

MATEMÁTICA 1

Maria da Graça Marcos
Alcinda Maria de Sousa Barreiras
Marisa João Oliveira

Guia de apoio ao estudo autónomo no ensino universitário



MATEMÁTICA I

Maria da Graça Marcos

Alcinda Maria de Sousa Barreiras

Marisa João Guerra Pereira de Oliveira





EDIÇÃO, DISTRIBUIÇÃO E VENDAS
SÍLABAS & DESAFIOS - UNIPESSOAL LDA.
NIF: 510212891
www.silabas-e-desafios.pt
info@silabas-e-desafios.pt

Sede:
Rua Dorília Carmona, nº 4, 4 Dt
8000-316 Faro
Telefone: 289805399
Encomendas: encomendar@silabas-e-desafios.pt

TÍTULO
MATEMÁTICA I

AUTORAS

Maria da Graça Marcos, Alcinda Maria de Sousa Barreiras e Marisa João
Guerra Pereira de Oliveira

1ª edição: outubro 2021

ISBN: 978-989-8842-58-9

Depósito legal: 490123/21

Pré-edição, edição, composição gráfica e revisão: Sílabas & Desafios
Unipessoal, Lda.

Pré-impressão, impressão e acabamentos: Gráfica Comercial, Loulé

Capa: Sílabas & Desafios @2021

Reservados todos os direitos. Reprodução proibida. A utilização de todo, ou partes, do texto, figuras, quadros, ilustrações e gráficos, por qualquer processo mecânico, fotográfico, eletrónico ou de gravação, ou qualquer outra forma copiada, para uso público ou privado (além do uso legal como citação em artigos, ensaios e críticas) deverá ter a autorização expressa dos autores. O autor assume toda e qualquer responsabilidade pela utilização de conteúdos ou imagens nos textos aqui incluídos, que violem e deixam de observar os direitos de autor. As designações de produtos, tecnologias e sistemas de qualidade referidos na presente obra são marcas registadas.

Índice

Introdução	7
------------	---

CAPÍTULO 1

CÁLCULO DIFERENCIAL	9
1.1 Derivada de Uma Função	11
1.1.1 Derivada de Uma Função Num Ponto	11
1.1.2 Função Derivada	20
1.2 Derivada da Função Composta	21
1.3 Derivada da Função Inversa	24
1.4 Funções Secante e Cossecante	26
1.4.1 Função Secante	26
1.4.2 Função Cossecante	28
1.5 Funções Trigonométricas Inversas e Suas Derivadas	29
1.5.1 Função Arco Seno	29
1.5.2 Função Arco Cosseno	35
1.5.3 Função Arco Tangente	40
1.5.4 Função Arco Cotangente	45
1.6 Derivada de Funções na Forma Implícita	50
1.7 Diferencial de Uma Função	56
1.8 Exercícios	61
1.8.1 Derivada de Uma Função	61
1.8.2 Derivada da Função Composta	65
1.8.3 Derivada da Função Inversa	67
1.8.4 Funções Trigonométricas Inversas	70

1.8.5 Derivada de Funções na Forma Implícita	76
1.8.5 Diferencial de Uma Função	80
1.8.6 Exercícios Suplementares	82
1.8.7 Exercícios de Conclusão do Capítulo	82

CAPÍTULO 2

CÁLCULO INTEGRAL	87
2.1 Integral Indefinido	89
2.1.1 Definição	89
2.1.2 Integrais Imediatos ou Quase Imediatos	96
2.1.3 Integração por Decomposição	107
2.1.4 Integração por Partes	117
2.1.5 Integração Por Mudança de Variável	124
2.2 Exercícios	135
2.2.1 Integrais Imediatos ou Quase Imediatos	135
2.2.2 Integração por Decomposição	141
2.2.3 Integração por Partes	145
2.2.4 Integração por Mudança de Variável	150
2.2.5 Exercícios de Conclusão do Capítulo	157

CAPÍTULO 3

INTEGRAL DEFINIDO	161
3.1 Definição	163
3.1.1 Somas de Riemann	163
3.1.2 Aplicação ao Cálculo de Áreas	164
3.1.3 O Integral Definido	170
3.2 Propriedades	174
3.3 Cálculo do Integral Definido	175
3.3.1 Integrais Definidos por Partes	184
3.3.2 Integrais Definidos Por Mudança de Variável	187

3.4	Aplicação ao Cálculo de Áreas	192
3.5	Integrais Impróprios	202
3.5.1	Integrais Impróprios de 1ª espécie	203
3.5.2	Integrais Impróprios de 2ª Espécie	208
3.6	Exercícios	213
3.6.1	Integral Definido	213
3.6.2	Integral Definido por Partes	218
3.6.4	Aplicação do Integral Definido ao Cálculo de Áreas	224
3.6.5	Integrais Impróprios	235
3.6.6	Exercícios de Conclusão do Capítulo	239

CAPÍTULO 4

SÉRIES		241
4.1	Séries Numéricas	243
4.1.1	Definições	243
4.1.2	Série Geométrica	248
4.1.3	Condição Necessária de Convergência	252
4.1.4	Propriedades Algébricas das Séries	256
4.1.5	Séries de Termos Positivos	259
4.1.5.1	Critério do Integral	260
4.1.5.2	Critério da Comparação-Convergência	262
4.1.5.3	Critério da Comparação-Divergência	265
4.1.5.4	Teste Limite de Comparação ou 2º Critério de Comparação	266
4.1.5.5	Critério da Razão ou Critério de D'Alembert	268
4.1.5.6	Teste da Raiz ou Regra de Cauchy	270
4.1.6	Convergência Absoluta	270
4.1.7	Séries Numéricas Alternadas	275
4.2	Séries de Funções	281
4.2.1	Definições	281
4.2.2	Séries de Potências	283

4.2.3 Séries de Taylor e de MacLaurin	287
4.2.4 Representação de Algumas Funções Por Série de MacLaurin	298
4.3 Exercícios	299
4.3.1 Série Geométrica	299
4.3.2 Séries de Termos Positivos	304
4.3.3 Séries Numéricas de Termos Alternados	308
4.3.4 Séries de Potências	309
4.3.5 Séries de Taylor e de MacLaurin	312
4.3.6 Exercícios de Conclusão do Capítulo	315

INTRODUÇÃO

Este livro pretende ser um contributo para as unidades curriculares de Matemática 1 ou Análise Matemática, focando aspetos considerados essenciais para os estudantes de engenharia e de ciências em geral de forma a fornecer conhecimentos base necessários para outras unidades curriculares.

Os seus conteúdos resultam em grande parte da experiência das autoras no ensino destas unidades curriculares nos vários cursos de Engenharia que são ministrados no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) e incluem o cálculo diferencial, o cálculo integral, as séries numéricas e séries de funções.

Foi escrito tendo como premissa básica o ser acessível para qualquer estudante do 1º ano do ensino superior, considerando as bases matemáticas apreendidas no ensino secundário. Assim sendo, na abordagem seguida, para além da exposição teórica, apresenta-se uma grande coleção de exemplos, exercícios resolvidos e exercícios de aplicação no fim de cada capítulo.

Focamo-nos no uso da teoria e das suas propriedades, optando-se por não apresentar as demonstrações matemáticas. No entanto, todas as definições e conceitos teóricos envolvidos são apresentados de uma forma rigorosa, e sempre que são introduzidos assuntos que a nossa experiência nos levou a considerar mais delicados, optou-se por uma abordagem mais detalhada e estruturada.

CAPÍTULO 1

CÁLCULO DIFERENCIAL

Neste capítulo relembramos alguns assuntos estudados no ensino secundário e estudamos outros novos. Revemos a definição de derivada e a sua interpretação geométrica, a derivada de uma função composta e a derivada da função inversa. Vamos a seguir estudar algumas funções trigonométricas, nomeadamente a função secante, cossecante e as funções trigonométricas inversas. Finalmente, vamos aprender a reconhecer funções dadas na forma implícita e a calcular a sua derivada e terminamos com a noção de diferencial de uma função num ponto, utilizado para fazer aproximações lineares.

Resultados de aprendizagem:

- Conhecer as funções trigonométricas inversas e suas derivadas.
- Calcular derivadas de funções dadas na forma implícita.
- Calcular o diferencial de uma função e utilizá-lo para o cálculo de aproximações.

1.1 Derivada de Uma Função

1.1.1 Derivada de Uma Função Num Ponto

Definição 1.1

[Declive ou coeficiente angular de uma reta não vertical]

Chama-se declive ou coeficiente angular de uma reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) ao número obtido pelo seguinte quociente,

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad (1.1)$$

Se conhecermos a inclinação da reta, isto é, o ângulo α que a reta faz com a parte positiva do eixo das abcissas, podemos calcular o declive da reta através da tangente trigonométrica do ângulo α , isto é,

$$m = \operatorname{tg}(\alpha) \quad (1.2)$$

Observação 1.1: Quando uma reta é vertical, ou seja, quando a sua inclinação é 90° , a tangente não está definida, pelo que não é possível atribuir ao declive um número real.

Definição 1.2

[Taxa média de variação de uma função, *t.m.v.*]

Seja $y = f(x)$ uma função e seja $I = [a, b]$ um intervalo contido no domínio da função. A taxa média de variação da função f no intervalo I , é dada por

$$t.m.v._{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1.3)$$

Interpretação geométrica:

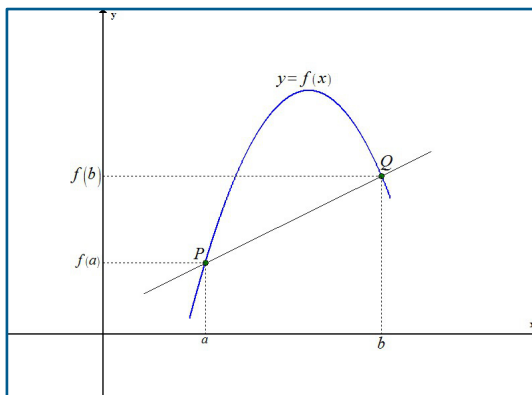


Figura 1.1 Interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função no intervalo $[a, b]$.

Observando a Figura 1.1, verificamos que a taxa média de variação da função f no intervalo $[a, b]$, corresponde ao valor numérico do declive da reta secante PQ , m_{PQ} ao gráfico de f , onde P é o ponto de coordenadas $(a, f(a))$ e Q é o ponto de coordenadas $(b, f(b))$, ou seja,

$$t.m.v_{[a, b]} = m_{PQ} \quad (1.4)$$

Definição 1.3

[Derivada de uma função num ponto]

Seja $y = f(x)$ uma função e seja x_0 um ponto do seu domínio. Chama-se derivada da função f em x_0 , $f'(x_0)$, ao limite (se existir)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.5)$$

A derivada da função $y = f(x)$ em x_0 representa-se normalmente por $f'(x_0)$, $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$

[Derivada de Uma Função Num Ponto]

Exemplo 1.1

Considere-se a função $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$. Determinar $f'(2)$.

Resolução

De acordo com (1.5), tem-se

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{7}}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{7(x - 2)(x^2 + 3)} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x - 2)(x^2 + 3)} = \\ &= -\frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + x}{x^2 + 3} = -\frac{4}{49} \\ \text{ou seja, } f'(2) &= -\frac{4}{49} \end{aligned}$$

Também é usual fazer-se $x = x_0 + h$, ficando então $x - x_0 = h$. Nesse caso, dizer que x tende para x_0 é equivalente a dizer que h tende para zero e, nesse caso, alternativamente à expressão (1.5), podemos usar a expressão

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.6)$$

CAPÍTULO 2

CÁLCULO INTEGRAL

Neste capítulo iniciamos o estudo do cálculo integral começando pelo integral indefinido. Começamos por definir a primitiva de uma função e de seguida usando a noção de primitiva definimos integral indefinido. Introduzimos então algumas propriedades fundamentais no cálculo integral e estudamos os chamados integrais imediatos e quase imediatos. Finalmente, vamos aprender algumas técnicas de integração: a integração por decomposição, por partes e por mudança de variável (ou substituição).

Resultados de aprendizagem:

- Reconhecer a primitiva de uma função.
- Calcular integrais imediatos ou quase imediatos.
- Calcular integrais usando técnicas de integração.

CAPÍTULO 3

INTEGRAL DEFINIDO

Neste capítulo estudamos o integral definido. O cálculo de integrais definidos é de importância fundamental devido às suas variadas aplicações, por exemplo, para o cálculo de áreas, volumes, comprimentos de linha, massa, etc. Na prática, o cálculo do integral definido de uma dada função é feito muito facilmente a partir duma primitiva dessa função, mas para melhor entendermos o seu significado, vamos construir este conceito a partir das somas de Riemann. Começamos então por definir soma de Riemann, a sua aplicação ao cálculo de áreas e de seguida apresentamos o integral definido como o limite de uma soma de Riemann. Introduzimos, então, algumas propriedades fundamentais do integral definido e de seguida passamos ao cálculo do integral definido usando primitivas. Finalmente, estudamos o cálculo de áreas de regiões planas utilizando integrais definidos e estendemos o conceito de integral definido a integrais sobre intervalos não limitados e a integrais em que a função integranda não é limitada no intervalo de integração (integrais impróprios).

Resultados de aprendizagem:

- Reconhecer uma soma de Riemann e a sua relação com o integral definido.
- Calcular integrais definidos: imediatos ou quase imediatos, por partes e por mudança de variável.
- Aplicar o integral definido ao cálculo de áreas.
- Reconhecer integrais impróprios, fazer a respectiva interpretação geométrica e proceder ao seu cálculo.

CAPÍTULO 4

SÉRIES

Neste capítulo estudamos as séries. Começamos por definir uma série numérica e de seguida estudamos alguns métodos para analisar a sua convergência. A série geométrica será estudada como um caso particular. Introduzimos depois as séries de potências e analisamos o seu intervalo de convergência. Finalmente, definimos as séries de Taylor e de MacLaurin e representamos algumas funções por série de Taylor e de MacLaurin

Resultados de aprendizagem:

- Analisar a convergência de uma série numérica usando os critérios abordados.
- Calcular o intervalo de convergência de uma série de potências.
- Representar funções usando séries de Taylor e de MacLaurin e calcular o respetivo intervalo de convergência.

MARIA DA GRAÇA MARCOS é licenciada em Matemática Aplicada/Ramo de Ciências de Computadores pela FCUP, mestre em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, perfil de Telecomunicações pela FEUP e doutorada na Área Científica de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, Matemática pela UTAD. É professora do ensino superior desde 1995.

MARISA JOÃO GUERRA PEREIRA DE OLIVEIRA é licenciada em Matemática pela FCUP, mestre em Matemática pela UP e doutorada em Engenharia Industrial e Gestão pela FEUP. É professora do ensino superior desde 1999.

ALCINDA MARIA DE SOUSA BARREIRAS é licenciada em Matemática pela FCUP, mestre em Estatística e Investigação Operacional pela FCUL. É professora do ensino superior desde 1990.

Este livro pretende ser um contributo para as unidades curriculares de Matemática 1 ou Análise Matemática, focando aspetos considerados essenciais para os estudantes de engenharia e de ciências em geral de forma a fornecer conhecimentos base necessários para outras unidades curriculares.

Os seus conteúdos resultam em grande parte da experiência das autoras no ensino destas unidades curriculares nos vários cursos de Engenharia que são ministrados no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) e incluem o cálculo diferencial, o cálculo integral, as séries numéricas e séries de funções.

