

# Controlo de Trajectórias de Robots Redundantes Através de Matrizes Pseudoinversas

**Este artigo apresenta os aspectos matemáticos fundamentais da teoria das matrizes inversas generalizadas, analisa as suas principais propriedades e explora a sua aplicação no controlo de trajectórias de robots redundantes. Os robots redundantes apresentam vantagens em relação aos robots clássicos nomeadamente na optimização de trajectórias, no espaço livre ou na presença de obstáculos e na resolução de singularidades. No entanto, para este tipo de robots o controlo cinemático requer o uso de matrizes pseudoinversas. Assim, conceitos associados com o controlo através de pseudoinversas serão apresentados bem como alguns exemplos que mostram as dificuldades que, por vezes, a sua utilização acarreta. Nesta perspectiva, é estudado o controlo de robots planares com três, quatro e cinco graus de liberdade e é analisado o seu comportamento em pontos de singularidade, mostrando-se que, em alguns casos, se obtêm configurações não desejáveis.**

## 1. Introdução

Um robot redundante é um sistema que pode apresentar várias (ou, até, uma infinidade de) configurações para uma determinada posição do órgão terminal no espaço cartesiano. No entanto, é necessário decidir qual a solução particular que deve ser seleccionada de forma a optimizar um determinado conjunto de critérios. Assim, sob o ponto de vista cinemático, estes mecanismos introduzem uma grande versatilidade pois permitem a resolução de tarefas minimizando esforços, evitando eventuais obstáculos e eliminando singularidades indesejáveis. Embora estes robots apresentem as vantagens referidas, a utilização destes mecanismos ainda é pouco frequente. De facto, o controlo destes sistemas envolve modelos matemáticos sofisticados, aumentando a sua complexidade com o número de graus de liberdade. Uma análise dos estudos levados a cabo nesta área revela que a solução analítica da cinemática inversa de robots redundantes foi apenas conseguida para algumas estruturas especiais. Na maior parte dos casos a resolução cinemática inversa é somente possível por processos numéricos iterativos que podem apresentar um peso computacional elevado [1].

Nesta ordem de ideias este artigo encontra-se organizado em cinco secções. A secção 2 começa por introduzir os aspectos matemáticos fundamentais associados à teoria das matrizes inversas generalizadas. De seguida, nas secções 3 e 4, aplicam-se esses conceitos à resolução da cinemática de robots redundantes e hiper-redundantes analisando-se o seu desempenho para os casos particulares de robots planares com três, quatro e cinco graus de liberdade. Por último, na secção 5 traçam-se as principais conclusões que decorrem do estudo efectuado.

## 2. Matrizes inversas generalizadas

### 2.1 Definições

Para as matrizes  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $X \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  a fim de definir a matriz inversa generalizada ( $A^-$ ), a matriz inversa generalizada reflexiva ( $A_r^-$ ) e a matriz pseudoinvers ( $A^\#$ ) de  $A$  são usadas as relações:

$$AXA = A \quad (1)$$

$$XAX = X \quad (2)$$

$$(AX)^T = AX \quad (3)$$

$$(XA)^T = XA \quad (4)$$

As condições (1) a (4) são chamadas as *condições de Penrose*. Uma matriz inversa generalizada da matriz  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma matriz  $X = A^- \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  que satisfaz a condição (1). Por outro lado, uma matriz inversa generalizada reflexiva da matriz  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma matriz  $X = A_r^- \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  que satisfaz as condições (1) e (2). Por último, uma matriz pseudoinversa da matriz  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é uma matriz  $X = A^\# \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  que satisfaz as condições (1) a (4). A matriz pseudoinversa é normalmente designada por matriz de *Moore-Penrose* [2], [3].

### 2.2 Cálculo das matrizes pseudoinversas

Nesta sub-secção serão referidos três métodos de cálculo para as matrizes pseudoinversas.

#### 2.2.1 Cálculo por decomposição em valores singulares

Se  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , então  $A^T A$  é uma matriz não negativa cujos valores próprios [i.e., as soluções de  $(\lambda I - A^T A) = 0$ ] são números reais não negativos. Sejam os valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ) e faça-se:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, \min(m, n) \quad (5)$$

Obviamente resulta  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$ . Agora a matriz  $A$  pode exprimir-se como o produto de três matrizes

$$A = U \Sigma V^T \quad (6)$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ e } V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (7)$$

onde  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais e  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é definida por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_p & \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \text{ sem } \geq n \text{ ou } = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_p & \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \text{ sem } < n \quad (8)$$

Esta decomposição de  $A$  oferece um esquema para o cálculo da pseudoinversa. Quando  $A$  é decomposta em valores singulares como em (6) a sua pseudoinversa  $A^\#$  pode ser representada por [4]:

$$A^\# = V \Sigma^\# U^T \quad (9)$$

onde  $\Sigma^\#$  é a matriz  $(n \times m)$  definida por

$$\Sigma^\# = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p^{-1} & \vdots \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde  $p$  é o número de valores singulares não nulos.

### 2.2.2. Pseudoinversas de matrizes com característica máxima

Quando a matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  admite característica máxima, a respectiva pseudoinversa é calculada usando a matriz inversa de uma matriz não singular [5]. Assim, o cálculo da matriz pseudoinversa será:

i) Se  $m < n$  e  $r(A) = m$ , então

$$A^\# = A^T (A A^T)^{-1} \quad (11)$$

ii) Se  $m > n$  e  $r(A) = n$ , então

$$A^\# = (A A^T)^{-1} A^T \quad (12)$$

Será  $A^\# = A^{-1}$ , se  $m = n$  e  $r(A) = m$ . Deve-se notar que (12) indica que a pseudoinversa de um vector  $a \in \mathbb{R}^n$  pode ser calculada por

$$a^\# = \frac{a^T}{\|a\|^2} \quad (13)$$

## 3. Cinemática de um robot redundante

Como é sabido o modelo cinemático para um robot é descrito pelas seguintes relações:

$$x = f(q) \quad (14)$$

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (15)$$

onde  $q$  e  $\dot{q}$  são vectores  $(n \times 1)$  das posições e velocidades nas juntas,  $x$  e  $\dot{x}$  são os vectores  $(m \times 1)$  das posições e velocidades do órgão terminal no espaço cartesiano,  $f$  é a função vectorial que descreve a estrutura cinemática do robot e  $J$  é a matriz  $(m \times n)$  correspondente ao Jacobiano de  $f(q)$ .

Para uma determinada posição do órgão terminal no espaço operacional, a cinemática inversa do robot tem como objectivo a determinação de um conjunto de valores de variáveis nas juntas  $q(t)$  tal que a relação  $f(q(t)) = x(t)$  seja verificada. No caso de um robot redundante, isto é para  $m < n$ , o problema da determinação da cinemática inversa admite soluções múltiplas. Isto sugere que é possível explorar de forma conveniente o aspecto redundante, introduzindo determinadas condições que possibilitem obter um maior grau de "manipulabilidade" do robot na execução das tarefas. Outro aspecto importante consiste na possibilidade de se evitarem as singularidades cinemáticas, que ocorrem quando a matriz  $J$ , para certas soluções  $q(t)$ , tem característica inferior a  $m$ . Nestas situações o robot perde a capacidade de se mover numa determinada direcção, significando isto que a sua "manipulabilidade" foi reduzida. A medida da "manipulabilidade" de um robot foi definida por Yoshikawa [6] como,  $\mu = \sqrt{\det(JJ^T)}$ . Esta definição significa que o valor do determinante da matriz  $JJ^T$ , pode ser entendido como um índice da capacidade de posicionamento do órgão terminal do robot.

### 3.1 Resolução da cinemática inversa

A resolução da cinemática inversa de posição pode ser obtida à custa da forma diferencial:

$$\dot{q} = K(q)\dot{x} \quad (16)$$

onde  $K$  é uma matriz  $(n \times m)$  determinada a partir do Jacobiano. Whitney [7] propôs o uso da matriz pseudoinversa de Moore-Penrose para a matriz  $K$ , vindo a relação (3) da forma:

$$\dot{q} = J^+(q)\dot{x} \quad (17)$$

onde  $J^+$  é uma matriz definida como  $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ . À primeira vista esta solução é interessante, tanto mais que a matriz pseudoinversa gera um vector solução (de posição de juntas) que admite norma mínima, no sentido dos mínimos quadrados. Contudo, Bailieul [8] provou que, na prática, as singularidades cinemáticas não são evitadas, já que as velocidades das juntas são apenas minimizadas instantaneamente, podendo ser arbitrariamente elevadas na vizinhança das configurações de singularidade. Com vista à resolução deste problema, Nakamura [9] propuseram o uso de uma matriz inversa do Jacobiano calculada pelo método dos mínimos quadrados do Jacobiano, da forma:

$$J^* = J^T (J J^T + \alpha^2 I)^{-1} \quad (18)$$

onde  $\alpha$  representa um factor de amortecimento, correspondendo a uma modificação do Jacobiano que seja não singular em todo o espaço de trabalho. Usando este método, apenas se obtém uma aproximação da solução da cinemática inversa. Agora o problema consiste em encontrar os valores adequados para  $\alpha$  que conduzam a uma solução de norma mínima e que minimize o erro da posição calculada, isto é, que torne mínimo o valor de  $\|x - Jq\|$ . Valores altos para  $\alpha$  dão uma boa aproximação excepto nas proximidades dos pontos singulares. Note-se que uma escolha apropriada de  $\alpha$  depende do menor valor singular da matriz  $J$  que é uma medida da proximidade de pontos de singularidade [10].

Para a solução de (17) prova-se que uma solução geral da equação (15) pode ser dada por:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{I} - \mathbf{J}^+(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (19)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade ( $n \times n$ ) e  $\dot{\mathbf{q}}_0$  é um vector arbitrário ( $m \times 1$ ) de velocidade das juntas. Assim, verifica-se que (19) deriva de (17) por adição de um termo homogéneo criado pelo operador projecção  $\mathbf{I} - \mathbf{J}^+\mathbf{J}$  que selecciona as componentes de  $\dot{\mathbf{q}}_0$  no núcleo de  $\mathbf{J}$ , já que  $\dot{\mathbf{q}}_0$  produz apenas um movimento "interno" das juntas mantendo, sem alteração, a posição do órgão terminal [11].

Outro problema apresentado pela solução de (17) consiste no facto da repetibilidade dos valores de juntas para trajectórias repetitivas (de formas geométricas fechadas) não ser preservada, o que não é desejável em muitas situações.

### 4. Controlo de Trajectórias de Robots Redundantes e Hiper-Redundantes

Nesta secção aplica-se a formulação matemática desenvolvida anteriormente no controlo de trajectórias de robots planares com três, quatro e cinco graus de liberdade. Estes robots são considerados redundantes (Figura 1) pois têm três ou mais juntas ( $n \geq 3$ ) e pretende-se que executem trajectórias no espaço cartesiano ( $m = 2$ ).

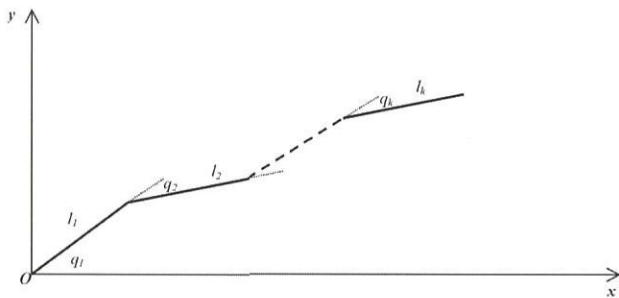


Figura 1: Estrutura de um robot planar redundante kR

Para este tipo de robot kR ( $k \in \mathbb{N}$ ) a cinemática directa e o Jacobiano são dadas por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} + \dots + l_k C_{12\dots k} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} + \dots + l_k S_{12\dots k} \end{bmatrix} \quad (20.a)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - \dots - l_k S_{1\dots k} & \dots & -l_k S_{1\dots k} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + \dots + l_k C_{1\dots k} & \dots & l_k C_{1\dots k} \end{bmatrix} \quad (20.b)$$

onde  $l_i$  é o comprimento do braço  $i$ ,  $S_{i\dots k} = \text{Sin}(q_i + \dots + q_k)$  e  $C_{i\dots k} = \text{Cos}(q_i + \dots + q_k)$ .

As posições das juntas podem ser calculadas através da integração, em relação ao tempo, das velocidades de acordo com o descrito no diagrama de blocos da Figura 2

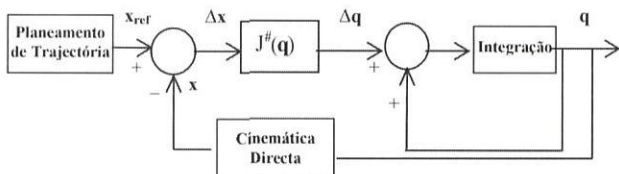


Figura 2: Diagrama de blocos para cálculo da cinemática inversa usando a pseudoinversa.

Baseado neste algoritmo, foi analisado o desempenho do controlo de trajectórias para diferentes tipos de robots. Estudaram-se as trajectórias para o robot 2R (não redundante), 3R (redundante) e para o 4R e 5R (hiper-redundantes) impondo-se ao órgão terminal uma trajectória circular repetitiva no espaço operacional definida por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.5[1 - \cos(\pi t)] \\ 0.5[2 + \sin(\pi t)] \end{bmatrix}, 0 \leq t \leq 30 \quad (21)$$

Em todas as experiências, para todos os robots, considerou-se  $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_k = 3$ , e  $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_k$ .

#### 4.1. Robot Não Redundante

Numa primeira experiência considerou-se um robot 2R com uma posição inicial  $\mathbf{q}(0) = [0.89\pi - 0.78\pi]^T$ . Os resultados da Figura 3 mostram as posições das juntas para o algoritmo de determinação da cinemática inversa baseado em (17) usando a matriz jacobiana "standard"  $2 \times 2$ .

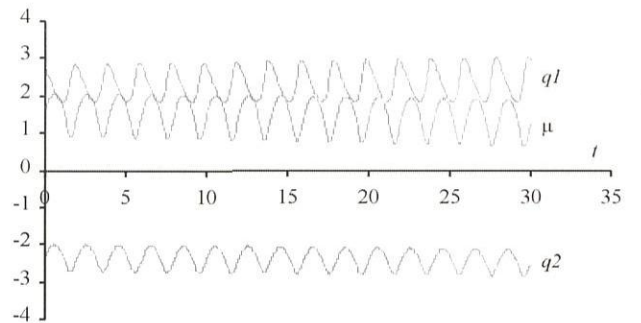


Figura 3: Posições das juntas para o robot 2R

Como era esperado, nesta experiência a trajectória das juntas e o índice de manipulabilidade são repetitivos ao longo do movimento circular em xy.

#### 4.2. Robot Redundante

Numa segunda experiência usou-se o robot 3R com uma posição inicial  $\mathbf{q}(0) = [\pi - \pi/2 - \pi/2]^T$ . A Figura 4 mostra as posições das juntas quando se usa a matriz jacobiana inversa generalizada.

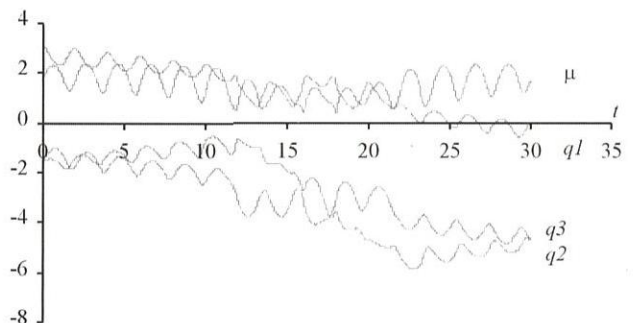


Figura 4: Posições das juntas para o robot 3R

Note-se que a manipulabilidade não é óptima durante toda a experiência e que as trajectórias das juntas exibem mudanças bruscas, o que provoca altas velocidades. Além disso, vê-se que as trajectórias não são repetitivas, apresentando um comportamento quase caótico [12] e [13].

## 4.3. Robots Hiper-Redundantes

Por último consideram-se os robots hiper-redundantes 4R e 5R. Tal como anteriormente, adoptou-se a matriz jacobiana inversa generalizada no algoritmo da cinemática inversa. As posições iniciais são respectivamente:

$$q(0) = [0.97\pi - 0.28\pi - 0.41\pi - 0.39\pi]^T \text{ e}$$

$$q(0) = [0.86\pi - 0.34\pi - 0.26\pi - \pi/3 - 0.23\pi]^T$$

As Figuras 5 e 6 mostram os resultados das experiências

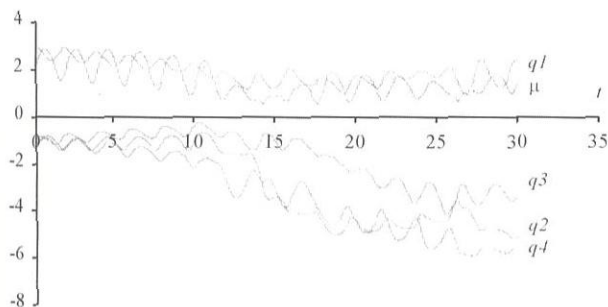


Figura 5: Posições das juntas para o robot 4R.

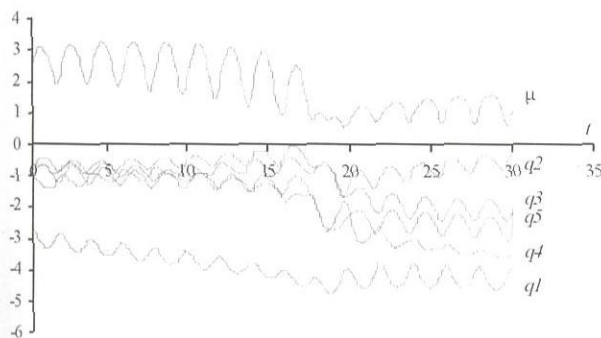


Figura 6: Posições das juntas para o robot 5R.

Em ambos os casos observa-se um desempenho sub-ótimo semelhante ao verificado para o robot 3R. Por outro lado, o índice de manipulabilidade máxima ( $\mu_{max}$ ) melhora à medida que o número de graus de liberdade aumenta (Figura 7) [14].

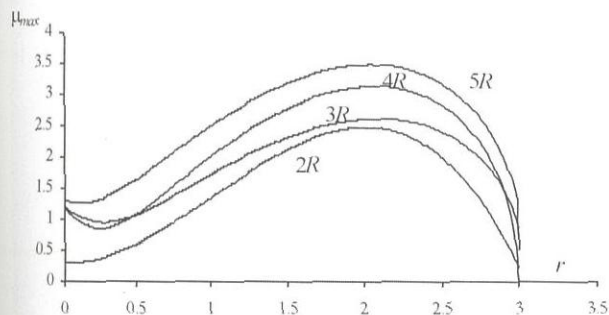


Figura 7: Índice de manipulabilidade máxima ( $\mu_{max}$ ) versus a distância radial  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  para os robots 2R, 3R, 4R e 5R.

## 5. Conclusões

Este artigo apresenta os aspectos fundamentais da teoria das matrizes inversas generalizadas e a sua aplicação ao controlo de robots redundantes. Assim, foram analisados vários métodos de cálculo das matrizes inversas generalizadas por forma a permitir a resolução da cinemática inversa para este tipo de robots. Tendo em conta a formulação matemática, estas técnicas foram aplicadas ao controlo de robots redundantes e hiper-redundantes revelando que tais algoritmos conduzem a desempenhos sub-óptimos tanto no que respeita ao índice de manipulabilidade como às velocidades das juntas. Nesta perspectiva, algoritmos que conduzam a desempenhos superiores são uma área de investigação importante.

## 6. Referências

- [1] C.A Klein, e C. C Huang., "Review of Pseudoinverse Control for Use With Kinematically Redundant Manipulators", *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 13, pp. 245-250, 1983.
- [2] A. Ben-Israel, e T. Greville, "Generalized inverses: theory and applications", Wiley, 1974.
- [3] C. Radharkrishna Rao, S. Kumar Mitra, "Generalized Inverse of Matrices and its Applications", John Wiley & Sons, 1971.
- [4] S. L. Campbell e C. D. Meyer, Jr, "Generalized Inverses of Linear Transformations", Dover Publications, 1979.
- [5] J. L. Goldberg, "Matrix Theory with Applications", McGraw-Hill., 1992.
- [6] T. Yoshikawa, "Foundations of Robotics: Analysis and Control", MIT Press, 1988.
- [7] D. Whitney, "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses", *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 10, pp. 47-53, 1969
- [8] J. Bailieul, "Kinematic Programming Alternatives for Redundant Manipulators", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, St. Louis, 1985, pp. 722-728.
- [9] Y. Nakamura, "Advanced Robotics: Redundancy and Optimization", Addison-Wesley, 1991.
- [10] Bruno Siciliano, "Kinematic Control of Redundant Robot Manipulators: A Tutorial", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 3, pp. 201-212, 1990.
- [11] W.J.Chung, Y. Youm e W. K. Chung, "Inverse Kinematics of Planar Redundant Manipulators via Virtual Links With Configuration Index", *J. of Robotic Systems*, vol. 11, pp. 117-128, 1994.
- [12] J.A.Tenreiro Machado e Fernando Duarte, "Redundancy Optimization for Mechanical Manipulators", Proc. AMC'98- 5<sup>th</sup> International Workshop on Advanced Motion Control, Coimbra, 1998.
- [13] Fernando B.M. Duarte e J.A. Tenreiro Machado, "Kinematic Optimazition of Redundant and Hyper-Redundant Robot Trajectories", ICECS'98-5<sup>th</sup> IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Lisboa, Portugal, 1998.
- [14] Fernando B. Duarte e J.A. Tenreiro Machado, "On the Optimal Configuration of Redundant Manipulators", INES'98- 9<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Intelligent Engineering Systems, Viena, Áustria, 1998.

Escola. Superior de Tecnologia de Viseu,  
Departamento de Matemática

Instituto Superior de Engenharia do Porto,  
Departamento de Eng. Electrotécnica