

---

INSTITUTO POLITÉCNICO DO PORTO

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

Curso de Mestrado em:

TECNOLOGIA E GESTÃO DAS CONTRUÇÕES

Título da dissertação:

VERIFICAÇÃO DOS ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO DE  
ESTRUTURAS DE BETÃO

Trabalho realizado por:

ISAQUE MAGALHÃES, N° 1040043

Novembro de 2011

---

---

---

## AGRADECIMENTOS

Aquando da realização deste trabalho torna-se imprescindível e inevitável expressar toda a gratidão a aqueles que tornaram possível a conquista de um sonho que agora passa a realidade.

Assim sendo, intento e dedico o presente trabalho à empresa Teisil, Empresa de Construção, Ld<sup>a</sup>, que me deu condições para prosseguir a minha formação, em particular destaque para os gerentes Sr. José Teixeira e Sr. Fernando Teixeira.

Ao Sr. Eng.º Carlos Félix agradeço os conhecimentos e acompanhamento que sempre e tão generosamente me concedeu.

Quero ainda realçar o contributo especial do Eng.º Paulo Guedes para o sucesso deste trabalho, ao qual agradeço a sua disponibilidade incondicional, conhecimentos transmitidos e o acompanhamento precioso na realização da validação experimental.

Finalmente um exímio e distinto agradecimento, a toda a minha família, em especial aos meus pais, irmã e namorada por todo o indestrutível e inabalável apoio, amor e confiança transmitidos, sem os quais o sonho nunca passaria a realidade.



## RESUMO

A ocorrência de fenómenos como deformações excessivas, deformações impostas, variações de temperatura, fluência e retracção entre outros são responsáveis pela diminuição do desempenho em serviço das estruturas de betão. Frequentemente, os projectistas valorizam em demasia a verificação da segurança em relação aos estados limites últimos, dedicando menos atenção à verificação dos estados limites de utilização, recorrendo a certas medidas construtivas que em casos usuais poderão ser suficientes. Em casos especiais como vãos consideráveis ou acções de elevada intensidade, estas medidas não garantem que a estrutura apresente a funcionalidade e a durabilidade desejáveis, impondo-se a necessidade de verificar os estados limites de utilização por métodos de cálculo mais fiáveis. Este factor, pode ser determinante para evitar certas anomalias de difícil resolução.

A presente dissertação pretende documentar alguns métodos de cálculo utilizados no controlo da fendilhação, na limitação das tensões e no controlo das deformações segundo as mais recentes disposições regulamentares previstas para o efeito. Como os valores obtidos com a aplicação destes métodos são aproximações ao comportamento real dos elementos estruturais, procurou-se comparar estes resultados teóricos com situações reais, de forma a avaliar a sua precisão e fiabilidade.

A degradação precoce das estruturas de betão, nem sempre se deve apenas à desvalorização da verificação dos estados limites de utilização em fase de projecto. Como os processos de produção destas estruturas são complexos e por vezes são negligenciadas boas práticas de construção, são propostas neste trabalho resumidamente algumas medidas construtivas que visam aumentar a durabilidade das estruturas e o seu desempenho em serviço.

**Palavras-chave:** fendilhação, deformações excessivas, comportamento em serviço, abertura de fendas.



## ABSTRACT

The occurrence of phenomena such as excessive deformations, imposed deformations, temperature changes, creep and shrinkage, among others, is responsible for the decreased service performance of concrete structures. Engineers often overvalue the verification of ultimate limit states and disregard the verification of service limit states by using some constructive measures which may be sufficient in usual cases. In special cases, such as long spans or high-intensity loads, these measures do not guarantee that the structures have the desired functionality and durability, thus requiring the verification of service limit states for more reliable results.

This paper describes some calculation methods used to control the formation of cracks and excessive deformations according to the latest rules provided for that purpose. The values obtained with the application of these methods are approximations to the actual structural behavior. The comparison of these theoretical results with real situations is essential to assess their accuracy and reliability.

The early deterioration of concrete structures is not always simply due to the underestimation of the verification of service limit states in the design stage. The production processes of these structures are complex and sometimes certain measures to reduce the pathological phenomena are neglected. Briefly, this work proposes some constructive measures to increase the durability of structures and their performance in service.

**Keywords:** cracking, excessive deformations, in service, opening of cracks.



## ÍNDICE DE TEXTO

1.	Introdução .....	3
1.1	Objectivos.....	3
1.2	Patologias construtivas causadas pela abertura de fendas ou deformações excessivas .....	3
1.3	Noção de estado limite .....	5
1.3.1	Estado limite último .....	5
1.3.2	Estados limites de utilização .....	8
1.4	Acções nas estruturas.....	9
1.5	Combinações de acções para estados limites de utilização .....	10
1.5.1	Combinação característica.....	10
1.5.2	Combinação frequente.....	11
1.5.3	Combinação quase permanente .....	11
1.5.4	Valores dos coeficientes $\Psi$ .....	12
2.	Regras práticas para aumentar a durabilidade das estruturas .....	15
2.1	Seleccção dos materiais.....	16
2.2	Fabrico do betão.....	17
2.3	Transporte do betão.....	17
2.4	Cofragens .....	18
2.5	Recobrimento.....	19
2.6	Colocação e compactação do betão .....	20

2.7	Cura do betão.....	22
3.	Estado Limite de Fendilhação .....	25
3.1	Introdução.....	25
3.2	Fendilhação por retracção plástica e efeitos térmicos.....	26
3.3	Fendilhação por acções directas.....	27
3.4	Fendilhação por corrosão das armaduras e reacções químicas no betão.....	28
3.4.1	Carbonatação .....	30
3.4.2	Corrosão induzida por cloretos .....	31
3.4.3	Corrosão do betão por lixiviação .....	32
3.5	Ataque gelo/degelo.....	32
3.6	Fendilhação por deformações impostas .....	33
3.7	Controlo da fendilhação segundo EC2 .....	34
3.7.1	Generalidades.....	34
3.7.2	Mecanismo da fendilhação.....	35
3.7.3	Cálculo das tensões no aço e no betão .....	36
3.8	Armaduras mínimas .....	41
3.8.1	Tracção simples.....	41
3.8.2	Flexão .....	42
3.8.3	Tensões auto-equilibradas.....	44
3.8.4	Expressão do EC2 .....	45
3.9	Largura característica das fendas.....	46
3.9.1	Cálculo da distância mínima entre fendas.....	46

3.9.2	Cálculo da distância máxima entre fendas .....	48
3.9.3	Cálculo da extensão média relativa entre o aço e o betão.....	50
3.9.4	Cálculo da largura característica das fendas.....	53
3.10	Controlo da fendilhação sem cálculo directo.....	53
3.11	Aplicação prática do controlo da fendilhação .....	55
3.11.1	Descrição e análise do comportamento da estrutura.....	55
3.11.2	Descrição geral da estrutura executada .....	58
3.11.3	Cálculo da abertura das fendas na padieira da peça segundo o EC2 .....	59
3.11.4	Comparação dos resultados.....	61
3.12	Exemplos de Cálculo.....	62
3.12.1	Exemplo 1 -Tirante.....	62
3.12.2	Exemplo 2 – Viga simplesmente apoiada.....	66
3.12.3	Exemplo 3 – Viga contínua com dois tramos .....	69
3.12.4	Exemplo 4.....	73
4.	Limitação de tensões.....	77
4.1	Introdução .....	77
4.2	Limitação das tensões de compressão no betão .....	77
4.2.1	Redução do risco de formação de fendas longitudinais .....	77
4.2.2	Controlo da fluência excessiva.....	78
4.3	Limitação das tensões de tracção na armadura.....	78
4.4	Estado limite de formação de fendas.....	79
4.5	Estado limite de descompressão.....	80

4.6	Exemplos de cálculo .....	80
4.6.1	Exemplo 1 .....	80
4.6.2	Exemplo 2 .....	82
5.	Estado Limite de Deformação.....	87
5.1	Introdução.....	87
5.2	Controlo da deformação sem cálculo directo.....	89
5.2.1	Limite de relação entre o vão/altura .....	89
5.3	Cálculo das flechas pelo método dos coeficientes globais.....	94
5.3.1	Cálculo da Flecha elástica .....	94
5.3.2	Cálculo da flecha a tempo infinito .....	96
5.3.3	Cálculo da flecha instantânea.....	97
5.4	Cálculo das flechas pelo método do EC2 simplificado .....	98
5.4.1	Flecha instantânea .....	100
5.4.2	Flecha a tempo infinito.....	101
5.4.3	Momentos de inércia em secção fendilhada e não fendilhada .....	102
5.5	Estudo comparativo dos métodos de cálculo das flechas .....	106
5.6	Exemplos de aplicação.....	110
5.6.1	Exemplo 1 – Viga simplesmente apoiada.....	110
5.6.2	Exemplo 2 - Viga em consola.....	115
5.6.3	Exemplo 3 – Viga contínua .....	121
6.	Validação Experimental.....	127
6.1	Introdução.....	127

---

6.2	Discussão dos resultados .....	128
7.	Considerações Finais .....	133
8.	Bibliografia .....	137
	ANEXOS .....	A.1



**ÍNDICE DE FIGURAS**

Figura 2.1: Perda de finos devido à falta de estanquidade das cofragem.....	18
Figura 2.2: Reduzido recobrimento das armaduras. ....	20
Figura 2.3: Vibração deficiente do betão. ....	22
Figura 3.1: Viga de betão armado com sinais de degradação devido à fendilhação. ....	25
Figura 3.2: Fissuras na camada superficial do betão devido a retracção plástica. ....	27
Figura 3.3: Deterioração do recobrimento do betão, e conseqüente corrosão das armaduras. .....	28
Figura 3.4: Viga com forte corrosão das armaduras após o destaque do recobrimento.....	29
Figura 3.5: Recobrimento do betão fendilhado, com manchas causadas pela lixiviação.....	32
Figura 3.6: Muros de suporte fissurados devido a deformações impostas. ....	33
Figura 3.7: Tirante sujeito a um esforço axial crescente. ....	35
Figura 3.8: Secção fendilhada em fase elástica.....	37
Figura 3.9: Elemento submetido à tracção simples: formação da 1ª fenda. ....	42
Figura 3.10: Elemento submetido à flexão simples: formação da 1ª fenda.....	42
Figura 3.11: Efeitos das tensões auto equilibradas.....	44
Figura 3.12: Altura efectiva de betão traccionado numa viga (EN 1992-1-1, 2010).....	49
Figura 3.13: Altura efectiva de betão traccionado numa laje (EN 1992-1-1, 2010).....	50
Figura 3.14: Altura efectiva de betão traccionado num elemento em tracção (EN 1992-1-1, 2010).....	50
Figura 3.15: Comportamento do aço em estado não fendilhado e fendilhado (Marchão, et al., 2009).....	51
Figura 3.16: Box Culvert idêntica à monitorizada nesta aplicação prática (Cristelo, 2011). .....	55

Figura 3.17: Esquema dos instrumentos utilizados no sistema de monitorização (Cristelo, 2011). .....	56
Figura 3.18: Modelo de cálculo da Box Culvert em serviço (Cristelo, 2011). .....	57
Figura 3.19: Análise dos momentos flectores na padieira (Cristelo, 2011). .....	58
Figura 3.20: Caracterização geométrica da peça e a respectiva armadura. ....	59
Figura 3.21: Fendas da face inferior da padieira. ....	62
Figura 3.22: Sistema estrutural do exemplo 1. ....	63
Figura 3.23: Diagrama dos esforços axiais. ....	63
Figura 3.24: Secção do tirante. ....	64
Figura 3.25: Diagrama de Esforços Axiais para a Combinação Freqüente de Acções. ....	65
Figura 3.26: Sistema estrutural do exemplo 2. ....	66
Figura 3.27: Diagrama dos momentos flectores para o estado limite último. ....	66
Figura 3.28: Diagrama de momentos flectores para a combinação freqüente de acções. ....	69
Figura 3.29: Sistema estrutural do exemplo 3. ....	69
Figura 3.30: Diagrama dos momentos flectores no estado limite último. ....	70
Figura 3.31: Diagrama dos momentos flectores para a combinação freqüente de acções. ..	72
Figura 4.1: Diagrama de momentos flectores do exemplo 1. ....	81
Figura 5.1: Flechas consideradas pelo EC2. ....	88
Figura 5.2: Valores intermédios do coeficiente $\eta$ . ....	96
Figura 5.3: Secção de uma viga no estado não fendilhado. ....	103
Figura 5.4: Secção de uma viga em estado fendilhado. ....	104
Figura 5.5: Viga Simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída. ....	107
Figura 5.6: Relação entre as flechas a tempo infinito e as acções sobre as vigas. ....	108
Figura 5.7: Relação entre as flechas instantâneas e as acções sobre as vigas. ....	109
Figura 5.8: Sistema estrutural do exemplo 3. ....	121

Figura 5.9: Diagrama dos momentos flectores da viga do exemplo 3. ....	122
Figura 6.1: Fotografia do ensaio experimental. ....	127
Figura 6.2: Sistema estrutural da validação experimental. ....	128
Figura 6.3: Relação entre as forças aplicadas e os deslocamentos obtidos experimentalmente. ....	128
Figura 6.4: Resultados teóricos de cada um dos métodos, comparados com os respectivos resultados experimentais. ....	129



## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1.1: Coeficientes de segurança para acções em edifícios.....	7
Quadro 1.2: Coeficientes de segurança relativos às propriedades dos materiais.....	7
Quadro 1.3: Duração das acções associadas aos estados limites de utilização.....	8
Quadro 1.4: Acções Directas e Indirectas. ....	9
Quadro 1.5: Valores recomendados dos coeficientes $\Psi$ para edifícios.....	12
Quadro 3.1: Tipo de fissuras do betão mediante o tipo de esforço. ....	28
Quadro 3.2: Classe Indicativa da resistência do betão de acordo com a sua exposição a agentes patológicos.....	30
Quadro 3.3: Causas da corrosão por carbonatação e as respectivas acções preventivas.....	31
Quadro 3.4: Valores máximos aceitáveis para a largura das fendas (EN 1992-1-1, 2010). .	34
Quadro 3.5: Coeficientes $C_s$ e $C_c$ para o cálculo das tensões em secções rectangulares sem armadura de compressão.....	40
Quadro 3.6: Diâmetros máximos dos varões para o controlo da fendilhação. ....	54
Quadro 3.7: Espaçamento máximo dos varões para o controlo da fendilhação.....	54
Quadro 4.1: Quadro resumo da limitação das tensões.....	79
Quadro 5.1: Resumo dos valores limites da flecha considerados pelo EC2. ....	89
Quadro 5.2: Coeficiente $k$ que tem em conta o tipo de elemento estrutural. ....	90
Quadro 5.3: Valores básicos da relação $l/d$ com $f_{yk}$ de 500MPa. ....	91
Quadro 5.4: Quadro resumo dos coeficientes correctivos da relação $l/d$ (Felix, 2009).....	93
Quadro 5.5: Coeficiente $u$ utilizado no cálculo da flecha elástica. ....	95
Quadro 5.6: Valores da relação $I_I/I_c$ e $I_{II}/I_c$ para $d/h=1,00$ .....	105
Quadro 5.7: Valores da relação $I_I/I_c$ e $I_{II}/I_c$ para $d/h=0,90$ .....	105
Quadro 5.8: Valores da relação $I_I/I_c$ e $I_{II}/I_c$ para $d/h=0,80$ .....	106
Quadro 5.9: Resumo dos valores das flechas calculadas. ....	109



**ÍNDICE DE ANEXOS**

Figura A.1: Valores do coeficiente  $k_0$  – Primeira carga – ( $d/h=0.8$ ) .....3

Figura A.2: Valores do coeficiente  $k_0$  – Primeira carga – ( $d/h=0.9$ ) .....3

Figura A.3: Valores do coeficiente  $k_0$  – Primeira carga – ( $d/h=1.0$ ) .....4

Figura A.4: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=1,0$  e  $\varphi=1.5$ ) .....4

Figura A.5: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,8$  e  $\varphi=1.5$ ) .....5

Figura A.6: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,9$  e  $\varphi = 1.5$ ).....5

Figura A. 7: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=1,0$  e  $\varphi=2.5$ ) .....6

Figura A.8: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,8$  e  $\varphi = 2.5$ ).....6

Figura A.9: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,9$  e  $\varphi=2.5$ ) .....7

Figura A.10: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=1,0$  e  $\varphi=3.5$ ) .....7

Figura A.11: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,8$  e  $\varphi=3.5$ ) .....8

Figura A.12: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,9$  e  $\varphi = 3.5$ ) .....8

Figura A.13: Valores do coeficiente  $n$ .....9



**SIMBOLOGIA**

**Letras maiúsculas latinas**

$A$	Área da secção transversal
$A_c$	Área da secção transversal de betão
$A_p$	Área da secção de uma armadura activa de estruturas pré-esforçadas
$A_s$	Área da secção de uma armadura para betão armado
$A_{s,min}$	Área da secção mínima de armaduras
$E_c, E_{c(28)}$	Módulo de elasticidade do betão, para uma massa volúmica normal aos 28 dias de idade
$E_{c,eff}$	Módulo de elasticidade efectivo do betão
$E_{cm}$	Módulo de elasticidade secante do betão
$E_{c(t)}$	Módulo de elasticidade do betão, para uma massa volúmica normal à idade $t$
$E_p$	Valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço de uma armadura de pré-esforço
$E_s$	Valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço de uma armadura para betão armado
$EI$	Rigidez à flexão
$I$	Momento de inércia da secção de betão
$M$	Momento Flector
$M_{rD}$	Valor do momento flector mínimo que causa fendilhação
$N$	Esforço axial
$N_{Ed}$	Valor de cálculo do esforço axial actuante
$P$	Pré-esforço
$s_{r,max}$	Distância máxima entre fendas

**Letras minúsculas latinas**

$a_c$	Flecha elástica
$a_t$	Flecha a tempo infinito
$a_0$	Flecha instantânea
$b$	Largura da secção transversal recta
$b_w$	Largura da alma de vigas em T,I ou L
$c$	Recobrimento
$d$	Altura útil da secção transversal
$e$	Excentricidade
$f_{cd}$	Valor de cálculo da tensão de rotura à compressão
$f_{ck}$	Valor característico da tensão de rotura à compressão aos 28 dias de idade
$f_{ctk}$	Valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples
$f_{ctm}$	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples
$f_{yd}$	Valor de cálculo da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras para betão armado
$f_{yk}$	Valor característico da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras para betão armado
$h$	Altura total da secção
$k$	Coefficiente; factor
$l$	Comprimento; Vão
$m$	Massa
$r$	Raio
$t$	Tempo considerado
$w_k$	Largura característica das fendas

$x$	Altura do eixo neutro
$z$	Braço do binário de forças interiores

**Letras minúsculas gregas**

$\alpha_c$	Coefficiente de homogeneização
$\gamma$	Coefficiente parcial de segurança
$\rho$	Percentagem de armadura
$\emptyset$	Diâmetro dos varões de aço
$\emptyset_{eq}$	Diâmetro equivalente dos varões de aço
$\varepsilon_c$	Extensão relativa do betão
$\varepsilon_{cm}$	Extensão média do betão entre as fendas
$\varepsilon_s$	Extensão relativa do aço
$\varepsilon_{sm}$	Extensão média do aço para uma dada combinação de acções considerando a contribuição do betão traccionado
$\varepsilon_{rsm}$	Extensão relativa entre o aço e o betão
$\sigma_c$	Tensão de compressão no betão
$\sigma_s$	Tensão de tracção no aço
$\varphi$	Coefficiente de fluência do betão
$\psi$	Coefficientes que definem os valores representativos das acções variáveis
$\psi_1$	Coefficiente representativo das acções variáveis para valores frequentes
$\psi_2$	Coefficiente representativo das acções variáveis para valores quase permanentes



## Capítulo 1 - Introdução



## 1. Introdução

### 1.1 Objectivos

A evolução arquitectónica tem levado à utilização de estruturas cada vez mais esbeltas, com vãos livres de elevado comprimento e por vezes com carregamentos consideráveis. As mudanças tecnológicas ao nível dos materiais estruturais, que apresentam características mecânicas muito superiores em relação aos utilizados antigamente, têm permitido criar estruturas que cumprem as exigências arquitectónicas referidas e apresentam a capacidade resistente à rotura necessária. Porém, quanto maiores forem os vãos e mais esbeltas forem as estruturas, maior é o risco de formação de fendas ou deformações excessivas que comprometem o desempenho funcional da estrutura.

O presente trabalho tem por objectivo principal apresentar aos projectistas as actuais metodologias para a verificação dos estados limite de utilização em estruturas de betão. Em certos casos, estes estados limites condicionam mais o cálculo estrutural que o próprio estado limite último de resistência, podendo determinar as dimensões das secções de betão e a disposição e quantidade da armadura. Nos capítulos seguintes são analisados alguns métodos de cálculo que têm como objectivo o controlo da fendilhação, a limitação das tensões no aço e no betão e o controlo da deformação. Ao longo do presente trabalho são ainda apresentados e discutidos exemplos de cálculo que têm como objectivo principal demonstrar as possibilidades da aplicação dos métodos expostos.

### 1.2 Patologias construtivas causadas pela abertura de fendas ou deformações excessivas

A ocorrência de fissuras em estruturas de betão armado é, até certo ponto, usual e inevitável. Efeitos diferidos no tempo como a fluência e a retracção, ou seja, o acréscimo da deformação do betão sujeito a um carregamento constante (deformação lenta) e o

aparecimento de fendas causadas pela perda de água, diminuem consideravelmente o desempenho da estrutura em serviço.

A abertura de fendas no betão estrutural propicia a actuação de agentes agressivos como a carbonatação, ataques de cloretos, sulfatos, entre outros, capazes de deteriorar as armaduras e afectar a estanquidade das construções. Consequentemente, a infiltração de água provoca a degradação dos revestimentos, o aparecimento de fungos e eflorescências, a degradação das instalações eléctricas, entre outros, causando por vezes anomalias em cadeia, ou seja, anomalias que são consequência de outras anteriores, de difícil diagnóstico e tratamento.

A deformação excessiva das estruturas tem ainda um papel mais nefasto na degradação dos edifícios, visto que devido à baixa capacidade de deformação de elementos como alvenarias, revestimentos, argamassas de assentamento, pavimentos cerâmicos, entre outros, aparecem fissuras que põem em causa a funcionalidade e a durabilidade das construções. A deformação excessiva de vigas de bordadura pode provocar perda de estanquidade devido à abertura de fendas na fachada, e por vezes põe em causa o funcionamento das caixilharias exteriores.

Para diminuir a ocorrência de anomalias nas construções, na fase de projecto devem considerar-se todas as medidas que potenciem o aumento da durabilidade da estrutura e melhorem o seu funcionamento em serviço. Assim devem ter-se em consideração as seguintes medidas:

- Avaliação da agressividade das condições de exposição a que estão sujeitos os sistemas estruturais;
- Avaliação de deformações impostas causadas por retracção ou por variações de temperatura;
- Definição correcta dos recobrimentos das armaduras;

- Definição adequada dos materiais (betão);
- Quantificação exaustiva das acções que actuam no sistema estrutural;
- Avaliação rigorosa dos esforços instalados no sistema estrutural;
- Efectuar o controlo da fendilhação;
- Efectuar o controlo da deformação;
- Pormenorização do projecto.

### 1.3 Noção de estado limite

Um estado limite numa estrutura conforme definido no EC0, é o estado a partir do qual esta deixa de satisfazer total ou parcialmente as funções que lhe foram atribuídas. Para avaliar o desempenho dos sistemas estruturais, o EC2 define um conjunto de critérios de projecto, ou seja, formulações quantitativas que descrevem as condições que devem ser satisfeitas relativamente a cada estado.

#### 1.3.1 Estado limite último

Os estados limites últimos (ELU) são estados de cuja ocorrência resultam danos severos na estrutura. Estão normalmente associados ao colapso ou a outras formas semelhantes de ruína estrutural e correspondem, em geral, à capacidade resistente máxima de uma estrutura ou elemento estrutural. Podem classificar-se em:

- ELU de equilíbrio (EQU) – perda de equilíbrio em movimento de corpo rígido;
- ELU de resistência (STR) – rotura da estrutura ou dos elementos estruturais, normalmente condicionada pela resistência dos materiais;
- ELU geotécnicos (GEO) – rotura por perda de resistência ou deformação excessiva do solo;
- ELU de fadiga (FAT) – rotura por fadiga da estrutura ou dos elementos estruturais.

Quando se considera o estado limite último de equilíbrio estático da estrutura, deve verificar-se a condição:

$$E_{d,dst} \leq E_{d,stab} \quad (1.1)$$

Em que:

$E_{d,dst}$  – valor de cálculo das acções desestabilizadoras;

$E_{d,stab}$  – valor de cálculo das acções estabilizadoras.

Caso se considere um estado limite de rotura, ou de uma deformação excessiva, a condição a respeitar deve ser:

$$E_d \leq R_d \quad (1.2)$$

Em que:

$E_d$  – valor de cálculo do efeito das acções (esforços, tensões, etc.);

$R_d$  – valor de cálculo da resistência correspondente.

### ***1.3.1.1 Combinação de acções para estados limites últimos***

Para a verificação da segurança em relação aos estados limites últimos, o EC0 define um conjunto de combinações nas quais importa essencialmente a grandeza das acções que actuam no sistema estrutural. Estas acções devem-se a situações persistentes ou transitórias, a situações acidentais ou sismos, e ao contrário do que acontece nos estados limites de utilização, os seus valores característicos são afectados por um coeficiente de segurança ( $\gamma_G$  ou  $\gamma_Q$ ). Este coeficiente depende do tipo de acção, favorável ou desfavorável, ou das situações do projecto. A verificação da segurança em situações de projecto com acções persistentes ou transitórias, realiza-se considerando as combinações fundamentais dadas pela expressão:

$$E_d = \gamma_G \times G_k + \gamma_{Q,1} \times Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \times \Psi_{0,i} \times Q_{k,i} \quad (1.3)$$

O valor de cálculo de uma acção  $F_d$  pode ser obtido multiplicando o valor representativo/característico de uma acção  $F_k$ , pelo coeficiente parcial de segurança  $\gamma$ , ou seja:

$$F_d = F_k \times \gamma \quad (1.4)$$

No Quadro 1.1 estão resumidos os coeficientes parciais de segurança a adoptar na verificação da segurança em relação aos ELU para acções em estruturas de edifícios.

Quadro 1.1: Coeficientes de segurança para acções em edifícios

Acções		Situações de projecto	
		Persistente e transitória	Acidental
Permanente	Equilíbrio estático ( $E_d, dst \leq E_d, stb$ )		
	Desfavorável	1,10	1,00
	Favorável	0,90	1,00
	Rotura e Geotécnico ( $E_d \leq R_d$ )		
	Desfavorável	1,35	1,00
	Favorável	1,00	1,00
Variável	Desfavorável	1,50	1,00
Acidental	Desfavorável	---	1,00

Existem ainda coeficientes parciais de segurança relativos às propriedades dos diversos materiais que compõe as estruturas de betão. O valor de cálculo das propriedades mecânicas de cada material é obtido dividindo os seus valores característicos pelo respectivo coeficiente de segurança, conforme se especifica no Quadro 1.2.

Quadro 1.2: Coeficientes de segurança relativos às propriedades dos materiais.

Combinação de acções	Betão	Aço
Combinações Fundamentais	1,5	1,15

### 1.3.2 Estados limites de utilização

Quando se prevê que os efeitos das acções nas estruturas ou elementos estruturais para uma dada combinação de acções causem danos que ponham em causa o seu desempenho em utilização, devem impor-se os requisitos definidos no EC2 que visam limitar o aparecimento de fenómenos como deformações excessivas, abertura de fendas, entre outros. A verificação da segurança é feita através do controlo de uma grandeza em estudo (flecha, abertura das fendas, etc.), ou seja, fixando-se um valor limite. Assim, deve verificar-se a seguinte desigualdade:

$$W_d \leq W_{ref} \quad (1.5)$$

Em que:

$W_d$  – valor de cálculo da grandeza a verificar, determinado com base na combinação em causa;

$W_{ref}$  – valor limite imposto à grandeza em verificação.

Em condições de serviço (utilização) as acções tomam os valores reais, ou seja, não são majoradas pelos coeficientes parciais de segurança e o comportamento dos materiais é simulado através das suas propriedades médias ou características.

Quadro 1.3: Duração das acções associadas aos estados limites de utilização.

Duração	Descrição	Combinação de Acções
Muito pouca duração	Ocorrência durante algumas horas	Combinação de Acções Característica (ou Rara)
Curta duração	Ocorrência em 5% da vida útil da estrutura	Combinação de Acções Frequentes
Longa duração	Ocorrência durante mais de 50% da vida útil da estrutura	Combinação de Acções Quase Permanentes

Naturalmente, a verificação da segurança destes estados está associada à duração das acções, visto que o comportamento do sistema estrutural só corresponderá a um destes

estados quando permanecer durante uma certa parcela do seu período de vida. O Quadro 1.3 descreve mediante a probabilidade de ocorrência o tipo de acções existentes numa estrutura em serviço e indica a respectiva combinação.

Os prejuízos resultantes da ocorrência de um dos estados limites de utilização são pouco severos se comparados com os estados limites últimos, embora a sua verificação seja essencial para evitar o aparecimento de anomalias estruturais que embora não levem à rotura, são de difícil resolução.

Os estados limites de utilização a considerar na verificação da segurança de estruturas de betão são:

- Estado limite de fendilhação;
- Limitação das tensões;
- Estado limite de deformação.

#### 1.4 Acções nas estruturas

As acções a que estão sujeitos os sistemas estruturais podem ser classificadas como acções directas (ver Quadro 1.4), ou seja, um conjunto de forças (cargas) aplicadas à estrutura, ou indirectas provocadas por deformações impostas, como variações de temperatura ou humidade, assentamentos diferenciais ou sismos.

Quadro 1.4: Acções Directas e Indirectas.

Acções		Exemplos
Directas	Permanente	Peso próprio da Estrutura, de revestimentos, de alvenarias e equipamentos. Impulsos das terras, etc.
	Variável	Sobrecarga de utilização; Neve; Vento
Indirectas	Permanente	Assentamento dos apoios; Retracção do betão
	Variável	Efeitos da temperatura

Para servir de base à sua quantificação e às regras da sua combinação, as acções são classificadas de acordo com a sua variação no tempo, da seguinte forma:

- Acções Permanentes – são aquelas que assumem valores praticamente constantes durante toda ou quase toda a vida útil da estrutura. Consideram-se como acções permanentes os pesos próprios dos elementos estruturais, os equipamentos fixos, os impulsos das terras, certos casos de pressões hidrostáticas, o pré-esforço, os efeitos da retracção do betão e dos assentamentos dos apoios.
- Acções variáveis – acções cuja variação da intensidade no tempo não é desprezável. Consideram-se como acções variáveis as sobrecargas, as acções do vento, dos sismos, das variações de temperatura e da neve.
- Acções de acidente – são acções normalmente de curta duração mas com uma intensidade significativa, com baixa probabilidade de ocorrência durante o tempo de vida útil do projecto. Consideram-se acções de acidente as que resultam de causas como explosões, choques de veículos e incêndios.

### 1.5 Combinações de acções para estados limites de utilização

Como foi referido anteriormente, para a verificação dos estados limites de utilização, importa fundamentalmente a duração da acção. As combinações de acções a ter em conta nas situações de projecto consideradas, deverão ser adequadas aos requisitos de utilização e aos critérios de desempenho a verificar.

#### 1.5.1 Combinação característica

A combinação característica (ou rara) está associada a períodos de muito curta duração, ou seja, a estrutura ou o elemento estrutural é solicitado apenas algumas horas durante o seu período de vida útil. A expressão que define esta combinação é:

$$E_d = \sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \Psi_{0,i} \times Q_{k,i} \quad (1.6)$$

Em que:

$G_{k,j}$  – valor característico da acção permanente  $j$ ;

$P$  – valor representativo de uma acção de pré-esforço;

$Q_{k,1}$  – valor característico da acção variável de base da combinação 1;

$\Psi_0$  – Coeficiente para a determinação do valor de uma acção variável  $i$ ;

$Q_{k,i}$  – valor característico da acção variável acompanhante  $i$ ;

### 1.5.2 Combinação frequente

A combinação frequente está associada a períodos de curta duração, apenas 5% do tempo da vida útil da estrutura. A expressão que define esta combinação é:

$$E_d = \sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + \Psi_1 \times Q_{k,1} + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2,i} \times Q_{k,i} \quad (1.7)$$

Em que:

$G_{k,j}$  – valor característico da acção permanente  $j$ ;

$P$  – valor representativo de uma acção de pré-esforço;

$Q_{k,1}$  – valor característico da acção variável de base da combinação 1;

$\Psi_1$  – Coeficiente para a determinação do valor frequente de uma acção variável;

$\Psi_{2,i}$  – Coeficiente para a determinação do valor quase permanente de uma acção variável  $i$ ;

$Q_{k,i}$  – valor característico da acção variável acompanhante  $i$ .

### 1.5.3 Combinação quase permanente

A combinação quase permanente está associada a períodos de longa duração, que ultrapassam metade da vida útil da estrutura. A expressão que define esta combinação é:

$$E_d = \sum_{j \geq 1} G_{k,j} + P + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2,i} \times Q_{k,i} \quad (1.8)$$

Em que:

$G_{k,j}$  – valor característico da acção permanente  $j$ ;

$P$  – valor representativo de uma acção de pré-esforço;

$\Psi_{2,i}$  - Coeficiente para a determinação do valor quase permanente de uma acção variável  $i$ ;

$Q_{k,i}$  – valor característico da acção variável acompanhante  $i$ .

#### 1.5.4 Valores dos coeficientes $\Psi$

Os valores recomendados pelo EC0 para os coeficientes  $\Psi$  relativos às acções variáveis são indicados no Quadro 1.5. Estes coeficientes traduzem os efeitos das acções variáveis mediante a frequência com que estas actuam na estrutura.

Quadro 1.5: Valores recomendados dos coeficientes  $\Psi$  para edifícios.

Acção	$\Psi_0$	$\Psi_1$	$\Psi_2$
Sobrecargas em edifícios:			
Categoria A: zonas de habitação	0,7	0,5	0,3
Categoria B: zonas de escritórios	0,7	0,5	0,3
Categoria C: zonas de reunião de pessoas	0,7	0,7	0,6
Categoria D: zonas comerciais	0,7	0,7	0,6
Categoria E: zonas de armazenamento	1,0	0,9	0,8
Categoria F: zonas de tráfego (peso dos veículos $\leq 30\text{kN}$ )	0,7	0,7	0,6
Categoria G: zonas de tráfego ( $30\text{kN} \leq$ peso dos veículos $\leq 160\text{kN}$ )	0,7	0,5	0,3
Categoria H: coberturas	0	0	0
Neve:			
Para obras situadas a altitude $h > 1000\text{m}$	0,7	0,5	0,2
Para obras situadas a altitude $h < 1000\text{m}$	0,5	0,2	0
Acção do vento em edifícios	0,6	0,2	0
Temperatura (excepto incêndios) em edifícios	0,6	0,5	0

**Capítulo 2 - Regras práticas para aumentar a  
durabilidade das estruturas**



## **2. Regras práticas para aumentar a durabilidade das estruturas**

Neste capítulo pretende-se apresentar de forma resumida algumas regras básicas do processo de produção de estruturas de betão, no sentido de aumentar a sua durabilidade, alertando para o facto de nenhum material ser por si próprio durável, visto que depende da sua interacção com o ambiente a que está exposto.

A execução de estruturas de betão armado e pré-esforçado deve processar-se de forma a garantir a satisfação dos requisitos funcionais e de serviço da estrutura, aumentando a durabilidade das construções sem causar custos inesperados de manutenção e reparação. Durante a fase de execução podem ocorrer deficiências que em alguns casos diminuem consideravelmente a vida útil dos edifícios. Torna-se por isso essencial conhecer o comportamento dos materiais, os mecanismos de deterioração e os processos de produção adequados a cada estrutura ou elemento estrutural. A durabilidade das estruturas de betão depende de vários factores, embora se possa afirmar que os processos de produção têm um papel determinante, visto que podem diminuir a ocorrência de certos fenómenos que degradam os elementos estruturais. Apresentam-se em seguida alguns factores a ter em conta nos processos de execução destas estruturas:

- Selecção adequada dos materiais;
- Práticas de fabrico adequadas à produção do betão;
- Métodos adequados de transporte e aplicação do betão;
- Estado das cofragens;
- Posição correcta das armaduras de acordo com o projecto;
- Devem garantir-se os recobrimentos regulamentares em toda a estrutura;
- Definir métodos adequados de colocação e compactação do betão;
- Prever processos correctos de cura do betão;
- Evitar a remoção prematura do escoramento da cofragem.

## 2.1 Selecção dos materiais

A degradação precoce do betão pode dever-se à selecção inadequada dos materiais (NP ENV 206-1, 2007). Em seguida serão apresentadas algumas medidas a ter em conta na definição dos agregados, cimento e água utilizados no fabrico do betão, não se dispensando a consulta da bibliografia referente a este assunto.

- A aptidão geral dos cimentos deve estar em conformidade com a EN 197-1;
- A aptidão geral dos agregados normais e pesados deve estar em conformidade com a EN 12620;
- A aptidão geral dos agregados leves deve estar em conformidade com a EN 13055-1;
- Os agregados não devem conter em quantidades prejudiciais, películas de argila, partículas moles, matérias orgânicas ou outro revestimento que os isole do ligante;
- O cimento deve ser seleccionado tendo em conta a execução da obra, a utilização final do betão, as condições de cura, as dimensões da estrutura, as condições de exposição e a reactividade potencial dos agregados com a alcalis dos constituintes;
- Os componentes do betão não devem conter quantidades prejudiciais de halogenatos, de sulfatos e de alcalis visto que estes afectam a durabilidade do betão e das armaduras;
- Deve evitar-se água de amassadura com matérias orgânicas, sais dissolvidos ou matérias em suspensão e devem cumprir-se as disposições estabelecidas na EN 1008;
- Os requisitos que a classe de exposição impõe ao betão devem ser tidos em consideração na escolha dos tipos e classes de materiais constituintes permitidos, na máxima relação água/cimento, na mínima dosagem de cimento e no mínimo teor de ar do betão.

## **2.2 Fabrico do betão**

Para a obtenção de um betão que cumpra os requisitos de utilização e durabilidade das estruturas em fase de serviço, devem considerar-se métodos adequados para o armazenamento dos agregados, ligantes hidráulicos e adjuvantes, técnicas de medição de cada um destes componentes, técnicas de fabrico em condições de temperatura adversas e métodos/equipamentos de amassadura adequados ao betão previsto.

O armazenamento dos componentes do betão no estaleiro deve assegurar a sua boa conservação. No caso dos ligantes e adjuvantes, devem empilhar-se os sacos sobre um estrado e em locais protegidos de intempéries ou de matérias que ponham em causa a sua composição e conservação. O armazenamento deve processar-se em lotes e o seu emprego deve ser por ordem cronológica de chegada ao estaleiro.

O armazenamento dos agregados deve ser efectuado por categorias, sem misturas e com o teor de humidade devidamente controlado.

A amassadura do betão pode ser efectuada por meios mecânicos ou manuais dependendo da qualidade que se exige ao betão. Não obstante, aconselha-se a utilização de meios mecânicos que promovem a mistura mais homogénea dos componentes.

## **2.3 Transporte do betão**

O sistema de transporte do betão deve processar-se de forma a evitar a desagregação, a segregação e a perda de água. As superfícies dos equipamentos de transporte não devem ser absorventes e antes do início da sua utilização devem ser humedecidas com água ou pintadas com calda de cimento. Em obra, quando o transporte do betão se processe através de recipientes como baldes, devem evitar-se vibrações que provoquem a sua compactação prematura. Quando o processo de transporte e colocação do betão se processe por bombagem deve garantir-se que o caudal seja o mais regular possível, com utilização de betões de média consistência e granulometria contínua.

O intervalo de tempo entre a amassadura e a colocação do betão deve ser o menor possível. Nos casos correntes esse intervalo não deve ultrapassar os 90 minutos e devem ser colhidas amostras para ensaios de identidade. No caso de betonagens que envolvam grandes volumes de betão, o transporte deve ser cuidadosamente coordenado com o fabrico e a colocação, de modo a garantir a continuidade indispensável a este tipo de betonagens, bem como evitar intervalos de tempo excessivos entre a amassadura e a colocação.

#### 2.4 Cofragens

Para conservar o betão na forma pretendida, deve ter-se em atenção o estado de conservação das cofragens, o seu dimensionamento, a sua capacidade de resistência às deformações causadas pelas acções, e especialmente a sua estanquidade (NP ENV 13670-1, 2007).



Figura 2.1: Perda de finos devido à falta de estanquidade das cofragens.

É usual observarem-se deficiências estruturais causadas pela falta de estanquidade das juntas entre painéis e pela perda de finos na cofragem junto à base dos pilares e paredes de betão (ver Figura 2.1).

Devem evitar-se moldes susceptíveis de absorver quantidades significativas de água ou que permitam a evaporação rápida desta. A não ser em casos excepcionais, em que esse

propósito seja deliberado, deve humedecer-se adequadamente a cofragem de forma a diminuir a perda de água acelerada do betão e o conseqüente aumento da porosidade. A superfície interior da cofragem deve estar limpa, e adequada à obtenção do acabamento pretendido.

A remoção dos moldes deve processar-se apenas quando o betão adquirir resistência suficiente, evitando eventuais danos resultantes da descofragem nas superfícies e cantos. O betão deve ainda apresentar a resistência necessária para suportar as acções a que estão sujeitas as estruturas nesta fase, e evitar deformações excessivas. A remoção prematura das cofragens pode aumentar a probabilidade da ocorrência de deformações devido à fluência do betão e as vibrações decorrentes desta operação de descofragem introduzirem desde logo danos no betão armado jovem.

Resumidamente, aconselha-se que a descofragem das estruturas de betão se processe de forma a não as submeter a choques, sobrecargas e danos que ponham em causa o seu desempenho em fase de serviço.

## **2.5 Recobrimento**

O recobrimento das armaduras de estruturas de betão armado e pré-esforçado é um factor essencial para garantir a sua durabilidade, bem como o seu desempenho funcional em fase de serviço. O recobrimento mínimo das armaduras deve assegurar a protecção do aço contra a corrosão, garantir a aderência das armaduras ao betão e, caso exista risco de incêndio, conferir a adequada protecção ao fogo (NP ENV 13670-1, 2007).

Os recobrimentos mínimos a adoptar dependem, entre outros factores, da agressividade do ambiente em que se insere a estrutura, sendo em muitos casos o principal mecanismo contra a degradação dos sistemas estruturais de betão. É por isso que os espaçadores utilizados em obra devem ser fixados firmemente, de forma a assegurar a manutenção da

posição das armaduras durante a colocação e a compactação do betão, evitando situações como as representadas na Figura 2.2.



Figura 2.2: Reduzido recobrimento das armaduras.

Os espaçadores devem conservar a sua forma durante a betonagem, pelo que a resistência e a rigidez são factores essenciais a ter em conta na escolha destes materiais. A isenção de contaminantes é outro factor determinante, visto que os espaçadores vão estar em contacto com o betão e as armaduras, o que pode agravar o risco destes reagirem de forma prejudicial provocando anomalias indesejadas.

### **2.6 Colocação e compactação do betão**

Na execução de estruturas de betão, devem ter-se em atenção alguns procedimentos antes da betonagem e durante a colocação e compactação do betão, de forma a evitar anomalias estruturais como zonas ocas ou deficiências ao nível da homogeneidade entre o ligante e os agregados (NP ENV 13670-1, 2007).

Antes da betonagem devem efectuar-se as seguintes operações:

- As juntas de betonagem devem estar limpas, isentas de leitada e convenientemente humedecidas;
- Os moldes deverão ser limpos de detritos, neve, gelo e água acumulada;
- Os elementos estruturais como sapatas e lintéis, deverão ser isolados com uma camada de betão de limpeza de pelo menos 50mm;

- A betonagem contra um terreno congelado não deverá ser permitida a não ser que sejam seguidos procedimentos especiais;
- A temperatura da superfície da junta de betonagem deverá ser superior a 0°C no momento da betonagem;
- Deverão definir-se previamente precauções para proteger o betão contra efeitos prejudiciais causados por temperatura ambiente elevada.

Durante o processo de betonagem deve efectuar-se a compactação do betão obedecendo a critérios rigorosos que devem ser cumpridos escrupulosamente para evitar deficiências de difícil resolução.

Em seguida são mencionadas algumas operações que devem ser efectuadas durante a betonagem:

- O betão deverá ser colocado na sua posição final devendo evitar-se utilizar a vibração como meio de movimentação para distâncias apreciáveis;
- Deverá ser evitado um excesso de vibração que possa provocar enfraquecimento da camada superficial do betão;
- A espessura de cada camada de betão colocada deve ser inferior ao comprimento da agulha do vibrador;
- Em secções de grande altura deve compactar-se novamente a camada superficial do betão para compensar o assentamento plástico por baixo da armadura superior;
- A compactação do betão deverá ser efectuada por vibração interna, a não ser que seja acordado outro modo;
- A vibração com agulha ou com vibradores acoplados aos moldes deverá ser iniciada após a colocação do betão e ser prolongada até à expulsão do ar ocluído;
- Quando apenas se utilizarem vibradores acoplados aos moldes, a camada após a compactação não deverá ultrapassar os 100mm.



Figura 2.3: Vibração deficiente do betão.

### 2.7 Cura do betão

O betão nas idades jovens deve ser objecto de métodos de cura adequados. Estes métodos devem permitir baixas taxas de evaporação de água através da superfície do betão, ou manter estas permanentemente húmidas, de forma a minimizar o efeito da retracção plástica, assegurar a resistência superficial, assegurar a sua durabilidade e garantir a resistência à congelação do betão (NP ENV 13670-1, 2007). A cura natural é suficiente quando as condições atmosféricas provocam taxas de evaporação baixas. Caso o betão esteja sujeito a altas temperaturas durante o processo de cura, deve ter-se em atenção que estas podem diminuir a sua resistência e aumentar a sua porosidade.

Para a cura adequada do betão podem utilizar-se os seguintes métodos separadamente ou em sequência:

- Manutenção das cofragens no seu lugar;
- Cobertura do betão com capas impermeáveis ao vapor fixadas nos extremos e nas juntas para evitar dissecação por correntes de ar;
- Colocação de coberturas húmidas sobre a superfície e manutenção do seu estado de humidade;
- Manutenção da superfície do betão visivelmente húmida com água adequada.

## Capítulo 3 - Estado limite de fendilhação



### 3. Estado limite de fendilhação

#### 3.1 Introdução

Nas estruturas de betão armado, manifestam-se normalmente “em serviço” anomalias como a fissuração ou fendilhação com várias orientações (Figueiras, 1997). A fendilhação de peças de betão armado é, até certo ponto, normal e deve-se à menor resistência à tracção do betão.

O controlo da fendilhação pretende limitar a abertura de fendas a valores relativamente reduzidos, com espaçamentos pequenos de forma a evitar os seguintes fenómenos:

- Corrosão das armaduras;
- Limitar a permeabilidade através das fendas, garantindo a estanquidade das construções;
- Aparência desagradável das construções (ver Figura 3.1).



Figura 3.1: Viga de betão armado com sinais de degradação devido à fendilhação.

A verificação do estado limite de fendilhação visa evitar a formação de fendas, muito espaçadas e com grandes aberturas, diminuindo assim os efeitos de fenómenos patológicos exteriores. Quando uma peça de betão armado fendilha, existe um acréscimo de tensão ao nível das armaduras e deixa de se contabilizar o betão da zona traccionada, o que representa um acréscimo de tensão nas armaduras que pode levar à sua plastificação. Um

dos critérios a considerar no controlo da fendilhação, deve ser o da não plastificação das armaduras, visto que caso contrário as fendas permanecem sempre abertas.

É inevitável a formação de fissuras nas estruturas de betão armado, por isso, deve procurar-se que estas se formem em maior quantidade, mas com espaçamentos pequenos e aberturas reduzidas. A fendilhação está em geral associada aos seguintes fenómenos:

- Retracção e efeitos térmicos;
- Fendas de aderência;
- Acções directas, nomeadamente, esforços de flexão, corte, torção e tracção;
- Fendas causadas por cargas concentradas;
- Deformações impostas;
- Corrosão das armaduras;
- Reacções químicas do betão.

### **3.2 Fendilhação por retracção plástica e efeitos térmicos**

A retracção plástica é um fenómeno caracterizado pela diminuição gradual de volume do betão ao longo do processo de cura, na ausência de cargas aplicadas (Aguiar, et al., 1993).

As fendas de retracção decorrem do facto de, em determinadas zonas, a retracção não se processar livremente. Em edifícios, estas anomalias aparecem normalmente nas lajes dos pavimentos, guardas de varandas de grande desenvolvimento e paredes laminares, dada a sua extensão. Nas lajes, os efeitos da fendilhação por retracção são normalmente visíveis na face superior, devido a esta apresentar condições de cura mais desfavoráveis e pouca ou nenhuma armadura.

As fendas de retracção instalam-se rapidamente, passadas algumas horas após a colocação em obra do betão. Devido às condições iniciais de secagem, desenvolvem-se fendas superficiais em rede, com alguns milímetros de profundidade.



Figura 3.2: Fissuras na camada superficial do betão devido a retracção plástica.

As fendas de origem térmica assemelham-se às causadas pela retracção, estando igualmente relacionadas com o impedimento da livre dilatação ou contracção do betão por efeito das variações da temperatura. A grande diferença entre estes dois tipos de fendilhação reside no tempo que necessitam para se manifestar. A fendilhação por efeitos térmicos é bastante mais lenta, necessita que se complete o ciclo da variação térmica e mantém-se permanentemente activa, ao contrário da fendilhação por retracção que estabiliza ao fim de algum tempo.

### **3.3 Fendilhação por acções directas**

A fendilhação causada pela acção directa das cargas aplicadas ao sistema estrutural geralmente permite identificar o tipo de esforço, consoante o tipo de fissura e a sua orientação, conforme se descreve no Quadro 3.1 (Figueiras, 1997).

Quadro 3.1: Tipo de fissuras do betão mediante o tipo de esforço.

Tipo de esforço	Tipo de fenda
Tracção simples	As fendas atravessam em geral toda a secção.
Flexão	As fendas desenvolvem-se do bordo mais traccionado até ao plano das tensões neutras, geralmente aparecem em lajes ou vigas, junto a uma das faces.
Corte	Ocorre sobretudo nas faces laterais, a meia altura, junto aos apoios ou perto da zona de aplicação de cargas concentradas, desenvolvendo-se obliquamente ao eixo da peça.
Torção	A fendilhação por torção ocorre em todas as faces da peça, inclinadas em relação ao eixo dela, desenvolvendo-se em hélice.
Cargas Concentradas	As fendas desenvolvem-se na direcção da carga aplicada.

### 3.4 Fendilhação por corrosão das armaduras e reacções químicas no betão

A deterioração do betão é uma das causas principais da degradação estrutural e redução da vida útil das estruturas, começa pela camada de recobrimento e tem como principal consequência a corrosão do aço (Aguiar, et al., 1993).



Figura 3.3: Deterioração do recobrimento do betão, e conseqüente corrosão das armaduras.

A formação de óxido de ferro nas armaduras é um processo expansivo que provoca tensões de tracção no betão em torno dos varões, conduzindo posteriormente à fendilhação do betão. Resultam assim forças que tendem a afastar o betão que envolve as armaduras, causando em primeiro lugar o seu destacamento junto aos cantos das peças, visto que estes

têm menor capacidade de resistir à expansão das armaduras. Em seguida, dá-se um aumento da fendilhação longitudinal seguida de um processo de destacamento generalizado do recobrimento (ver Figura 3.4). As armaduras totalmente expostas sofrem perdas significativas de secção, desenvolvendo-se deformações consideráveis nos elementos de betão (Aguiar, et al., 1993).



Figura 3.4: Viga com forte corrosão das armaduras após o destaque do recobrimento.

O processo de ataque do betão inicia-se de fora para dentro, tendo a camada de recobrimento um papel essencial na protecção e passivação das armaduras. A durabilidade do betão depende do maior ou menor ataque químico de agentes agressivos, que necessitam da presença de água na forma líquida ou gasosa para o seu transporte. Este transporte é lento, pelo que só se verifica passados alguns anos, e depende fundamentalmente da porosidade da superfície do betão, que pode ser controlada tendo em atenção a granulometria dos agregados, a relação água/cimento, a compactação e cura do betão em obra. O grau de deterioração e a velocidade com que esta ocorre, variam com a classe de resistência do betão e a sua exposição a ambientes agressivos. A escolha de um betão de durabilidade conveniente tendo em vista a sua protecção e a protecção das

armaduras contra a corrosão, passa pela especificação da sua composição. Tal poderá conduzir à escolha de uma resistência do betão à compressão mais elevada do que a requerida pelo cálculo estrutural. O Quadro 3.2, relaciona a classe indicativa da resistência do betão com o respectivo ataque químico, físico ou biológico ao qual deve resistir.

Quadro 3.2: Classe Indicativa da resistência do betão de acordo com a sua exposição a agentes patológicos.

Classes de exposição (de acordo com o Quadro 4.1 do EC2)										
Corrosão										
	Corrosão Induzida por carbonatação				Corrosão Induzida por Cloretos			Corrosão Induzida por Cloretos da água do mar		
	XC1	XC2	XC3	XC4	XD1	XD2	XD3	XS1	XS2	XS3
Classe Indicativa da Resistência	C20/25	C25/30	C30/37		C30/37		C35/54	C30/37	C35/45	
Danos no betão										
	Sem Risco	Ataque Gelo/Degelo			Ataque Químico					
	X0	XF1	XF2	XF3	XA1		XA2		XA3	
Classe Indicativa da Resistência	C12/15	C30/37	C25/30	C30/37	C30/37				C35/45	

### 3.4.1 Carbonatação

No interior do betão não contaminado as armaduras estão protegidas contra a corrosão. A alcalinidade do meio é elevada e sobre a superfície das armaduras existe uma película passiva que impede a sua degradação. A carbonatação do betão é a acção dissolvente do dióxido de carbono do ar no cimento hidratado. Esta reacção dá-se nos poros do betão endurecido no qual o  $\text{CO}_2$  penetra por difusão. A conseqüente transformação da cal em carbonato de cálcio com a redução do pH (despassivação) do betão de 13, para valores inferiores a 9, contribui para a destruição da película passiva, provocando a corrosão

generalizada das armaduras. O Quadro 3.3 apresenta resumidamente algumas das causas da corrosão por carbonatação e descreve as principais medidas preventivas a ter em conta.

Quadro 3.3: Causas da corrosão por carbonatação e as respectivas acções preventivas.

<b>Causas da corrosão por carbonatação</b>	<b>Acções preventivas</b>
Baixa classe do betão	Estabelecer uma classe mínima do betão, adequada ao tipo de exposição previsto
Falta de homogeneidade do betão e/ou excesso de água de amassadura	Trabalhar com o mais baixo factor de água/cimento possível, para obter um betão menos poroso. Usar plastificantes, super plastificantes ou hidrófugos.
Recobrimentos insuficientes	Cumprir a legislação em vigor e efectuar a fiscalização adequada em obra.
Atmosfera com alto teor dióxido de carbono, dióxido de enxofre ou cloretos.	Utilizar revestimentos protectores. Usar betão com fumo de sílica, super plasficientes e com baixa razão água/cimento.

#### 3.4.2 Corrosão induzida por cloretos

Os sais no betão são responsáveis pela forte corrosão das armaduras. Mesmo em condições normais, o betão possui cloretos em pequenas quantidades nos materiais que o constituem. Estes cloretos são inofensivos desde que não exista água nos poros do betão, visto que esta facilita a difusão do oxigénio. Num ambiente húmido e rico em sais, a película passiva que envolve as armaduras é penetrada e o aço fica exposto à corrosão.

A penetração dos cloretos dá-se do exterior para o interior do betão, devido a:

- Absorção da água do mar por sucção capilar ou infiltração pelas fissuras;
- Penetração devido a diferenças de pressão;
- Difusão devido a diferenças de concentração de cloretos;
- Electromigração por diferenças de potencial eléctrico.

### 3.4.3 Corrosão do betão por lixiviação

A corrosão do betão por lixiviação dá-se quando o hidróxido de cálcio,  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  existente no cimento Portland é dissolvido na água que circula entre os poros, ou seja, quanto maior for a porosidade, maior será a intensidade da corrosão. A dissolução, transporte e deposição dos hidróxidos de cálcio contribui para a decomposição de outros hidratos, aumentando a porosidade do betão e conseqüentemente a sua fendilhação. Quando o betão está sujeito a este tipo de ataque, aparecem manchas, fissuras, estalagmites ou estalactites, que lhe dão uma aparência desagradável (ver Figura 3.5).



Figura 3.5: Recobrimento do betão fendilhado, com manchas causadas pela lixiviação.

### 3.5 Ataque gelo/degelo

A durabilidade de betões com elevada relação água/cimento pode ser seriamente comprometida, quando sujeito a ciclos de gelo/degelo. Deve limitar-se o efeito da capilaridade do betão endurecido, bloqueando a penetração de água, visto que esta ao passar do estado líquido a sólido sofre um incremento do volume que provoca tensões, fissuras e desagregação do betão.

### 3.6 Fendilhação por deformações impostas

A fendilhação resultante de acções indirectas provocadas por assentamento diferencial das fundações, variação de temperatura e retracção do betão, diz-se fendilhação causada por deformações impostas (Aguiar, et al., 1993). Este tipo de fendilhação ocorre em estruturas hiperestáticas, visto que existe uma restrição à livre deformação da estrutura, que introduz esforços acrescidos capazes de provocar a fendilhação do betão. Quanto mais rígida for a estrutura ou as suas ligações, maior será a resistência aos deslocamentos impostos, maiores serão as tensões e maior será a abertura das fendas.

Um exemplo frequente deste tipo de avaria estrutural, é a fendilhação por retracção do betão em muros de suporte de terras. Como a sapata é betonada em primeiro lugar, já sofreu grande parte da retracção a que está sujeita quando a parede é betonada. A parede ao retrair é impedida pela fundação e a fendilhação desenvolve-se. O betão do muro fica sujeito a tensões de tracção horizontal, que provocam fendas verticais. O controlo da fendilhação pode ser realizado introduzindo uma quantidade mínima de armadura aderente horizontal em ambas as faces. Na Figura 3.6 estão representados dois muros de betão armado com fissuras verticais devidas a deformações impostas.



Figura 3.6: Muros de suporte fissurados devido a deformações impostas.

### 3.7 Controlo da fendilhação segundo EC2

#### 3.7.1 Generalidades

A fendilhação das estruturas de betão é inevitável e cabe ao engenheiro efectuar o seu controlo, de modo que esta não prejudique o desempenho ou a durabilidade da estrutura.

O EC2 propõe três métodos distintos para o controlo da fendilhação:

- Quantificação de armaduras mínimas que limitam a fendilhação em zonas em que se prevejam tracções;
- Cálculo da largura característica das fendas;
- Controlo da fendilhação sem cálculo directo.

Deve definir-se um valor limite para a largura máxima das fendas, mediante o tipo de estrutura e o tipo de exposição ambiental a que esta está sujeita. Assim, e na ausência de requisitos específicos, o EC2 recomenda os valores máximos aceitáveis para a largura das fendas, conforme se resume no Quadro 3.4.

Quadro 3.4: Valores máximos aceitáveis para a largura das fendas (EN 1992-1-1, 2010).

Classe de Exposição	Elementos de betão armado e elementos de betão pré-esforçado com armaduras não aderentes	Elementos de betão pré-esforçado com armaduras aderentes
	Combinação de acções quase-permanente	Combinação de acções frequente
X0, XC1	0,4 mm (Nota 1)	0,2 mm
XC2, XC3, XC4	0,3 mm	0,2 mm (Nota 2)
XD1, XD2, XS1, XS2, XS3	0,3 mm	Descompressão
Nota 1: Para as classes de exposição X0 e XC1, a largura de fendas não tem influência sobre a durabilidade e este limite é estabelecido para dar em geral um aspecto aceitável. Na ausência de especificações no que respeita ao aspecto, este limite poderá ser reduzido.		
Nota 2: Para estas classes de exposição deverá verificar-se, ainda, a descompressão para a combinação quase-permanente de acções.		

### 3.7.2 Mecanismo da fendilhação

Considere-se o elemento de betão representado na Figura 3.7, sujeito a um esforço axial de tracção centrado sucessivamente crescente. Quando a tensão no betão atinge a sua capacidade resistente à tracção, a peça fendilha instantaneamente, verificando-se um acréscimo brusco das tensões no aço. Ou seja, a tensão presente no betão até este instante passará a constituir um acréscimo de tensões na armadura (Marchão, et al., 2009).

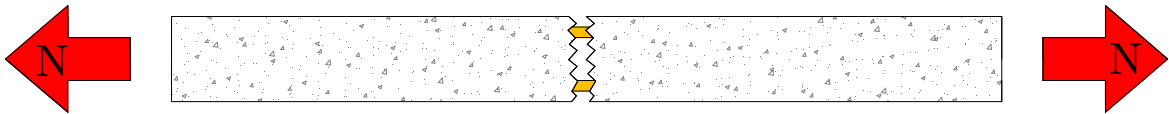


Figura 3.7: Tirante sujeito a um esforço axial crescente.

Se a tensão de tracção no betão previamente à abertura da fenda for:

$$\sigma_c = f_{ct} \quad (3.1)$$

A resultante das forças, que no instante da abertura das fendas é transmitida à armadura, é dada por:

$$f_{ct} \times A_c = A_s \times \Delta\sigma_s \Leftrightarrow \Delta\sigma_s = \frac{A_c}{A_s} \times f_{ct} \quad (3.2)$$

Com  $\rho = \frac{A_s}{A_c}$  (percentagem de armadura), o acréscimo das tensões na armadura será:

$$\Delta\sigma_s = \frac{1}{\rho} \times f_{ct} \quad (3.3)$$

Homogeneizando a secção em betão, com  $\alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$ , a tensão total a que a armadura fica sujeita é dada na expressão (3.4):

$$\sigma_s = \alpha_e \times f_{ct} + \Delta\sigma_s \quad (3.4)$$

Assim conclui-se que, a tensão na armadura aumenta consideravelmente na secção da fenda, dando lugar a uma deformação axial local, que arrasta consigo as camadas de betão envolventes da armadura devido à aderência entre as superfícies. Conclui-se ainda que o

acréscimo da tensão no aço é inversamente proporcional à percentagem de armadura ( $\rho$ ) na secção. É por isso que se torna essencial garantir quantidades mínimas de armadura, para que esta não atinja a cedência (não plastifique) (Marchão, et al., 2009) aquando da ocorrência de uma fenda.

### 3.7.3 Cálculo das tensões no aço e no betão

Quando um elemento estrutural de betão está sujeito a tensões de tracção inferiores à sua resistência  $f_{ct,eff}$ , diz-se que este não está fendilhado (estado I). Caso contrário, no instante em que o betão atinge a sua tensão resistente à tracção formam-se fissuras e existe instantaneamente um acréscimo das tensões nas armaduras, ou seja a peça está no estado fendilhado (estado II). O valor de  $f_{ct,eff}$  pode ser considerado igual a  $f_{ctm}$ , desde que este valor seja o adoptado no cálculo da armadura mínima (Felix, 2009).

#### 3.7.3.1 Cálculo das tensões em estado não fendilhado (estado I)

O cálculo das tensões em estado não fendilhado pode efectuar-se através duma análise elástica linear, admitindo as seguintes hipóteses:

- i. A secção está toda activa;
- ii. A relação entre as tensões e as extensões, em tracção e em compressão, é linear;
- iii. Considera-se o valor médio do módulo de elasticidade.

Pelas fórmulas da resistência dos materiais, as tensões no betão e no aço calculam-se pelas seguintes expressões:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_{ci}} \mp \frac{M}{I_{ci}} \times y \quad (3.5)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \times \sigma_c \quad (3.6)$$

Onde:

$\sigma_c$ - tensão no betão;

$\sigma_s$ - tensão no aço;

N – esforço axial correspondente à combinação de acções em causa;

M- momento flector correspondente à combinação de acções em causa;

$A_{ci}$  – área da secção homogeneizada;

$I_{ci}$  – momento de inércia da secção homogeneizada;

$\alpha_e$  – Coeficiente de homogeneização ( $E_s/E_{cm}$ ).

### 3.7.3.2 Cálculo das tensões em estado fendilhado (estado II)

Se as acções actuantes, para uma dada combinação, provocarem tensões superiores a  $f_{ctm}$ , considera-se que a secção está fendilhada (estado II). Nestas condições, pode admitir-se que o betão tem um comportamento elástico em compressão, e é incapaz de suportar qualquer tensão de tracção. Ao contrário do estado I, considera-se que a secção está parcialmente activa (ver Figura 3.8). Devido a este factor, torna-se essencial determinar a posição do eixo neutro (Felix, 2009).

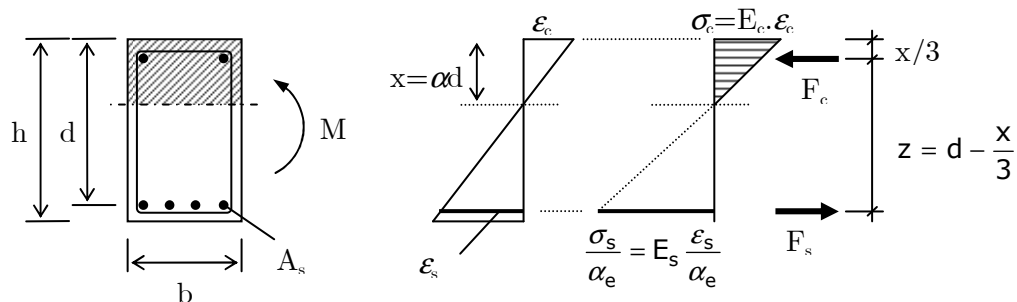


Figura 3.8: Secção fendilhada em fase elástica.

Utilizando a nomenclatura da Figura 3.8, deduz-se a expressão que permite calcular a posição do eixo neutro de uma secção rectangular submetida à flexão simples, através das seguintes expressões:

(i) compatibilidade das deformações (hipótese de Bernoulli);

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s} = \frac{x}{d-x} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (3.7)$$

(ii) equilíbrio estático da secção;

$$M = F_c \times Z \quad (3.8)$$

$$F_c = F_s \quad (3.9)$$

(iii) relação elástica entre tensões e deformações (lei de Hooke).

$$\sigma_c = E_c \times \varepsilon_c \quad (3.10)$$

$$\sigma_s = E_s \times \varepsilon_s \quad (3.11)$$

Sendo:

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} \quad (3.12)$$

As resultantes de compressão no betão e de tracção na armadura podem escrever-se:

$$F_c = \sigma_c \times \frac{1}{2} \times b \times x \quad (3.13)$$

$$F_s = \sigma_s \times A_s = \sigma_s \times \rho \times b \times d \quad (3.14)$$

Substituindo na expressão (3.9), virá:

$$\sigma_s \times \rho \times b \times d = \sigma_c \times \frac{1}{2} \times b \times x \Leftrightarrow \frac{x}{d} = 2 \times \rho \times \frac{\sigma_s}{\sigma_c} \Leftrightarrow \alpha = 2 \times \rho \times \frac{\sigma_s}{\sigma_c} \quad (3.15)$$

Donde, introduzindo a lei de Hooke:

$$\alpha = 2 \times \rho \times \frac{E_s \times \varepsilon_s}{E_c \times \varepsilon_c} \Leftrightarrow \alpha = 2 \times \rho \times \alpha_e \times \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} \quad (3.16)$$

Substituindo a fórmula anterior na expressão da compatibilidade das deformações, virá:

$$\alpha = 2 \times \rho \times \alpha_e \times \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad (3.17)$$

Donde resulta a equação de 2º grau seguinte:

$$\alpha^2 + 2 \times \alpha_e \times \rho \times \alpha - 2 \times \alpha_e \times \rho = 0 \quad (3.18)$$

Depois de determinada a posição do eixo neutro, é possível calcular as tensões no aço e no betão para o estado II, bastando para isso relacionar o equilíbrio estático da secção com as resultantes de compressão no betão e tracção na armadura (Felix, 2009).

**(i) Tensão no aço**

$$M = F_s \times Z \Leftrightarrow M = \sigma_s \times \rho \times b \times d \times \left(d - \frac{x}{3}\right) \quad (3.19)$$

Com  $x = \alpha d$ , virá:

$$M = \sigma_s \times \rho \times b \times d^2 \times \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \quad (3.20)$$

Finalmente:

$$\sigma_s = \frac{1}{\rho \times \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \times \frac{M}{b \times d^2} = C_s \times \frac{M}{b \times d^2} \quad (3.21)$$

Em que, o coeficiente  $C_s$  é dado pela expressão seguinte:

$$C_s = \frac{1}{\rho \times \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \quad (3.22)$$

**(ii) Tensão no betão**

$$M = F_c \times Z \Leftrightarrow M = \sigma_c \times \frac{1}{2} \times b \times x \times \left(d - \frac{x}{3}\right) \quad (3.23)$$

Com  $x = \alpha d$ , virá:

$$M = \sigma_c \times \frac{1}{2} \times b \times \alpha \times d^2 \times \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \quad (3.24)$$

Finalmente:

$$\sigma_c = \frac{2}{\alpha \times \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \times \frac{M}{b \times d^2} = C_c \times \frac{M}{b \times d^2} \quad (3.25)$$

Em que, o coeficiente  $C_c$  é dado pela expressão seguinte:

$$C_c = \frac{2}{\alpha \times \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \quad (3.26)$$

Com base na expressão (3.18), nos coeficientes  $C_s$  e  $C_c$  das expressões (3.22) e (3.26) respectivamente, e admitindo um coeficiente de homogeneização  $\alpha_e = 10$  obtêm-se os

valores do Quadro 3.5 que estão directamente relacionados com a percentagem da armadura do elemento estrutural.

Quadro 3.5: Coeficientes  $C_s$  e  $C_c$  para o cálculo das tensões em secções rectangulares sem armadura de compressão.

$\rho$ [%]	$\alpha$	$C_c$	$C_s$
0.10	0.132	15.87	1045.9
0.12	0.143	14.65	875.2
0.14	0.154	13.70	752.9
0.16	0.164	12.93	661.0
0.18	0.173	12.30	589.5
0.20	0.181	11.76	532.1
0.22	0.189	11.30	485.1
0.24	0.196	10.90	445.9
0.26	0.204	10.54	412.6
0.28	0.210	10.23	384.1
0.30	0.217	9.94	359.3
0.32	0.223	9.69	337.6
0.34	0.229	9.46	318.4
0.36	0.235	9.24	301.4
0.38	0.240	9.05	286.1
0.40	0.246	8.87	272.3
0.42	0.251	8.70	259.8
0.44	0.256	8.54	248.5
0.46	0.261	8.40	238.1
0.48	0.266	8.26	228.6
0.50	0.270	8.14	219.8
0.52	0.275	8.02	211.7
0.54	0.279	7.90	204.2
0.56	0.283	7.80	197.2
0.58	0.287	7.69	190.7
0.60	0.292	7.60	184.6
0.62	0.296	7.51	178.9
0.64	0.299	7.42	173.6
0.66	0.303	7.34	168.6
0.68	0.307	7.26	163.8
0.70	0.311	7.18	159.4
0.72	0.314	7.11	155.1
0.74	0.318	7.04	151.1
0.76	0.321	6.97	147.4
0.78	0.325	6.91	143.8

$\rho$ [%]	$\alpha$	$C_c$	$C_s$
0.80	0.328	6.85	140.3
0.82	0.331	6.79	137.1
0.84	0.334	6.73	134.0
0.86	0.338	6.68	131.0
0.88	0.341	6.62	128.2
0.90	0.344	6.57	125.5
0.92	0.347	6.52	122.9
0.94	0.350	6.47	120.4
0.96	0.353	6.43	118.0
0.98	0.355	6.38	115.8
1.00	0.358	6.34	113.6
1.02	0.361	6.30	111.5
1.04	0.364	6.26	109.4
1.06	0.366	6.22	107.5
1.08	0.369	6.18	105.6
1.10	0.372	6.14	103.8
1.12	0.374	6.10	102.0
1.14	0.377	6.07	100.3
1.16	0.379	6.03	98.7
1.18	0.382	6.00	97.1
1.20	0.384	5.97	95.6
1.22	0.387	5.94	94.1
1.24	0.389	5.90	92.7
1.26	0.392	5.87	91.3
1.28	0.394	5.84	89.9
1.30	0.396	5.82	88.6
1.32	0.398	5.79	87.4
1.34	0.401	5.76	86.1
1.36	0.403	5.73	84.9
1.38	0.405	5.71	83.8
1.40	0.407	5.68	82.7
1.50	0.418	5.56	77.5
1.60	0.428	5.45	72.9
1.80	0.446	5.26	65.3
2.00	0.463	5.11	59.1

### 3.8 Armaduras mínimas

No controlo da fendilhação de uma peça de betão armado sujeita a forças aplicadas e/ou deformações impostas, devem estabelecer-se quantidades mínimas de armadura, em todas as zonas em que se prevejam tensões de tracção significativas, garantindo que após a formação das primeiras fendas a armadura não plastifique (EN 1992-1-1, 2010). Assim, garante-se a transmissão, por mecanismos de aderência ao betão, de forças capazes de gerar novas fendas de pequena amplitude, que tornam o comportamento estrutural dúctil. Se a armadura plastificar, a fenda tenderá a aumentar a sua espessura com o aumento da solicitação. Para além do critério da não plastificação, no cálculo das quantidades mínimas de armadura, deve ter-se em conta o efeito das tensões não uniformes auto-equilibradas e a distribuição das tensões na secção.

#### 3.8.1 Tracção simples

Considere-se um tirante de betão armado sujeito a um esforço axial centrado sucessivamente crescente. A primeira fenda surgirá na peça, para o esforço axial  $N_{sr}$ , por se ter atingido o valor médio da resistência do betão à tracção que, por hipótese, se pode considerar igual a  $f_{ct,eff}$ . Para garantir a não plastificação da armadura, deve colocar-se uma armadura mínima como foi referido anteriormente (Felix, 2009), ou seja, deverá verificar-se a desigualdade (3.27):

$$A_{ct} \times f_{ct,eff} \leq A_s \times f_{yk} \quad (3.27)$$

Sendo:

$A_{ct}$  - representa a área de betão traccionado, imediatamente antes da formação da primeira fenda (neste caso  $A_{ct} = A_c$ );

$f_{ct,eff}$  - valor médio da resistência do betão à tracção.

A armadura mínima a colocar no tirante pode ser obtida a partir da expressão:

$$A_{s,min} = A_{ct} \times \frac{f_{ct,eff}}{f_{yk}} \quad (3.28)$$

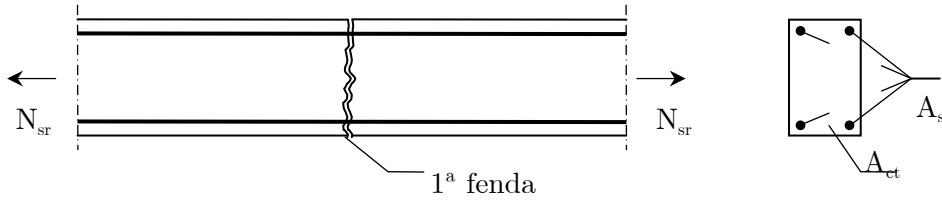


Figura 3.9: Elemento submetido à tracção simples: formação da 1ª fenda.

No caso de se pretender limitar o valor da abertura das fendas, deve utilizar-se uma tensão no aço  $\sigma_s$  inferior a  $f_{yk}$ , ( $\sigma_s < f_{yk}$ ).

### 3.8.2 Flexão

Num elemento de betão armado sujeito à flexão simples, no instante da abertura da primeira fenda por tracção, a condição de não plastificação da armadura traduz-se pela seguinte desigualdade (Felix, 2009):

$$N_{ct} \times Z_c \leq N_{st} \times Z_s \tag{3.29}$$

Sendo:

$N_{ct}$  - a resultante das tracções no betão no instante anterior ao da abertura da primeira fenda;

$z_c$  - o braço do binário no instante anterior ao da abertura da primeira fenda;

$N_{st}$  - a resultante da tracção na armadura logo após a abertura da fenda no betão;

$z_s$  - o braço do binário logo após a abertura da fenda no betão.

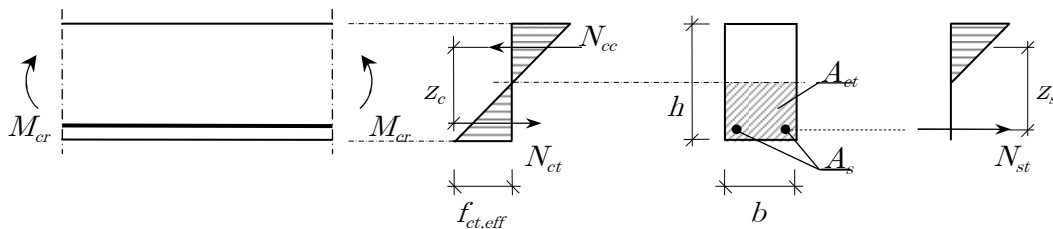


Figura 3.10: Elemento submetido à flexão simples: formação da 1ª fenda.

Admitindo simplifcadamente que no instante anterior ao da abertura da primeira fenda

$$z_c = \frac{2}{3} \times h, \text{ e após a abertura desta } z_s = \frac{h}{3} + \frac{h}{2}, \text{ virá:}$$

$$z_s = \frac{h}{3} + \frac{h}{2} \Leftrightarrow z_s = \frac{5}{6} \times h \Leftrightarrow h = \frac{6}{5} \times z_s \quad (3.30)$$

Substituindo h na fórmula do  $z_c$ , verifica-se que:

$$z_c = \frac{2}{3} \times h \Leftrightarrow z_c = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times z_s \Leftrightarrow z_c = 0,8 \times z_s \quad (3.31)$$

Ou seja:

$$0,8 \times N_{ct} \leq N_{st} \Leftrightarrow 0,8 \times \frac{1}{2} \times A_{ct} \times f_{ct,eff} \leq A_s \times f_{yk} \quad (3.32)$$

Onde:

$A_{ct}$  - representa a área de betão traccionado, imediatamente antes da formação da primeira fenda

$A_s$  - representa a área de aço

$f_{ct,eff}$  - valor médio da resistência do betão à tracção

$f_{yk}$  - valor característico da tensão de cedência à tracção do aço nas armaduras para betão armado;

Resultando a expressão:

$$A_{s, \min} = 0,4 \times A_{ct} \times \frac{f_{ct,eff}}{f_{yk}} \quad (3.33)$$

Tendo em atenção as expressões (3.28) e (3.33), pode escrever-se uma expressão geral, dada por:

$$A_{s, \min} = k_c \times A_{ct} \times \frac{f_{ct,eff}}{f_{yk}} \quad (3.34)$$

Sendo:

$k_c$  - um coeficiente que tem em conta a distribuição de tensões na secção, imediatamente antes da fendilhação, e a variação do braço do binário, dado por:

$k_c = 1.0$  - para a tracção simples

$k_c = 0.4$  - para a flexão simples (sem esforço normal)

### 3.8.3 Tensões auto-equilibradas

Devido a fenómenos como a retracção ou a variação da temperatura, podem surgir na superfície do betão tensões, denominadas de auto-equilibradas, que são independentes da aplicação de qualquer solicitação externa. Estas tensões não ocorrem de maneira uniforme em toda a secção, e manifestam-se através de tracções perto da superfície desta, devidamente compensadas por compressões no seu interior, conforme se ilustra na Figura 3.11. É então gerado um conjunto de tensões auto-equilibradas, que tem por efeito antecipar a fendilhação (fendilhação superficial) (Felix, 2009).

Em peças de grandes dimensões, a fendilhação superficial dificilmente afecta o núcleo da peça e conseqüentemente a sua resistência. A compressão que se gera no seu interior é até certo ponto benéfica, razão pela qual se utiliza um coeficiente  $k$ , na expressão que define a armadura mínima a garantir na secção. O valor de  $k$  diminui com o aumento das dimensões da peça.

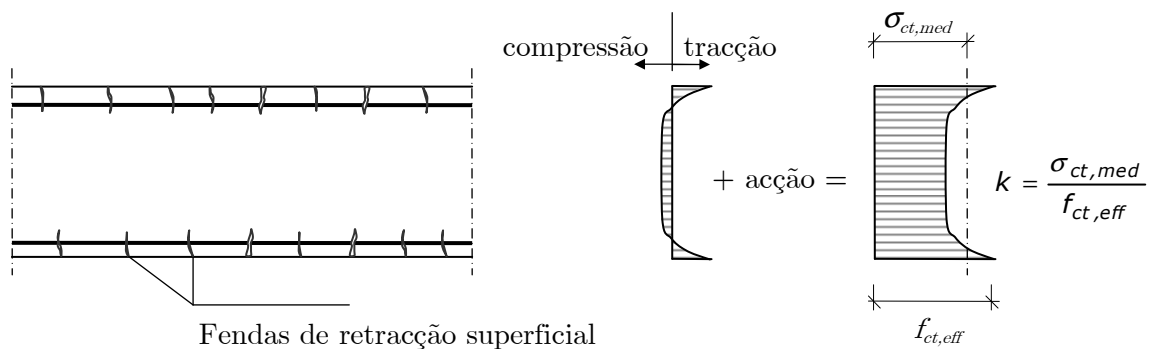


Figura 3.11: Efeitos das tensões auto equilibradas.

Assim, numa peça sujeita à tracção simples, o cálculo da armadura mínima, tendo em conta as tensões auto-equilibradas, pode ser obtida a partir da expressão:

$$A_{s, \min} = k \times A_{ct} \times \frac{f_{ct,eff}}{f_{yk}} \quad (3.35)$$

Onde:

$k$  - coeficiente que tem em consideração o efeito das tensões auto-equilibradas na secção. O seu valor pode variar entre 0,65 e 1.

### 3.8.4 Expressão do EC2

A não ser que se possa justificar com um cálculo mais rigoroso, as áreas mínimas de armadura poderão ser calculadas pela expressão (3.36) que tem em conta o efeito das tensões uniformes não equilibradas e a distribuição das tensões na secção.

$$A_{s,\min} = k_c \times k \times f_{ct,eff} \times \frac{A_{ct}}{\sigma_s} \quad (3.36)$$

*Nota: No caso das secções perfiladas, como vigas em T ou em caixão, a armadura mínima deve ser determinada em cada parte da secção (almas, banzos).*

Onde:

$A_{s,\min}$  - área mínima das armaduras para betão armado na zona traccionada;

$A_{ct}$  - área de betão traccionado. A zona de betão traccionado é aquela em que, pelo cálculo da secção, se demonstra que está em tracção imediatamente antes da formação da primeira fenda;

$\sigma_s$  - valor absoluto da tensão máxima admissível na armadura imediatamente depois da formação da fenda. Poderá ser considerada igual à tensão de cedência da armadura,  $f_{yk}$ . No entanto, poderá ser necessário adoptar-se um valor mais baixo para satisfazer a largura máxima de fendas;

$f_{ct,eff}$  - valor médio da resistência do betão à tracção à data em que se prevê que se possam formar as primeiras fendas:  $f_{ct,eff} = f_{ctm}$  ou um valor inferior, ( $f_{ctm(t)}$ ), se se prevê uma fendilhação antes dos 28 dias;

$k$  - coeficiente que considera o efeito das tensões não uniformes auto-equilibradas, de que resulta uma redução dos esforços de coacção:

- 1,0 para almas com  $h \leq 300$  mm ou para banzos com larguras inferiores a 300 mm;
- 0,65 para almas com  $h \geq 800$  mm ou para banzos com larguras inferiores a 800 mm;

*Nota: Os valores intermédios devem ser interpolados.*

$k_c$  - coeficiente que tem em conta a distribuição de tensões na secção, imediatamente antes da fendilhação e da variação do braço do binário:

- Para tracção simples  $k_c=1,0$ ;
- Para flexão sem esforço axial  $k_c=0,4$

*Nota: Nos restantes casos,  $k_c$  deve ser calculado segundo o ponto 7.3.2 do EC2 -1-1.*

### 3.9 Largura característica das fendas

#### 3.9.1 Cálculo da distância mínima entre fendas

No instante em que a tensão no betão é igual à sua tensão máxima de resistência à tracção, a peça fendilha, as tensões no betão são nulas e existe um acréscimo de tensões na armadura. A força no aço é progressivamente transmitida ao betão, por aderência, até se atingir a tensão resistente à tracção ( $f_{ctm}$ ). Assim, a distância mínima necessária para a armadura transmitir ao betão uma força capaz de gerar uma tensão igual a  $f_{ctm}$ , corresponde à distância entre fendas (Marchão, et al., 2009).

Considere-se um tirante de betão sujeito a forças de tracção. A distância entre fendas obtém-se igualando a força solicitante, à força resistente, assim:

$$N_{\text{solicitante}} = N_{\text{resistente}} \Leftrightarrow f_{ctm} \times A_c = f_{bd} \times A_{\text{contacto}} \quad (3.37)$$

Onde:

$f_{ctm}$  - tensão resistente média de tracção do betão;

$A_c$  - área de betão da secção;

$f_{bd}$  - tensão tangencial de aderência entre o aço e o betão;

$A_{\text{contacto}}$  - área de contacto entre a superfície da armadura e o betão.

Com  $A_{\text{contacto}} = \pi \times \emptyset \times s_{\text{min}}$  e  $\rho = \frac{A_s}{A_c}$ , a distância mínima entre fendas num tirante é dada pela expressão (3.38).

$$f_{ct} \times A_c = f_{bd} \times A_{\text{contacto}} \leftrightarrow f_{ct} \times \frac{A_s}{\rho} = f_{bd} \times \pi \times \emptyset \times s_{\min} \quad (3.38)$$

Como  $A_s = \frac{\pi \times \emptyset^2}{4}$ , virá:

$$f_{ct} \times \frac{\pi \times \emptyset^2}{4 \times \rho} = f_{bd} \times \pi \times \emptyset \times s_{\min} \quad (3.39)$$

Finalmente:

$$s_{\min} = \frac{f_{ctm}}{f_{bd}} \times \frac{\emptyset}{4 \times \rho} \quad (3.40)$$

Onde:

$s_{\min}$  – distância entre fendas;

$\emptyset$  – diâmetro equivalente dos varões da armadura.

Considere-se agora uma viga sujeita a flexão simples, a distribuição das tensões de tracção e compressão na secção é triangular e a área efectiva de betão traccionado equivale simplificadamente a  $A_{c,\text{eff}}=0,5A_c$  (Marchão, et al., 2009). Naturalmente, deve determinar-se a percentagem efectiva de armadura para a secção de betão traccionado. Pode utilizar-se a expressão (3.41) para calcular a distância mínima entre fendas num elemento sujeito à flexão.

$$s_{\min} = 0,5 \times \frac{f_{ctm}}{f_{bd}} \times \frac{\emptyset}{4 \times \rho_{p,\text{eff}}} \quad (3.41)$$

Com o estudo dos dois exemplos anteriores e admitindo uma constante  $k_2$  que tem em conta a distribuição das tensões na secção, conclui-se que esta tem um papel essencial no cálculo da distancia mínima entre fendas. A distribuição das tensões numa peça de betão sujeita a tracção simples é constante podendo assumir-se  $k_2=1,0$ , enquanto que, numa peça sujeita a flexão simples apenas metade da peça está traccionada e a distribuição das tensões é triangular, ou seja  $k_2=0,5$ . Para situações intermédias pode calcular-se  $k_2$  conforme o indicado em 3.9.2. Assim:

$$s_{\min} = 0,25 \times k_2 \times \frac{f_{ctm}}{f_{bd}} \times \frac{\emptyset}{\rho_{p,\text{eff}}} \quad (3.42)$$


---

Por outro lado, as propriedades de aderência dos varões ao betão traduzem-se na relação entre as tensões de aderência e a resistência média à tracção do betão,  $\frac{f_{ctm}}{f_{bd}}$ . Admitindo a constante  $k_1$  do EC2 que tem em conta estes factores, obtém-se:

$$s_{\min} = 0,25 \times k_1 \times k_2 \times \frac{\emptyset}{\rho_{p,\text{eff}}} \quad (3.43)$$

### 3.9.2 Cálculo da distância máxima entre fendas

A expressão prevista no EC2 para o cálculo da distância entre fendas é a seguinte:

$$s_{r \max} = k_3 \times c + k_1 \times k_2 \times k_4 \times \frac{\emptyset}{\rho_{p,\text{eff}}} \quad (3.44)$$

Onde:

$c$  – recobrimento das armaduras longitudinais;

$k_1$ - coeficiente que tem em conta as propriedades de aderência das armaduras aderentes:

- 0,8 para varões de alta aderência;
- 1,6 para armaduras com uma superfície lisa ( por exemplo, armaduras de pré-esforço);

$k_2$ - coeficiente que tem em conta a distribuição das extensões:

- 0,5 para a flexão;
- 1,0 para tracção simples;

Em casos de tracção excêntrica ou para zonas localizadas, devem utilizar-se valores intermédios de  $k_2$ . Sendo  $\varepsilon_1$  a maior extensão de tracção nas fibras e  $\varepsilon_2$  a menor, a expressão a aplicar nestes casos é dada por:

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1} \quad (3.45)$$

$k_3$  e  $k_4$  - constantes determinadas pelo respectivo anexo nacional. Os valores recomendados e aceites pelo anexo nacional são respectivamente 3,4 e 0,425.

$\emptyset$  - diâmetro dos varões. No caso de existirem varões de diâmetros diferentes deverá determinar-se um diâmetro equivalente através da expressão seguinte:

$$\emptyset_{eq} = \frac{n_1 \times \emptyset_1^2 + n_2 \times \emptyset_2^2}{n_1 \times \emptyset_1 + n_2 \times \emptyset_2} \quad (3.46)$$

$\rho_{p,eff}$  - percentagem efectiva de armadura,  $\frac{A_s}{A_{c,eff}}$ , em que  $A_s$  é a área de armadura contida na área de tracção efectiva,  $A_{c,eff}$ .

A área da secção efectiva de betão traccionado que envolve as armaduras é calculada através de  $h_{c,eff}$ , em que  $h_{c,eff}$  é o menor dos valores das condições seguintes:

- $2,5(h-d)$ ;
- $(h-x)/3$ ;
- $h/2$ .

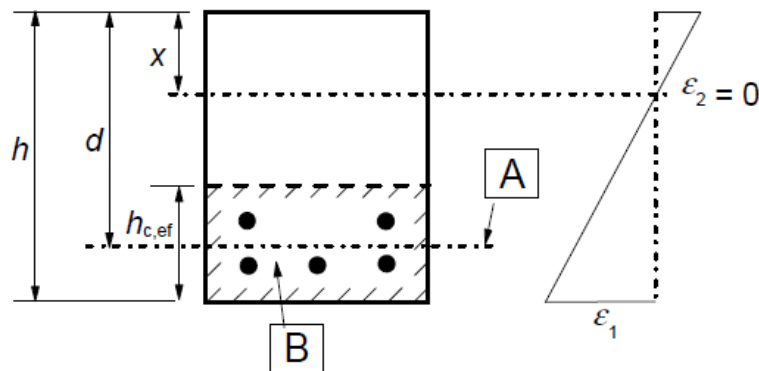


Figura 3.12: Altura efectiva de betão traccionado numa viga (EN 1992-1-1, 2010).

Legenda:

A- nível do centro de gravidade das armaduras;

B- área da secção efectiva de betão traccionado envolvente da armadura;

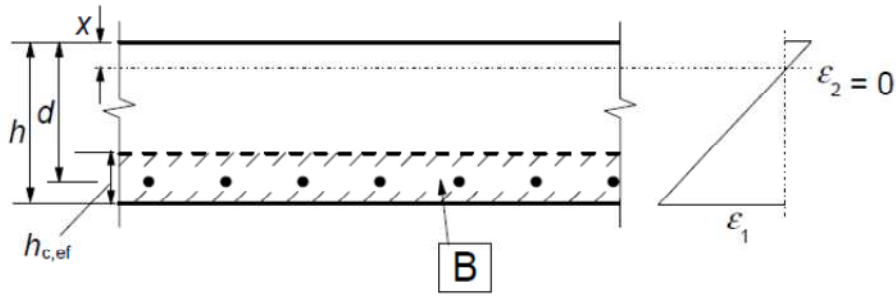


Figura 3.13: Altura efectiva de betão traccionado numa laje (EN 1992-1-1, 2010).

Legenda:

B - área da secção efectiva de betão traccionado envolvente da armadura;

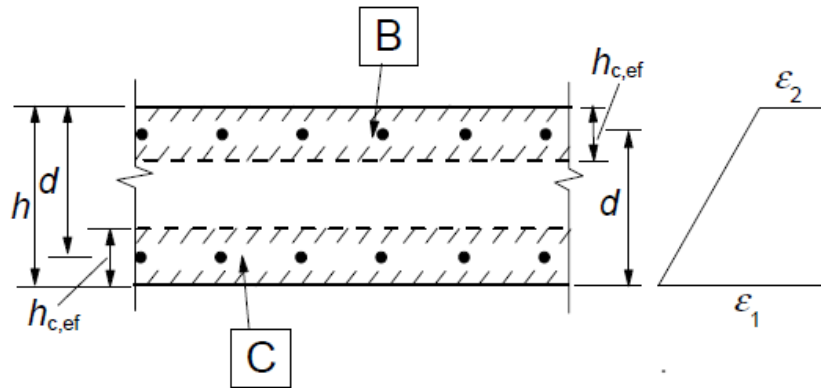


Figura 3.14: Altura efectiva de betão traccionado num elemento em tracção (EN 1992-1-1, 2010).

Legenda:

B - área da secção efectiva de betão traccionado envolvente da armadura superior;

C- área da secção efectiva de betão traccionado envolvente da armadura inferior;

### 3.9.3 Cálculo da extensão média relativa entre o aço e o betão

Como se pode observar no gráfico da Figura 3.15, numa peça de betão em estado fendilhado, para a mesma força axial  $N$ , a extensão média do aço é inferior à extensão em estado fendilhado, para isso contribui a aderência do aço com o betão, que obriga este a deformar-se. É por isso que, para o cálculo da abertura das fendas importa calcular a deformação relativa entre estes materiais (Marchão, et al., 2009).

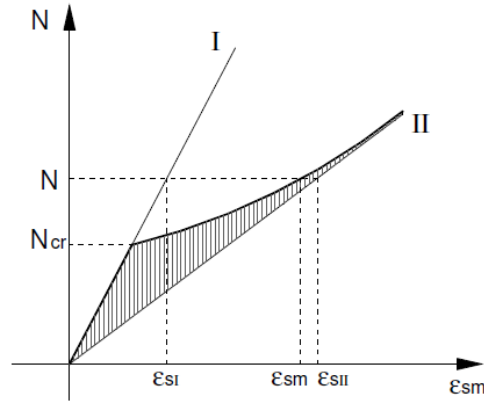


Figura 3.15: Comportamento do aço em estado não fendilhado e fendilhado (Marchão, et al., 2009).

*Nota: A zona sombreada refere-se à contribuição do betão entre as fendas.*

Assim, a diferença entre a extensão média do aço e do betão pode ser obtida pela expressão seguinte:

$$\varepsilon_{rsm} = \varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} \quad (3.47)$$

Onde:

$\varepsilon_{rsm}$  - extensão relativa entre o aço e o betão;

$\varepsilon_{sm}$  - extensão média da armadura para a combinação de ações considerada, incluindo o efeito das deformações impostas e considerando a contribuição do betão traccionado;

$\varepsilon_{cm}$  - extensão média no betão entre fendas.

### 3.9.3.1 Determinação da extensão média do aço

Caso não existisse a contribuição do betão, pela lei de Hooke, a extensão do aço poderia ser obtida da seguinte forma:

$$\sigma_s = E_s \times \varepsilon_{sm} \Leftrightarrow \frac{F_s}{A_s} = E_s \times \varepsilon_{sm} \Leftrightarrow \varepsilon_{sm} = \frac{F_s}{A_s \times E_s} \quad (3.48)$$

Considerando a contribuição do betão e a duração das cargas, virá:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{F_s - F_c}{A_s \times E_s} = \frac{\sigma_s \times A_s - k_t \times f_{ct,eff} \times A_{c,eff}}{E_s \times A_s} = \frac{\sigma_s}{E_s} - k_t \times \frac{f_{ct,eff}}{E_s \times \rho_{p,eff}} \quad (3.49)$$

### 3.9.3.2 Determinação da extensão média do betão

Pela lei de hooke obtém-se a expressão (3.50):

$$\sigma_c = E_c \times \varepsilon_{cm} \leftrightarrow \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.50)$$

Ou seja:

$$\varepsilon_{cm} = \frac{k_t \times f_{ct,eff} \times A_c}{E_c \times A_c} = k_t \times \frac{f_{ct,eff}}{E_c} \quad (3.51)$$

### 3.8.2.3 Determinação da extensão relativa entre o aço e o betão

Finalmente, aplicando as expressões (3.47), (3.49) e (3.51) obtém-se:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} - k_t \times \frac{f_{ct,eff}}{E_s \times \rho_{p,eff}} - k_t \times \frac{f_{ct,eff}}{E_c} \quad (3.52)$$

Desenvolvendo a equação anterior, obtém-se a fórmula do EC2:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \times \frac{f_{ctm}}{\rho_{p,eff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{p,eff})}{E_s} \quad (3.53)$$

Onde:

$\sigma_s$  - tensão na armadura de tracção admitindo a secção fendilhada. Para elementos pré-esforçados por pré-tensão,  $\sigma_s$  poderá ser substituído pela variação  $\Delta\sigma_p$  de tensões nas armaduras de pré- esforço a partir do estado de extensão nula do betão no mesmo nível;

$k_t$  - é um factor de integração da distribuição de extensões, e que tem em conta a duração ou a repetição das cargas ( $k_t = 0.6$  para acções de curta duração;  $k_t = 0.4$  para acções de longa duração);

$f_{ct,eff}$  - representa o valor médio da tensão resistente do betão à tracção ( $= f_{ctm}$ );

$\rho_{p,eff}$  - representa a percentagem de armadura relativa à área de betão efectiva;

$\alpha_e$  - coeficiente de homogeneização ( $\frac{E_s}{E_c}$ )

O EC2 exige que o valor da extensão relativa entre o aço e o betão, respeite a condição seguinte:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \geq 0,6 \times \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (3.54)$$

Esta condição é imposta nos casos em que as acções actuantes sobre o elemento estrutural não são suficientes para este fendilhar. Admite-se artificialmente o valor mínimo  $0,6 \times \frac{\sigma_s}{E_s}$  para prever a formação de fissuras devidas a outros fenómenos como deformações impostas ou retracção.

#### 3.9.4 Cálculo da largura característica das fendas

Segundo o EC2, o valor da largura característica das fendas,  $w_k$ , obtém-se pela expressão (3.55). O valor da abertura das fendas calculado por esta expressão deve cumprir as disposições regulamentar impostas pelo EC2 representadas no Quadro 3.4.

$$w_k = s_{r \max} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (3.55)$$

Onde:

$s_{r, \max}$  - distância máxima entre fendas

$\varepsilon_{sm}$  - extensão média da armadura para a combinação de acções considerada, incluindo o efeito das deformações impostas e considerando a contribuição do betão traccionado. Considera-se apenas a extensão de tracção que ocorre para além do estado de extensão nula do betão no mesmo nível;

$\varepsilon_{cm}$  - extensão média no betão entre fendas.

#### 3.10 Controlo da fendilhação sem cálculo directo

O controlo da fendilhação sem cálculo directo é um método simplificado proposto pelo EC2, que evita o cálculo da largura das fendas, desde que se garanta pelo menos a armadura mínima referida em 3.8.

No caso de fendilhação causada por deformações impostas, pode utilizar-se o Quadro 3.6 para determinar a armadura mínima a colocar num elemento estrutural, desde que se limite os valores da tensão do aço e os respectivos diâmetros dos varões aos valores apresentados neste. Caso se pretenda limitar a fendilhação causada por acções directas, pode aplicar-se o mesmo quadro, ou em alternativa limitar o espaçamento máximo entre varões considerando o Quadro 3.7.

Deve referir-se que, este método é bastante simplificado e carece de algum fundamento teórico, devendo apenas considerar-se como um ponto de partida ou um pré-dimensionamento da armadura mínima necessária para limitar a fendilhação.

Quadro 3.6: Diâmetros máximos dos varões para o controlo da fendilhação.

Tensão no aço em MPa	Diâmetros máximos dos varões [mm]		
	$w_k=0,4$ mm	$w_k=0,3$ mm	$w_k=0,2$ mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

Quadro 3.7: Espaçamento máximo dos varões para o controlo da fendilhação.

Tensão no aço em MPa	Espaçamento máximo dos varões [mm]		
	$w_k = 0,4$ mm	$w_k = 0,3$ mm	$w_k = 0,2$ mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	-
360	100	50	-

### 3.11 Aplicação prática do controlo da fendilhação

#### 3.11.1 Descrição e análise do comportamento da estrutura

Anteriormente, descreveu-se de forma detalhada como se determina teoricamente a abertura de fendas de uma estrutura de betão segundo o EC2. Como os resultados deste método de cálculo são aproximações dos valores reais, decidiu-se comparar resultados numa situação real. Para isso, analisou-se o comportamento de uma Box Culvert representada na Figura 3.16, sobre a qual foi executado um aterro de quinze metros de altura, utilizada na execução de uma passagem hidráulica na Auto-Estrada Transmontana. O objectivo é avaliar a precisão dos resultados teóricos, quando comparados com os resultados experimentais obtidos com um sistema de monitorização da peça ao longo dos primeiros seis meses de utilização (Cristelo, 2011).



Figura 3.16: Box Culvert idêntica à monitorizada nesta aplicação prática (Cristelo, 2011).

Os problemas relacionados com estruturas deste tipo são um bom exemplo da complexa interacção destas com o solo, havendo a necessidade de criar modelos que se adequem às situações de cargas reais. Para simular correctamente as acções actuantes sobre a

estrutura, foi instrumentada uma secção de um elemento pré-fabricado com um conjunto de sensores, tais como: extensómetros de embeber no betão, células de carga, transdutores de deslocamento, inclinómetros e termómetros conforme a Figura 3.17.

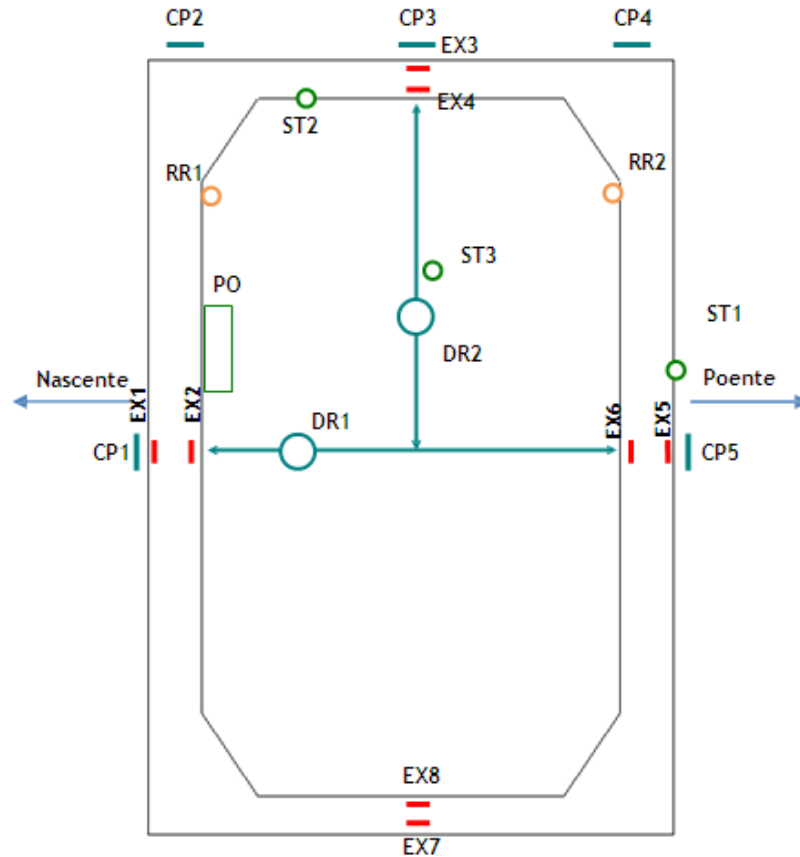


Figura 3.17: Esquema dos instrumentos utilizados no sistema de monitorização (Cristelo, 2011).

Os esforços aplicados à estrutura dependem em grande medida dos impulsos do solo envolvente e da distribuição das pressões aplicadas. É a conjugação de factores como as características geotécnicas do material de aterro, as condições de execução e a relação entre a rigidez da estrutura e a deformabilidade do solo que torna algo complicado o cálculo das tensões actuantes, necessárias a um correcto dimensionamento. Através dos valores médios registados pelos instrumentos do sistema de monitorização, criou-se o modelo de carga da Figura 3.18 que traduz aproximadamente os efeitos das acções sobre a Box Culvert nomeadamente:

- Os impulsos laterais correspondem à média dos dois valores registados pelas células de carga instaladas nos montantes (CP1 e CP5). Admitiu-se uma distribuição rectangular das tensões;
- As cargas na padieira correspondentes aos valores registados pelas células aí instaladas (CP2, CP3 e CP4). O valor máximo da carga na padieira (775 kN), corresponde à média dos valores registados pelas células CP2 (880kPa) e CP4 (720 kPa) não majorados, enquanto que o valor mínimo corresponde à carga medida a meio vão (130 kN).

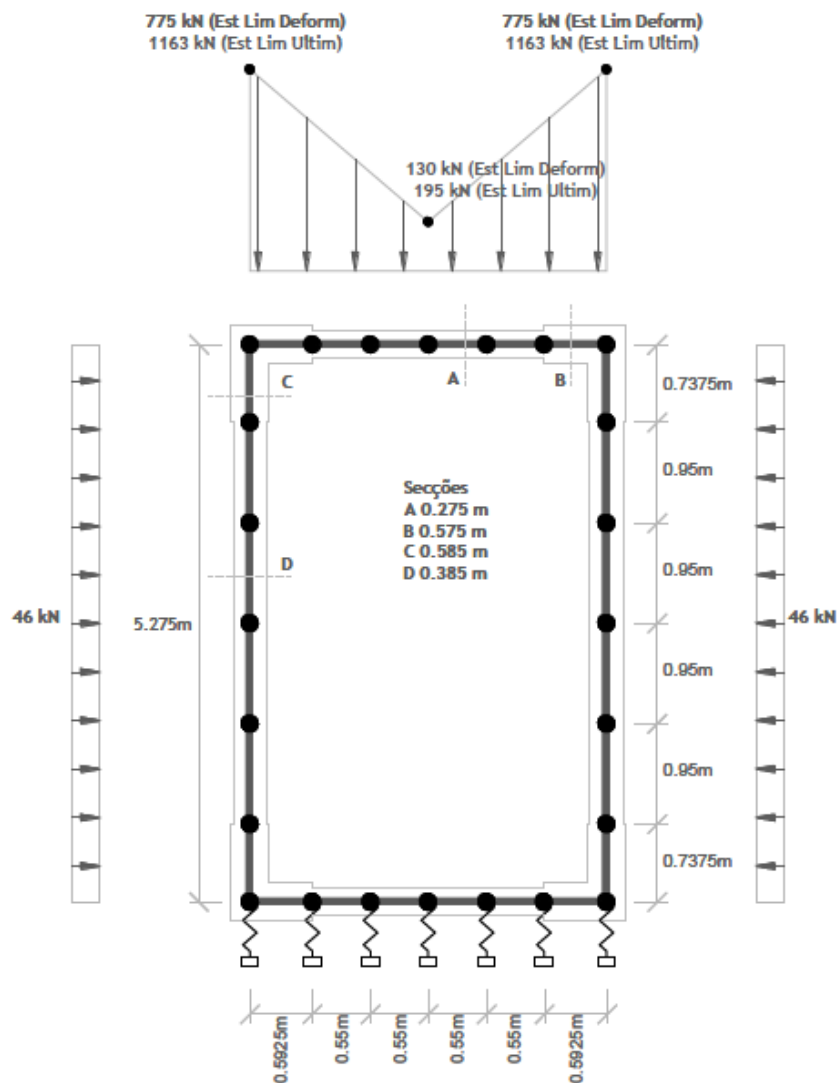


Figura 3.18: Modelo de cálculo da Box Culvert em serviço (Cristelo, 2011).

Com base neste modelo de cálculo, determinaram-se os momentos flectores que actuam ao longo da padieira da peça (ver Figura 3.19). É com estes valores que se determina a largura característica teórica das fendas, que posteriormente será comparada com os dados recolhidos pela inspecção visual da BoxCulvert monitorizada.

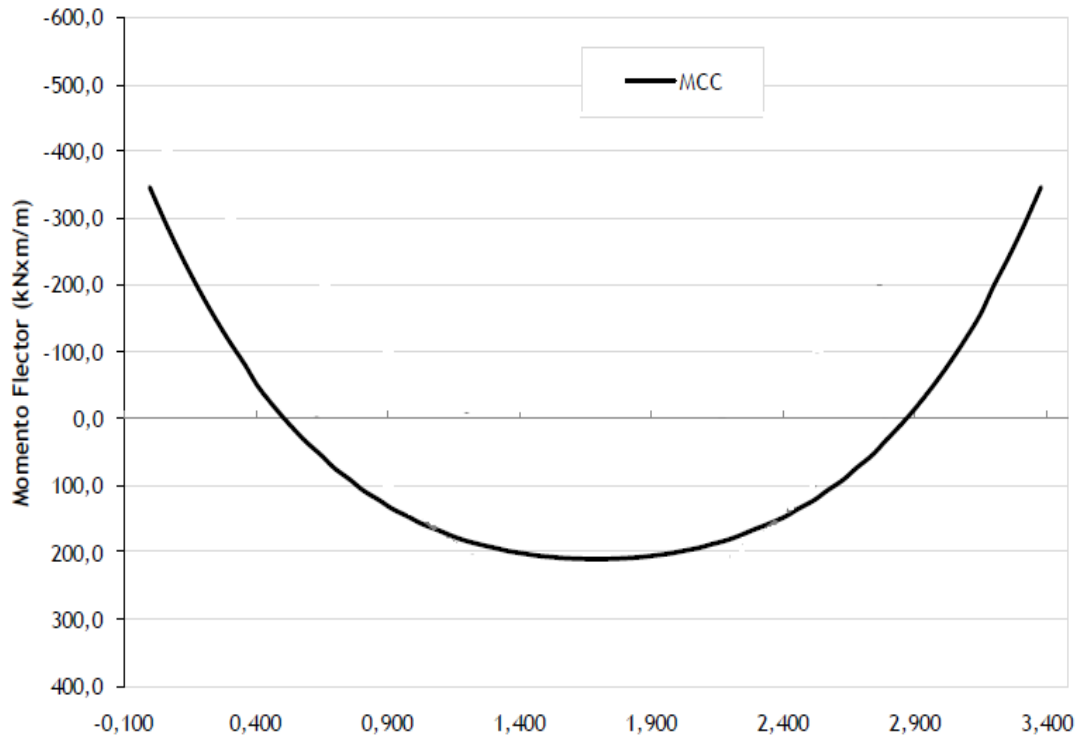


Figura 3.19: Análise dos momentos flectores na padieira (Cristelo, 2011).

### 3.11.2 Descrição geral da estrutura executada

A caracterização da peça pré-fabricada utilizada neste estudo encontra-se representada na Figura 3.20. A secção instrumentada é formada por um só elemento pré-fabricado em betão armado. A laje superior (também designada por padieira) e a laje de fundo possuem 3,77m de largura e 0,275m de espessura. Os montantes têm 5,55m de altura e possuem uma espessura de 0,385m. Longitudinalmente cada peça possui 2,50m de comprimento.

Relativamente aos materiais utilizados na produção da Box Culvert, foi utilizado um betão da classe C40/50 e um aço da classe A500ER, com valores característicos de acordo

com o estipulado no EC2. A distribuição de armadura é simétrica relativamente ao eixo vertical e ao eixo horizontal da estrutura e está indicada na Figura 3.20 (Cristelo, 2011).

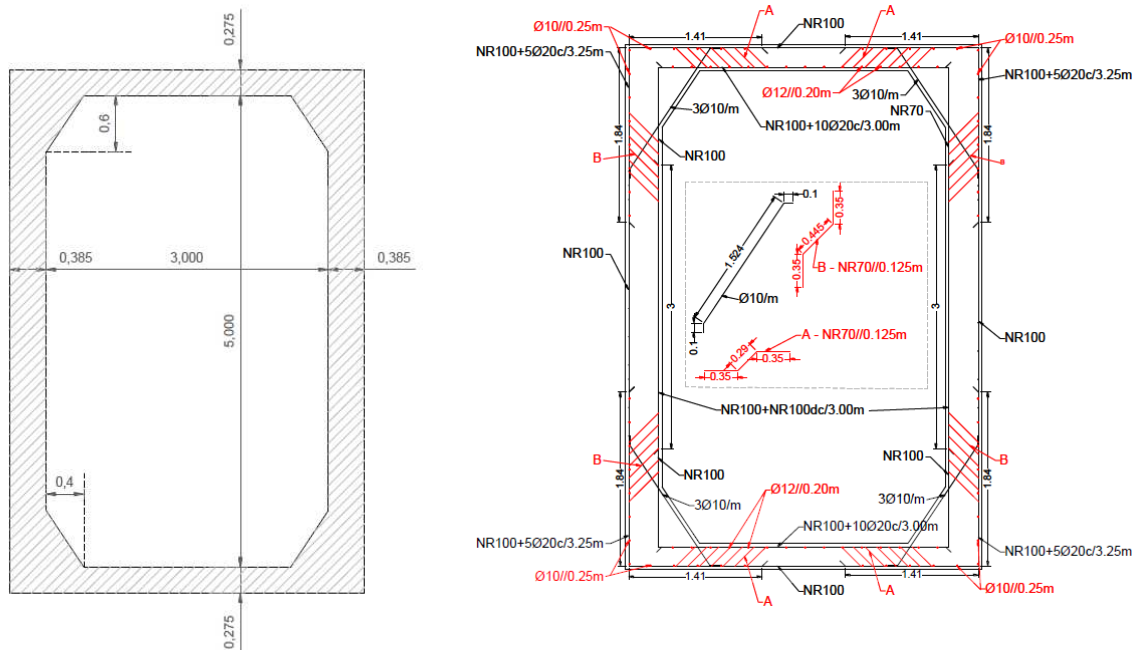


Figura 3.20: Caracterização geométrica da peça e a respectiva armadura.

### 3.11.3 Cálculo da abertura das fendas na padieira da peça segundo o EC2

Através do modelo de cálculo obtido com o sistema de monitorização descrito anteriormente, foi possível determinar os esforços presentes na padieira da Box Culvert. A meio vão, o momento flector assume o valor aproximado de 210 kN.m/m.

Apresenta-se em seguida, segundo o EC2, o cálculo da abertura das fendas ao nível da padieira da peça, tendo em consideração os esforços actuantes, as características geométricas, os materiais utilizados na sua produção e a quantidade de armadura ordinária.

#### i) Cálculo da área efectiva de betão traccionado ( $A_{c,eff}$ )

##### Cálculo da posição do eixo neutro em secção fendilhada (estado II)

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{39,25 \times 10^{-4}}{1 \times 0,225} = 0,0174$$

Para determinar as tensões no aço e no betão, bem como a posição do eixo neutro, é necessário consultar o Quadro 3.5. Com a percentagem de armadura, determinam-se os coeficientes  $C_s = 67,428$  e  $\alpha = 0,441$ .

Com a expressão seguinte pode determinar-se a posição do eixo neutro:

$$\alpha = \frac{x}{d} \Leftrightarrow 0,441 = \frac{x}{0,225} \Leftrightarrow x = 0,099\text{m}$$

#### Cálculo da área da secção efectiva de betão traccionado

A área da secção efectiva de betão traccionado que envolve as armaduras depende do menor valor do  $h_{c,eff}$  das condições seguintes:

$$2,5 \times (h - d) = 2,5 \times (0,275 - 0,099) = 0,125\text{m}$$

$$\frac{h - x}{3} = \frac{0,275 - 0,099}{3} = 0,059\text{m}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{0,275}{2} = 0,138\text{m}$$

Mediante o valor de  $h_{c,eff}$  pode calcular-se a área da secção efectiva traccionada pela expressão seguinte:

$$A_{c,eff} = 1 \times 0,059 = 0,059\text{m}^2$$

#### ii) Cálculo da distância entre fendas

Dados:  $c=0,05$  m;  $k_1=0,8$ (alta aderência);  $k_3=3,4$ ;  $k_4=0,425$ ;

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{12,06 \times 10^{-4}}{0,030} = 0,0402$$

Como existem varões de diâmetros diferentes na secção, deve utilizar-se um diâmetro equivalente:

$$\phi_{eq} = \frac{n_1 \times \phi_1^2 + n_2 \times \phi_2^2}{n_1 \times \phi_1 + n_2 \times \phi_2} = \frac{10 \times 20^2 + 7,85 \times 10^2}{10 \times 20 + 7,85 \times 10} = 17,18 \text{ mm}$$

Neste caso, como a tracção na secção é excêntrica, obriga a utilização de valores intermédios do  $k_2$ , que devem ser calculados pela relação:

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{d - x} = \frac{\varepsilon_2}{d - x - h_{c,eff}}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{0,225 - 0,099} = \frac{\varepsilon_2}{0,225 - 0,099 - 0,059} \Leftrightarrow \varepsilon_1 = 1,872 \times \varepsilon_2$$

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1} \Leftrightarrow k_2 = \frac{(1,872 \times \varepsilon_2 + \varepsilon_2)}{2 \times 1,872 \times \varepsilon_2} \Leftrightarrow k_2 = 0,767$$

Finalmente, a distância entre fendas é determinada pela expressão seguinte:

$$s_{r \max} = k_3 \times c + k_1 \times k_2 \times k_4 \times \frac{\varnothing}{\rho_{p,eff}}$$

$$s_{r \max} = 3,4 \times 0,05 + 0,8 \times 0,767 \times 0,425 \times \frac{17,18 \times 10^{-3}}{0,067} = 0,237 \text{ m}$$

**iii) Cálculo da extensão média relativa entre o aço e o betão.**

Dados:  $k_t=0,4$  (acções de longa duração);  $f_{ctm}=3,5$  MPa;  $E_s=200$  GPa;  $E_c=35$  GPa;

$E_d=210,0$  kN.m

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{35} = 5,714$$

$$\sigma_s = C_s \times \frac{E_d}{b \times d^2} = 67,428 \times \frac{210,0}{1 \times 0,225^2} = 279689 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \times \frac{f_{ctm}}{\rho_{p,eff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{p,eff})}{E_s}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{279689 - 0,4 \times \frac{3500}{0,067} \times (1 + 5,714 \times 0,067)}{200000000} = 0,0012 > 0,6 \times \frac{\sigma_s}{E_s} = 0,0007$$

**iv) Cálculos do valor característico de abertura de fendas**

$$w_k = s_{r \max} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 0,237 \times 0,0012 = 2,97 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,297 \text{ mm}$$

### 3.11.4 Comparação dos resultados

A inspeção visual constitui em geral, uma forma eficaz de avaliar a fendilhação formada nas faces traccionadas de uma estrutura de betão armado. O comportamento da passagem hidráulica sob a acção das solicitações aplicadas foi observado durante os primeiros seis meses de utilização. Na face inferior da padieira dos módulos observados, verificou-se a formação das fendas representadas na Figura 3.21 (Cristelo, 2011).



Figura 3.21: Fendas da face inferior da padieira.

As fendas inspeccionadas apresentam, entre elas, uma distância média de 200 a 250mm e uma abertura máxima de cerca de 0,20mm. A comparação dos resultados da inspeção visual com os valores obtidos pelo método de cálculo descrito no ponto 3.11.3, permite concluir que este é um pouco conservador, visto que os seus resultados são superiores aos reais ( $w_k \text{ teórico} = 0,3\text{mm} > w_k \text{ real} = 0,2\text{mm}$ ). Quando comparada apenas a distância entre fendas, verifica-se que os valores obtidos são idênticos, o que leva a crer que seja a diferença entre a extensão média da armadura com a extensão média do betão que faz aumentar os resultados teóricos, este facto pode dever-se às características dos materiais consideradas serem inferiores às reais. Apesar de conservador, conclui-se que o método de cálculo do EC2 é bastante fiável e deve ser aplicado sempre que existam dúvidas quanto ao desempenho da estrutura em serviço.

### 3.12 Exemplos de cálculo

#### 3.12.1 Exemplo 1 -Tirante

Considere-se a estrutura de betão armado representada na Figura 3.22, realizada com betão da classe C20/25 e aço S500. Determine-se a armadura necessária no tirante, para que se verifique o estado limite ultimo de resistência, sabendo que as cargas permanentes e a sobrecarga têm respectivamente o valor característico de 17 KN/m e 7KN/m. A secção do tirante é quadrada com 0,2m de lado.

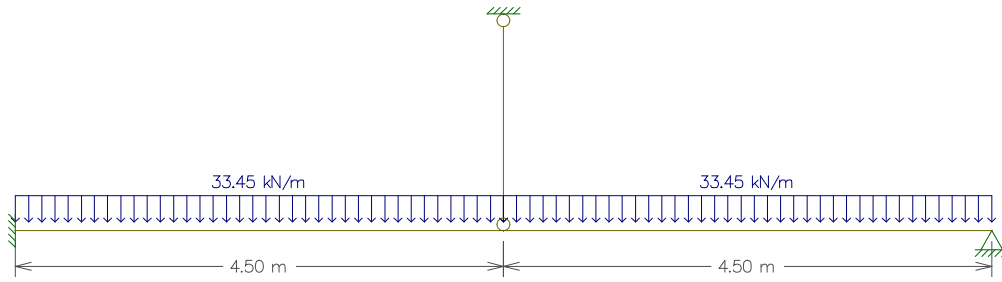


Figura 3.22: Sistema estrutural do exemplo 1.

$$p_{Ed} = 17 \times 1,35 + 7 \times 1,5 = 33,45 \text{ kN/m}$$

O diagrama de esforços axiais do tirante no estado limite último, está representado na Figura 3.23.

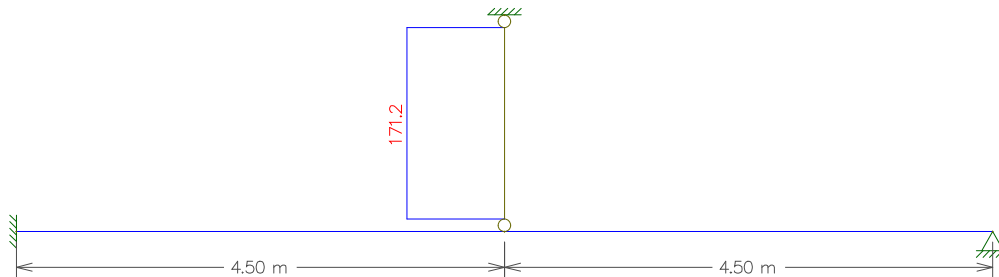


Figura 3.23: Diagrama dos esforços axiais.

$$\sigma = \frac{N}{A} \Leftrightarrow f_{syd} = \frac{N}{A_{\text{tirante}}} \Leftrightarrow A_{\text{tirante}} = \frac{N}{f_{syd}} \Leftrightarrow A_{\text{tirante}} = \frac{171,2}{435000} = 3,94 \text{ cm}^2$$

**Solução:** 8Ø8 (4cm<sup>2</sup>)

Pode efectuar-se o controlo da fendilhação através do cálculo da abertura das fendas para a combinação frequente de acções. A definição do diâmetro das armaduras e os respectivos espaçamentos é essencial para garantir larguras características pequenas, pelo que se optou por utilizar 8Ø8 em relação a soluções com diâmetros superiores e maiores espaçamentos como 4Ø12. Em seguida apresenta-se o cálculo da abertura das fendas segundo o EC2.

i) **Cálculo da área efectiva de betão tracionado ( $A_{c,eff}$ )**

$$(h - d) = \text{recobrimento} + \text{estribo} + \frac{\phi_{\text{principal}}}{2} = 0,025 + 0,006 + \frac{0,008}{2} = 0,035\text{m}$$

A área da secção efectiva de betão traccionado que envolve as armaduras é calculada através do menor valor do  $h_{c,eff}$  imposto pelas seguintes condições:

$$2,5 \times (h - d) = 2,5 \times 0,035 = 0,0875\text{m}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1\text{ m}$$

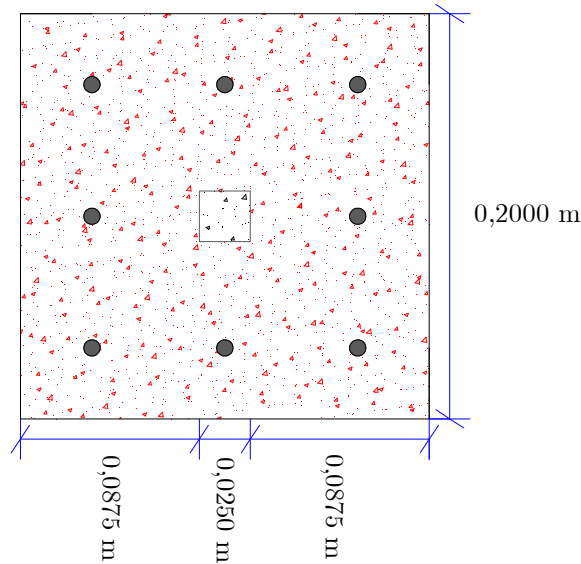


Figura 3.24: Secção do tirante.

Com  $h_{c,eff}$  igual a 0,0875m, é possível determinar a área efectiva de betão traccionado. Como se trata de um tirante, este é um caso particular, visto que a armadura que resiste a este esforço está distribuída simetricamente em relação ao eixo horizontal e vertical, ao contrário do que se passa em lajes e vigas, nas quais esta encontra-se apenas na face superior ou inferior. Ou seja, a área efectiva de betão traccionado envolve a armadura de tracção em toda a secção, conforme se indica a vermelho na Figura 3.24. O valor da área efectiva de betão traccionado é dado pela expressão seguinte:

$$A_{c,eff} = 0,2 \times 0,2 - 0,025 \times 0,025 = 0,0394 \text{ m}^3$$

ii) **Cálculo da distância máxima entre fendas.**

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{4 \times 10^{-4}}{0,0394} = 0,0102$$

Dados:

$C=0,025$  m;  $K_1=0,8$  (alta aderência);  $K_2=1,0$  (tração simples);  $K_3=3,4$ ;  $K_4=0,425$ ;

$\phi = 8\text{mm}$

$$s_{r \max} = k_3 \times c + k_1 \times k_2 \times k_4 \times \frac{\phi}{\rho_{p,eff}}$$

$$s_{r \max} = 3,4 \times 0,025 + 0,8 \times 1,0 \times 0,425 \times \frac{8 \times 10^{-3}}{0,0102} = 0,352\text{m}$$

**iii) Cálculo da extensão média relativa entre o aço e o betão.**

Deve determinar-se novamente o esforço axial no tirante para as combinações frequentes. A acção da sobrecarga é afectada pelo coeficiente  $\Psi_1=0,7$  enquanto que as acções permanentes assumem o seu valor característico. A Figura 3.25 representa o diagrama de esforços axiais do tirante nestas condições.

$$p_{Ed} = 17 + 0,5 \times 7 = 20,5 \text{ KN/m}$$

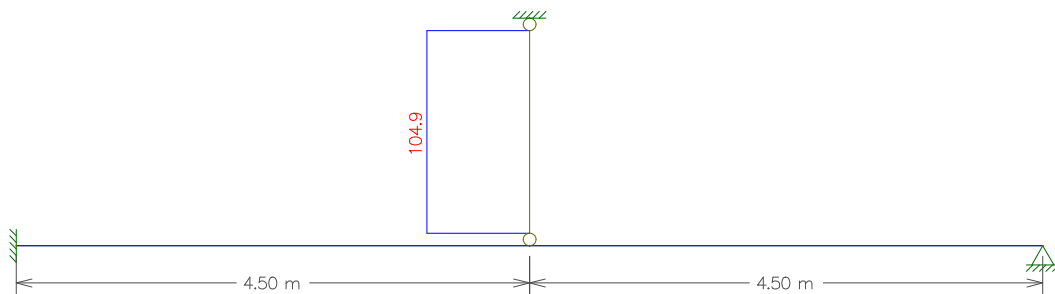


Figura 3.25: Diagrama de Esforços Axiais para a Combinação Frequente de Acções.

Dados:

$N=104,9$  KN;  $f_{ctm}=2,2$  MPa;  $E_s=200$  GPa;  $E_c=30$  GPa;  $k_t=0,4$  (acções de longa duração);

$\rho_{p,eff} = 0,0102$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{30} = 6,6667$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} = \frac{104,9}{4 \times 10^{-4}} = 262,25 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \times \frac{f_{ctm}}{\rho_{p,eff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{p,eff})}{E_s}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{262250 - 0,4 \times \frac{2200}{0,0102} \times (1 + 6,6667 \times 0,0102)}{200000000} = 8,505 \times 10^{-4} > 7,87 \times 10^{-4}$$

iv) **Cálculos do valor característico de abertura de fendas**

$$w_k = s_{r \max} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 0,352 \times (8,505 \times 10^{-4}) = 2,994 \times 10^{-4} \text{m} = 0,3 \text{mm}$$

**3.12.2 Exemplo 2 – Viga simplesmente apoiada**

Considere-se uma viga simplesmente apoiada, realizada com betão da classe C30/37 e aço S500. Efectue-se o controlo da fendilhação da viga, sabendo que a armadura ordinária a considerar é a necessária para que se verifique o estado limite último de resistência à flexão. As cargas permanentes e a sobrecarga têm respectivamente o valor característico de 25 KN/m e 7,5 KN/m. A viga tem 0,25m de base e 0,5m de altura.

A armadura ordinária necessária para que se verifique o estado limite último, deve ser determinada para o valor de cálculo das acções que actuam no sistema estrutural da Figura 3.26. As acções permanentes e as acções variáveis são majoradas utilizando os respectivos coeficientes de segurança.

$$p_{Ed} = 1,35 \times 25 + 1,5 \times 7,5 = 45 \text{ KN/m}$$

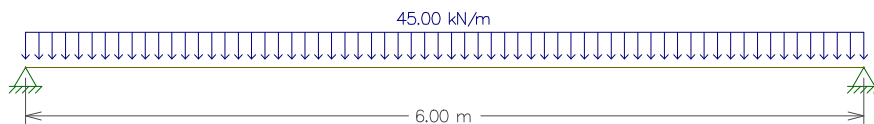


Figura 3.26: Sistema estrutural do exemplo 2.

A Figura 3.27 representa o diagrama de momentos flectores da viga para o estado limite último. Deve considerar-se o momento máximo a meio vão para o cálculo da armadura.

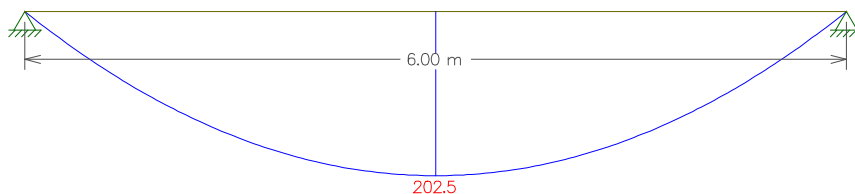


Figura 3.27: Diagrama dos momentos flectores para o estado limite último.

$$\mu = \frac{E_d}{b \times d^2 \times f_{cd}} = \frac{202,5}{0,25 \times 0,46^2 \times 20000} = 0,191 \Leftrightarrow w = 0,228$$

$$w = \frac{A_s}{b \times d} \times \frac{f_{syd}}{f_{cd}} \Leftrightarrow 0,228 = \frac{A_s}{0,25 \times 0,46} \times \frac{435000}{20000} \Leftrightarrow A_s = 12,05 \text{ cm}^2$$

**Solução:** 4Ø16+4Ø12 (12,56 cm<sup>2</sup>)

O controlo da fendilhação pode realizar-se calculando a abertura característica das fendas na viga para a combinação frequente de acções ( $\Psi_1 = 0,5$ ). Caso o valor obtido seja superior aos limites definidos no Quadro 3.4 aconselha-se o aumento da armadura ordinária de forma a diminuir a abertura das fendas.

i) **Cálculo da área efectiva de betão traccionado ( $A_{c,eff}$ )**

**Cálculo da posição do eixo neutro em secção fendilhada (estado II)**

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{12,56 \times 10^{-4}}{0,25 \times 0,46} = 0,0109$$

O Quadro 3.5 permite determinar os coeficientes  $C_C$  e  $C_S$  necessários para calcular as tensões no aço e no betão em secção fendilhada, bem como o valor de  $\alpha$  necessário para determinar a posição do eixo neutro. Estes coeficientes dependem da percentagem de armadura ordinária da viga.

$$\alpha = 0,3705; \quad C_C = 6,16; \quad C_S = 104,7$$

Com  $\alpha = \frac{x}{d}$  obtém-se a posição do eixo neutro:

$$\alpha = \frac{x}{d} \Leftrightarrow 0,3705 = \frac{x}{0,46} \Leftrightarrow x = 0,170 \text{ m}$$

**Cálculo da área da secção efectiva de betão traccionado**

A área da secção efectiva de betão traccionado que envolve as armaduras é calculada através do menor valor do  $h_{c,eff}$  imposto pelas condições seguintes:

$$2,5 \times (h - d) = 2,5 \times (0,5 - 0,46) = 0,1 \text{ m}$$

$$\frac{h - x}{3} = \frac{0,5 - 0,170}{3} = 0,11 \text{ m}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ m}$$

A área efectivamente de betão traccionado é obtida admitindo que  $h_{c,eff}$  é igual a 0,1 m.

Este valor é multiplicado pela largura da peça na zona traccionada:

---

$$A_{c,eff} = 0,25 \times 0,1 = 0,025 \text{ m}^2$$

ii) **Cálculo da distância máxima entre fendas.**

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{12,56 \times 10^{-4}}{0,0250} = 0,0502$$

Dados:  $c=0,04 \text{ m}$ ;  $k_1=0,8$  (alta aderência);  $k_3=3,4$ ;  $k_4=0,425$

Como existem varões de diâmetros diferentes na secção, deve utilizar-se um diâmetro equivalente:

$$\phi_{eq} = \frac{n_1 \times \phi_1^2 + n_2 \times \phi_2^2}{n_1 \times \phi_1 + n_2 \times \phi_2} = \frac{4 \times 16^2 + 4 \times 12^2}{4 \times 16 + 4 \times 12} = 14,29 \text{ mm}$$

Neste caso a tracção é excêntrica, o que obriga a utilização de valores intermédios do  $k_2$ , que devem ser calculados pela relação:

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{d - x} = \frac{\varepsilon_2}{d - x - h_{c,eff}}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{0,46 - 0,170} = \frac{\varepsilon_2}{0,46 - 0,170 - 0,1} \Leftrightarrow \varepsilon_1 = 1,53 \times \varepsilon_2$$

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1} \Leftrightarrow k_2 = \frac{(1,53 \times \varepsilon_2 + \varepsilon_2)}{2 \times 1,53 \times \varepsilon_2} \Leftrightarrow k_2 = 0,827$$

$$s_{r \max} = k_3 \times c + k_1 \times k_2 \times k_4 \times \frac{\phi}{\rho_{p,eff}}$$

$$s_{r \max} = 3,4 \times 0,04 + 0,8 \times 0,827 \times 0,425 \times \frac{14,29 \times 10^{-3}}{0,0502} = 0,216 \text{ m}$$

iii) **Cálculo da extensão média relativa entre o aço e o betão para a combinação frequente de acções.**

$$p_{Ed} = 25 + 0,5 \times 7,5 = 28,75 \text{ KN/m}$$

Na Figura 3.28 está representado o diagrama dos momentos flectores para a combinação de acções frequentes. O valor do momento flector a considerar no cálculo da abertura de fendas é 129,4 kN.m.

---

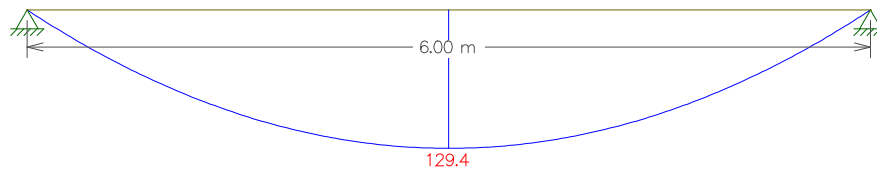


Figura 3.28: Diagrama de momentos flectores para a combinação frequente de acções.

Dados:  $k_t=0,4$  (acções de longa duração);  $f_{ctm}=2,9$  MPa;  $E_s=200$  GPa;  $E_c=33$  GPa

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{33} = 6,06$$

$$\sigma_s = C_s \times \frac{E_d}{b \times d^2} = 104,7 \times \frac{129,4}{0,25 \times 0,46^2} = 256,109 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \times \frac{f_{ctm}}{\rho_{p,eff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{p,eff})}{E_s}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{256109 - 0,4 \times \frac{2900}{0,0502} \times (1 + 6,06 \times 0,0502)}{200000000} = 0,0011 > 0,6 \times \frac{\sigma_s}{E_s} = 0,000768$$

iv) **Cálculos do valor característico de abertura de fendas**

$$w_k = s_{r \max} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 0,216 \times 0,0011 = 2,28 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,228 \text{ mm}$$

**3.12.3 Exemplo 3 – Viga contínua com dois tramos**

Considere-se a viga contínua com dois tramos representada na Figura 3.29, realizada com betão da classe C25/30 e aço S500.

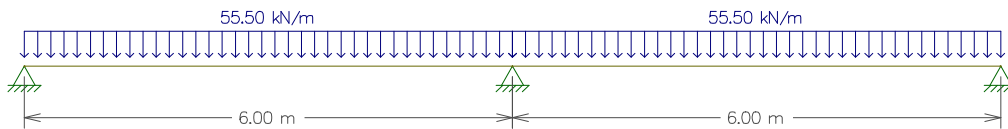


Figura 3.29: Sistema estrutural do exemplo 3.

Considerando que a armadura ordinária da viga é a necessária para que se verifique o estado limite último de resistência à flexão, efectue-se o controlo da fendilhação na secção do apoio central, sabendo que as cargas permanentes e a sobrecarga têm respectivamente o valor característico de 30 KN/m e 10 KN/m. A viga tem 0,3 m de base e 0,6m de altura.

Na Figura 3.30 está representado o diagrama dos momentos flectores para o estado limite último. Deve determinar-se a armadura superior e inferior nas secções críticas junto ao apoio central e a meio vão. As acções são majoradas conforme o respectivo coeficiente de segurança.

$$p_{Ed} = 1,35 \times 30 + 1,5 \times 10 = 55,5 \text{ KN/m}$$

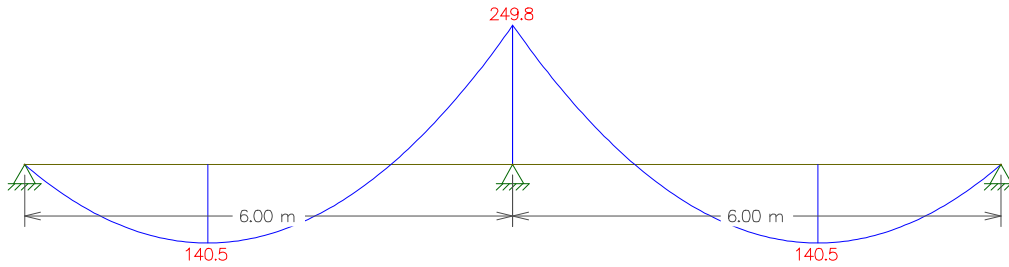


Figura 3.30: Diagrama dos momentos flectores no estado limite último.

A armadura no apoio central é calculada para  $E_d$  igual a -249,8 kN.m, enquanto que a meio vão o  $E_d$  a considerar é 140,5 kN.m.

$$\mu = \frac{E_d}{b \times d^2 \times f_{cd}} = \frac{249,8}{0,3 \times 0,56^2 \times 16700} = 0,159 \Leftrightarrow w = 0,184$$

$$w = \frac{A_s}{b \times d} \times \frac{f_{syd}}{f_{cd}} \Leftrightarrow 0,184 = \frac{A_s}{0,30 \times 0,56} \times \frac{435000}{16700} \Leftrightarrow A_s = 11,87 \text{ cm}^2$$

**Solução:** 6Ø16 (12,06 cm<sup>2</sup>)

$$\mu = \frac{E_d}{b \times d^2 \times f_{cd}} = \frac{140,5}{0,3 \times 0,56^2 \times 16700} = 0,089 \Leftrightarrow w = 0,097$$

$$w = \frac{A_s}{b \times d} \times \frac{f_{syd}}{f_{cd}} \Leftrightarrow 0,097 = \frac{A_s}{0,30 \times 0,56} \times \frac{435000}{13300} \Leftrightarrow A_s = 6,26 \text{ cm}^2$$

**Solução:** 6Ø12 (6,78 cm<sup>2</sup>)

O controlo da fendilhação na secção do apoio central, será realizada determinando a abertura característica das fendas na viga para a combinação frequente de acções com  $\Psi_1 = 0,5$ .

i) **Cálculo da área efectiva de betão traccionado ( $A_{c,eff}$ )**

**Cálculo da posição do eixo neutro em secção fendilhada (estado II)**

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{12,06 \times 10^{-4}}{0,3 \times 0,56} = 0,0072$$

Para determinar as tensões no aço e no betão, bem como a posição do eixo neutro, é necessário consultar o Quadro 3.5. Com a percentagem de armadura, determinam-se os coeficientes  $C_c$ ,  $C_s$  e  $\alpha$ .

$$\alpha=0,314; C_c=7,11; C_s=155,1$$

A posição do eixo neutro é dada pela expressão seguinte:

$$\alpha = \frac{x}{d} \Leftrightarrow 0,314 = \frac{x}{0,56} \Leftrightarrow x = 0,176 \text{ m}$$

**Cálculo da área da secção efectiva de betão traccionado**

A área da secção efectiva de betão traccionado que envolve as armaduras é calculada através do menor valor do  $h_{c,eff}$  das condições seguintes:

$$2,5 \times (h - d) = 2,5 \times (0,6 - 0,56) = 0,1 \text{ m}$$

$$\frac{h - x}{3} = \frac{0,6 - 0,176}{3} = 0,141 \text{ m}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{0,6}{2} = 0,30 \text{ m}$$

A área efectiva de betão traccionado é obtida multiplicando a largura da viga na zona traccionada por  $h_{c,eff}$  conforme a expressão seguinte:

$$A_{c,eff} = 0,30 \times 0,1 = 0,030 \text{ m}^2$$

ii) **Cálculo da distância máxima entre fendas**

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{12,06 \times 10^{-4}}{0,030} = 0,0402$$

Dados:  $c=0,04 \text{ m}$ ;  $k_1=0,8$ (alta aderência);  $k_3=3,4$ ;  $k_4=0,425$ ;  $\emptyset=16\text{mm}$

Neste caso a tracção é excêntrica, o que obriga a utilização de valores intermédios do  $k_2$ , que devem ser calculados pela relação:

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{d-x} = \frac{\varepsilon_2}{d-x-h_{c,ef}}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{0,56-0,176} = \frac{\varepsilon_2}{0,56-0,176-0,1} \Leftrightarrow \varepsilon_1 = 1,352 \times \varepsilon_2$$

$$k_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2 \times \varepsilon_1} \Leftrightarrow k_2 = \frac{(1,356 \times \varepsilon_2 + \varepsilon_2)}{2 \times 1,356 \times \varepsilon_2} \Leftrightarrow k_2 = 0,87$$

$$s_{r \max} = k_3 \times c + k_1 \times k_2 \times k_4 \times \frac{\phi}{\rho_{p,eff}}$$

$$s_{r \max} = 3,4 \times 0,04 + 0,8 \times 0,87 \times 0,425 \times \frac{16 \times 10^{-3}}{0,0402} = 0,254 \text{ m}$$

iii) **Cálculo da extensão média relativa entre o aço e o betão para a combinação frequente de acções.**

$$p_{Ed} = 30 + 0,5 \times 10 = 35,00 \text{ kN/m}$$

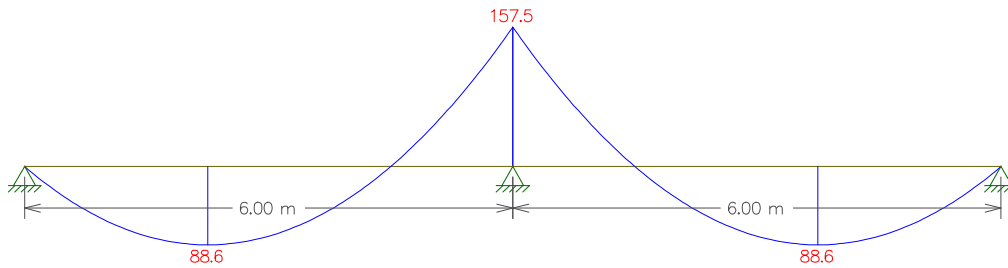


Figura 3.31: Diagrama dos momentos flectores para a combinação frequente de acções.

Dados:  $k_t=0,4$  (acções de longa duração);  $f_{ctm}=2,6$  MPa;  $E_s=200$  GPa;  $E_c=31$  GPa;  
 $E_d=157,5$  kN.m

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{31} = 6,45$$

$$\sigma_s = C_s \times \frac{E_d}{b \times d^2} = 155,1 \times \frac{157,5}{0,30 \times 0,56^2} = 259,254 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \times \frac{f_{ctm}}{\rho_{p,eff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{p,eff})}{E_s}$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{259254 - 0,4 \times \frac{2600}{0,0402} \times (1 + 6,45 \times 0,0402)}{200000000} = 0,00113 > 0,6 \times \frac{\sigma_s}{E_s} = 0,00078$$

iv) **Cálculos do valor característico de abertura de fendas**

$$w_k = s_{r \max} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 0,254 \times 0,00113 = 2,87 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,287 \text{ mm}$$

### 3.12.4 Exemplo 4

Considere-se um muro de suporte com 6,0m de altura e 0,2 m de espessura, realizado com betão da classe C25/30 e aço S500. Pretende-se que o controlo da fendilhação se realize, determinando a quantidade mínima de armaduras aderentes a colocar nas zonas em que se prevejam tracções.

1. Devido ao efeito da retracção e temperatura, a sapata betonada anteriormente constitui um impedimento à livre contracção da parede, causando esforços de tracção simples na direcção horizontal, assim o valor de  $k_C$  é 1,0.
2.  $k$  é o coeficiente que considera o efeito das tensões não uniformes auto-equilibradas. Como a espessura da parede é menor que 300mm, o valor de  $k$  é 1,0.
3. O valor da resistência do betão à tracção à data em que se formam as primeiras fissuras ( $f_{ct,eff}$ ), iguala-se a  $f_{ctm}$  se existir a probabilidade de estas se formarem antes dos 28 dias. Neste caso o valor de  $f_{ctm}$  é 2,6 MPa.
4. O valor máximo admissível da tensão na armadura após a formação da primeira fissura pode considerar-se igual a  $f_{yk}$ .

$$A_{c,eff} = 1,0 \times 0,20 = 0,20 \text{ m}^2$$

A área mínima de armaduras aderentes pode ser calculada pela expressão (3.36):

$$A_{s,min} = k_C \times k \times f_{ct,eff} \times \frac{A_{ct}}{\sigma_s} = 1,0 \times 1,0 \times 2600 \times \frac{0,20}{500000} = 10,4 \text{ cm}^2$$

Solução: Coloca-se em cada face Ø8//0,1m

Ao considerar a tensão na armadura igual a  $f_{yk}$ , determinou-se apenas a armadura necessária para a verificação do critério da não plasticidade. Para garantir o controlo da fendilhação deve diminuir-se as tensões ao nível da armadura. Para determinar a armadura horizontal, podem admitir-se simplifadamente os valores dos diâmetros e das tensões na armadura referidos no Quadro 3.6, que sem cálculo directo permitem limitar a

abertura de fendas. Nestas condições, para  $w_k=0,3\text{mm}$  e  $\bar{O}=10\text{mm}$ , a armadura a colocar no muro de suporte seria:

$$A_{s,\min} = k_c \times k \times f_{ct,\text{eff}} \times \frac{A_{ct}}{\sigma_s} = 1,0 \times 1,0 \times 2600 \times \frac{0,20}{320000} = 16,25 \text{ cm}^2$$

Naturalmente, a armadura obtida é superior à anterior, devido ao facto das tensões serem inferiores às consideradas no critério da não plastificação da armadura. Nestas condições, a solução a adoptar em cada face seria  $\bar{O}12//0,125\text{m}$ .

## Capítulo 4 – Limitação de tensões



## 4. Limitação de tensões

### 4.1 Introdução

A limitação de tensões consiste num conjunto de condições definidas pelo EC2, para limitar a tensão quer no betão, quer nas armaduras, de forma a evitar anomalias estruturais como fendas longitudinais, micro-fendilhação, níveis de fluência elevados ou deformações inaceitáveis.

No cálculo de estruturas de betão armado, normalmente o projectista verifica se a estrutura resiste ao estado limite último e estabelece um conjunto de regras construtivas com o fim de controlar a fendilhação. Apesar da verificação dos estados limites últimos garantir a resistência da peça às acções a que está sujeita, podem formar-se fendas devidas a tensões elevadas nesta. Estes fenómenos podem ser evitados limitando as tensões no betão conforme se descreve no ponto 4.2.

No betão pré-esforçado, a limitação das tensões é essencial pois permite limitar na peça as tensões capazes de provocar a rotura, quer na fase de construção, quer em serviço. As armaduras de pré-esforço são bastante sensíveis à corrosão, pelo que a limitação das tensões a valores inferiores a  $f_{ctm}$  pode evitar fenómenos patológicos causadores de anomalias estruturais.

### 4.2 Limitação das tensões de compressão no betão

#### 4.2.1 Redução do risco de formação de fendas longitudinais

Quando o nível de tensões, para a combinação característica de acções, exceder o valor crítico definido pela expressão (4.1), podem formar-se fendas longitudinais que reduzem a durabilidade do betão. Nas zonas expostas a ambientes correspondentes às classes de exposição XD, XF e XS, o EC2 limita a tensão do betão a:

$$\sigma_c \leq k_1 \times f_{ck} \quad (4.1)$$

Nesta condição, o valor de  $k_1$  é igual a 0,6 conforme o definido no anexo nacional do EC2.

Para além da limitação das tensões, podem utilizar-se simultaneamente medidas construtivas capazes de reduzir a probabilidade de ocorrência deste fenómeno, tais como:

- Aumento do recobrimento da armadura de compressão;
- Cintagem por meio de armadura transversal.

#### 4.2.2 Controlo da fluência excessiva

Para a combinação quase permanente de acções, a tensão no betão deve cumprir a desigualdade seguinte, para que se possa considerar que a fluência da peça de betão é linear.

$$\sigma_c \leq k_2 \times f_{ck} \quad (4.2)$$

Esta desigualdade pode condicionar a verificação da segurança em estruturas pré-esforçadas ou em elementos de betão armado com elevada relação vão/altura útil. O valor de  $k_2$  recomendado pelo anexo nacional do EC2 é 0,45.

#### 4.3 Limitação das tensões de tracção na armadura

A limitação das tensões nas armaduras pretende evitar a deformação não elástica do aço, assim como reduzir o risco da ocorrência de deformações inaceitáveis. Caso a deformação do aço seja superior à deformação de cedência, o aço plastifica, as fendas do betão são largas e permanentemente abertas.

Pode considerar-se que o nível de fendilhação ou deformação inaceitável é evitado, se sob a combinação característica de acções, a tensão na armadura for inferior a:

$$\sigma_s \leq k_3 \times f_{yk} \quad (4.3)$$

Nestas condições, o valor recomendado de  $k_3$  previsto pelo anexo nacional do EC2 é 0,8. Caso a tensão na armadura seja devida a deformações impostas, a tensão de tracção deve cumprir a desigualdade (4.4), aconselhando-se o valor de  $k_4$  igual a 1.

$$\sigma_s \leq k_4 \times f_{yk} \quad (4.4)$$

Nas estruturas pré-esforçadas a tensão na armadura nunca deve exceder os limites definidos pela desigualdade (4.5). O valor de  $k_5$  recomendado pelo anexo nacional é 0,75.

$$\sigma_p \leq k_5 \times f_{yk} \quad (4.5)$$

No Quadro 4.1 apresentam-se resumidamente as condições previstas pelo EC2, para limitar as tensões nas estruturas de betão.

Quadro 4.1: Quadro resumo da limitação das tensões.

	Condição	Notas
Betão	$\sigma_c \leq 0,6 \times f_{ck}$	Evitar fendas longitudinais
	$\sigma_c \leq 0,45 \times f_{ck}$	Garantir que a fluência é linear
Armadura	$\sigma_s \leq 0,8 \times f_{yk}$	Controlar a fendilhação e a ocorrência de deformações inaceitáveis
	$\sigma_s \leq f_{yk}$	Sempre que se preveja que se instale na peça uma tensão de tracção devida a uma deformação imposta
	$\sigma_p \leq 0,75 \times f_{yk}$	Tensão nas armaduras de pré-esforço

#### 4.4 Estado limite de formação de fendas

A formação de fendas em estruturas pré-esforçadas pode ser controlada, limitando as tensões na fibra mais traccionada a valores inferiores à resistência característica inferior do betão à tracção ( $f_{ctk0,05}$ ).

$$\sigma_c \leq f_{ctk0,05} \quad (4.6)$$

O estado limite de formação de fendas pode ser uma ferramenta útil para garantir a estanquidade em estruturas com elevados requisitos. Em certos casos, de menor exigência, pode admitir-se que a tensão de tracção no betão não deve ultrapassar  $f_{ctm}$ .

#### 4.5 Estado limite de descompressão

Na ausência de requisitos especiais, o estado limite de descompressão é utilizado em elementos pré-esforçados para controlar a fendilhação. Para a combinação de acções frequentes, deve garantir-se que a tensão de tracção na peça é nula, de forma a evitar patologias decorrentes da sensibilidade das armaduras à corrosão.

$$\sigma_c \leq 0 \quad (4.7)$$

*Nota: Segundo o EC2, o limite de descompressão requer que todas as partes do cabo ou da bainha estejam colocados pelo menos 25mm no interior do betão em compressão.*

#### 4.6 Exemplos de cálculo

##### 4.6.1 Exemplo 1

Considere-se uma viga simplesmente apoiada, realizada com aço S500 e betão da classe C20/25. Considerando que a viga tem 0,25m de base por 0,5m de altura e utilizando as regras descritas neste capítulo, efectue-se a limitação de tensões no aço e no betão. A viga tem 6m de vão livre, está sujeita a uma acção permanente de 25 kN/m e tem uma sobrecarga de 7,5 kN/m. A armadura de flexão é comporta por 3Ø20+2Ø16.

Admitindo que a viga corre o risco de formação de fendas longitudinais apresenta-se em seguida o controlo da tensão no betão. Para a combinação característica de acções o diagrama de esforços está representado na Figura 4.1.

$$p_{Ed} = 25 + 7,5 = 32,5kN/m$$

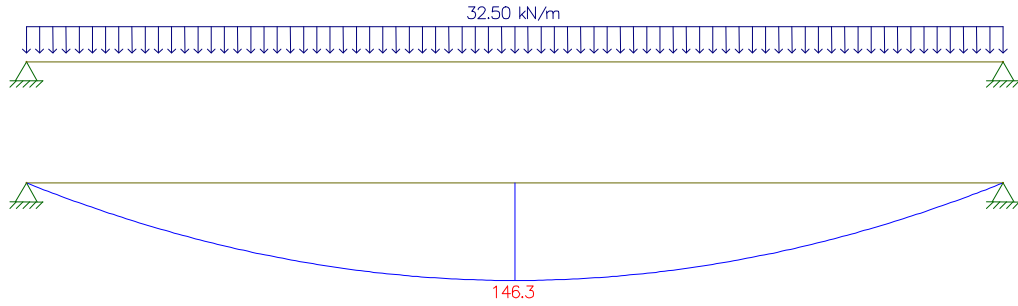


Figura 4.1: Diagrama de momentos flectores do exemplo 1.

Como a peça está fendilhada, deve calcular-se a tensão no aço e no betão para estado II.

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{13,44 \times 10^{-4}}{0,25 \times 0,46} = 0,0117$$

Segundo o Quadro 3.5 obtêm-se os coeficientes  $C_c$  e  $C_s$  para o calculo das tensões em secção fendilhada, bem como o valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = 0,3805$$

$$C_c = 6,015$$

$$C_s = 97,1$$

Aplicando as expressões (3.21) e (3.25) determinam-se as tensões no aço e no betão:

$$\sigma_c = C_c \times \frac{M}{b \times d^2} = 6,015 \times \frac{146,3}{0,25 \times 0,46^2} = 16635,06 \text{ kPa}$$

$$\sigma_s = C_s \times \frac{M}{b \times d^2} = 97,1 \times \frac{146,3}{0,25 \times 0,46^2} = 268539,32 \text{ kPa}$$

Para limitar o risco da formação de fendas longitudinais deve verificar-se a condição seguinte:

$$\sigma_c \leq 0,6 \times f_{ck} \Leftrightarrow 16,6 \leq 0,6 \times 20 \Leftrightarrow 16,6 \leq 12 \text{ MPa}$$

Nota: Não se verificaria a condição, deveria alterar-se a secção, a percentagem de armadura ou a classe de betão.

Caso se previsse a formação de fendas devido a deformações impostas, deveria limitar-se as tensões na armadura pela desigualdade seguinte:

$$\sigma_s \leq 0,8 \times f_{yk} \Leftrightarrow 268,5 \leq 0,8 \times 500 \Leftrightarrow 268,5 \leq 400 \text{ MPa}$$

#### 4.6.2 Exemplo 2

Considere-se uma viga simplesmente apoiada, com um vão livre de 20m. Na fase de aplicação do pré-esforço a viga está sujeita apenas ao seu peso próprio e ao da laje que suporta. Mais tarde são aplicadas as restantes cargas permanentes e por fim, em serviço é aplicada a sobrecarga. Os momentos característicos causados pelo peso próprio, restantes cargas permanentes e sobrecarga, são respectivamente 300kN.m, 450kN.m e 400kN.m. A secção tem 0,5m de base por 1,2m de altura, o betão tem a classe C25/30.

- a) Determine-se o valor da força e o número de cordões de pré-esforço, de forma a garantir a verificação do estado limite de descompressão para a combinação de acções frequentes, admitindo  $\sigma_{p\infty} = 1050 \text{ MPa}$ .

O estado limite de descompressão é imposto admitindo que a secção não está fendilhada, assim:

$$-\frac{P_{\infty}}{A_c} - \frac{P_{\infty} \times e}{I_c} \times v_i + \frac{M}{I_c} \times v_i = 0$$

O estado limite de descompressão é calculado utilizando a combinação frequente de acções, admitindo  $\Psi_1=0,7$ :

$$M_{Ed} = 300 + 450 + 0,7 \times 400 = 1030 \text{ kN.m}$$

Como:

$$A_c = 0,5 \times 1,2 = 0,6 \text{ m}^2$$

$$I_c = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{0,25 \times 1,2^3}{12} = 0,036 \text{ m}^4$$

Admitindo que a armadura de pré-esforço se encontra a 0,1m da face inferior:

$$e = 0,6 - 0,1 = 0,5 \text{ m}$$

A força de pré-esforço a aplicar na secção será:

$$-\frac{P_{\infty}}{0,6} - \frac{P_{\infty} \times 0,5}{0,036} \times 0,6 + \frac{1030}{0,036} \times 0,6 = 0 \Leftrightarrow P_{\infty} = 1716,7 \text{ kN}$$

A área da armadura de pré-esforço obtém-se através da seguinte expressão:

$$\sigma_{p\infty} = \frac{P_{\infty}}{A_p} \Leftrightarrow 1050000 = \frac{1716,7}{A_p} \Leftrightarrow A_p = 16,35 \text{ cm}^2$$

Como a área de um cordão de pré-esforço de diâmetro Ø6'' é 1,5 cm<sup>2</sup>, o nº de cordões pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\text{n}^{\circ} \text{ de cordões} = \frac{16,35}{1,5} = 10,9 \text{ cordões}$$

Nestas condições, têm de ser colocados na secção 11 cordões de pré-esforço, que juntos aplicam a esta uma força de 1732,5 kN.

- b) Determine-se o estado de tensão na secção a meio vão para cada uma das combinações de acções, exigindo verificação da limitação das tensões descritas neste capítulo.

**i) Combinação quase permanente de acções, admitindo  $\Psi_2=0,6$ :**

$$M_{Ed} = 300 + 450 + 0,6 \times 400 = 990 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_i = -\frac{1732,5}{0,6} - \frac{1732,5 \times 0,5}{0,036} \times 0,6 + \frac{990}{0,036} \times 0,6 = -825 \text{ kPa}$$

$$\sigma_s = -\frac{1732,5}{0,6} + \frac{1732,5 \times 0,5}{0,036} \times 0,6 - \frac{990}{0,036} \times 0,6 = -4950 \text{ kPa}$$

Para se efectuar o controlo da fluência excessiva, é necessário que se verifique a seguinte desigualdade:

$$|-4950 \text{ kPa}| \leq 0,45 \times 25000 = 11250 \text{ kPa.}$$

**ii) Combinação característica de acções.**

$$M_{Ed} = 300 + 450 + 400 = 1150 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_i = -\frac{1732,5}{0,6} - \frac{1732,5 \times 0,5}{0,036} \times 0,6 + \frac{1150}{0,036} \times 0,6 = 1841,7 \text{ kPa}$$

$$\sigma_s = -\frac{1732,5}{0,6} + \frac{1732,5 \times 0,5}{0,036} \times 0,6 - \frac{1150}{0,036} \times 0,6 = -7616,7 \text{ kPa}$$

Para diminuir o risco de formação de fendas longitudinais, é necessário que se verifique a seguinte desigualdade:

$$|-7616,7 \text{ kPa}| \leq 0,60 \times 25000 = 15000 \text{ kPa, desde que } \sigma_{\text{tracção}} \leq f_{ctm}.$$



## Capítulo 5 - Estado limite de deformação



## 5. Estado limite de deformação

### 5.1 Introdução

Uma das causas de avarias ou anomalias nas estruturas de betão é a sua deformação excessiva. Este problema está geralmente associado ao comportamento dos elementos à flexão, que podem sofrer alterações consideráveis motivadas pelo comportamento elástico ou elástico-plástico dos materiais, agravado pela ocorrência de fenómenos como a fluência e a retracção.

A utilização de materiais de elevada resistência, como o aço e o betão, permite em termos de resistências últimas, vencer grandes vãos e diminuir as secções, consequentemente estes factores aumentam a deformabilidade que, para além de diminuir a durabilidade do betão, causa efeitos indirectos em elementos secundários com baixa capacidade de deformação elástica como panos de parede, revestimentos ou elementos de fachada (EN 1992-1-1, 2010).

Em casos correntes, para a verificação do estado limite de deformação é usual utilizarem-se regras empíricas relativas às dimensões mínimas das peças. Em casos especiais, como vãos de dimensões apreciáveis ou elementos fortemente carregados, os valores obtidos por estas regras são desajustados da realidade, devendo proceder-se à verificação do estado limite de deformação descrito no EC2.

A deformação excessiva dos elementos de betão armado está naturalmente associada aos valores das cargas aplicadas, embora em casos correntes de edifícios este fenómeno pode dever-se aos efeitos da fluência a longo prazo. O vão livre e as condições de apoio são outros factores de risco, como se retira da expressão da flecha elástica de uma consola, dada por:

$$a_c = \frac{p \times l^4}{8 \times E \times I} \quad (5.1)$$

O aumento do vão é elevado à quarta potência na equação, ou seja, pequenas variações do vão da consola têm efeitos consideráveis ao nível da deformação.

O EC2 impõe o limite  $vão/250$  à flecha máxima de elementos estruturais, sujeitos a acções quase permanentes. Após a fase de construção ocorre uma parte significativa das deformações, assim o EC2 exige que a flecha nestas condições não deva exceder, para a combinação quase permanente de acções, o  $vão/500$ . Para determinar esta flecha é necessário calcular a diferença entre a flecha a tempo infinito e a flecha instantânea, conforme a expressão (5.2) (EN 1992-1-1, 2010).

$$a_t - a_0 \leq \frac{\text{vão}}{500} \quad (5.2)$$

Poderá prever-se uma contra flecha para compensar total ou parcialmente estas deformações, mas, em geral, esta não deverá ultrapassar o limite  $vão/250$ . Na Figura 5.1 está representada a flecha a tempo infinito, a diferença entre esta e a flecha instantânea, e a contra flecha prevista pelo EC2 para as compensar.

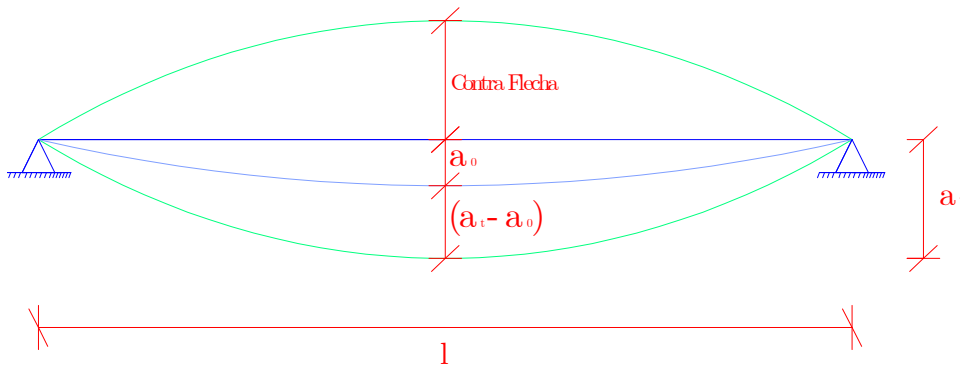


Figura 5.1: Flechas consideradas pelo EC2.

Em que:

$a_t$  – flecha a tempo infinito. Também se pode considerar que esta é a flecha no estado final relativamente à linha recta que une os apoios;

$a_0$  – flecha instantânea devida às acções permanentes imediatamente após a sua aplicação.

No Quadro 5.1 apresentam resumidamente os valores limites das flechas e contra-flechas previstos pelo EC2 e as respectivas acções a considerar na sua determinação.

Quadro 5.1: Resumo dos valores limites da flecha considerados pelo EC2.

Verificação	Flecha a calcular	Acções sobre o elemento estrutural	Valor limite da flecha
Em geral	Contra-flecha	(estado não carregado)	Contra-flecha $\leq 1/250$
	$a_t$	Combinação quase permanente de acções	$a_t \leq 1/250$
Flechas susceptíveis de danificar elementos adjacentes	$a_0$	Acções permanentes	-----
	$(a_t - a_0)$	-----	$(a_t - a_0) \leq 1/500$

Resumidamente, o projectista deve controlar as deformações para satisfazer as condições de serviço da estrutura, deve evitar anomalias nos elementos não estruturais e usar contra-flechas quando aconselhável para diminuir a probabilidade de ocorrência de deformações excessivas.

## 5.2 Controlo da deformação sem cálculo directo

### 5.2.1 Limite de relação entre o vão/altura

Como se referiu na introdução deste capítulo, nem sempre será necessário o cálculo das flechas, visto que nos casos correntes o controlo das deformações pode ser garantido pela relação entre o vão do elemento estrutural e a altura da secção, conforme as expressões (5.3) e (5.4). A limitação de relação entre o vão e a altura pode ser uma ferramenta importante no pré-dimensionamento das secções, sendo contudo necessárias verificações

mais rigorosas para os elementos que não respeitem os limites deste método. O valor limite da relação vão/altura pode ser obtido pelas seguintes expressões:

$$\frac{l}{d} = K \times \left[ 11 + 1,5 \times \sqrt{f_{ck}} \times \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2 \times \sqrt{f_{ck}} \times \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right], \text{ se } \rho > \rho_0 \quad (5.3)$$

$$\frac{l}{d} = K \times \left[ 11 + 1,5 \times \sqrt{f_{ck}} \times \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12} \times \sqrt{f_{ck}} \times \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right], \text{ se } \rho \leq \rho_0 \quad (5.4)$$

Em que:

K-coeficiente que tem em conta os diferentes sistemas estruturais (ver Quadro 5.2);

$\rho_0$  - taxa de armadura de referência, dada por  $\rho_0 = \sqrt{f_{ck}} \cdot 10^{-3}$ ;

$\rho$  - taxa de armadura de tracção necessária a meio vão para equilibrar o momento devido às acções de cálculo (no apoio, no caso de uma consola);

$\rho'$  - taxa de armadura de compressão necessária a meio vão para equilibrar o momento devido às acções de cálculo (no apoio, no caso de uma consola);

$f_{ck}$  - valor da tensão característica de compressão do betão, expressa em MPa.

Quadro 5.2: Coeficiente k que tem em conta o tipo de elemento estrutural.

Sistema estrutural	K
Consola	0.4
Viga simplesmente apoiada Laje simplesmente apoiada armada numa ou em duas direcções	1.0
Laje sem vigas apoiada sobre pilares (laje fungiforme), sendo $l$ o vão maior	1.2
Vão extremo de uma viga contínua ou de uma laje contínua armada numa só direcção ou de uma laje armada em duas direcções contínua ao longo do lado maior	1.3
Vão interior de uma viga ou de uma laje armada numa ou em duas direcções	1.5

O valor limite da relação vão/altura exigido pelo EC2 obtém-se relacionando coeficientes multiplicativos que têm em conta o tipo de sistema estrutural, o tipo de armaduras e a classe de betão. As expressões (5.3) e (5.4) foram obtidas admitindo que a tensão no aço numa secção fendilhada a meio vão, de uma laje ou viga, ou junto ao apoio de uma

consola, é igual a 310MPa, que corresponde à utilização de um aço S500 (Felix, 2009). Caso se utilize outro tipo de aço, ou para aços sujeitos a outras tensões, os valores obtidos deverão ser multiplicados por um factor correctivo,  $k_{\sigma}$ . Assim como, em secções em T, vãos de vigas ou lajes superiores a 7m (excluindo as lajes fungiformes) e lajes fungiformes com o vão maior superior a 8,5m, os valores obtidos pela relação  $l/d$  devem ser corrigidos pelos respectivos factores  $k_T$ ,  $k_l$  e  $k_f$ . O valor corrigido da relação  $l/d$  obtém-se através da seguinte expressão:

$$\left(\frac{l}{d}\right)_{\text{corrigido}} = \frac{l}{d} \times k_{\sigma} \times k_T \times k_l \times k_f \quad (5.5)$$

Onde:

$k_{\sigma}$ ;  $k_T$ ;  $k_l$  e  $k_f$  - factores correctivos da relação  $l/d$ .

O Quadro 5.3 apresenta os valores da relação  $l/d$  calculados a partir das expressões (5.3) e (5.4), para diferentes sistemas estruturais e diferentes classes de betão. Considera-se que para elementos de betão ligeiramente esforçado como lajes, a taxa de armadura é  $\rho=0.5\%$ , e para elementos de betão altamente esforçado como vigas  $\rho=1.5\%$ . Para outras percentagens de armaduras, e a menos de cálculos mais precisos, será suficiente proceder à interpolação dos valores do Quadro 5.3.

Quadro 5.3: Valores básicos da relação  $l/d$  com  $f_{yk}$  de 500MPa.

K	$f_{ck}$ [MPa]								$f_{ck}$ [MPa]							
	16	20	25	30	35	40	45	50	16	20	25	30	35	40	45	50
	$\rho=0.5\%$ (lajes)								$\rho=1.5\%$ (vigas)							
0.4	6	7	7	8	9	10	12	13	5	5	5	6	6	6	6	6
1	16	17	19	21	23	26	29	32	13	13	14	14	15	15	16	16
1.2	19	20	22	25	28	31	35	38	15	16	16	17	17	18	19	19
1.3	21	22	24	27	30	33	37	42	16	17	18	18	19	20	20	21
1.5	24	26	28	31	34	39	43	48	19	20	20	21	22	23	23	24

### 5.2.2 Factores Correctivos da relação Vão/altura útil

Como foi referido anteriormente, as expressões (5.3) e (5.4) foram obtidas mediante certos pressupostos que não se verificam em todas as situações, sendo por isso necessária a aplicação dos factores correctivos descrita em seguida, de forma a adequar os valores da relação  $l/d$  a cada caso.

#### **Factor correctivo devido à tensão no aço**

Caso a armadura utilizada no elemento estrutural, possua um  $f_{yk}$  inferior a 500 MPa, o factor correctivo a aplicar será:

$$k_{\sigma} = \left( \frac{500}{f_{yk}} \right) \times \left( \frac{A_{s,prov}}{A_{s,req}} \right) \quad (5.6)$$

Sendo:

$A_{s,req}$  - área da secção de armaduras necessária na secção no estado limite último;

$A_{s,prov}$  - área da secção de armaduras existente na secção.

Pode aplicar-se simplificadaamente a expressão (5.7), que admite  $A_{s,req} \approx A_{s,prov}$  para determinar este factor correctivo:

$$k_{\sigma} = \left( \frac{500}{f_{yk}} \right) \quad (5.7)$$

#### **Factor correctivo para secções em T**

No caso da secção do elemento estrutural ter a forma em T, o factor correctivo depende da relação entre a largura do banzo e a largura da alma. A expressão (5.8) permite determinar o factor correctivo da relação  $l/d$  nestas condições.

$$\begin{cases} k_T = 0,8, \text{ para } \frac{b}{b_w} > 3 \\ k_T = 1, \text{ para } \frac{b}{b_w} \leq 3 \end{cases} \quad (5.8)$$

**Factores correctivos de vãos superiores a 7,0m**

No caso de vigas ou lajes, com excepção de lajes fungiformes, com um vão efectivo superior a 7m, que suportam divisórias, ou materiais que possam ser danificados por flechas excessivas, os valores da relação  $l/d$  devem ser multiplicados pelo factor correctivo seguinte:

$$k_l = \frac{7}{l_{\text{eff}}} \quad (5.9)$$

Onde:

$l_{\text{eff}}$  – vão livre efectivo superior a 7,0m.

**Factores correctivos de lajes fungiformes com vãos superiores a 8,5m**

Em lajes fungiformes, em condições idênticas às do factor correctivo anterior, com o vão maior superior a 8,5m, deve multiplicar-se os valores da relação  $l/d$  pelo factor correctivo dado pela expressão (5.10).

$$k_f = \frac{8,5}{l_{\text{eff}}} \quad (5.10)$$

Onde:

$l_{\text{eff}}$  – vão maior superior a 8,5m.

Quadro 5.4: Quadro resumo dos coeficientes correctivos da relação  $l/d$  (Felix, 2009).

Tipo de secção transversal	$k_T$	$f_{yk}$ [MPa]	$k_\sigma$	Vão $l_{\text{eff}}$ [m]	$k_l$	Lajes Fungiformes com vão $l_{\text{eff}}$ [m]	$k_f$
Vigas rectangulares ou em T com $b/bw < 3$	1	400	1,25	$l_{\text{eff}} \leq 7,0\text{m}$	1	$l_{\text{eff}} \leq 8,5\text{m}$	1
Vigas em T com $b/bw > 3$	0,8	500	1	$l_{\text{eff}} > 7,0\text{m}$	$7,0/l_{\text{eff}}$	$l_{\text{eff}} > 8,5\text{m}$	$8,5/l_{\text{eff}}$

### 5.3 Cálculo das flechas pelo método dos coeficientes globais

O método dos coeficientes globais é um processo de cálculo simplificado, que de forma simples e rápida permite estimar a flecha provável de um elemento horizontal de betão armado (Figueiras, 1997). Este método admite inicialmente uma flecha base elástica  $a_c$ , ou seja, num dado elemento de betão no estado I (não fendilhado), estima-se elasticamente a rigidez  $E_c \times I_c$  (considera-se simplificadamente que o betão é um material homogéneo e isotrópico e tem um comportamento linear elástico).

#### 5.3.1 Cálculo da Flecha elástica

Para sistemas estruturais solicitados como se indica no Quadro 5.5, a flecha base elástica  $a_c$ , pode ser obtida através das expressões (5.11) no caso de cargas concentradas, ou (5.12) no caso de cargas distribuídas.

$$a_c = u \times \frac{P \times l^3}{E_c \times I_c} \quad (5.11)$$

$$a_c = u \times \frac{q \times l^4}{E_c \times I_c} \quad (5.12)$$

Onde:

$u$  – coeficiente de correcção que relaciona o sistema estrutural com o seu carregamento;





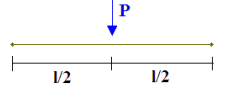
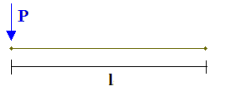
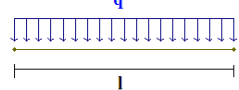
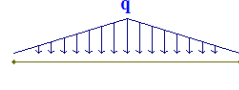
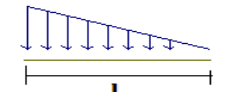

$P$  – carga concentrada;

$q$  – carga uniformemente distribuída ou triangular;

$E_c$  – Módulo de elasticidade do betão;

$I_c$  – Momento de Inércia do elemento estrutural.

Quadro 5.5: Coeficiente  $\eta$  utilizado no cálculo da flecha elástica.

Solicitação	Sistema Estrutural			
				
	-----	1/48	3/322	1/192
	1/3	-----	-----	-----
	1/8	5/384	1/184.6	1/384
	11/192	1/120	1/274	1/3840
	11/120	3/460	1/328.1	1/764
	1/30	3/460	1/419.3	1/764

Para o cálculo da flecha elástica em vãos intermédios de vigas contínuas submetidas a um carregamento uniforme, deve utilizar-se a expressão (5.13).

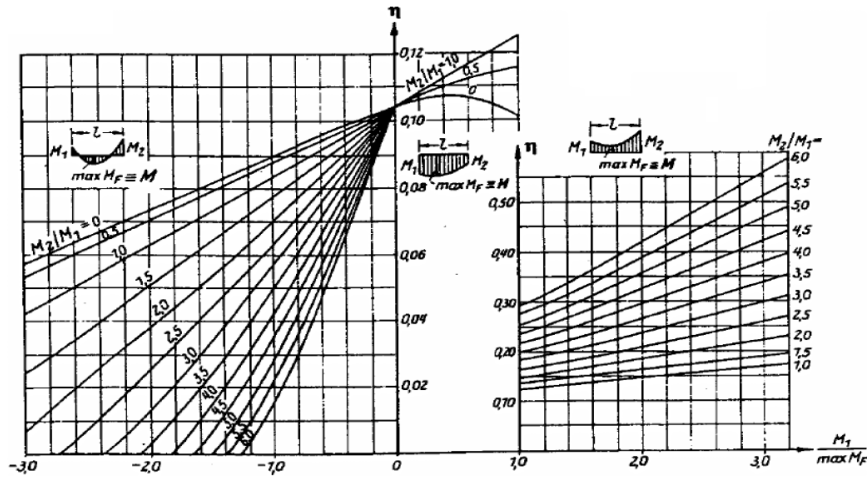
$$a_c = \eta \times \frac{M \times l^2}{E_c \times I_c} \quad (5.13)$$

Onde:

$M$  – momento máximo a actuar no elemento de betão armado;

$\eta$  – coeficiente de correcção da flecha elástica em vãos intermédios de vigas contínuas.

O ábaco da Figura 5.2 permite determinar o valor do coeficiente de correcção  $\eta$  da expressão (5.13).


 Figura 5.2: Valores intermédios do coeficiente  $\eta$ .

### 5.3.2 Cálculo da flecha a tempo infinito

O cálculo da flecha elástica seria suficiente se o betão armado fosse um material homogéneo, com um comportamento idêntico ao das estruturas metálicas que não sofrem alterações significativas ao longo do tempo. Ao contrário, as estruturas de betão armado sujeitas a cargas permanentes apresentam um comportamento distinto. Fenómenos como a retracção plástica, variações da temperatura, entre outros, causam fissuras que diminuem a capacidade de resposta em serviço das estruturas de betão, sendo este facto agravado pela fluência. É por isso que para estimar a flecha provável ao longo do tempo, é necessário corrigir o valor da flecha elástica com coeficientes globais que tenham em conta estes fenómenos. Estes coeficientes globais de correcção são obtidos através de um método mais elaborado (Método Bi-linear), admitindo certas simplificações (Figueiras, 1997). Assim, para cargas de longa duração, a flecha total  $a_t$  é dada pela expressão seguinte:

$$a_t = a_c \times k_t \times n \quad (5.14)$$

Em que:

$a_c$  – flecha elástica;

$k_t$  – coeficiente global de correcção para as flechas sob cargas de longa duração, depende da armadura traccionada ( $\rho$  e  $\alpha.\rho$ ), do coeficiente de fluência e do nível de solicitação dado pela relação seguinte:

$$\frac{M_{rD}}{M_D} = \frac{w_c \times f_{ct}}{M_D} \quad (5.15)$$

Onde:

$M_{rD}$  – momento mínimo que causa a fendilhação;

$M_D$  – momento flector da combinação de acções em estudo;

$w_c$  – módulo de flexão da secção de betão (simplicadamente despreza-se a armadura);

$f_{ct}$  – pode admitir-se em geral  $f_{ctm}$ .

$n$  – coeficiente de correcção tendo em conta a influência da armadura de compressão.

*Nota: Mediante os valores da relação  $d/h$  e do coeficiente de fluência considerado, obtém-se o valor de  $k_t$ . Para determinar este coeficiente correctivo devem utilizar-se os ábacos da Figura A.4 até à Figura A.12 (Walther, et al., 1990) do anexo da presente dissertação. O coeficiente  $n$  é dado pelo ábaco da Figura A.13 (Walther, et al., 1990).*

### 5.3.3 Cálculo da flecha instantânea

A flecha instantânea  $a_0$  é calculada para  $t=0$ , ou seja, no instante em que é retirado o escoramento da laje/viga, que sob a acção de cargas instantâneas como o peso próprio se deforma. Esta flecha não tem em conta os efeitos da retracção e da fluência e é determinada considerando apenas as acções permanentes que actuam no sistema estrutural nesse instante. A expressão (5.16) permite determinar o valor de  $a_0$  multiplicando a flecha elástica  $a_c$  pelo coeficiente correctivo  $k_0$ .

$$a_0 = a_c \times k_0 \quad (5.16)$$

Em que:

$a_e$  – flecha elástica;

$k_o$  – coeficiente global de correcção para as flechas instantâneas, que depende da armadura traccionada ( $\rho$  e  $\alpha.\rho$ ) e do nível de solicitação dado pela relação  $\frac{M_{rD}}{M_D}$ . A influência da armadura de compressão é pequena e considera-se  $\frac{\rho'}{\rho} = 0,25$  (constante).

*Nota: Os coeficientes de correcção  $k_o$  são dados pelos ábacos em anexo. Estes valores estão representados na Figura A.1, na Figura A.2 e na Figura A.3 (Walther, et al., 1990).*

#### 5.4 Cálculo das flechas pelo método do EC2 simplificado

O método de cálculo do EC2 prevê um comportamento intermédio para os elementos parcialmente fendilhados (normalmente elementos em flexão) e considera que na maioria dos casos é aceitável efectuar apenas dois cálculos, admitindo no primeiro que todo o elemento se encontra no estado I, e no segundo que todo o elemento se encontra no estado II (EN 1992-1-1, 2010). Como os elementos normalmente estão parcialmente fendilhados efectua-se uma interpolação através da expressão (5.17).

$$a = \zeta \times a_{II} + (1 - \zeta) \times a_I \quad (5.17)$$

Em que:

$a$  – flecha total do elemento de betão;

$a_I$  – flecha no estado I;

$a_{II}$  – flecha no estado II;

$\zeta$  - coeficiente de distribuição (que tem em conta a contribuição do betão traccionado entre fendas), obtido pela expressão:

$$\zeta = 1 - \beta \times \left(\frac{M_{rD}}{M_D}\right)^2 \quad (5.18)$$

Em que:

$\beta$  – Coeficiente que tem em conta o tipo de carregamento:

- $\beta = 1,0$  para um carregamento único de curta duração;
- $\beta = 0,5$  para um carregamento de longa duração ou para repetidos carregamentos.

$M_{rD}$  – momento mínimo que causa a fendilhação;

$M_D$  – momento flector da combinação de acções em estudo.

Neste método aproximado consideram-se apenas certas secções determinantes para o cálculo da flecha, que normalmente correspondem às secções de momentos máximos. Nos casos em que existam duas ou mais secções determinantes, deve considerar-se a média das flechas calculadas para cada uma destas.

O cálculo da flecha instantânea e da flecha a tempo infinito com este método é bastante simplificado e considera apenas as secções determinantes e as respectivas inércias no estado I e II. O valor das cargas apenas interfere com o cálculo da flecha elástica, o que pode dar flechas inferiores às obtidas com métodos mais precisos como é o caso do método dos coeficientes globais.

Caso o elemento de estrutural de betão esteja sujeito a um carregamento de longa duração, deve calcular-se a flecha a tempo infinito considerando o efeito da fluência. A deformação total poderá ser calculada utilizando o módulo de elasticidade efectivo dado pela expressão (5.19).

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} \quad (5.19)$$

Em que:

$E_{cm}$  – módulo de elasticidade médio do betão

$\varphi$  – coeficiente de fluência a tempo infinito

#### 5.4.1 Flecha instantânea

Tal como no método dos coeficientes globais, a flecha instantânea obtém-se corrigindo o valor da flecha elástica. Pode considerar-se que a flecha instantânea  $a_0$  é determinada no instante em que é removida a cofragem ( $t=0$ ) e as acções a actuar no sistema estrutural são apenas as permanentes. A flecha instantânea  $a_0$  é dada pela expressão (5.20).

$$a_0 = \zeta \times a_{II0} + (1 - \zeta) \times a_{I0} \quad (5.20)$$

*Em que:*

$\zeta$  - coeficiente de distribuição (que tem em conta a contribuição do betão traccionado entre fendas);

$a_{II0}$  - flecha instantânea determinada considerando as características da secção determinante no estado fendilhado, dada pela seguinte expressão:

$$a_{II0} = \frac{a_c}{\left(\frac{I_{II}}{I_c}\right)} \quad (5.21)$$

Onde:

$a_c$  - flecha elástica;

$I_{II}$  - momento de inércia em relação ao eixo neutro, na secção determinante no estado II, considerando a presença das armaduras de tracção e compressão e desprezando o betão fendilhado (abaixo do eixo neutro);

$I_c$  - momento de inércia com base nas características geométricas da secção.

$a_{I0}$  - flecha instantânea determinada considerando as características da secção determinante no estado não fendilhado, dada pela seguinte expressão:

$$a_{I0} = \frac{a_c}{\left(\frac{I_I}{I_c}\right)} \quad (5.22)$$

Onde:

$a_c$  – flecha elástica;

$I_I$  – momento de inércia em relação ao eixo neutro, na secção determinante no estado I, considerando a presença das armaduras de tracção e compressão;

$I_c$  – momento de inércia com base nas características geométricas da secção.

*Nota: Não se considera o efeito da fluência no cálculo da flecha instantânea.*

#### 5.4.2 Flecha a tempo infinito

A flecha a tempo infinito obtém-se corrigindo o valor da flecha elástica, considerando os efeitos da retracção e da fluência. A expressão proposta pelo EC2 é a seguinte:

$$a_t = \zeta \times a_{IIt} + (1 - \zeta) \times a_{It} \quad (5.23)$$

*Em que:*

$\zeta$  - coeficiente de distribuição (que tem em conta a contribuição do betão traccionado entre fendas);

$a_{IIt}$  – flecha a tempo infinito determinada considerando as características da secção determinante no estado fendilhado, considerando os efeitos da fluência, ou seja:

$$a_{IIt} = \frac{(1 + \varphi) \times a_c}{\left(\frac{I_{II}}{I_c}\right)} \quad (5.24)$$

Onde:

$a_c$  – flecha elástica;

$\varphi$ - coeficiente de fluência;

$I_{II}$  – momento de inércia em relação ao eixo neutro, na secção determinante no estado II, considerando a presença das armaduras

de tracção e compressão e desprezando o betão fendilhado (abaixo do eixo neutro);

$I_c$  – momento de inércia com base nas características geométricas da secção.

$a_{t0}$  – flecha instantânea determinada considerando as características da secção determinante no estado não fendilhado, dada pela seguinte expressão:

$$a_{lt} = \frac{(1 + \varphi) \times a_c}{\left(\frac{I_I}{I_c}\right)} \quad (5.25)$$

Onde:

$a_c$  – flecha elástica;

$\varphi$  – coeficiente de fluência;

$I_I$  – momento de inércia em relação ao eixo neutro, na secção determinante no estado I, considerando a presença das armaduras de tracção e compressão;

$I_c$  – momento de inércia com base nas características geométricas da secção.

### 5.4.3 Momentos de inércia em secção fendilhada e não fendilhada

#### *Secção não fendilhada*

Para estimar os valores das flechas a tempo infinito e instantânea, o método de cálculo do EC2 simplificado relaciona os valores da flecha elástica com a relação entre o momento de inércia no estado I e II e o momento de inércia da secção transversal da viga. A Figura 5.3 representa uma viga rectangular no seu estado não fendilhado, na qual está representada a nomenclatura utilizada para deduzir as expressões seguintes.

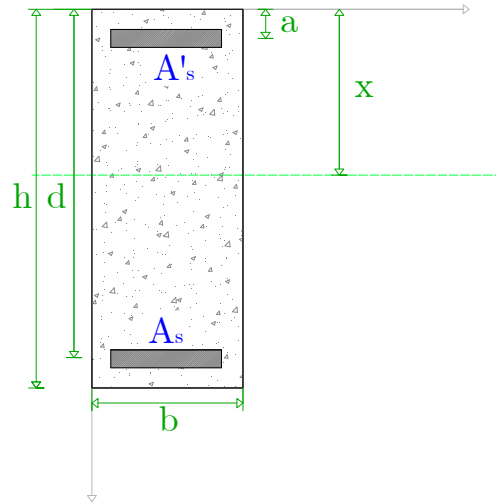


Figura 5.3: Secção de uma viga no estado não fendilhado.

Pode obter-se a posição do eixo neutro de uma secção rectangular de betão, relacionando o momento estático da secção homogeneizada e a respectiva área (Lúcio, 2006):

$$x = \frac{b \times h \times \frac{h}{2} + \alpha_e \times A_s \times d + \alpha_e \times A'_s \times a}{b \times h + \alpha_e \times A_s + \alpha_e \times A'_s} \quad (5.26)$$

Com  $\rho = A_s / (b \times d)$  e  $\rho' = A'_s / (b \times d)$ :

$$x = \frac{\frac{h^2}{2} + \alpha_e \times \rho \times d^2 + \alpha_e \times \rho' \times d \times a}{h + d \times \alpha_e \times (\rho + \rho')} \quad (5.27)$$

Com  $\beta = A'_s / A_s = \rho' / \rho$  a expressão obtida para  $\alpha = \frac{x}{d}$  é:

$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{0,5 \times \left(\frac{h}{d}\right)^2 + \alpha_e \times \rho \times \left(1 + \beta \times \frac{a}{d}\right)}{\frac{h}{d} + \alpha_e \times (1 + \beta)} \quad (5.28)$$

O Momento de Inércia numa secção rectangular não fendilhada em relação ao eixo neutro pode ser calculado através da expressão (5.29).

$$I_t = \frac{b \times h^3}{12} + b \times h \times \left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_e \times A_s \times (d - x)^2 + \alpha_e \times A'_s \times (x - a)^2 \quad (5.29)$$

Com  $\rho = A_s / (b \times d)$  e  $\beta = A'_s / A_s = \rho' / \rho$ :

$$I_t = I_c \times \left\{ 1 + 3 \times \left(\frac{2 \times x}{h} - 1\right)^2 + 12 \times \alpha_e \times \rho \times \left(\frac{d}{h}\right)^3 \times \left[ \left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 + \beta \times \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2 \right] \right\} \quad (5.30)$$

### Secção fendilhada

Normalmente, os elementos de betão armado em fase de utilização têm a sua secção fendilhada, ou seja considera-se que o betão traccionado não contribui para o desempenho funcional da peça e a posição do eixo neutro tende a alterar-se se comparada com a posição inicial no estado não fendilhado. Na Figura 5.4 estão representados estes efeitos na secção transversal de uma viga rectangular.

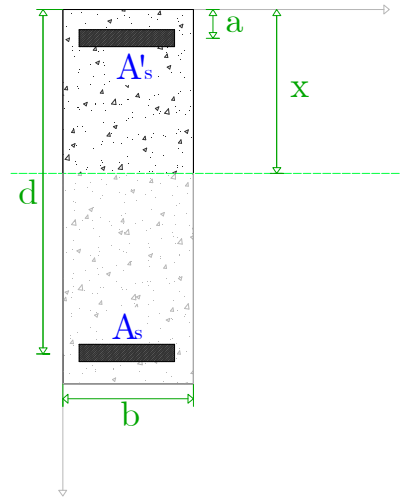


Figura 5.4: Secção de uma viga em estado fendilhado.

Pode considerar-se que nestas condições, o betão em zona traccionada não contribui para o equilíbrio da peça. Assim para determinar a posição do eixo neutro considera-se apenas a área da secção comprimida, ou seja:

$$x = \frac{b \times x \times \frac{x}{2} + \alpha_e \times A_s \times d + \alpha_e \times A_s' \times a}{b \times x + \alpha_e \times (A_s + A_s')} \quad (5.31)$$

Com  $\beta = A_s'/A_s = \rho'/\rho$ ;  $\rho = \frac{A_s}{b \times d}$  e  $\rho' = \frac{A_s'}{b \times d}$  a expressão obtida para  $\alpha = \frac{x}{d}$  é:

$$\alpha = \frac{x}{d} = \alpha_e \times \rho \left[ \left( (1 + \beta)^2 + \frac{2}{\alpha_e \times \rho} \times \left( 1 + \beta \times \frac{a}{d} \right) \right)^{1/2} - (1 + \beta) \right] \quad (5.32)$$

O Momento de Inércia em secção fendilhada em relação ao eixo neutro pode ser calculado através da expressão seguinte:

$$I_1 = \frac{b \times x^3}{12} + b \times x \times \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \alpha_e \times A_s \times (d - x)^2 + \alpha_e \times A_s' \times (x - a)^2 \quad (5.33)$$

Com  $\rho = A_s/(b \times d)$  e  $\beta = A'_s/A_s = \rho'/\rho$ :

$$I_{II} = I_c \times \left\{ 4 \times \left(\frac{x}{h}\right)^3 + 12 \times \alpha_e \times \rho \times \left(\frac{d}{h}\right)^3 \times \left[ \left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 - \beta \times \left(\frac{x}{d} - \frac{a}{d}\right)^2 \right] \right\} \quad (5.34)$$

Os quadros 5.5 a 5.7 foram obtidos relacionando as expressões (5.28), (5.30), (5.32) e (5.34).

Quadro 5.6: Valores da relação  $I_I/I_c$  e  $I_{II}/I_c$  para  $d/h=1,00$ .

d/h=1,00										
$\beta$	0,00		0,25		0,50		0,75		1,00	
$\alpha \cdot \rho$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$
0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
0,02	1,06	0,18	1,07	0,19	1,09	0,19	1,10	0,19	1,12	0,19
0,05	1,14	0,40	1,18	0,41	1,22	0,42	1,26	0,43	1,30	0,44
0,10	1,27	0,68	1,36	0,71	1,44	0,75	1,52	0,78	1,60	0,80
0,15	1,39	0,90	1,43	0,98	1,66	1,04	1,78	1,10	1,90	1,15
0,20	1,50	1,09	1,70	1,21	1,88	1,31	2,04	1,40	2,20	1,48
0,25	1,60	1,25	1,86	1,42	2,09	1,57	2,30	1,70	2,50	1,80
0,30	1,69	1,39	2,01	1,62	2,30	1,82	2,56	1,98	2,80	2,12
0,35	1,78	1,52	2,17	1,81	2,51	2,06	2,82	2,26	3,10	2,44
0,40	1,86	1,63	2,32	1,99	2,73	2,29	3,08	2,54	3,40	2,75
0,45	1,93	1,73	2,47	2,17	2,93	2,52	3,34	2,82	3,70	3,06
0,50	2,00	1,82	2,62	2,33	3,14	2,75	3,60	3,09	4,00	3,37

Quadro 5.7: Valores da relação  $I_I/I_c$  e  $I_{II}/I_c$  para  $d/h=0,90$ .

d/h=0,90										
$\beta$	0,00		0,25		0,50		0,75		1,00	
$\alpha \cdot \rho$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$
0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
0,02	1,03	0,13	1,04	0,13	1,05	0,14	1,06	0,14	1,07	0,14
0,05	1,08	0,29	1,11	0,29	1,13	0,30	1,15	0,30	1,17	0,30
0,10	1,16	0,49	1,21	0,51	1,26	0,52	1,30	0,53	1,35	0,54
0,15	1,23	0,66	1,31	0,69	1,38	0,71	1,45	0,73	1,52	0,75
0,20	1,29	0,79	1,40	0,84	1,51	0,89	1,60	0,93	1,69	0,96
0,25	1,35	0,91	1,50	0,99	1,63	1,05	1,75	1,11	1,86	1,16
0,30	1,41	1,01	1,59	1,12	1,75	1,21	1,90	1,28	2,04	1,35
0,35	1,46	1,10	1,68	1,24	1,87	1,36	2,05	1,46	2,21	1,54
0,40	1,51	1,19	1,77	1,36	2,00	1,50	2,20	1,62	2,38	1,72
0,45	1,55	1,26	1,85	1,47	2,12	1,65	2,35	1,79	2,56	1,91
0,50	1,60	1,33	1,94	1,58	2,24	1,78	2,50	1,95	2,73	2,09

Quadro 5.8: Valores da relação  $I_I/I_c$  e  $I_{II}/I_c$  para  $d/h=0,80$ .

d/h=0,80										
$\beta$	0,00		0,25		0,50		0,75		1,00	
$\alpha.\rho$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$	$I_I/I_c$	$I_{II}/I_c$
0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
0,02	1,02	0,09	1,02	0,09	1,03	0,09	1,03	0,09	1,03	0,10
0,05	1,04	0,20	1,05	0,20	1,06	0,20	1,08	0,20	1,09	0,20
0,10	1,08	0,35	1,10	0,35	1,13	0,35	1,15	0,35	1,17	0,35
0,15	1,12	0,46	1,15	0,47	1,19	0,47	1,23	0,48	1,26	0,48
0,20	1,15	0,56	1,20	0,57	1,25	0,58	1,30	0,59	1,35	0,60
0,25	1,18	0,64	1,25	0,66	1,32	0,68	1,38	0,70	1,43	0,71
0,30	1,21	0,71	1,30	0,75	1,38	0,77	1,45	0,80	1,52	0,82
0,35	1,24	0,78	1,34	0,82	1,44	0,86	1,53	0,89	1,60	0,92
0,40	1,26	0,83	1,39	0,89	1,50	0,94	1,60	0,99	1,69	1,02
0,45	1,29	0,88	1,43	0,96	1,56	1,02	1,68	1,08	1,78	1,12
0,50	1,31	0,93	1,48	1,03	1,62	1,10	1,75	1,16	1,86	1,22

Estes quadros permitem de forma simples e rápida determinar o valor da relação entre o momento de inércia no estado I e II em relação ao eixo neutro e o momento de inércia  $I_c$  que apenas considera as características geométricas da peça. Estes valores são obtidos relacionando  $\alpha.\rho$  com  $\beta$  (armadura de compressão/ armadura de tração).

Assim, é possível determinar a flecha instantânea e a flecha a tempo infinito de um dado elemento horizontal, através das expressões (5.21), (5.22), (5.23) e (5.24) (Lúcio, 2006)

### 5.5 Estudo comparativo dos métodos de cálculo das flechas

A quantificação das flechas em estruturas de betão realiza-se através de métodos aproximados que nem sempre dão valores idênticos. Ambos os métodos descritos anteriormente têm simplificações que visam agilizar o processo de cálculo, embora diminuam ligeiramente a sua precisão. Visto isto, houve a necessidade de saber se em condições idênticas as flechas obtidas com a aplicação do método dos coeficientes globais e o com o método do EC2 simplificado são idênticas. Para isso consideraram-se várias vigas simplesmente apoiadas, com cargas uniformemente distribuídas, que apesar de idênticas

estão sujeitas a acções sucessivamente crescentes. As vigas utilizadas neste estudo têm as seguintes características comuns:

- O vão livre da viga é igual a de 5m;
- A base tem 0,2m e a altura 0,45m;
- A viga é realizada com betão da classe C20/25;
- A classe do aço é S400;
- O coeficiente de fluência tem o valor 2,5;
- A relação entre a altura útil e a altura da viga  $d/h$  tem o valor 0,9.

As percentagens de armadura e conseqüentemente as flechas foram calculadas com base nas quantidades teóricas de armadura necessárias para verificar o estado limite último de resistência para cada carregamento considerado. Assim efectuou-se o cálculo de dez vigas simplesmente apoiadas, com cargas sucessivamente crescentes entre os 10kN/m e os 55 kN/m.

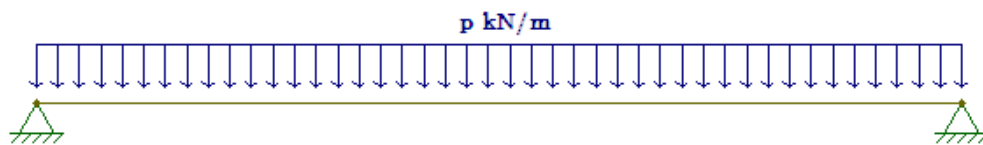


Figura 5.5: Viga Simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída.

Na Figura 5.6 estão representados os valores das flechas a tempo infinito obtidos utilizando o método do EC2 simplificado e o método dos coeficientes globais, bem como os valores da flecha elástica que são comuns em ambos os métodos. Representa-se ainda um ajuste efectuado ao método dos coeficientes globais que pretende minimizar os erros resultantes do processo de cálculo adoptado por via de consulta de tabelas.

Os elementos horizontais de betão sujeitos à flexão, podem sofrer alterações consideráveis motivadas pelo comportamento elástico ou elástico-plástico dos materiais, agravado pela ocorrência de fenómenos como a fluência e a retracção, é por isso que o cálculo da flecha elástica serve apenas de ponto de partida para o controlo da deformação. Considerando os

dados da Figura 5.6, torna-se evidente que o cálculo da flecha elástica é insuficiente para se efectuar um controlo eficaz da deformação visto que é muito inferior à flecha a tempo infinito.

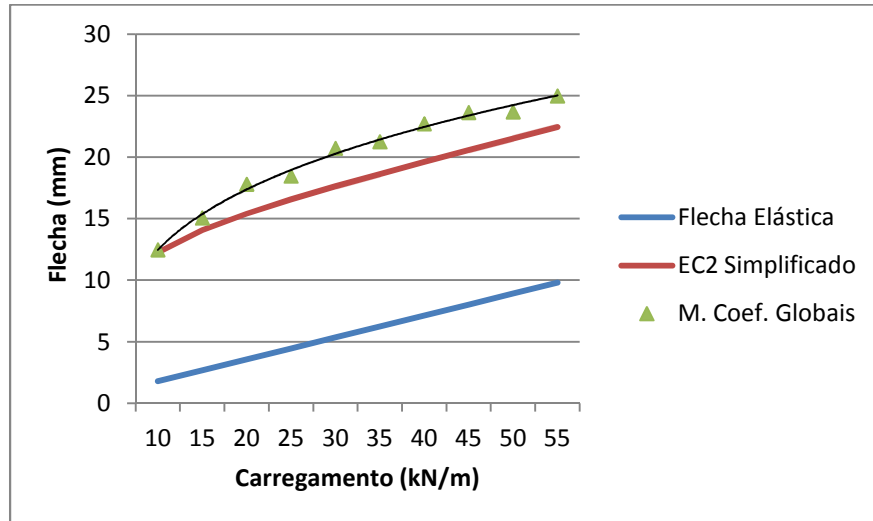


Figura 5.6: Relação entre as flechas a tempo infinito e as acções sobre as vigas.

Em condições iguais e para acções de baixa intensidade, as flechas a tempo infinito assumem valores idênticos, embora se note que os valores obtidos segundo o método dos coeficientes globais são sempre superiores. Conforme as acções sobre a viga vão aumentando, aumenta a disparidade entre os valores obtidos. A utilização do método dos coeficientes globais, não só apresenta valores mais elevados, como é um método mais experimentado, aconselhando-se a sua utilização sempre que as cargas sobre os elementos estruturais tenham valores consideráveis, ou quando a verificação do estado limite de deformação com a aplicação do método do EC2 simplificado se verifique no limite.

Considere-se agora a Figura 5.7, na qual estão representados os valores das flechas instantâneas obtidos para cada carregamento. Mais uma vez, quando comparados os valores das flechas instantâneas com os valores da flecha elástica, nota-se uma discrepância elevada, embora a ordem de grandeza seja inferior se comparada com a flecha a tempo infinito.

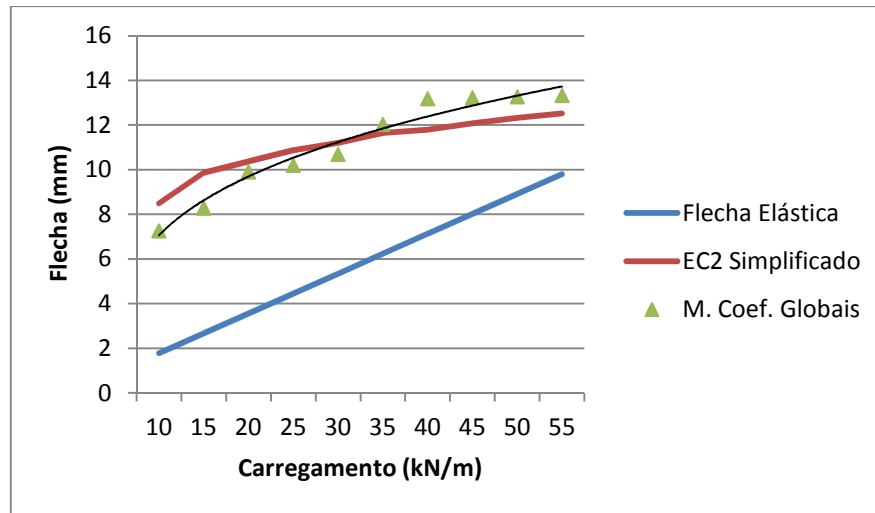


Figura 5.7: Relação entre as flechas instantâneas e as acções sobre as vigas.

As flechas instantâneas obtidas em cada um dos métodos assumem valores idênticos, existindo apenas uma ligeira variação na ordem do milímetro ( $\pm 1\text{mm}$ ). Com base nos resultados obtidos não foi possível tirar conclusões relevantes quanto ao método a considerar no cálculo da flecha instantânea, embora se deva referir que aparentemente ambos os métodos têm aproximações idênticas.

O Quadro 5.9 apresenta resumidamente os valores das flechas calculadas neste estudo, relacionadas com o respectivo carregamento considerado.

Quadro 5.9: Resumo dos valores das flechas calculadas.

p (kN/m)	$a_c$ (mm)	M. C. Globais	EC2 Simplificado	M. C. Globais	EC2 Simplificado
		$a_t$ (mm)	$a_t$ (mm)	$a_0$ (mm)	$a_0$ (mm)
10	1,78	12,48	12,23	7,26	8,49
15	2,67	15,07	14,06	8,28	9,86
20	3,56	17,81	15,40	9,90	10,37
25	4,45	18,48	16,55	10,19	10,87
30	5,34	20,73	17,61	10,68	11,20
35	6,23	21,26	18,63	12,03	11,64
40	7,12	22,73	19,61	13,18	11,79
45	8,01	23,64	20,56	13,22	12,08
50	8,90	23,69	21,51	13,27	12,32
55	9,79	24,98	22,44	13,32	12,52

## 5.6 Exemplos de aplicação

### 5.6.1 Exemplo 1 – Viga simplesmente apoiada

Considere-se uma viga simplesmente apoiada de betão armado com um vão livre de 6m, realizada com betão da classe C20/25 e aço S400. A viga tem 0,25m de base e 0,5m de altura, a sua armadura de flexão é composta por 3Ø20+2Ø16, está sujeita a uma carga permanente de 25 KN/m e a uma sobrecarga de 7,5 KN/m. Efectue-se o controlo da deformação da viga de acordo com os métodos descritos neste capítulo ( $\Psi_2=0,3$ )

#### i) Limite de relação entre o vão/altura

O valor limite da relação l/d dado pelo Quadro 5.3, relaciona a classe de betão C20/25, com o coeficiente k=1 (viga simplesmente apoiada) e a percentagem de armadura.

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{13,44 \times 10^{-4}}{0,25 \times 0,46} = 0,0117$$

Nestas condições, obtém-se o valor da relação l/d efectuando a interpolação seguinte:

$$l/d=17 \text{ ----- } \rho=0,5\%$$

$$l/d=13 \text{ ----- } \rho=1,5\%$$

Para  $\rho=1,117\%$  a relação l/d=14,53

Como a tensão no aço  $f_{yk}$  é igual a 400MPa, deve corrigir-se o valor limite da relação l/d com o factor correctivo  $k_\sigma$ , assim:

$$\left(\frac{l}{d}\right)_{corr} = \frac{l}{d} K_\sigma = 14,54 \times 1,25 = 18,16$$

O valor da altura útil da viga deve ser superior ao obtido através da relação l/d para que se verifique o estado limite de deformação:

$$\left(\frac{l}{d}\right)_{corr} \leq 18,16 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{d}\right) \leq 18,16 \Leftrightarrow d \geq 0,33m$$

Nota: Como d=0,46m, está verificada a condição anterior.

ii) **Método dos Coeficientes Globais**

**Flecha Elástica**

Para o cálculo da flecha a tempo infinito de uma viga, deve estimar-se a flecha elástica. Recomenda-se a utilização da expressão (5.11), as condições de apoio e o tipo de carregamento são tidas em conta através do coeficiente de correcção  $u$ . Assim:

$$a_c = u \times \frac{q \times l^4}{E_c \times I_c}$$

Segundo o Quadro 5.3, o coeficiente de correcção  $u$  para uma viga simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída é igual a  $5/384$ .

Para a combinação quase permanente de acções a carga  $q$  distribuída ao longo da viga é dada pela expressão seguinte:

$$q = 25 + 7,5 \times 0,3 = 27,25 \text{ kN/m}$$

Então:

$$a_c = \left( \frac{5}{384} \right) \times \frac{27,25 \times 6^4}{30 \times 10^6 \times \frac{0,25 \times 0,5^3}{12}} = 0,0059 \text{ m}$$

**Flecha a tempo infinito**

Deve utilizar-se a expressão (5.14) para estimar a flecha a tempo infinito. Esta expressão tem em conta os efeitos da fendilhação e da fluência ao longo do tempo através do coeficiente de correcção  $k_t$  e a contribuição da armadura de compressão através  $n$ .

$$a_t = a_c \times k_t \times n$$

Em que:

$a_c$  – flecha elástica;

$k_t$  – coeficiente global de correcção dado pelo ábaco da Figura A.9 (  $d/h=0,9$  e  $\varphi = 2,5$ ).

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{13,44 \times 10^{-4}}{0,25 \times 0,46} = 0,0117$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{30} = 6,67$$

$$\alpha_e \cdot \rho = 6,67 \times 0,0117 = 0,0779$$

$$\frac{M_{rD}}{M_D} = \frac{\frac{0,25 \times 0,5^2}{6} \times 2200}{\frac{27,25 \times 6^2}{8}} = 0,187$$

Nota: Nestas condições o valor do coeficiente  $k_t$  é 4,22.

Como não existe armadura de compressão, segundo o ábaco da Figura A.13  $n$  é igual a 1.

A flecha a tempo infinito para elementos estruturais tem como valor limite o vão/250, assim:

$$a_t = a_c \times k_t \times n = 0,0059 \times 4,22 \times 1 = 0,025m$$

$$\frac{l}{250} = \frac{6}{250} = 0,024m$$

A flecha a tempo infinito ultrapassa o valor limite fixado pelo EC2. Apesar de esta viga cumprir o método do valor limite da relação  $l/d$ , conclui-se que esta verificação é insuficiente para garantir o controlo da deformação, visto que em situações em que o vão é grande e o carregamento da viga elevado a flecha a tempo infinito tem valores superiores aos aceitáveis.

### Flecha instantânea

A flecha instantânea  $a_0$ , é dada pela expressão (5.16).

$$a_0 = a_c \times k_0$$

Onde:

$a_c$  – flecha elástica;

$k_0$  – coeficiente global de correcção obtido no ábaco da Figura A.2 ( $d/h=0,9$ ).

No instante em que é removido o escoramento, a flecha elástica  $a_c$  é determinada considerando apenas as cargas permanentes que actuam neste instante, ou seja  $q=25KN/m$ .

$$a_c = \left( \frac{5}{384} \right) \times \frac{25 \times 6^4}{30 \times 10^6 \times \frac{0,25 \times 0,5^3}{12}} = 0,0054m$$

Com  $\frac{M_{rD}}{M_D}=0,204$  e  $\alpha_e \cdot \rho=0,078$ , o valor do coeficiente  $k_0$  é 2,15. O valor da flecha instantânea  $a_0$  é :

$$a_0 = 0,0054 \times 2,15 = 0,0116\text{m}$$

Visto que:

$$a_t - a_0 \leq \frac{\text{vão}}{500} \Leftrightarrow (0,025 - 0,0116) \leq \frac{6}{500} \Leftrightarrow 0,0134\text{m} \geq 0,012\text{m}$$

Nota: A flecha instantânea ultrapassa o limite fixado pelo EC2.

### iii) Método de Cálculo do EC2

#### Cálculo da flecha instantânea

##### Cálculo da flecha instantânea no estado I

Para calcular a flecha instantânea é necessário em primeiro lugar estimar o valor da flecha elástica da viga no instante  $t=0$ .

$$a_c = \frac{5 \times p \times l^4}{384 \times E_c \times I_c} = \frac{5 \times 25 \times 6^4}{384 \times 30 \times 10^6 \times \frac{0,25 \times 0,5^3}{12}} = 0,0054\text{m}$$

Admitindo  $d/h = 0,9$ ;  $\beta = A'_s/A_s = 0$  e  $\alpha \times \rho = 6,67 \times 0,0117 = 0,0779$ ; segundo o Quadro 5.7 o valor da relação entre  $I_I/I_c$  é dado pela interpolação seguinte:

$$\alpha_e \times \rho = 0,05 \text{ ----- } I_I/I_c=1,08$$

$$\alpha_e \times \rho = 0,10 \text{ ----- } I_I/I_c=1,16$$

Para  $\alpha_e \times \rho = 0,0779$  a relação  $I_I/I_c=1,12$

Segundo a expressão (5.22), o valor da flecha instantânea no estado I será:

$$a_{10} = \frac{a_c}{\left(\frac{I_I}{I_c}\right)} = \frac{0,0054}{1,12} = 0,0048\text{m}$$

##### Cálculo da flecha instantânea no estado II

Admitindo  $d/h = 0,9$ ;  $\beta = A'_s/A_s = 0$  e  $\alpha \times \rho = 6,67 \times 0,0117 = 0,0779$ ; segundo o Quadro 5.7 o valor da relação entre  $I_{II}/I_c$  é dado pela interpolação seguinte:

$$\alpha_e \times \rho = 0,05 \text{ ----- } I_{II}/I_c = 0,29$$

$$\alpha_e \times \rho = 0,10 \text{ ----- } I_{II}/I_c = 0,49$$

Para  $\alpha_e \times \rho = 0,0779$  a relação  $I_{II}/I_c = 0,40$

Segundo a expressão (5.21), o valor da flecha instantânea no estado II será:

$$a_{II0} = \frac{a_c}{\left(\frac{I_{II}}{I_c}\right)} = \frac{0,0054}{0,40} = 0,0135\text{m}$$

Como esta viga está sujeita principalmente aos efeitos da flexão, prevê-se que esteja parcialmente fendilhada, apresentando um comportamento intermédio entre o estado I e II. Este comportamento é adequadamente previsto pela expressão seguinte:

$$a_0 = \zeta \times a_{II0} + (1 - \zeta) \times a_{I0} = 0,958 \times 0,0135 + (1 - 0,958) \times 0,0048 = 0,0131\text{m}$$

Em que:

$$\zeta = 1 - \beta \times \left(\frac{M_{rD}}{M_D}\right)^2 = 1 - 1 \times (0,204)^2 = 0,958$$

### **Cálculo da flecha a tempo infinito**

O valor da flecha elástica  $a_c$  para uma viga simplesmente apoiada, pode ser estimado utilizando as expressões seguinte:

$$a_c = \frac{5 \times p \times l^4}{384 \times E_c \times I_c} = \frac{5 \times 27,25 \times 6^4}{384 \times 30 \times 10^6 \times \frac{0,25 \times 0,5^3}{12}} = 0,0059\text{m}$$

Para se ter em conta o efeito da fluência, pode utilizar-se o módulo de elasticidade efectivo do betão:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{30}{1 + 2,5} = 8,57 \text{ GPa}$$

Então:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200}{8,57} = 23,33$$

$$\alpha_e \cdot \rho = 23,33 \times 0,0117 = 0,273$$

Admitindo  $d/h = 0,9$ ;  $\beta = A'_s/A_s = 0$  retira-se do Quadro 5.7 o valor das seguintes relações:

$$\frac{I_I}{I_c} = 1,38 \quad e \quad \frac{I_{II}}{I_c} = 0,956$$

Então, segundo as expressões (5.24) e (5.25), o valor das flechas a tempo infinito no estado I e II são respectivamente:

$$a_{It} = \frac{(1 + \varphi) \times a_c}{\left(\frac{I_I}{I_c}\right)} = \frac{(1 + 2,5) \times 0,0059}{1,38} = 0,015\text{m}$$

$$a_{II t} = \frac{(1 + \varphi) \times a_c}{\left(\frac{I_{II}}{I_c}\right)} = \frac{(1 + 2,5) \times 0,0059}{0,956} = 0,022\text{m}$$

O valor da flecha instantânea é dado pela expressão seguinte:

$$a_t = \zeta \times a_{II t} + (1 - \zeta) \times a_{It} = 0,9825 \times 0,022 + (1 - 0,9825) \times 0,015 = 0,0215\text{m}$$

Em que:

$$\zeta = 1 - \beta \times \left(\frac{M_{rD}}{M_D}\right)^2 = 1 - 0,5 \times (0,187)^2 = 0,9825$$

Visto que:

$$a_t \leq \frac{\text{vão}}{250} \leftrightarrow 0,0215\text{m} \leq 0,024\text{m}$$

$$a_t - a_0 \leq \frac{\text{vão}}{500} \leftrightarrow (0,0215 - 0,0131) \leq \frac{6}{500} \leftrightarrow 0,0084\text{m} \leq 0,012\text{m}$$

Nota: Estão verificadas todas as condições previstas no EC2.

### 5.6.2 Exemplo 2 - Viga em consola

Considere-se uma viga em consola com um vão igual a 1,5m, realizada com betão da classe C20/25 e aço S500. A viga tem 0,2m de base e 0,4m de altura, a sua armadura de flexão é composta por 3Ø10+2Ø10 em duas camadas distintas, está sujeita a uma carga permanente de 20 KN/m e a uma sobrecarga de 5 KN/m. Efectue-se o controlo da deformação da viga de acordo com os métodos descritos neste capítulo ( $\Psi_2=0,3$ )

#### i) Limite de relação entre o vão/altura

O valor limite da relação  $l/d$  dado pelo Quadro 5.3, relaciona a classe de betão C20/25, com o coeficiente  $k=0,4$  (consola) e a percentagem de armadura.

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{3,93 \times 10^{-4}}{0,2 \times 0,36} = 0,0055$$

Nestas condições, obtém-se o valor da relação  $l/d$  efectuando a interpolação seguinte:

$$l/d=7 \text{ ----- } \rho=0,5\%$$

$$l/d=5 \text{ ----- } \rho=1,5\%$$

Para  $\rho=0,55\%$  a relação  $l/d=6,9$

O valor da altura útil da viga deve ser superior ao obtido através da relação  $l/d$  para que se verifique o estado limite de deformação:

$$\left(\frac{l}{d}\right)_{corr} \leq 6,90 \Leftrightarrow \left(\frac{1,5}{d}\right) \leq 6,9 \Leftrightarrow d \geq 0,22m$$

Nota: Como  $d=0,36$ , está verificada a condição anterior.

## ii) Método dos Coeficientes Globais

### Flecha Elástica

Para o cálculo da flecha a tempo infinito de uma viga, deve estimar-se a flecha elástica.

Recomenda-se a utilização da expressão (5.11), as condições de apoio e o tipo de carregamento são tidas em conta através do coeficiente de correcção  $u$ . Assim:

$$a_c = u \times \frac{q \times l^4}{E_c \times I_c}$$

Segundo o Quadro 5.5, o coeficiente de correcção  $u$  para uma viga em consola com carga uniformemente distribuída é igual a  $1/8$ .

Para a combinação quase permanente de acções a carga  $q$  distribuída ao longo da viga é dada pela expressão seguinte:

$$q = 20 + 5 \times 0,3 = 21,50 \text{ kN/m}$$

Então:

$$a_c = \left(\frac{1}{8}\right) \times \frac{21,50 \times 1,5^4}{30 \times 10^6 \times \frac{0,2 \times 0,4^3}{12}} = 4,25 \times 10^{-4}m$$

### Flecha a tempo infinito

Deve utilizar-se a expressão (5.14) para estimar a flecha a tempo infinito. Esta expressão tem em conta os efeitos da fendilhação e da fluência ao longo do tempo através do coeficiente de correcção  $k_t$  e a contribuição da armadura de compressão através  $n$ .

$$a_t = a_c \times k_t \times n$$

Em que:

$a_c$  – flecha elástica;

$k_t$  – coeficiente global de correcção dado pelo ábaco da Figura A.1 ( $d/h=0,9$  e  $\varphi = 2,5$ ).

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{3,93 \times 10^{-4}}{0,20 \times 0,36} = 0,0055$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{30} = 6,67$$

$$\alpha_e \cdot \rho = 6,67 \times 0,0055 = 0,037$$

$$\frac{M_{rD}}{M_D} = \frac{0,2 \times 0,4^2}{6} \times 2200 = 0,485$$

Nota: Nestas condições o valor do coeficiente  $k_t$  é igual a 5,8.

Como não existe armadura de compressão, segundo o ábaco da Figura A.13  $n$  é igual a 1.

A flecha a tempo infinito para elementos estruturais, tem como valor limite o vão/250, assim:

$$a_t = a_c \times k_t \times n = 4,25 \times 10^{-4} \times 5,8 \times 1 = 0,0025m$$

$$\frac{1}{250} = \frac{1,5}{250} = 0,006m$$

A flecha a tempo infinito não ultrapassa o valor limite fixado pelo EC2 para elementos estruturais. Após a fase de construção ocorre uma parte significativa das deformações, que provocam danos nas alvenarias, revestimentos entre outros. O EC2 exige que a flecha nestas condições não exceda, para a combinação quase permanente de acções, o valor

vão/500. Para verificar esta condição é necessário calcular a diferença entre a flecha a tempo infinito e a flecha instantânea, ou seja:

$$a_t - a_0 \leq \frac{\text{vão}}{500}$$

A flecha instantânea  $a_0$ , é dada pela expressão (5.16).

$$a_0 = a_c \times k_0$$

Onde:

$a_c$  – flecha elástica;

$k_0$  – coeficiente global de correcção obtido no ábaco da Figura A.2 ( $d/h=0,9$ ).

No instante em que é removido o escoramento, a flecha elástica  $a_c$  é determinada considerando apenas as cargas permanentes que actuam neste instante, ou seja  $q=20\text{KN/m}$ .

$$a_c = \left(\frac{1}{8}\right) \times \frac{20 \times 1,5^4}{30 \times 10^6 \times \frac{0,2 \times 0,4^3}{12}} = 3,96 \times 10^{-4}\text{m}$$

Com  $\frac{Mr_D}{M_D}=0,521$  e  $\alpha_e \cdot \rho=0,037$ , o valor do coeficiente  $k_0$  é 2,65. O valor da flecha instantânea  $a_0$  é :

$$a_0 = 3,96 \times 10^{-4} \times 2,65 = 0,001\text{m}$$

Visto que:

$$a_t - a_0 \leq \frac{\text{vão}}{500} \Leftrightarrow (0,0025 - 0,001) \leq \frac{1,5}{500} \Leftrightarrow 0,0015\text{m} \leq 0,0030\text{m}$$

Nota: Estão verificadas as duas condições impostas pelo EC2.

### iii) Método de Cálculo do EC2

#### Cálculo da flecha instantânea

##### Cálculo da flecha instantânea no estado I

Para calcular a flecha instantânea é necessário em primeiro lugar estimar o valor da flecha elástica da viga no instante  $t=0$ , considerando apenas as acções permanentes.

---

$$a_c = \frac{p \times l^4}{8 \times E_c \times I_c} = \frac{20 \times 1,5^4}{8 \times 30 \times 10^6 \times \frac{0,2 \times 0,4^3}{12}} = 3,96 \times 10^{-4} \text{m}$$

Admitindo  $d/h = 0,9$ ;  $\beta = A'_s/A_s = 0$  e  $\alpha \times \rho = 0,037$ ; segundo o Quadro 5.7 o valor da relação entre  $I_I/I_c$  é dado pela interpolação seguinte:

$$\alpha_e \times \rho = 0,02 \text{ ----- } I_I/I_c = 1,03$$

$$\alpha_e \times \rho = 0,05 \text{ ----- } I_I/I_c = 1,08$$

Para  $\alpha_e \times \rho = 0,037$  a relação  $I_I/I_c = 1,06$

Segundo a expressão (5.22) o valor da flecha instantânea no estado I será:

$$a_{I0} = \frac{a_c}{\left(\frac{I_I}{I_c}\right)} = \frac{3,96 \times 10^{-4}}{1,06} = 3,74 \times 10^{-4} \text{m}$$

#### Cálculo da flecha instantânea no estado II

Admitindo  $d/h = 0,9$ ;  $\beta = A'_s/A_s = 0$  e  $\alpha \times \rho = 0,037$ ; segundo o Quadro 5.7 o valor da relação entre  $I_{II}/I_c$  é dado pela interpolação seguinte:

$$\alpha_e \times \rho = 0,02 \text{ ----- } I_{II}/I_c = 0,13$$

$$\alpha_e \times \rho = 0,05 \text{ ----- } I_{II}/I_c = 0,29$$

Para  $\alpha_e \times \rho = 0,037$  a relação  $I_{II}/I_c = 0,22$

Segundo a expressão (5.21), o valor da flecha instantânea no estado II será:

$$a_{II0} = \frac{a_c}{\left(\frac{I_{II}}{I_c}\right)} = \frac{3,96 \times 10^{-4}}{0,22} = 0,0018 \text{m}$$

Como está viga está sujeita principalmente aos efeitos da flexão, prevê-se que esteja parcialmente fendilhada, apresentando um comportamento intermédio entre o estado I e

II. Este comportamento é adequadamente previsto pela expressão:

$$a_0 = \zeta \times a_{II0} + (1 - \zeta) \times a_{I0} = 0,729 \times 0,0018 + (1 - 0,729) \times 3,74 \times 10^{-4} = 0,0014 \text{m}$$

Em que:

$$\zeta = 1 - \beta \times \left(\frac{M_{rD}}{M_D}\right)^2 = 1 - 1 \times (0,521)^2 = 0,729$$

**Cálculo da flecha a tempo infinito**

O valor da flecha elástica  $a_c$  para uma viga em consola, pode ser estimado utilizando a expressão seguinte com  $q=21,5\text{KN/m}$  (Combinações quase - permanentes).

$$a_c = \frac{p \times l^4}{8 \times E_c \times I_c} = \frac{21,50 \times 1,5^4}{8 \times 30 \times 10^6 \times \frac{0,2 \times 0,4^3}{12}} = 4,25 \times 10^{-4} \text{m}$$

Para se ter em conta o efeito da fluência, pode utilizar-se o módulo de elasticidade efectivo do betão:

$$E_{c,\text{eff}} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{30}{1 + 2,5} = 8,57 \text{ GPa}$$

Então:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,\text{eff}}} = \frac{200}{8,57} = 23,33$$

$$\alpha_e \cdot \rho = 23,33 \times 0,0055 = 0,128$$

Admitindo  $d/h = 0,9$ ;  $\beta = A'_s/A_s = 0$  retira-se do Quadro 5.7 o valor das seguintes relações:

$$\frac{I_I}{I_c} = 1,20 \quad e \quad \frac{I_{II}}{I_c} = 0,59$$

Então, segundo as expressões (5.25) e (5.24), o valor das flechas a tempo infinito no estado I e II são respectivamente:

$$a_{It} = \frac{(1 + \varphi) \times a_c}{\left(\frac{I_I}{I_c}\right)} = \frac{(1 + 2,5) \times 4,25 \times 10^{-4}}{1,20} = 0,0012 \text{m}$$

$$a_{II t} = \frac{(1 + \varphi) \times a_c}{\left(\frac{I_{II}}{I_c}\right)} = \frac{(1 + 2,5) \times 4,25 \times 10^{-4}}{0,59} = 0,0025 \text{m}$$

O valor da flecha instantânea é dado pela expressão seguinte:

$$a_t = \zeta \times a_{II t} + (1 - \zeta) \times a_{It} = 0,8824 \times 0,0025 + (1 - 0,8824) \times 0,0012 = 0,0023 \text{m}$$

Em que:

$$\zeta = 1 - \beta \times \left(\frac{M_{rD}}{M_D}\right)^2 = 1 - 0,5 \times (0,485)^2 = 0,8824$$

Visto que:

$$a_t \leq \frac{v\tilde{a}o}{250} \Leftrightarrow 0,0023 \leq 0,0060 \text{m}$$


---

$$a_t - a_0 \leq \frac{v_{\tilde{a}o}}{500} \Leftrightarrow (0,0023 - 0,0014) \leq \frac{1,5}{500} \Leftrightarrow 0,0009\text{m} \leq 0,003\text{m}$$

Nota: Verificam-se todas as condições impostas pelo EC2.

### 5.6.3 Exemplo 3 – Viga contínua

Considere-se o sistema estrutural da Figura 5.8.

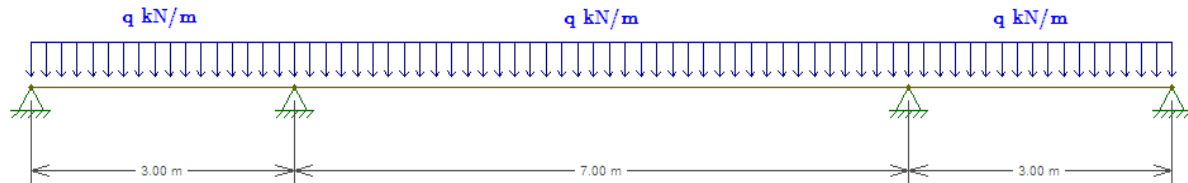


Figura 5.8: Sistema estrutural do exemplo 3.

Determine-se a flecha a tempo infinito para o vão central da viga, utilizando o método dos coeficientes globais. A viga é realizada com betão da classe C20/25 e aço A400 e tem 0,35m de base por 0,60m de altura, a sua armadura de flexão para os momentos positivos é composta por 5Ø16 e para os momentos negativos 6Ø16, embora se deva considerar que na secção em estudo existe uma dispensa de armadura superior de 4Ø16. O sistema estrutural está sujeito a uma carga permanente de 25 KN/m e a uma sobrecarga de 7,5 KN/m. ( $\Psi_2=0,3$ )

#### i) Método dos coeficientes globais

##### Flecha Elástica

Para o cálculo da flecha a tempo infinito de uma viga contínua, deve estimar-se a flecha elástica. Recomenda-se a utilização da expressão (5.13). O valor de  $\eta$  é obtido consultando o ábaco da Figura 5.2 e depende dos momentos negativos actuantes ( $M_1$  e  $M_2$ ) em cada um dos apoios e do momento máximo positivo no vão central ou em certos casos o momento mínimo negativo ( $\max M_F$ ).

$$a_c = \eta \times \frac{M \times l^2}{E_c \times I_c}$$

Para a combinação quase permanente de acções a carga  $q$  distribuída ao longo da viga é dada pela expressão seguinte:

$$q = 25 + 7,5 \times 0,3 = 27,25 \text{ kN/m}$$

Considere-se o diagrama dos momentos flectores da Figura 5.9:

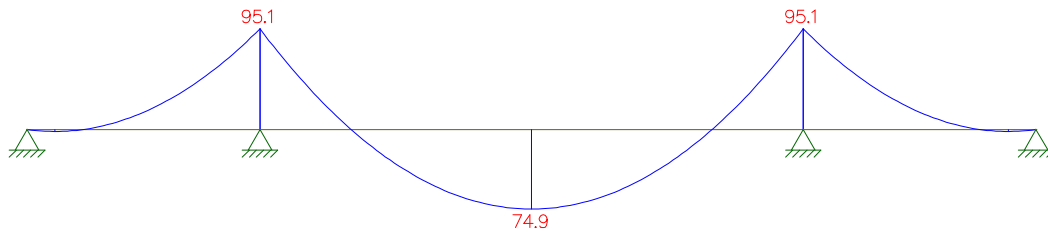


Figura 5.9: Diagrama dos momentos flectores da viga do exemplo 3.

Consultando o ábaco da Figura 5.2, é possível determinar o coeficiente  $\eta$ , através da relação entre os momentos em cada um dos apoios e efectuando a relação entre estes e o momentos máximo:

$$M_1 = -95,1 \text{ kN.m}; M_2 = -95,1 \text{ kN.m}; \max M_F = 74,9 \text{ kN.m}$$

$$\frac{M_1}{\max M_F} = \frac{-95,1}{74,9} = -1,27$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{-95,1}{-95,1} = 1$$

Nestas condições o valor de  $\eta$  é 0,078. O valor da flecha elástica é dado pela expressão seguinte:

$$a_c = (0,078) \times \frac{74,9 \times 7^2}{30 \times 10^6 \times \frac{0,35 \times 0,6^3}{12}} = 0,0015 \text{ m}$$

**Flecha a tempo infinito**

Deve utilizar-se a expressão (5.14) para estimar a flecha a tempo infinito. Esta expressão tem em conta os efeitos da fendilhação e da fluência ao longo do tempo através do coeficiente de correcção  $k_t$  e a contribuição da armadura de compressão através  $n$ .

$$a_t = a_c \times k_t \times n$$

Em que:

$a_c$  – flecha elástica;

$k_t$  – coeficiente global de correcção dado pelo ábaco da Figura A.1 ( $d/h=0,9$  e  $\varphi = 2,5$ ).

$$\rho = \frac{A_s}{b \times d} = \frac{10,05 \times 10^{-4}}{0,35 \times 0,55} = 0,0052$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200}{30} = 6,67$$

$$\alpha_e \cdot \rho = 6,67 \times 0,0052 = 0,035$$

$$\frac{M_{rD}}{M_D} = \frac{0,35 \times 0,6^2}{6} \times 2200 = 0,617$$

Nota: Nestas condições o valor do coeficiente  $k_t$  é 5,5.

Como existe armadura de compressão, segundo o ábaco da Figura A.13  $n$  é obtido através da relação entre a percentagem de armadura de compressão e de tracção.

$$\rho' = \frac{A'_s}{b \times d} = \frac{4,02 \times 10^{-4}}{0,35 \times 0,55} = 0,0021$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{0,0021}{0,0052} = 0,404$$

O valor do coeficiente  $n$  obtido nestas condições é 0,944. Finalmente, a flecha a tempo é dada pela expressão seguinte:

$$a_t = a_c \times k_t \times n = 0,0015 \times 5,5 \times 0,944 = 0,0079\text{m}$$



## Capítulo 6 – Validação experimental



## 6. Validação experimental

### 6.1 Introdução

O estudo comparativo apresentado no ponto 5.5 permitiu concluir que as flechas teóricas obtidas em cada um dos métodos divergem ligeiramente, o que leva a crer que a sua precisão também difere.

Com o objectivo de avaliar o grau de precisão de cada método, e demonstrar se ambos se adequam à realidade, realizou-se uma validação experimental na qual foram comparados os resultados experimentais com as respectivas aproximações teóricas. Na Figura 6.1 pode observar-se a viga e os equipamentos utilizados neste ensaio experimental.



Figura 6.1: Fotografia do ensaio experimental.

Para além do método dos coeficientes globais e do método do EC2 simplificado, decidiu-se comparar os resultados experimentais com os deslocamentos teóricos obtidos através da integração da equação diferencial da elástica, de forma a avaliar se a determinação de flechas instantâneas em estruturas de betão com este método teórico se adequa à realidade. Para isso, ensaiou-se uma viga simplesmente apoiada com um vão livre de 1,4m, sujeita a duas cargas concentradas crescentes, aplicadas em simultâneo a 0,25m dos apoios conforme indica a Figura 6.2. A viga tem 9,8cm de base por 14,0cm de altura, o betão é

da classe C20/25 e a armadura principal de flexão é composta por 3Ø8 (1,5cm<sup>2</sup>) do tipo S500 NR.

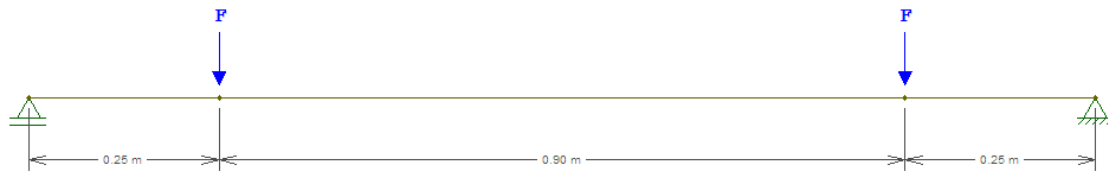


Figura 6.2: Sistema estrutural da validação experimental.

Deve referir-se que a presente validação experimental reporta apenas para os valores das flechas obtidas aquando do primeiro carregamento das vigas, visto que no ensaio não foi possível simular certos fenómenos como a fluência, com consequências directas no aumento da deformação ao longo do tempo.

## 6.2 Discussão dos resultados

Conforme foi referido, no presente ensaio experimental a viga foi sucessivamente sujeita a cargas crescentes concentradas, que naturalmente provocaram momentos flectores e deslocamentos com a mesma tendência. O gráfico da Figura 6.3 relaciona os deslocamentos obtidos experimentalmente, com as forças aplicadas na viga.

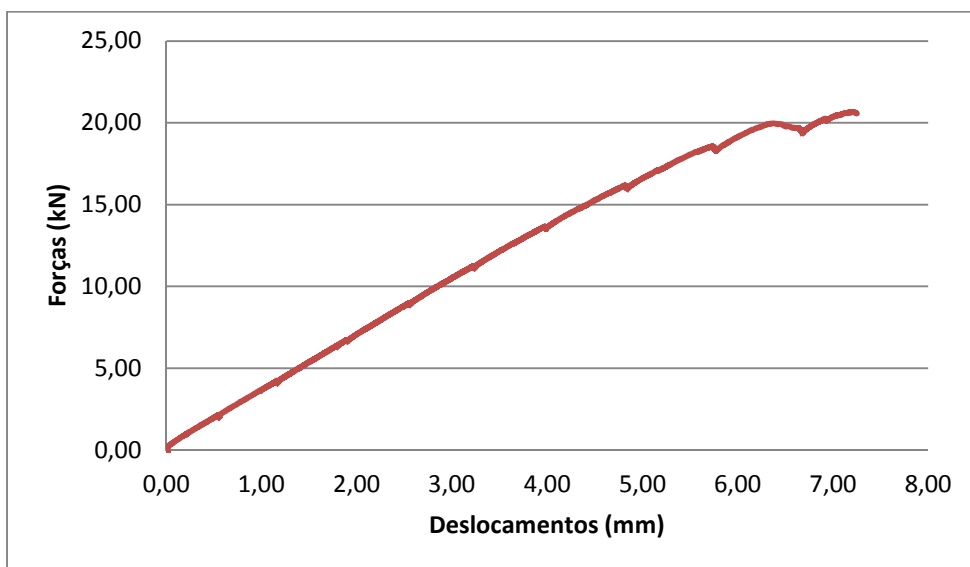


Figura 6.3: Relação entre as forças aplicadas e os deslocamentos obtidos experimentalmente.

Após o ensaio experimental, recorreu-se aos valores das forças aplicadas à viga para determinar as flechas instantâneas teóricas obtidas mediante a aplicação dos métodos referidos anteriormente.

No gráfico da Figura 6.4 comparam-se estes resultados teóricos, com os respectivos resultados experimentais. Note-se que existe uma ligeira disparidade entre os resultados obtidos. Para cargas semelhantes, quando comparados os deslocamentos teóricos de todos os métodos com os respectivos valores reais existem divergências entre os resultados. Ou seja, se comparados os deslocamentos obtidos segundo o método do EC2 simplificado, com os deslocamentos experimentais, verifica-se que os deslocamentos teóricos são 20% a 36% inferiores aos reais, assim como no método dos coeficientes globais os resultados são inferiores aos reais entre 16% e 31%. A equação diferencial da elástica aproxima-se mais dos deslocamentos reais, apresentando resultados inferiores entre 5% e 27%.

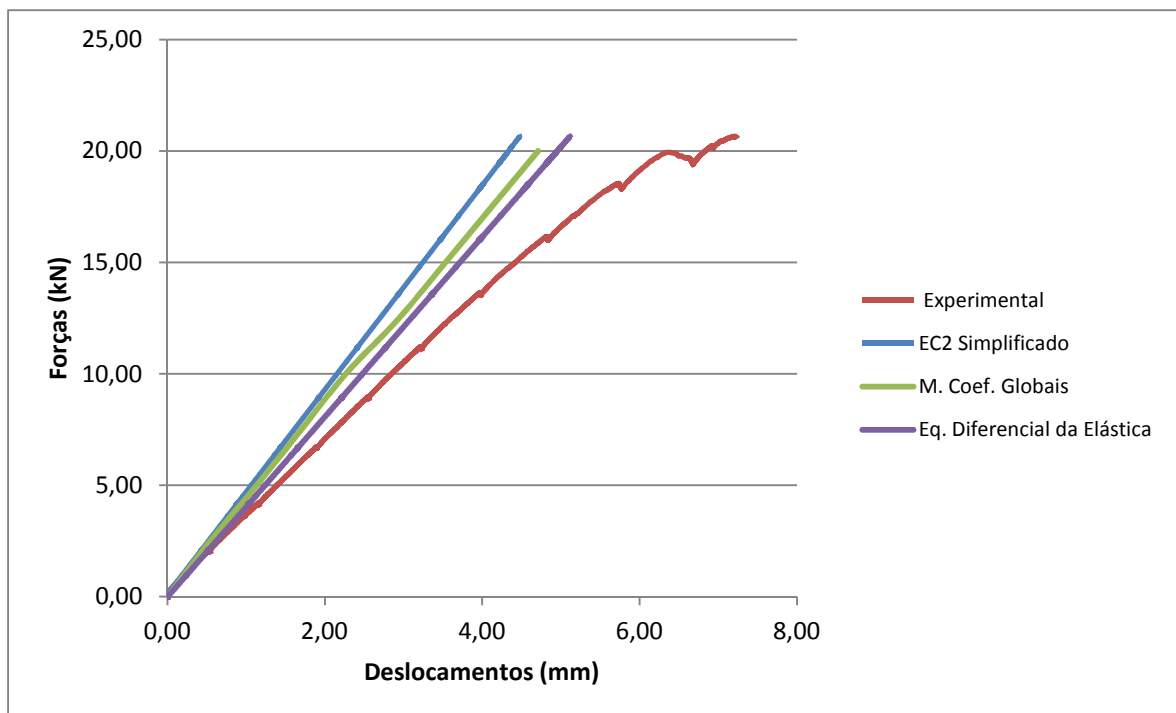


Figura 6.4: Resultados teóricos de cada um dos métodos, comparados com os respectivos resultados experimentais.

Aparentemente, os métodos teóricos apresentam valores inferiores aos reais o que não beneficia a segurança, embora a diferença real entre os resultados seja em média -1mm.

Como a diferença entre os valores reais e teóricos é tão pequena, pode afirmar-se que este é um erro aceitável e que a precisão e fiabilidade de cada um dos métodos considerados se adequa aos casos reais.

Existem alguns factores que podem ter levado a estes resultados, nomeadamente certas características mecânicas dos materiais que podem apresentar valores diferentes dos admitidos no cálculo teórico. O módulo de elasticidade do betão tem influência directa na deformação da viga, visto isto seria necessário determinar experimentalmente o seu valor, de forma a considerar o seu valor efectivo nos cálculos teóricos.

Os resultados obtidos com a equação diferencial da elástica, aparentemente são os mais precisos, concluindo-se que este é um método a ter em conta no cálculo de flechas instantâneas. A tempo infinito, deve evitar-se utilizar este método, visto que, este admite apenas uma variação linear elástica em elementos estruturais na hipótese não fendilhada. Caso se pretenda calcular a flecha a tempo infinito, os valores obtidos com recurso à equação diferencial da elástica são meramente teóricos e completamente desajustados dos reais, visto que esta não contempla os fenómenos reológicos que ocorrem sobre o elemento estrutural ao longo do tempo, devendo aplicar-se apenas o método dos coeficientes globais e o método do EC2 simplificado.

## Capítulo 7 – Considerações finais



## 7. Considerações finais

Na presente dissertação alertou-se para a necessidade da verificação dos estados limites de utilização, e o seu papel no aumento da durabilidade das construções actuais. Verificou-se ainda que os métodos de cálculo propostos pelas mais recentes disposições regulamentares, nomeadamente o EC2, caracterizam correctamente a formação de fendas e a deformação dos elementos estruturais. Quando comparados os resultados dos métodos teóricos com as respectivas validações práticas, concluiu-se que, embora estes apresentem valores diferentes, os seus resultados são bastante fiáveis e aproximados. Esta disparidade pode dever-se à dificuldade da definição correcta das características mecânicas dos materiais, que em certos casos diferem dos valores teóricos considerados.

Para evitar patologias decorrentes da fendilhação e aumentar a durabilidade das estruturas de betão, torna-se essencial efectuar o controlo da fendilhação através dos métodos de cálculo descritos neste trabalho. Devem utilizar-se simultaneamente regras construtivas que reduzem o efeito da fendilhação, como o cumprimento dos recobrimentos mínimos regulamentares, dos espaçamentos mínimos e máximos e a utilização de quantidades de armaduras adequadas com varões de diâmetros menores capazes de reduzir a distância entre fendas, diminuindo a sua abertura. Outro factor a ter em consideração é a definição das classes de resistência e de exposição do betão, adequadas ao ambiente em que a estrutura está inserida.

A deformação excessiva das estruturas é outro fenómeno patológico que tem consequências nefastas para estas. O cálculo de flechas elásticas teóricas, que não consideram o efeito da fluência e a diminuição da secção de betão causada pela fendilhação, é insuficiente para controlar a deformação dos elementos horizontais ao longo do tempo. Assim como a limitação da relação entre o comprimento do vão e a altura da viga, previsto no EC2, não garante, em certos casos, a verificação dos limites das deformações dos elementos

---

horizontais. De facto, foram apresentados exemplos em que não obstante serem verificadas aquelas relações, os valores das flechas calculados foram superiores aos limites definidos pelo mesmo regulamento.

Caso se pretenda estimar com alguma precisão o valor das flechas de um dado elemento estrutural, deve utilizar-se o método dos coeficientes globais ou o método do EC2 simplificado descritos na presente dissertação que, como se constatou anteriormente num exemplo de aplicação, apresentam valores muito próximos dos reais.

Na fase de projecto, deve definir-se a classe de betão e as dimensões dos elementos horizontais, adequadas à natureza das cargas aplicadas e ao vão destes, visto que o módulo de elasticidade do betão e a inércia da peça têm um contributo considerável na sua resistência às deformações.

## Bibliografia



## 8. Bibliografia

- Aguiar José, Cabrita António H. Reís e Appleton João** Guião de apoio à reabilitação de edifícios habitacionais volume II - Lisboa : Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1993.
- Correia dos Reis A., Brasão Farinha M. e Brasão Farinha J. S.** Tabelas Técnicas - Lisboa : Edições Técnicas, 2010.
- Cristelo Nuno** Monitorização e análise de comportamento de Box Culvert 3.00×5.00 [- Porto : FEUP — LABEST / NewMENSUS, Lda, 2011.
- EN 1991-1-1 Eurocódigo 1** Acções em estruturas - Partes 1-1: Acções Gerais - Caparica : Instituto Português da Qualidade, 2008.
- EN 1992-1-1 Eurocódigo 2** Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios - Caparica : Instituto Português da Qualidade, 2010.
- Felix Carlos** Bases para o dimensionamento e acções nas estruturas - Porto : Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2010.
- Felix Carlos** Estados Limites de Utilização - Porto : Instituto Superior de Engenharia do Porto, 2009.
- Figueiras Joaquim A.** Verificação aos Estados Limites de Utilização - Porto , 1997.
- Lúcio Valter** Estruturas de betão armado I - Estado limite de deformação - Lisboa : Universidade Nova de Lisboa, 2006.
- Lúcio Valter** Estruturas de betão armado I - Estado limite de fendilhação - Lisboa : Universidade Nova de Lisboa, 2006.
- Marchão Carla e Appleton Júlio** Verificação do Comportamento em Serviço (Estados Limites de Utilização - SLS) - Lisboa : Instituto Superior Técnico, 2009.
- NP ENV 13670-1 Execução de estruturas de betão** Parte 1: Regras Gerais - Caparica : Instituto Português da Qualidade, 2007.

**NP ENV 1990 Eurocódigo 0** Bases para o projecto de estruturas - Caparica : Instituto Português da Qualidade, 2008.

**NP ENV 206-1 Betão** Parte 1: Especificações, desempenho, produção e conformidade - Caparica : Instituto Português da Qualidade, 2007.

**Walther René e Miehlsbradt Manfred** Traité de Génie Civil. Dimensionnement des Structures en Béton. Bases et technologie - Lausanne : Polytechniques et Universitaires Romandes, 1990.

## Anexos



ANEXOS

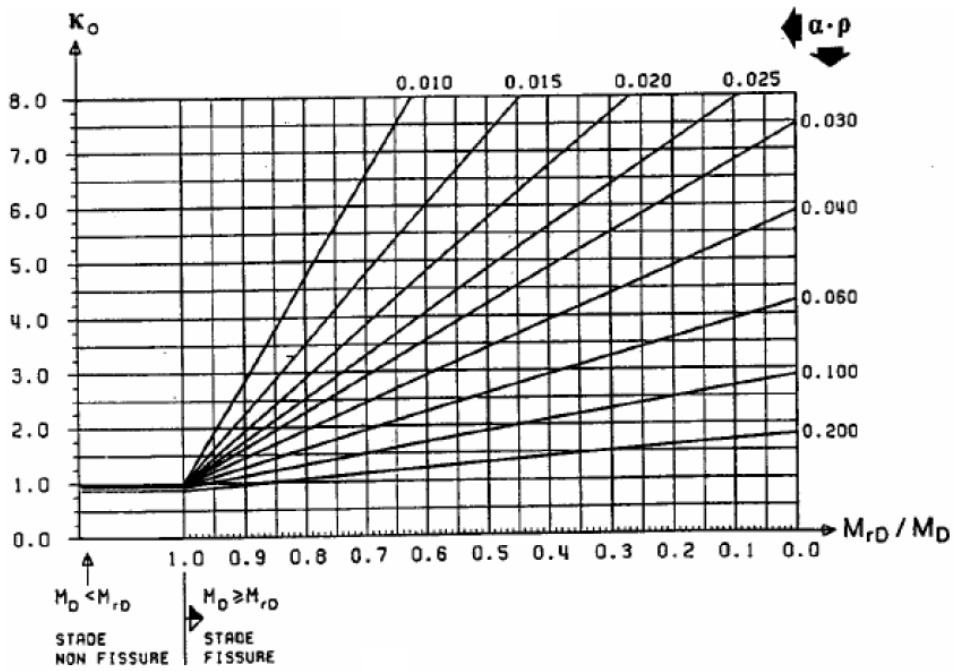


Figura A.1: Valores do coeficiente  $k_0$  – Primeira carga – ( $d/h=0.8$ )

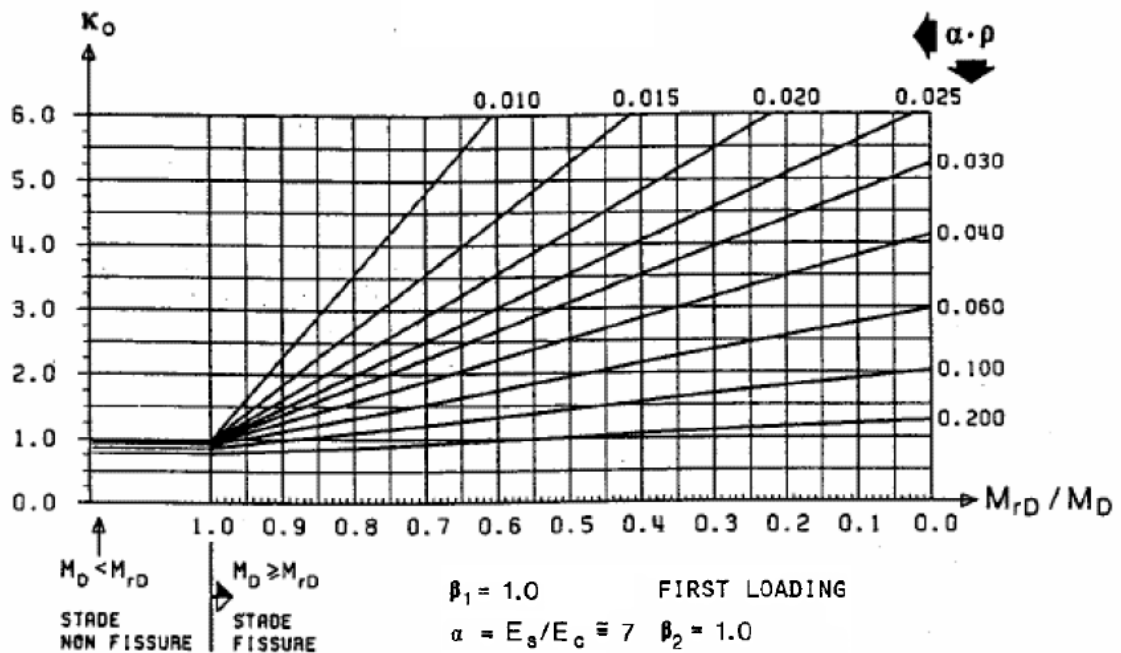


Figura A.2: Valores do coeficiente  $k_0$  – Primeira carga – ( $d/h=0.9$ )

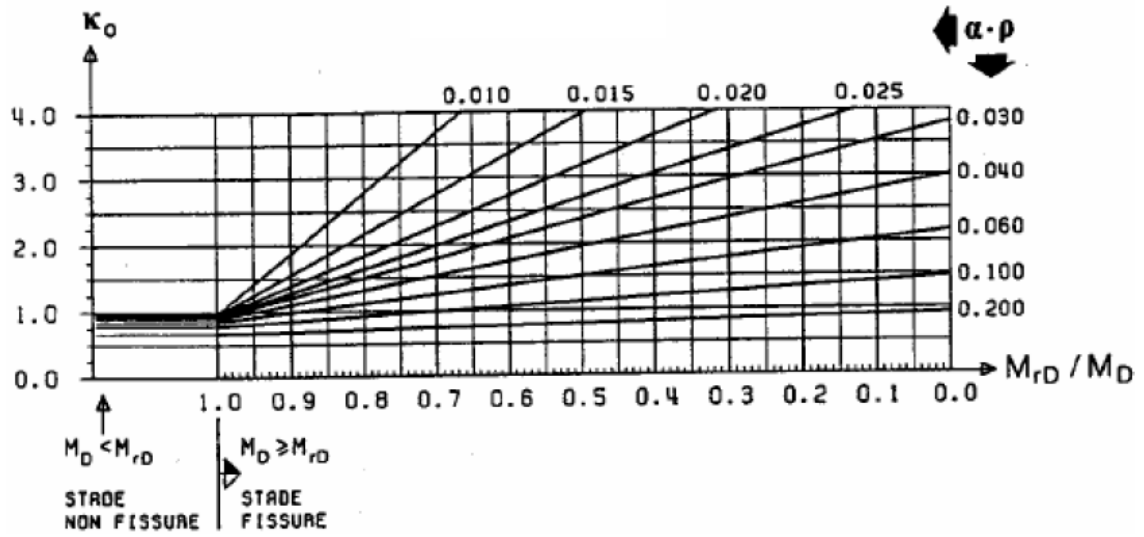


Figura A.3: Valores do coeficiente  $k_0$  – Primeira carga – ( $d/h=1.0$ )

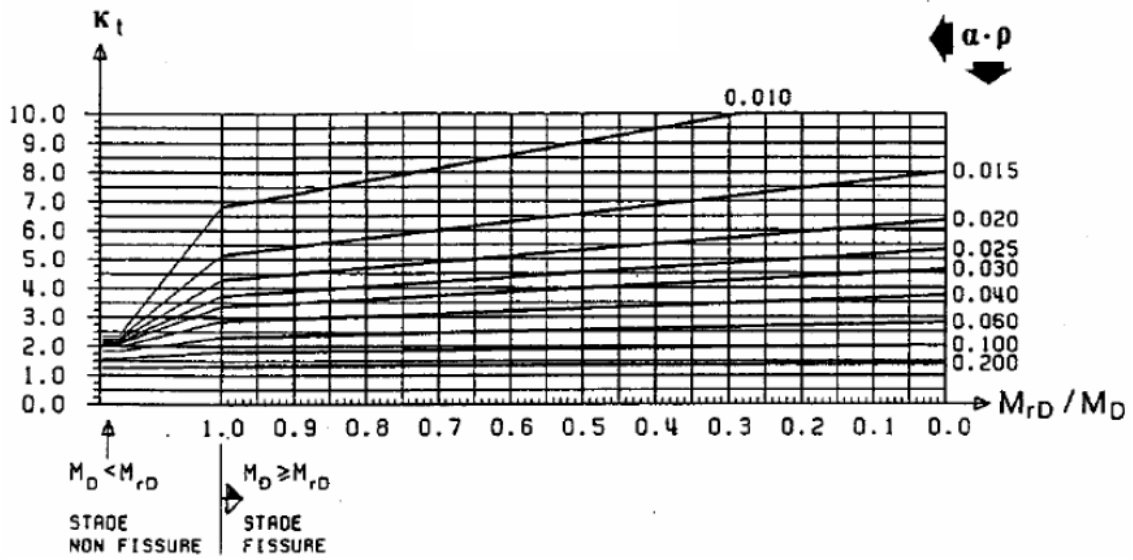


Figura A.4: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=1,0$  e  $\phi=1.5$ )

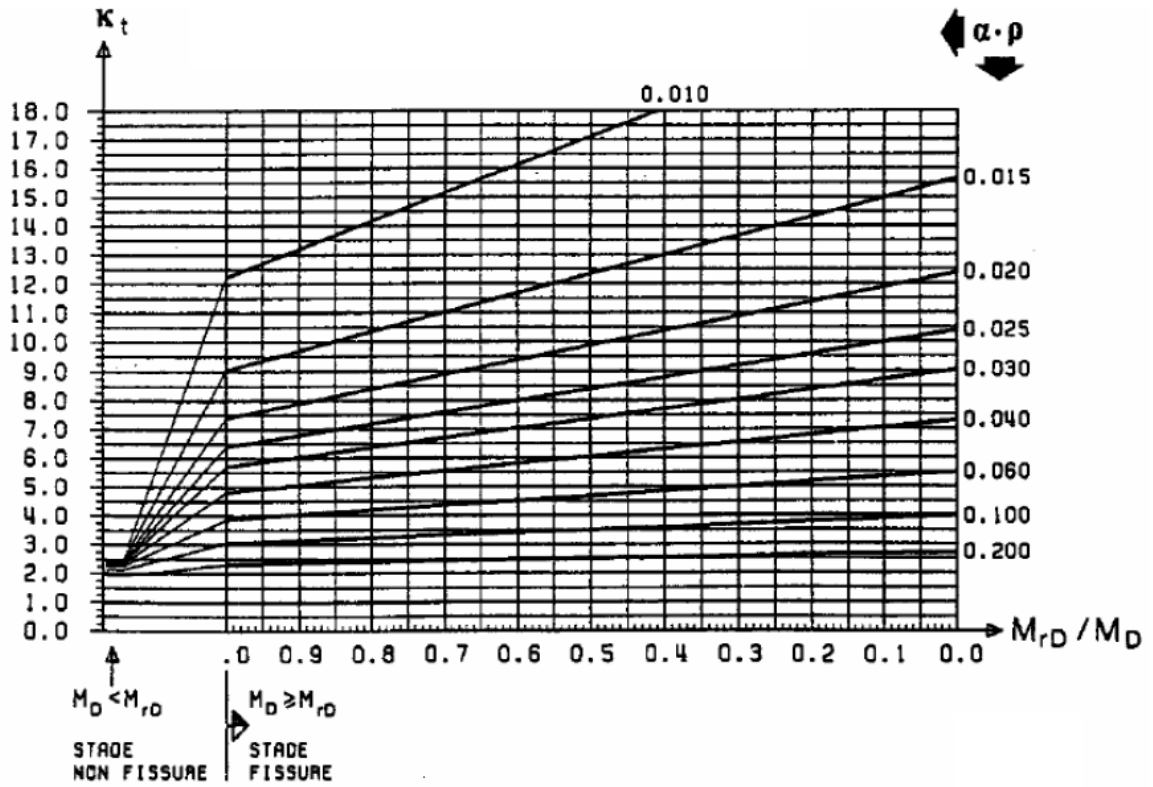


Figura A.5: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,8$  e  $\varphi=1,5$ )

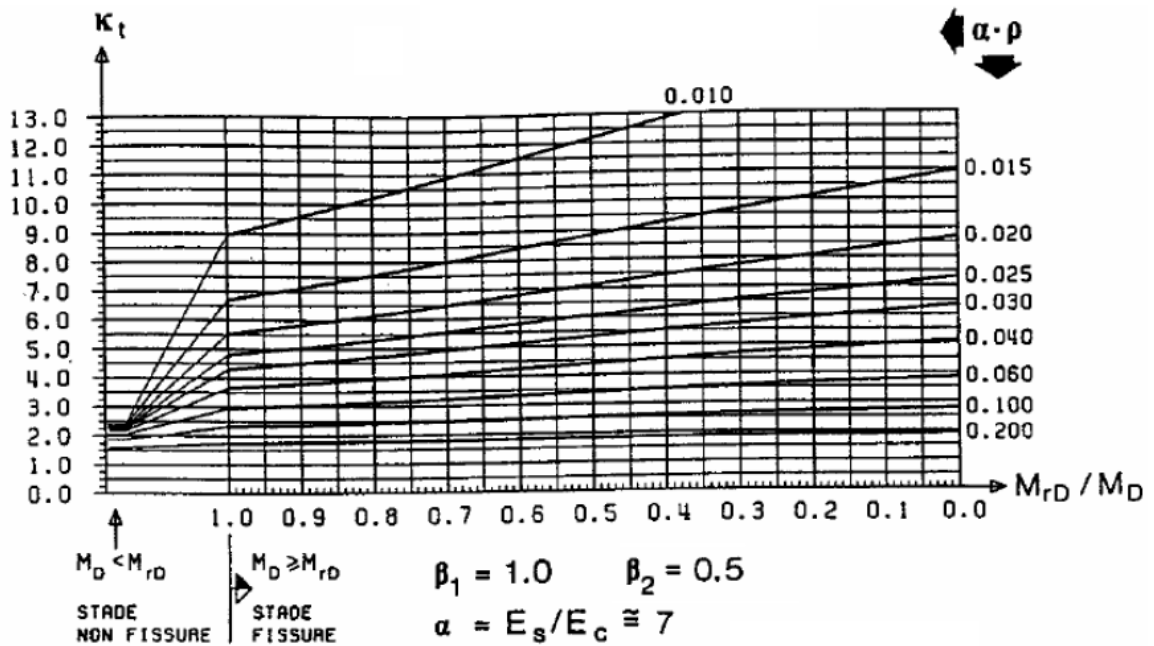


Figura A.6: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,9$  e  $\varphi = 1,5$ )

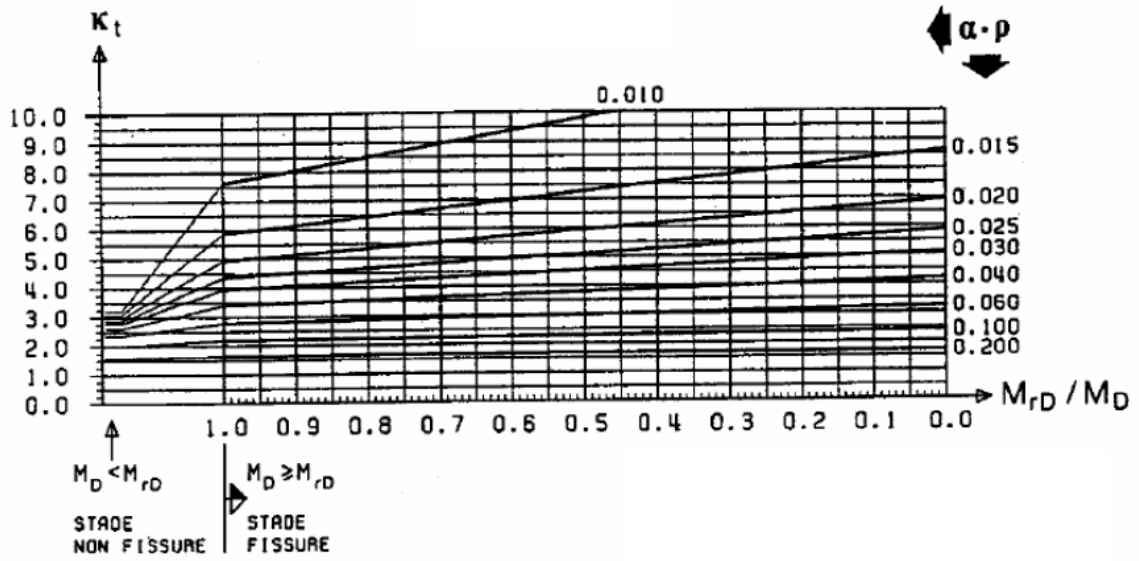


Figura A. 7: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=1,0$  e  $\varphi=2.5$ )

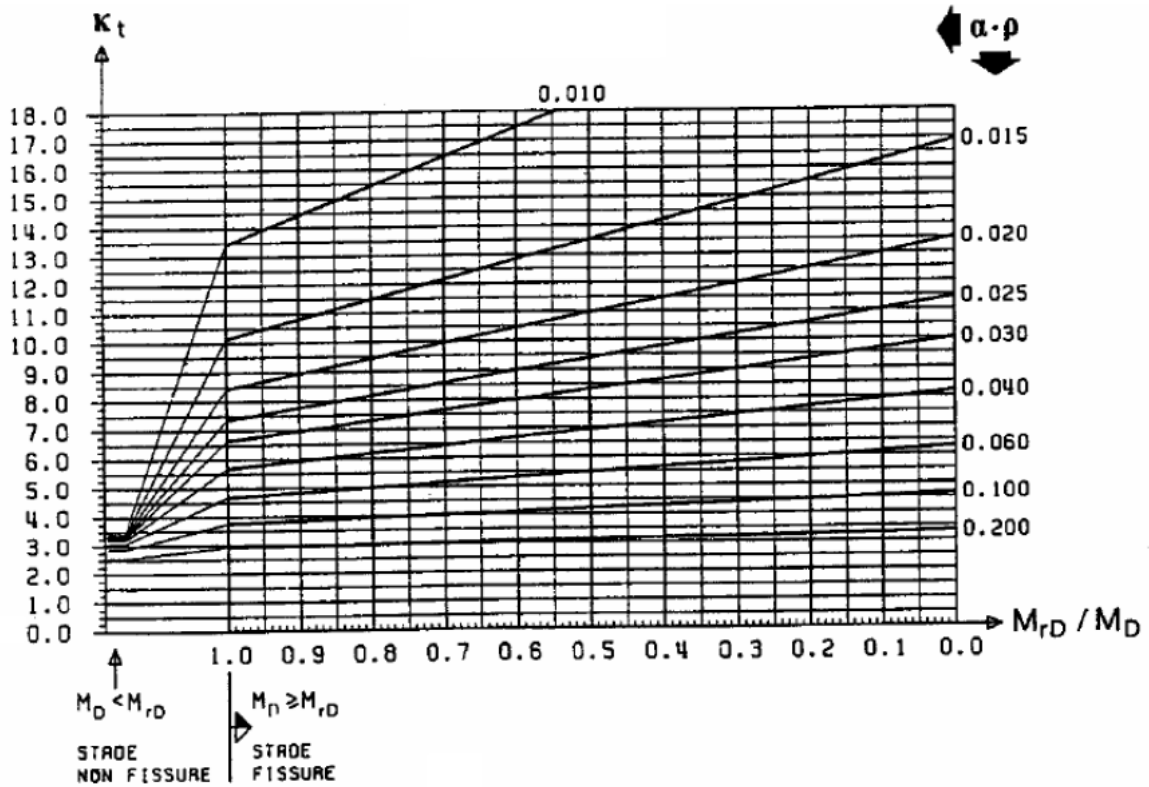


Figura A.8: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,8$  e  $\varphi = 2.5$ )

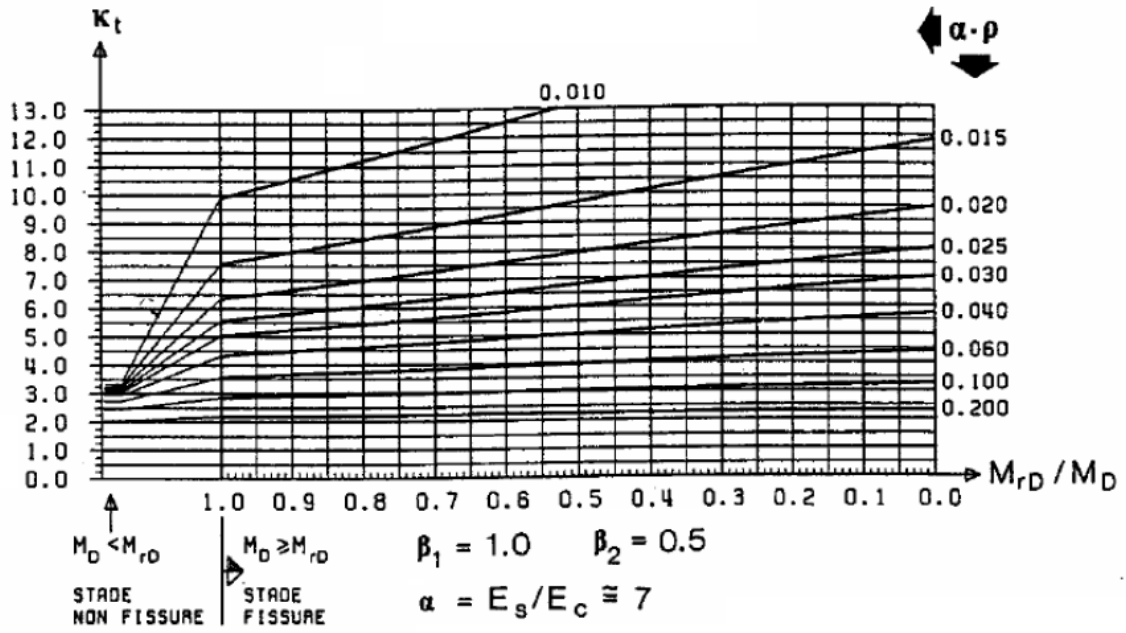


Figura A.9: Valores do coeficiente  $k_t$  - longo prazo ( $d/h=0,9$  e  $\phi=2,5$ )

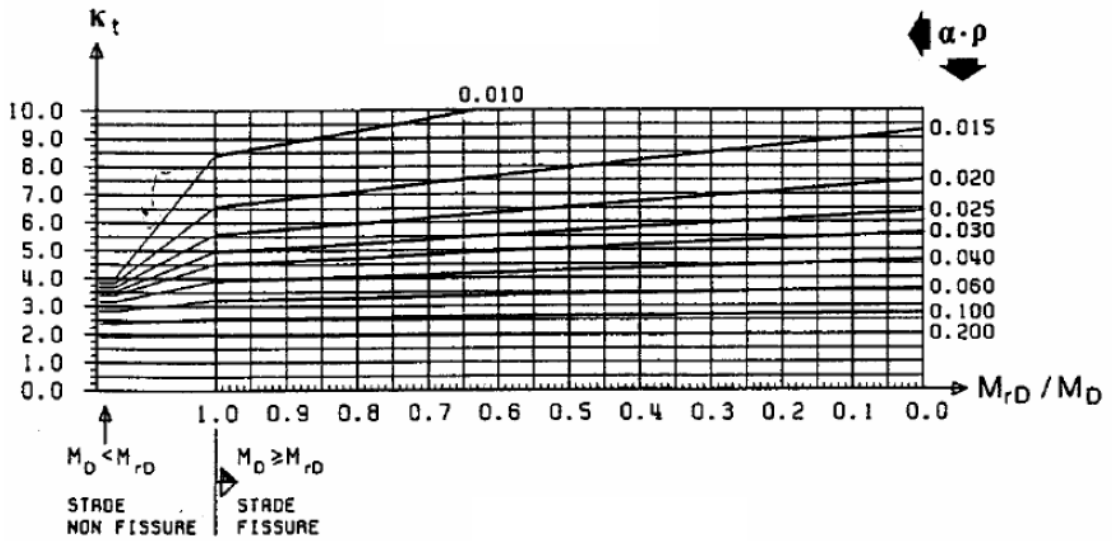


Figura A.10: Valores do coeficiente  $k_t$  - longo prazo ( $d/h=1,0$  e  $\phi=3,5$ )

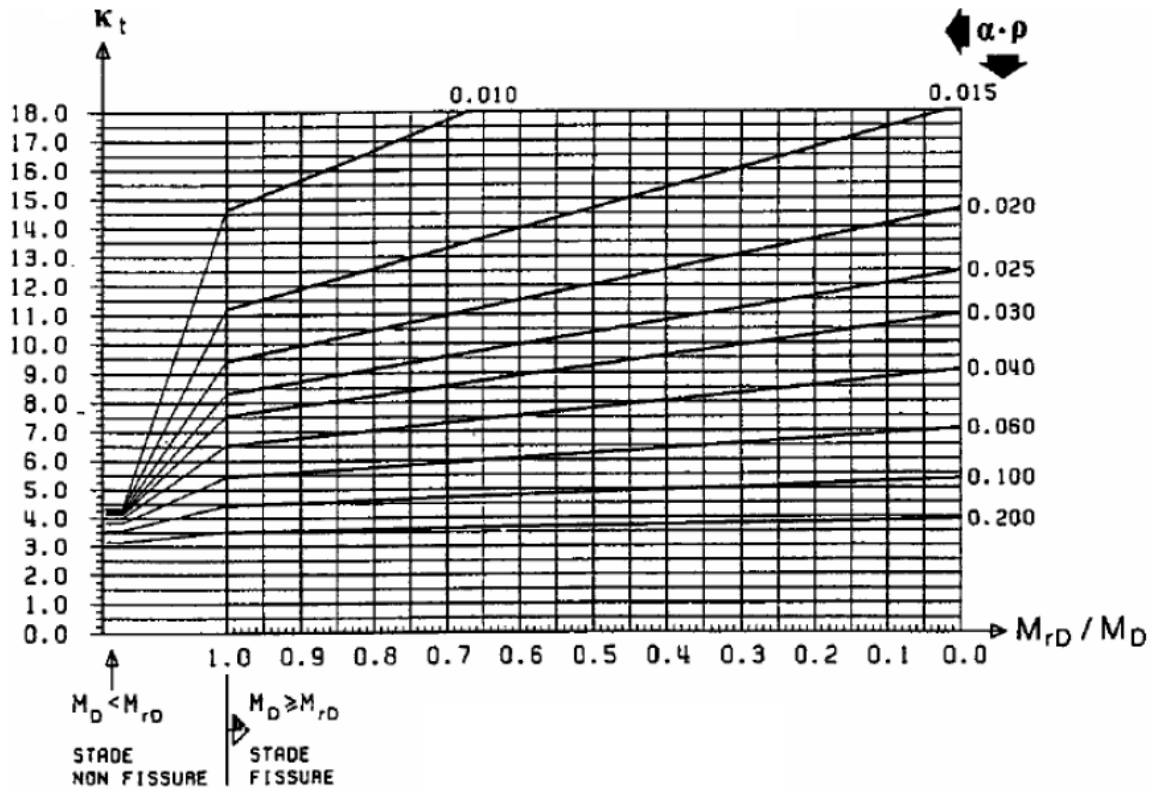


Figura A.11: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,8$  e  $\varphi=3,5$ )

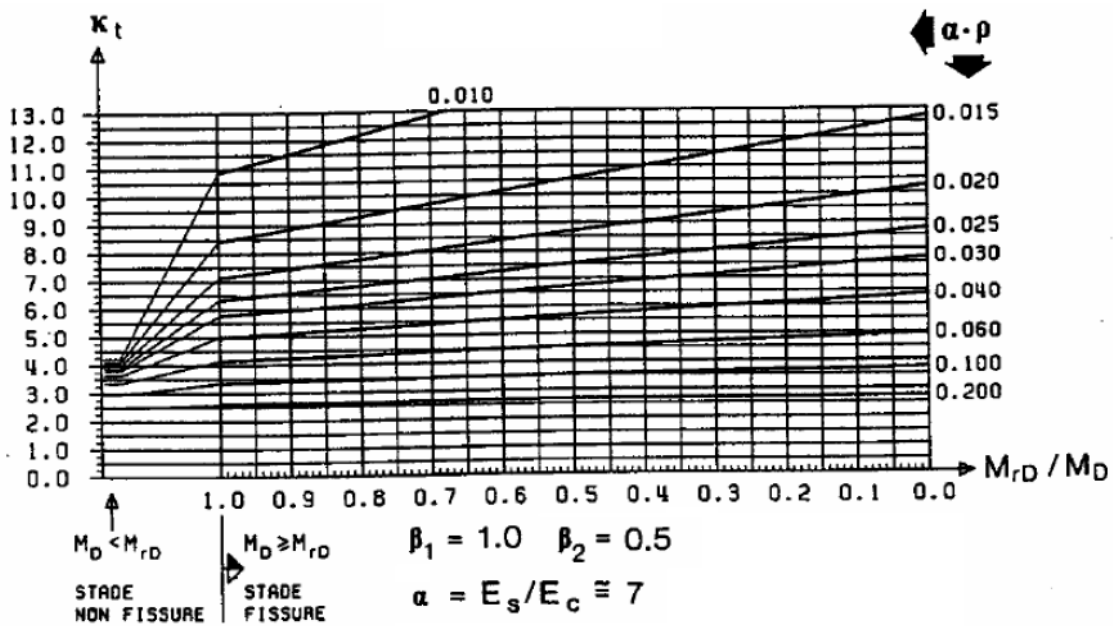


Figura A.12: Valores do coeficiente  $k_t$  – longo prazo ( $d/h=0,9$  e  $\varphi = 3,5$ )

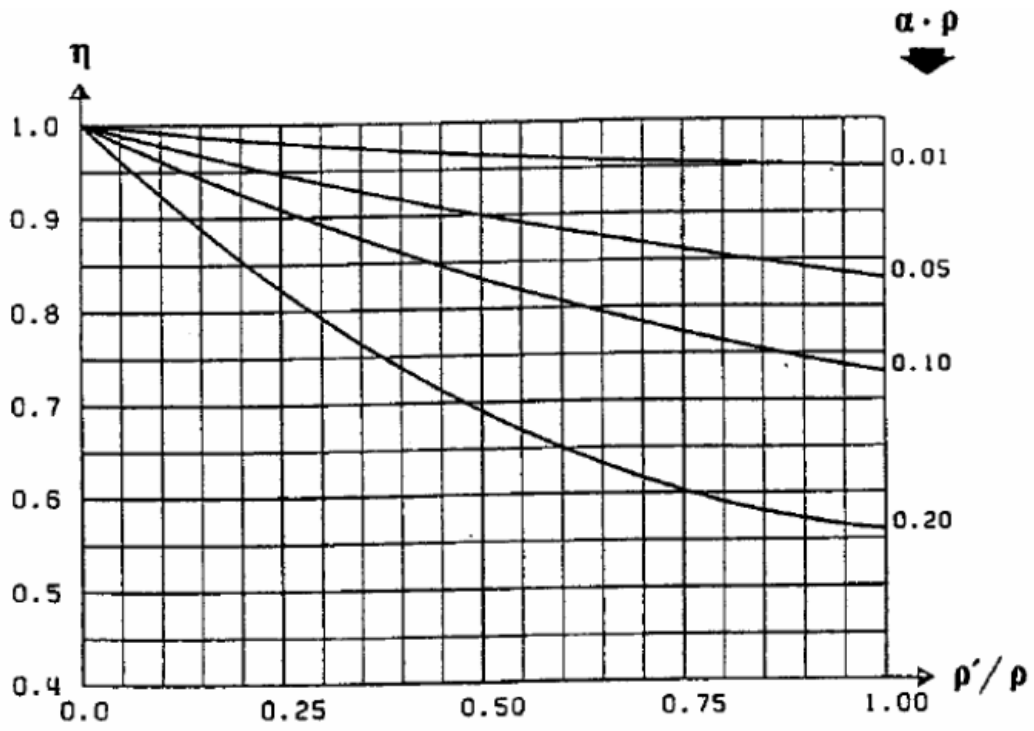


Figura A.13: Valores do coeficiente  $\eta$ .