 0.53485 | -0.145147 | 0.781851 | -0.039146 |
| 0.114852 | -0.354155 | 0.268845 | 1.65085 |
| 0.150849 | 0.17085 | 0.149853 | -0.153152 |
| 0.126848 | 0.336847 | 0.241849 | -0.253152 |
| 0.181857 | 0.20285 | 0.081847 | -0.960147 |
| -0.141154 | -0.036146 | -0.522153 | -0.651154 |
| -0.208148 | 0.125846 | 0.246852 | 0.101855 |
| -0.361152 | -0.194156 | -0.269155 | 0.134845 |
| -0.43215 | -0.035147 | 0.22685 | 0.376855 |
| -0.018154 | -0.202154 | -0.030152 | 0.042847 |
| 0.035853 | -0.019147 | 0.20685 | 0.018849 |
| -0.576147 | 0.054843 | 0.196851 | 0.402851 |
| -0.205152 | -0.163149 | 0.841847 | -0.043151 |
| 0.027853 | -0.407149 | -0.214149 | 0.07585 |
| 0.343844 | -0.028147 | 0.611846 | -0.09315 |
| -0.005149 | -0.157155 | -0.079149 | 0.116849 |
| -0.125149 | 0.055856 | 0.287852 | -0.222146 |
| 0.184846 | -0.419147 | -0.170153 | -0.271154 |
| -0.047145 | -0.123154 | 0.052854 | 0.193851 |
| -0.017156 | -0.503147 | 0.152846 | -0.341148 |
| 0.032855 | -0.42415 | 0.051848 | 0.13385 |
| 0.073845 | -0.262146 | 0.158849 | -0.02115 |
| -0.054147 | 0.030845 | 0.074849 | 0.274852 |
| 0.048849 | 0.043855 | 0.333849 | 0.854849 |
| -0.48515 | 0.222843 | 0.470847 | 0.541851 |
| 0.199851 | 0.231852 | 0.096854 | -0.16215 |
| 0.005853 | 0.164848 | 0.46585 | 0.754851 |
| 0.461848 | 0.138851 | -0.035149 | 0.176847 |
| 0.641845 | 0.70485 | -0.277153 | -0.075146 |
| 0.796855 | -0.29415 | -0.422151 | 0.403845 |
| 0.324843 | -0.035153 | 0.588853 | -0.043151 |

0.201847
0.269849

Programa 1:

#IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA ATRAVÉS DA FACEG
#AMOSTRAL PARA AS SÉRIES SOBRE FORNOS A GÁS (BOX ET AL. (1994))

#CÁLCULO DA FACEG

```
esacf <- function(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n){
  faeg0<-matrix(0,nrow=8,ncol=k+1)
  ny<-length(y)
  fac<-acf(y,lag.max=k,type="correlation",plot=F)
  facc<-rbind(fac$lag,fac$acf)[,(1:(k+1))]
  faeg0[1,]<-facc[2,]
  k0<-(m-p)+q
  l0<-4
  fact1<-numeric(ncol(facc))
  for (i in 1:ncol(facc)){
    if (facc[1,i]<=l0){fact1[i]<-facc[2,i]*sqrt(ny)/1.25
                      faeg0[2,i]<-1.25/sqrt(ny)}
    if (facc[1,i]>l0){fact1[i]<-facc[2,i]*sqrt(ny)/1.96
                      faeg0[2,i]<-1.96/sqrt(ny)}
  }
  u<-numeric(length(facc))
  for (i in 1:ncol(facc)){
    if (Mod(fact1[i])>1){u[i]<-facc[1,i]
                        faeg0[3,i]<-facc[1,i]}
  }
  faeg0[4,1]<-max(u)
  if (j>=max(ps,k0)){
    facc1<-facc[2,(2:(k0+1))]
    if (k0==0) facc1<-0
    facc2<-facc[2,((k0+2):(k+1))]
    estqy<-(ny/(2*sum(facc1^2)+1))*sum(facc2^2)
    faeg0[5,1]<-j
    if (estqy<=qchisq(.95,k-k0)) faeg0[5,2]<-1
    alpha1<-alpha[((n-ny+1):n)]
    yalpha<-cbind(alpha1,y)
    fcc0<-acf(yalpha,lag.max=k,type="correlation",
              plot=F)
    fcc1<-rbind(fcc0$lag,fcc0$acf)[,((k+2):(2*(k+1)))]
    faeg0[6,]<-fcc1[2,]
    fact2<-numeric(ncol(fcc1))
    for (i in 1:ncol(fcc1)){
      k1<--fcc1[1,i]
      fact2[i]<-fcc1[2,i]*sqrt(ny-k1)/1.96
      faeg0[7,i]<-1.96/sqrt(ny-k1)
      if (Mod(fact2[i])>1) faeg0[8,i]<--fcc1[1,i]
    }
  }
  faeg0
}
```

```
options(expressions=20000)

#Leitura das séries

#n. de observações

n<-293

#leitura dos ficheiros com as séries alpha-input e beta-output

alpha<-scan("gx0.txt")
beta<-scan("gy0.txt")

alpha<-rts(alpha)
beta<-rts(beta)

#parâmetro de desfasamento

b<-3

#ordens dos polinómios AR e MA do modelo associado a série residual

p<-0
q<-2

#construção quadro a quadro da tabela: m=p,p+1,...,p+4 para s=0,1,...4

s<-0
ps<-p+s
m<-p

#n. de lags considerados

k<-15

#matrizes finais

faceg<-matrix(0,nrow=9,ncol=k+1)
lcrit<-matrix(0,nrow=9,ncol=k+1)
lags<-matrix(-1,nrow=9,ncol=k+1)
ulsign<-matrix(-1,nrow=9,ncol=1)
tportm<-matrix(0,nrow=9,ncol=2)
fcc<-matrix(0,nrow=9,ncol=k+1)
lcfcc<-matrix(0,nrow=9,ncol=k+1)
lagsfcc<-matrix(0,nrow=9,ncol=k+1)

#Regressões iteradas

mx<-max(m,b+ps)

#j=0

j<-0
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
```

```

for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
reg0<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res0<-rts(residuals(reg0))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg0)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[1,]<-faeg[1,]
lcrit[1,]<-faeg[2,]
lags[1,]<-faeg[3,]
ulsign[1,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[1,i]<-faeg[5,i]
fcc[1,]<-faeg[6,]
lcfcc[1,]<-faeg[7,]
lagsfcc[1,]<-faeg[8,]

```

```
#j=1
```

```

j<-1
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res0,-(mx+j)))
reg1<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res1<-rts(residuals(reg1))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg1)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[2,]<-faeg[1,]
lcrit[2,]<-faeg[2,]
lags[2,]<-faeg[3,]
ulsign[2,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[2,i]<-faeg[5,i]
fcc[2,]<-faeg[6,]
lcfcc[2,]<-faeg[7,]
lagsfcc[2,]<-faeg[8,]

```

```
#j=2
```

```

j<-2
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res1,-(mx+j)),lag(res0,-(mx+j)))
reg2<-lm(zz[,1] ~ -1+zz[,-1])
res2<-rts(residuals(reg2))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg2)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)

```

```

faceg[3,]<-faeg[1,]
lcrit[3,]<-faeg[2,]
lags[3,]<-faeg[3,]
ulsign[3,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[3,i]<-faeg[5,i]
fcc[3,]<-faeg[6,]
lcfcc[3,]<-faeg[7,]
lagsfcc[3,]<-faeg[8,]

#j=3

j<-3
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res2,-(mx+j)),lag(res1,-(mx+j)),
                 lag(res0,-(mx+j)))
reg3<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res3<-rts(residuals(reg3))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg3)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[4,]<-faeg[1,]
lcrit[4,]<-faeg[2,]
lags[4,]<-faeg[3,]
ulsign[4,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[4,i]<-faeg[5,i]
fcc[4,]<-faeg[6,]
lcfcc[4,]<-faeg[7,]
lagsfcc[4,]<-faeg[8,]

#j=4

j<-4
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res3,-(mx+j)),lag(res2,-(mx+j)),
                 lag(res1,-(mx+j)),lag(res0,-(mx+j)))
reg4<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res4<-rts(residuals(reg4))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg4)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[5,]<-faeg[1,]
lcrit[5,]<-faeg[2,]
lags[5,]<-faeg[3,]
ulsign[5,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[5,i]<-faeg[5,i]

```

```

fcc[5,]<-faeg[6,]
lcfcc[5,]<-faeg[7,]
lagsfcc[5,]<-faeg[8,]

#j=5
j<-5
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res4,-(mx+j)),lag(res3,-(mx+j)),
                lag(res2,-(mx+j)),lag(res1,-(mx+j)),
                lag(res0,-(mx+j)))
reg5<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res5<-rts(residuals(reg5))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg5)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[6,]<-faeg[1,]
lcrit[6,]<-faeg[2,]
lags[6,]<-faeg[3,]
ulsign[6,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[6,i]<-faeg[5,i]
fcc[6,]<-faeg[6,]
lcfcc[6,]<-faeg[7,]
lagsfcc[6,]<-faeg[8,]

#j=6
j<-6
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res5,-(mx+j)),lag(res4,-(mx+j)),
                lag(res3,-(mx+j)),lag(res2,-(mx+j)),
                lag(res1,-(mx+j)),lag(res0,-(mx+j)))
reg6<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res6<-rts(residuals(reg6))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg6)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[7,]<-faeg[1,]
lcrit[7,]<-faeg[2,]
lags[7,]<-faeg[3,]
ulsign[7,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[7,i]<-faeg[5,i]
fcc[7,]<-faeg[6,]
lcfcc[7,]<-faeg[7,]
lagsfcc[7,]<-faeg[8,]

```

```

#j=7

j<-7
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res6,-(mx+j)),lag(res5,-(mx+j)),
  lag(res4,-(mx+j)),lag(res3,-(mx+j)),
  lag(res2,-(mx+j)),lag(res1,-(mx+j)),
  lag(res0,-(mx+j)))
reg7<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res7<-rts(residuals(reg7))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg7)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[8,]<-faeg[1,]
lcrit[8,]<-faeg[2,]
lags[8,]<-faeg[3,]
ulsign[8,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[8,i]<-faeg[5,i]
fcc[8,]<-faeg[6,]
lcfcc[8,]<-faeg[7,]
lagsfcc[8,]<-faeg[8,]

```

```
#j=8
```

```

j<-8
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res7,-(mx+j)),lag(res6,-(mx+j)),
  lag(res5,-(mx+j)),lag(res4,-(mx+j)),
  lag(res3,-(mx+j)),lag(res2,-(mx+j)),
  lag(res1,-(mx+j)),lag(res0,-(mx+j)))
reg8<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res8<-rts(residuals(reg8))
y<-yy[,1]
for (i in 1:(m+ps+1)) y<-y-coef(reg8)[i]*yy[,i+1]
faeg<-esacf(y,p,q,m,ps,k,j,alpha,n)
faceg[9,]<-faeg[1,]
lcrit[9,]<-faeg[2,]
lags[9,]<-faeg[3,]
ulsign[9,]<-faeg[4,1]
for (i in 1:2) tportm[9,i]<-faeg[5,i]
fcc[9,]<-faeg[6,]
lcfcc[9,]<-faeg[7,]
lagsfcc[9,]<-faeg[8,]

```

```
#quadro
```

```

"p+s"
ps

"m"
m

faceg <- round(faceg,dig=4)
"Matriz faceg para m, j=0,1,...,8 e k=0,1,...,15"
faceg

lcrit <- round(lcrit,dig=4)
"limites criticos para a FAC de Y"
lcrit[1,]

"Matriz dos lags significativos para m, j=0,1,... e k=r+q,...,15"
lags

"Ultimo lag significativo para m e j=0,1,...,8"
ulsign

"Teste Portmanteau para  $j \geq \max(ps, (m-p)+q)$  e  $k > (m-p)+q$  - 0=rej.H0;
1=nao rej.H0"
tportm

fcc <- round(fcc,dig=4)
"FCC entre Y(m,t,s,j) e alpha para  $j \geq \max(ps, (m-p)+q)$  - 0=rej.H0;
1=nao rej.H0"
fcc

lcfcc<-round(lcfcc,dig=4)
"limites criticos para a FCC entre Y e alpha"
lcfcc[9,]

"Matriz dos lags significativos da FCC entre Y e alpha para
 $j \geq \max(ps, (m-p)+q)$ "
lagsfcc

#Modelo identificado?

aprq<-1
aprq<-1
tprqs<-1
aprqsf<-1
apfcc<-1

j0<-max(ps, (m-p)+q)
k1<-(m-p)+q

for (i in (j0+1):9){
  if (lags[i,k1+1]!=k1) aprq<-0
  invisible(aprq)
}

for (i0 in (j0+1):9){
  for (i1 in (k1+2):(k+1)){
    if (lags[i0,i1]!=0) aprqs<-0
  }
}

```

```

if (tportm[i0,2]!=1) tprqs<-0
if (aprqs==0 & tprqs==0) aprqsf<-0
invisible(aprqsf)
}

if (max(lagsfcc)!=0){apfcc<-0
invisible(apfcc)}

"Modelo possivel de identificar"
param<-rbind(c(m-p,s,b,p,q))
"r , s , b , p , q"
param

param1<-rbind(c(m,ps,(m-p)+q,max(ps,(m-p)+q)))
"m=p+r , p+s , k=r+q , j=max(p+s,r+q)"
param1

"Modelo identificado?"
band<-"NAO"
if (aprq==1 & aprqsf==1 & apfcc==1){band<-"SIM"
invisible(band)}
band

mens1<-"lags=r+q: significativos"
mens2<-"lags>r+q: todos nao significativos"
mens3<-"teste portmanteau para lags>r+q: nao rejeitado"
mens4<-"correlacao entre Y e alpha: nao significativa"

if (aprq==0){mens1<-"lags=r+q: algum(s) nao significativo(s)"
invisible(mens1)}
if (aprqs==0){mens2<-"lags>r+q: algum(s) significativo(s)"
invisible(mens2)}
if (tprqs==0){mens3<-"teste portmanteau para lags>r+q: rejeitado"
invisible(mens3)}
if (apfcc==0){mens4<-"correlacao entre Y e alpha: significativa"
invisible(mens4)}

mens1
mens2
mens3
mens4

```

Programa 2:

```

#CÁLCULO DAS ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS REFERENTES AOS MODELOS DE
#FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA IDENTIFICADOS ATRAVÉS DA FACEG, NO PROGRAMA 1,
#PARA AS DUAS SÉRIES SOBRE FORNOS A GÁS

```

```
options(expressions=20000)
```

```
#Leitura das séries
```

```
#n. de observações
```

```
n<-293

#leitura dos ficheiros com as séries input-alpha e output-beta
alpha<-scan("gx0.txt")
beta<-scan("gy0.txt")

alpha<-rts(alpha)
beta<-rts(beta)

#parâmetro de desfasamento

b<-3

#ordens dos polinómios AR e MA da série residual

p<-0
q<-2

#valores de m e p+s

s<-4
ps<-p+s
m<-p

#quadro

"p+s"
ps
"m"
m

"Modelo identificado"
param<-rbind(c(m-p,s,b,p,q))
"r , s , b , p , q"
param

param1<-rbind(c(m,ps,(m-p)+q,max(ps,(m-p)+q)))
"m=p+r , p+s , r+q , j=max(p+s,r+q)"
param1

#inicializações

estimat<-0
varesid<-0

#Regressões iteradas

mx<-max(m,b+ps)

#j=0

j<-0
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
```

```

yy<-zz
reg0<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res0<-rts(residuals(reg0))
if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg0)
  estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
  varesid<-var(res0) * (length(res0) - 1) /
    (length(res0) - (m+ps+1+j) - 1)
  invisible(varesid)}

"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variancia residual"
varesid

#j=1

j<-1
zz<-beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz, lag(res0, -(mx+j)))
reg1<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res1<-rts(residuals(reg1))
if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg1)
  estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
  varesid<-var(res1) * (length(res1) - 1) /
    (length(res1) - (m+ps+1+j) - 1)
  invisible(varesid)}

"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variancia residual"
varesid

#j=2

j<-2
zz<-beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz, lag(res1, -(mx+j)), lag(res0, -(mx+j)))
reg2<-lm(zz[,1] ~ -1+zz[, -1])
res2<-rts(residuals(reg2))

```

```

if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg2)
  estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
  varesid<-var(res2)*(length(res2)-1)/
    (length(res2)-(m+ps+1+j)-1)
  invisible(varesid)}
"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variância residual"
varesid

#j=3

j<-3
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz, lag(res2, -(mx+j)), lag(res1, -(mx+j)),
  lag(res0, -(mx+j)))
reg3<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res3<-rts(residuals(reg3))
if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg3)
  estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
  varesid<-var(res3)*(length(res3)-1)/
    (length(res3)-(m+ps+1+j)-1)
  invisible(varesid)}
"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variância residual"
varesid

#j=4

j<-4
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz, lag(res3, -(mx+j)), lag(res2, -(mx+j)),
  lag(res1, -(mx+j)), lag(res0, -(mx+j)))
reg4<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res4<-rts(residuals(reg4))
if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg4)

```

```

estimac<- (sumario$coefficients) [(1:(m+ps+1)),]
varesid<-var(res4)*(length(res4)-1)/
              (length(res4)-(m+ps+1+j)-1)
invisible(varesid)}

"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimac

"variancia residual"
varesid

#j=5

j<-5
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res4,-(mx+j)),lag(res3,-(mx+j)),
                lag(res2,-(mx+j)),lag(res1,-(mx+j)),
                lag(res0,-(mx+j)))
reg5<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res5<-rts(residuals(reg5))
if (j>=max(ps,(m-p)+q)){sumario<-summary(reg5)
  estimac<- (sumario$coefficients) [(1:(m+ps+1)),]
  varesid<-var(res5)*(length(res5)-1)/
              (length(res5)-(m+ps+1+j)-1)
  invisible(varesid)}

"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimac

"variancia residual"
varesid

#j=6

j<-6
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz,lag(res5,-(mx+j)),lag(res4,-(mx+j)),
                lag(res3,-(mx+j)),lag(res2,-(mx+j)),
                lag(res1,-(mx+j)),lag(res0,-(mx+j)))
reg6<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res6<-rts(residuals(reg6))

```

```

if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg6)
      estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
      varesid<-var(res6)*(length(res6)-1)/
      (length(res6)-(m+ps+1+j)-1)
      invisible(varesid)}
"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variancia residual"
varesid

#j=7

j<-7
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz, lag(res6, -(mx+j)), lag(res5, -(mx+j)),
  lag(res4, -(mx+j)), lag(res3, -(mx+j)),
  lag(res2, -(mx+j)), lag(res1, -(mx+j)),
  lag(res0, -(mx+j)))
reg7<-lm(zz[,1] ~-1+zz[, -1])
res7<-rts(residuals(reg7))
if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg7)
      estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
      varesid<-var(res7)*(length(res7)-1)/
      (length(res7)-(m+ps+1+j)-1)
      invisible(varesid)}
"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variancia residual"
varesid

#j=8

j<-8
zz<-beta
if (m>0){
  for (i in 1:m) zz<-ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz<-ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy<-zz
zz<-ts.intersect(zz, lag(res7, -(mx+j)), lag(res6, -(mx+j)),
  lag(res5, -(mx+j)), lag(res4, -(mx+j)),
  lag(res3, -(mx+j)), lag(res2, -(mx+j)),

```

```
                                lag(res1, -(mx+j)), lag(res0, -(mx+j)))
reg8<-lm(zz[,1] ~-1+zz[,-1])
res8<-rts(residuals(reg8))
if (j>=max(ps, (m-p)+q)) {sumario<-summary(reg8)
                           estimat<-(sumario$coefficients)[(1:(m+ps+1)),]
                           varesid<-var(res8) * (length(res8) - 1) /
                                       (length(res8) - (m+ps+1+j) - 1)
                           invisible(varesid) }
"j"
j

"estimativas dos parametros"
estimat

"variância residual"
varesid
```

ANEXO 2.

Neste anexo são apresentados os programas em Splus Versão 3.3 para Windows utilizados no estudo de simulação realizado no capítulo 4, secção 4.1, sobre a identificação de modelos univariados $ARMA(p,q)$ através da função de autocorrelação estendida amostral [Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984)].

Programa 1:

```
#SIMULAÇÃO DE 1000 SÉRIES TEMPORAIS PARA UM DADO MODELO ARMA(p,q) E
#IDENTIFICAÇÃO DO MODELO CONSIDERADO ATRAVÉS DA FUNÇÃO DE
#AUTOCORRELAÇÃO ESTENDIDA AMOSTRAL
```

```
#1ª função - cálculo dos valores da face e sua significância
#estatística
```

```
face <- function (y,j){
  ny <- length(y)
  facy <- acf(y,lag.max=j,type="correlation",plot=F)
  faccy <- rbind(facy$lag,facy$acf)[,((j+1):(j+1))]
  limc <- 2/sqrt(ny)
  limc1 <- round(limc,dig=2)+0.02
  l <- numeric(2)
  if (Mod(faccy[2])>limc) l[1] <- faccy[1]
  if (Mod(faccy[2])>limc & Mod(faccy[2])<=limc1) l[2] <- 1
  if (Mod(faccy[2])>limc1) l[2] <- 2
  l
}
```

```
#2ª função - iterações para cada ordem de regressão
```

```
regr <- function (xx,m,q1,j1){
  lags0 <- matrix(0,nrow=2,ncol=j1)

  #j=0
  j <- 0
  reg0 <- lm(xx[,1]~-1+xx[, -1])
  res0 <- residuals(reg0)

  #j=1
  j <- 1
  xx1 <- ts.intersect(xx,lag(res0,-(m+j)))
  reg1 <- lm(xx1[,1]~-1+xx1[, -1])
  res1 <- residuals(reg1)
  if (j>=q1){
```

```

y <- xx[,1]
for (i in 1:m) y <- y-coef(reg1)[i]*xx[,i+1]
l1 <- face(y,j)
lags0[1,j] <- l1[1]; lags0[2,j] <- l1[2]
}
#j=2
j <- 2
xx2 <- ts.intersect(xx, lag(res1, -(m+j)), lag(res0, -(m+j)))
reg2 <- lm(xx2[,1]~-1+xx2[, -1])
res2 <- residuals(reg2)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg2)[i]*xx[,i+1]
  l1 <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- l1[1]; lags0[2,j] <- l1[2]
}

#j=3
j <- 3
xx3 <- ts.intersect(xx, lag(res2, -(m+j)), lag(res1, -(m+j)),
                    lag(res0, -(m+j)))
reg3 <- lm(xx3[,1]~-1+xx3[, -1])
res3 <- residuals(reg3)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg3)[i]*xx[,i+1]
  l1 <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- l1[1]; lags0[2,j] <- l1[2]
}

#j=4
j <- 4
xx4 <- ts.intersect(xx, lag(res3, -(m+j)), lag(res2, -(m+j)),
                    lag(res1, -(m+j)), lag(res0, -(m+j)))
reg4 <- lm(xx4[,1]~-1+xx4[, -1])
res4 <- residuals(reg4)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg4)[i]*xx[,i+1]
  l1 <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- l1[1]; lags0[2,j] <- l1[2]
}

#j=5
j <- 5
xx5 <- ts.intersect(xx, lag(res4, -(m+j)), lag(res3, -(m+j)),
                    lag(res2, -(m+j)), lag(res1, -(m+j)),
                    lag(res0, -(m+j)))
reg5 <- lm(xx5[,1]~-1+xx5[, -1])
res5 <- residuals(reg5)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg5)[i]*xx[,i+1]
  l1 <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- l1[1]; lags0[2,j] <- l1[2]
}

#j=6
j <- 6

```

```

xx6 <- ts.intersect(xx, lag(res5, -(m+j)), lag(res4, -(m+j)),
                    lag(res3, -(m+j)), lag(res2, -(m+j)),
                    lag(res1, -(m+j)), lag(res0, -(m+j)))
reg6 <- lm(xx6[,1]~-1+xx6[,-1])
res6 <- residuals(reg6)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg6)[i]*xx[,i+1]
  ll <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- ll[1]; lags0[2,j] <- ll[2]
}

#j=7
j <- 7
xx7 <- ts.intersect(xx, lag(res6, -(m+j)), lag(res5, -(m+j)),
                    lag(res4, -(m+j)), lag(res3, -(m+j)),
                    lag(res2, -(m+j)), lag(res1, -(m+j)),
                    lag(res0, -(m+j)))
reg7 <- lm(xx7[,1]~-1+xx7[,-1])
res7 <- residuals(reg7)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg7)[i]*xx[,i+1]
  ll <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- ll[1]; lags0[2,j] <- ll[2]
}

#j=8
j <- 8
xx8 <- ts.intersect(xx, lag(res7, -(m+j)), lag(res6, -(m+j)),
                    lag(res5, -(m+j)), lag(res4, -(m+j)),
                    lag(res3, -(m+j)), lag(res2, -(m+j)),
                    lag(res1, -(m+j)), lag(res0, -(m+j)))
reg8 <- lm(xx8[,1]~-1+xx8[,-1])
res8 <- residuals(reg8)
if (j>=q1){
  y <- xx[,1]
  for (i in 1:m) y <- y-coef(reg8)[i]*xx[,i+1]
  ll <- face(y,j)
  lags0[1,j] <- ll[1]; lags0[2,j] <- ll[2]
}
lags0
}

```

#3ª função

```
imod <- function(){
```

```
#Geração do modelo ARMA
```

```
options(expressions=20000)
```

```
#sinal=1 ->diagonal toda não nula; sinal=2 ->apenas r(q-1)[Yp,t(q-1)]
#não nulo
```

```
sinal <- 2
```

```
#nº de observações
```

```

n <- 300

#Simulação da série residual at - ruído branco
k <- 36
flag <- 0
qat <- 0

while (flag==0)
{
  #simulação: at - rb gaussiano(o,dv)
  at <- arima.sim(model=list(ar=0),n=n+100)
  at <- at-mean(at)

  #cálculo da FAC de at
  fac <- acf(at,lag.max=k,type="correlation",plot=F)
  atfac <- rbind(fac$sacf)[,(2:(k+1))]

  #cálculo da estatística Q
  afacq <- numeric(k)
  for (i in 1:k) afacq[i] <- atfac[i]^2/(n+100-i)
  qat <- sum(afacq)*(n+100)*(n+100+2)

  #at rb? teste portmanteau - qui-quad. a .95 c/ k=36 gl
  if (qat<=qchisq(.95,k)) flag <- 1
}

#Construção do modelo ARMA: ordens e parâmetros

#(1,2) = sarmal2
p <- 1
q <- 2

phil <- -0.60
tetal <- -0.10
teta2 <- 0.20

x <- numeric(n+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+100)) x[i] <- phil*x[i-1]+at[i]-tetal*at[i-1]-
  teta2*at[i-2]

x <- x-mean(x)

#Série X~ARMA(p,q)

x <- x[-(1:100)]
x <- x-mean(x)
x <- rts(x)

#Regressões iteradas e identificação do modelo

#Apontador

```

```

pont <- 1

j1 <- 8

#m=p

m <- p

#m=0 - FAC de X
if (m==0){
  j <- 8
  facx <- acf(x, lag.max=j, type="correlation", plot=F)
  faccx <- rbind(facx$lag, facx$acf)[, ((q+1):(j+1))]
  lc <- 2/sqrt(n)
  lc1 <- round(lc, dig=2)+0.02
  l0 <- matrix(0, nrow=2, ncol=ncol(faccx))
  for (i in 1:ncol(faccx)){
    if (Mod(faccx[2,i])>lc) l0[1,i] <- faccx[1,i]
    if (Mod(faccx[2,i])>lc & Mod(faccx[2,i])<=lc1) l0[2,i] <- 1
    if (Mod(faccx[2,i])>lc1) l0[2,i] <- 2
  }

  #linha m=p identificada?
  l01 <- rbind(l0)[1, (1:(j-q-2))]
  l02 <- rbind(l0)[2, ((j-q-1):(j-q+1))]
  if (max(l01)!=q || sum(l02)>1) pont <- 0
  invisible(pont)
}

#m!=0
if (m!=0){
  q1 <- q
  xx <- x
  for (i in 1:m) xx <- ts.intersect(xx, lag(x, -i))
  lags <- regr(xx, m, q1, j1)

  # linha m=p identificada?
  if (q==0) l11 <- rbind(lags)[1, ((q1+1):(j1-3))]
  if (q!=0) l11 <- rbind(lags)[1, (q1:(j1-3))]
  l12 <- rbind(lags)[2, ((j1-2):j1)]
  if (max(l11)!=q1 || sum(l12)>1) pont<-0
  invisible(pont)
}

#m=p+1

if (pont==1){
  m <- p+1
  q1 <- q+1
  xx <- x
  for (i in 1:m) xx <- ts.intersect(xx, lag(x, -i))
  lags <- regr(xx, m, q1, j1)

  #linha m=p+1 identificada?
  l12 <- rbind(lags)[2, ((j1-2):j1)]
  if (sinal==1){ l11 <- rbind(lags)[1, (q1:(j1-3))]
    q2 <- q1}
  if (sinal==2){ l11 <- rbind(lags)[1, ((q1+1):(j1-3))]

```

```

        q2 <- 0}
    if (max(l11)!=q2 || sum(l12)>1) pont<-0
    invisible(pont)
}
#m=p+2

if (pont==1){
  m <- p+2
  q1 <- q+2
  xx <- x
  for (i in 1:m) xx <- ts.intersect(xx,lag(x,-i))
  lags <- regr(xx,m,q1,j1)

  #linha m=p+2 identificada?
  l12 <- rbind(lags)[2,((j1-2):j1)]
  if (sinal==1){ l11 <- rbind(lags)[1,(q1:(j1-3))]
                q2 <- q1}
  if (sinal==2){ l11 <- rbind(lags)[1,((q1+1):(j1-3))]
                q2 <- 0}
  if (max(l11)!=q2 || sum(l12)>1) pont<-0
  invisible(pont)
}

#m=p+3

if (pont==1){
  m <- p+3
  q1 <- q+3
  xx <- x
  for (i in 1:m) xx <- ts.intersect(xx,lag(x,-i))
  lags <- regr(xx,m,q1,j1)

  #linha m=p+3 identificada?
  l12 <- rbind(lags)[2,((j1-2):j1)]
  if (sinal==1){ l11 <- rbind(lags)[1,(q1:(j1-3))]
                q2 <- q1}
  if (sinal==2){ l11 <- rbind(lags)[1,((q1+1):(j1-3))]
                if ((q1+1)>(j1-3)) l11 <- 0
                q2 <- 0}
  if (max(l11)!=q2 || sum(l12)>1) pont<-0
  invisible(pont)
}

#Modelo identificado?

band <- "v"
if (pont==0){
  band <- "f"
  invisible(band)
}
band
}

#Programa principal - SIMULAÇÃO

```

```

#Reter a semente
#sarma12 <- .Random.seed
.Random.seed <- sarma12

nsim <- 1000
outt <- numeric(nsim)

tp1 <- paste("outt[",1:200,"] <- imod()",sep="")
eval(parse(text=tp1))
tp11 <- "ja tp1"
tp11
length(outt[outt=="v"])

tp2 <- paste("outt[",201:400,"] <- imod()",sep="")
eval(parse(text=tp2))
tp22 <- "ja tp2"
tp22
length(outt[outt=="v"])

tp3 <- paste("outt[",401:600,"] <- imod()",sep="")
eval(parse(text=tp3))
tp33 <- "ja tp3"
tp33
length(outt[outt=="v"])

tp4 <- paste("outt[",601:800,"] <- imod()",sep="")
eval(parse(text=tp4))
tp44 <- "ja tp4"
tp44
length(outt[outt=="v"])

tp5 <- paste("outt[",801:1000,"] <- imod()",sep="")
eval(parse(text=tp5))
length(outt[outt=="v"])

#Percentagem de modelos correctamente identificados

(length(outt[outt=="v"])/nsim)*100

```

Programa 2:

```

#MODELOS ARMA(p,q) CONSIDERADOS PARA O PROGRAMA 1 (A PORÇÃO DO
#PROGRAMA 1 ASSINALADA A VERDE É SUBSTITUÍDA PELO MODELO PRETENDIDO)

#(0,1) - sarma01

p <- 0
q <- 1

tetal <-

x <- numeric(n+100)

t1 <- max(p,q)

```

```
for (i in (t1+1):(n+100)) x[i] <- at[i]-tetal*at[i-1]

#(0,2) - sarma02

p <- 0
q <- 2

tetal <-
teta2 <-

x <- numeric(n+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+100)) x[i] <- at[i]-tetal*at[i-1]-teta2*at[i-2]

#(1,0) - sarma10

p <- 1
q <- 0

phil <-

x <- numeric(n+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+100)) x[i] <- phil*x[i-1]+at[i]

#(2,0) - sarma20

p <- 2
q <- 0

phil <-
phi2 <-

x <- numeric(n+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+100)) x[i] <- phil*x[i-1]+phi2*x[i-2]+at[i]

#(1,1) - sarma11

p <- 1
q <- 1

phil <-

tetal <-

x <- numeric(n+100)

t1 <- max(p,q)
```


Programa 3:

#GERAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS POLINÓMIOS PHI(B)-p E TETA(B)-q PARA OS
#MODELOS ARMA(p,q) CONSIDERADOS NO PROGRAMA 1 COM MOD(B)>=1.5

```
options(expressions=20000)
```

```
#ordens dos polinômios
```

```
p<-2
```

```
q<-2
```

```
#POLINÓMIOS
```

```
#Polinômio phi(B)-p
```

```
phil<-0
```

```
phi2<-0
```

```
raizphi<-0
```

```
polinp<-" "
```

```
if (p==1){
```

```
  polinp<-"polin.: 1-phil.B"
```

```
  psi<-round(runif(1,0,1),2)
```

```
  if (psi<0.5) phil<-round(runif(1,0.1,0.66),2) else
```

```
                                phil<-round(runif(1,-0.66,-0.1),2)
```

```
  invisible(phil)
```

```
  raizphi<-Mod(polyroot(c(1,-phil)))
```

```
}
```

```
if (p==2){
```

```
  polinp<-"polin.: 1-phil.B-phi2.B^2"
```

```
  band<-0
```

```
  while (band==0){
```

```
    psi1<-round(runif(1,0,1),2)
```

```
    if (psi1<0.5) phi2<-round(runif(1,0.1,0.44),2) else
```

```
                                phi2<-round(runif(1,-0.44,-0.1),2)
```

```
    invisible(phi2)
```

```
    ls<-round(0.66-1.5*phi2,2)
```

```
    li<-round(1.5*phi2-0.66,2)
```

```
    if (ls>=0.1 && li<=-0.1){
```

```
      psi2<-round(runif(1,0,1),2)
```

```
      if (psi2<0.5) phil<-round(runif(1,0.1,ls),2) else
```

```
                                phil<-round(runif(1,li,-0.1),2)
```

```
      invisible(phil)
```

```
      raizphi<-Mod(polyroot(c(1,-phil,-phi2)))
```

```
      if (Mod(phil-phi2)>=0.1) band<-1
```

```
    }
```

```
  }
```

```
#Polinômio teta(B)-q
```

```
teta1<-0
```

```
teta2<-0
```

```
raizteta<-0
```

```

polint<-" "

if (q==1){
  polint<-"polin.: 1-teta1.B"
  psi<-round(runif(1,0,1),2)
  if (psi<0.5) teta1<-round(runif(1,0.1,0.66),2) else
    teta1<-round(runif(1,-0.66,-0.1),2)
  invisible(teta1)
  raizteta<-Mod(polyroot(c(1,-teta1)))
}

if (q==2){
  polint<-"polin.: 1-teta1.B-teta2.B^2"
  band<-0
  while (band==0){
    psi1<-round(runif(1,0,1),2)
    if (psi1<0.5) teta2<-round(runif(1,0.1,0.44),2) else
      teta2<-round(runif(1,-0.44,-0.1),2)
    invisible(teta2)
    ls<-round(0.66-1.5*teta2,2)
    li<-round(1.5*teta2-0.66,2)
    if (ls>=0.1 && li<=-0.1){
      psi2<-round(runif(1,0,1),2)
      if (psi2<0.5) teta1<-round(runif(1,0.1,ls),2) else
        teta1<-round(runif(1,li,-0.1),2)
      invisible(teta1)
      raizteta<-Mod(polyroot(c(1,-teta1,-teta2)))
      if (Mod(teta1-teta2)>=0.1) band<-1
    }
  }
}

"p";p
polinp
"phi1";phi1
"phi2";phi2
"raizes";raizphi

"q";q
polint
"teta1";teta1
"teta2";teta2
"raizes";raizteta

```

ANEXO 3

Neste anexo são apresentados os programas em Splus Versão 3.3 para Windows utilizados no estudo de simulação realizado no capítulo 4, secção 4.2, sobre a identificação de modelos de função transferência bivariados racionais $(r,s,b) \times (p,q)$ através da função de autocorrelação estendida amostral generalizada.

Programa 1:

```
#SIMULAÇÃO DE 1000 CONJUNTOS DE DUAS SÉRIES TEMPORAIS RELACIONADAS POR
#UM DADO MODELO DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA BIVARIADO RACIONAL
#(r,s,b)(p,q) E IDENTIFICAÇÃO DO MODELO CONSIDERADO ATRAVÉS DA FUNÇÃO
#DE AUTOCORRELAÇÃO ESTENDIDA GENERALIZADA AMOSTRAL
```

```
#1ª função - cálculo dos valores da faceg e sua significância
#estatística
```

```
esacf <- function(y,q,r,k) {
  pont0 <- 0
  pont01 <- 1
  pont02 <- 1
  pont03 <- 1
  ny <- length(y)
  fac <- acf(y, lag.max=k, type="correlation", plot=F)
  facc <- rbind(fac$lag, fac$acf) [, (1:(k+1))]
  fact1 <- numeric(ncol(facc))
  fact2 <- numeric(ncol(facc))
  for (i in 1:ncol(facc)){
    if (facc[1,i]==(r+q)) fact1[i] <-
      facc[2,i]*sqrt(ny)/1.25
    if (facc[1,i]>(r+q)) fact2[i] <-
      facc[2,i]*sqrt(ny)/1.96
  }
  u1 <- numeric(length(fact1))
  u2 <- numeric(length(fact2))
  for (i in 1:ncol(facc)){
    if (Mod(fact1[i])>1) u1[i] <- facc[1,i]
    if (Mod(fact2[i])>1) u2[i] <- facc[1,i]
  }
  if (max(u1)!=(r+q)) pont01 <- 0
  if (max(u2)!=0) pont02 <- 0
  facc1 <- facc[2, (2:(r+q+1))]
  if (r==0 & q==0) facc1 <- 0
  facc2 <- facc[2, ((r+q+2):(k+1))]
  estqy <- (ny/(2*sum(facc1^2)+1))*sum(facc2^2)
  if (estqy>qchisq(.95,k-r-q)) pont03 <- 0
```

```

        if (pont01==1 & (pont02==1 || pont03==1)) pont0 <- 1
      }

#2ª função

idmod <- function(){

#Geração de modelos de função transferência

options(expressions=20000)

#Número de observações e parâmetro de defasamento

n <- 300
b <- 3

#simulação das séries input-alpha e residual-at -> ruídos brancos

k1 <- 36
flag <- 0
qalfa <- 0
qat <- 0
qfcc <- 0
while (flag==0)
{ #Simulação: alpha-input e at - resíduos, ruídos brancos gaus.(0,dv)

  alpha <- arima.sim(model=list(ar=0),n=n+b+100)
  alpha <- alpha-mean(alpha)

  tmp <- rnorm(2000)
  at <- arima.sim(model=list(ar=0),n=n+b+100)
  at <- at-mean(at)

#Cálculo das FAC de alpha e at e FCC entre alpha e at - fcct
rbs <- cbind(alpha,at)
fcct <- acf(rbs,lag.max=k1,type="correlation",plot=F)

alffac <- rbind(fcct$acf)[,(2:(k1+1))]
atfac <- rbind(fcct$acf)[,((3*(k1+1)+2):(4*(k1+1)))]
fcc <- rbind(fcct$acf)[,((k1+3):(2*(k1+1)))]

#Cálculo das estat. Q
alfacq <- numeric(k1)
for (i in 1:k1) alfacq[i] <- alffac[i]^2/(n+b+100-i)
qalpha <- sum(alfacq)*(n+b+100)*(n+b+100+2)

afacq <- numeric(k1)
for (i in 1:k1) afacq[i] <- atfac[i]^2/(n+b+100-i)
qat <- sum(afacq)*(n+b+100)*(n+b+100+2)

qfcc <- sum(fcc^2)*(n+b+100)

#alpha e at ruídos brancos não correlacionados?
#teste portmanteau - Qui-quadrado a .95 com 36 gl (k1=36 lags)

```

```
    if (qalpha<=qchisq(.95,k1) & qat<=qchisq(.95,k1) &
        qfcc<=qchisq(.95,k1))
      flag <- 1
  }

#Parâmetros e construção da série residual eta - ARMA(p,q)

#(0,2)

p <- 0
q <- 2

teta1 <- -0.14
teta2 <- 0.35

eta <- numeric(n+b+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <- at[i]-teta1*at[i-1]-
    teta2*at[i-2]

eta <- eta-mean(eta)

#Parâmetros para as séries input e output e construção da série
#output-beta

#(2,1,b) - salpha7

r <- 2
s <- 1

delt1 <- 0.96
delt2 <- -0.37

om0 <- -0.84
om1 <- 0.52

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- delt1*beta[i-1] + delt2*beta[i-2] + om0*alpha[i-b] +
    om1*alpha[i-b-1] + eta[i] - delt1*eta[i-1] -
    delt2*eta[i-2]

beta <- beta-mean(beta)

#séries output e input finais

beta <- beta[-(1:(b+100))]
beta <- beta-mean(beta)
alpha <- alpha[-(1:(b+100))]
alpha <- alpha-mean(alpha)
```

```

beta <- rts(beta)
alpha <- rts(alpha)

#Regressões iteradas e identificação do modelo

k <- 10

#p+s

ps <- p+s

#m=p+r

m <- p+r
mx <- max(m,b+ps)

#Apontador

pont <- 1

#j = 0

j <- 0
zz <- beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}

for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy <- zz
reg0 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[,-1])
res0 <- rts(residuals(reg0))
if (j>=max(ps,r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg0)[i]*yy[,i+1]
  pont1 <- esacf(y,q,r,k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}

#j = 1

if (pont==1) {
  j <- 1
  zz <- beta
  if (m>0) {
    for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
    invisible(zz)
  }
  for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
  yy <- zz

```

```

zz <- ts.intersect(zz, lag(res0, -(mx+j)))
reg1 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
res1 <- rts(residuals(reg1))
if (j>=max(ps,r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg1)[i]*yy[,i+1]
  pont1 <- esacf(y,q,r,k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

#j = 2

if (pont==1) {
j <- 2
zz <- beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy <- zz
zz <- ts.intersect(zz, lag(res1, -(mx+j)), lag(res0, -(mx+j)))
reg2 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
res2 <- rts(residuals(reg2))
if (j>=max(ps,r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg2)[i]*yy[,i+1]
  pont1 <- esacf(y,q,r,k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

#j = 3

if (pont==1) {
j <- 3
zz <- beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy <- zz
zz <- ts.intersect(zz, lag(res2, -(mx+j)), lag(res1, -(mx+j)),
  lag(res0, -(mx+j)))
reg3 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
res3 <- rts(residuals(reg3))
if (j>=max(ps,r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg3)[i]*yy[,i+1]
  pont1 <- esacf(y,q,r,k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

```

```

}

#j = 4

if (pont==1) {
j <- 4
zz <- beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy <- zz
zz <- ts.intersect(zz, lag(res3, -(mx+j)), lag(res2, -(mx+j)),
                  lag(res1, -(mx+j)), lag(res0, -(mx+j)))
reg4 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
res4 <- rts(residuals(reg4))
if (j>=max(ps, r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg4)[i]*yy[, i+1]
  pont1 <- esacf(y, q, r, k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

#j = 5

if (pont==1) {
j <- 5
zz <- beta
if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz, lag(beta, -i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz, lag(alpha, -b-i))
yy <- zz
zz <- ts.intersect(zz, lag(res4, -(mx+j)), lag(res3, -(mx+j)),
                  lag(res2, -(mx+j)), lag(res1, -(mx+j)),
                  lag(res0, -(mx+j)))
reg5 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
res5 <- rts(residuals(reg5))
if (j>=max(ps, r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg5)[i]*yy[, i+1]
  pont1 <- esacf(y, q, r, k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

#j = 6

if (pont==1) {
j <- 6
zz <- beta

```

```

if (m>0) {
  for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
  invisible(zz)
}
for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
yy <- zz
zz <- ts.intersect(zz,lag(res5,-(mx+j)),lag(res4,-(mx+j)),
                  lag(res3,-(mx+j)),lag(res2,-(mx+j)),
                  lag(res1,-(mx+j)),lag(res0,-(mx+j)))
reg6 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
res6 <- rts(residuals(reg6))
if (j>=max(ps,r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg6)[i]*yy[,i+1]
  pont1 <- esacf(y,q,r,k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

```

```
#j = 7
```

```

if (pont==1) {
  j <- 7
  zz <- beta
  if (m>0) {
    for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
    invisible(zz)
  }
  for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
  yy <- zz
  zz <- ts.intersect(zz,lag(res6,-(mx+j)),lag(res5,-(mx+j)),
                    lag(res4,-(mx+j)),lag(res3,-(mx+j)),
                    lag(res2,-(mx+j)),lag(res1,-(mx+j)),
                    lag(res0,-(mx+j)))
  reg7 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[, -1])
  res7 <- rts(residuals(reg7))
  if (j>=max(ps,r+q)) {
    y <- yy[,1]
    for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg7)[i]*yy[,i+1]
    pont1 <- esacf(y,q,r,k)
    pont <- pont1
    invisible(pont)
  }
}

```

```
#j = 8
```

```

if (pont==1) {
  j <- 8
  zz <- beta
  if (m>0) {
    for (i in 1:m) zz <- ts.intersect(zz,lag(beta,-i))
    invisible(zz)
  }
  for (i in 0:ps) zz <- ts.intersect(zz,lag(alpha,-b-i))
  yy <- zz

```

```

zz <- ts.intersect(zz, lag(res7, -(mx+j)), lag(res6, -(mx+j)),
                  lag(res5, -(mx+j)), lag(res4, -(mx+j)),
                  lag(res3, -(mx+j)), lag(res2, -(mx+j)),
                  lag(res1, -(mx+j)), lag(res0, -(mx+j)))
reg8 <- lm(zz[,1] ~ -1 + zz[,-1])
res8 <- rts(residuals(reg8))
if (j>=max(ps,r+q)) {
  y <- yy[,1]
  for (i in 1:(m+ps+1)) y <- y - coef(reg8)[i]*yy[,i+1]
  pont1 <- esacf(y,q,r,k)
  pont <- pont1
  invisible(pont)
}
}

#Modelo identificado?

band <- "V"
if (pont==0) {
  band <- "F"
  invisible(band)
}
band
}

#Programa principal - SIMULAÇÃO

#Reter a semente

#salpha <- .Random.seed
.Random.seed <- salpha7

nsim <- 1000
out <- numeric(nsim)

tmp1 <- paste("out[",1:200,"] <- idmod()",sep="")
eval(parse(text=tmp1))
t1 <- "ja tmp1"
t1
length(out[out == "V"])

tmp2 <- paste("out[",201:400,"] <- idmod()",sep="")
eval(parse(text=tmp2))
t2 <- "ja tmp2"
t2
length(out[out == "V"])

tmp3 <- paste("out[",401:600,"] <- idmod()",sep="")
eval(parse(text=tmp3))
t3 <- "ja tmp3"
t3
length(out[out == "V"])

tmp4 <- paste("out[",601:800,"] <- idmod()",sep="")
eval(parse(text=tmp4))
t4 <- "ja tmp4"
t4

```

```

length(out[out == "V"])

tmp5 <- paste("out[",801:1000,"] <- idmod()",sep="")
eval(parse(text=tmp5))
length(out[out == "V"])

#PERCENTAGEM DE MODELOS CORRECTAMENTE IDENTIFICADOS

"Percentagem de modelos correctamente identificados"
(length(out[out == "V"])/nsim)*100

```

Programa 2:

```

#SÉRIES RESIDUAIS ARMA(p,q) E MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA
#BIVARIADOS RACIONAIS (r,s,b)(p,q) CONSIDERADOS PARA O PROGRAMA 1 (AS
#PORÇÕES DO PROGRAMA 1 ASSINALADAS A VERDE SÃO, RESPECTIVAMENTE,
#SUBSTITUÍDAS PELA SÉRIE RESIDUAL E PELO MODELO DE FUNÇÃO
#TRANSFERÊNCIA PRETENDIDOS)

#1. SERIES RESIDUAIS: ARMA(p,q)

#(0,1)

p <- 0
q <- 1

tetal <-

eta <- numeric(n+b+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <- at[i]-tetal*at[i-1]

#(0,2)

p <- 0
q <- 2

tetal <-
teta2 <-

eta <- numeric(n+b+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <- at[i]-tetal*at[i-1]-
teta2*at[i-2]

#(1,0)

p <- 1

```

```

q <- 0
phil <-
eta <- numeric(n+b+100)
t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <-phil*eta[i-1]+at[i]

#(2,0)

p <- 2
q <- 0

phil <-
phi2 <-
eta <- numeric(n+b+100)
t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <-phil*eta[i-1]+phi2*eta[i-2]+at[i]

#(1,1)

p <- 1
q <- 1

phil <-
tetal <-
eta <- numeric(n+b+100)
t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <-phil*eta[i-1]+at[i]-tetal*at[i-1]

#(1,2)

p <- 1
q <- 2

phil <-
tetal <-
teta2 <-
eta <- numeric(n+b+100)
t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <-phil*eta[i-1]+at[i]-tetal*
at[i-1]-teta2*at[i-2]

```

```
#(2,1)

p <- 2
q <- 1

phi1 <-
phi2 <-

tetal <-

eta <- numeric(n+b+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <-phi1*eta[i-1]+phi2*
                                eta[i-2]+at[i]-tetal*at[i-1]

#(2,2)

p <- 2
q <- 2

phi1 <-
phi2 <-
tetal <-
teta2 <-

eta <- numeric(n+b+100)

t1 <- max(p,q)

for (i in (t1+1):(n+b+100)) eta[i] <-phi1*eta[i-1]+phi2*eta[i-2]+
                                at[i]-tetal*at[i-1]-teta2*at[i-2]

#2. MODELOS DE FUNCAO TRANSFERENCIA (r,s,b)

#(0,1,b) - salpha1

r <- 0
s <- 1

om0 <-
om1 <-

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r,(b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
    beta[i] <- om0*alpha[i-b] + om1*alpha[i-b-1] + eta[i]

#(0,2,b) - salpha2

r <- 0
s <- 2
```

```
om0 <-
om1 <-
om2 <-

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- om0*alpha[i-b] + om1*alpha[i-b-1] + om2*alpha[i-b-2] +
    eta[i]

#(1,0,b) - salpha3

r <- 1
s <- 0

delt1 <-

om0 <-

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- delt1*beta[i-1] + om0*alpha[i-b] + eta[i] -
    delt1*eta[i-1]

#(2,0,b) - salpha4

r <- 2
s <- 0

delt1 <-
delt2 <-

om0 <-

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- delt1*beta[i-1] + delt2*beta[i-2] + om0*alpha[i-b] +
    eta[i] -delt1*eta[i-1] - delt2*eta[i-2]

#(1,1,b) - salpha5

r <- 1
s <- 1

delt1 <-

om0 <-
om1 <-
```

```
beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))
for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- deltat1*beta[i-1] + om0*alpha[i-b] + om1*alpha[i-b-1] +
    eta[i] -deltat1*eta[i-1]

#(1,2,b) - salpha6

r <- 1
s <- 2

deltat1 <-

om0 <-
om1 <-
om2 <-

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- deltat1*beta[i-1] + om0*alpha[i-b] + om1*alpha[i-b-1] +
    om2*alpha[i-b-2] + eta[i] - deltat1*eta[i-1]

#(2,1,b) - salpha7

r <- 2
s <- 1

deltat1 <-
deltat2 <-

om0 <-
om1 <-

beta <- numeric(n+b+100)

b1 <- max(r, (b+s))

for (i in (b1+1):(n+b+100))
  beta[i] <- deltat1*beta[i-1] + deltat2*beta[i-2] + om0*alpha[i-b] +
    om1*alpha[i-b-1] + eta[i] - deltat1*eta[i-1] -
    deltat2*eta[i-2]

#(2,2,b) - salpha8

r <- 2
s <- 2

deltat1 <-
deltat2 <-

om0 <-
om1 <-
```

```

om2 <-
beta <- numeric(n+b+100)
bl <- max(r, (b+s))
for (i in (bl+1):(n+b+100))
  beta[i] <- del1*beta[i-1] + del2*beta[i-2] + om0*alpha[i-b] +
    om1*alpha[i-b-1] + om2*alpha[i-b-2] + eta[i] -
    del1*eta[i-1] - del2*eta[i-2]

```

Programa 3:

```

#GERAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS POLINÔMIOS PHI(B)-p E TETA(B)-q PARA AS
#SÉRIES RESIDUAIS ARMA(p,q) E DOS POLINÔMIOS DELTA(B)-r E OMEGA(B)-s
#PARA OS MODELOS DE FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA (r,s,b)(p,q) CONSIDERADOS NO
#PROGRAMA 1 COM MOD(B)>=1.5;
#CONSTRUÇÃO DOS POLINÔMIOS DELTA*(B)-p+r, OMEGA*(B)-p+s E TETA*(B)-
#r+q, VERIFICANDO SE MOD(B)>1

options(expressions=20000)

#ordens dos polinômios

r<-2
s<-1

p<-2
q<-2

pr<-p+r
ps<-p+s
rq<-r+q

#POLINÔMIOS

flag<-0
while (flag==0)
{ #Polinômios delta(B)-r
delta1<-0
delta2<-0
raizdelta<-0
polind<-" "

if (r==1){
  polind<-"polin.: 1-delta1.B"
  psi<-round(runif(1,0,1),2)
  if (psi<0.5) delta1<-round(runif(1,0.1,0.66),2) else
    delta1<-round(runif(1,-0.66,-0.1),2)
  invisible(delta1)
  raizdelta<-Mod(polyroot(c(1,-delta1)))
}

if (r==2){
  polind<-"polin.: 1-delta1.B-delta2.B^2"

```

```

band<-0
while (band==0){
  psi1<-round(runif(1,0,1),2)
  if (psi1<0.5) delta2<-round(runif(1,0.1,0.44),2) else
                                delta2<-round(runif(1,-0.44,-0.1),2)

  invisible(delta2)
  ls<-round(0.66-1.5*delta2,2)
  li<-round(1.5*delta2-0.66,2)
  if (ls>=0.1 && li<=-0.1){
    psi2<-round(runif(1,0,1),2)
    if (psi2<0.5) delta1<-round(runif(1,0.1,ls),2) else
                                delta1<-round(runif(1,li,-0.1),2)

    invisible(delta1)
    raizdelta<-Mod(polyroot(c(1,-delta1,-delta2)))
    if (Mod(delta1-delta2)>=0.1) band<-1
  }
}

#Polinómios omega(B)-s
omega0<-0
omega1<-0
omega2<-0
raizomega<-0
polino<-" "

#s=0
if (s==0) polino<-"polin.: omega0"

psi<-round(runif(1,0,1),2)
if (psi<0.5) {omega0<-round(runif(1,0.5,1.5),2);invisible(omega0)}
if (psi>=0.5) {omega0<-round(runif(1,-1.5,-0.5),2);invisible(omega0)}

if (s==1){
  polino<-"polin.: omega0+omega1.B"
  band<-0
  while (band==0){
    psi1<-round(runif(1,0,1),2)
    if (psi1<0.5) om1<-round(runif(1,0.1,0.66),2) else
                                om1<-round(runif(1,-0.66,-0.1),2)

    invisible(om1)
    omega1<-round(om1*omega0,2)
    raizomega<-Mod(polyroot(c(omega0,omega1)))
    if (Mod(omega1)>=0.1) band<-1
  }
}

if (s==2){
  polino<-"polin.: omega0+omega1.B+omega2.B^2"
  band<-0
  while (band==0){
    psi1<-round(runif(1,0,1),2)
    if (psi1<0.5) om2<-round(runif(1,0.1,0.44),2) else
                                om2<-round(runif(1,-0.44,-0.1),2)

    invisible(om2)
    ls<-round(0.66-1.5*om2,2)
    li<-round(1.5*om2-0.66,2)
    if (ls>=0.1 && li<=-0.1){
      psi2<-round(runif(1,0,1),2)

```

```

    if (psi2<0.5) om1<-round(runif(1,0.1,1s),2) else
                                om1<-round(runif(1,li,-0.1),2)
    invisible(om1)
    omega1<-round(-om1*omega0,2)
    omega2<-round(-om2*omega0,2)
    raizomega<-Mod(polyroot(c(omega0,omega1,omega2)))

    if (Mod(omega1)>=0.1 && Mod(omega2)>=0.1 &&
        Mod(omega1-omega2)>=0.1) band<-1
  }
}

#Polinómios phi(B)-p
phil<-0
phi2<-0
raizphi<-0
polinp<-" "

if (p==1){
  polinp<-"polin.: 1-phil.B"
  psi<-round(runif(1,0,1),2)
  if (psi<0.5) phil<-round(runif(1,0.1,0.66),2) else
                                phil<-round(runif(1,-0.66,-0.1),2)
  invisible(phil)
  raizphi<-Mod(polyroot(c(1,-phil)))
}

if (p==2){
  polinp<-"polin.: 1-phil.B-phi2.B^2"
  band<-0
  while (band==0){
    psil<-round(runif(1,0,1),2)
    if (psil<0.5) phi2<-round(runif(1,0.1,0.44),2) else
                                phi2<-round(runif(1,-0.44,-0.1),2)
    invisible(phi2)
    ls<-round(0.66-1.5*phi2,2)
    li<-round(1.5*phi2-0.66,2)
    if (ls>=0.1 && li<=-0.1){
      psi2<-round(runif(1,0,1),2)
      if (psi2<0.5) phil<-round(runif(1,0.1,1s),2) else
                                phil<-round(runif(1,li,-0.1),2)
      invisible(phil)
      raizphi<-Mod(polyroot(c(1,-phil,-phi2)))
      if (Mod(phil-phi2)>=0.1) band<-1
    }
  }
}

#Polinómios teta(B)-q
tetal<-0
teta2<-0
raizteta<-0

polint<-" "

if (q==1){
  polint<-"polin.: 1-tetal.B"
  psi<-round(runif(1,0,1),2)

```

```

if (psi<0.5) teta1<-round(runif(1,0.1,0.66),2) else
                                teta1<-round(runif(1,-0.66,-0.1),2)
invisible(teta1)
raizteta<-Mod(polyroot(c(1,-teta1)))
}

if (q==2){
  polint<-"polin.: 1-teta1.B-teta2.B^2"
  band<-0
  while (band==0){
    psil<-round(runif(1,0,1),2)
    if (psil<0.5) teta2<-round(runif(1,0.1,0.44),2) else
                                teta2<-round(runif(1,-0.44,-0.1),2)

    invisible(teta2)
    ls<-round(0.66-1.5*teta2,2)
    li<-round(1.5*teta2-0.66,2)
    if (ls>=0.1 && li<=-0.1){
      psi2<-round(runif(1,0,1),2)
      if (psi2<0.5) teta1<-round(runif(1,0.1,ls),2) else
                                teta1<-round(runif(1,li,-0.1),2)

      invisible(teta1)
      raizteta<-Mod(polyroot(c(1,-teta1,-teta2)))
      if (Mod(teta1-teta2)>=0.1) band<-1
    }
  }
}

```

#POLINÓMIOS ESTRELA

```

#Polinómio delta*(B)-p+r
deltaestr<-rbind(c(2,2,2,2))
coefd1<-0;coefd2<-0;coefd3<-0;coefd4<-0
rdeltestr<-100
if (pr==1){
  if (p==1) deltaestr[1]<-phi1 else deltaestr[1]<-delta1
  invisible(deltaestr[1])
  coefd1<-deltaestr[1]
  rdeltestr<-Mod(polyroot(c(1,-coefd1)))
}
if (pr==2){
  if (p==2){deltaestr[1]<-phi1;deltaestr[2]<-phi2}
  if (p==1){deltaestr[1]<-round(phi1+delta1,2);
            deltaestr[2]<-round(-phi1*delta1,2)}
  if (p==0){deltaestr[1]<-delta1;deltaestr[2]<-delta2}
  invisible(deltaestr[1]);invisible(deltaestr[2])
  coefd1<-deltaestr[1];coefd2<-deltaestr[2]
  rdeltestr<-Mod(polyroot(c(1,-coefd1,-coefd2)))
}
if (pr==3){
  if (p==2){deltaestr[1]<-round(phi1+delta1,2)
            deltaestr[2]<-round(phi2-phi1*delta1,2)
            deltaestr[3]<-round(-phi2*delta1,2)}
  if (p==1){deltaestr[1]<-round(phi1+delta1,2)
            deltaestr[2]<-round(delta2-phi1*delta1,2)
            deltaestr[3]<-round(-phi1*delta2,2)}
  invisible(deltaestr[1]);invisible(deltaestr[2])
  invisible(deltaestr[3])
  coefd1<-deltaestr[1];coefd2<-deltaestr[2];coefd3<-deltaestr[3]
}

```

```

rdeltestr<-Mod(polyroot(c(1,-coefd1,-coefd2,-coefd3)))
}
if (pr==4){
  deltaestr[1]<-round(phi1+delta1,2)
  deltaestr[2]<-round(phi2-phi1*delta1+delta2,2)
  deltaestr[3]<-round(-phi1*delta2-phi2*delta1,2)
  deltaestr[4]<-round(-phi2*delta2,2)
  invisible(deltaestr)
  coefd1<-deltaestr[1];coefd2<-deltaestr[2]
  coefd3<-deltaestr[3];coefd4<-deltaestr[4]
  rdeltestr<-Mod(polyroot(c(1,-coefd1,-coefd2,-coefd3,-coefd4)))
}

#Polinómio omega*(B)-p+s
omegaestr<-rbind(c(2,2,2,2,2))
coefo0<-0;coefo1<-0;coefo2<-0;coefo3<-0;coefo4<-0
romegestr<-100
if (ps==0) {omegaestr[1]<-omega0
  invisible(omegaestr[1])
  coefo0<-omegaestr[1]}
if (ps==1){
  if (p==1) {omegaestr[1]<-omega0;omegaestr[2]<-round(-phi1*omega0,2)}
  else {omegaestr[1]<-omega0;omegaestr[2]<-omega1}
  invisible(omegaestr[1]);invisible(omegaestr[2])
  coefo0<-omegaestr[1];coefo1<-omegaestr[2]
  romegestr<-Mod(polyroot(c(coefo0,coefo1)))
}
if (ps==2){
  if (p==2){omegaestr[1]<-omega0
  omegaestr[2]<-round(-phi1*omega0,2)
  omegaestr[3]<-round(-phi2*omega0,2)}
  if (p==1){omegaestr[1]<-omega0
  omegaestr[2]<-round(omega1-phi1*omega0,2)
  omegaestr[3]<-round(-phi1*omega1,2)}
  if (p==0){omegaestr[1]<-omega0
  omegaestr[2]<-omega1
  omegaestr[3]<-omega2}
  invisible(omegaestr[1]);invisible(omegaestr[2])
  invisible(omegaestr[3])
  coefo0<-omegaestr[1];coefo1<-omegaestr[2];coefo2<-omegaestr[3]
  romegestr<-Mod(polyroot(c(coefo0,coefo1,coefo2)))
}
if (ps==3){
  if (p==2){omegaestr[1]<-omega0
  omegaestr[2]<-round(-phi1*omega0+omega1,2)
  omegaestr[3]<-round(-phi2*omega0-phi1*omega1,2)
  omegaestr[4]<-round(-phi2*omega1,2)}
  if (p==1){omegaestr[1]<-omega0
  omegaestr[2]<-round(omega1-phi1*omega0,2)
  omegaestr[3]<-round(omega2-phi1*omega1,2)
  omegaestr[4]<-round(-phi1*omega2,2)}
  invisible(omegaestr[1]);invisible(omegaestr[2])
  invisible(omegaestr[3]);invisible(omegaestr[4])
  coefo0<-omegaestr[1];coefo1<-omegaestr[2]
  coefo2<-omegaestr[3];coefo3<-omegaestr[4]
  romegestr<-Mod(polyroot(c(coefo0,coefo1,coefo2,coefo3)))
}
if (ps==4){

```

```

omegaestr[1] <- omega0
omegaestr[2] <- round(omega1-phi1*omega0, 2)
omegaestr[3] <- round(omega2-phi1*omega1-phi2*omega0, 2)
omegaestr[4] <- round(-phi1*omega2-phi2*omega1, 2)
omegaestr[5] <- round(-phi2*omega2, 2)
invisible(omegaestr)
coefo0 <- omegaestr[1]; coefo1 <- omegaestr[2]; coefo2 <- omegaestr[3]
coefo3 <- omegaestr[4]; coefo4 <- omegaestr[5]
romegestr <- Mod(polyroot(c(coefo0, coefo1, coefo2, coefo3, coefo4)))
}

#Polinómio teta*(B)-r+q
tetaestr <- rbind(c(2, 2, 2, 2))
coeft1 <- 0; coeft2 <- 0; coeft3 <- 0; coeft4 <- 0
rtetaestr <- 100
if (rq==1) {
  if (r==1) tetaestr[1] <- delta1 else tetaestr[1] <- teta1
  invisible(tetaestr[1])
  coeft1 <- tetaestr[1]
  rtetaestr <- Mod(polyroot(c(1, -coeft1)))
}
if (rq==2) {
  if (r==2) {tetaestr[1] <- delta1; tetaestr[2] <- delta2}
  if (r==1) {tetaestr[1] <- round(delta1+teta1, 2);
              tetaestr[2] <- round(-delta1*teta1, 2)}
  if (r==0) {tetaestr[1] <- teta1; tetaestr[2] <- teta2}
  invisible(tetaestr[1]); invisible(tetaestr[2])
  coeft1 <- tetaestr[1]; coeft2 <- tetaestr[2]
  rtetaestr <- Mod(polyroot(c(1, -coeft1, -coeft2)))
}
if (rq==3) {
  if (r==2) {tetaestr[1] <- round(delta1+teta1, 2)
              tetaestr[2] <- round(delta2-delta1*teta1, 2)
              tetaestr[3] <- round(-delta2*teta1, 2)}
  if (r==1) {tetaestr[1] <- round(delta1+teta1, 2)
              tetaestr[2] <- round(teta2-delta1*teta1, 2)
              tetaestr[3] <- round(-delta1*teta2, 2)}
  invisible(tetaestr[1]); invisible(tetaestr[2]); invisible(tetaestr[3])
  coeft1 <- tetaestr[1]; coeft2 <- tetaestr[2]; coeft3 <- tetaestr[3]
  rtetaestr <- Mod(polyroot(c(1, -coeft1, -coeft2, -coeft3)))
}
if (rq==4) {
  tetaestr[1] <- round(delta1+teta1, 2)
  tetaestr[2] <- round(delta2-delta1*teta1+teta2, 2)
  tetaestr[3] <- round(-delta1*teta2-delta2*teta1, 2)
  tetaestr[4] <- round(-delta2*teta2, 2)
  invisible(tetaestr)
  coeft1 <- tetaestr[1]; coeft2 <- tetaestr[2]
  coeft3 <- tetaestr[3]; coeft4 <- tetaestr[4]
  rtetaestr <- Mod(polyroot(c(1, -coeft1, -coeft2, -coeft3, -coeft4)))
}

#Polinómios estrela com coefs.>=0.1 e raízes fora do círculo unitário?
mindelta <- min(Mod(deltaestr))
minomega <- min(Mod(omegaestr))
minteta <- min(Mod(tetaestr))
minrdestr <- min(rdeltestr)

```

```
minroestr<-min(romegestr)
minrtestr<-min(rtetaestr)
if (mindelta>=0.1 && minomega>=0.1 && minteta>=0.1 &&
    minrdestr>1 && minroestr>1 && minrtestr>1) flag<-1
if (pr==0) rdeltestr<-0
if (ps==0) romegestr<-0
if (rq==0) rtetaestr<-0
}
```

```
"r";r
polind
"delta1";delta1
"delta2";delta2
"raizes";raizdelta
```

```
"s";s
polino
"omega0";omega0
"omega1";omega1
"omega2";omega2
"raizes";raizomega
```

```
"p";p
polinp
"phi1";phi1
"phi2";phi2
"raizes";raizphi
```

```
"q";q
polint
"teta1";teta1
"teta2";teta2
"raizes";raizteta
```

```
"p+r";pr
"delta*(B)"
"delta1*";coefd1
"delta2*";coefd2
"delta3*";coefd3
"delta4*";coefd4
"raizes";rdeltestr
```

```
"p+s";ps
"omega*(B)"
"omega0*";coefo0
"omega1*";coefo1
"omega2*";coefo2
"omega3*";coefo3
"omega4*";coefo4
"raizes";romegestr
```

```
"r+q";rq
```

"teta*(B) "

"teta1*";coeft1

"teta2*";coeft2

"teta3*";coeft3

"teta4*";coeft4

"raizes";rtetaestr

Bibliografia

Anderson, T.W. (1971), "*The Statistical Analysis of Time Series*", John Wiley, New York.

Anderson, T.W. e Taylor, J.B. (1979), "Strong consistency of least squares estimates in dynamic models", *The Annals of Statistics*, 7, 484-489.

Ansley, C.F. e Newbold, P. (1979), "On the finite sample distribution of residual autocorrelations in autoregressive-moving average models", *Biometrika*, 66, 3, 547-553.

Bartlett, M.S. (1955), "*An Introduction to Stochastic Processes*", Cambridge University Press, Cambridge.

Box, G.E.P. e Pierce, D.A. (1970), "Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models", *Journal of American Statistical Association*, 65, 332, 1509-1525.

Box, G.E.P., Jenkins, G.M. e Reinsel, G.C. (1994), "*Time Series Analysis: Forecasting and Control*", Third Edition, Prentice Hall.

Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1990), "*Time Series: Theory and Methods*", Second Edition, Springer-Verlag.

Chatfield, C. (1984), "*The Analysis of Time Series: An Introduction*", Third Edition, Chapman and Hall, London.

Davis, R.A. e Resnick, S.I. (1986), "Limit theory for the sample covariance and correlation functions of moving averages", *The Annals of Statistics*, **14**, 533-558.

Draper, N. e Smith, H. (1981), "*Applied Regression Analysis*", Second Edition, Wiley-Interscience, New York.

Durbin, J. (1960), "The Fitting of Time Series Models", *Review of the International Statistical Institute*, **28**, 233-244.

Durbin, J. (1960), "Estimation of parameters in Time Series Regression Models", *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* **22**, 139-153.

Feller, W. (1971), "*An Introduction to Probability Theory and its Applications*", Vol. 2, Second Edition, John Wiley, New York.

Fuller, W.A. (1976), "*Introduction to Statistical Time Series*", John Wiley, New York.

Gersch, W. (1970), "Estimation of the autoregressive parameters of mixed Autoregressive Moving-Average Time Series", *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-15**, 583-588.

Graupe, D. (1980), "On convergence of least squares identifiers of autoregressive models having stable and unstable roots", *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-25**, 999-1002.

Grenander, U. e Rosenblatt, M. (1957), "*Statistical Analysis of Stationary Time Series*", John Wiley, New York.

Hannan, E.J. (1973), "The asymptotic theory of linear time series models", *Journal of Applied Probability*, **10**, 130-145.

Harvey, A.C. (1981), "*Time Series Models*", Halsted Press, New York.

Johnston, J. (1984), "*Econometrics Models*", Third Edition, McGraw Hill.

Jones, R.H. (1975), "Fitting autoregressions", *Journal of American Statistical Association*, **70**, 590-592.

Ljung, G.M. e Box, G.E.P. (1978), "On a measure of lack of fit in time series models", *Biometrika*, **65**, 2, 297-303.

Makridakis, S., Wheelrigh, S.E. e McGee, V. (1983), "*Forecasting: Methods and Applications*", John Wiley.

Mardia, K.V., Kent, J.T. e Bibby, J.M. (1979), "*Multivariate Analysis*", Academic Press.

Marquardt, P.W. (1963), "An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **2**, 431-441.

Montgomery, D.C., Johnson, L.A. (1976), "*Forecasting and Time Series Analysis*", McGraw Hill.

Montgomery, D.C. e Weatherby, G. (1980), "Modelling and forecast time series using transfer function and intervention methods", *AIIE Transactions*, 289-307.

Müller, D. e Wei, W.W.S (1993), "Iterative least-squares estimation and identification of the truncation transfer function model", Technical Report #93-08, Department of Statistics, School of Business and Management, Temple University, Philadelphia.

Müller, D. e Wei, W.W.S (1997), "Iterative least-squares estimation and identification of the transfer function model", *Journal of Time Series Analysis*, **18**, 6, 579-592.

Murteira, B.J.F., Müller, D. e Turkman, K.F. (1993), "*Análise de Sucessões Cronológicas*", McGraw-Hill.

Oliveira, C. e Müller, D. (1998), "Função de Autocorrelação Estendida Generalizada: contributo para a identificação dos Modelos de Função Transferência", Documento de

Trabalho nº 5 – 98, CEMAPRE – ISEG / UTL.

Oliveira, C. e Müller, D. (1999), “Generalized Extended Sample Autocorrelation Function: contribution to the identification of the Transfer Function Models” (artigo submetido ao *Journal of Time Series Analysis* em Dezembro de 1999).

Oliveira, C. e Müller, D. (2000), “Generalized Extended Sample Autocorrelation Function: contribution to the identification of the Transfer Function Models”, Documento de Trabalho nº 12 – 2000, CEMAPRE – ISEG / UTL.

Pankratz, A. (1983), “*Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models: Concepts and Cases*”, John Wiley.

Priestley, M.B. (1981), “*Spectral Analysis and Time Series*”, Vols. I e II, Academic Press, London.

Quenouille, M.H. (1957), “*The Analysis of Multiple Time Series*”, Griffin, London.

Searle, S.R. (1987), “*Matrix Algebra Useful for Statistics*”, Wiley and Sons, New York.

Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1983), “Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models”, *The Annals of Statistics*, **11**, 856-871.

Tsay, R.S. e Tiao, G.C. (1984), "Consistent Estimates of Autoregressive parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models", *Journal of American Statistical Association*, **79**, 385, 84-96.

Wei, W.W.S. (1990), "*Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*", Addison-Wesley.