



# ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE BETÃO ARMADO ? PROCESSO DE CÁLCULO AUTOMÁTICO PARA O PROJETO DE ESTABILIDADE

DANIEL FILIPE SOUSA CASTANHEIRA

novembro de 2024

**ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS DE BETÃO  
ARMADO – PROCESSO DE CÁLCULO AUTOMÁTICO  
PARA O PROJETO DE ESTABILIDADE**

**DANIEL FILIPE SOUSA CASTANHEIRA**

**Estágio para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil, Área de Especialização  
em Estruturas**

**Orientador: Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro**

**Co-orientador: José Manuel Martins Ferreira dos Santos**

**Júri:**

Presidente:

Professora Doutora Maria Do Rosário Santos Oliveira, Professora Adjunta, ISEP

Vogais:

Professora Engenheira Isabel Maria Alvim Teles, Professora Adjunta, ISEP

Professor Doutor Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro, Professor Adjunto, ISEP

## DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

---

### DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter conduzido este trabalho académico com integridade. Não plagiei ou apliquei qualquer forma de uso indevido de informações ou falsificação de resultados ao longo do processo que levou à sua elaboração.

Declaro que o trabalho apresentado neste documento é original e de minha autoria, não tendo sido utilizado anteriormente para nenhum outro fim.

Declaro ainda que tenho pleno conhecimento do Código de Conduta Ética do P.PORTO.

*Daniel Castanheira*

ISEP, Porto, 4 de outubro de 2024

# Resumo

Este relatório resultou do estágio curricular colaborativo entre o Instituto Superior de Engenharia do Porto e a empresa MULTIPROJECTUS. Tem como objetivo desenvolver um processo de cálculo automático que analise e dimensione uma viga de betão armado. Para atingir este objetivo, usaram-se metodologias de cálculo presentes em Eurocódigos, de forma a realizar as verificações de segurança.

É explicado o processo de cálculo automático, desenvolvido na linguagem *Python*, em ambiente *Jupyter Notebook*. Através de um modelo inicial no *Autodesk Robot Structural Analysis*, é possível extrair aspetos geométricos e esforços da viga para o *Microsoft Excel*, com auxílio do *Visual Basic for Applications*, e posteriormente incorporá-los na linguagem *Python*, para análise e dimensionamento de uma viga e exportação de um relatório detalhado. O relatório contém o procedimento de cálculo, que auxilia o projetista a verificar a viabilidade de uma solução.

Por fim, a partir de um caso prático, é possível validar os valores resultantes deste processo com cálculos testados previamente no *Excel* e com *softwares* como o *XD-CoSec* e o *XD-ConServ*. Desta forma, confirma-se que o procedimento e a análise obtidos do relatório de cálculo são de confiança.

**Palavras-chave:** Processo de cálculo automático, dimensionamento, viga, *Robot*, *VBA*, *Python*



# Abstract

This report is the result of a collaborative curricular internship between the Instituto Superior de Engenharia do Porto and the company MULTIPROJECTUS. Its objective is to develop an automatic calculation process that analyses and sizes a reinforced concrete beam. To achieve this goal, calculation methodologies from Eurocodes were used to carry out the safety checks.

The automatic calculation process, developed in the Python language in the *Jupyter Notebook* environment, is explained. Using an initial model in *Autodesk Robot Structural Analysis*, it is possible to extract the geometric aspects and forces of the beam into *Microsoft Excel*, with the help of *Visual Basic for Applications*, and then incorporate them into the *Python* language to analyse and dimensioning a beam and export a detailed report. The report contains the calculation procedure, which helps the designer to check the feasibility of a solution.

Finally, using a practical case, it is possible to validate the values resulting from this process with calculations previously tested in *Excel* and with software such as *XD-CoSec* and *XD-ConServ*. In this way, it is confirmed that the procedure and analysis obtained from the calculation report are reliable.

**Keywords:** Automatic calculation process, dimensioning, beam, *Robot*, *VBA*, *Python*



# Agradecimentos

Agradeço a todos os que tornaram possível a elaboração deste estágio, projeto e tese de mestrado.

À colaboração e ajuda dos engenheiros do ISEP, em particular o engenheiro Diogo Ribeiro, que sempre acompanhou o desenvolvimento do projeto, e o engenheiro Paulo Guedes, que forneceu material essencial para consulta.

Ao engenheiro José Santos, como representante da MULTIPROJECTUS, que sempre me apoiou e esteve disponível para desenvolver o projeto de estágio e me ajudou a integrar no ambiente empresarial.

À minha família, que tenho grande estima e carinho, e que sempre me apoiaram e ajudaram sempre que foi necessário, em particular os meus pais, o meu irmão, avós, primos e tios.

Ao meu tio, o Dr. Sérgio Sousa, que trabalha na Garcia, e se disponibilizou a dar-me transporte todos os dias para Santo Tirso e esteve sempre presente para dar qualquer tipo de apoio.

E a todos os que estiveram presentes na defesa da tese.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações Iniciais.....	1
1.2	Objetivos .....	2
1.3	MULTIPROJECTUS.....	3
1.4	Estrutura da tese.....	4
<b>2</b>	<b>Enquadramento regulamentar .....</b>	<b>5</b>
2.1	Regulamentação base .....	6
2.2	Estados limites últimos .....	9
2.2.1	Flexão.....	9
2.2.2	Esforço transverso .....	13
2.3	Estados limites de utilização .....	13
2.3.1	Fendilhação.....	13
2.3.2	Deformação.....	15
2.4	Disposições construtivas.....	20
2.4.1	Regras gerais .....	20
2.4.2	Regras particulares .....	21
<b>3</b>	<b>Desenvolvimento de procedimento de cálculo automático em linguagem <i>Python</i> .....</b>	<b>23</b>
3.1	Descrição do processo .....	25
3.2	Procedimento de verificação de segurança.....	34
3.2.1	Estados limites últimos .....	34
3.2.2	Estados limites de utilização.....	36
3.3	Exportação do relatório de cálculo.....	38
<b>4</b>	<b>Integração do processo de cálculo em softwares de modelação AEC .....</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>Caso Prático.....</b>	<b>47</b>
5.1	Processo de cálculo.....	47
5.2	Validação .....	62
<b>6</b>	<b>Considerações finais.....</b>	<b>79</b>
6.1	Conclusões .....	79
6.2	Desenvolvimentos futuros.....	80

<b>Referências .....</b>	<b>81</b>
<b>Anexo .....</b>	<b>83</b>

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Exemplo de um edifício modelado no <i>Robot</i> (Castanheira, et al., 2023).....	1
Figura 1.2 – Empresas parceiras da MULTIPROJECTUS (Castanheira, et al., 2020) .....	3
Figura 2.1 – Esquema dos conteúdos do capítulo 2 .....	5
Figura 2.2 – Distribuição das tensões em parábola e retângulo.....	10
Figura 2.3 – Distribuição bilinear das tensões .....	11
Figura 2.4 – Distribuição retangular das tensões.....	12
Figura 2.5 – Esquema de cálculo os valores de $\sigma_s$ e $\rho_p, eff$ (Félix, et al., 2013).....	14
Figura 2.6 – Esquema de cálculo da deformação (CACHIM, et al., 2013) .....	17
Figura 3.1 – Esquema das 3 fases do processo de cálculo .....	23
Figura 3.2 – Ligação sequencial entre os 3 programas .....	24
Figura 3.3 – Esquema dos conteúdos do capítulo 3 .....	24
Figura 3.4 – Esquema de sugestão de armadura transversal .....	29
Figura 3.5 – Esquema de sugestão de armadura longitudinal.....	31
Figura 3.6 – Imagem ilustrativa da disposição das armaduras transversais .....	32
Figura 3.7 – Imagem ilustrativa da disposição das armaduras longitudinais.....	32
Figura 3.8 – Exemplos de cortes transversais da viga com as disposições de armaduras adotadas em várias secções.....	33
Figura 3.9 – Fluxograma de decisões a tomar no processo de análise e dimensionamento na linguagem <i>Python</i> .....	39
Figura 4.1 – Valores a introduzir na primeira folha do <i>Excel</i> .....	42
Figura 5.1 – As 3 vigas modeladas no <i>Robot</i> .....	48
Figura 5.2 – Diagramas de momento fletor e esforço transversal para o estado limite último no <i>Robot</i>	50
Figura 5.3 – Diagrama de deformação para o estado limite último no <i>Robot</i> .....	50
Figura 5.4 – Valores iniciais extraídos do <i>Robot</i> .....	51
Figura 5.5 – INPUT de valores no <i>Jupyter Notebook</i> .....	55
Figura 5.6 – Valor recomendado para armadura transversal das vigas 1 a 3 .....	55
Figura 5.7 – Valores recomendados para armadura longitudinal inferior da viga 1 .....	56
Figura 5.8 – Diagrama de armaduras longitudinais da viga 1 .....	57
Figura 5.9 – Diagrama de armaduras longitudinais da viga 2 .....	57
Figura 5.10 – Diagrama de armaduras longitudinais da viga 3 .....	57
Figura 5.11 – Diagrama de fendilhação da viga 1 .....	61
Figura 5.12 – Diagrama de fendilhação da viga 2 .....	61
Figura 5.13 – Diagrama de fendilhação da viga 3 .....	61
Figura 5.14 – Cálculos intermédios e valor do coeficiente de fluência no <i>Excel</i> .....	62

Figura 5.15 – Cálculos intermédios e valor do coeficiente de fluência no relatório .....	63
Figura 5.16 – Cálculos intermédios e valor de retração no Excel .....	64
Figura 5.17 – Cálculos intermédios e valor de retração no relatório.....	64
Figura 5.18 – Valores de flexão na viga 1 no <i>XD-CoSec</i> .....	65
Figura 5.19 – Valores de flexão na viga 1 no relatório.....	65
Figura 5.20 – Valores de flexão na viga 2 no <i>XD-CoSec</i> .....	66
Figura 5.21 – Valores de flexão na viga 2 no relatório.....	66
Figura 5.22 – Valores de flexão na viga 3 no <i>XD-CoSec</i> .....	67
Figura 5.23 – Valores de flexão na viga 3 no relatório.....	67
Figura 5.24 – Valores de esforço transversal no <i>XD-CoSec</i> .....	68
Figura 5.25 – Valores de esforço transversal no relatório.....	68
Figura 5.26 – Valor de fendilhação na viga 1 no <i>XD-ConServ</i> .....	69
Figura 5.27 – Valor de fendilhação na viga 2 no <i>XD-ConServ</i> .....	69
Figura 5.28 – Valor de fendilhação positiva na viga 3 no <i>XD-ConServ</i> .....	69
Figura 5.29 – Valor de fendilhação negativa na viga 3 no <i>XD-ConServ</i> .....	69
Figura 5.30 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação na viga 1 no <i>Excel</i> .....	70
Figura 5.31 – Cálculos intermédios e valores da fendilhação na viga 1 no relatório .....	70
Figura 5.32 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação na viga 2 no <i>Excel</i> .....	71
Figura 5.33 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação na viga 2 no relatório .....	71
Figura 5.34 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação positiva na viga 3 no <i>Excel</i> .....	72
Figura 5.35 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação positiva na viga 3 no relatório .....	72
Figura 5.36 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação negativa na viga 3 no <i>Excel</i> .....	73
Figura 5.37 – Cálculos intermédios e valores da fendilhação negativa na viga 3 no relatório .....	73
Figura 5.38 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 1 no <i>Excel</i> .....	75
Figura 5.39 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 1 no relatório .....	75
Figura 5.40 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 2 no <i>Excel</i> .....	76
Figura 5.41 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 2 no relatório .....	76
Figura 5.42 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 3 no <i>Excel</i> .....	77
Figura 5.43 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 3 no relatório .....	77

# Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Valores de $k_n$ na equação 10 .....	8
Tabela 2.2 – Valor de K em função do sistema estrutural da viga .....	16
Tabela 2.3 – Valores de $l_{bd}$ em função de $f_{ck}$ , $f_{yk}$ e condição de aderência .....	20
Tabela 3.1 – Os 2 momentos do estágio .....	24
Tabela 3.2 – Área de armadura transversal .....	28
Tabela 3.3 – Área de armadura longitudinal .....	30
Tabela 5.1 – Ações da viga no <i>Robot</i> .....	49
Tabela 5.2 – Combinação de ações da viga no <i>Robot</i> .....	49
Tabela 5.3 – Mapa de esforços da viga 1 no <i>Excel</i> .....	52
Tabela 5.4 – Mapa de esforços da viga 2 no <i>Excel</i> .....	52
Tabela 5.5 – Mapa de esforços da viga 3 no <i>Excel</i> .....	53
Tabela 5.6 – Valor da deformação da viga 1 no <i>Excel</i> .....	53
Tabela 5.7 – Valor da deformação na viga 2 no <i>Excel</i> .....	54
Tabela 5.8 – Valor da deformação na viga 3 no <i>Excel</i> .....	54
Tabela 5.9 – Valores de esforço transversal e rácio no <i>Jupyter Notebook</i> .....	58
Tabela 5.10 – Valores de momento fletor e rácio no <i>Jupyter Notebook</i> .....	59
Tabela 5.11 – Valores de fendilhação e rácio no <i>Jupyter Notebook</i> .....	60
Tabela 5.12 – Valor do coeficiente de fluência em função do tempo .....	63
Tabela 5.13 – Comparação de valores no relatório, no <i>Excel</i> e nos <i>softwares</i> .....	78



# Acrónimos e Símbolos

## Lista de Acrónimos

<b>AEC</b>	<i>Architecture, Engineering &amp; Construction Collection</i>
<b>IA</b>	<i>Inteligência Artificial</i>
<b>VBA</b>	<i>Visual Basic for Applications</i>

## Lista de Símbolos

<b>A</b>	Área de secção transversal
<b>As</b>	Área de secção de uma armadura para betão armado
<b>Asw</b>	Área de secção das armadura de esforço transversal
<b>b</b>	Valor de base de uma secção transversal
<b>c</b>	Valor de recobrimento
<b>d</b>	Altura útil de uma secção transversal
<b><math>\delta</math></b>	Valor de flecha
<b><math>\epsilon</math></b>	Extensão
<b>F</b>	Ação
<b>G</b>	Valor de uma ação permanente
<b>h</b>	Valor de altura de uma secção transversal
<b>L</b>	Valor de comprimento da viga
<b>MEd</b>	Valor de momento fletor atuante
<b>MRd</b>	Valor de momento fletor resistente

$\phi$	Diâmetro de um varão
Q	Valor de uma ação variável
SLS	Estado limite de utilização
t	Tempo considerado
ULS	Estado limite último
VEd	Valor de esforço transversal atuante
VRd	Valor de esforço transversal resistente
wk	Valor de fenda

# 1 Introdução

## 1.1 Considerações Iniciais

No âmbito do projeto de arquitetura e de estabilidade, existem diferentes metodologias para o procedimento de análise e cálculo estrutural, de forma a garantir a segurança de um edifício. Seguindo os Eurocódigos estruturais, o método mais simples e direto passa pelo cálculo escrito à mão. No entanto, é um procedimento lento, pouco produtivo e propício a erros humanos, contrariando a tendência do mercado.

Com o avanço tecnológico recente, as estratégias passaram a concentraram-se num processo de cálculo cada vez mais procurado. A existência de computadores mais potentes e de programas especificamente desenvolvidos e testados permite otimizar, agilizar e acelerar procedimentos de cálculo. Esta estratégia permite modelar os elementos estruturais de um edifício, como mostra a Figura 1.1, encontrar as soluções mais económicas e obter resultados mais exatos.

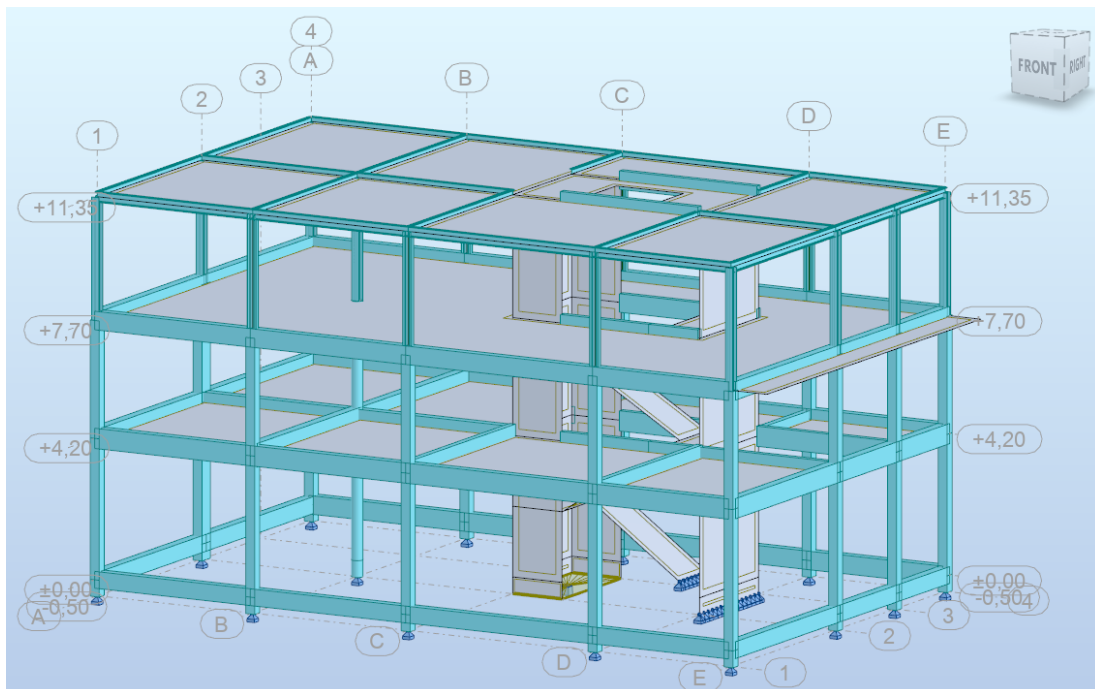


Figura 1.1 – Exemplo de um edifício modelado no *Robot* (Castanheira, et al., 2023)

Também, é possível criar ou desenvolver um processo de cálculo automático, sabendo que os critérios usados para dimensionar os elementos estruturais de um edifício têm a mesma base regulamentar. Por isso, muitas ferramentas de cálculo têm esta base implementada para obter resultados que terão o mesmo procedimento de cálculo noutra programa. O que significa que, combinando com uma linguagem informática que permita efetuar cálculos, é possível desenvolver um processo de cálculo automático confiável de um elemento estrutural.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste projeto que é desenvolver um processo de cálculo automático, que permita combinar diferentes programas e linguagens de programação, de forma a obter um relatório com um procedimento de cálculo detalhado de uma viga de betão armado.

De forma a atingir este objetivo, realizou-se um estágio de 4 meses na MULTIPROJECTUS, onde se estudaram ferramentas e programas e se desenvolveu este processo automático. Estudou-se a linguagem *Python* e *Visual Basic for Applications*. *Python* é uma linguagem de programação versátil, fácil de usar e eficiente, tendo acesso a um conjunto vasto de bibliotecas. Pode realizar desde operações matemáticas simples até tarefas mais complexas. O *VBA* é uma linguagem de programação da *Microsoft* que pode automatizar processos e tarefas, em particular no *Excel*. Estas ferramentas de trabalho permitem que exista uma interoperabilidade com o *software* de modelação *Autodesk Robot Structural Analysis*.

Através de um modelo inicial no *Robot*, é possível extrair aspetos geométricos e esforços da viga para o *Excel*, através do *VBA*, e posteriormente incorporá-los na linguagem *Python*, para análise e dimensionamento da viga e exportação do relatório.

Ao longo do estágio, foi possível aprimorar cada vez mais este processo e corrigir erros. Entretanto, foi necessário estudar e entender todas as verificações regulamentares, assim como a linguagem de programação *Python* e *VBA*. No início de estágio, foi possível desenvolver modelos iniciais de vigas mais simples, que foram aprimorados posteriormente para modelos mais complexos, com diferentes configurações de apoios. Porém, usaram-se vigas com secção transversal retangular e ações distribuídas.

### 1.3 MULTIPROJECTUS

A empresa onde se realizou o estágio é a MULTIPROJECTUS.COM LDA (MULTIPROJECTUS, 2020). É uma empresa especializada em projetos de arquitetura e engenharia localizada estrategicamente em Santo Tirso. Dispõem de instalações recentes e modernas, com áreas de trabalho *open space*, diferentes salas de reunião e equipamentos de apoio informático e técnico. E usufrui de um ambiente de trabalho confortável e organizado, permitindo uma rápida adaptação às condições de trabalho.

Utiliza os mais avançados *softwares* e ferramentas de arquitetura e projeto de engenharia e a metodologia *BIM* enquanto modelo de trabalho de todos os projetos em que trabalha. A metodologia de trabalho assenta em compreender o negócio do cliente e os requisitos do projeto, procurar as melhores soluções, desenvolver o projeto e recolher *feedback* do cliente. Assim, garante-se o equilíbrio entre funcionalidade, *design* e custos, de forma a oferecer soluções eficientes e sustentáveis.

Já desenvolveu projetos variados na área industrial e logística, aplicando soluções personalizadas, desenhadas à medida para cada cliente. Para tal, o corpo técnico possui profissionais qualificados, com diferentes competências e *know-how* diferenciado. Existe o incentivo à produtividade, criatividade e inovação, permitindo um desenvolvimento do projeto num ambiente único e dinâmico.

A MULTIPROJECTUS trabalha em parceria com outras empresas, a Garcia Garcia, a Garsteel e a Gartek, como mostra a Figura 1.2.



Figura 1.2 – Empresas parceiras da MULTIPROJECTUS (Castanheira, et al., 2020)

## 1.4 Estrutura da tese

O presente relatório encontra-se dividido em 6 capítulos.

No primeiro capítulo efetua-se um breve enquadramento na importância de um processo de cálculo automático no projeto de estabilidade, são definidos os objetivos do projeto e apresenta-se brevemente a empresa onde se realizou o estágio.

O segundo capítulo irá abordar o enquadramento regulamentar necessário para a análise e dimensionamento de uma viga de betão armado, como as características dos materiais, as verificações de segurança aos estados limites e as disposições construtivas.

No terceiro capítulo será abordado de que forma se desenvolveu o processo de cálculo automático na linguagem *Python*, no ambiente de programação *Jupyter Notebook* e com auxílio do programa *Visual Studio Code*.

O quarto capítulo explicará como foi possível relacionar e extrair aspetos geométricos e esforços da viga do *Robot* para o *Excel*, com recurso a processos de cálculo automáticos na linguagem *VBA*.

O quinto capítulo irá explorar um exemplo prático e validar o processo de cálculo automático com recurso a outras ferramentas, com cálculos testados previamente no *Excel*, e os softwares *XD-CoSec* e *XD-ConServ*.

O último capítulo conclui com as apreciações e conclusões finais do trabalho e resultados obtidos no projeto e abordará alguns futuros desenvolvimentos.

## 2 Enquadramento regulamentar

O Eurocódigo 2 (NP EN 1992-1-1, 2010) serve de base para a verificação de segurança no âmbito do projeto de estruturas de betão e apresenta as regras de cálculo e disposições construtivas para os diferentes elementos estruturais dos edifícios. No caso em estudo, seguiram-se as regras para as vigas de betão armado, que serão analisadas ao longo deste capítulo. A Figura 2.1 mostra de que forma este capítulo se encontra dividido.

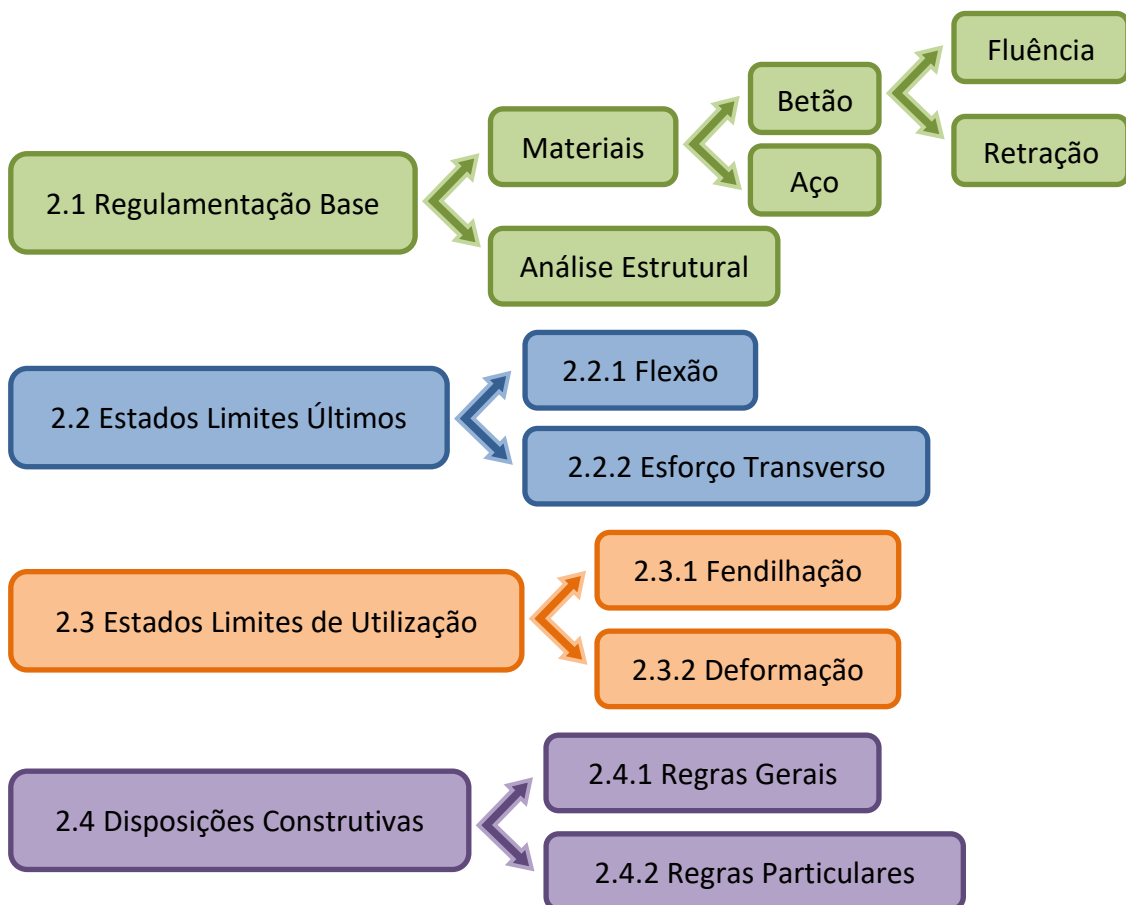


Figura 2.1 – Esquema dos conteúdos do capítulo 2

## 2.1 Regulamentação base

O Eurocódigo 2 aborda as características principais dos materiais a serem usados, betão e aço. As características principais analisadas para o betão foram a resistência, a deformação, a fluência e a retração.

É possível obter os valores característicos de resistência e deformação do betão, sabendo que um valor conhecido é o valor característico do betão à compressão ( $f_{ck}$ ). Os valores obtidos são o valor médio do betão à compressão ( $f_{cm}$ ), o valor médio do betão à tração ( $f_{ctm}$ ), o valor do módulo de elasticidade secante do betão ( $E_{cm}$ ), os valores das extensões do betão à compressão ( $\varepsilon_{c2}$  e  $\varepsilon_{c3}$ ), além dos valores das extensões últimas do betão à compressão ( $\varepsilon_{cu2}$  e  $\varepsilon_{cu3}$ ). Também, é possível obter-se o valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão ( $f_{cd}$ ).

A fluência traduz-se no aumento da deformação no tempo, sob a ação de um estado de tensão constante e é representada pelo coeficiente de fluência ( $\varphi(t_\infty, t_0)$ ), importante valor a considerar nas verificações do estado limite de utilização. Depende da humidade ambiente ( $RH$ ), das dimensões do elemento, da composição do betão (cimento da classe S, N ou R) e da idade do betão no primeiro carregamento. Nas dimensões do elemento considera-se o perímetro do elemento em contacto com o ambiente, exceto a altura da laje. O Eurocódigo 2 especifica o procedimento para a obtenção do valor do coeficiente de fluência (APPELTON, 2013). O coeficiente de fluência (em função do tempo) é definido por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (1)$$

em que  $\varphi_0$  é o coeficiente de fluência e  $\beta_c(t, t_0)$  é o coeficiente que traduz a evolução da fluência no tempo, após o carregamento (se for 1, a fluência é máxima a tempo infinito).

O coeficiente de fluência é o produto de 3 fatores:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (2)$$

$\varphi_{RH}$  é o fator que tem em conta a influência da humidade relativa no coeficiente de fluência:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (3)$$

$$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad \text{para } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad (4)$$

com  $\alpha_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7}$ ,  $\alpha_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2}$ ,  $\alpha_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5}$  e  $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u}$

$\beta(f_{cm})$  é o fator que tem em conta a influência da resistência do betão no coeficiente de fluência convencional:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (5)$$

$\beta(t_0)$  é o fator que tem em conta a influência da idade do betão à data do carregamento:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})} \quad (6)$$

com  $t_0 = t_{0,T} \cdot \left( \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5$  e  $\alpha \begin{cases} -1 & \text{para cimento de classe S} \\ 0 & \text{para cimento de classe N} \\ 1 & \text{para cimento de classe R} \end{cases}$

O coeficiente que traduz a evolução da fluência no tempo, após o carregamento, é traduzido:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0,3} \quad (7)$$

com:

$$\beta_H = 1,5 \cdot [1 + (0,012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_0 + 250 \leq 1500 \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (8)$$

$$\beta_H = 1,5 \cdot [1 + (0,012 \cdot RH)^{18}] \cdot h_0 + 250 \cdot \alpha_3 \leq 1500 \cdot \alpha_3 \quad \text{para } f_{cm} \geq 35 \text{ MPa} \quad (9)$$

Para o cálculo da extensão de retração (APPELTON, 2013), é preciso efetuar o somatório da extensão de retração por secagem com a extensão de retração autogénea,  $\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca}$ .

$\varepsilon_{cd}(t)$  é a extensão de retração por secagem:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (10)$$

com:

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0,04 \cdot \sqrt{h_0^3}} \quad (11)$$

$k_h$  segundo a Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores de  $k_h$  na equação 10

$h_0$	$k_h$
100	1,00
200	0,85
300	0,75
$\geq 500$	0,70

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \cdot \left[ (220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot e^{(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{10})} \right] \cdot 10^{-6} \cdot \beta_{RH} \quad (12)$$

com  $\beta_{RH} = 1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right]$ ,  $\alpha_{ds1} \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 6 \end{cases}$  e  $\alpha_{ds2} \begin{cases} 0,13 \text{ para cimento de classe S} \\ 0,12 \text{ para cimento de classe N} \\ 0,11 \text{ para cimento de classe R} \end{cases}$

$\varepsilon_{ca}(t)$  é a extensão de retração autógena:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (13)$$

com  $\beta_{as}(t) = 1 - e^{(-0,2 \cdot t^{0,5})}$  e  $\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5 \cdot (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6}$

Sabendo que outro valor conhecido é o valor característico da tensão de cedência à tração do aço das armaduras ( $f_{yk}$ ), é possível obter-se o valor de cálculo da tensão de cedência à tração do aço das armaduras ( $f_{yd}$ ) e a extensão do aço ( $\varepsilon_{cs}$ ).

Utilizaram-se as regras do Eurocódigo 1, parte 1-1 (NP EN 1991-1-1, 2009) e do Eurocódigo 0 (NP EN 1990, 2009) para o cálculo das ações e combinações de ações, respetivamente.

## 2.2 Estados limites últimos

O Eurocódigo 2 determina as verificações de segurança aos estados limites últimos, com duas verificações fundamentais, a verificação à flexão e ao esforço transversal.

### 2.2.1 Flexão

Para se efetuar a verificação de segurança à flexão, deve usar-se uma relação tensão-extensão. No Eurocódigo 2, encontram-se 3 hipóteses de relações tensões-extensões. Os 3 métodos levam a resultados e conclusões similares, porém cada novo método é uma simplificação do anterior, produzindo resultados menos exatos, porém mais simples. Todos estes métodos foram analisados e estudados para perceber as diferenças entre os mesmos e respetivo impacto nos valores finais de momento fletor resistente. O raciocínio e os cálculos assentam num princípio de equilíbrio interno de forças,  $FS = FC$  (Guedes, 2011). A força  $FS$  é calculada através do produto da área de secção transversal de aço com  $f_{yd}$  e tem sempre um valor fixo:

$$FS = A_s \cdot f_{yd} \quad (14)$$

A força  $FC$  é calculada consoante a distribuição de extensões que cada método sugere.

O primeiro método é do diagrama parábola-retângulo. Baseia-se na distribuição de extensões de resistência última do betão comprimido em 2 fases, em parábola e retângulo, conforme a Figura 2.2.

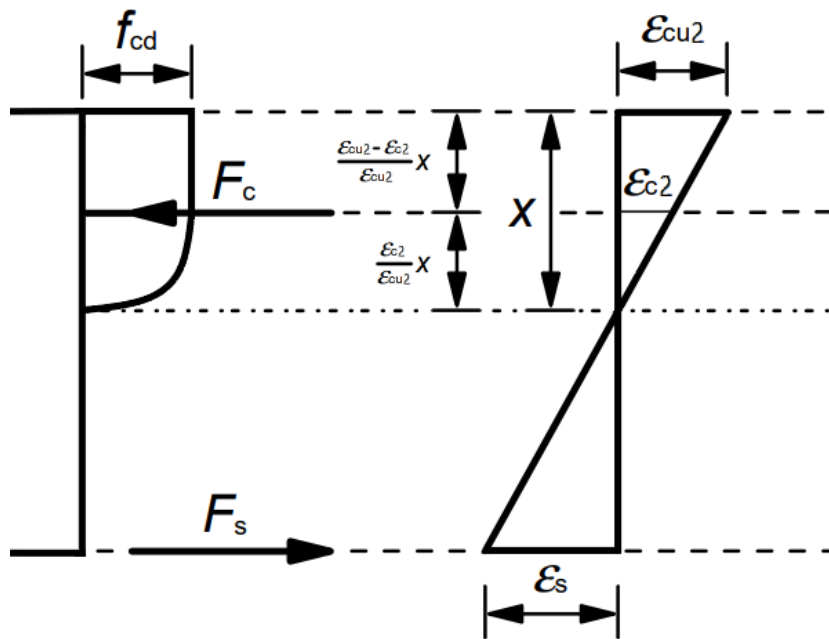


Figura 2.2 – Distribuição das tensões em parábola e retângulo

O cálculo da força  $FC$  é realizado através de:

$$FC = \left( \frac{\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \right) \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \quad (15)$$

A partir da relação  $FS = FC$  é possível obter o valor de  $x$  e calcular o momento fletor resistente da secção:

$$M_{Ra} = b \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \cdot \left( d - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \cdot \left( d - \frac{\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x - \frac{3}{8} \cdot \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu2}} \cdot x \right) \right] \quad (16)$$

Também é possível calcular o valor de  $\varepsilon_s$  a partir da relação:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \quad (17)$$

O segundo método considera o diagrama de tensões no betão bilinear, de acordo com a Figura 2.3.

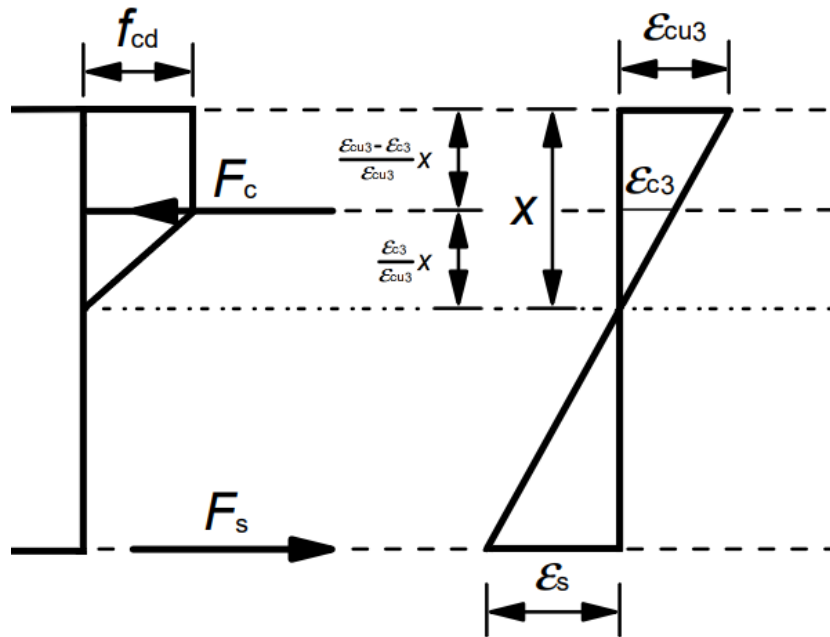


Figura 2.3 – Distribuição bilinear das tensões

O diagrama de tensões apresenta também 2 troços distintos, mas agora um triângulo e um retângulo, sendo o cálculo da força  $FC$  dado por:

$$FC = \left( \frac{\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \right) \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \quad (18)$$

Obtendo-se o valor de  $x$ , calcula-se o momento fletor resistente:

$$M_{Rd} = b \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \cdot x \cdot \left( d - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \cdot x \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \cdot x \cdot \left( d - \frac{\varepsilon_{cu3} - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{cu3}} \cdot x \right) \right] \quad (19)$$

O valor de  $\varepsilon_s$  é calculado de forma similar, mas com diferente valor de  $x$ .

O terceiro método, com a maior simplificação possível, considera uma distribuição de tensões retangular, como mostra a Figura 2.4.

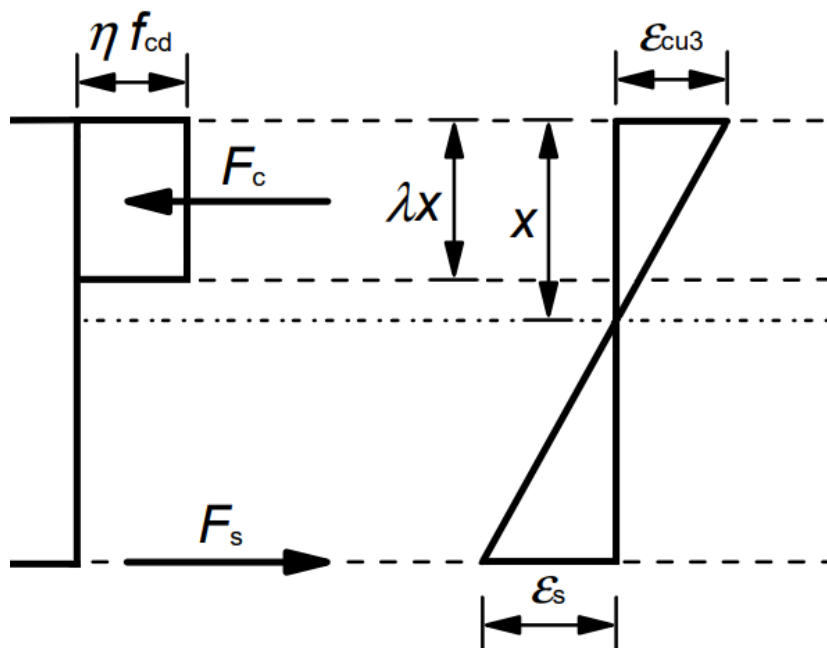


Figura 2.4 – Distribuição retangular das tensões

O valor da força  $FC$  é:

$$FC = \lambda \cdot x \cdot b \cdot \eta \cdot f_{cd} \quad (20)$$

com:

$$\lambda = 0,8 \text{ e } \eta = 1 \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (22)$$

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 \text{ e } \eta = 1 - (f_{ck} - 50)/200 \quad \text{para } 50 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (23)$$

Obtendo-se o valor de  $x$ , calcula-se o valor de  $z$  e o momento fletor resistente:

$$M_{Rd} = FS \cdot z \quad (24)$$

$$z = d - 0,4 \cdot x \quad (25)$$

Novamente, o valor de  $\varepsilon_s$  é calculado de forma similar com diferente valor de  $x$ .

Calculados os valores de  $M_{Rd}$  e  $\varepsilon_s$ , podem-se realizar as verificações de segurança. O momento fletor atuante tem de ser inferior ou igual ao momento fletor resistente,  $M_{Ed} \leq M_{Rd}$ , e a extensão tem de ser maior que a extensão do aço,  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_s(aço)$  para verificar a segurança à flexão.

### 2.2.2 Esforço transverso

O Eurocódigo 2 apresenta outra verificação a realizar aos estados limites últimos, a verificação ao esforço transverso. Existem duas verificações a realizar. A primeira será o cálculo do esforço transverso resistente, relacionado com o valor de área de armadura transversal. A segunda é o cálculo do esforço transverso resistente máximo, que coloca um limite máximo de área de armadura transversal:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta \quad (26)$$

$$V_{Rd,máx} = b \cdot z \cdot v \cdot \frac{f_{cd}}{\cot \theta + \tan \theta} \quad (27)$$

com  $v = 0,6 \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right]$ ,  $\cot \theta = 2,5$ ,  $\cot \theta + \tan \theta = 2,9$  e  $z = 0,9 \cdot d$

O esforço transverso atuante tem de ser inferior ou igual ao esforço transverso resistente e esforço transverso resistente máximo,  $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$  e  $V_{Ed} \leq V_{Rd,máx}$ , para verificarem a segurança ao esforço transverso.

## 2.3 Estados limites de utilização

No Eurocódigo 2 existem verificações de segurança aos estados limites de utilização, nomeadamente, de fendilhação e deformação.

### 2.3.1 Fendilhação

O aparecimento de fendas nas vigas é normal, mas é possível determinar qual a sua largura e limitá-las. A largura máxima de fendas depende da categoria de exposição ambiental e poderá ser de 0,4 mm para a classe X0 e XC1 ou 0,3 mm para as restantes classes.

O cálculo da largura de fendas,  $w_k$ , é:

$$w_k = S_{r,máx} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (28)$$

com  $S_{r,máx}$  a distância máxima entre fendas e  $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$  a diferença entre a extensão média da armadura para a combinação de ações considerada com a extensão média no betão entre fendas.

$S_{r,máx}$  é obtido através da equação:

$$S_{r,máx} = k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\Phi}{\rho_{p,eff}} \quad (29)$$

com,  $k_1$   $\begin{cases} 0,8 & \text{para varões de alta aderência} \\ 1,6 & \text{para armaduras superfície lisa} \end{cases}$ ,  $k_2$   $\begin{cases} 0,5 & \text{para flexão simples} \\ 1,6 & \text{para tração simples} \end{cases}$ ,  $c$  a representar o recobrimento das armaduras longitudinais,  $k_3 = 3,4$  e  $k_4 = 0,425$ .

$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$  é calculado da seguinte forma:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{\sigma_s - k_t \cdot \frac{f_{ctm}}{\rho_{p,eff}} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0,6 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (30)$$

Mas para se obter os valores de  $\sigma_s$  e  $\rho_{p,eff}$  é necessário realizar cálculos auxiliares (Félix, et al., 2013), conforme mostra a Figura 2.5.

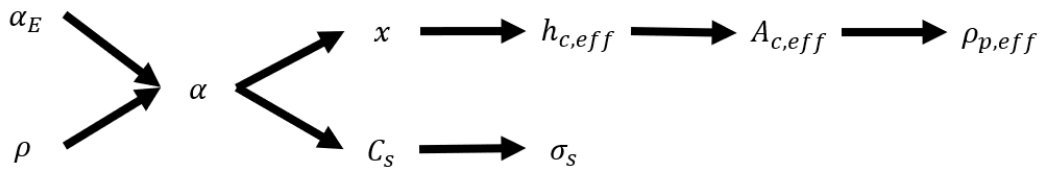


Figura 2.5 – Esquema de cálculo os valores de  $\sigma_s$  e  $\rho_{p,eff}$  (Félix, et al., 2013)

As equações, para a obtenção destes valores, são:

$$\alpha_E = \frac{E_s}{E_c} \quad (31)$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad (32)$$

$$\alpha^2 + 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho \cdot \alpha - 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho = 0 \quad (33)$$

$$x = \alpha \cdot d \quad (34)$$

$$C_s = \frac{1}{\rho \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \quad (35)$$

$$\sigma_s = C_s \cdot \frac{M_{QPR}}{b \cdot d^2} \quad (36)$$

$$h_{c,eff} = \min\left(2,5 \cdot (h - d), \frac{(h - x)}{3}, \frac{h}{2}\right) \quad (37)$$

$$A_{c,eff} = h_{c,eff} \cdot b \quad (38)$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} \quad (39)$$

Importante notar que o valor de momento fletor atuante a ser usado no cálculo de  $\sigma_s$  deverá ser calculado para a combinação quase-permanente de ações. O estado limite de fendilhação é verificado se  $w_k \leq w_{k,máx}$ .

### 2.3.2 Deformação

Assim como na fendilhação, o Eurocódigo 2 refere as estratégias a adotar no controlo da deformação, com 2 valores limites de contra-flecha que não podem ser ultrapassados. O primeiro valor é  $L/250$  para flechas sujeitas a ações quase-permanentes. O segundo valor é  $L/500$ , para as mesmas ações, mas após a construção. As equações seguintes mostram como é feito o cálculo destes limites e como será realizado este cálculo automaticamente, conhecida a deformação associada a cada caso de carga.

$$\alpha_{CD} = \sum G + \sum Q \cdot \varphi_2 \leq L/250 \quad (40)$$

$$\alpha_{LD_{Curta}} = \alpha_{LD_{Total}} - \alpha_{CD_{Curta}} \leq L/500 \quad (41)$$

$$\alpha_{LD_{Total}} = \sum G \cdot K + \sum Q \cdot \varphi_2 \quad (42)$$

$$\alpha_{CD_{Curta}} = \sum G \quad (43)$$

$$\alpha_{LD_{Curta}} = \sum (G \cdot K - G) + \sum Q \cdot \varphi_2 \quad (44)$$

com  $K = 1 + \varphi(t, t_0)$

No entanto, uma das estratégias é a realização desta verificação sem recorrer ao cálculo da flecha. Primeiro obtém-se o valor de  $L/d$ . De seguida, calcula-se o valor da taxa de armadura:

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad (40)$$

com  $A_s$  a representar o valor da área de armadura à tração ou compressão, que resultam, respetivamente, nos valores de  $\rho$  e  $\rho'$ .

Calcula-se a taxa de armadura de referência,  $\rho_0$ :

$$\rho_0 = 10^{-3} \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (41)$$

e compara-se este valor com  $\rho$ . Se  $\rho \leq \rho_0$ :

$$\frac{L}{d_{m\acute{a}x}} = K \cdot \left[ 11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (42)$$

Se  $\rho > \rho_0$ :

$$\frac{L}{d_{m\acute{a}x}} = K \cdot \left[ 11 + 1,5 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \quad (43)$$

O valor K depende do sistema estrutural da viga, de acordo com a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Valor de K em função do sistema estrutural da viga

Sistema Estrutural	K
Viga simplesmente apoiada	1,0
Vão extremo de viga contínua	1,3
Vão interior de uma viga	1,5
consola	0,4

Se a relação vão/altura for inferior ou igual ao limite desta relação, então o cálculo poderá ser dispensado.

Por sua vez, o Eurocódigo 2 explica como obter o valor da flecha e realizar a verificação. É possível ver na Figura 2.6 o método de cálculo de forma simplificada (CACHIM, et al., 2013).

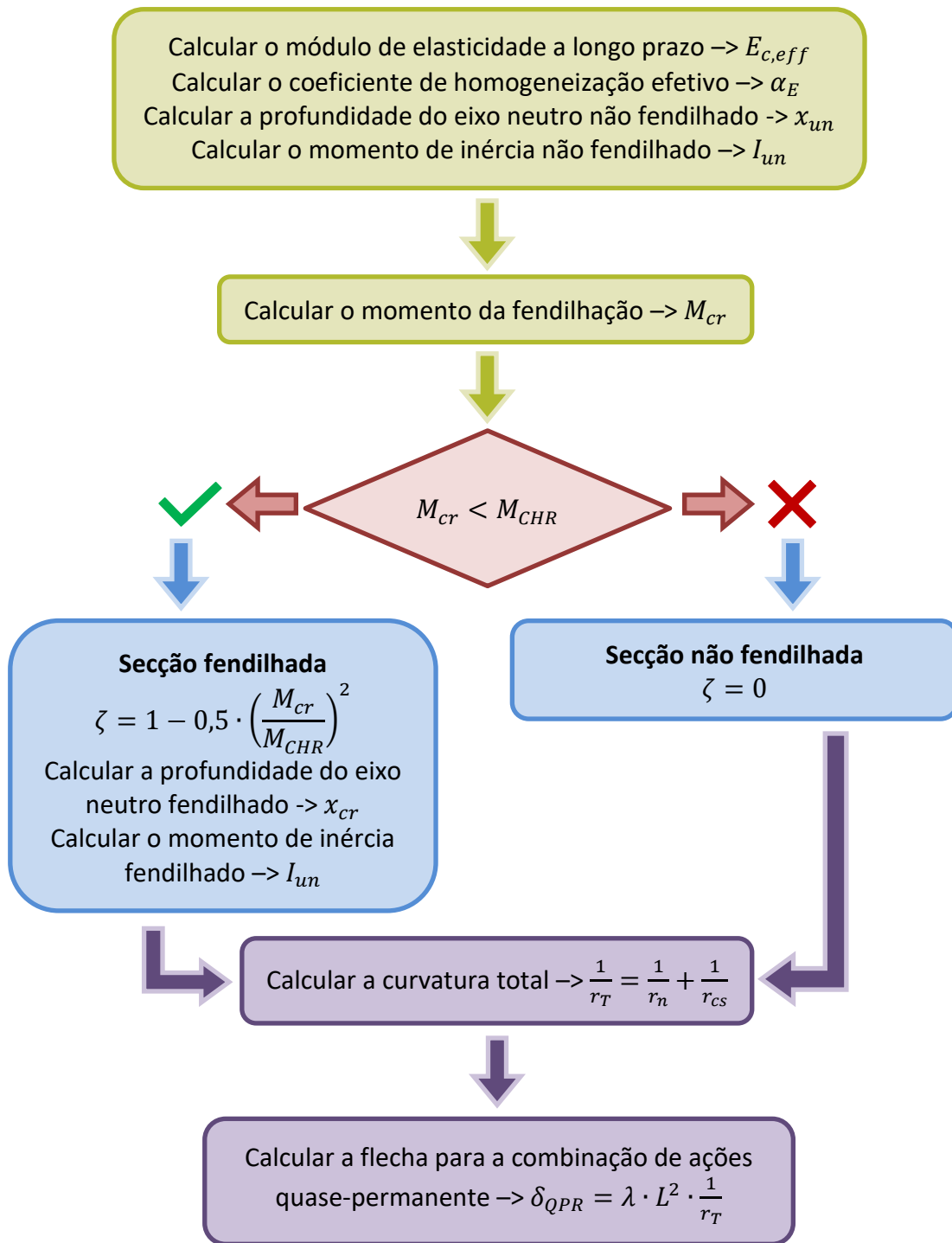


Figura 2.6 – Esquema de cálculo da deformação (CACHIM, et al., 2013)

Primeiro, é necessário calcular o módulo de elasticidade efetivo do betão, tendo em conta o coeficiente de fluência:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi(\infty, t_0)} \quad (44)$$

Daqui calcula-se um novo valor de coeficiente de homogeneização efetivo  $\alpha_E$ :

$$\alpha_E = \frac{E_s}{E_{c,eff}} \quad (45)$$

De seguida, calcula-se a profundidade do eixo neutro para a secção não fendilhada,  $x_{un}$ :

$$x_{un} = \frac{0,5 \cdot b \cdot h^2 + (\alpha_E - 1) \cdot (A_s^+ \cdot d + A_s^- \cdot d_c)}{A_e} \quad (46)$$

com  $A_e = b \cdot h + (\alpha_E - 1) \cdot (A_s^+ + A_s^-)$  sendo a área equivalente de betão.

Também é necessário calcular o momento de inércia para a secção não fendilhada,  $I_{un}$ :

$$I_{un} = \left[ \frac{1}{3} \cdot b \cdot x_{un}^3 + \frac{1}{3} \cdot b \cdot (h - x_{un})^3 + (\alpha_E - 1) \cdot (x_{un} - d_c)^2 \cdot A_s^- + (\alpha_E - 1) \cdot (d - x_{un})^2 \cdot A_s^+ \right] \quad (47)$$

Com estes valores calcula-se o momento fletor de fendilhação,  $M_{cr}$ :

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} \cdot I_{un}}{h - x_{un}} \quad (48)$$

Com base no valor do momento de fendilhação para a combinação de ações características é possível saber se a secção está fendilhada ou não. Se  $M_{cr} < M_{CHR}$ , então a secção está fendilhada, caso contrário a secção estará não fendilhada.

Assim, calcula-se o coeficiente de distribuição,  $\zeta$ :

$$\zeta = 1 - 0,5 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M_{CHR}} \right)^2 \quad (49)$$

com  $\zeta$  a assumir o valor 0 para uma secção não fendilhada.

Se a secção estiver fendilhada, calcula-se a profundidade do eixo neutro fendilhado,  $x_{cr}$ , e o

correspondente momento de inércia fendilhado,  $I_{cr}$ :

$$x_{cr} = \left[ \frac{\frac{-(A_s^+ \cdot \alpha_E + A_s^- \cdot (\alpha_E - 1))}{b} + \sqrt{\left(\frac{A_s^+ \cdot \alpha_E + A_s^- \cdot (\alpha_E - 1)}{b}\right)^2 + 2 \cdot b \cdot (A_s^+ \cdot \alpha_E + A_s^- \cdot (\alpha_E - 1))}}{b} \right] \quad (50)$$

$$I_{cr} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot x_{cr}^3 + (\alpha_E - 1) \cdot (x_{cr} - d_c)^2 \cdot A_s^- + \alpha_E \cdot (d - x_{cr})^2 \cdot A_s^+ \quad (51)$$

Calcula-se também o valor do momento estático das armaduras:

$$S_{un} = A_s^+ \cdot (d - x_{un}) - A_s^- \cdot (x_{un} - d_c) \quad (52)$$

$$S_{cr} = A_s^+ \cdot (d - x_{cr}) - A_s^- \cdot (x_{cr} - d_c) \quad (53)$$

Sabendo estes valores, a extensão de retração total e o momento fletor para a combinação quase-permanente de ações, é possível calcular a curvatura total, que é o somatório da curvatura da secção e a curvatura de retração:

$$\frac{1}{r_T} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{cs}} \quad (40)$$

$$\frac{1}{r_n} = \zeta \cdot \frac{M_{QPR}}{E_{c,eff} \cdot I_{cr}} + (1 - \zeta) \cdot \frac{M_{QPR}}{E_{c,eff} \cdot I_{un}} \quad (54)$$

$$\frac{1}{r_{cs}} = \zeta \cdot \alpha_E \cdot \varepsilon_{cs} \cdot \frac{S_{cr}}{I_{cr}} + (1 - \zeta) \cdot \alpha_E \cdot \varepsilon_{cs} \cdot \frac{S_{un}}{I_{un}} \quad (55)$$

Por fim, calcula-se a flecha para a combinação quase-permanente de ações e considerando o limite  $L/250$ :

$$\delta_{QPR} = \lambda \cdot L^2 \cdot \frac{1}{r_T} \quad (56)$$

$$\text{com } \lambda = 0,104 \cdot \frac{1 - 0,1 \cdot (M_{QPR,esq}^- + M_{QPR,dire}^-)}{M_{QPR}^+}$$

## 2.4 Disposições construtivas

O Eurocódigo 2 apresenta as disposições construtivas gerais e particulares para as armaduras.

### 2.4.1 Regras gerais

A distância livre entre os varões deverá permitir uma betonagem e uma compactação satisfatória do betão, além de assegurar adequadas condições de aderência. Para além disso, o Eurocódigo 2 refere um valor mínimo de distância livre, que poderá ser:

$$d_{livre} = \Phi_L \text{ ou } 20 \text{ mm} \quad (57)$$

As armaduras devem seguir certas regras (Camara, 2013). É necessário evitar o agrupamento de armaduras e garantir o recobrimento de armaduras, assim como um comprimento de amarração de valor  $al + lbd$ , com  $al = 1,125 \cdot d$  e  $lbd$  de acordo com a

Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Valores de  $lbd$  em função de  $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$  e condição de aderência

		$f_{ck}$								
$f_{yk}$	Condição	12	16	20	25	30	35	40	45	50
400	A	55 $\Phi$	45 $\Phi$	35 $\Phi$	30 $\Phi$	30 $\Phi$	25 $\Phi$	25 $\Phi$	20 $\Phi$	20 $\Phi$
	B	75 $\Phi$	60 $\Phi$	55 $\Phi$	45 $\Phi$	40 $\Phi$	35 $\Phi$	35 $\Phi$	30 $\Phi$	30 $\Phi$
500	A	65 $\Phi$	55 $\Phi$	45 $\Phi$	40 $\Phi$	35 $\Phi$	30 $\Phi$	30 $\Phi$	25 $\Phi$	25 $\Phi$
	B	95 $\Phi$	80 $\Phi$	65 $\Phi$	60 $\Phi$	50 $\Phi$	45 $\Phi$	40 $\Phi$	40 $\Phi$	35 $\Phi$
600	A	80 $\Phi$	65 $\Phi$	55 $\Phi$	50 $\Phi$	45 $\Phi$	40 $\Phi$	35 $\Phi$	35 $\Phi$	30 $\Phi$
	B	115 $\Phi$	95 $\Phi$	80 $\Phi$	70 $\Phi$	60 $\Phi$	55 $\Phi$	50 $\Phi$	45 $\Phi$	45 $\Phi$

### 2.4.2 Regras particulares

O Eurocódigo 2 refere os valores mínimos e máximos que a área de armadura longitudinal deve ter, sendo que o seu valor deverá ser maior que a área mínima e menor que a área máxima:

$$A_{s,min} = \max\left(0,26 \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}}; 0,0013 \cdot b \cdot d\right) \quad (58)$$

$$A_{s,máx} = 004 \cdot A_c \quad (59)$$

O Eurocódigo 2 refere os valores de área de armadura mínima e espaçamento máximo que deverá ter a armadura transversal:

$$\frac{A_{sw}}{s},min = b \cdot \frac{0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (60)$$

$$S_{l,máx} = 0.75 \cdot d \quad (61)$$



### 3 Desenvolvimento de procedimento de cálculo automático em linguagem *Python*

A linguagem *Python* permite traduzir todas as verificações regulamentares do segundo capítulo, de uma forma simples e intuitiva, num processo de cálculo automático. Para atingir tal objetivo, é possível aceder a uma enorme variedade de bibliotecas do *Python* que viabilizam os diferentes cálculos e verificações de segurança. Da mesma forma, a lógica da linguagem *Python* permite comparar resultados e avaliar a viabilidade de diferentes soluções que o utilizador introduzir. Para uma melhor leitura do código *Python*, usou-se o ambiente de programação *Jupyter Notebook*. E para auxiliar o uso deste ambiente recorreu-se ao programa *Visual Studio Code*. Para que o processo de cálculo funcione, é necessário introduzir valores base, *INPUTS*. A partir destes *INPUTS* foi possível processar o código para atingir o objetivo de obter o *OUTPUT* final, o relatório de cálculo. A Figura 3.1 mostra como se dividiu estas 3 fases do procedimento de cálculo automático.



Figura 3.1 – Esquema das 3 fases do processo de cálculo

Durante o estágio houve a necessidade de dividir o *INPUT* de valores em 2 momentos. Primeiramente, houve uma introdução manual dos *INPUTS*. Depois houve uma transição para uma introdução automática de *INPUTS* provenientes do *Robot*. Ambos serão explorados neste capítulo, com o detalhe que os *INPUTS* introduzidos do *Robot* serão extraídos de um ficheiro *Excel*. Na Tabela 3.1 é possível ver como se dividiu as fases do processo de cálculo. A Figura 3.2 mostra de que forma os programas estão conectados.

Tabela 3.1 – Os 2 momentos do estágio

Fase		1	2.1	2.2	2.3	3
1	Jupyter Notebook	Manual	Jupyter	Jupyter	Jupyter	Jupyter (docx)
2	Jupyter Notebook + Robot	Robot	Jupyter	Jupyter	Jupyter	Jupyter (docx)



Figura 3.2 – Ligação sequencial entre os 3 programas

Este capítulo explicará de que forma se realizou o procedimento de cálculo, se realizaram as verificações de segurança e se criou uma forma de exportar um relatório de cálculo, tudo de forma automática (Lora, 2019). Este capítulo encontra-se dividido de acordo com a Figura 3.3.

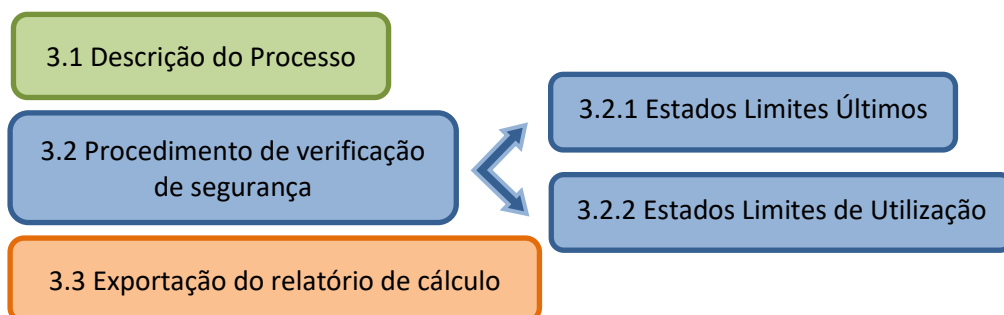


Figura 3.3 – Esquema dos conteúdos do capítulo 3

### 3.1 Descrição do processo

O processo de cálculo automático na linguagem *Python* começa com a importação das *libraries* necessárias que permitirão as operações matemáticas, manipulação de dados, criação de gráficos e manipulação de documentos. A biblioteca *Numpy* permite operações matemáticas e a manipulação de *arrays*. A biblioteca *Pandas* é utilizada para a análise e manipulação de dados em *dataframes* ou tabelas. A biblioteca *ipywidgets* permite criar e interagir com *widgets* interativos no *Jupyter Notebook*. A biblioteca *Matplotlib* é usada para criar gráficos. É ainda possível importar funções como *fsolve* para resolver equações não lineares ou o módulo *math* para realizar funções matemáticas. Por fim, a biblioteca *docx* cria e modifica ficheiros *Microsoft Word*.

De seguida, é necessário introduzir os *INPUTS*, que num primeiro momento serão manuais. Os principais *INPUTS* a serem introduzidos são as dimensões, a tipologia de viga (viga simplesmente apoiada, perfeitamente encastrada,...), o betão e as suas características, o aço e as suas características, as ações, a categoria de exposição ambiental e a classe estrutural. Para a introdução manual destes valores, é necessário associar uma variável ao valor que se pretende adicionar. A variável poderá ser representada em letras e números e será constante ao longo do código, ficando guardada entre as restantes variáveis a partir do momento que se executa o código. Só poderá ser alterada se em alguma parte do código for atribuído outro valor à variável. No entanto, na realização de cálculos e verificações de segurança estrutural, o valor da variável associado será sempre usado. Tomamos por exemplo o Código 1, que cria variáveis, realiza operações e valida valores.

```
h=0.50 #altura (m)
b=0.30 #base (m)
A=b*h #área(m^2)
print(A)
print(h>b)
print(h<b)
```

```
0,15
True
False
```

Código 1 – Exemplo de inserção de variáveis, realização de operações e validação de valores no *Jupyter Notebook*

Para não introduzir todos os valores manualmente e para serem compatíveis com o *Robot*, importou-se o *Excel* com os valores extraídos do *Robot* através do comando *pd.read\_excel*.

Foi também necessário introduzir os caminhos das pastas onde os ficheiros *Excel* se encontram. Também se colocou o caminho de imagens pré-definidas, assim como o caminho da pasta para onde queremos colocar as imagens de saída, que serão usadas no relatório, e o caminho da pasta onde queremos que o relatório de cálculo seja guardado. Apenas se colocam estes caminhos caso os ficheiros não pertençam à mesma pasta.

Através dos comandos *loc* ou *iloc*, é possível filtrar o valor pretendido e associá-lo à variável, que anteriormente tinha sido inserida manualmente. Apenas alguns *INPUTS* são introduzidos manualmente, pois não são extraídos do *Robot*. Estes valores são o recobrimento, a largura de influência, a altura da laje à esquerda e à direita, o tipo de cimento, o tipo de ambiente agressivo, a classe do aço, a categoria de exposição ambiental e a classe estrutural.

Com os dados importados, passa-se ao processamento de dados e a interação do utilizador com estes dados. Primeiramente, é necessário definir as características principais dos materiais da viga, betão e aço. Através de um *Excel* com os valores tabelados dos quadros do Eurocódigo 2 é possível filtrar os valores característicos de resistência e deformação destes materiais, utilizando a lógica de importar o *Excel* e filtrar com o *iloc* e o *loc*. De seguida, é possível calcular a fluência e a retração do betão. Inseriu-se no código os cálculos necessários para a obtenção destes valores, conforme mostra o Código 2 e o Código 3, respetivamente.

```

if ambiente=='interior': RH=50
elif ambiente=='exterior': RH=80
if cimento=='S': alfa_cim=-1
elif cimento=='N': alfa_cim=0
elif cimento=='R': alfa_cim=1
t0=float(f'{{(max(t0_T*((9/(2+t0_T**1.2))+1)**alfa_cim,0.5)):.2f}}')
alfa_1=float(f'{{((35/fcm)**0.7):.3f}}')
alfa_2=float(f'{{((35/fcm)**0.2):.3f}}')
alfa_3=float(f'{{((35/fcm)**0.5):.3f}}')
if fcm<=35: fi_RH=float(f'{{(1+(1-RH/100))/(0.1*h0**(1/3))):.3f}}')
else: fi_RH=float(f'{{(1+(1-RH/100))/(0.1*h0**(1/3))*alfa_1)}*alfa_2):.3f}}')
beta_fcm=float(f'{{(16.8/(fcm**0.5)):.3f}}')
beta_t0=float(f'{{(1/(0.1+t0**0.2)):.3f}}')
fi_0=float(f'{{(fi_RH*beta_fcm*beta_t0):.3f}}')
t_projeto_dias=t_projeto*365
if fcm<=35: beta_H=float(f'{{(min(1.5*(1+(0.012*RH)**18)*h0+250,1500)):.3f}}')
else:
beta_H=float(f'{{(min(1.5*(1+(0.012*RH)**18)*h0+250*alfa_3,1500*alfa_3)):.3f}}')
beta_t_t0=float(f'{{((t_projeto_dias-t0)/(beta_H+t_projeto_dias-
t0)**0.3):.3f}}')
fi_t_t0=float(f'{{(beta_t_t0*fi_0):.3f}}')
fi_t_infinito=float(f'{{(1*fi_0):.3f}}')
k_fluencia=float(f'{{(1+fi_t_infinito):.3f}}')

```

Código 2 – Cálculo da fluência no *Jupyter Notebook*

```

if cimento=='S':
    alfa_ds1=3
    alfa_ds2=0.13
elif cimento=='N':
    alfa_ds1=4
    alfa_ds2=0.12
elif cimento=='R':
    alfa_ds1=6
    alfa_ds2=0.11
beta_ds_t_ts=(t_10000-ts)/((t_10000-ts)+(0.04*math.sqrt(h0**3)))
if h0<=100: kh=1
elif h0>100 and h0<200: kh=1-(0.15)*(h0-100)/100
elif h0==200: kh=0.85
elif h0>200 and h0<300: kh=0.85-(0.1)*(h0-200)/100
elif h0==300: kh=0.75
elif h0>300 and h0<500: kh=0.75-(0.05)*(h0-300)/200
elif h0>=500: kh=0.7
beta_RH=1.55*(1-(RH/100)**3)
ecd_0=0.85*((220+110*alfa_ds1)*math.exp(-alfa_ds2*fcm/10))*beta_RH*0.000001
ecd=ecd_0*kh*beta_ds_t_ts
beta_as_t=1-math.exp(-0.2*t_10000**0.5)
eca_inf=2.5*(fck-10)*0.000001
eca=eca_inf*beta_as_t
ecs=ecd+eca

```

Código 3 – Cálculo da retração no *Jupyter Notebook*

Os próximos valores a serem calculados são os valores e os diagramas de esforço transversal e momento fletor atuantes. No início do projeto, usaram-se modelos de vigas conhecidos para facilitar estes cálculos. Através de uma viga simplesmente apoiada e outra perfeitamente encastrada foi possível encontrar rapidamente estes valores, pois ambos são conhecidos e têm expressões de fácil uso (REIS, et al., 2012). No entanto, o desafio seria programar qualquer modelo de viga, sem conhecer a expressão a ser usada. A solução encontrada foi o *Robot*, que tem a capacidade de obter os diagramas de esforço transversal e de momento fletor para cada secção da viga e para cada combinação de ações, obtendo-se valores mais precisos. Após extrairmos estes valores com recurso ao *Excel*, é possível importá-los para o *Jupyter Notebook*. Através do *Pandas* é também possível filtrar cada coluna da tabela para cada caso, através de *loops for*, e obter listas, *list*, para cada valor de esforço transversal e momento fletor, considerando as várias combinações de ações. Por fim, através destas listas tira-se o primeiro e o último valor para se obter o valor de esforço transversal à esquerda e à direita, respetivamente. E, através desta lógica, obtém-se o valor do momento fletor negativo à esquerda e à direita, respetivamente. Com o comando *max* é possível obter o valor de momento fletor máximo positivo. Ainda se calcula o momento fletor crítico para a secção retangular. Assim, o utilizador tem as ferramentas todas para projetar as soluções de armadura para a viga.

Primeiro, o processo de cálculo avalia os estribos. O Eurocódigo 2 define uma área de armadura mínima transversal e um espaçamento máximo. Para além disso, é possível calcular a área de armadura necessária, pois sabe-se o valor do esforço transversal máximo atuante. O cálculo destes valores encontra-se no Código 4.

```
#Necessária
asw1=Vmax/(z1*fyd*0.1*2.5)

#Mínima e slmáximo
aswmin=b*0.08*math.sqrt(fck)/fyk*10000
slmax1=0.75*d*100
```

Código 4 – Cálculo da área de armadura transversal necessária, mínima e espaçamento máximo no *Jupyter Notebook*

Através destes valores, foi possível programar uma sugestão de armadura transversal. Através de uma hipótese de armadura transversal e espaçamento entre estribos, é possível saber a área de armadura transversal, como mostra a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Área de armadura transversal

Ramos	φ (mm)	Espaçamento entre estribos em cm e secções em cm <sup>2</sup> /m												
		10	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5	30	32,5	35	37,5	40
2	6	5,65	4,52	3,77	3,23	2,83	2,51	2,26	2,06	1,88	1,74	1,62	1,51	1,41
2	8	10,05	8,04	6,70	5,74	5,03	4,47	4,02	3,66	3,35	3,09	2,87	2,68	2,51
2	10	15,71	12,57	10,47	8,98	7,85	6,98	6,28	5,71	5,24	4,83	4,49	4,19	3,93
3	6	8,48	6,79	5,65	4,85	4,24	3,77	3,39	3,08	2,83	2,61	2,42	2,26	2,12
3	8	15,08	12,06	10,05	8,62	7,54	6,70	6,03	5,48	5,03	4,64	4,31	4,02	3,77
3	10	23,56	18,85	15,71	13,46	11,78	10,47	9,42	8,57	7,85	7,25	6,73	6,28	5,89
4	6	11,31	9,05	7,54	6,46	5,65	5,03	4,52	4,11	3,77	3,48	3,23	3,02	2,83
4	8	20,11	16,08	13,40	11,49	10,05	8,94	8,04	7,31	6,70	6,19	5,74	5,36	5,03
4	10	31,42	25,13	20,94	17,95	15,71	13,96	12,57	11,42	10,47	9,67	8,98	8,38	7,85

Por isso, o valor sugerido será o que terá o primeiro valor de área de secção maior que o máximo entre a armadura mínima e necessária e cujo espaçamento não ultrapasse o espaçamento máximo, como é possível observar no Código 5.

```

avaroes1=pd.read_excel(caminho_valores_tabelados, sheet_name='Estribos')
avaroes2=avaroes1.drop(columns=['Ramos','f (mm)'])
espa_varoes=[10, 12.5, 15, 17.5, 20, 22.5, 25, 27.5, 30, 32.5, 35, 37.5, 40]
espa_varoes1=[number for number in espa_varoes if number<=slmax1]
slmaxi=espa_varoes1[-1]
avaroes3=avaroes2.loc[:, 10:slmaxi]
a_val2=max(aswmin, asw1)
avaroes4=avaroes3[avaroes3>a_val2]
desc2=avaroes4.describe()
minimo2=desc2.loc['min', :].min()
minimo21_dist_varoes=desc2.loc['min', :].idxmin()
linha_estribo=avaroes1.loc[avaroes1[minimo21_dist_varoes]==minimo2]
ramos4=linha_estribo.iloc[0,0]
estribo4=linha_estribo.iloc[0,1]

```

Código 5 – Sugestão de armadura transversal no *Jupyter Notebook*

O esquema da Figura 3.4 mostra a área a verde, região onde se encontram todas as soluções de áreas de armadura transversal que satisfazem as 3 condições. E é possível programar o código para escolher a solução mais económica (a que tem o valor mais baixo).

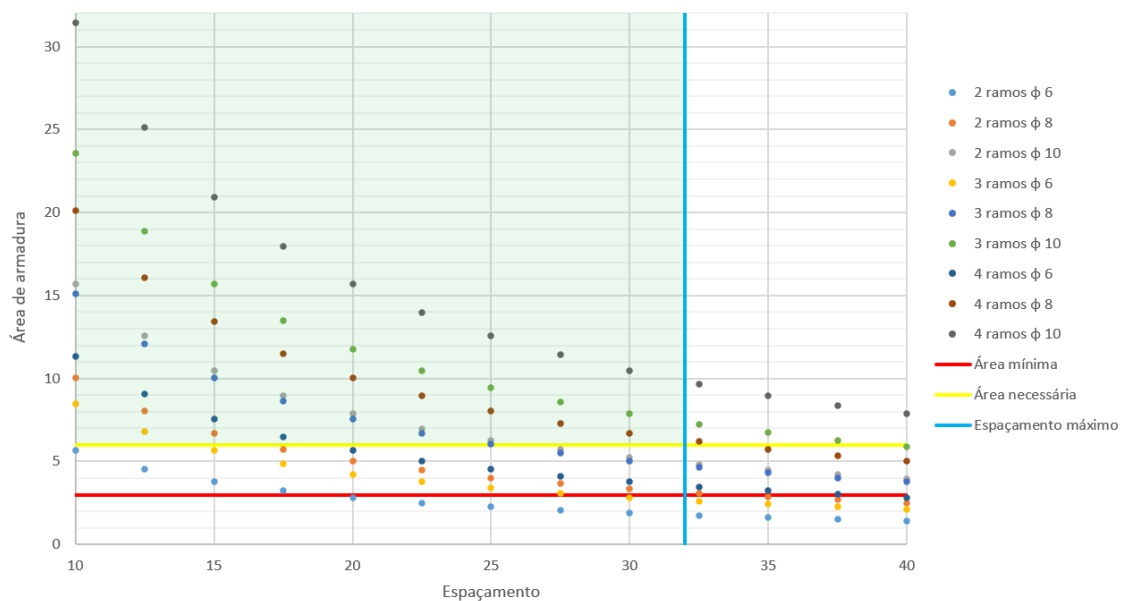


Figura 3.4 – Esquema de sugestão de armadura transversal

No entanto, a sugestão não significa que será a solução adotada pelo utilizador. Através de *widgets*, é possível escolher o número de ramos, o diâmetro da armadura e o espaçamento. Também é possível definir mais do que um nível de estribos, com a liberdade de o utilizador deslocá-lo ao longo da secção. De seguida, com os valores escolhidos pelo utilizador, o processo de cálculo atribui a hipótese de estribos como solução possível, dependendo do cumprimento das disposições construtivas para os estribos. Caso não cumpra, ou esteja fora da zona verde, o utilizador será avisado que a hipótese não é viável.

O processo de sugestão segue o mesmo padrão para a armadura longitudinal, em que é obrigatório uma área de armadura mínima e máxima, para além do cálculo da área de armadura necessária e distância livre. Para o cálculo da armadura necessária, usou-se a função *fsolve* com base no método de distribuição retangular, conforme o Código 6.

```
#Armadura longitudinal mínima
asmin_1=0.26*(fctm/fyk)*b*d*10000
asmin_2=0.0013*b*d*10000
lista_asmin=[asmin_1, asmin_2]
asmin=max(lista_asmin)

#Armadura longitudinal máxima
asmax=0.04*ac*10000

#Armadura longitudinal necessária
#Método distribuição retangular
if fck<=50: lambda_met3=0.8
else: lambda_met3=0.8-((fck-50)/400)
if fck<=50: eta_met3=1
else: eta_met3=1-((fck-50)/200)
arm_nec=[]
for Mmax in [MEdmax_p, -MEdmax_n_esq, -MEdmax_n_dir]:
    def nlsistema(var1):
        (asn1,x1)=var1
        eq1=lambda_met3*x1*b*eta_met3*fcd*1000*(d-0.4*x1)-Mmax
        eq2=asn1*fyd*0.1*(d-0.4*x1)-Mmax
        return [eq1,eq2]
    s0=np.array([0,0])
    s=fsolve(nlsistema, s0)
    asn1=s[0]
    arm_nec.append(asn1_f)
arm_nec_p=float(arm_nec[0])
arm_nec_n_esq=float(arm_nec[1])
arm_nec_n_dir=float(arm_nec[2])
```

Código 6 – Cálculo da área de armadura longitudinal mínima, máxima e necessária no *Jupyter Notebook*

Também, foi possível programar algumas sugestões de armadura longitudinal, sabendo que é possível relacionar o número de varões com o diâmetro de varões, como mostra a Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Área de armadura longitudinal

φ (mm)	Número de varões e secções em cm <sup>2</sup>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,03
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85
12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	11,31
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10	20,11
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27	31,42
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09
32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38	80,42

A Figura 3.5 mostra, a verde, todas as soluções que satisfazem as condições requeridas. O código foi programado para mostrar as 5 mais económicas, que poderão ser adotadas ou não.

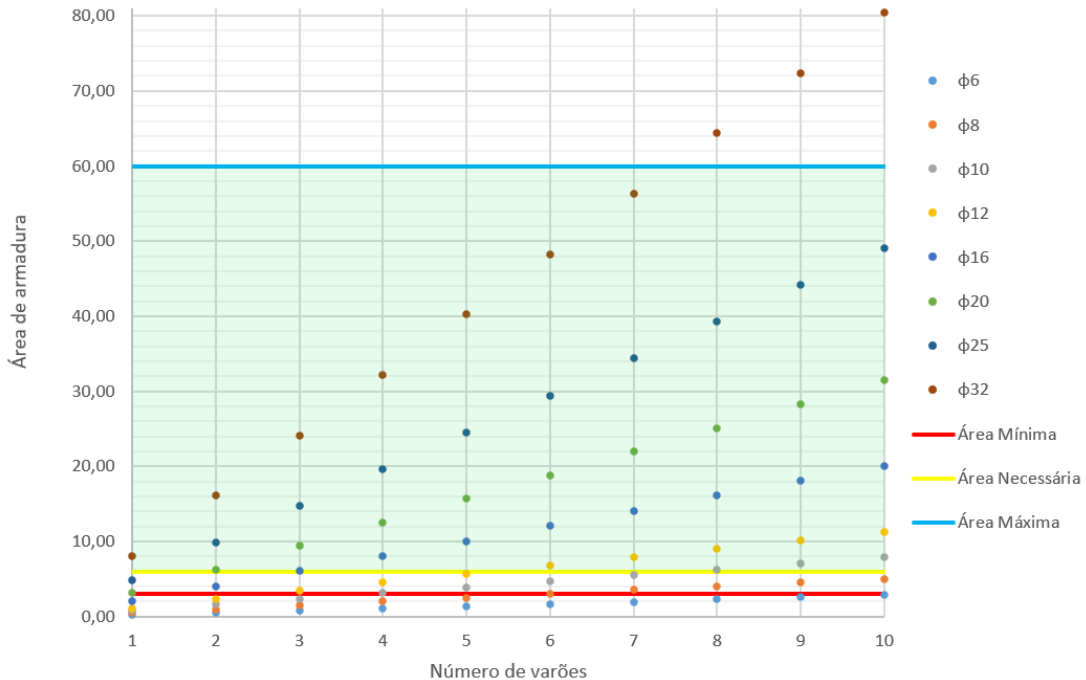


Figura 3.5 – Esquema de sugestão de armadura longitudinal

No caso das combinações de armaduras, o código fará mais do que apenas avaliar a área de armadura máxima, mínima e necessária e a distância livre. Irá avaliar se o número de armaduras a combinar não são ambos ímpares, para manter a simetria de distribuição de armaduras na secção. Avaliará ainda se os diâmetros das armaduras utilizadas são próximos.

Também, através de uma análise das listas dos valores de momento fletor em cada secção, é possível obter, por interpolação, as secções onde o valor de momento fletor é nulo e arredondar para o valor múltiplo de 0,05 m mais próximo. Com estes valores é possível dar a liberdade de o utilizador decidir até onde poderá colocar a armadura. Assim, com todos os dados das armaduras longitudinais, o utilizador decidirá qual a solução mais adequada. É necessário definir uma armadura longitudinal inferior, que poderá ter uma dispensa, e uma armadura superior à esquerda, à direita e central.

Através da Figura 3.6 e Figura 3.7, é possível observar o que o utilizador visualiza quando tem de decidir acerca das armaduras e dos seus respetivos níveis. Estas são imagens auxiliares e que fazem parte do caminho da pasta de imagens a importar no *Jupyter Notebook*.

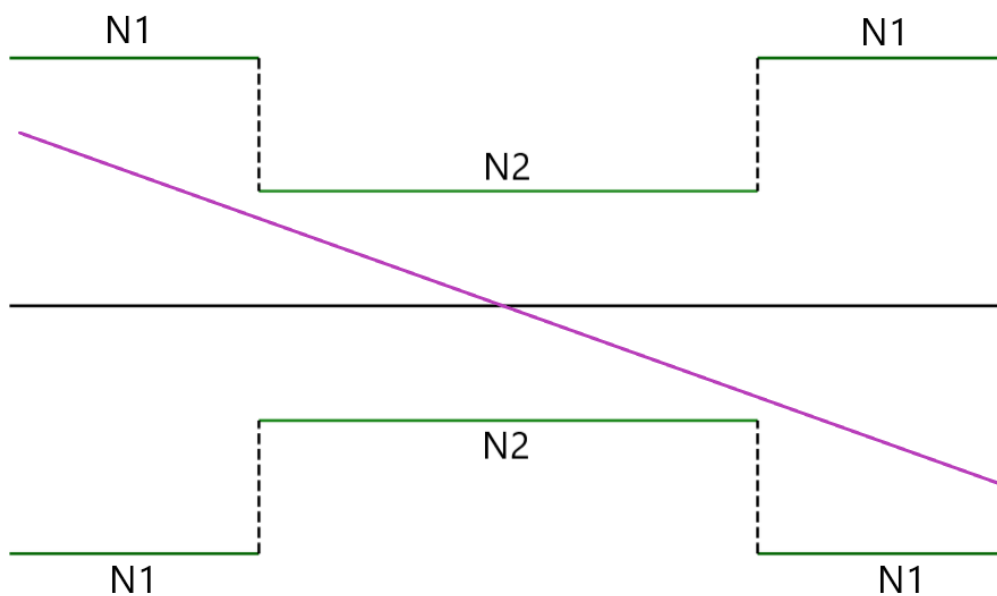


Figura 3.6 – Imagem ilustrativa da disposição das armaduras transversais

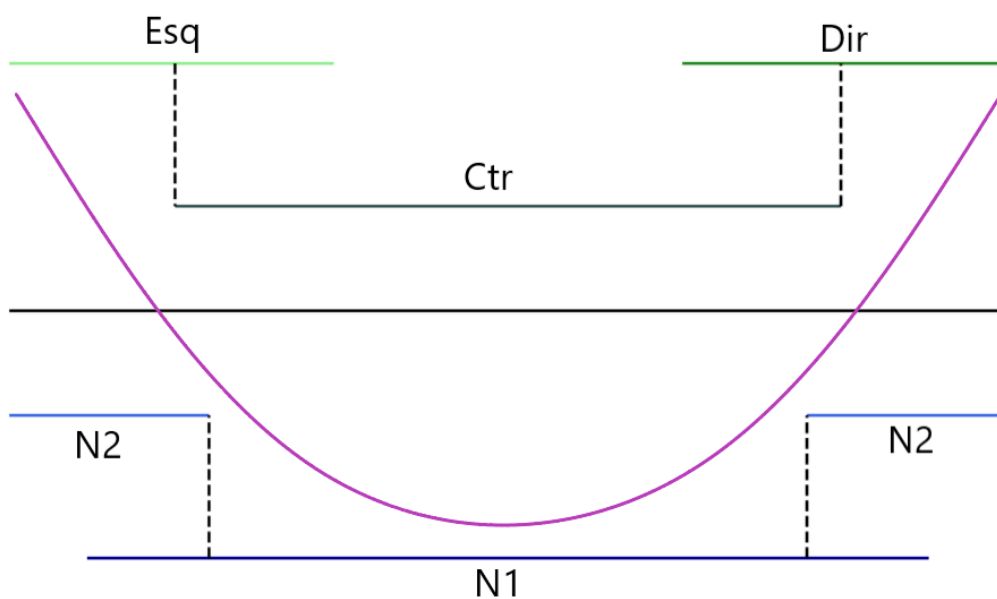


Figura 3.7 – Imagem ilustrativa da disposição das armaduras longitudinais

Através de *widgets* interativos, o utilizador pode mudar a posição dos varões, e manter ou retirar varões. Os *widgets* já têm preparados os dados para terem as informações da área de armadura, distância livre, o valor de  $al + lbd$  e as secções de momento fletor nulo, tudo com base nas decisões do projetista e alterações que pode realizar. Também, a partir destes valores, é possível obter cortes transversais, no início, a meio e no fim da viga, com as informações das armaduras transversais e longitudinais. Na Figura 3.8 é apresentado um exemplo de uma viga em consola.

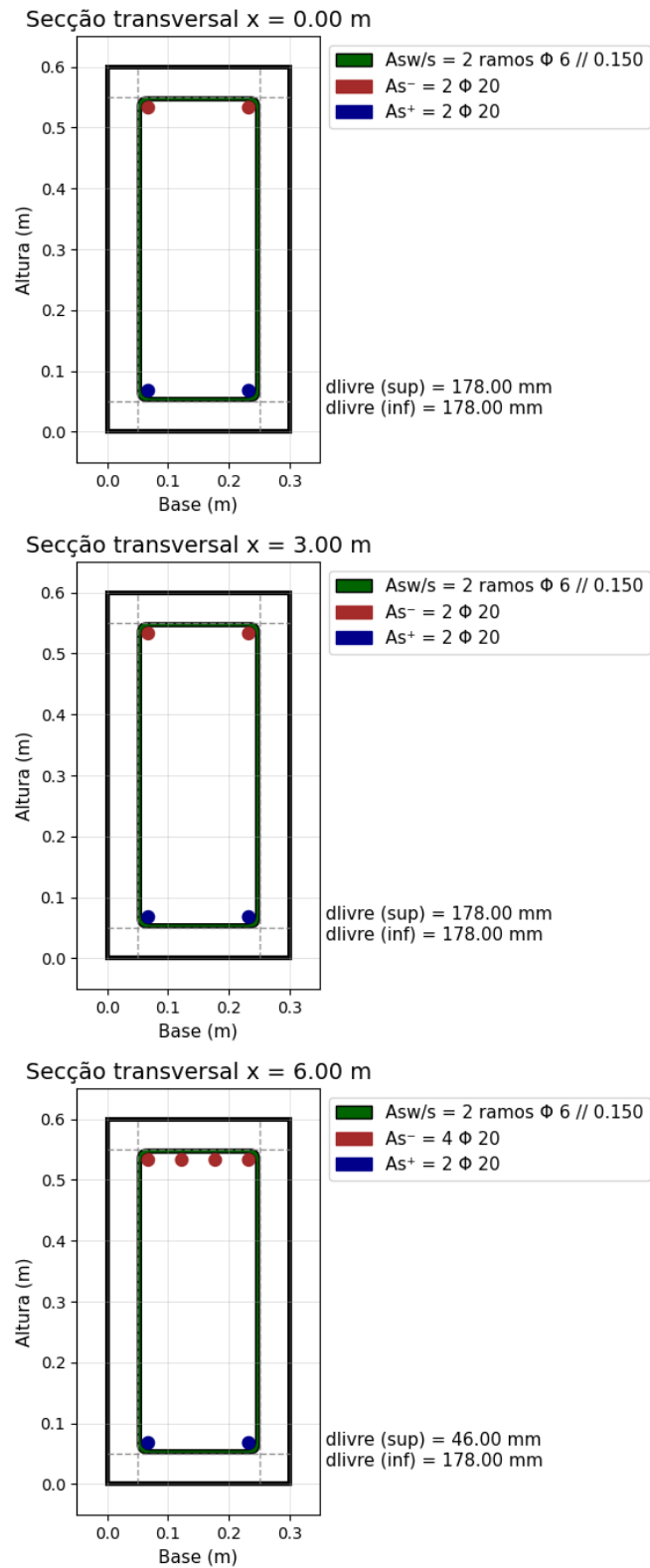


Figura 3.8 – Exemplos de cortes transversais da viga com as disposições de armaduras adotadas em várias secções

## 3.2 Procedimento de verificação de segurança

As decisões das armaduras até agora foram baseadas nas disposições construtivas das vigas. Mas é fundamental descobrir se, mesmo cumprindo as disposições mínimas, cumprem as verificações de segurança regulamentares.

### 3.2.1 Estados limites últimos

Para cumprir com o estado limite último, as armaduras terão de verificar a resistência à flexão e ao esforço transversal, algo que, em parte, já cumprem. E isso se deve à armadura necessária. Anteriormente, foi efetuada o cálculo desta armadura com base nos valores de esforço transversal e momento fletor atuantes extraídos do *Robot*. Por isso, se as armaduras escolhidas assegurarem que os esforços resistentes são superiores ao respetivo esforço atuante, então já terão a capacidade de resistir ao efeito de flexão e esforço transversal. No entanto, no caso da flexão, usou-se o terceiro método mencionado no capítulo 2. Portanto, repetiu-se o cálculo de forma a comparar resultados.

Através dos diagramas de momentos fletores, é possível obter o momento fletor atuante para os estados limites últimos. E através da armadura escolhida retira-se os valores dos momentos fletores resistentes. Para ser mais eficaz, criaram-se várias listas vazias de valores para armazenar todos os resultados possíveis e, através de um *loop* pelos momentos fletores atuantes e áreas de armadura, foi possível selecionar os valores dos momentos fletores resistentes de cada armadura. O primeiro método está representado no Código 7.

```

FS1_ap=[]
FC1_ap=[]
x1_ap=[]
MRd_app=[]
es1_app=[]
extensão_app=[]
momento_app=[]
for a2 in [a2_p1, a2_n_esq, a2_n_dir]:
    for Mmax in [MEdmax_p, MEdmax_n_esq, MEdmax_n_dir]:
        #Momento Resistente
        #Cálculo x e z
        FS1=a2*fyd*0.1
        FC1=((ecu2-ec2)/ecu2)+(2/3)*(ec2/ecu2)*b*fcd*1000
        x1=FS1/FC1
        #Cálculo MRd
        MRd=b*fcd*1000*(((ecu2-ec2)/ecu2)*x1*(d-0.5*((ecu2-ec2)/ecu2)*x1)+
            (2/3)*(ec2/ecu2)*x1*(d-((ecu2-ec2)/ecu2)*x1-(3/8)*(ec2/ecu2)*x1))
        #Cálculo εs
        es1=(3.5*(d-x1))/x1
        FS1_ap.append(FS1_f)
        FC1_ap.append(FC1_f)
        x1_ap.append(x1_f)
        MRd_app.append(MRd_f)
        es1_app.append(es1_f)
        extensão_app.append(extensão)
        momento_app.append(momento)

```

Código 7 – Método 1: Diagrama Parábola-retângulo no *Jupyter Notebook*

Também se retirou o valor do rácio do momento atuante com o resistente. O método 2 é semelhante ao primeiro, de acordo com o Código 8.

```

for a2 in [a2_p1, a2_n_esq, a2_n_dir]:
    for Mmax in [MEdmax_p, MEdmax_n_esq, MEdmax_n_dir]:
        FS2=a2*fyd*0.1
        FC2=((ecu3-ec3)/ecu3)+0.5*(ec3/ecu3)*b*fcd*1000
        x2=FS2/FC2
        MRd=b*fcd*1000*(((ecu3-ec3)/ecu3)*x2*(d-0.5*((ecu3-ec3)/ecu3)*x2)+
            0.5*(ec3/ecu3)*x2*(d-((ecu3-ec3)/ecu3)*x2-(1/3)*(ec3/ecu3)*x2))
        es2=(3.5*(d-x2))/x2

```

Código 8 – Método 2: Diagrama bilinear no *Jupyter Notebook*

O terceiro método está representado no Código 9.

```

for a2 in [a2_p1, a2_n_esq, a2_n_dir]:
    for Mmax in [MEdmax_p, MEdmax_n_esq, MEdmax_n_dir]:
        FS1=a2*fyd*0.1
        FC1=((ecu2-ec2)/ecu2)+(2/3)*(ec2/ecu2)*b*fcd*1000
        x1=FS1/FC1
        MRd=b*fcd*1000*(((ecu2-ec2)/ecu2)*x1*(d-0.5*((ecu2-ec2)/ecu2)*x1)+
            (2/3)*(ec2/ecu2)*x1*(d-((ecu2-ec2)/ecu2)*x1-(3/8)*(ec2/ecu2)*x1))
        es1=(3.5*(d-x1))/x1

```

Código 9 – Método 3: Distribuição retangular no *Jupyter Notebook*

O cálculo da resistência ao esforço transversal já foi anteriormente tratado e até sugerido, pelo que a solução de estribos foi escolhida com base nesta verificação.

Entretanto, se alguma destas verificações não for cumprida, então o utilizador deverá corrigir e tentar outra solução de armaduras ou corrigir o dimensionamento da viga.

### 3.2.2 Estados limites de utilização

Esta verificação engloba a resistência da peça à fendilhação e à deformação. Primeiramente, para a fendilhação, o cálculo da largura das fendas será efetuado para as secções cujo momento fletor seja superior ao momento fletor crítico. O limite de largura máxima da fenda é sempre constante. O cálculo da largura de fenda poderá ser traduzido conforme o Código 10.

```
for caso in casos_SLS_QPR:
    resultados_w_k[f'caso_{caso}']=[]
    for i in tabela_1_SLS_QPR_v2.index:
        momento_tab=tabela_1_SLS_QPR_v2.at[i, (f'{caso}', 'MEd')]
        area_tab=tabela_1_SLS_QPR_v2.at[i, ('', 'Área')]
        diam_varao_eq_tab=tabela_1_SLS_QPR_v2.at[i, ('', 'Diâmetro')]
        d_3_tab=tabela_1_SLS_QPR_v2.at[i, ('', 'd')]
        ro_tab=area_tab*0.0001/(b*d)
        b_r_tab=2*alfa_e*ro_tab
        alfa_tab=(-b_r_tab+math.sqrt(b_r_tab**2+4*b_r_tab))/2
        x_fend_tab=alfa_tab*d
        Cs_tab=1/(ro_tab*(1-(alfa_tab/3)))
        sigma_s_tab=Cs_tab*(momento_tab/(b*d**2))
        hc_eff_tab=min(2.5*(h-d), (h-x_fend_tab)/3, h/2)
        Ac_eff_tab=hc_eff_tab*b
        ro_p_eff_tab=(area_tab*0.0001)/Ac_eff_tab
        esm_ecm_tab=max((sigma_s_tab-0.4*(fctm*1000/ro_p_eff_tab)*
            (1+alfa_e*ro_p_eff_tab))/200000000, 0.6*(sigma_s_tab/200000000))
        Sr_max_tab=3.4*(c-((diam_varao_eq_tab*0.001)/2))+
            (0.8*0.5*0.425*diam_varao_eq_tab*0.001)/ro_p_eff_tab
        if momento_tab<-M_cr_fend or momento_tab>M_cr_fend:
            w_k_tab=Sr_max_tab*(esm_ecm_tab)*1000
        else: w_k_tab=float(0.0)
    resultados_w_k[f'caso_{caso}'].append(w_k_tab)
```

Código 10 – Cálculo exato da abertura das fendas no *Jupyter Notebook*

Caso o valor de  $w_k$  seja superior ao  $w_k$  máximo é necessário escolher uma nova solução de armadura. Entretanto, de forma a evitar voltar atrás para uma nova solução, é possível sugerir soluções de armaduras que cumpram com este critério. Também é calculado um rácio entre o valor da fenda e valor limite máximo.

Para o cálculo da deformação, traduziram-se os métodos no *Jupyter Notebook*. Um dos métodos é o cálculo sem considerar a flecha, conforme o Código 11.

```

if caso_viga=='Viga Simplesmente Apoiada': K=1
elif caso_viga=='Viga Perfeitamente Encastrada': K=1.5
else: K=1.3
ro_0=0.001*math.sqrt(fck)
if ro_p<=ro_0:
    l_d_max=K*(11+1.5*math.sqrt(fck)*(ro_0/ro_p)+
    3.2*math.sqrt(fck)*(((ro_0/ro_p)-1)**(3/2)))
elif ro_p>ro_0:
    l_d_max=K*(11+1.5*math.sqrt(fck)*(ro_0/(ro_p-ro_n_ctr))+
    1/12*math.sqrt(fck)*math.sqrt(ro_n_ctr/ro_0))
l_d=l/d

```

Código 11 – Cálculo da deformação sem considerar a flecha no *Jupyter Notebook*

O Código 12 mostra outro método de cálculo, através do cálculo analítico:

```

beta_def=0.5
lamda_def=0.104*(1-
0.1*((abs(MEdmax_SLS_QPR_n_esq)+abs(MEdmax_SLS_QPR_n_dir))/MEdmax_SLS_QPR_p))
Ec_eff=Ec*1000/(1+fi_0)
alfa_e_def=200000/Ec_eff
A_def=b*h+(alfa_e_def-1)*(a2_p1*0.0001+a2_n_ctr*0.0001)
x_un=(0.5*b*h**2+(alfa_e_def-1)*(a2_p1*0.0001*d+a2_n_ctr*0.0001*dc))/A_def
I_un=(1/3)*b*(x_un**3)+(1/3)*b*((h-x_un)**3)+(alfa_e_def-1)*((x_un-
dc)**2)*a2_n_ctr*0.0001+(alfa_e_def-1)*((d-x_un)**2)*a2_p1*0.0001
Mcr=fctm*1000*I_un/(h-x_un)
if Mcr<MEdmax_SLS_CHR_p:
    zeta_def=1-beta_def*(Mcr/MEdmax_SLS_CHR_p)**2
else: zeta_def_f=0
x_cr_p1=a2_p1*0.0001*alfa_e_def+a2_n_ctr*0.0001*(alfa_e_def-1)
x_cr_p2=a2_p1*0.0001*alfa_e_def*d+a2_n_ctr*0.0001*dc*(alfa_e_def-1)
x_cr=(-x_cr_p1+math.sqrt(x_cr_p1**2+2*b*x_cr_p2))/b
I_cr=(1/3)*b*(x_cr**3)+(alfa_e_def-1)*((x_cr-
dc)**2)*a2_n_ctr*0.0001+alfa_e_def*((d-x_cr)**2)*a2_p1*0.0001
um_rn=zeta_def*MEdmax_SLS_QPR_p/(Ec_eff*1000*I_cr)+(1-
zeta_def)*MEdmax_SLS_QPR_p/(Ec_eff*1000*I_un)
S_cr=a2_p1*0.0001*(d-x_cr)-a2_n_ctr*0.0001*(x_cr-dc)
S_un=a2_p1*0.0001*(d-x_un)-a2_n_ctr*0.0001*(x_un-dc)
um_rcs=zeta_def*alfa_e_def*ecs*(S_cr/I_cr)+(1-
zeta_def)*alfa_e_def*ecs*(S_un/I_un)
um_rT=um_rcs+um_rn
flecha_2=um_rT*lamda_def*1**2

```

Código 12 – Cálculo exato da flecha no *Jupyter Notebook*

Para além destes métodos, outra das estratégias para o cálculo da deformação é através de um valor tabelado, com um valor aproximado do valor exato, mas que é apenas válida para algumas tipologias de viga. Com a introdução dos valores extraídos do *Robot*, foi possível extrair o valor mais exato da deformação. Através do valor da deformação de cada caso de carga, permanentes e variáveis, foi possível associá-los para a verificação do limite de  $L/250$  e o limite opcional de  $L/500$ . O utilizador deve indicar quais os casos de carga correspondem a cargas variáveis. Com esta informação, o *Jupyter Notebook* calcula a deformação e, assim como no caso da fendilhação, é calculado o rácio entre a flecha e o limite.

### 3.3 Exportação do relatório de cálculo

Através da biblioteca *Python-docx* (python-docx, 2013), é possível criar, desenvolver e exportar um relatório detalhado de cálculo para a solução encontrada. Primeiro cria-se um documento *Microsoft Word* vazio. É possível adicionar um título, cabeçalhos, rodapés, *headings* (subtemas), imagens, tabelas e processos de cálculo. O relatório sairá sempre com o mesmo formato, apenas os valores estarão diferentes, para diferentes casos. Para os cálculos, é possível chamar as variáveis que foram armazenadas ao longo do programa e escrever o processo de cálculo que originaram esses valores. O relatório também terá uma componente visual para facilitar a percepção do utilizador, destacando as principais verificações na página de rosto, que terá os valores e rácios a verde, caso verifiquem, ou a vermelho, se não verificarem. Por fim, é possível exportar o relatório *Word* e converter para *pdf*.

De forma resumida, a Figura 3.9 apresenta um fluxograma de decisões que o utilizador deve tomar ao realizar o processo de análise e o dimensionamento de uma viga. Existem 2 decisões importantes a realizar, se as sugestões de armaduras e as verificações de segurança verificam. Caso não verifiquem, o utilizador terá de alterar algum aspeto do modelo inicial no Robot.

Também é importante referir o uso de diversas ajudas de *libraries* e tutoriais *online* para conseguir realizar todo o tipo de cálculos desta linguagem. Mas em certas circunstâncias em que não existiam soluções *online* e não se conseguia usar as fórmulas mais básicas, recorreu-se à inteligência artificial disponível no *Chat-GPT* (Chat GPT, 2022), para verificar a existência de uma solução. Apenas se recorria a esta solução caso não se encontrasse a solução manualmente e existiu sempre a confirmação e validação de valores gerados pela IA.

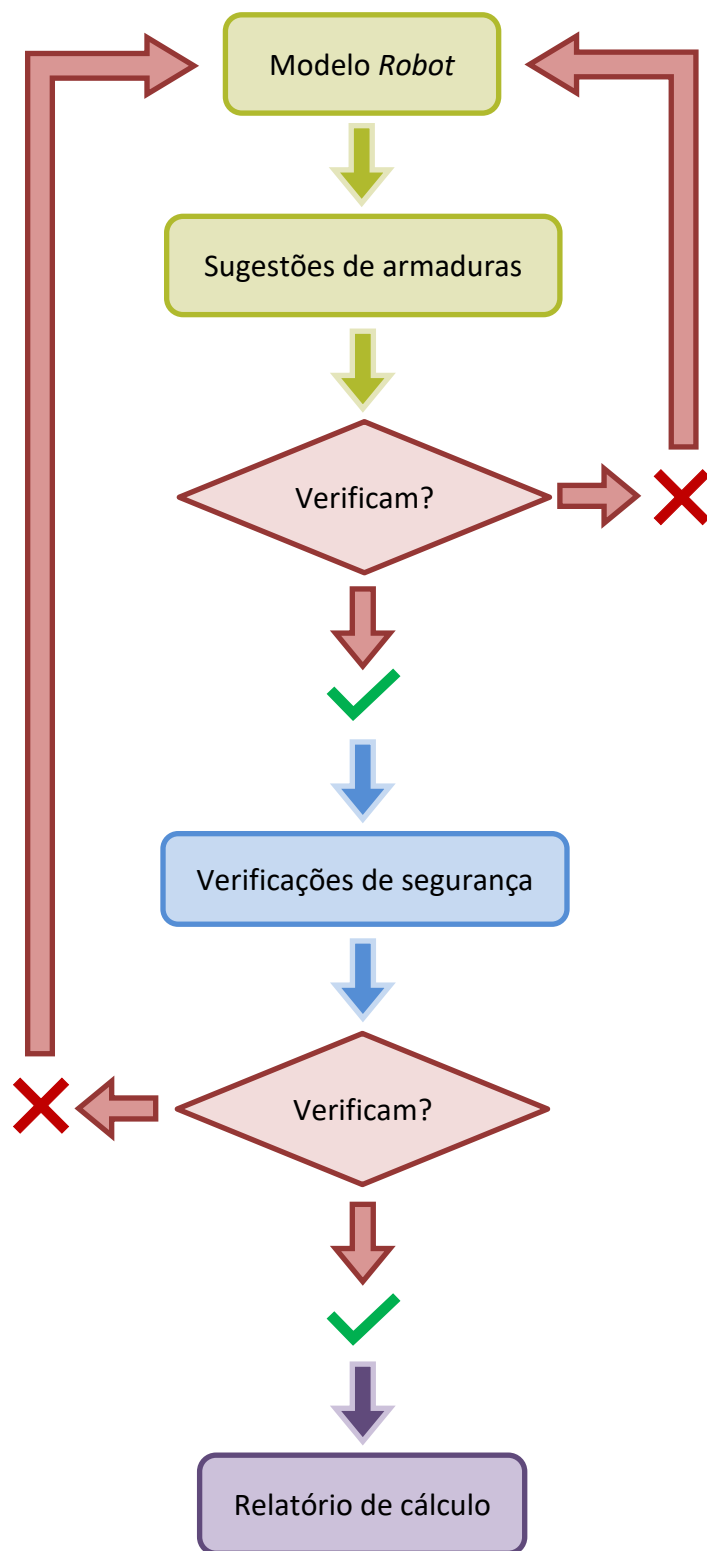


Figura 3.9 – Fluxograma de decisões a tomar no processo de análise e dimensionamento na linguagem *Python*



## 4 Integração do processo de cálculo em softwares de modelação AEC

Ao longo do desenvolvimento do projeto, um dos desafios foi a ligação entre o *software Robot* e a linguagem *Python*. Isto porque os *INPUTS* têm de ser compatíveis e imutáveis ao longo de todo o processo. Por isso, os valores introduzidos no *Robot* serão extraídos para o *Excel* e depois para o *Python*, em vez de serem introduzidos manualmente.

Neste momento do projeto, foi necessário modelar uma viga no *Robot* e definir que tipo de betão se vai usar, as dimensões da secção, as rótulas (*Releases*), as ações e as combinações de ações. Os *Releases* poderão ser definidos como *Pinned*, apoio duplo, ou *Fixed*, apoio encastrado, dando a possibilidade de ter desde uma viga simplesmente apoiada até uma viga perfeitamente encastrada. Mas, também existe a possibilidade de atribuir uma ligação elástica. Portanto, existe uma vasta variedade de apoios.

A vantagem de definir estes valores no *Robot* é que, automaticamente, o programa calcula valores de esforço transversal, momento fletor e deformação para cada secção da viga, para cada combinação de ações. Apesar de existirem cálculos simples e rápidos para vigas simplesmente apoiadas, algo que se usou na primeira fase do projeto, a automatização destes dados no *Robot* permitiu alargar a variedade de tipos de vigas, como, por exemplo, para quando vigas têm *Releases* diferentes, com percentagens de momentos flectores diferentes. Após o cálculo dos valores no *Robot*, é possível aceder aos diagramas de esforço transversal, momento fletor e deformação, e respetivas tabelas, cujos valores serão extraídos para o *Excel*, através do *Visual Basic for Applications (VBA)*.

Primeiramente, na primeira folha do *Excel*, é necessário colocar os dados de entrada, nas células a amarelo, nomeadamente, o número da viga e o número de secções a dividi-la. No *Robot*, facilmente se identifica o número da viga, através do número da barra do *Robot*. Também é necessário introduzir o número de secções pelos quais se vai dividir a secção da viga em partes iguais, sendo que quanto maior for a divisão mais exato será o resultado, mas mais demorado será o tempo de extração de valores. Também é necessário colocar qual a combinação ou combinações de ações correspondentes ao estado limite último, ao estado limite de utilização para ações características, frequentes e quase-permanentes. Por fim, colocaram-se os casos de carga, permanentes e variáveis (para a deformação).

A Figura 4.1 mostra como está organizada a primeira folha do Excel e os locais onde se devem inserir os valores, a amarelo. O botão laranja irá executar a extração de valores. O botão cinzento limpará os valores. O botão azul só extrairá os valores da folha.

Seleção da Viga	1	Extrair Valores da Viga			Limpar tudo		
Número de Pontos	20						
Número da Barra	Nome	L (m)	B (m)	H (m)	Betão	Realeses	UniqueID (Rbar)
Combinacões							
ULS	100						
SLS - CHR	200						
SLS - FRE	300						
SLS - QPR	400						
Deformacão	1to10						

Extrair Tudo:  
Valores da Viga  
Mapas de Esforços  
Deformacão

Figura 4.1 – Valores a introduzir na primeira folha do Excel

Através do VBA foi possível extrair os dados bases do Robot para esta primeira folha do Excel, de acordo com o Código 13.

```

Set robapp = New RobotApplication
Set Sel_Barra = robapp.Project.Structure.Selections.Create(I_OT_BAR)
Sel_Barra.FromText ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(1, 2)
Set BarCol = robapp.Project.Structure.Bars.GetMany(Sel_Barra)

For i = 1 To BarCol.Count
    Set RBar = BarCol.Get(i)
    barNumber = RBar.Number
    BarStr = Str(barNumber)
    Set RLabel = RBar.GetLabel(I_LT_BAR_SECTION)
    Set RL = RBar.GetLabel(I_LT_BAR_RELEASE)
    SectionName = RLabel.Name
    Set RBSD = RLabel.Data
    Set RBSCRD = RBSD.Concrete
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 1) = RBar.Number
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 2) = RBar.Name
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 3) = RBar.Length
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 4) = RBSCRD.GetValue(I_BSCDV_BEAM_B)
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 5) = RBSCRD.GetValue(I_BSCDV_BEAM_H)
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 6) = RBSD.MaterialName
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 7) = RL.Name
    ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(4+i, 8) = RBar.UniqueId
Next i

```

Código 13 – Extração de valores iniciais para a primeira folha Excel

Primeiro, permite-se a interação do *Excel* com o *Robot*, de forma a retirar valores, e realiza-se uma limpeza de valores (*ClearContents*). De seguida, cria-se uma seleção de barras a partir do valor introduzido do número da barra. Isto permite dar a informação da barra que se pretende extrair valores e criar uma coleção de informações sobre a barra. Daqui cria-se um ciclo *For* para cada informação da coleção de barras. Cada *loop* irá obter o número da viga, em *string*, os parâmetros da secção (comprimento da viga, largura da viga e altura da viga), os *Releases*, os dados específicos de betão e o ID único da barra.

O Código 14 permite a obtenção do número e nome de todos os casos de carga introduzidos no *Robot*, que são guardados na folha *Excel*:

```
Set Seleção_Combinações = robapp.Project.Structure.Selections.Create(I_OT_CASE)
Seleção_Combinações.FromText ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(12, 2)
Set
Coleção_Combinações=robapp.Project.Structure.Cases.GetMany(Seleção_Combinações)

For i_com = 1 To Coleção_Combinações.Count
Set Combinações_i = Coleção_Combinações.Get(i_com)
ThisWorkbook.Worksheets(7).Cells(1 + i_com, 1) = Combinações_i.Number
ThisWorkbook.Worksheets(7).Cells(1 + i_com, 2) = Combinações_i.Name
Next i_com
```

Código 14 – Obtenção dos casos de carga no *VBA*

Para retirar os valores de esforço transversal e momento fletor, para o estado limite último, desenvolveu-se o Código 15:

```
Set Seleção_Combinações= robapp.Project.Structure.Selections.Create(I_OT_CASE)
Seleção_Combinações.FromText ThisWorkbook.Worksheets(1).Cells(8, 2)
Set Coleção_Combinações=robapp.Project.Structure.Cases.GetMany
(Seleção_Combinações)

intervalo = ThisWorkbook.Worksheets(1).Range("B8").Value
If InStr(intervalo, "to") > 0 Then
partes = Split(intervalo, "to")
inicio_intervalo = Val(Trim(partes(0)))
fim_intervalo = Val(Trim(partes(1)))
Else
inicio_intervalo = Val(Trim(intervalo))
fim_intervalo = inicio_intervalo
End If
```

Código 15 – Extração de valores de esforço transversal e momento fletor no *VBA*

Este código seleciona a combinação de ações ou intervalo de combinações de ações, se a primeira e a última combinação estiverem separadas por "to". De seguida, para cada combinação de ações do estado limite último, é necessário obter 2 colunas, uma para o esforço transversal e outra para o momento fletor, enquanto houver combinações de ações. O Código 16 executa a extração destes dados.

```

coluna = 3
Do While Not IsEmpty(ThisWorkbook.Worksheets(2).Cells(1, coluna))
    valor_coluna = ThisWorkbook.Worksheets(2).Cells(1, coluna).Value
    N_Vigas = Colecção_Vigas.Count
    For i_barra = 1 To N_Vigas
        Set Barra_robot = Colecção_Vigas.Get(i_barra)
        ComprimentoBarra = Barra_robot.Length
        Npontos = ThisWorkbook.Worksheets(1).Range("B2")
        i_point = 0
        step_point = (ComprimentoBarra / Npontos) / ComprimentoBarra
        For relative_point = 0 To (1 + step_point / 2) Step step_point
            N_Combinações = Colecção_Combinações.Count
            For i_comb = 1 To N_Combinações
                Set Combinação_i = Colecção_Combinações.Get(i_comb)
                Set BarForceServer=robapp.Project.Structure.Results.Bars.Forces
                Numero_barra = Barra_robot.Number
                Num_Combinação =
                ThisWorkbook.Worksheets(2).Range(ColumnLetter(coluna)
                    & "1").Value
                relative_point = relative_point
                Set BFD = BarForceServer.Value(Numero_barra, Num_Combinação,
                    relative_point)
                ESF1 = BFD.FZ
                ESF2 = BFD.MY
            Next i_comb
            ThisWorkbook.Worksheets(2).Cells(Linha_Inicio+i_point, 1) = i_point
            ThisWorkbook.Worksheets(2).Cells(Linha_Inicio+i_point, 2) =
                relative_point * ComprimentoBarra
            ThisWorkbook.Worksheets(2).Cells(Linha_Inicio+i_point,
                ColumnLetter(coluna)) = ESF1 / 1000
            ThisWorkbook.Worksheets(2).Cells(Linha_Inicio+i_point,
                ColumnLetter(coluna + 1)) = ESF2 / 1000
            i_point = i_point + 1
        Next relative_point
    Next i_barra
    coluna = coluna + 2
Loop

```

Código 16 – Extração dos valores em *loop* no VBA

É possível observar que é obtido o valor do comprimento da viga, que será necessário para obter o valor de *step\_point*, ou a distância entre secções, consoante o número de secções em que a viga foi discretizada (*Npontos*). Daqui existe um *loop For* que itera sobre cada secção da viga, de 0 a 1, para cada combinação de ações, obtendo os valores de *ESF1* e *ESF2*. São os valores respetivos de esforço transversal e momento fletor para cada secção, para cada combinação de ações. Por fim, cria-se um quadro de resultados numa das folhas do *Excel*. A primeira coluna tem a contagem dos pontos, de 1 ao número de secções que a viga foi dividida, e a coluna 2 mostra a distância da secção à origem. Estas 2 colunas identificam cada secção da viga. As colunas seguintes devolvem o valor do esforço transversal e momento fletor para a primeira combinação de ações. Para as restantes combinações de ações, novas colunas são criadas, de duas em duas, com os valores respetivos de esforço transversal e momento fletor.

As restantes folhas do *Excel* apresentam as combinações de ações características, permanentes e quase-permanentes para estados limites de utilização. Irá obter-se os valores de esforço transversal e momento fletor para cada secção e combinação de ações. Por isso, o código será praticamente idêntico, com a diferença na seleção dos valores das combinações de ações e da folha onde sairão os resultados.

Por fim, para a obtenção dos valores da deformação teremos o Código 17. A diferença em relação ao código anterior é somente no valor a obter, que será *DSF* ou a deformação em cada secção, para cada caso.

```

coluna = 3
Do While Not IsEmpty(ThisWorkbook.Worksheets(6).Cells(1, coluna))
    valor_coluna = ThisWorkbook.Worksheets(6).Cells(1, coluna).Value
    N_Vigas = Colecção_Vigas.Count
    For i_barra = 1 To N_Vigas
        Set Barra_robot = Colecção_Vigas.Get(i_barra)
        ComprimentoBarra = Barra_robot.Length
        Npontos = ThisWorkbook.Worksheets(1).Range("B2")
        i_point = 0
        step_point = (ComprimentoBarra / Npontos) / ComprimentoBarra
        For relative_point = 0 To (1 + step_point / 2) Step step_point
            N_Combinações = Colecção_Combinações.Count
            For i_comb = 1 To N_Combinações
                Set Combinação_i = Colecção_Combinações.Get(i_comb)
                Set BarDeflectionServer =
                    robapp.Project.Structure.Results.Bars.Deflections
                Numero_barra = Barra_robot.Number
                Num_Combinação =
                    ThisWorkbook.Worksheets(6).Range(ColumnLetter(coluna) &
                    "1").Value
                relative_point = relative_point
                Set DFD = BarDeflectionServer.Value(Numero_barra,
                    Num_Combinação, relative_point)
                DSF = DFD.UZ
            Next i_comb
            ThisWorkbook.Worksheets(6).Cells(Linha_Inicio+i_point, 1) = i_point
            ThisWorkbook.Worksheets(6).Cells(Linha_Inicio+i_point, 2) =
                relative_point * ComprimentoBarra
            ThisWorkbook.Worksheets(6).Cells(Linha_Inicio+i_point,
                ColumnLetter(coluna)) = DSF * 1000
            i_point = i_point + 1
        Next relative_point
    Next i_barra
    coluna = coluna + 1
Loop

```

Código 17 – Extração da deformação

Assim obtém-se todos os valores extraídos do *Robot* para o *Excel*, sendo que no final da extração é fundamental guardar as alterações. Com estes valores é possível importá-los no *Jupyter Notebook* e desenvolver o processo com valores constantes desde o *Robot* até a extração do relatório de cálculo.



# 5 Caso Prático

## 5.1 Processo de cálculo

Para melhor compreender o funcionamento da ferramenta desenvolvida, este capítulo aborda um exemplo prático hipotético. Ao longo do estágio foi necessário testar e comprovar diferentes exemplos e comparar valores de forma a garantir que a ferramenta desenvolvida é confiável. Assim, para este exemplo, selecionaram-se 3 tipos de vigas diferentes:

- Viga 1. Viga simplesmente apoiada
- Viga 2. Viga perfeitamente encastrada
- Viga 3. Viga em consola (100% momento fletor de um lado e 0% do outro)

Estas vigas tem o seguinte *INPUT*:

- 6 m de comprimento (6 m de largura de influência)
- Secção: 30 cm de base e 60 cm de altura, com altura útil de 0,55 m
- Laje de 0,15 m, logo perímetro de 1,5 m e área de 0,18 m<sup>2</sup>
- Categoria A e categoria de exposição ambiental XC2
- Betão de classe C30/37 e aço da classe S500
- Humidade ambiente a 80 %, cimento tipo N e idade do betão no primeiro carregamento de 28 dias
- Ações:
  - Peso próprio ( $25 \text{ KN/m}^3 \cdot 0,18 \text{ m} = 4,5 \text{ KN/m}^2$ )
  - Restantes cargas permanentes ( $2 \text{ KN/m}^2$ )
  - Paredes divisórias ( $1,6 \text{ KN/m}^2$ )
  - Sobrecarga ( $2 \text{ KN/m}^2$ )

Com estes valores é possível desenvolver os modelos das vigas no *Robot*, com a secção e as ações acima definidas. Foram criadas 4 ações. A ação 1 para o peso próprio, a ação 2 para as restantes cargas permanentes, a ação 3 para as paredes divisórias e a ação 10 para a sobrecarga. Também foram criadas 6 combinações de ações. A combinação 100 para estados limites últimos, a combinação 200 para estados limites de utilização – combinação característica, a combinação 300 para estados limites de utilização – combinação frequente e a combinação 400 para estados limites de utilização – combinação quase-permanente. As combinações 90 e 91 são respetivamente as ações permanentes e variáveis para os estados limites últimos, mas não serão usadas. Os Releases são:

- *Pinned-Pinned*, para viga 1
- *Fixed-Fixed*, para a viga 2
- *Pinned-Fixed* para a viga 3

A Figura 5.1 mostra como as vigas estão representados no *Robot*.

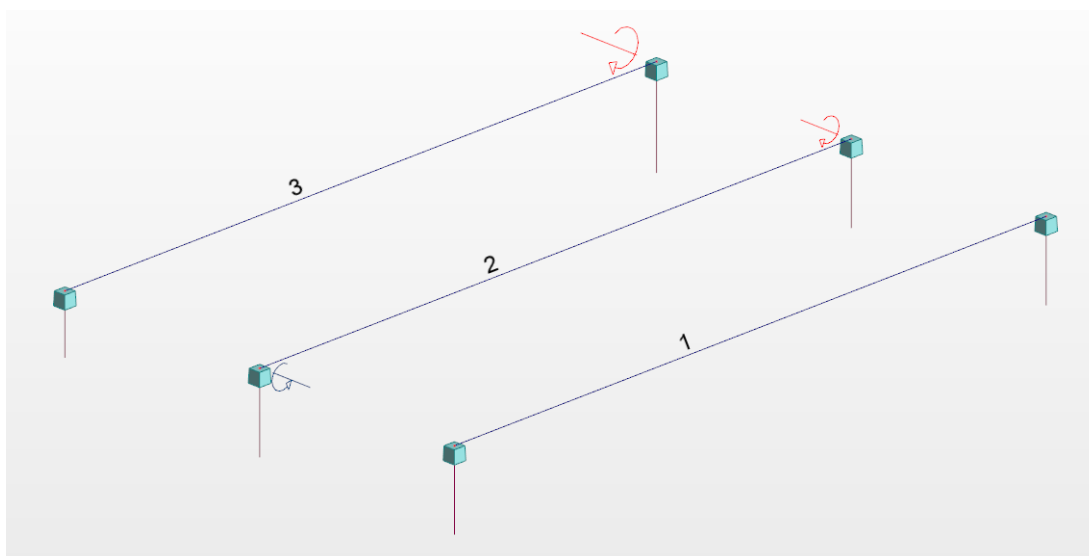


Figura 5.1 – As 3 vigas modeladas no *Robot*

A Tabela 5.1 e a Tabela 5.2 mostram os valores das ações e combinações de ações da viga.

Tabela 5.1 – Ações da viga no *Robot*

Case	Load type				
1:PP	self-weight	Whole structur	-Z	Factor=1,00	Normal
2:RCP	uniform load	PX=0,0	PY=0,0	PZ=-12,0000	global
3:PD	uniform load	PX=0,0	PY=0,0	PZ=-9,6000	global
10:S	uniform load	PX=0,0	PY=0,0	PZ=-12,0000	global

Tabela 5.2 – Combinação de ações da viga no *Robot*

Combinations	Name	Case	Coeff.	Case	Coeff.	Case	Coeff.	Case	Coeff.
90 (C)	ULS - G	1	1,35	2	1,35	3	1,35		
91 (C)	ULS - Q	10	1,50						
100 (C)	ULS - G + Q	1	1,35	2	1,35	3	1,35	10	1,50
200 (C)	SLS - CHR - G	1	1,00	2	1,00	3	1,00	10	1,00
300 (C)	SLS - FRE - G	1	1,00	2	1,00	3	1,00	10	0,50
400 (C)	SLS - QPR - G	1	1,00	2	1,00	3	1,00	10	0,30

No *Robot* é possível obter os diagramas de momento fletor, esforço transversal e deformação para as diferentes combinações de ações. Por exemplo, a Figura 5.2 e a Figura 5.3 mostram estes diagramas para o estado limite último.

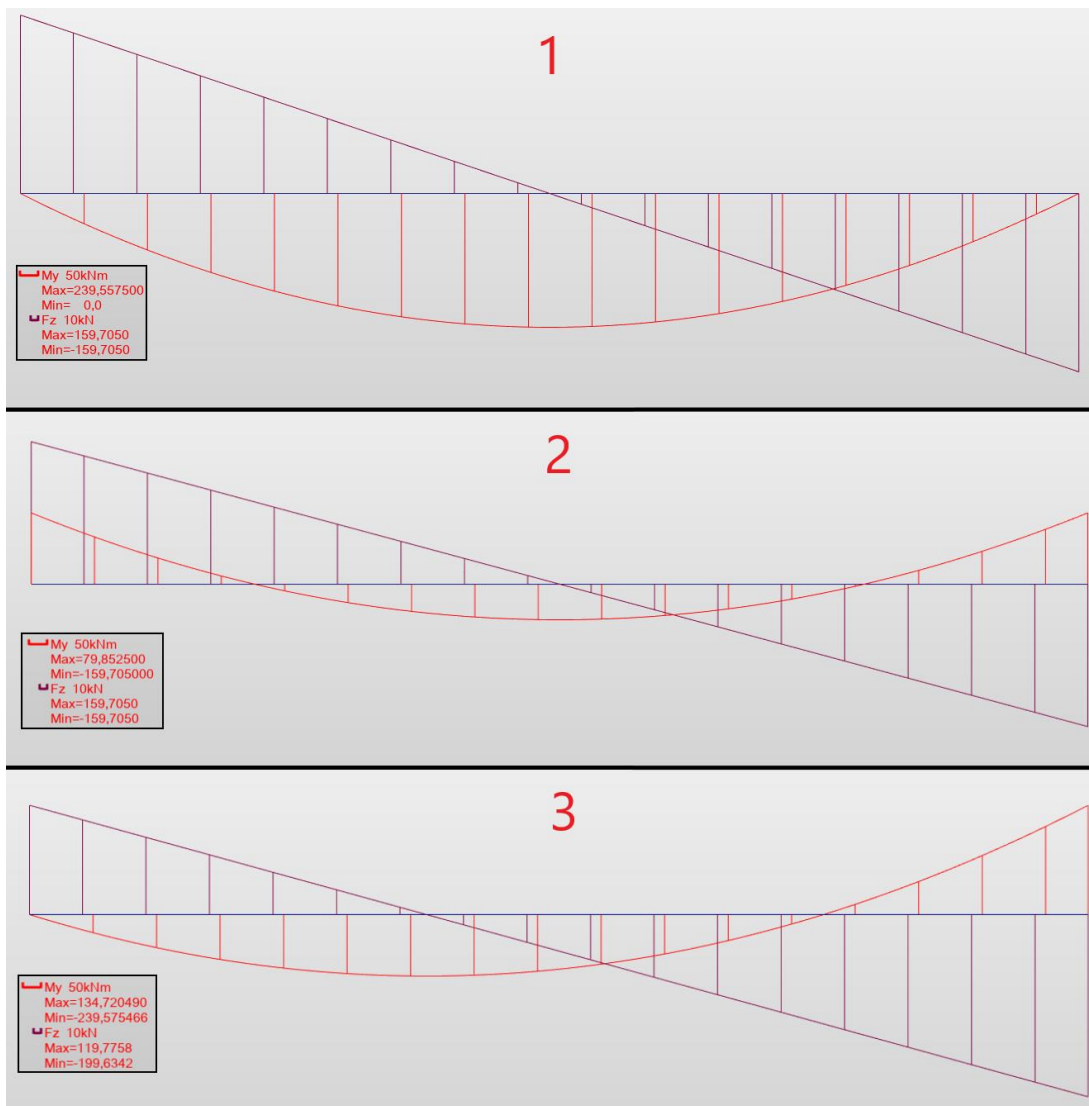


Figura 5.2 – Diagramas de momento fletor e esforço transversal para o estado limite último no *Robot*

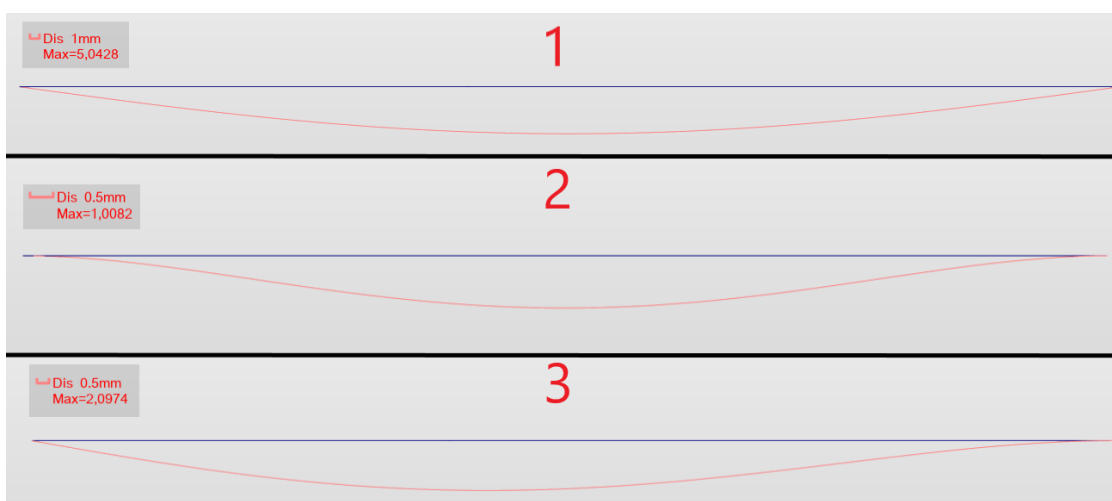


Figura 5.3 – Diagrama de deformação para o estado limite último no *Robot*

Depois de modelar as vigas no *Robot*, passa-se à fase seguinte, no *Excel*. Para extrair os valores, bastou colocar-se o número da viga, quantas divisões da viga serão necessárias (escolheu-se 20), as ações e combinações de ações. Como dá para perceber na Figura 5.4, a amarelo são representados os valores que foram introduzidos manualmente e a branco os valores extraídos do *Robot*.

Também foi possível extrair o mapa de esforços, como é possível ver na Tabela 5.3, Tabela 5.4 e Tabela 5.5 e a deformação na Tabela 5.6, Tabela 5.7 e Tabela 5.8.

Seleção da Viga	1	Extrair Valores da Viga		Limpar tudo			
Número de Pontos	20						
Número da Barra	Nome	L (m)	B (m)	H (m)	Betão	Realeses	UniquelD (Rbar)
1	Viga de CA_1	6	0,3	0,6	C30/37_DC	Pinned-Pinned	236
Combinacões							
ULS	100						
SLS - CHR	200						
SLS - FRE	300						
SLS - QPR	400						
Deformacão	1to10						
Seleção da Viga	2	Extrair Valores da Viga		Limpar tudo			
Número de Pontos	20						
Número da Barra	Nome	L (m)	B (m)	H (m)	Betão	Realeses	UniquelD (Rbar)
2	Viga de CA_2	6	0,3	0,6	C30/37_DC	Fixed-Fixed	1971
Combinacões							
ULS	100						
SLS - CHR	200						
SLS - FRE	300						
SLS - QPR	400						
Deformacão	1to10						
Seleção da Viga	3	Extrair Valores da Viga		Limpar tudo			
Número de Pontos	20						
Número da Barra	Nome	L (m)	B (m)	H (m)	Betão	Realeses	UniquelD (Rbar)
3	Viga de CA_3	6	0,3	0,6	C30/37_DC	Pinned-Fixed	1978
Combinacões							
ULS	100						
SLS - CHR	200						
SLS - FRE	300						
SLS - QPR	400						
Deformacão	1to10						

Extrair Tudo:  
Valores da Viga  
Mapas de Esforços  
Deformacão

Extrair Tudo:  
Valores da Viga  
Mapas de Esforços  
Deformacão

Extrair Tudo:  
Valores da Viga  
Mapas de Esforços  
Deformacão

Figura 5.4 – Valores iniciais extraídos do *Robot*

Tabela 5.3 – Mapa de esforços da viga 1 no Excel

	100		200		300		400	
Pontos	FZ	MY	FZ	MY	FZ	MY	FZ	MY
0	159,705	0,000	114,300	0,000	96,300	0,000	89,100	0,000
0,3	143,735	45,516	102,870	32,576	86,670	27,446	80,190	25,394
0,6	127,764	86,241	91,440	61,722	77,040	52,002	71,280	48,114
0,9	111,794	122,174	80,010	87,440	67,410	73,670	62,370	68,162
1,2	95,823	153,317	68,580	109,728	57,780	92,448	53,460	85,536
1,5	79,853	179,668	57,150	128,588	48,150	108,338	44,550	100,238
1,8	63,882	201,228	45,720	144,018	38,520	121,338	35,640	112,266
2,1	47,912	217,997	34,290	156,020	28,890	131,450	26,730	121,622
2,4	31,941	229,975	22,860	164,592	19,260	138,672	17,820	128,304
2,7	15,971	237,162	11,430	169,736	9,630	143,006	8,910	132,314
3	0,000	239,558	0,000	171,450	0,000	144,450	0,000	133,650
3,3	-15,971	237,162	-11,430	169,736	-9,630	143,006	-8,910	132,314
3,6	-31,941	229,975	-22,860	164,592	-19,260	138,672	-17,820	128,304
3,9	-47,912	217,997	-34,290	156,020	-28,890	131,450	-26,730	121,622
4,2	-63,882	201,228	-45,720	144,018	-38,520	121,338	-35,640	112,266
4,5	-79,853	179,668	-57,150	128,588	-48,150	108,338	-44,550	100,238
4,8	-95,823	153,317	-68,580	109,728	-57,780	92,448	-53,460	85,536
5,1	-111,794	122,174	-80,010	87,439	-67,410	73,669	-62,370	68,161
5,4	-127,764	86,241	-91,440	61,722	-77,040	52,002	-71,280	48,114
5,7	-143,735	45,516	-102,870	32,575	-86,670	27,445	-80,190	25,393
6	-159,705	0,000	-114,300	0,000	-96,300	0,000	-89,100	0,000

Tabela 5.4 – Mapa de esforços da viga 2 no Excel

	100		200		300		400	
Pontos	FZ	MY	FZ	MY	FZ	MY	FZ	MY
0	159,705	-159,705	114,300	-114,300	96,300	-96,300	89,100	-89,100
0,3	143,735	-114,189	102,870	-81,725	86,670	-68,855	80,190	-63,707
0,6	127,764	-73,464	91,440	-52,578	77,040	-44,298	71,280	-40,986
0,9	111,794	-37,531	80,010	-26,861	67,410	-22,631	62,370	-20,939
1,2	95,823	-6,388	68,580	-4,572	57,780	-3,852	53,460	-3,564
1,5	79,853	19,963	57,150	14,288	48,150	12,038	44,550	11,138
1,8	63,882	41,523	45,720	29,718	38,520	25,038	35,640	23,166
2,1	47,912	58,292	34,290	41,720	28,890	35,150	26,730	32,522
2,4	31,941	70,270	22,860	50,292	19,260	42,372	17,820	39,204
2,7	15,971	77,457	11,430	55,435	9,630	46,706	8,910	43,214
3	0,000	79,852	0,000	57,150	0,000	48,150	0,000	44,550
3,3	-15,971	77,457	-11,430	55,436	-9,630	46,706	-8,910	43,214
3,6	-31,941	70,270	-22,860	50,292	-19,260	42,372	-17,820	39,204
3,9	-47,912	58,292	-34,290	41,720	-28,890	35,150	-26,730	32,522
4,2	-63,882	41,523	-45,720	29,718	-38,520	25,038	-35,640	23,166
4,5	-79,853	19,963	-57,150	14,288	-48,150	12,037	-44,550	11,138
4,8	-95,823	-6,388	-68,580	-4,572	-57,780	-3,852	-53,460	-3,564
5,1	-111,794	-37,531	-80,010	-26,861	-67,410	-22,631	-62,370	-20,939
5,4	-127,764	-73,464	-91,440	-52,578	-77,040	-44,298	-71,280	-40,986
5,7	-143,735	-114,189	-102,870	-81,725	-86,670	-68,855	-80,190	-63,707
6	-159,705	-159,705	-114,300	-114,300	-96,300	-96,300	-89,100	-89,100

Tabela 5.5 – Mapa de esforços da viga 3 no Excel

	100		200		300		400	
Pontos	FZ	MY	FZ	MY	FZ	MY	FZ	MY
0	119,776	0,000	85,723	0,000	72,223	0,000	66,823	0,000
0,3	103,805	33,537	74,293	24,002	62,593	20,222	57,913	18,710
0,6	87,835	62,283	62,863	44,576	52,963	37,556	49,003	34,748
0,9	71,864	86,238	51,433	61,720	43,333	52,000	40,093	48,112
1,2	55,894	105,402	40,003	75,435	33,703	63,556	31,183	58,804
1,5	39,923	119,774	28,573	85,722	24,073	72,222	22,273	66,822
1,8	23,953	129,356	17,143	92,579	14,443	78,000	13,363	72,168
2,1	7,982	134,146	5,713	96,007	4,813	80,888	4,453	74,840
2,4	-7,988	134,145	-5,717	96,007	-4,817	80,888	-4,457	74,840
2,7	-23,959	129,353	-17,147	92,577	-14,447	77,998	-13,367	72,166
3	-39,929	119,770	-28,577	85,719	-24,077	72,220	-22,277	66,820
3,3	-55,900	105,395	-40,007	75,431	-33,707	63,552	-31,187	58,800
3,6	-71,870	86,230	-51,437	61,714	-43,337	51,995	-40,097	48,108
3,9	-87,841	62,273	-62,867	44,569	-52,967	37,550	-49,007	34,742
4,2	-103,811	33,525	-74,297	23,994	-62,597	20,215	-57,917	18,704
4,5	-119,782	-0,013	-85,727	-0,010	-72,227	-0,008	-66,827	-0,008
4,8	-135,752	-38,344	-97,157	-27,442	-81,857	-23,121	-75,737	-21,392
5,1	-151,723	-81,465	-108,587	-58,304	-91,487	-49,122	-84,647	-45,450
5,4	-167,693	-129,377	-120,017	-92,595	-101,117	-78,013	-93,557	-72,180
5,7	-183,664	-182,081	-131,447	-130,314	-110,747	-109,792	-102,467	-101,584
6	-199,634	-239,575	-142,877	-171,463	-120,377	-144,461	-111,377	-133,660

Tabela 5.6 – Valor da deformação da viga 1 no Excel

	1	2	3	10
0	0	0	0	0
0,3	-0,068	-0,181	-0,145	-0,181
0,6	-0,134	-0,357	-0,285	-0,357
0,9	-0,196	-0,523	-0,418	-0,523
1,2	-0,253	-0,675	-0,540	-0,675
1,5	-0,304	-0,810	-0,648	-0,810
1,8	-0,347	-0,924	-0,739	-0,924
2,1	-0,381	-1,015	-0,812	-1,015
2,4	-0,406	-1,082	-0,866	-1,082
2,7	-0,421	-1,123	-0,898	-1,123
3	-0,426	-1,136	-0,909	-1,136
3,3	-0,421	-1,123	-0,898	-1,123
3,6	-0,406	-1,082	-0,866	-1,082
3,9	-0,381	-1,015	-0,812	-1,015
4,2	-0,347	-0,924	-0,739	-0,924
4,5	-0,304	-0,810	-0,648	-0,810
4,8	-0,253	-0,675	-0,540	-0,675
5,1	-0,196	-0,523	-0,418	-0,523
5,4	-0,134	-0,357	-0,285	-0,357
5,7	-0,068	-0,181	-0,145	-0,181
6	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela 5.7 – Valor da deformação na viga 2 no Excel

	1	2	3	10
0	0	0	0	0
0,3	-0,003	-0,008	-0,007	-0,008
0,6	-0,011	-0,029	-0,024	-0,029
0,9	-0,022	-0,059	-0,047	-0,059
1,2	-0,035	-0,093	-0,074	-0,093
1,5	-0,048	-0,128	-0,102	-0,128
1,8	-0,060	-0,160	-0,128	-0,160
2,1	-0,071	-0,188	-0,151	-0,188
2,4	-0,079	-0,209	-0,168	-0,209
2,7	-0,084	-0,223	-0,178	-0,223
3	-0,085	-0,227	-0,182	-0,227
3,3	-0,084	-0,223	-0,178	-0,223
3,6	-0,079	-0,209	-0,168	-0,209
3,9	-0,071	-0,188	-0,151	-0,188
4,2	-0,060	-0,160	-0,128	-0,160
4,5	-0,048	-0,128	-0,102	-0,128
4,8	-0,035	-0,093	-0,074	-0,093
5,1	-0,022	-0,059	-0,047	-0,059
5,4	-0,011	-0,029	-0,024	-0,029
5,7	-0,003	-0,008	-0,007	-0,008
6	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela 5.8 – Valor da deformação na viga 3 no Excel

	1	2	3	10
0	0	0	0	0
0,3	-0,034	-0,090	-0,072	-0,090
0,6	-0,066	-0,177	-0,141	-0,177
0,9	-0,096	-0,256	-0,205	-0,256
1,2	-0,122	-0,326	-0,261	-0,326
1,5	-0,144	-0,383	-0,307	-0,383
1,8	-0,160	-0,428	-0,342	-0,428
2,1	-0,171	-0,457	-0,366	-0,457
2,4	-0,177	-0,471	-0,377	-0,471
2,7	-0,176	-0,470	-0,376	-0,470
3	-0,170	-0,454	-0,364	-0,454
3,3	-0,159	-0,425	-0,340	-0,425
3,6	-0,144	-0,384	-0,307	-0,384
3,9	-0,125	-0,333	-0,266	-0,333
4,2	-0,103	-0,275	-0,220	-0,275
4,5	-0,080	-0,213	-0,170	-0,213
4,8	-0,057	-0,151	-0,121	-0,151
5,1	-0,035	-0,094	-0,075	-0,094
5,4	-0,017	-0,046	-0,037	-0,046
5,7	-0,005	-0,013	-0,010	-0,013
6	0,000	0,000	0,000	0,000

Avança-se para o *Visual Studio Code*. Para além dos valores importados, são necessários *INPUTS* no *Jupyter Notebook*, como o recobrimento, a largura de influência, a altura da laje, idade do betão no primeiro carregamento, o tempo de projeto, o tipo de cimento, o aço, a classe estrutural, a categoria de exposição ambiental, como se vê na Figura 5.5.

```

INPUT

#Dimensões
c=0.05 #recobrimento
dc=0.05
linf=6.00 #largura influência (m)
h1=0.15 #altura laje esquerda
h2=0.15 #altura laje direita

#Betão
t0_T=28 #idade do betão na altura do carregamento
ts=28 #idade do betão no início da retração
t_10000=10000 #10000 dias
t_projeto=100 #tempo projeto

cimento='N' #cimento
ambiente='exterior' #ambiente

#Aço
classe_aco='S500' #classe de aço

categoria='A' #categoria

#Fendilhação
classe_exposicao='XC2' #classe de exposição

```

Figura 5.5 – INPUT de valores no *Jupyter Notebook*

De seguida, o *Jupyter Notebook* vai analisar os dados e vai recomendar os valores das áreas das armaduras de esforço transversal e de momentos flectores. A Figura 5.6 mostra a sugestão para as vigas, com o detalhe que o valor de esforço transversal é igual para as vigas 1 e 2, portanto a sugestão será a mesma.

<p>Área de armadura transversal mínima = 2.63 cm<sup>2</sup>/m          Área de armadura transversal necessária = 2.94 cm<sup>2</sup>/m          Área de armadura transversal máxima = 10.05 cm<sup>2</sup>/m          Espaçamento máximo = 41.25 cm</p>	<p>Vigas 1 e 2</p>
<p>Sugestão de armadura transversal efetiva: 4 ramos, Ø 6 // 0.375 (3.02 cm<sup>2</sup>)</p>	
<p>Área de armadura transversal mínima = 2.63 cm<sup>2</sup>/m          Área de armadura transversal necessária = 3.67 cm<sup>2</sup>/m          Área de armadura transversal máxima = 10.05 cm<sup>2</sup>/m          Espaçamento máximo = 41.25 cm</p>	<p>Viga 3</p>
<p>Sugestão de armadura transversal efetiva: 2 ramos, Ø 6 // 0.150 (3.77 cm<sup>2</sup>)</p>	

Figura 5.6 – Valor recomendado para armadura transversal das vigas 1 a 3

Por defeito, a recomendação devolve o primeiro valor que verifica, mas não significa que será esse a ser usado. Então, decidiu-se usar a seguinte solução de armadura transversal:

- Viga 1 e 2: 2 ramos,  $\Phi 8 // 0,30$  ( $3,35 \text{ cm}^2/\text{m}$ )
- Viga 3: 2 ramos,  $\Phi 6 // 0,150$  ( $3,77 \text{ cm}^2/\text{m}$ )

Repetiu-se o processo para a armadura longitudinal. Na Figura 5.7 apresenta-se um exemplo de recomendação para a armadura inferior da viga 1:

Sugestão 1 armadura longitudinal inferior ULS (varão): 2  $\Phi 32$  ( $16,08 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 2 armadura longitudinal inferior ULS (varão): 3  $\Phi 25$  ( $14,73 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 3 armadura longitudinal inferior ULS (varão): 4  $\Phi 20$  ( $12,57 \text{ cm}^2$ )

Sugestão 1 armadura longitudinal inferior SLS (varão): 2  $\Phi 25$  ( $9,82 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 2 armadura longitudinal inferior SLS (varão): 3  $\Phi 20$  ( $9,42 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 3 armadura longitudinal inferior SLS (varão): 4  $\Phi 20$  ( $12,57 \text{ cm}^2$ )

O Estado Limite Último é condicionante na armadura inferior (varão)!

Sugestão 1 armadura longitudinal inferior ULS (combinação de varões): 2  $\Phi 20$  + 1  $\Phi 25$  ( $11,19 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 2 armadura longitudinal inferior ULS (combinação de varões): 1  $\Phi 20$  + 2  $\Phi 25$  ( $12,96 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 3 armadura longitudinal inferior ULS (combinação de varões): 2  $\Phi 20$  + 2  $\Phi 25$  ( $16,10 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 4 armadura longitudinal inferior ULS (combinação de varões): 2  $\Phi 25$  + 1  $\Phi 32$  ( $17,86 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 5 armadura longitudinal inferior ULS (combinação de varões): 1  $\Phi 25$  + 2  $\Phi 32$  ( $20,99 \text{ cm}^2$ )

Sugestão 1 armadura longitudinal inferior SLS (combinação de varões): 2  $\Phi 16$  + 2  $\Phi 20$  ( $10,30 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 2 armadura longitudinal inferior SLS (combinação de varões): 2  $\Phi 20$  + 1  $\Phi 25$  ( $11,19 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 3 armadura longitudinal inferior SLS (combinação de varões): 1  $\Phi 20$  + 2  $\Phi 25$  ( $12,96 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 4 armadura longitudinal inferior SLS (combinação de varões): 2  $\Phi 20$  + 2  $\Phi 25$  ( $16,10 \text{ cm}^2$ )  
Sugestão 5 armadura longitudinal inferior SLS (combinação de varões): 2  $\Phi 25$  + 1  $\Phi 32$  ( $17,86 \text{ cm}^2$ )

O Estado Limite Último é condicionante na armadura inferior (combinação de varões)!

Figura 5.7 – Valores recomendados para armadura longitudinal inferior da viga 1

Decidiu-se adotar-se a seguinte solução de armadura longitudinal:

- Viga 1: 4  $\Phi 20$  ( $12,57 \text{ cm}^2$ ) para a armadura inferior e 2  $\Phi 16$  ( $4,02 \text{ cm}^2$ ) para a armadura superior (cumprimento armadura mínima), ambas em toda a extensão da viga
- Viga 2: 2  $\Phi 16$  ( $4,02 \text{ cm}^2$ ) para a armadura inferior em toda a extensão da viga e 4  $\Phi 16$  ( $8,04 \text{ cm}^2$ ) para a armadura superior (dispensa de 2 varões entre 0,7 m e 5,3 m)
- Viga 3: 2  $\Phi 20$  ( $6,28 \text{ cm}^2$ ) para a armadura inferior em toda a extensão de viga e 4  $\Phi 20$  ( $12,57 \text{ cm}^2$ ) para a armadura superior (dispensa de 2 varões entre 0,0 m e 5,0 m)

As vigas estão representadas, em corte longitudinal, na Figura 5.8, Figura 5.9 e Figura 5.10.

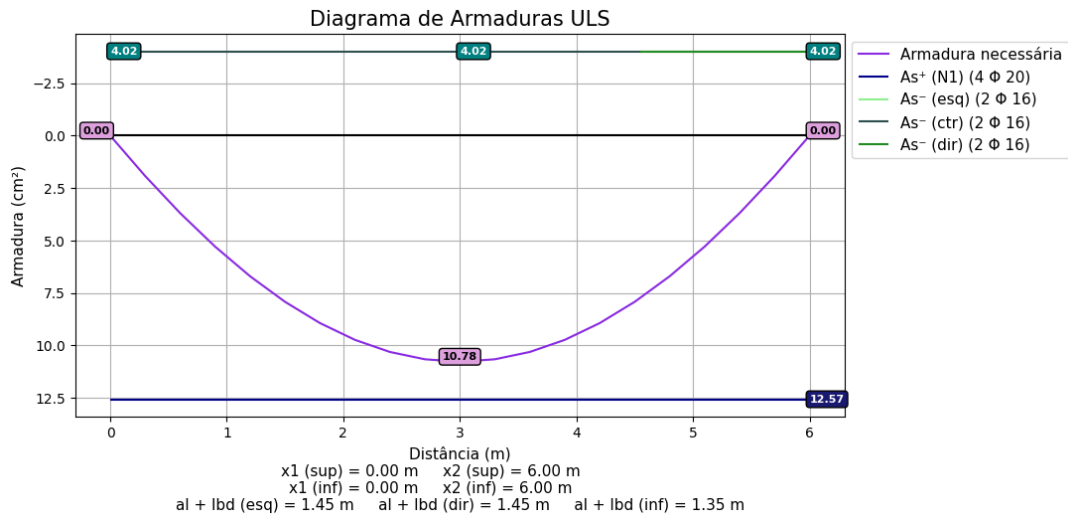


Figura 5.8 – Diagrama de armaduras longitudinais da viga 1

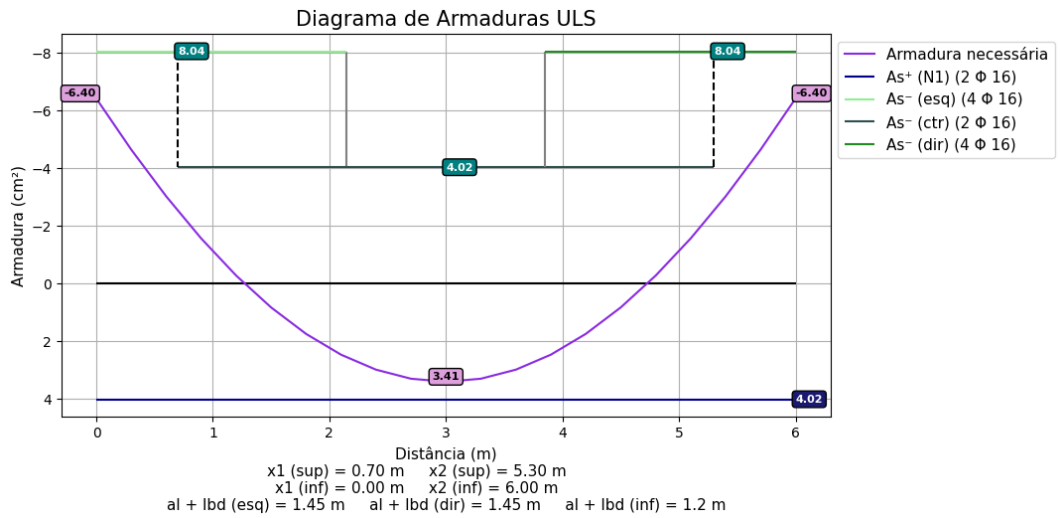


Figura 5.9 – Diagrama de armaduras longitudinais da viga 2

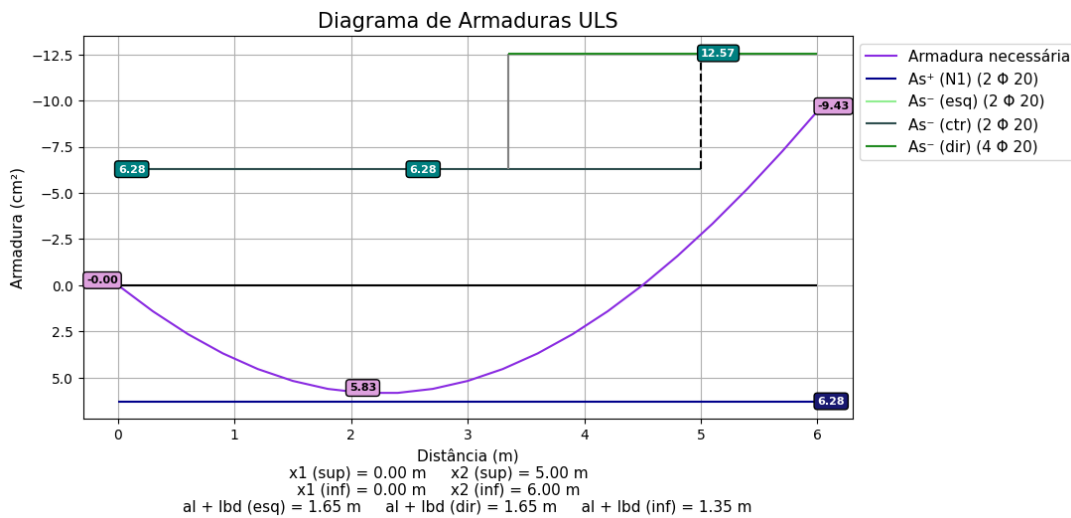


Figura 5.10 – Diagrama de armaduras longitudinais da viga 3

Ao correr o restante código *Python*, é possível analisar algumas tabelas com os resultados e avaliar se a solução encontrada satisfaz as condições de segurança.

A Tabela 5.9 mostra o valor de esforço transversal e rácio nas armaduras de esforço transversal.

Tabela 5.9 – Valores de esforço transversal e rácio no *Jupyter Notebook*

Pontos	Vigas 1 e 2			Viga 3		
	VEd	VRd	V_racio_100	VEd	VRd	V_racio_100
0	159.71	182.21	87.65	119.78	204.99	58.43
0.30	143.73	182.21	78.88	103.81	204.99	50.64
0.60	127.76	182.21	70.12	87.83	204.99	42.85
0.90	111.79	182.21	61.35	71.86	204.99	35.06
1.20	95.82	182.21	52.59	55.89	204.99	27.27
1.50	79.85	182.21	43.82	39.92	204.99	19.48
1.80	63.88	182.21	35.06	23.95	204.99	11.68
2.10	47.91	182.21	26.29	7.98	204.99	3.89
2.40	31.94	182.21	17.53	-7.99	204.99	3.90
2.70	15.97	182.21	8.76	-23.96	204.99	11.69
3.00	0.00	182.21	0.00	-39.93	204.99	19.48
3.30	-15.97	182.21	8.76	-55.90	204.99	27.27
3.60	-31.94	182.21	17.53	-71.87	204.99	35.06
3.90	-47.91	182.21	26.29	-87.84	204.99	42.85
4.20	-63.88	182.21	35.06	-103.81	204.99	50.64
4.50	-79.85	182.21	43.82	-119.78	204.99	58.43
4.80	-95.82	182.21	52.59	-135.75	204.99	66.22
5.10	-111.79	182.21	61.35	-151.72	204.99	74.02
5.40	-127.76	182.21	70.12	-167.69	204.99	81.81
5.70	-143.73	182.21	78.88	-183.66	204.99	89.60
6.00	-159.71	182.21	87.65	-199.63	204.99	97.39

Caso com o maior rácio global para VEd: 100, na posição  $x = 0.00$  m, com um rácio de 87.65 %  
 Caso com o maior rácio global para VEd: 100, na posição  $x = 6.00$  m, com um rácio de 97.39 %

A viga 1 e 2 tem um valor de rácio máximo de 87,65 %, valor aceitável e dentro do limite de 100%. Já a viga 3 tem o rácio máximo de 97,39%.

A Tabela 5.10 mostra o valor do momento fletor e o rácio de momento fletor.

Tabela 5.10 – Valores de momento fletor e rácio no *Jupyter Notebook*

Pontos	Viga 1				Viga 2				Viga 3			
	MEd	MRd <sup>+</sup>	MRd <sup>-</sup>	M_ratio_100	MEd	MRd <sup>+</sup>	MRd <sup>-</sup>	M_ratio_100	MEd	MRd <sup>+</sup>	MRd <sup>-</sup>	M_ratio_100
0	0.00	275.75	93.66	0.00	-159.71	93.66	182.22	87.64	-0.00	144.10	144.10	0.00
0.30	45.52	275.75	93.66	16.51	-114.19	93.66	182.22	62.67	33.54	144.10	144.10	23.27
0.60	86.24	275.75	93.66	31.27	-73.46	93.66	182.22	40.32	62.28	144.10	144.10	43.22
0.90	122.17	275.75	93.66	44.31	-37.53	93.66	182.22	20.60	86.24	144.10	144.10	59.85
1.20	153.32	275.75	93.66	55.60	-6.39	93.66	182.22	3.51	105.40	144.10	144.10	73.14
1.50	179.67	275.75	93.66	65.16	19.96	93.66	182.22	21.31	119.77	144.10	144.10	83.12
1.80	201.23	275.75	93.66	72.97	41.52	93.66	182.22	44.33	129.36	144.10	144.10	89.77
2.10	218.00	275.75	93.66	79.06	58.29	93.66	182.22	62.24	134.15	144.10	144.10	93.09
2.40	229.98	275.75	93.66	83.40	70.27	93.66	93.66	75.03	134.15	144.10	144.10	93.09
2.70	237.16	275.75	93.66	86.01	77.46	93.66	93.66	82.70	129.35	144.10	144.10	89.77
3.00	239.56	275.75	93.66	86.87	79.85	93.66	93.66	85.26	119.77	144.10	144.10	83.12
3.30	237.16	275.75	93.66	86.01	77.46	93.66	93.66	82.70	105.40	144.10	144.10	73.14
3.60	229.98	275.75	93.66	83.40	70.27	93.66	93.66	75.03	86.23	144.10	144.10	59.84
3.90	218.00	275.75	93.66	79.06	58.29	93.66	182.22	62.24	62.27	144.10	144.10	43.22
4.20	201.23	275.75	93.66	72.97	41.52	93.66	182.22	44.33	33.53	144.10	144.10	23.27
4.50	179.67	275.75	93.66	65.16	19.96	93.66	182.22	21.31	-0.01	144.10	144.10	0.01
4.80	153.32	275.75	93.66	55.60	-6.39	93.66	182.22	3.51	-38.34	144.10	144.10	26.61
5.10	122.17	275.75	93.66	44.31	-37.53	93.66	182.22	20.60	-81.46	144.10	144.10	56.53
5.40	86.24	275.75	93.66	31.27	-73.46	93.66	182.22	40.32	-129.38	144.10	275.75	46.92
5.70	45.52	275.75	93.66	16.51	-114.19	93.66	182.22	62.67	-182.08	144.10	275.75	66.03
6.00	0	275.75	93.66	0.00	-159.71	93.66	182.22	87.64	-239.58	144.10	275.75	86.88

Caso com o maior rácio global para MEd: 100, na posição  $x = 3.00$  m, com um rácio de 86.87 %

Caso com o maior rácio global para MEd: 100, na posição  $x = 0.00$  m, com um rácio de 87.64 %

Caso com o maior rácio global para MEd: 100, na posição  $x = 2.10$  m, com um rácio de 93.09 %

A viga 1 tem um rácio máximo de 86,87 %, a viga 2 de 87,64% e a viga 3 de 93,09%, valores igualmente aceitáveis.

A verificação aos estados limites de utilização engloba a verificação de fendilhação, que é possível observar na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Valores de fendilhação e rácio no *Jupyter Notebook*

Pontos	Viga 1			Racio_wk_400		Viga 2		Racio_wk_400		Viga 3		Racio_wk_400	
	wk	wk,máx		wk	wk,máx	wk	wk,máx	wk	wk,máx	wk	wk,máx	wk	wk,máx
0	0.00	0.3	0.00	0.21	0.3	70.05	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
0.3	0.00	0.3	0.00	0.13	0.3	42.26	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
0.6	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
0.9	0.08	0.3	26.27	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
1.2	0.11	0.3	37.17	0.00	0.3	0.00	0.18	0.3	0.00	0.18	0.3	61.64	0.00
1.5	0.14	0.3	46.39	0.00	0.3	0.00	0.22	0.3	0.00	0.22	0.3	73.66	0.00
1.8	0.16	0.3	53.93	0.00	0.3	0.00	0.25	0.3	0.00	0.25	0.3	83.00	0.00
2.1	0.18	0.3	59.80	0.00	0.3	0.00	0.26	0.3	0.00	0.26	0.3	87.67	0.00
2.4	0.19	0.3	63.99	0.00	0.3	0.00	0.26	0.3	0.00	0.26	0.3	87.66	0.00
2.7	0.20	0.3	66.51	0.00	0.3	0.00	0.25	0.3	0.00	0.25	0.3	82.99	0.00
3.0	0.20	0.3	67.35	0.00	0.3	0.00	0.22	0.3	0.00	0.22	0.3	73.65	0.00
3.3	0.20	0.3	66.51	0.00	0.3	0.00	0.18	0.3	0.00	0.18	0.3	61.63	0.00
3.6	0.19	0.3	63.99	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
3.9	0.18	0.3	59.80	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
4.2	0.16	0.3	53.93	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
4.5	0.14	0.3	46.39	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
4.8	0.11	0.3	37.17	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
5.1	0.08	0.3	26.27	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.00
5.4	0.00	0.3	0.00	0.00	0.3	0.00	0.09	0.3	0.00	0.09	0.3	28.79	0.00
5.7	0.00	0.3	0.00	0.13	0.3	42.26	0.14	0.3	0.00	0.14	0.3	47.23	0.00
6.0	0.00	0.3	0.00	0.21	0.3	70.05	0.20	0.3	0.00	0.20	0.3	67.35	0.00

Caso com o maior rácio global para wk: 400, na posição x = 3.00 m, com um rácio de 67.35 %

Caso com o maior rácio global para wk: 400, na posição x = 0.00 m, com um rácio de 70.05 %

Caso com o maior rácio global para wk: 400, na posição x = 2.10 m, com um rácio de 87.67 %

Dá para perceber que o valor dos rácios máximos são de 67,35% na viga 1, 70,05% na viga 2 e 87,67% na viga 3, todos dentro do limite de 100%.

Também, é possível representar o padrão de fendilhação das vigas em forma de corte longitudinal, conforme ilustrado na Figura 5.11, Figura 5.12 e Figura 5.13.

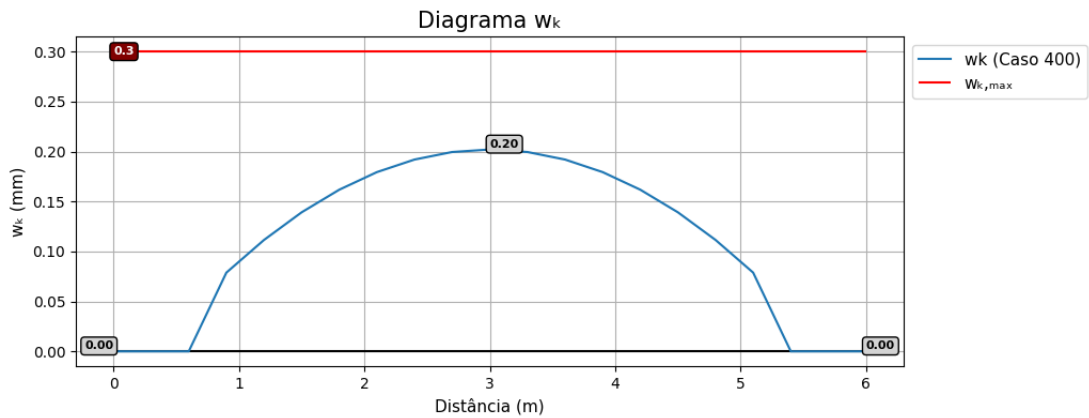


Figura 5.11 – Diagrama de fendilhação da viga 1

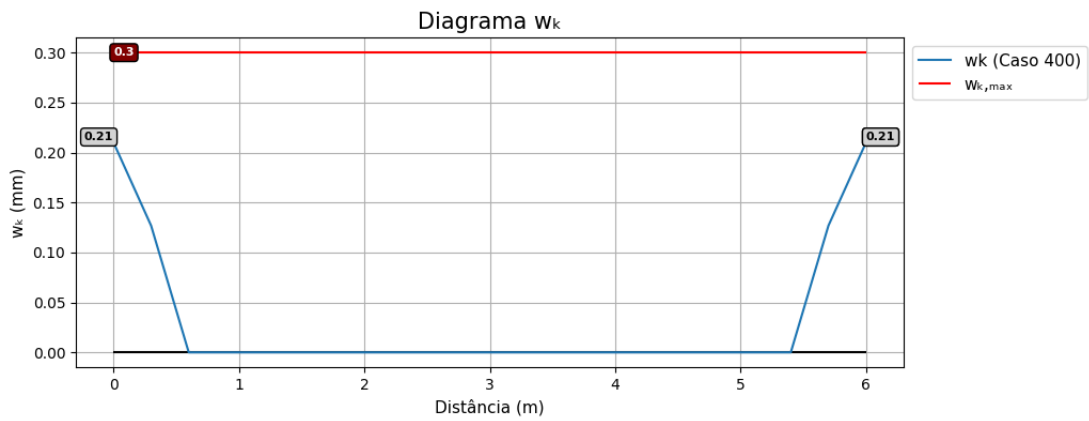


Figura 5.12 – Diagrama de fendilhação da viga 2

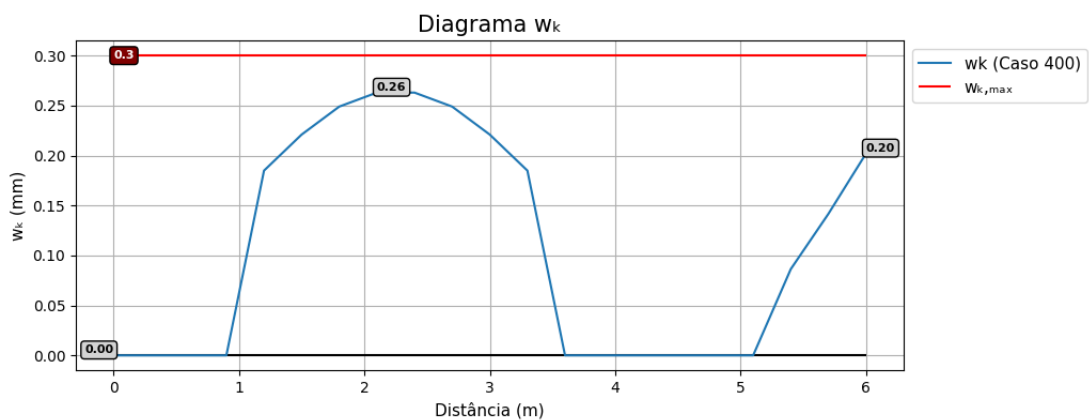


Figura 5.13 – Diagrama de fendilhação da viga 3

Por fim, o *Jupyter Notebook* cria os relatórios de cálculo final, em *Word* e *PDF*. O relatório da viga 1 encontra-se no Anexo. No relatório de cálculo é possível observar a diferença entre vários métodos de cálculo e perceber se os valores estão próximos ou não. Também, é possível observar os processos de cálculo que conduziram aos valores finais.

## 5.2 Validação

É possível comparar os valores do relatório com os valores resultantes de *softwares* e ficheiros *Excel* verificados. A folha de cálculo *Excel* foi testada e comprovada para exercícios práticos e consegue-se comparar com o valor obtido no relatório. Também se usaram os *softwares* *XD-CoSec* e *SD-ConServ*.

A fluência e a retração são iguais para as 3 vigas. Como é possível ver na Figura 5.14, o *Excel* realizou os cálculos intermédios de forma a chegar ao valor do coeficiente de fluência.

b	0,3	m	t0	28	
h	0,6	m	$\alpha 1$	0,94	
h1	0,15	m	$\alpha 2$	0,98	
h2	0,15	m	$\alpha 3$	0,96	
Ac	0,18	m <sup>2</sup>			
u	1,5	m	$\phi_{RH}$	1,28	
h0	240	mm			
t0,T	28	dias	$\beta(f_{cm})$	2,73	
fcm	38	Mpa	$\beta(t_0)$	0,49	
RH	80	%	$\phi_0$	1,71	
$\alpha$	0				
			$\beta_H$	772,59	

Valores introduzidos

Valores intermédios

Valores intermédios para fluência

Coefficiente de fluência

Figura 5.14 – Cálculos intermédios e valor do coeficiente de fluência no *Excel*

Também se elaborou a Tabela 5.12 que avalia o valor do coeficiente de fluência ao longo do tempo, sendo que o valor de 100 anos, ou 36500 dias, faz com que o coeficiente seja 1.

Tabela 5.12 – Valor do coeficiente de fluência em função do tempo

$t (t > t_0)$	$\beta(t, t_0)$	$\phi(t, t_0)$
28	0,00	0,00
365	0,70	1,19
730	0,80	1,37
3650	0,94	1,61
9125	0,98	1,67
18250	0,99	1,69
36500	0,99	1,70
365000	1,00	1,71
3650000	1,00	1,71
36500000	1,00	1,71
$\infty$	1	1,71

Tempo (em dias)

Coeficiente em função do tempo

Coeficiente de fluência

De seguida, pode-se realizar a verificação com o valor do relatório, de acordo com a Figura 5.15.

### Fluência

- $t = 36500$  dias
- $f_{cm} \geq 35$  MPa
  - $t_0 = 28.0$  dias
  - $\alpha_1 = 0.944$
  - $\alpha_2 = 0.984$
  - $\alpha_3 = 0.96$
  - $\varphi_{RH} = 1.283$
  - $\beta(f_{cm}) = 2.725$
  - $\beta(t_0) = 0.488$
- $\varphi_0 = 1.706$ 
  - $\beta_H = 772.657$
- $\beta(t, t_0) = 0.994$
- $\varphi(t, t_0) = 1.696$
- $\varphi(\infty, t_0) = 1.706$

Figura 5.15 – Cálculos intermédios e valor do coeficiente de fluência no relatório

Verifica-se que o valor de fluência em ambas as situações é praticamente igual, com o valor no *Excel* de 1,71 e no relatório de 1,706.

Da mesma forma, verifica-se na Figura 5.16 e na Figura 5.17 o valor de retração no *Excel* e no relatório, respetivamente.

b	0,3	m	$\beta_{ds}(t,t_s)$	0,99	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="background-color: yellow; width: 15px; height: 15px; display: inline-block;"></div> Valores introduzidos           <div style="background-color: lightblue; width: 15px; height: 15px; display: inline-block;"></div> Valores intermédios           <div style="background-color: cyan; width: 15px; height: 15px; display: inline-block;"></div> Valores intermédios para retração           <div style="background-color: orange; width: 15px; height: 15px; display: inline-block;"></div> Retração         </div>
h	0,6	m	$k_h$	0,81	
h1	0,15	m	$\beta_{RH}$	0,76	
h2	0,15	m	$\epsilon_{cd,0}$	0,00027	
Ac	0,18	m <sup>2</sup>	$\epsilon_{cd}$	0,00021	
u	1,5	m			
h0	240	mm	$\beta_{as}(t)$	1	
ts	28	dias	$\epsilon_{ca}(\infty)$	0,000050	
fck	30	Mpa	$\epsilon_{ca}$	5,00E-05	
fcm	38	Mpa			
RH	80	%	$\epsilon_{cs}$	0,000265	
$\alpha_{dS1}$	4			264,65	
$\alpha_{dS2}$	0,12				

Figura 5.16 – Cálculos intermédios e valor de retração no Excel

### Retração

- $t = 10000$  dias
  - $\beta_{ds}(t,t_s) = 0.985$
  - $k_h = 0.810$ 
    - $\beta_{RH} = 0.756$
  - $\epsilon_{cd,0} = 0.000269$
- $\epsilon_{cd} = 0.000215$ 
  - $\beta_{as}(t) = 1$
  - $\epsilon_{ca}(\infty) = 0.0000500$
- $\epsilon_{ca} = \beta_{as} \epsilon_{ca}(\infty) = 0.0000500$
- $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca} = 264.650 \cdot 10^{-6}$

Figura 5.17 – Cálculos intermédios e valor de retração no relatório

O valor de retração é similar em ambos os casos, sendo iguais nas primeiras casas decimais,  $264,65 \cdot 10^{-6}$ .

Outras comparações que se podem fazer são se os valores de momento fletor e de esforço transversal das armaduras são próximos de valores obtidos na aplicação *XD-CoSec*.

Para o momentos fletor, é possível comparar o valor no *XD-CoSec* na Figura 5.18, Figura 5.20 e Figura 5.22, com o valor no relatório na Figura 5.19, Figura 5.21 e Figura 5.23, respetivamente.

**Dados da Secção**

**Materiais** Classe do Betão: C30/37 Classe do Aço: A500

**Geometria** b (m): 0.3 h (m): 0.6 c<sub>meo</sub> (cm): 5.0

**Armadura Longitudinal** n°: 2 Diam.: 16 As<sub>-</sub>: 2 As<sub>w</sub>: 0 As<sub>+</sub>: 4

**Armadura Transversal** Diam.: 8 Esp.: 0.30 Ramos: Y=2, Z=2 As<sub>w</sub>/s (cm/m): 3.3510

**Esforços** Flexão:  Simples  Composta  Desviada

N (kN): 100 My (kN.m): 239.56 Vy (kN): 159.71 Mz (kN.m): 50 Vz (kN): 0

**Resultados** Flexão  Esforço Transverso

Flexão: Esforço Transverso

Condição limite para a verificação:

N = 0.00 kN  
 My = 277.49 kN.m  
 Mz = 0.00 kN.m

Limites Tracção/Compressão: N<sub>Rd</sub> (kN) -721.2 / 4263.5

Diagramas de interacção: Composta, Desviada, Abaco

Eficiência da Armadura = 86.3 %

Figura 5.18 – Valores de flexão na viga 1 no *XD-CoSec*

- FS = 546.64 KN
- FC = 4800.00 x KN
- x = 0.114 m
- z = 0.50 m
- MRd = 275.75 KNm

Verificação: **MEd ≤ MRd**

MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)
239.56	275.75	86.88

Figura 5.19 – Valores de flexão na viga 1 no relatório

**Dados da Secção**

Materials Classe do Betão C30/37 Classe do Aço A500

**Geometria** Armadura Longitudinal Armadura Transversal

b (m) 0,3 h (m) 0,6 c<sub>mec</sub> (cm) 5,0

As- 2 16 As<sub>w</sub> 0 6 As+ 2 16

Diam. 8 Esp. 0,30

Ramos As<sub>w</sub>/s (cm/m<sup>2</sup>)

Y 2 3,3510 Z 2 3,3510

**Esforços** Flexão:  Simples  Composta  Desviada

N (kN) 100 My (kN.m) 79.85 Vy (kN) 159.71

Mz (kN.m) 50 Vz (kN) 0

**Resultados** Flexão  Esforço Transverso

Flexão Esforço Transverso

Condição limite para a verificação:

N = 0,00 kN

My = **92,19** kN.m

Mz = 0,00 kN.m

Eficiência da Amadura = 86,6 %

Limites Tração/Compressão N<sub>Rd</sub> (kN) -349,67 / 3921,7

Diagramas de interacção

Composta Desviada Abaco

---

**Dados da Secção**

Materials Classe do Betão C30/37 Classe do Aço A500

**Geometria** Armadura Longitudinal Armadura Transversal

b (m) 0,3 h (m) 0,6 c<sub>mec</sub> (cm) 5,0

As- 2 16 As<sub>w</sub> 0 6 As+ 4 16

Diam. 8 Esp. 0,30

Ramos As<sub>w</sub>/s (cm/m<sup>2</sup>)

Y 2 3,3510 Z 2 3,3510

**Esforços** Flexão:  Simples  Composta  Desviada

N (kN) 100 My (kN.m) 159.71 Vy (kN) 159.71

Mz (kN.m) 50 Vz (kN) 0

**Resultados** Flexão  Esforço Transverso

Flexão Esforço Transverso

Condição limite para a verificação:

N = 0,00 kN

My = **180,85** kN.m

Mz = 0,00 kN.m

Eficiência da Amadura = 88,3 %

Limites Tração/Compressão N<sub>Rd</sub> (kN) -524,51 / 4082,55

Diagramas de interacção

Composta Desviada Abaco

Figura 5.20 – Valores de flexão na viga 2 no XD-CoSec

**Momento positivo**

- FS = 174.92 KN
- FC = 4800.00 x KN
- x = 0.036 m
- z = 0.54 m
- **MRd = 93.66 KNm**

Verificação: **MEd ≤ MRd**

**Momento negativo**

- FS = 349.85 KN
- FC = 4800.00 x KN
- x = 0.073 m
- z = 0.52 m
- **MRd = 182.22 KNm**

Verificação: **MEd ≤ MRd**

MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)	MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)
79.85	93.66	85.26	-159.71	182.22	87.65

Figura 5.21 – Valores de flexão na viga 2 no relatório

**Dados da Secção**

Materials Classe do Betão C30/37 Classe do Aço A500

**Geometria** Armadura Longitudinal Armadura Transversal

b (m) 0,3 n° Diam. 20 6 0,15

h (m) 0,6 As- 2 As<sub>w</sub> 0 As+ 2 Ramos Y 2 Z 2 As<sub>w</sub>/s (cm/m)<sup>2</sup> 3,7699 3,7699

c<sub>mec</sub> (cm) 5,0

**Esforços** Flexão:  Simples  Composta  Desviada

N (kN) 100 My (kN.m) 134,15 Vy (kN) 199,63

Mz (kN.m) 50 Vz (kN) 0

**Resultados** Flexão  Esforço Transverso

Flexão Esforço Transverso

Condição limite para a verificação:

N = 0,00 kN

My = 142,22 kN.m

Mz = 0,00 kN.m

Eficiência da Amadura = 94,3 %

Limites Tracção/Compressão N<sub>Rd</sub> (kN) -546,36 / 4102,65

Diagramas de interacção

Composta Desviada Abaco

---

**Dados da Secção**

Materials Classe do Betão C30/37 Classe do Aço A500

**Geometria** Armadura Longitudinal Armadura Transversal

b (m) 0,3 n° Diam. 20 6 0,15

h (m) 0,6 As- 2 As<sub>w</sub> 0 As+ 4 Ramos Y 2 Z 2 As<sub>w</sub>/s (cm/m)<sup>2</sup> 3,7699 3,7699

c<sub>mec</sub> (cm) 5,0

**Esforços** Flexão:  Simples  Composta  Desviada

N (kN) 100 My (kN.m) 239,58 Vy (kN) 199,63

Mz (kN.m) 50 Vz (kN) 0

**Resultados** Flexão  Esforço Transverso

Flexão Esforço Transverso

Condição limite para a verificação:

N = 0,00 kN

My = 278,25 kN.m

Mz = 0,00 kN.m

Eficiência da Amadura = 86,1 %

Limites Tracção/Compressão N<sub>Rd</sub> (kN) -819,55 / 4353,98

Diagramas de interacção

Composta Desviada Abaco

Figura 5.22 – Valores de flexão na viga 3 no XD-CoSec

**Momento positivo**

- FS = 273.32 KN
- FC = 4800.00 x KN
- x = 0.057 m
- z = 0.53 m
- **MRd** = 144.10 KNm

Verificação: **MEd ≤ MRd**

**Momento negativo**

- FS = 546.64 KN
- FC = 4800.00 x KN
- x = 0.114 m
- z = 0.50 m
- **MRd** = 275.75 KNm

Verificação: **MEd ≤ MRd**

MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)	MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)
134.15	144.10	93.10	-239.58	275.75	86.88

Figura 5.23 – Valores de flexão na viga 3 no relatório

Os valores escolhidos para a armadura longitudinal cumprem com a segurança da viga no *XD-CoSec*, tal como os relatórios concluem de igual modo. O valor do momento resistente difere pouco nas 3 vigas, devido a arredondamentos, sendo possível comparar com o terceiro método no relatório:

- Para a viga 1: 277,49 KNm no *XD-CoSec* e 275,75 KNm no relatório
- Para a viga 2: 92,19 KNm no *XD-CoSec* e 93,66 KNm no relatório (momento positivo) e 180,85 KNm no *XD-CoSec* e 182,22 KNm no relatório (momento negativo)
- Para a viga 3: 142,22 KNm no *XD-CoSec* e 144,10 KNm no relatório (momento positivo) e 278,25 KNm no *XD-CoSec* e 275,75 KNm no relatório (momento negativo)

Na Figura 5.24 e Figura 5.25 dá para perceber o valor de esforço transversal máximo é muito próximo, 540,74 KN no *XD-CoSec* e 546,21 KN no relatório.

**Dados da Secção**

Materials: Classe do Betão C30/37, Classe do Aço A500

**Geometria**: b (m) 0,3; h (m) 0,6; c<sub>mec</sub> (cm) 5,0

**Armadura Longitudinal**: n° 2, 4; Diam. 16, 6, 20

**Armadura Transversal**: Diam. 8; Esp. 0,30; Ramos Y 2, Z 2; As<sub>w</sub>/s (cm<sup>2</sup>/m) 3,3510

**Esforços**: Flexão:  Simples,  Composta,  Desviada

N (kN) 100; My (kN.m) 239,56; Vy (kN) 159,71; Mz (kN.m) 50; Vz (kN) 0

**Resultados**: Flexão , Esforço Transverso

Armadura necessária à garantia da segurança			Limites Tração/Compressão	
	Y	Z	N <sub>Rd</sub> (kN) -721,2 / 4263,5	
V <sub>rd,c</sub> (kN)	90,06	0,00	Diagramas de interação 	
cot θ	2,50	0,00		
V <sub>rd,max</sub> (kN)	540,74	0,00		
As <sub>w</sub> /s (cm <sup>2</sup> /m)	2,9683	0,0000		

Figura 5.24 – Valores de esforço transversal no *XD-CoSec*

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$$

- $v = 0.53$
- $V_{Rd,max} = 546.21 \text{ KN}$

Verificação:  $V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$

Figura 5.25 – Valores de esforço transversal no relatório

Através de outra aplicação, o *XD-Conserv*, é possível obter os valores da fendilhação, como mostra a Figura 5.26, Figura 5.27, Figura 5.28 e Figura 5.29.

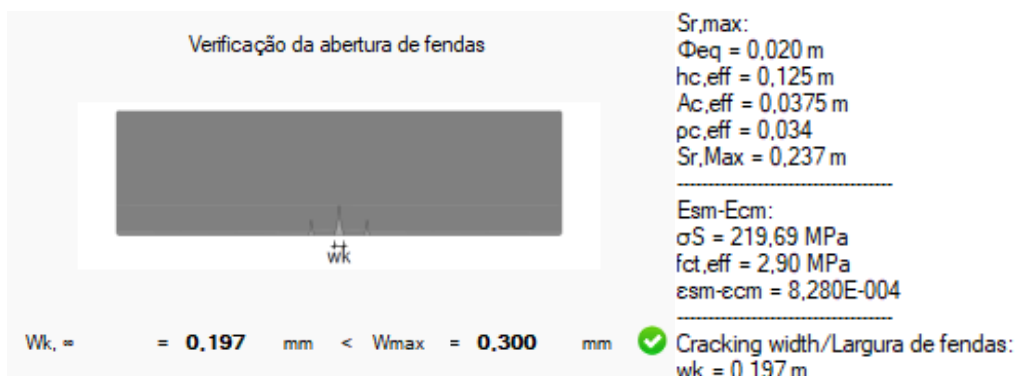


Figura 5.26 – Valor de fendilhação na viga 1 no XD-ConServ

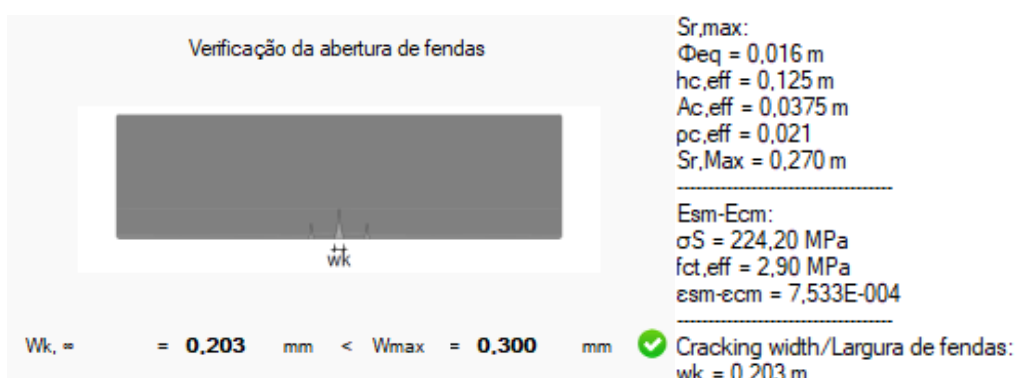


Figura 5.27 – Valor de fendilhação na viga 2 no XD-ConServ

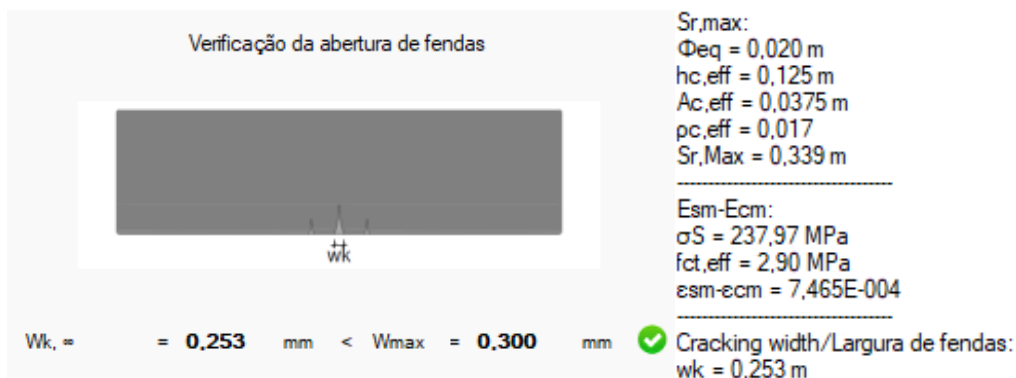


Figura 5.28 – Valor de fendilhação positiva na viga 3 no XD-ConServ

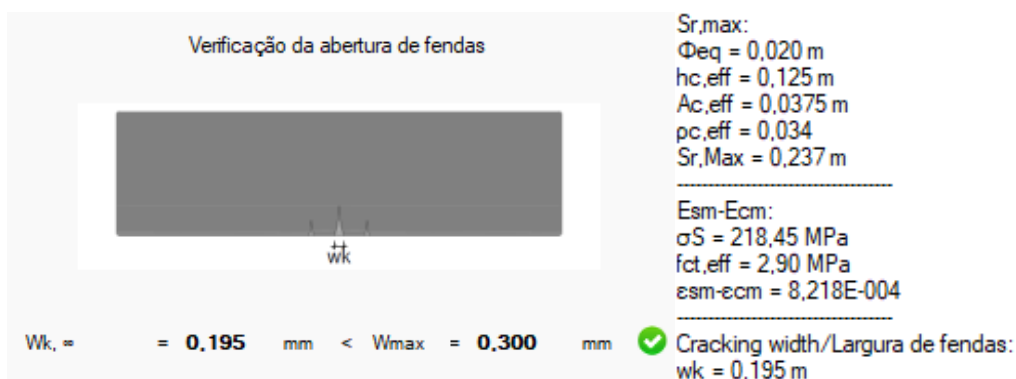


Figura 5.29 – Valor de fendilhação negativa na viga 3 no XD-ConServ

Também é possível tirar valores testados do *Excel*, como mostram a Figura 5.30, a Figura 5.32, a Figura 5.34 e a Figura 5.36, e compará-los com a Figura 5.31, a Figura 5.33, a Figura 5.35 e a Figura 5.37, do relatório, respetivamente.

b	0,3	m	$\rho$	0,0076	%	
h	0,6	m	b	0,092		
c	0,05	m	$\alpha$	0,26		
d	0,55	m	x	0,14	m	
fctm	2,9	Mpa	Cs	143,82		
MEd	133,65	KNm	$\sigma_s$	211812,39	Mpa	
Ec	33	Gpa	Ac,eff	0,038	m <sup>2</sup>	Valores introduzidos
Es	200	Gpa				Armadura
$\alpha_e$	6,06		$\rho_{p,eff}$	0,034		Momento
n	4					Valores intermédios
d	20	mm	$\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm}$	0,00085		Valores intermédios para fendilhação
a	12,57	cm <sup>2</sup>	0,6*s/Es	0,00064		Fendilhação
hc,eff	0,13	m	Sr,max	0,24	mm	
	0,15	m				
	0,3	m	wk	0,00020	m	
min	0,125	m		0,202	mm	

Figura 5.30 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação na viga 1 no *Excel*

### Momento positivo

- $\rho = 0.762 \%$
- $\alpha = 0.261$
- $x = 0.144 \text{ m}$
- $C_s = 143.823$
- $\sigma_s = 211.812 \text{ MPa}$
- $h_{c,eff} = 0.125 \text{ m}$
- $A_{c,eff} = 0.0375 \text{ m}^2$
- $\rho_{p,eff} = 0.0335$
- $\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm} = 0.000851$
- $S_{r,max} = 0.237 \text{ mm}$
- $w_k = 0.202 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.202	0.3	67.33

Figura 5.31 – Cálculos intermédios e valores da fendilhação na viga 1 no relatório

b	0,3	m	$\rho$	0,0049	%	
h	0,6	m	b	0,059		
c	0,05	m	$\alpha$	0,22		
d	0,55	m	x	0,12	m	
fctm	2,9	Mpa	Cs	221,02		
MEd	-89,1	KNm	$\sigma_s$	217005,29	Mpa	
Ec	33	Gpa	Ac,eff	0,038	m <sup>2</sup>	Valores introduzidos
Es	200	Gpa				Armadura
$\alpha_e$	6,06		$\rho_{p,eff}$	0,021		Momento
n	4					Valores intermédios
d	16	mm	$\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm}$	0,00078		Valores intermédios para fendilhação
a	8,04	cm <sup>2</sup>	0,6*s/Es	0,00065		Fendilhação
hc,eff	0,13	m	Sr,max	0,27	mm	
	0,16	m				
	0,3	m	wk	0,00021	m	
min	0,125	m		0,210	mm	

Figura 5.32 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação na viga 2 no Excel

### Momento negativo

- $\rho = 0.487 \%$
- $\alpha = 0.215$
- $x = 0.118 \text{ m}$
- $C_s = 221.023$
- $\sigma_s = 217.005 \text{ MPa}$
- $h_{c,eff} = 0.125 \text{ m}$
- $A_{c,eff} = 0.0375 \text{ m}^2$
- $\rho_{p,eff} = 0.0214$
- $\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm} = 0.000779$
- $S_{r,max} = 0.270 \text{ mm}$
- $w_k = 0.210 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.210	0.3	70.00

Figura 5.33 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação na viga 2 no relatório

b	0,3	m	$\rho$	0,0038	%	
h	0,6	m	b	0,046		
c	0,05	m	$\alpha$	0,19		
d	0,55	m	x	0,11	m	
fctm	2,9	Mpa	Cs	280,66		
MEd	74,84	KNm	$\sigma_s$	231456,88	Mpa	
Ec	33	Gpa	Ac,eff	0,038	m^2	Valores introduzidos
Es	200	Gpa				Armadura
$\alpha_e$	6,06		$\rho_{p,eff}$	0,017		Momento
n	2					Valores intermédios
d	20	mm	$\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm}$	0,00078		Valores intermédios para fendilhação
a	6,28	cm^2	0,6*s/Es	0,00069		Fendilhação
hc,eff	0,13	m	Sr,max	0,34	mm	
	0,16	m				
	0,3	m	wk	0,00026	m	
min	0,125	m		0,263	mm	

Figura 5.34 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação positiva na viga 3 no Excel

### Momento positivo

- $\rho = 0.381 \%$
- $\alpha = 0.193$
- $x = 0.106 \text{ m}$
- $C_s = 280.661$
- $\sigma_s = 231.456 \text{ MPa}$
- $h_{c,eff} = 0.125 \text{ m}$
- $A_{c,eff} = 0.0375 \text{ m}^2$
- $\rho_{p,eff} = 0.0168$
- $\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm} = 0.000776$
- $S_{r,max} = 0.339 \text{ mm}$
- $w_k = 0.263 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.263	0.3	87.67

Figura 5.35 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação positiva na viga 3 no relatório

b	0,3	m	$\rho$	0,0076	%	
h	0,6	m	b	0,092		
c	0,05	m	$\alpha$	0,26		
d	0,55	m	x	0,14	m	
fctm	2,9	Mpa	Cs	143,82		
MEd	-133,7	KNm	$\sigma_s$	211891,64	Mpa	
Ec	33	Gpa	Ac,eff	0,038	m <sup>2</sup>	Valores introduzidos
Es	200	Gpa				Armadura
$\alpha_e$	6,06		$\rho_{p,eff}$	0,034		Momento
n	4					Valores intermédios
d	20	mm	$\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm}$	0,00085		Valores intermédios para fendilhação
a	12,57	cm <sup>2</sup>	0,6*s/Es	0,00064		Fendilhação
hc,eff	0,13	m	Sr,max	0,24	mm	
	0,15	m				
	0,3	m	wk	0,00020	m	
min	0,125	m		0,202	mm	

Figura 5.36 – Cálculos intermédios e valores de fendilhação negativa na viga 3 no Excel

### Momento negativo

- $\rho = 0.762 \%$
- $\alpha = 0.261$
- $x = 0.144 \text{ m}$
- $C_s = 143.823$
- $\sigma_s = 211.827 \text{ MPa}$
- $h_{c,eff} = 0.125 \text{ m}$
- $A_{c,eff} = 0.0375 \text{ m}^2$
- $\rho_{p,eff} = 0.0335$
- $\epsilon_{sm}-\epsilon_{cm} = 0.000851$
- $S_{r,max} = 0.237 \text{ mm}$
- $w_k = 0.202 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.202	0.3	67.33

Figura 5.37 – Cálculos intermédios e valores da fendilhação negativa na viga 3 no relatório

Como dá para notar, os valores da fendilhação são próximos entre os valores do *Excel*, do *XD-ConServ* e do relatório. A viga 1 tem 0,197 mm no *XD-ConServ* e 0,202 mm no relatório e no *Excel*. A viga 2 tem 0,203 mm no *XD-ConServ* e 0,210 mm no relatório e no *Excel*. A viga 3, no momento positivo, tem 0,253 mm no *XD-ConServ* e 0,263 mm no relatório e no *Excel*. No momento negativo, tem 0,195 mm no *XD-ConServ* e 0,202 mm no relatório e no *Excel*.

Por fim, é possível comparar os valores de deformação no *Excel*, na Figura 5.38, Figura 5.40 e Figura 5.42, com os valores do relatório, na Figura 5.39, Figura 5.41 e Figura 5.43, respetivamente.

L	6	m			
b	0,3	m	$E_{c,eff}$	12189,20	Mpa
h	0,6	m	alfa e	16,41	
d	0,55	m			
dc	0,05	m	$x_{un}$	0,32	m
fctm	2,9	MPa	$I_{un}$	0,0069	m <sup>4</sup>
$E_c$	33	GPa	$M_{cr}$	70,92	KNm
n	2				
d	16	mm	$\zeta$	0,91	
a	4,02	cm <sup>2</sup>			
n	4		$x_{cr}$	0,20	m
d	20	mm	$I_{cr}$	0,0035	m <sup>4</sup>
a	12,57	cm <sup>2</sup>			
fluência	1,71		$1/r_n$	0,0030	
retração	0,00026		$1/r_{cs}$	0,00044	
$\beta$	0,5		$1/r_T$	0,0035	
$M_{qp}$	133,65	KNm			
$M_a$	0	KNm	$\lambda$	0,104	
$M_b$	0	KNm	$\delta$	0,0130	m
$M_c$	171,45			12,98	mm

- Valores introduzidos
- Armadura Inferior
- Armadura Superior
- Momentos
- Valores intermédios
- Valores intermédios para deformação
- Deformação

Figura 5.38 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 1 no Excel

#### Cálculo analítico ( $\delta \leq \delta_{max}$ )

- $E_{c,eff} = 12195.122$  MPa
- $\alpha_E = 16.40$ 
  - $A_e = 0.206$  m<sup>2</sup>
  - $x_{un} = 0.316$  m
  - $I_{un} = 6943.90 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>
- $M_{cr} = 70.91$  KNm
- $M_{cr} < M_{CHR}$
- $\zeta = 0.914$ 
  - $x_{cr} = 0.203$  m
  - $I_{cr} = 3462.99 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>
    - $S_{un} = 0.0001871$
    - $S_{cr} = 0.0003741$
- $1/r_n = 0.003029$
- $1/r_{cs} = 0.000439$
- $1/r_T = 0.003468$
- $\lambda = 0.104$
- $\delta = 12.983$  mm
- $\delta_{max} = 24.000$  mm

Verificação:  $\delta \leq \delta_{max}$

$\delta$ (mm)	$\delta_{max}$ (mm)	Rácio (%)
12.983	24.000	54.10

Figura 5.39 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 1 no relatório

L	6	m			
b	0,3	m	$E_{c,eff}$	12189,20	Mpa
h	0,6	m	alfa e	16,41	
d	0,55	m			
dc	0,05	m	$x_{un}$	0,30	m
fctm	2,9	MPa	$I_{un}$	0,0062	m <sup>4</sup>
$E_c$	33	GPa	$M_{cr}$	59,69	KNm
n	2				
d	16	mm	$\zeta$	0,00	
a	4,02	cm <sup>2</sup>			
n	2		$x_{cr}$	0,12	m
d	16	mm	$I_{cr}$	0,0014	m <sup>4</sup>
a	4,02	cm <sup>2</sup>			
fluência	1,71		$1/r_n$	0,0006	
retração	0,00026		$1/r_{cs}$	0,00000	
$\beta$	0,5		$1/r_T$	0,0006	
$M_{qp}$	44,55	KNm			
$M_a$	89,1	KNm	$\lambda$	0,062	
$M_b$	89,1	KNm	$\delta$	0,0013	m
$M_c$	57,15			1,33	mm

- Valores introduzidos
- Armadura Inferior
- Armadura Superior
- Momentos
- Valores intermédios
- Valores intermédios para deformação
- Deformação

Figura 5.40 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 2 no Excel

#### Cálculo analítico ( $\delta \leq \delta_{max}$ )

- $E_{c,eff} = 12195.122 \text{ MPa}$
- $\alpha_E = 16.40$ 
  - $A_e = 0.192 \text{ m}^2$
  - $x_{un} = 0.300 \text{ m}$
  - $I_{un} = 6174.09 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$
- $M_{cr} = 59.68 \text{ KNm}$
- $M_{cr} > M_{CHR}$
- $\zeta = 0$ 
  - $x_{cr} = 0.125 \text{ m}$
  - $I_{cr} = 1421.34 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ 
    - $S_{un} = 0.0000000$
    - $S_{cr} = 0.0001408$
- $1/r_n = 0.000592$
- $1/r_{cs} = 0.000000$
- $1/r_T = 0.000592$
- $\lambda = 0.062$
- $\delta = 1.329 \text{ mm}$
- $\delta_{max} = 24.000 \text{ mm}$

Verificação:  $\delta \leq \delta_{max}$

$\delta$ (mm)	$\delta_{max}$ (mm)	Rácio (%)
1.329	24.000	5.54

Figura 5.41 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 2 no relatório

L	6	m			
b	0,3	m	$E_{c,eff}$	12189,20	Mpa
h	0,6	m	alfa e	16,41	
d	0,55	m			
dc	0,05	m	$x_{un}$	0,30	m
fctm	2,9	MPa	$I_{un}$	0,0066	m <sup>4</sup>
$E_c$	33	GPa	$M_{cr}$	63,90	KNm
n	2				
d	20	mm	$\zeta$	0,78	
a	6,28	cm <sup>2</sup>			
n	2		$x_{cr}$	0,15	m
d	20	mm	$I_{cr}$	0,0021	m <sup>4</sup>
a	6,28	cm <sup>2</sup>			
fluência	1,71		$1/r_n$	0,0025	
retração	0,00026		$1/r_{cs}$	0,00031	
$\beta$	0,5		$1/r_T$	0,0028	
$M_{qp}$	74,84	KNm			
$M_a$	0	KNm	$\lambda$	0,085	
$M_b$	133,66	KNm	$\delta$	0,0087	m
$M_c$	96,01			8,65	mm

- Valores introduzidos
- Armadura Inferior
- Armadura Superior
- Momentos
- Valores intermédios
- Valores intermédios para deformação
- Deformação

Figura 5.42 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 3 no Excel

#### Cálculo analítico ( $\delta \leq \delta_{max}$ )

- $E_{c,eff} = 12195.122$  MPa
- $\alpha_E = 16.40$ 
  - $A_e = 0.199$  m<sup>2</sup>
  - $x_{un} = 0.300$  m
  - $I_{un} = 6609.51 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>
- $M_{cr} = 63.89$  KNm
- $M_{cr} < M_{CHR}$
- $\zeta = 0.779$ 
  - $x_{cr} = 0.147$  m
  - $I_{cr} = 2082.21 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>
    - $S_{un} = -0.0000000$
    - $S_{cr} = 0.0001928$
- $1/r_n = 0.002500$
- $1/r_{cs} = 0.000313$
- $1/r_T = 0.002813$
- $\lambda = 0.085$
- $\delta = 8.651$  mm
- $\delta_{max} = 24.000$  mm

Verificação:  $\delta \leq \delta_{max}$

$\delta$ (mm)	$\delta_{max}$ (mm)	Rácio (%)
8.651	24.000	36.05

Figura 5.43 – Cálculos intermédios e valores de deformação na viga 3 no relatório

Os valores serão similares, com a deformação na viga 1 de 12,98 mm no *Excel* e 12,983 mm no relatório, a deformação na viga 2 de 1,33 mm no *Excel* e 1,329 mm no relatório e a deformação na viga 3 de 8,65 mm no *Excel* e 8,651 mm no relatório.

Por fim, pode-se fazer um resumo geral dos valores comparados, como apresenta a Tabela 5.13.

Tabela 5.13 – Comparação de valores no relatório, no *Excel* e nos *softwares*

<b>Cálculo</b>	<b>Relatório</b>	<b>Excel</b>	<b>Programas</b>
Fluência	1,706	1,71	
Retração	264,650	264,65	
Flexão viga 1	275,75		277,49
Flexão viga 2 (p)	93,66		92,19
Flexão viga 2 (n)	182,22		180,85
Flexão viga 3 (p)	144,10		142,22
Flexão viga 3 (n)	275,75		278,25
Esforço Transverso	546,21		540,74
Fendilhação viga 1	0,202	0,202	0,197
Fendilhação viga 2	0,210	0,210	0,203
Fendilhação viga 3 (p)	0,263	0,263	0,253
Fendilhação viga 3 (n)	0,202	0,202	0,195
Deformação viga 1	12,983	12,98	
Deformação viga 2	1,329	1,33	
Deformação viga 3	8,651	8,65	

# 6 Considerações finais

## 6.1 Conclusões

Em suma, este relatório resumiu o projeto de estágio desenvolvido ao longo de 4 meses de trabalho na empresa MULTIPROJECTUS, na busca de melhor conseguir atingir os objetivos previamente definidos. Apenas não se atingiu o objetivo de interligar o projeto com o *Revit*, mas todos os restantes objetivos foram concluídos e melhorados. Consegue-se obter um relatório com um processo de cálculo exato. Também se conseguiu interligar o *Robot* com a linguagem *Python*, apesar dos desafios que existem.

Todo o conhecimento adquirido e desenvolvido ao longo do curso académico e durante o estágio foram testados e aprimorados no desenvolvimento desta ferramenta. O ambiente empresarial ajudou a ter uma visão abrangente sobre os problemas que existem. Dessa forma, desenvolveu-se uma estratégia para procurar a solução do problema de forma eficaz para aperfeiçoar o projeto.

Através deste processo de cálculo é possível auxiliar o projetista com soluções de cálculo adequadas para um determinado dimensionamento e avaliar se será a solução mais económica e adequada. Através dos rácios da primeira página do relatório é possível rapidamente saber que verificação está a limitar a viga e avaliar se todas as decisões tomadas serão as mais adequadas. A partir dos exemplos do caso prático também se chega à conclusão que os resultados são precisos e exatos quando comparados com outras ferramentas que se costumam usar em ambiente empresarial, como o *XD-CoSec* e o *XD-ConServ*, e com cálculos previamente testados no *Excel*. As mínimas diferenças entre os valores devem-se a arredondamentos.

Toda a experiência adquirida ajuda a preparar para a realidade e os desafios diários que o mundo do trabalho tem na procura de soluções mais rápidas e eficientes. Cada vez mais é necessário existir uma cooperação entre a tecnologia e o ser humano, de forma a contornar desafios e concentrar a atenção em desenvolver novas técnicas para solucionar problemas. Confiando que o código será seguido como o esperado, apenas podemos esperar que o resultado será confiável e poderá ajudar no desenvolvimento do projeto de estabilidade de um edifício.

## 6.2 Desenvolvimentos futuros

A partir deste projeto existe a possibilidade de explorar futuros desenvolvimentos. Este processo de cálculo automático permite uma rápida análise e dimensionamento de vigas e pode auxiliar no projeto de um edifício. Também tem a hipótese de ser ainda mais eficiente e rápido, existindo a possibilidade de melhorar a interface utilizador-programa. Assim, como se pode realizar este processo de cálculo nas vigas, também é possível expandi-lo para outros elementos estruturais do edifício, como os pilares. E por fim, é possível interligar o projeto com o *Revit*, permitindo ter um modelo final ainda mais detalhado e com as soluções já definidas em projeto.

# Referências

**APPELTON, Júlio. 2013.** *Estruturas de Betão*. Amadora : Edições Orion, 2013. ISBN: 978-972-8620-21-9.

**Autodesk. 2024.** Autodesk. [Online] 2024. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://www.autodesk.pt/>.

**Barros, Helena, et al. 2020.** *Tabelas e Ábacos de Dimensionamento de Secções de Betão Solicitadas à Flexão e a Esforços Transversos Segundo o Eurocódigo 2*. Poto : U. Porto Press, 2020. ISBN: 978-989-746-261-0.

**CACHIM, Paulo Barreto e MORAIS, Miguel Monteiro. 2013.** *Estruturas de Betão - Bases de cálculo*. Porto : Publindústria, Edições Técnicas, 2013.

**Camara, José Noronha da. 2013.** *Estruturas de Betão I - Folhas de apoio às aulas*. Lisboa : DECivil, Sebenta do IST : s.n., 2013.

**Castanheira, Daniel e Jesus, Elson. 2023.** *Relatório do trabalho prático ANEAV*. Instituto Superior de Engenharia do Porto : s.n., 2023.

**Castanheira, Daniel, Correia, Denzel e Amaro, Rui. 2020.** *Trabalho INTGC Garcia Garcia SA*. Instituto Superior de Engenharia do Porto : s.n., 2020.

**Chat GPT. 2022.** Chat GPT. [Online] Open AI, 2022. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://chatgpt.com/>.

**Félix, Carlos e Guedes, Paulo. 2013.** *Estados Limites de Utilização*. Instituto Superior de Engenharia do Porto : s.n., 2013.

**Garcia Garcia. 2018.** Garcia Garcia. [Online] 2018. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://www.garcia.pt/pt/>.

**Guedes, Paulo. 2011.** *Apontamentos Estruturas de Betão I*. Instituto superior de Engenharia do Porto : s.n., 2011.

**HIMMELREICH, Kevin e HERRER, Alejandro Martín. 2021.** *Beyond Dynamo: Python Manual*

*for Revit*. Torraza Piemonte : Amazon Italia Logistica S.r.l., 2021. ISBN: 979836538389.

**Jupyter. 2024.** Jupyter. [Online] 2024. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://jupyter.org/>.

**Lora, Vitorio. 2019.** Python for Civil and Structural Engineers. [Online] 2019. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://www.amazon.com/Python-Civil-Structural-Engineers-Vittorio/dp/1698951019>. ISBN: 9781698951010.

**Matthes, Eric. 2022.** Python Crash Course - Cheat Sheets. [Online] 2022. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://ehmatthes.github.io/pcc/cheatsheets/README.html>. ISBN: 9781718502703.

**MULTIPROJECTUS. 2020.** MULTIPROJECTUS. [Online] 2020. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://www.multiprojectus.com/pt/>.

**NP EN 1990. 2009.** *Eurocódigo - Bases para o projeto de estruturas*. Caparica, Portugal, 2009.

**NP EN 1991-1-1. 2009.** *Eurocódigo 1 - Ações em estruturas: Parte 1-1: Ações Gerais Pesos Volúmicos, pesos próprios, sobrecargas em edifícios*. Caparica, Portugal, 2009.

**NP EN 1992-1-1. 2010.** *Eurocódigo 2 - Projecto de estruturas de betão: Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Caparica, Portugal, 2010.

**python-docx. 2013.** python-docx. *python-docx 1.1.2 documentation*. [Online] 2013. [Consultado em 23 de outubro de 2024] Disponível em <https://python-docx.readthedocs.io/en/latest/#python-docx>.


**REIS, A. Correia, FARINHA, M. Brazão e FARINHA, J. P. Brazão. 2012.** *Tabelas Técnicas*. Lisboa : Edições Técnicas E. T L., Lda, 2012. ISBN: 978-972-99731-7-8.

**Ribeiro, Diogo. 2021.** *Estruturas de Edifícios*. Instituto Superior de Engenharia do Porto : s.n., 2021.

**Santos, José. 2014.** *Processo de dimensionamento automático de pilares mistos*. Instituto Superior de Engenharia do Porto : s.n., 2014.

# Anexo



	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

# Relatório de cálculo

## Resumo das principais verificações

### Estados limites últimos


- Segurança à flexão na armadura inferior: **VERIFICA** **86.88 %**
- Segurança à flexão na armadura superior (esq): **VERIFICA** **0.00 %**
- Segurança à flexão na armadura superior (dir): **VERIFICA** **0.00 %**
- Segurança ao esforço transversal ( $VR_{d,s}$ ): **VERIFICA** **87.65 %**
- Segurança ao esforço transversal ( $VR_{d,max}$ ): **VERIFICA** **29.24 %**

### Estados limites de utilização

- Segurança à fendilhação na armadura inferior: **VERIFICA** **67.33 %**
- Segurança à fendilhação na armadura superior (esq): **VERIFICA** **0.00 %**
- Segurança à fendilhação na armadura superior (dir): **VERIFICA** **0.00 %**
- Segurança à deformação (Método 1): **VERIFICA** **54.56 %**
- Segurança à deformação (Método 2 Flecha CD): **VERIFICA** **11.72 %**
- Segurança à deformação (Método 2 Flecha LD): **VERIFICA** **29.29 %**
- Segurança à deformação (Método 3): **VERIFICA** **54.10 %**

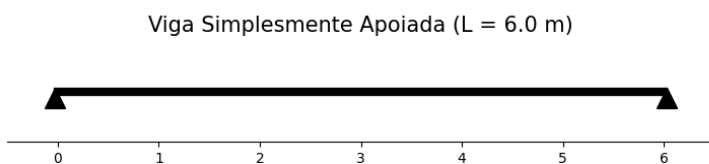
### Disposições construtivas

- Distância livre entre varões na armadura inferior: **VERIFICA**
- Distância livre entre varões na armadura superior: **VERIFICA**
- Armadura longitudinal inferior: **VERIFICA**
- Armadura longitudinal superior: **VERIFICA**
- Armadura transversal: **VERIFICA**
- Espaçamento máximo entre armaduras transversais: **VERIFICA**

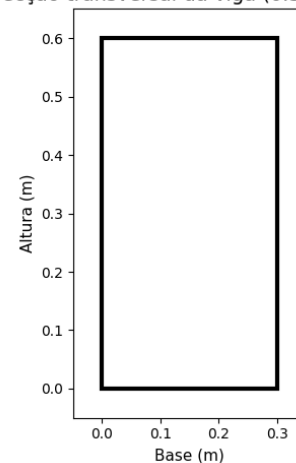
	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024


## 1. Bases para o projeto

- Altura da viga:  $h = 0.6 \text{ m}$
- Largura da viga:  $b = 0.3 \text{ m}$
- Recobrimento:  $c = 0.05 \text{ m}$   
 $dc = 0.05 \text{ m}$
- Altura útil da viga:  $d = 0.55 \text{ m}$
- Área da viga:  $A_c = 0.18 \text{ m}^2$
- Altura da laje (esquerda):  $h_{\text{esq}} = 0.15 \text{ m}$
- Altura da laje (direita):  $h_{\text{dir}} = 0.15 \text{ m}$
- Perímetro da viga:  $u = 1.5 \text{ m}$
- Comprimento da viga:  $L = 6.0 \text{ m}$
- Largura de influência:  $l_{\text{inf}} = 6.0 \text{ m}$
- Categoria: A
- Classe de exposição: XC2
- Caso de estudo: Viga Simplesmente Apoiada ( $L = 6.0 \text{ m}$ )
- Número da barra: 1



Secção transversal da viga (0.3 x 0.6 m)




	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 2. Materiais

### 2.1. Betão - EN1992-1-1 (Quadro 3.1)

- Classe: C30
- $f_{ck} = 30$  MPa
- $f_{cd} = 20.0$  MPa
- $f_{ctm} = 2.9$  MPa
- $f_{cm} = 38$  MPa
- $E_c = 33$  GPa
- $\epsilon_{c2} = 2.0$  ‰
- $\epsilon_{cu2} = 3.5$  ‰
- $\epsilon_{c3} = 1.75$  ‰
- $\epsilon_{cu3} = 3.5$  ‰
- $I = b h^3/12 = 0.3 \cdot 0.6^3 \cdot 10^4/12 = 54.00$  cm<sup>4</sup>
- $h_0 = 2 A_c/u = 2 \cdot 0.18 \cdot 10^3/1.5 = 240.0$  mm
- Ambiente exterior:
  - RH = 80 %
  - $\alpha = 0$
- Cimento tipo N:
  - $\alpha_{ds1} = 4$
  - $\alpha_{ds2} = 0.12$
- $t_{0,T} = 28$  dias
- $t_s = 28$  dias


	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 2.1.1. Fluência - EN1992-1-1 [3.1.4] (Anexo B.1)

- $t = 100 \text{ anos} = 36500 \text{ dias}$
- $f_{cm} \geq 35 \text{ MPa}$ 
  - $t_0 = t_{0,T} [(9/(2 + t_{0,T}^{1.2})) + 1]^\alpha \geq 0.5 = \max(28 \cdot [(9/(2 + 28^{1.2})) + 1]^0, 0.5) = 28.0 \text{ dias}$
  - $\alpha_1 = (35/f_{cm})^{0.7} = (35/38)^{0.7} = 0.944$
  - $\alpha_2 = (35/f_{cm})^{0.2} = (35/38)^{0.2} = 0.984$
  - $\alpha_3 = (35/f_{cm})^{0.5} = (35/38)^{0.5} = 0.96$
  - $\varphi_{RH} = [1 + ((1 - RH/100)/(0.1 h_0^{1/3})) \alpha_1] \alpha_2 = [1 + ((1 - 0.8)/(0.1 \cdot 240.0^{1/3})) \cdot 0.944] \cdot 0.984$   
 $\Leftrightarrow \varphi_{RH} = 1.283$
  - $\beta(f_{cm}) = 16.8/\sqrt{f_{cm}} = 16.8/\sqrt{38} = 2.725$
  - $\beta(t_0) = 1/(0.1 + t_0^{0.2}) = 1/(0.1 + 28.0^{0.2}) = 0.488$
- $\varphi_0 = \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0) = 1.283 \cdot 2.725 \cdot 0.488 = 1.706$ 
  - $\beta_H = 1,5 [1 + (0.012 RH)^{18}] h_0 + 250 \alpha_3 \leq 1500 \alpha_3$   
 $\Leftrightarrow \beta_H = \min(1.5 \cdot [1 + (0.012 \cdot 80)^{18}] \cdot 240.0 + 250 \cdot 0.96, 1500 \cdot 0.96) = 772.657$
- $\beta(t, t_0) = [(t - t_0)/(\beta_H + t - t_0)]^{0.3} = [(36500 - 28.0)/(772.657 + 36500 - 28.0)]^{0.3} = 0.994$
- $\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \beta(t, t_0) = 1.706 \cdot 0.994 = 1.696$
- $\varphi(\infty, t_0) = 1.706$


### 2.1.2. Retração - EN1992-1-1 [3.1.4] (Anexo B.2)

- $t = 10000 \text{ dias}$ 
  - $\beta_{ds}(t, t_s) = (t - t_s)/((t - t_s) + 0.04\sqrt{h_0^3}) = (10000 - 28)/((10000 - 28) + 0.04 \cdot \sqrt{240.0^3})$   
 $\Leftrightarrow \beta_{ds}(t, t_s) = 0.985$
  - $k_h = 0.810$ 
    - $\beta_{RH} = 1.55 [1 - (RH/100)^3] = 1.55 \cdot [1 - (80/100)^3] = 0.756$
  - $\epsilon_{cd,0} = 0.85 [(220 + 110 \alpha_{ds1}) \exp(-\alpha_{ds2} f_{cm}/10)] 10^{-6} \beta_{RH}$   
 $\Leftrightarrow \epsilon_{cd,0} = 0.85 \cdot [220 + 110 \cdot 4] \cdot \exp(0.12 \cdot 38/10) \cdot 10^{-6} \cdot 0.756 = 0.000269$
- $\epsilon_{cd} = \beta_{ds}(t, t_s) k_h \epsilon_{cd,0} = 0.985 \cdot 0.810 \cdot 0.000269 = 0.000215$ 
  - $\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0.2 t^{0.5}) = 1 - \exp(-0.2 \cdot 10000^{0.5}) = 1$
  - $\epsilon_{ca}(\infty) = 2.5 (f_{ck} - 10) 10^{-6} = 2.5 \cdot (30 - 10) \cdot 10^{-6} = 0.0000500$
- $\epsilon_{ca} = \beta_{as} \epsilon_{ca}(\infty) = 1 \cdot 0.0000500 = 0.0000500$
- $\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca} = 0.000215 + 0.0000500 = 264.650 \cdot 10^{-6}$

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 2.2. Aço

- Classe: S500
- $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
- $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$
- $\epsilon_s = 2.175 \text{ ‰}$

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 3. Armaduras

#### 3.1. Armadura longitudinal

##### 3.1.1. Armadura mínima e máxima: disposições construtivas - EN1992-1-1 [9.2.1]

- $A_{s,min} = 2.49 \text{ cm}^2$
- $A_{s,máx} = 72.00 \text{ cm}^2$

##### 3.1.2. Armadura necessária: Método distribuição retangular - EN1992-1-1 [3.1.7 (3)]

- $A_s^+ = 10.78 \text{ cm}^2$
- $A_s^- \text{ (esq)} = 0.0 \text{ cm}^2$
- $A_s^- \text{ (dir)} = 0.0 \text{ cm}^2$

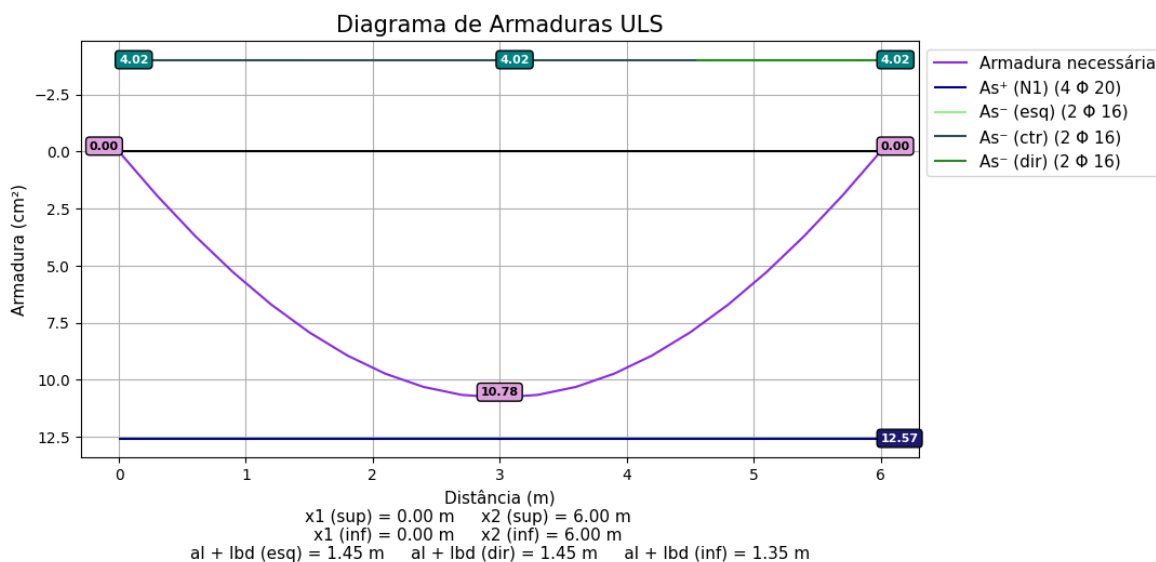
##### 3.1.3. Hipóteses de armadura longitudinal


Hipótese de armadura longitudinal inferior: 4  $\Phi$  20

- $A_s^+ = 12.57 \text{ cm}^2$

Hipótese de armadura longitudinal superior: 2  $\Phi$  16

- $A_s^- = 4.02 \text{ cm}^2$



	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 3.2. Armadura transversal

### 3.2.1. Armadura mínima e máxima: disposições construtivas - EN1992-1-1 [6.2.3] [9.2.2]

- $A_{sw/s,min} = 2.63 \text{ cm}^2/\text{m}$
- $A_{sw/s,máx} = 10.05 \text{ cm}^2/\text{m}$

### 3.2.2. Armadura necessária - EN1992-1-1 [6.2.3]

- $A_{sw/s} = 2.94 \text{ cm}^2/\text{m}$


### 3.2.3. Espaçamento máximo - EN1992-1-1 [9.2.2]

- $S_{l,máx} = 41.25 \text{ cm}$

### 3.2.4. Hipótese de armadura transversal

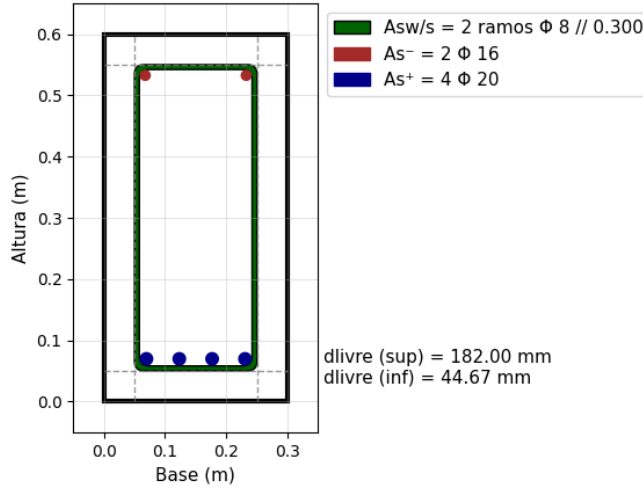
Hipótese de armadura transversal: 2 ramos  $\Phi 8 // 0.300$

- $A_{sw/s} = 3.35 \text{ cm}^2/\text{m}$

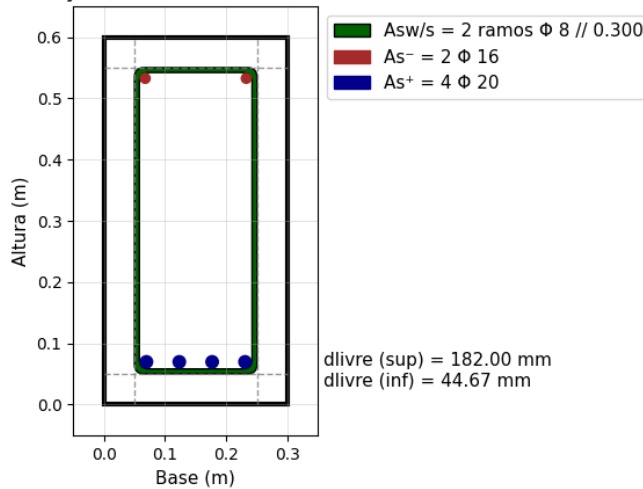
	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 3.3. Secções transversais

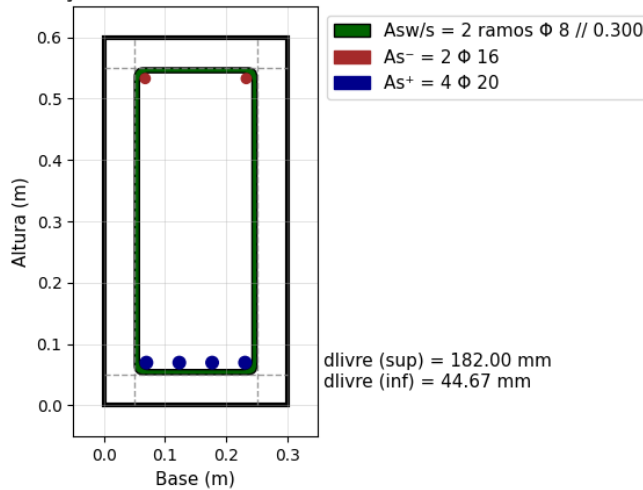
Secção transversal x = 0.00 m




Secção transversal x = 3.00 m



Secção transversal x = 6.00 m



	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 4. Análise estrutural

### 4.1. Ações - EN1991-1-1

#### 4.1.1. Cargas Permanentes

- 1 - PP
- 2 - RCP
- 3 - PD

#### 4.1.2. Cargas Variáveis

- 10 - S

### 4.2. Combinações - EN1990

#### 4.2.1. Fatores parciais de segurança - EN1990 (Tabela A1.1)

- $\gamma_G = 1.35$  (ações permanentes)
- $\gamma_Q = 1.5$  (ações variáveis)
- $\psi_0 = 0.7$
- $\psi_1 = 0.5$
- $\psi_2 = 0.3$

#### 4.2.2. Combinações estado limite último (ULS) - EN1990


Combinação fundamental:  $\sum \gamma_G G_k + \sum \gamma_Q Q$

#### 4.2.3. Combinações estado limite de utilização (SLS) - EN1990

Combinação característica:  $\sum G_k + \sum Q_{k,1} + \sum \psi_0 Q_{k,i}$

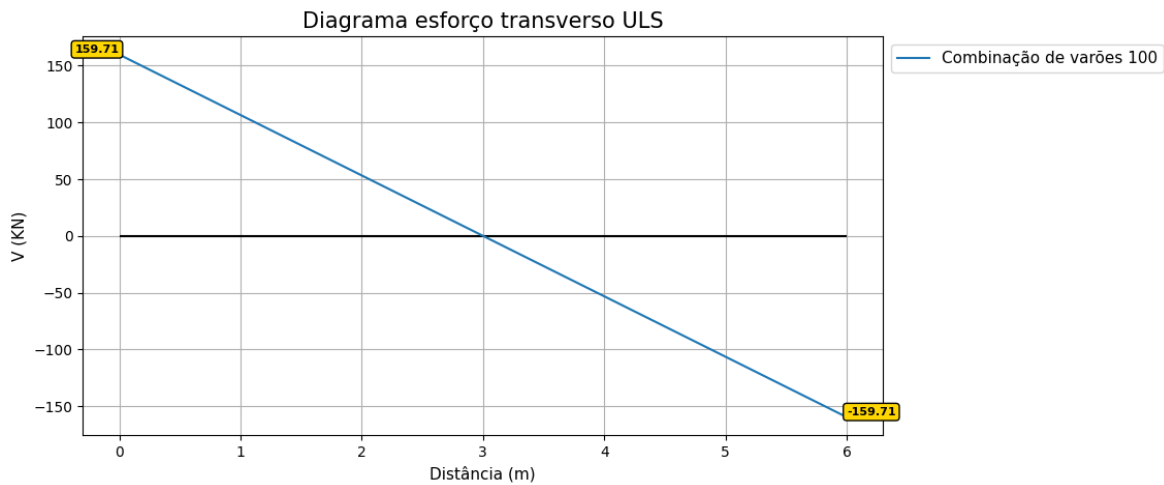
Combinação frequente:  $\sum G_k + \sum \psi_1 Q_{k,1} + \sum \psi_{2i} Q_{k,i}$

Combinação quase-permanente:  $\sum G_k + \sum \psi_{2i} Q_{k,i}$

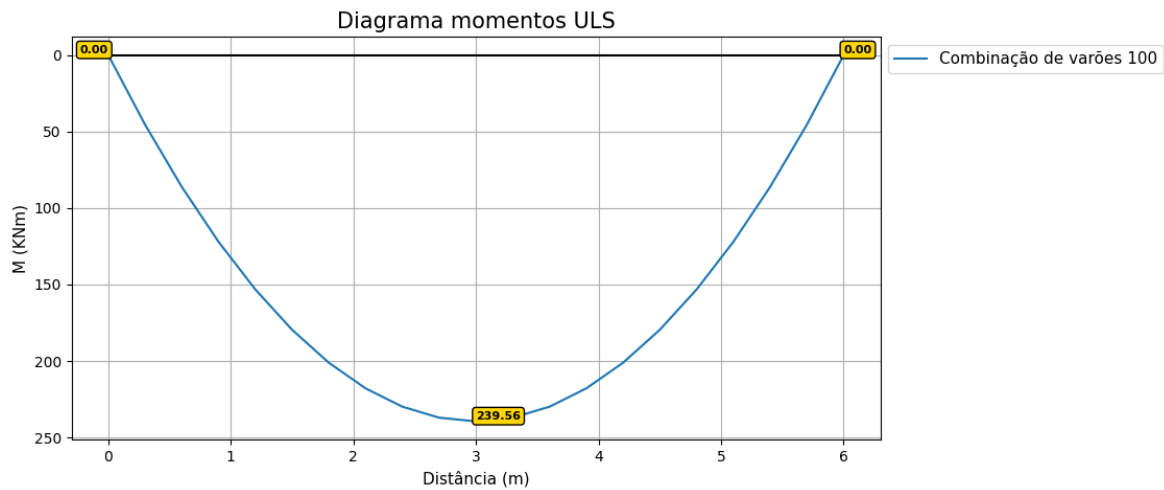
	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 5. Estados limites últimos


### 5.1. Diagramas



- $V_{Ed,máx}^+ = 159.71 \text{ KN}$
- $V_{Ed,máx}^- = -159.71 \text{ KN}$
- $V_{Ed,máx} = 159.71 \text{ KN}$



- $M_{Ed,máx}^+ = 239.56 \text{ KNm}$
- $M_{Ed,máx}^- \text{ (esq)} = 0.0 \text{ KNm}$
- $M_{Ed,máx}^- \text{ (dir)} = 0.0 \text{ KNm}$

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 5.2. Verificação de segurança à flexão - EN1992-1-1 [6.1]

### 5.2.1. Método 1: Diagrama parábola-retângulo ( $M_{Ed} \leq MR_d$ ) - EN1992-1-1 [3.1.7 (1)]

#### Momento positivo

- $FS = A_s f_{yd} = 12.57 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 546.64 \text{ KN}$
- $FC = (((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) + (2/3) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2})) \times b f_{cd}$   
 $\Leftrightarrow FC = ((1.5/3.5) + (2/3) \cdot (2.0/3.5)) \times 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4857.14 \text{ x KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 546.64/4857.14 = 0.113 \text{ m}$
- $MR_d = b f_{cd} [((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times (d - 0.5 ((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times x) + (2/3) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \times (d - ((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times x - (3/8) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \times x)]$   
 $\Leftrightarrow MR_d = 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 \cdot [(1.5/3.5) \cdot 0.113 \cdot (0.55 - 0.5 \cdot (1.5/3.5) \cdot 0.113) + (2/3) \cdot (2.0/3.5) \cdot 0.113 \cdot (0.55 - (1.5/3.5) \cdot 0.113 - (3/8) \cdot (2.0/3.5) \cdot 0.113)]$   
 $\Leftrightarrow MR_d = 275.06 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 13.60 \text{ ‰}$

Verificação:  $M_{Ed} \leq MR_d$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

Verificação:  $\epsilon_s \geq 2.175 \text{ ‰}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)
239.56	275.06	87.09


#### Momento negativo (esq)

- $FS = A_s f_{yd} = 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 174.92 \text{ KN}$
- $FC = (((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) + (2/3) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2})) \times b f_{cd}$   
 $\Leftrightarrow FC = ((1.5/3.5) + (2/3) \cdot (2.0/3.5)) \times 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4857.14 \text{ x KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 174.92/4857.14 = 0.036 \text{ m}$
- $MR_d = b f_{cd} [((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times (d - 0.5 ((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times x) + (2/3) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \times (d - ((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times x - (3/8) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \times x)]$   
 $\Leftrightarrow MR_d = 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 \cdot [(1.5/3.5) \cdot 0.036 \cdot (0.55 - 0.5 \cdot (1.5/3.5) \cdot 0.036) + (2/3) \cdot (2.0/3.5) \cdot 0.036 \cdot (0.55 - (1.5/3.5) \cdot 0.036 - (3/8) \cdot (2.0/3.5) \cdot 0.036)]$   
 $\Leftrightarrow MR_d = 93.59 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 49.95 \text{ ‰}$

Verificação:  $M_{Ed} \leq MR_d$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

Verificação:  $\epsilon_s \geq 2.175 \text{ ‰}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

MEd (KNm)	MRd (esq) (KNm)	Rácio (%)
0.0	93.59	0.00

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### Momento negativo (dir)

- $FS = A_s f_{yd} = 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 174.92 \text{ KN}$
- $FC = (((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) + (2/3) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2})) \times b f_{cd}$   
 $\Leftrightarrow FC = ((1.5/3.5) + (2/3) \cdot (2.0/3.5)) \times 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4857.14 \text{ X KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 174.92/4857.14 = 0.036 \text{ m}$
- $MRd = b f_{cd} [((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times (d - 0.5 ((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times x) + (2/3) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \times (d - ((\epsilon_{cu2} - \epsilon_{c2})/\epsilon_{cu2}) \times x - (3/8) (\epsilon_{c2}/\epsilon_{cu2}) \times x)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 \cdot [(1.5/3.5) \cdot 0.036 \cdot (0.55 - 0.5 \cdot (1.5/3.5) \cdot 0.036) + (2/3) \cdot (2.0/3.5) \cdot 0.036 \cdot (0.55 - (1.5/3.5) \cdot 0.036 - (3/8) \cdot (2.0/3.5) \cdot 0.036)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 93.59 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 49.95 \text{ ‰}$

Verificação: **MEd ≤ MRd, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

Verificação: **ε<sub>s</sub> ≥ 2.175 ‰, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

MEd (KNm)	MRd (dir) (KNm)	Rácio (%)
0.0	93.59	0.00

### 5.2.2. Método 2: Diagrama bilinear (MEd ≤ MRd) - EN1992-1-1 [3.1.7 (2)]


#### Momento positivo

- $FS = A_s f_{yd} = 12.57 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 546.64 \text{ KN}$
- $FC = (((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) + 0.5 (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3})) \times b f_{cd}$   
 $\Leftrightarrow FC = ((1.75/3.5) + 0.5 \cdot (1.75/3.5)) \times 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4500.00 \text{ X KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 546.64/4500.00 = 0.121 \text{ m}$
- $MRd = b f_{cd} [((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times (d - 0.5 ((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times x) + 0.5 (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3}) \times (d - ((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times x - (1/3) (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3}) \times x)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 \cdot [(1.75/3.5) \cdot 0.121 \cdot (0.55 - 0.5 \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.121) + 0.5 \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.121 \cdot (0.55 - (1.75/3.5) \cdot 0.121 - (1/3) \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.121)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 274.83 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 12.35 \text{ ‰}$

Verificação: **MEd ≤ MRd, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

Verificação: **ε<sub>s</sub> ≥ 2.175 ‰, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

MEd (KNm)	MRd (KNm)	Rácio (%)
239.56	274.83	87.17

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### Momento negativo (esq)

- $FS = A_s f_{yd} = 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 174.92 \text{ KN}$
- $FC = (((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) + 0.5 (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3})) \times b f_{cd}$   
 $\Leftrightarrow FC = ((1.75/3.5) + 0.5 \cdot (1.75/3.5)) \times 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4500.00 \text{ x KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 174.92/4500.00 = 0.039 \text{ m}$
- $MRd = b f_{cd} [((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times (d - 0.5 ((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times x) + 0.5 (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3}) \times (d - ((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times x - (1/3) (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3}) \times x)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 \cdot [(1.75/3.5) \cdot 0.039 \cdot (0.55 - 0.5 \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.039) + 0.5 \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.039 \cdot (0.55 - (1.75/3.5) \cdot 0.039 - (1/3) \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.039)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 93.56 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 46.02 \text{ ‰}$

Verificação: **MEd ≤ MRd, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

Verificação: **ε<sub>s</sub> ≥ 2.175 ‰, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

MEd (KNm)	MRd (esq) (KNm)	Rácio (%)
0.0	93.56	0.00


### Momento negativo (dir)

- $FS = A_s f_{yd} = 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 174.92 \text{ KN}$
- $FC = (((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) + 0.5 (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3})) \times b f_{cd}$   
 $\Leftrightarrow FC = ((1.75/3.5) + 0.5 \cdot (1.75/3.5)) \times 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4500.00 \text{ x KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 174.92/4500.00 = 0.039 \text{ m}$
- $MRd = b f_{cd} [((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times (d - 0.5 ((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times x) + 0.5 (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3}) \times (d - ((\epsilon_{cu3} - \epsilon_{c3})/\epsilon_{cu3}) \times x - (1/3) (\epsilon_{c3}/\epsilon_{cu3}) \times x)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 \cdot [(1.75/3.5) \cdot 0.039 \cdot (0.55 - 0.5 \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.039) + 0.5 \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.039 \cdot (0.55 - (1.75/3.5) \cdot 0.039 - (1/3) \cdot (1.75/3.5) \cdot 0.039)]$   
 $\Leftrightarrow MRd = 93.56 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 46.02 \text{ ‰}$

Verificação: **MEd ≤ MRd, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

Verificação: **ε<sub>s</sub> ≥ 2.175 ‰, logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]**

MEd (KNm)	MRd (dir) (KNm)	Rácio (%)
0.0	93.56	0.00

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 5.2.3. Método 3: Distribuição retangular ( $M_{Ed} \leq MR_d$ ) - EN1992-1-1 [3.1.7 (3)]

#### Momento positivo

- $FS = A_s f_{yd} = 12.57 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 546.64 \text{ KN}$
- $FC = 0.8 \times b f_{cd} = 0.8 \cdot x \cdot 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4800.00 \times \text{KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 546.64/4800.00 = 0.114 \text{ m}$
- $z = d - 0.4 x = 0.55 - 0.4 \cdot 0.114 = 0.50 \text{ m}$
- $MR_d = FS z = FC z = 546.64 \cdot 0.50 = 275.75 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 13.40 \text{ ‰}$

Verificação:  $M_{Ed} \leq MR_d$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

Verificação:  $\epsilon_s \geq 2.175 \text{ ‰}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

$M_{Ed} \text{ (KNm)}$	$MR_d \text{ (KNm)}$	Rácio (%)
239.56	275.75	86.88

#### Momento negativo (esq)

- $FS = A_s f_{yd} = 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 174.92 \text{ KN}$
- $FC = 0.8 \times b f_{cd} = 0.8 \cdot x \cdot 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4800.00 \times \text{KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 174.92/4800.00 = 0.036 \text{ m}$
- $z = d - 0.4 x = 0.55 - 0.4 \cdot 0.036 = 0.54 \text{ m}$
- $MR_d = FS z = FC z = 174.92 \cdot 0.54 = 93.66 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 49.32 \text{ ‰}$

Verificação:  $M_{Ed} \leq MR_d$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

Verificação:  $\epsilon_s \geq 2.175 \text{ ‰}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

$M_{Ed} \text{ (KNm)}$	$MR_d \text{ (KNm)}$	Rácio (%)
0.0	93.66	0.00


#### Momento negativo (dir)

- $FS = A_s f_{yd} = 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 435 \cdot 10^3 = 174.92 \text{ KN}$
- $FC = 0.8 \times b f_{cd} = 0.8 \cdot x \cdot 0.3 \cdot 20.0 \cdot 10^3 = 4800.00 \times \text{KN}$
- $FC = FS \Leftrightarrow x = 174.92/4800.00 = 0.036 \text{ m}$
- $z = d - 0.4 x = 0.55 - 0.4 \cdot 0.036 = 0.54 \text{ m}$
- $MR_d = FS z = FC z = 174.92 \cdot 0.54 = 93.66 \text{ KNm}$
- $\epsilon_s = 49.32 \text{ ‰}$

Verificação:  $M_{Ed} \leq MR_d$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

Verificação:  $\epsilon_s \geq 2.175 \text{ ‰}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.1]

$M_{Ed} \text{ (KNm)}$	$MR_d \text{ (KNm)}$	Rácio (%)
0.0	93.66	0.00

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 5.2.4. Comparação entre os métodos

#### Momento positivo

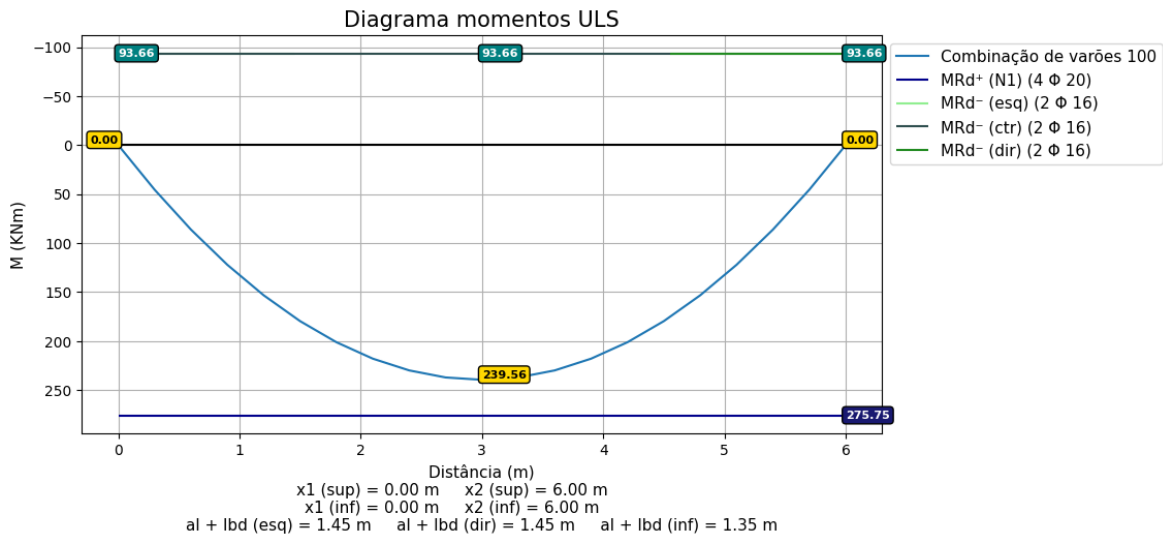
Método 1	Método 2	Método 3	Diferença (%)
275.06	274.83	275.75	0.33


#### Momento negativo (esq)

Método 1	Método 2	Método 3	Diferença (%)
93.59	93.56	93.66	0.11

#### Momento negativo (dir)

Método 1	Método 2	Método 3	Diferença (%)
93.59	93.56	93.66	0.11



	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 5.3. Verificação de segurança ao esforço transversal - EN1992-1-1 [6.2]

#### 5.3.1. $V_{Ed} \leq VRd_{s}$

- $VRd_{s} = A_{sw/s} z f_{yd} \cot\theta = 3.35 \cdot 10^{-4} \cdot 0.5 \cdot 435 \cdot 10^3 \cdot 2.5 = 182.21 \text{ KN}$

Verificação: **5.3.1.  $V_{Ed} \leq VRd_{s}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.2]**

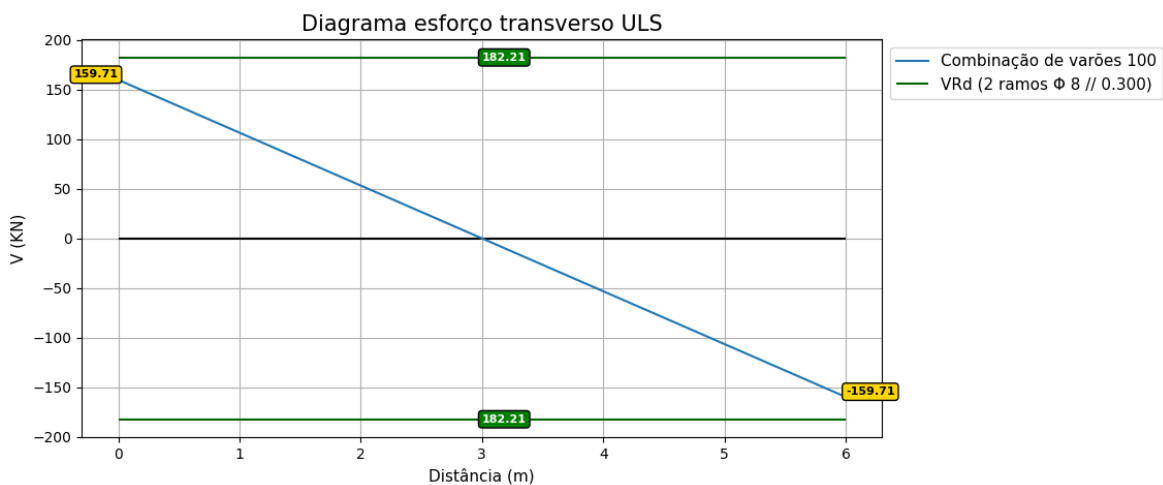
$V_{Ed}$ (KN)	$VRd_{s}$ (KN)	Rácio (%)
159.71	182.21	87.65


#### 5.3.2. $V_{Ed} \leq VRd_{max}$

- $v = 0.6 (1 - f_{ck}/250) = 0.6 \cdot (1 - 30/250) = 0.53$
- $VRd_{max} = b z v f_{cd}/(\cot\theta + \tan\theta) = 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.53 \cdot 20.0 \cdot 10^3/2.9 = 546.21 \text{ KN}$

Verificação:  **$V_{Ed} \leq VRd_{max}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [6.2]**

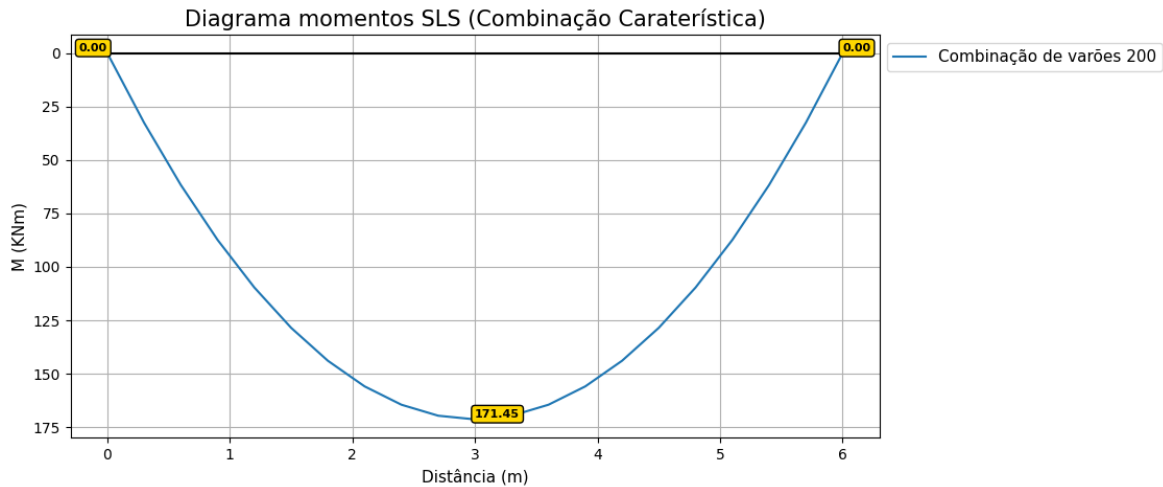
$V_{Ed}$ (KN)	$VRd_{max}$ (KN)	Rácio (%)
159.71	546.21	29.24



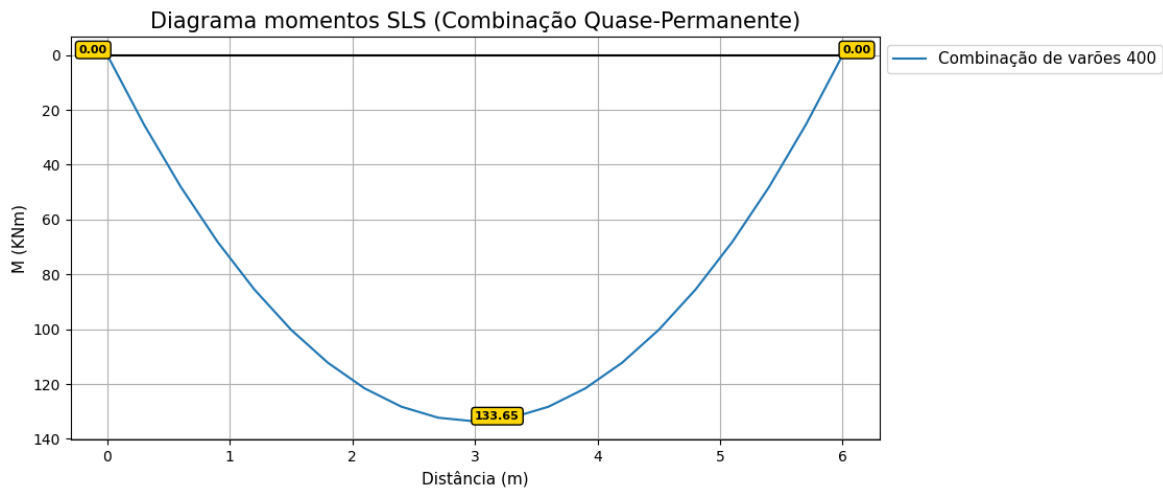
	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 6. Estados limites de utilização

### 6.1. Diagramas



- $MEd_{,máx}^+ = 171.45 \text{ KNm}$
- $MEd_{,máx}^- \text{ (esq)} = 0.0 \text{ KNm}$
- $MEd_{,máx}^- \text{ (dir)} = 0.0 \text{ KNm}$




- $MEd_{,máx}^+ = 133.65 \text{ KNm}$
- $MEd_{,máx}^- \text{ (esq)} = 0.0 \text{ KNm}$
- $MEd_{,máx}^- \text{ (dir)} = 0.0 \text{ KNm}$

### 6.2. Verificação de segurança à fendilhação - EN1992-1-1 [7.3]

#### 6.2.1. $w_k \leq w_{k,max}$

- $\alpha_E = E_s/E_c = 200/33 = 6.06$
- $w_{k,max} = 0.3 \text{ mm}$

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### Momento positivo

- $\rho = A_s/bd = 12.57 \cdot 10^{-4} \cdot 100/(0.3 \cdot 0.55) = 0.762 \%$
- $\alpha^2 + 2 \alpha_E \rho \alpha - 2 \alpha_E \rho = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2 \cdot 6.06 \cdot 0.00762 \cdot \alpha - 2 \cdot 6.06 \cdot 0.00762 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.261$
- $x = \alpha d = 0.261 \cdot 0.55 = 0.144 \text{ m}$
- $C_s = 1/(\rho (1 - \alpha/3)) = 1/(0.00762 \cdot (1 - 0.261/3)) = 143.823$
- $\sigma_s = C_s M_{QPR}/bd^2 = 143.823 \cdot 133.65 \cdot 10^{-3}/(0.3 \cdot 0.55^2) = 211.812 \text{ MPa}$
- $h_{c,eff} = \text{mín}(2.5 (h - d), (h - x)/3, h/2) = \text{mín}(2.5 \cdot (0.6 - 0.55), (0.6 - 0.144)/3, 0.6/2)$   
 $\Leftrightarrow h_{c,eff} = \text{mín}(0.125, 0.152, 0.300) = 0.125 \text{ m}$
- $A_{c,eff} = h_{c,eff} b = 0.125 \cdot 0.3 = 0.0375 \text{ m}^2$
- $\rho_{p,eff} = A_s/A_{c,eff} = 12.57 \cdot 10^{-4}/0.0375 = 0.0335$
- $\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = [\sigma_s - k_t (f_{ctm}/\rho_{p,eff}) (1 + \alpha_E \rho_{p,eff})]/E_s \geq 0.6 \sigma_s/E_s$   
 $\Leftrightarrow \epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = [211812 - 0.4 \cdot (2.9 \cdot 10^3/0.0335) \cdot (1 + 6.06 \cdot 0.0335)]/(200 \cdot 10^6)$   
 $\geq 0.6 \cdot 211812/(200 \cdot 10^6)$   
 $\Leftrightarrow \epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \text{máx}(0.000851, 0.000635) = 0.000851$
- $S_{r,max} = k_3 c + k_1 k_2 k_4 \Phi/\rho_{p,eff}$   
 $\Leftrightarrow S_{r,max} = 3.4 \cdot (0.05 - (20.00 \cdot 10^{-3}/2)) + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.425 \cdot 20.00 \cdot 10^{-3}/0.0335$   
 $\Leftrightarrow S_{r,max} = 0.237 \text{ mm}$
- $w_k = S_{r,max} (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) = 0.237 \cdot 0.000851 \cdot 10^3 = 0.202 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [7.3]

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.202	0.3	67.33

### Momento negativo (esq)

- $w_k = 0.0 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [7.3]

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.0	0.3	0.00

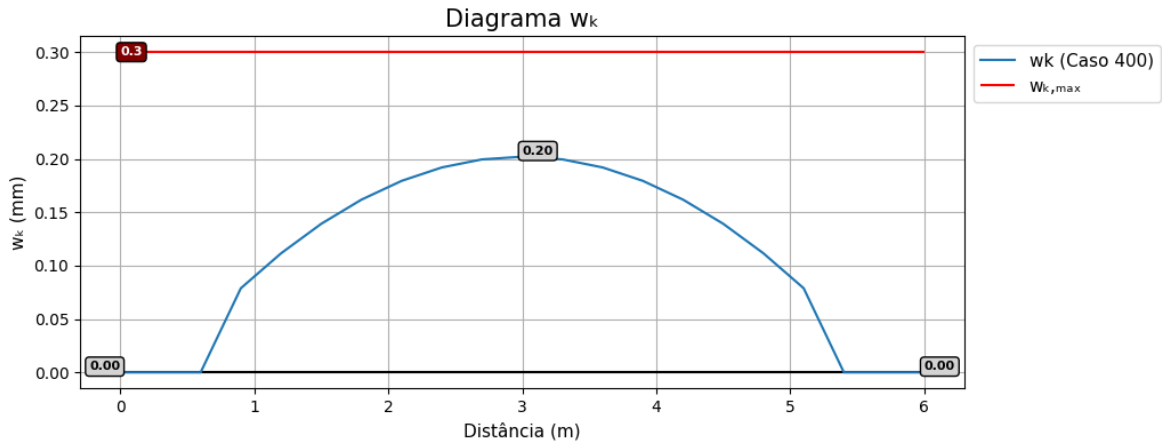
### Momento negativo (dir)


- $w_k = 0.0 \text{ mm}$

Verificação:  $w_k \leq w_{k,max}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [7.3]

$w_k$ (mm)	$w_{k,max}$ (mm)	Rácio (%)
0.0	0.3	0.00

Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
Referência	EN1992-1-1
Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
Data	22/10/2024



	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

### 6.3. Verificação de segurança à deformação - EN1992-1-1 [7.4]

#### 6.3.1. Método 1: Verificação sem cálculo da flecha - EN1992-1-1 [7.4.2]

- $L/d = 6.0/0.55 = 10.91$ 
  - $\rho = A_s/bd = 12.57 \cdot 10^{-4}/(0.3 \cdot 0.55) = 0.00762$
  - $\rho_c = A_s/bd = 4.02 \cdot 10^{-4}/(0.3 \cdot 0.55) = 0.00244$
  - $\rho_0 = 10^{-3} \sqrt{f_{ck}} = 10^{-3} \cdot \sqrt{30} = 0.00548$
  - $K = 1$
- $\rho > \rho_0$
- $L/d_{\max} = K [11 + 1.5 \sqrt{f_{ck}} (\rho_0/(\rho - \rho_c)) + (1/12) \sqrt{f_{ck}} \sqrt{(\rho_c/\rho_0)}]$   
 $\Leftrightarrow L/d_{\max} = 1 \cdot [11 + 1.5 \cdot \sqrt{30} \cdot (0.00548/0.00518) + (1/12) \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{(0.00244/0.00548)}]$   
 $\Leftrightarrow L/d_{\max} = 19.99$

Verificação:  $L/d \leq L/d_{\max}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [7.4.2]

L/d	L/d <sub>max</sub>	Rácio (%)
10.91	19.99	54.56

#### 6.3.2. Método 2: Flecha do Robot - EN1992-1-1 [7.4.1]

- $\delta_{CD} = 2.813$  mm
- $\delta_{LD} = 7.029$  mm
- $\delta_{\max} = L/250 = 6.0 \cdot 10^2/250 = 24.000$  mm


Verificação:  $\delta \leq L/250$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [7.4.1 (4)]

$\delta$ (CD) (mm)	$\delta_{\max}$ (mm)	Rácio (%)
2.813	24.000	11.72

$\delta$ (LD) (mm)	$\delta_{\max}$ (mm)	Rácio (%)
7.029	24.000	29.29

#### 6.3.3. Método 3: Cálculo analítico ( $\delta \leq \delta_{\max}$ ) - EN1992-1-1 [7.4.3]

- $E_{c,eff} = E_c/(1 + \varphi(\infty, t_0)) = 33 \cdot 10^3/(1 + 1.706) = 12195.122$  MPa
- $\alpha_E = E_s/E_{c,eff} = 200 \cdot 10^3/12195.122 = 16.40$ 
  - $A_e = b h + (\alpha_E - 1) (A_s^+ + A_s^-)$   
 $\Leftrightarrow A_e = 0.3 \cdot 0.6 + (16.40 - 1) \cdot (12.57 \cdot 10^{-4} + 4.02 \cdot 10^{-4}) = 0.206$  m<sup>2</sup>
  - $x_{un} = (0.5 b h^2 + (\alpha_E - 1) (A_s^+ d + A_s^- dc))/A_e$   
 $\Leftrightarrow x_{un} = (0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.6^2 + (16.40 - 1) \cdot (12.57 \cdot 10^{-4} \cdot 0.55 + 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot 0.05))/0.206 = 0.316$  m
  - $I_{un} = (1/3) b x_{un}^3 + (1/3) b (h-x_{un})^3 + (\alpha_E - 1) (x_{un}-dc)^2 A_s^- + (\alpha_E - 1) (d-x_{un})^2 A_s^+$

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

$$\Leftrightarrow I_{un} = (1/3) \cdot 0.3 \cdot 0.316^3 + (1/3) \cdot 0.3 \cdot (0.6 - 0.316)^3 + (16.40 - 1) \cdot (0.316 - 0.05)^2 \cdot 4.02 \cdot 10^{-4} + (16.40 - 1) \cdot (0.55 - 0.316)^2 \cdot 12.57 \cdot 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow I_{un} = 6943.90 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

- $M_{cr} = f_{ctm} I_{un} / (h - x_{un}) = 2.9 \cdot 10^3 \cdot 6943.90 \cdot 10^{-6} / (0.6 - 0.316) = 70.91 \text{ KNm}$
- $M_{cr} < M_{CHR}$
- $\zeta = 1 - 0.5 (M_{cr} / M_{CHR})^2 = 1 - 0.5 \cdot (70.91 / 171.45)^2 = 0.914$ 
  - $x_{cr} = [-(A_s^+ \alpha_E + A_s^- (\alpha_E - 1)) + \sqrt{((A_s^+ \alpha_E + A_s^- (\alpha_E - 1))^2 + 2 b (A_s^+ d \alpha_E + A_s^- dc (\alpha_E - 1)))}] / b$ 

$$\Leftrightarrow x_{cr} = [-0.02680 + \sqrt{(0.02680^2 + 2 \cdot 0.3 \cdot 0.01164)}] / 0.3 = 0.203 \text{ m}$$
  - $I_{cr} = (1/3) b x_{cr}^3 + (\alpha_E - 1) (x_{cr} - dc)^2 A_s^- + \alpha_E (d - x_{cr})^2 A_s^+$ 

$$\Leftrightarrow I_{cr} = (1/3) \cdot 0.3 \cdot 0.203^3 + (16.40 - 1) \cdot (0.203 - 0.05)^2 \cdot 4.02 \cdot 10^{-4} + 16.40 \cdot (0.55 - 0.203)^2 \cdot 12.57 \cdot 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow I_{cr} = 3462.99 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$
    - $S_{un} = A_s^+ (d - x_{un}) - A_s^- (x_{un} - dc)$ 

$$\Leftrightarrow S_{un} = 12.57 \cdot 10^{-4} \cdot (0.55 - 0.316) - 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot (0.316 - 0.05) = 0.0001871$$
    - $S_{cr} = A_s^+ (d - x_{cr}) - A_s^- (x_{cr} - dc)$ 

$$\Leftrightarrow S_{cr} = 12.57 \cdot 10^{-4} \cdot (0.55 - 0.203) - 4.02 \cdot 10^{-4} \cdot (0.203 - 0.05) = 0.0003741$$
- $1/r_n = \zeta M_{QPR} / (E_{c,eff} I_{cr}) + (1 - \zeta) M_{QPR} / (E_{c,eff} I_{un})$ 

$$\Leftrightarrow 1/r_n = 0.914 \cdot 133.65 / (12195.122 \cdot 10^3 \cdot 3462.99 \cdot 10^{-6}) + (1 - 0.914) \cdot 133.65 / (12195.122 \cdot 10^3 \cdot 6943.90 \cdot 10^{-6})$$


$$\Leftrightarrow 1/r_n = 0.003029$$
- $1/r_{cs} = \zeta \alpha_E \epsilon_{cs} S_{cr} / I_{cr} + (1 - \zeta) \alpha_E \epsilon_{cs} S_{un} / I_{un}$ 

$$\Leftrightarrow 1/r_{cs} = 0.914 \cdot 16.40 \cdot 264.650 \cdot 0.0003741 / 3462.99 + (1 - 0.914) \cdot 16.40 \cdot 264.650 \cdot 0.0001871 / 6943.90$$

$$\Leftrightarrow 1/r_{cs} = 0.000439$$
- $1/r_T = 1/r_n + 1/r_{cs} = 0.003029 + 0.000439 = 0.003468$
- $\lambda = 0.104 (1 - 0.1 ((M_{QPR}^-_e + M_{QPR}^-_d) / M_{QPR}^+)) = 0.104 \cdot (1 - 0.1 \cdot ((0.0 + 0.0) / 133.65)) = 0.104$
- $\delta = \lambda L^2 1/r_T = 0.104 \cdot 6.0^2 \cdot 0.003468 = 12.983 \text{ mm}$
- $\delta_{\max} = L / 250 = 6.0 \cdot 10^2 / 250 = 24.000 \text{ mm}$

Verificação:  $\delta \leq \delta_{\max}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [7.4.3]

$\delta$ (mm)	$\delta_{\max}$ (mm)	Rácio (%)
12.983	24.000	54.10

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 7. Disposições construtivas relativas a armaduras - Generalidades

### 7.1. Armadura inferior - EN1992-1-1 [8.2]


- $d_{livre} \geq \Phi L$  ou 20 mm
- 44.67 mm  $\geq$  20 mm

Verificação:  $d_{livre} \geq d_{livre,min}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [8.2]

### 7.1. Armadura superior - EN1992-1-1 [8.2]

- $d_{livre} \geq \Phi L$  ou 20 mm
- 182.00 mm  $\geq$  20 mm

Verificação:  $d_{livre} \geq d_{livre,min}$ , logo VERIFICA - EN1992-1-1 [8.2]

	Título	Análise e dimensionamento de vigas de betão armado - Processo de cálculo automático para o projeto de estabilidade
	Referência	EN1992-1-1
	Autor	Daniel Filipe Sousa Castanheira
	Data	22/10/2024

## 8. Disposições construtivas relativas a elementos e regras particulares

### 8.1. Armadura longitudinal - EN1992-1-1 [9.2.1]

- $A_{s,min} \geq \max(0.26 b d f_{ctm}/f_{yk}, 0.0013 b d)$

$$\Leftrightarrow A_{s,min} \geq \max(0.26 \cdot 0.3 \cdot 0.55 \cdot 2.9 \cdot 10^4/500, 0.0013 \cdot 0.3 \cdot 0.55 \cdot 10^4) = \max(2.49, 2.15)$$

$$\Leftrightarrow A_{s,min} = 2.49 \text{ cm}^2$$

- $A_{s,max} = 0.04 \cdot A_c = 0.04 \cdot 0.18 \cdot 10^4 = 72.00 \text{ cm}^2$

Verificação:  $A_s^+ \geq A_{s,min}$ , logo VERIFICA a armadura longitudinal mínima - EN1992-1-1 [9.2.1]

Verificação:  $A_s^+ \leq A_{s,max}$ , logo VERIFICA a armadura longitudinal máxima - EN1992-1-1 [9.2.1]

Verificação:  $A_s^- \geq A_{s,min}$ , logo VERIFICA a armadura longitudinal mínima - EN1992-1-1 [9.2.1]

Verificação:  $A_s^- \leq A_{s,max}$ , logo VERIFICA a armadura longitudinal máxima - EN1992-1-1 [9.2.1]

$A_{s,min} \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_s^+ \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_{s,max} \text{ (cm}^2\text{)}$
2.49	12.57	72.00

$A_{s,min} \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_s^- \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_{s,max} \text{ (cm}^2\text{)}$
2.49	4.02	72.00

### 8.2. Armadura transversal - EN1992-1-1 [9.2.1]

- $A_{sw/s,min} = b (0.08 \sqrt{f_{ck}})/f_{yk} = 0.3 \cdot (0.08 \cdot \sqrt{30}) \cdot 10^4/500 = 2.63 \text{ cm}^2/\text{m}$

Verificação:  $A_s/s \geq A_{s/s,min}$ , logo VERIFICA a armadura transversal mínima - EN1992-1-1 [9.2.2]

- $S_{l,max} = 0.75 d = 0.75 \cdot 0.55 \cdot 10^2 = 41.25 \text{ cm}$

Verificação: espaçamento  $\leq S_{l,max}$ , logo VERIFICA o espaçamento entre armaduras de esforço transversal - EN1992-1-1 [9.2.2]

$A_s/s_{min} \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_s/s \text{ (cm}^2\text{)}$
2.63	3.35

Espaçamento (cm)	$S_{l,max} \text{ (cm)}$
30	41.25