

# MULTI INDEX MODEL – UMA ABORDAGEM PARA APLICAÇÃO AO MERCADO ACCIONISTA EM PORTUGAL

*Adalmiro Andrade Pereira  
Mestre em Finanças – FEP  
Docente no ISCAP*

## ABSTRACT

*O mercado accionista, de uma forma global, tem-se revelado nos últimos tempos uma das principais fontes de incentivo ao mercado de valores mobiliários.*

*O seu impacto junto do público em geral é enorme e a sua importância para as empresas é vital. Interessa, então, perceber como é que a teoria financeira tem abordado a avaliação e a compreensão do processo de formação de uma cotação. Desde os anos 50 até aos dias de hoje, interessa perceber como é que os diferentes autores têm tratado esta abordagem e quais os resultados deste confronto. Interessa sobretudo perceber a abordagem de Stephen Ross e a teoria da arbitragem. Na sequência desta abordagem e com o aparecimento do Multi Index Model, passou a ser possível estimar com maior precisão a evolução da cotação, na medida em que esta estaria dependente de um vasto conjunto de variáveis, que abragem uma vasta área de influência. O contributo de Ross é por isso decisivo.*

*No final interessa reter a melhor técnica e teoria, que defenda os interesses do investidor. Face a isto resta, então, saber qual a melhor técnica estatística para proceder a estes estudos empíricos.*

## 1 - TEORIA DA ARBITRAGEM DOS PREÇOS

### 1.1 “Multi Index Model”

A seguinte história foi retirada e adaptada do texto “*The Arbitrage Principle in Financial Economics*” – Hal R. Varian<sup>1</sup>, e representa uma ilustração da teoria da arbitragem.

---

<sup>1</sup> Varian, Hal R., (1987), “The Arbitrage Principle in Financial Economics”, *The Journal of Economics Perspectives*, vol. 1, n.º 2, pp. 55-72.

*Um professor de economia e um agricultor estavam à espera do autocarro. Para passar o tempo, o agricultor sugeriu que jogassem um jogo.*

*“Que tipo de jogo gostaria de jogar?” – perguntou o professor.*

*“Bom,” – disse o agricultor – “e que tal este: eu faço-lhe uma questão, e se não souber a resposta dá-me 10,00€. Depois faz-me uma pergunta e se eu lhe não souber responder dou-lhe 10,00€ ”.*

*“Isso era interessante,” – disse o professor – “mas eu aviso-o que não sou uma pessoa qualquer. Eu sou professor de economia.”*

*“Nesse caso mudamos as regras. Fazemos assim, se não souber responder à minha pergunta dá-me 10,00€, e se eu não lhe souber responder só lhe dou 5,00€.”*

*“Assim já me parece melhor.” – disse o professor.*

*“Então a minha questão é a seguinte: O que é que sobe a colina com cinco pernas e desce com apenas três?” – perguntou o agricultor.*

*O professor ponderou a sua resposta e depois respondeu: “De facto isso não sei. Mas afinal, o que é que sobe a colina com cinco pernas e desce com três?”*

*“Bem,” – disse o agricultor, “eu também não faço ideia. Mas se me der 10,00€, eu dar-lhe-ei os meus 5,00€.”*

Um dos benefícios do CAPM e de outros modelos como o “*Single Index Model*” é a sua simplicidade, assim como o número reduzido de inputs necessários. No entanto, dado o conjunto dos pressupostos destes modelos e devido às críticas subjacentes, o passo seguinte terá de ser o de reduzir os pressupostos e reconhecer que mais do que um factor pode afectar a cotação dos títulos. Por estas duas razões, o modelo “*Single Index Model*” será a forma mais lógica de desenvolver a análise a um Portfolio que pode ser implementado, de forma a fornecer informação precisa na tomada de decisão na construção do Portfolio.

A teoria da arbitragem dos preços – “*Arbitrage Pricing Theory*” (APT) – é baseado em menos pressupostos do que o CAPM e gera um modelo de equilíbrio que é similar ao CAPM. A noção básica subjacente do APT é a “lei de um preço”, ou seja, dois títulos que têm o mesmo risco e que pertencem à mesma classe de rendimento não deverão ser transaccionados a cotações diferentes. Para além disso, o APT baseia a sua derivação num modelo de índices, designado como “*Single Index*

*Model*”, de um processo de gerar rendimentos, enquanto que no CMT o modelo de gerar rendimento, o modelo “*Single Index Model*”, é utilizado apenas como meio para testar e desenhar a linha de títulos do mercado (SML – “*Security Market Line*”). O facto de o APT gerar uma relação de mercado similar ao CAPM concede e reforça uma análise empírica que suporta a noção de uma relação objectiva do equilíbrio risco/rendimento no mercado.

## 1.2 - A Teoria da Arbitragem dos Preços

Stephen Ross desenvolveu um modelo alternativo do equilíbrio de títulos no mercado relativamente ao CAPM conhecido como a teoria da arbitragem nos preços “*Arbitrage Pricing Theory*” (APT). O modelo não depende da noção de Portfolio de mercado. Em vez disso, os seus rendimentos derivam das propriedades do processo que gera o rendimento das acções e utiliza a arbitragem para definir e garantir o equilíbrio.

Um trabalho de referência nesta área é a investigação empírica da Teoria da Arbitragem dos Preços realizada por Ross e Roll<sup>2</sup>. Os testes empíricos são suportados pela teoria da arbitragem nos preços dos activos por Ross, considerado este estudo como o “pai” dos estudos empíricos relativamente à Teoria da Arbitragem dos Preços. Utilizando informação para títulos individuais durante o período de 1962-1972, pelo menos três, e provavelmente quatro factores, foram encontrados pelo processo de gerar retornos. A teoria é suportada pelos retornos esperados, dependentes do factor estimado e de um conjunto de variáveis.

A teoria APT formulada por Ross oferece uma alternativa testável ao CAPM introduzido por Sharpe, Lintner e Mossin. Embora o CAPM tenha levado a um trabalho empírico relevante desde a década de sessenta, sendo a base da teoria de Portfolio, o acumular de pesquisas aumentou as dúvidas sobre a sua capacidade de explicar empiricamente os retornos dos activos.

O modelo APT significa mais do que um modesto melhoramento sobre o CAPM, em virtude dos trabalhos que o colocavam em causa,

---

<sup>2</sup> “An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory” – Richard Roll, Stephen A. Ross; *Journal of Finance*, volume 35, 1980.

evidenciado pelo número de diferentes teorias, mas relacionadas com as de Hakansoon, Mayers, Merton, Kraus and Litzenberg, com as evidências empíricas anómalas de Ball, Basu, Reinganum e com questões acerca da viabilidade do CAPM como teoria empírica, como é o caso de Roll. Mesmo assim, o CAPM continua a ter lugar central na mentalidade académica e na dos financeiros, tais como os gestores de Portfólios, consultores de investimento e analistas de títulos.

Roll e Ross referem que há uma boa razão para a durabilidade do CAPM. É que é compatível com um dos principais factores no conhecimento empírico da regularidade do retorno dos activos – a volatilidade.

Aparentemente, tudo nos leva a crer, em função do CAPM, que a tendência para um único factor resulta de que uma perturbação aleatória, que gera retornos para cada título individual através de uma relação funcional (linear) precisamente entre o retorno e a volatilidade. As derivações à equação do CAPM, estão relacionadas com os primeiros princípios da teoria da utilidade, embora esta análise produza, por si só, asserções demasiado óbvias relativamente ao CAPM. Uma revisão dos textos financeiros revela que as racionalizações do CAPM são baseadas na dicotomia entre o risco diversificado e não diversificado ou sistemático e não sistemático, uma distinção que é analisada por um processo linear de estimação de retornos.

O APT é uma alternativa apropriada que está de acordo com as regras gerais que estão por detrás do CAPM. De facto, o APT é baseado num processo linear de gerar retornos. Para além disto, não é restrito a um único período, mantém-se nos casos de multi-periodicidade. Embora seja consistente com qualquer prescrição para a diversificação do Portfólio, nenhum Portfólio, em especial, se destaca no APT. Diferente do CAPM, não há o requisito de que o Portfólio de mercado seja em média a solução em termos eficiência sobre a variância.

Há duas grandes diferenças entre o APT e o modelo original de Sharpe, um modelo de gerar rendimento a um único factor que se acreditava ser a intuitiva eminência por detrás do CAPM. Em primeiro lugar, o APT permite mais do que um factor de geração de rendimento, ou seja, há mais do que um factor com a capacidade explicativa sobre o rendimento. Em segundo lugar, o APT demonstra que como qualquer equilíbrio de mercado tem de ser consistente com a inexistência de lu-

cro da arbitragem, todo o equilíbrio deverá ser caracterizado por uma relação linear entre cada retorno esperado de um título e a relação da variação do retorno sobre os factores explicativos. Dado que se verifica neste modelo, a ausência de risco derivado do lucro da arbitragem – uma condição suficientemente fácil para aceitar à priori – leva-nos imediatamente para o APT.

Um estudo empírico relacionado com o APT é o relatório de Brennan. A aproximação de Brennan, segundo Roll e Ross, decompôs os resíduos e concluiu que o “verdadeiro processo de gerar retornos deve ser representado, pelo menos, por um modelo de dois factores em vez de um modelo de um único factor”. Brennan, viu perfeitamente que “não é possível sectionar os testes “cross-sectional” do CAPM, porque apenas no caso do modelo de factor único é possível relacionar retorno ex-ante e ex-post”. A utilidade empírica do APT encontra-se precisamente na sua habilidade de permitir esses testes “cross-sectional” com a presença de um factor ou mais.

A possibilidade de existirem múltiplos factores com capacidade explicativa sobre o processo de gerar o rendimento tinha sido, reconhecida há já muito tempo. Farrar e King, por exemplo, utilizaram métodos analíticos de factores. O seu trabalho focou as influências industriais, mas era empiricamente insuficiente. Como o APT não era capaz de prever os efeitos “cross-sectional” dos factores ligados à indústria nos retornos esperados, nenhum dos testes conduzidos levaram a resultados significativos sobre a presença desse efeito.

Rosenberg e Marathe analisaram o que eles chamam de componentes de retorno fora do mercado. Encontraram suporte empírico inequívoco da presença desses componentes. O trabalho de Rosenberg e Marathe emprega variáveis descritivas externas para prever mudanças entre períodos nos parâmetros do CAPM. Verificaram que “a exploração dos modelos multi-factoriais do retorno dos títulos, com a definição de factores descritivos pré-determinados, como oposto ao modelo factor único ou de mercado, é conclusivo”. Mas, eles não têm a mesma certeza da influência desses factores múltiplos nos rendimentos individuais esperados, e em vez disso, focaram a sua influência combinada no Portfólio de mercado, ou seja, analisaram os factores em grupo e não separadamente. Por outras palavras, assumiram o CAPM e decompuseram os betas de mercado único nas suas partes constituintes.

A ideia de que o Portfolio de mercado é uma construção que capta as influências de vários factores que justificam a evolução do mercado, está de acordo com as ideias teóricas de Rosenberg e Sharpe. No entanto, Rosenberg e Marathe não conseguiram efectivar testes definitivos do APT.

Mesmo assim, existem evidências suficientes nos trabalhos empíricos passados para concluir que podem existir factores múltiplos nos processos de gerar retornos de activos, dos quais o trabalho levado a cabo por Ross e Roll é o expoente máximo.

Relativamente à verificação empírica de Roll e Ross, há a referir que esta parte de um desenvolvimento detalhado da teoria, seguindo-se a intenção de extrapolar as conclusões da teoria chegando a uma conclusão final em termos empíricos. É esta a premissa do modelo APT.

Assim como o CAPM é derivado do pressuposto que o comportamento do retorno aleatório dos activos segue uma distribuição normal, o APT também começa com o pressuposto sobre o processo de gerar retornos. Assume-se que os indivíduos acreditam (homogeneamente) que o retorno, no conjunto dos activos a considerar, é constituído por um modelo de geração de rendimento associado a  $K$  de factores que pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{r_i} &= E_j + b_{ij} \delta_j + \dots + b_{ik} \delta_k + \overline{\epsilon_{ij}} \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

O primeiro termo da fórmula,  $E_j$ , é o retorno esperado nos  $i$ -egéssimo activo. Os  $k$  termos na forma  $b_{ij} \delta_j$  representam:  $\delta_j$  representa a média do factor  $j$ -egéssimo comum ao retorno de todos os activos considerados; o coeficiente  $b_{ij}$  quantifica a sensibilidade do retorno do activo  $i$  aos movimentos do factor comum  $\delta_j$ . Refira-se que o factor comum captura as componentes sistemáticas de risco do modelo. O termo final  $\overline{\epsilon_{ij}}$ , é um termo ruído ou residual, i.e., um componente de risco não sistemático, idiossincrático. Assume-se que reflecte a influência aleatória de informação que não é relacionada com os outros activos  $i$  e  $j$ .

Face ao pressuposto descrito e apresentado anteriormente, temos que:

$$E \{ \overline{\epsilon_i} / \overline{\delta_j} \} = 0 \quad (2)$$

Note-se que  $\epsilon_i$  é quase independente de  $\overline{\epsilon_j}$  para todos os  $i$  e  $j$ . Se esta dependência existisse sobre  $\epsilon_i$ , isto seria dizer que há mais do que um factor comum hipotético  $k$ , com capacidade explicativa. Ao se assumir que, para o conjunto de  $n$  activos considerados, não haverá um número de factores  $k$  muito relevante, estávamos a delimitar a amplitude explicativa do modelo.

O pressuposto de um modelo de geração de  $k$  factores é bastante similar à restrição de Arrow-Debreu que releva os retornos dos activos nos diferentes estados de natureza ou de evolução. Se os termos residuais são omitidos da primeira fórmula, dir-se-ia que cada activo  $i$  tem retorno  $r_i$ , que será uma combinação linear exacta dos retornos num activo sem risco (entendido como tendo retornos idênticos em cada estado) e os retornos derivados de outros  $k$  factores, ou colunas de vectores,  $\delta_1, \dots, \delta_k$ .

Nesta relação, o retorno sem risco e cada um dos  $k$  factores podem ser expressos como combinações lineares de outros retornos, ou seja,  $r_j$  por  $r_{k+1}$ . Assim, Portfolios dos primeiros  $k+1$  activos são substitutos perfeitos para os outros activos no mercado. Como eventuais títulos que sejam substitutos perfeitos hão-de ser igualmente avaliados, deverá existir um conjunto de factores com capacidade explicativa para os retornos individuais gerados pelo modelo. Como consequência, muitos Portfolios poderão ser substituídos por outros com idêntica estrutura tendo dessa forma o mesmo valor.

Tentar definir os factores comuns com um carácter sistemático é o mesmo que perguntar o que causa os valores da covariância dos termos no CAPM. Se existirem apenas poucos componentes sistemáticos do risco, seria de esperar que se relacionassem com agregados económicos fundamentais como o PIB ou com a taxa de juro. O formalismo do modelo factorial sugere que a estrutura teórica e empírica global deve ser explorada para melhor compreender até que ponto é que as forças económicas afectam os retornos de uma forma significativa. Relativamente ao APT, o processo de gerar retornos é tomado como um dos pontos base da teoria. Consideram-se as causas básicas subjacentes do processo de gerar retornos como sendo uma potencial e importante área que podemos investigar dentro dos testes ao APT.

### 1.3 - Comparação CAPM – APT

É de referir que, em contraste com o CAPM, o APT não assume a existência de um único período de investimento, de impostos que o investidor possa emprestar e pedir emprestado a uma taxa isenta de risco, e que os investidores seleccionem Portfolios tendo por base a média e a variância de rendimento.

Um pressuposto adicional utilizado pelo APT, e básico para este modelo de equilíbrio, diz respeito ao processo de gerar o retorno nos títulos. Em particular, o APT assume que o rendimento dos títulos é linearmente relacionado com um conjunto de factores implícitos nos rendimentos, que faz com que os rendimentos das acções cresçam ou decresçam. Recorde-se que antes, quando foi referida a existência de um factor, falava-se do efeito geral de mercado. O modelo APT vem referir que podem existir outros factores.

A fórmula geral do modelo é uma equação de um “*Multi Index Model*” generalizado a partir do “*Single Index Model*”. Assim, valores elevados para um qualquer coeficiente beta indicam uma grande sensibilidade, enquanto que baixos valores indicam uma menor sensibilidade do rendimento das acções face a um factor particular.

Uma das críticas que se pode efectuar ao APT é que não especifica o número ou o tipo de factores que são importantes para determinar o rendimento dos títulos. É possível esperar que elementos fundamentais como a taxa de juro, a taxa de inflação, o crescimento económico, o prémio de risco e outras mudanças sejam importantes em termos da determinação dos rendimentos. Pode-se considerar a representação de um índice de mercado como um efeito geral de mercado, representativo das características de liquidez e identificável com o comportamento do mercado. Aspecto de difícil tratamento é a explicação dos diferentes factores incluídos no modelo APT.

Para além disto, a equação que especifica o modelo um termo de erro possui as mesmas características referidas anteriormente, tendo uma média esperada de zero, na medida em que não está correlacionado com os títulos de acordo com as especificações do “*Single Index Model*”. É especialmente importante que os factores do modelo englobem a correlação entre os títulos, assegurando assim a especificação dos elementos residuais não correlacionados. Isto porque, ao derivar o



modelo APT, pode-se reduzir o termo de erro a zero através do recurso à diversificação. Por outras palavras, ao construir um Portfolio com um grande número de títulos, o termo de erro pode ser eliminado (ou reduzido à insignificância), podendo se, então, focar a atenção na avaliação dos factores responsáveis pelas alterações num Portfolio e suas características.

#### **1.4 - Análise de Portfolios com base no “*Multi Index Model*”**

Os modelos de análise de factores têm uma utilidade importante na análise dos aspectos críticos de um Portfolio. O “*Single Index Model*” apresentado anteriormente é bastante simplificado. Há fortes evidências empíricas da existência de vários factores que afectam o rendimento dos títulos, para além de um único efeito predominante, como está demonstrado pelo “*Single Index Model*”, traduzido no efeito do mercado. Como resultado, os investidores executam um trabalho mais consistente com um “*Multi Index Model*” do que com um “*Single Index Model*” na análise de um Portfolio, uma vez que lhes permite alargar o leque de factores explicativos ou o potencial de capacidade explicativa.

A aplicação do “*Multi Index Model*” requer que sejam, em primeiro lugar, identificados os factores significativos que afectam o rendimento dos títulos. Um factor óbvio é o efeito do mercado, que já é utilizado no “*Single Index Model*” e que é novamente incorporado. Há contudo um menor consenso sobre outros efeitos que devem ser incluídos.

Para a definição dos factores apropriados é necessário uma análise detalhada dos efeitos que podem ter teoricamente um impacto importante nos rendimentos. Depois é necessário realizar uma aproximação estatística dentro do contexto em estudo. Sugere-se, por exemplo, que o factor liquidez possa ser um elemento útil acrescido ao efeito geral de mercado. Outros factores que se podem incorporar facilmente são os efeitos da indústria ou os efeitos gerais de grupos de acções (como acções ligadas ao sector energético ou caracterizados por serem estáveis, cíclicas ou em crescimento). Para visualizar a importância ou o significado destes efeitos, podemos recorrer às ferramentas estatísticas de multi-variância como os cluster e a análise de factores, e determinar os principais factores explicativos relativamente ao comportamento das cotações ou grupos de acções.

É possível e justificável que factores como a inflação, o crescimento económico real, as taxas de juro ou as taxas de câmbio tenham um impacto significativo na determinação do rendimento dos títulos. Enquanto que estas variáveis têm grande suporte teórico e lógico, a verificação de que até que ponto ou qual a extensão em como estes factores afectam a cotação dos títulos, ou seja, o rendimento representa um problema econométrico considerável. Existem também desfasamentos temporais significativos que podem ser considerados variáveis, como é o caso dos desfasamentos que se verificam entre os acontecimentos económicos e a resposta da cotação dos títulos. Temos, por exemplo, o caso da divulgação dos resultados contabilísticos de uma empresa e o momento em que eles são efectivamente apurados. Estes dizem respeito, regra geral, a um período que vai de 1 de Janeiro a 31 de Dezembro de cada ano. Ora, a divulgação dos resultados não é coincidente com este período, sofrendo em média um atraso de três meses. Definir e interpretar o resultado associado às variáveis é a tarefa mais árdua dos testes empíricos do modelo APT.

### **1.5 - O “*Multi Index Model*”**

O “*Single Index Model*” tem como pressuposto que o factor geral de mercado seja o único efeito sistemático predominante, em termos explicativos, sobre as variações dos títulos. Há, contudo, outros factores que são significativos em termos de variação no rendimento dos títulos e que dão uma explicação adicional relativamente factor geral de mercado. Estes factores são considerados factores secundários do mercado. Por exemplo, as acções que se espera que tenham uma taxa de crescimento acima da média (acções em crescimento) tendem a evidenciar um comportamento igual às do seu grupo, isto é, classes de acções cíclicas, estáveis e em crescimento tendem a ter um comportamento similar às do grupo onde estão inseridas ou a que pertencem. Finalmente, as acções de indústrias tradicionais, como as indústrias de aço ou do sector energético, tendem igualmente a ter o mesmo comportamento do grupo a que pertencem.

A tabela<sup>3</sup> nº 1 mostra as maiores fontes de risco e a percentagem do risco total de uma acção a ser explicada pelos factores associados a essas fontes.

**Tabela n.º 1 – As Fontes de Risco de uma Acção**

Fonte	% de risco
Mercado Geral	30
Sector de Mercado: em crescimento, cíclico, estável, energético	15
Tipo de Indústria	10
Específico	45
Total	100

Nesta tabela estão apresentadas quatro fontes de risco: o efeito geral de mercado, o efeito específico, o efeito do sector de mercado e o efeito da indústria combinada. Estes últimos dois factores explicam 25% do risco total de uma acção, ou seja, quase tanto como o que é verificado para o efeito geral de mercado. Erros na estimação do risco associado aos factores podem levar a uma perda de eficiência na gestão de Portfolios.

A forma de tratamento dos factores adicionais é realizada através do “*Multi Index Model*”. O conceito subjacente é a adição ao “*Single Index Model*” de factores adicionais que são usados para analisar efeitos secundários do mercado, ou seja, para além da relação mercado/título. Por exemplo, se desejar analisar efeitos derivados dos grupos de acções, serão construídos índices de acções por crescimento, cíclicas, estáveis e energéticas (entende-se como tendo um forte potencial de crescimento), adicionando a estes quatro índices o índice do efeito geral de mercado no tratamento do “*Multi Index Model*”, que incorpora, assim, o efeito de mercado e os quatro efeitos anteriormente descritos podem surgir na seguinte forma:

$$R_i = \alpha_i + \beta_m R_m + \beta_g R_g + \beta_c R_c + \beta_s R_s + \beta_e R_e + e_i \quad (3)$$

O modelo apresentado desta forma diz que o rendimento de uma acção é uma função de cinco factores: (1) factor geral de mercado  $R_m$ , (2) factor crescimento  $R_g$ , (3) factor cíclico  $R_c$ , (4) factor estável  $R_s$ , (5)

<sup>3</sup> Retirada e adaptada de “Portfolio Management”; James L. Farrel, Jr.; McGraw-Hill International Editions; pag. 101

factor energético Re. O parâmetro alfa tem o mesmo significado que tinha no “*Single Index Model*”, ou seja, é o rendimento esperado quando o rendimento de todos os cinco factores é zero. O termo residual *ei* tem as mesmas propriedades que tinha no “*Single Index Model*”, isto é, representa todos os ajustamentos não explicados pelas variáveis do modelo.

Os coeficientes beta ligados aos cinco índices indicam o que é que 1% de mudança no índice produz em termos de variação no rendimento de uma acção, ou seja, trata-se de uma medida de sensibilidade. Por exemplo, se o coeficiente beta para o índice crescimento for 2.0, isso indica que 1% no aumento do índice de crescimento resulta em 2% de aumento no rendimento de uma acção. O termo residual terá uma melhor especificação se não estiver correlacionado com qualquer uma das acções. Como resultado, será esperado que os rendimentos residuais não sejam correlacionados.

A utilização de um “*Multi Index Model*” é efectuada de uma forma mais eficaz, obtendo-se resultados mais significativos, se não existir ou se for reduzida ao mínimo a correlação entre os factores. Isto é, por vezes, difícil, pois um índice representativo do crescimento do rendimento de acções poderá conter um efeito do mercado geral. Para que seja possível focar exclusivamente o impacto do efeito crescimento nas acções do factor geral de mercado deverá ser removido do índice de crescimento de acções em análise.

Dadas as especificações do “*Multi Index Model*”, é possível exprimir o rendimento esperado de um título individual representado por  $E(R_i)$ , em função de um conjunto de variáveis. Recorrendo à especificação anterior, o rendimento de um título resulta da combinação de três componentes: (1) uma componente de rendimento específico, (2) uma componente relacionada com o mercado e (3) quatro factores ou componentes adicionais. O termo residual pode desaparecer da seguinte expressão (como acontece no “*Single Index Model*”), porque o seu valor médio é zero, isto é, tem um valor esperado igual a zero.

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_m E(R_m) + \beta_g E(R_g) + \beta_c E(R_c) + \beta_s E(R_s) + \beta_e E(R_e) \quad (4)$$

Esta expressão é diferente da última, na medida em que agora trabalhamos com valores esperados.

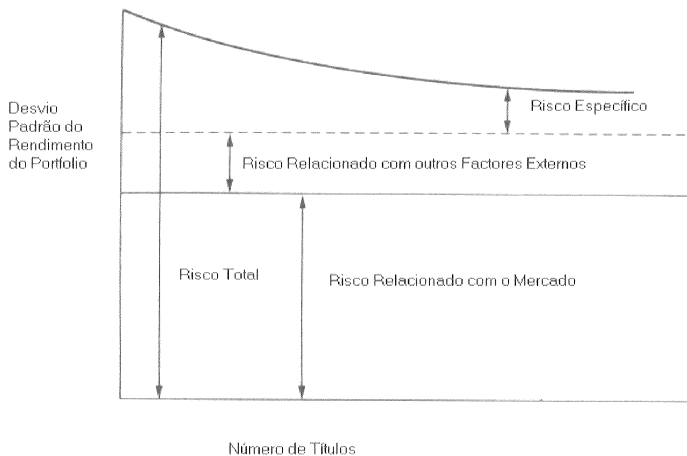
O risco do título representado, por exemplo, pela variância  $\text{Var}(R_i)$  é a soma de (1) uma componente relacionada com o mercado, (2) uma

componente que é a combinação dos quatro factores secundários e (3) uma componente que é específica ao título.

O cálculo do risco e do rendimento de um Portfolio pode ser efectuado pela utilização de fórmulas similares. O rendimento esperado de um Portfolio pode ser apresentado como uma ponderação dos rendimentos específicos, representados pelos alfas de cada título específico mais uma ponderação do rendimento relacionado com o mercado e mais uma ponderação dos rendimentos relacionados com factores ou componentes adicionais. Como a análise tem por base que o mercado e que os quatro factores adicionais sejam independentes, o risco do Portfolio pode ser expresso simplesmente como uma ponderação do risco relacionado com o mercado para cada título, mais uma ponderação do risco secundário do mercado e mais uma ponderação do risco residual de um determinado título individual incluído num Portfolio.

Recorde-se que a componente do risco diversificado torna-se mais pequena à medida que são adicionados títulos ao Portfolio, o que não acontece com o risco secundário do mercado, ou seja, com os factores adicionais. Como o “Single Index Model” incorpora estes riscos na componente do risco específico e assume, implicitamente, que são diversificados, irá subestimar a magnitude do risco diversificável num Portfolio.

### Gráfico n.º 1 – Risco Específico vs Risco de Factores Externos



O gráfico n.º 1<sup>4</sup> ilustra a relação que existe entre o risco específico de um título e o risco não específico, derivados de factores relacionados com o mercado e outros factores para além deste. O gráfico mostra, assim, os três componentes de risco relacionados com os factores secundários ao mercado, com o mercado e o específico.

Note-se que o risco específico diminui assim que se adiciona títulos ao Portfolio, consequência de um processo de diversificação. No entanto, o risco secundário ao mercado mantém-se, ou seja, não pode ser alterado através da diversificação.

## **2 - A APLICAÇÃO DA ANÁLISE DE FACTORES AO MERCADO DE CAPITAIS**

A análise de factores representa uma aproximação alternativa à estrutura de uma matriz de variáveis e covariâncias.

A compreensão da razão da utilização desta técnica obriga à visualização de certas teorias, como por exemplo o modelo de Markowitz. Este modelo procedeu a uma desagregação da variância total em variância sistemática e variância não sistemática. A primeira poderia ser reduzida ou mesmo eliminada pela diversificação, a segunda é considerada como um dado, não alterável portanto, sendo única para cada título.

A distinção entre risco sistemático e não sistemático é a base da análise factorial. Nesta análise estamos preocupados em determinar o risco sistemático dentro de uma estrutura de covariância.

Na análise factorial divide-se a variabilidade total de um conjunto de dados em duas partes – aquela que as variáveis partilham e aquela que é específica a cada uma das variáveis. A análise usa estimadores das variáveis que partilham uma mesma variabilidade para construir factores explicativos.

Para ilustrar a aplicação da Análise de Factores, Terry J. Watsham e Keith Parramore, no seu livro *“Quantitative Methods in Finance”* (página 368) começam por pressupor a análise de um processo PCA (*“Principal Components Analysis”*) o qual atribuiu significância a m componentes. Fez-se então uma tentativa de forma a expressar cada

---

<sup>4</sup> Criado a partir da situação descrita.

uma das variáveis originais como uma combinação linear desse número de factores.

Considere-se a seguinte matriz de variáveis e covariâncias para quatro classes de activos financeiros.

	Gilt	FTSE	S&P	\$/£
Gilt	1.0	0.1498	0.0288	- 0.1106
FTSE	0.1498	1.0	0.6499	- 0.2928
S&P	0.0288	0.6499	1.0	- 0.0442
\$/£	- 0.1106	- 0.2928	- 0.0442	1.0

Esta matriz é o resultado de 51 observações de taxas de retorno mensais pelo período compreendido entre Setembro de 1989 e Dezembro 1993. Da análise PCA chegaram os autores à conclusão que as três principais variáveis representam 93% da variância total. Assim, veio-se a assumir que são três os principais factores significativos para o estudo da análise de factores.

$$\text{GILT} = t_1 = \lambda_{11}f_1 + \lambda_{12}f_2 + \lambda_{13}f_3 + e_1 \quad (5)$$

$$\text{FTSE} = t_2 = \lambda_{21}f_1 + \lambda_{22}f_2 + \lambda_{23}f_3 + e_2 \quad (6)$$

$$\text{S\&P} = t_3 = \lambda_{31}f_1 + \lambda_{32}f_2 + \lambda_{33}f_3 + e_3 \quad (7)$$

$$\text{\$/£} = t_4 = \lambda_{41}f_1 + \lambda_{42}f_2 + \lambda_{43}f_3 + e_4 \quad (8)$$

O resultado da relação apresentada anteriormente é um vector de variáveis  $4 \times 1$ , uma matriz de  $\lambda^s_3$ , de  $4 \times 3$ , um vector de factores  $3 \times 1$  e um vector de termos de erro  $4 \times 1$ .

Assim o modelo fica:

$$T = \lambda F + E \quad (9)$$

Onde:

T é uma matriz  $4 \times n$

$\lambda$  é uma matriz  $4 \times 3$

F é uma matriz  $3 \times n$

E é uma matriz  $4 \times n$

Pressupostos adicionais:

- os valores  $f_i$  são independentes;
- os valores  $e_i$  são independentes;
- $f_i$  e  $e_i$  os seus valores não são correlacionados

Agora  $C = TT^T$  a qual iguala

$$(\lambda F + E)(\lambda F + E)^T \quad (10)$$

Isto leva a que:

$$\begin{aligned} & \lambda F(\lambda F)^T + \lambda F E^T + E(\lambda F)^T + E E^T \quad (11) \\ & = \lambda F F^T \lambda^T + \lambda F E^T + E F^T \lambda^T + E E^T \end{aligned}$$

Dado que se pressupõe que os valores de  $f$  e  $e$  não estão correlacionados, a matriz  $F E^T$  é uma matriz zero, bem como a matriz  $E F^T$ . Assim, a equação anterior fica reduzida a:

$$\lambda F F^T \lambda^T + [0] + [0] + E E^T \quad (12)$$

Como se utiliza variáveis padrão e porque se assume que os valores de  $f$  são independentes,  $F E^T$  torna-se uma matriz identidade, porque a correlação de  $F$  consigo próprio é um por definição e assume-se que as covariâncias são zero.

A matriz  $E E^T$  é uma matriz diagonal. Assim a correlação do grupo de activos é o produto de  $\lambda$  e  $\lambda$  transposta adicionadas à matriz  $E E^T$ , ou seja,

$$COR = \lambda \lambda^T + E E^T \quad (13)$$

onde  $\lambda$  é uma matriz  $4 \times 3$  e  $\lambda^T$  é uma matriz  $3 \times 4$ . O resultado é uma matriz  $4 \times 4$  a qual tem “communalities” ao longo da diagonal principal. A matriz  $E E^T$  representa a parte do risco que é não sistemático.

O objectivo na análise de factores é resolver a equação anterior de forma a que a proporção maior possível da variância total seja contabilizada pela  $\lambda \lambda^T$  e o menos possível pela diagonal da matriz.



Portanto se o modelo de três factores der um suporte significativo em estudo no exemplo, então estaremos aptos a escrever a matriz de correlação na forma  $\lambda\lambda^T$  e a matriz diagonal.

Um processo interactivo é utilizado para tentar esta decomposição. Demonstra-se a seguir isto através do output do computador.

A matriz  $\lambda$  é:

$$\lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{l} \text{Gilt} \\ \text{FTSE} \\ \text{S\&P} \\ \text{\$/\pounds} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Factor 1} & \text{Factor 2} & \text{Factor 3} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0.27338 & -0.71591 & 0.64064 \\ 0.91401 & 0.10492 & -0.00956 \\ 0.81370 & 0.43492 & 0.15732 \\ -0.43726 & 0.58105 & 0.67333 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

Uma matriz  $\lambda$  é:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 0.27338 & 0.91401 & 0.81370 & -0.43726 \\ -0.71591 & 0.10492 & 0.43492 & 0.58105 \\ 0.64064 & -0.00956 & 0.15732 & 0.67330 \end{array} \right]$$

A matriz  $\lambda\lambda^T$ , conhecida como a matriz das “*communalities*”, é:

$$\lambda\lambda^T = \left[ \begin{array}{cccc} 0.997688 & 0.168637 & 0.011869 & -0.104177 \\ 0.168637 & 0.846515 & 0.787853 & -0.345136 \\ 0.011869 & 0.787853 & 0.876006 & 0.002840 \\ -0.104177 & -0.345136 & 0.002840 & 0.982154 \end{array} \right]$$

Sobre as especificações iniciais, a variância calculada para cada factor é:

$$\text{Factor 1} = 1.763450$$

$$\text{Factor 2} = 1.050317$$

$$\text{Factor 3} = 0.888597$$

dada por  $\lambda\lambda^T$ . Assim sendo o total de 3.702364, e dado que o total da variância soma 4 (porque nós estamos a trabalhar com variáveis standard), os três factores contribuem em 92,56% da variância total do Portfolio dos activos em causa. Como consequência, o risco não sistemático só contribui em 7,44%.

Note que a decomposição leva a uma matriz de resíduos.

O facto de se saber se é suficientemente perto de uma diagonal para permitir uma análise do modelo como suficientemente relevante e significativo é uma questão de juízo.

Enquanto que a FA (“*Factor Analysis*”) procura identificar factores subjacentes ou latentes, os quais contribuem para as nossas observações, os factores, eles mesmos, não são directamente observáveis, ou não o têm sido até ao ponto da análise. Assim, a ênfase está mais em compreender do que usar. Contudo, a identificação de factores úteis pode ser um instrumento na orientação da direcção do trabalho subsequente.

$$\begin{bmatrix} 0.002312 & -0.018837 & 0.016931 & -0.006423 \\ -0.018837 & 0.153484 & -0.137953 & 0.052336 \\ 0.016931 & -0.137953 & 0.123994 & -0.047040 \\ -0.006423 & 0.052336 & -0.047040 & 0.017846 \end{bmatrix}$$

## 2.1 - “*Arbitrage Pricing Theory*”

Uma aplicação clássica deste processo é no “*arbitrage pricing theory* – APT”. Esta teoria, que já foi explorada anteriormente, assume que, nos mercados onde a arbitragem é possível, todos os activos que

têm características semelhantes serão transaccionados a preços similares, porque a actividade dos arbitragistas retirará qualquer diferença nos preços.

O APT assume que, porque os investidores são livres de deterem um vasto Portfólio diversificado, somente o risco sistemático é cotado no mercado. Contudo, o risco sistemático é função de vários factores. Estes factores não são especificados pela teoria mas muitos podem ser identificados por pesquisas empíricas. Os postulados da APT referem a existência de uma multiplicidade de “factores de risco” implícitos, os quais conjuntamente contribuem para a variabilidade observada no retorno dos activos. Dado este pressuposto, sabe-se que o retorno esperado de um activo (variação efectiva no preço) é uma combinação linear dos seus “*factor loadings*”, os quais medem a exposição do activo a cada factor de risco.

Estes factores de risco não são observáveis – somente os retornos passados o são – mas podemos utilizar FA para estimar o “*factor loadings*” e, então, o prémio de risco associado com cada factor de risco.

Por exemplo, considere-se um mercado aonde existem três factores de risco:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Um modelo a três factores do retorno dos activos mostra o retorno esperado num título particular a um número limitado influências ou factores económicos relacionados linearmente e alguns elementos “*idiosyncratic*”.

$$R_{it} = rf + b_{i1} F_{1t} + b_{i2} F_{2t} + b_{i3} F_{3t} + e_{it} \quad (14)$$

onde:

$rf$  = retorno isento de risco

$R_{it}$  = retorno do activo  $i$  no momento  $t$

$b_{it}$  = os “*factor loadings*”

$e_i$  = os elementos “*idiosyncratic*” que afectam o título  $I$

$F_{it}$  = prémio de risco do factor  $i$ .

Existem dois importantes pressupostos estatísticos relacionados com este modelo. O primeiro é que os valores de  $e$  são independentes dos restantes. O outro pressuposto é que os valores  $F$  são também independentes.

O risco associado com a posse de um título particular tem duas fontes. A primeira fonte de risco são os factores macroeconómicos que afectam todos os títulos. Estes factores dão origem ao risco sistemático, e a sua influência prevalece ao longo de todo o mercado de títulos e não pode ser eliminado através da diversificação. A segunda fonte de risco é o elemento “*idiosyncratic*”. Este elemento é único para cada título e num Portfolio extremamente bem diversificado, pode ser eliminada pela diversificação. Assim, um mercado eficiente irá somente recompensar os riscos associados aos factores sistemáticos (macroeconomia).

Como estes factores de risco afectam todos os activos, o retorno associado a cada um destes factores de risco é o preço de mercado em deter esse risco particular. Por consequência, o retorno para cada factor é o mesmo para cada e todos os activos. Por outras palavras, a recompensa por ter um tipo de risco particular é fixado pelo mercado. Contudo, o montante até ao qual um activo é exposto ao risco é determinado pelas características do activo em si. Por outras palavras esta exposição do factor ou “*factor loading*”, os valores  $b_j$ , serão únicos para cada activo.

O risco sistemático de um activo individual será determinado pelos “*factor loadings*” e as covariâncias do retorno dos factores. O risco sistemático de um Portfolio de activos será determinado pelas covariâncias entre os retornos dos factores, “*the factor loadings*”, e a ponderação de cada activo no Portfolio.

Em ordem a tomar o APT operacional com sucesso, é necessário identificar uma lista de factores “maneável”, que será relativamente curta, nos quais é possível quantificar o prémio de risco associado a cada factor. Isto requer a capacidade de quantificar variações não esperadas num factor. Consequentemente, algumas aplicações actuais modelam os valores não esperados do factor através da modelação do valor esperado subtraído ao valor actual. Alguns factores são considerados como tendo tanto ruído na sua série de dados temporais que uma variação nos dados é ela mesma adequada como medida de variação não esperadas. É também necessário ser capaz de medir as sensibilidades de cada título a cada factor. Adicionalmente, estas sensibilidades devem ser razoavelmente estáveis.

Roll e Ross (1980) usaram FA e chegaram à conclusão que somente três, ou possivelmente quatro factores, explicam o processo de geração de retornos de “US equities”. Contudo Dhrymes Friend and

Gultekin (1984) notaram que o número de factores pode ser dependente no número de títulos em cada Portfolio.

Os resultados dos testes do mercado UK usando FA têm sido inconclusivos. Beenstock e Chan (1986) encontraram 20 factores que explicam o retorno dos títulos. Mais ainda, Diacogiannis (1986) chegou à conclusão de que os factores variam entre os períodos de tempo para o mesmo Portfolio. Ambos os estudos também fizeram notar que o número de factores dependia do volume do número de títulos que eram incluídos em cada Portfolio. Um estudo adicional do UK feito por Abeysekera e Mahajan (1987) chegou à conclusão que não podiam especificar um número único de factores ao longo dos sete Portfolios do seu estudo.

### 3 - ILUSTRAÇÃO EMPÍRICA

A análise factorial, nomeadamente na vertente da análise de componentes principais, tem como objectivo obter uma representação aproximada de um conjunto de variáveis, num sub-espaço de projecção através da redução da dimensão subjacente. Portanto, partimos de um grupo de variáveis e procedemos à sua redução para um determinado número ao qual damos o nome de componentes principais.

Assim, e utilizando as técnicas explicadas anteriormente, procedeu-se a uma recolha de observações sobre a taxa de retorno das acções de um conjunto de empresas. O horizonte temporal é de dez anos, sendo as empresas aquelas que se encontram apresentadas em anexo. Note-se que estas são as empresas que estão cotadas entre 01/01/90 e 31/12/99.

A taxa de retorno é calculada pelo  $\ln$  do rácio de duas observações consecutivas. Utilizando esta técnica, a amplitude da distribuição subjacente é reduzida para além do que nos permite afirmar que a taxa de retorno segue uma distribuição normal.

Resta referir que cada observação é à sexta-feira ou caso esta não seja um “business day” é o dia imediatamente anterior. Isto, porque se considera que a sexta-feira é o dia que representa as expectativas de uma forma “mais forte” dos investidores ao longo da semana. Portanto, será este o dia à volta do qual se centra as oportunidades do investidor. É objectivo desta ilustração empírica partir da variável taxa de retorno, adicionar mais algumas variáveis, recolhendo as que

são componentes principais do mercado accionista. Ou seja, partindo de um espaço de um conjunto de observações sobre um conjunto de variáveis determinar aquelas que são representativas do referido espaço.

Assim, além da taxa de retorno foram adicionadas mais cinco variáveis: a quantidade transaccionada, o Activo das empresas, o Resultado Líquido do Exercício, o índice BVL geral e a taxa de inflação.

Adoptaram-se estas variáveis, porque entre elas temos duas relacionadas directamente com o mercado accionista (a taxa de retorno e a quantidade transaccionada), duas relacionadas com a performance financeira das empresas (Activo e Resultado Líquido do Exercício) uma relacionada com o mercado accionista em geral (o índice BVL geral) e outra relacionada com a Economia (a taxa de inflação).

É importante referir que o Activo e o Resultado Líquido do Exercício são em termos de observações, observações ao ano, retirando-se a partir daí as respectivas consequências estatísticas.

### **3.1 - Metodologia Seguida na Análise de Componentes Principais**

- A taxa de retorno diz respeito a um Portfolio do qual fazem parte todas as empresas com um peso igual.
- Activo e Resultado Líquido do Exercício – média ponderada das observações relativas a todas as empresas.
- Quantidade transaccionada – soma de todas as quantidades transaccionadas relativas a todas as empresas relativo ao último “business day” de cada semana.

### **3.2 - Os Resultados**

Um dos primeiros resultados obtidos diz respeito à retirada da variável taxa de inflação.

O teste KMO revela isso mesmo, ou seja, retirando a variável taxa de inflação, o ajustamento do espaço melhora.

Portanto, o mercado accionista não se deixa influenciar pela taxa de inflação. Não se procede a qualquer outra retirada em termos de variáveis, pois pode-se observar pelas hipóteses testadas que o teste KMO não melhora. Há a referir que o valor obtido (0,689) não é significativo.

Contudo, aceite o ajustamento considerado razoável, pode-se continuar o trabalho, conclusão validada assim que o valor do teste ultrapassa os 0,60.

Relativamente à variância explicada no espaço, note-se que as quatro primeiras variáveis explicam aproximadamente 98% dos resíduos em causa.

Uma nota sobre a matriz de correlações e para o sinal negativo do Resultado Líquido do Exercício. Através da análise do histograma verifica-se que, a série não tem uma distribuição coerente. A este facto se juntamos a periodicidade da observação, (ano) a razão estará encontrada.

Da análise de componentes principais, determinou-se que existem dois factores. A interpretação a dar aos referidos dois factores é altamente subjectiva. Contudo, pela análise das “component matrix” concluímos que o mercado accionista é caracterizado pelas taxas de retorno – factor 2 – (seria dramático para este estudo se assim não o fosse) e pela performance financeira das empresas (Activo e Resultado Líquido do exercício) – factor 1.

#### 4 - CONCLUSÃO

Ser capaz de compreender as eventuais evoluções da cotação de um valor mobiliário é, sem dúvida, um desafio, mas também o sonho de um qualquer investidor. Consciente de que está à procura da melhor opção, fá-lo de forma a maximizar a sua riqueza ou o seu capital. Para isso, terá de escolher o(s) título(s) que lhe permita um determinado rendimento esperado, em função do risco que estará disposto a suportar.

Assim sendo, partimos de duas noções iniciais – o retorno e o risco associado a um investimento. Se a noção de retorno é clara, correspondendo à diferença entre duas posições em dois espaços temporais diferentes, a noção de risco é muito mais complexa.

O “*Multi Index Model*” é um modelo que deriva da “*Arbitrage Pricing Theory* - APT”. Este modelo é definido com base no processo que gera os rendimentos e conta com a arbitragem como elemento fulcral para garantir o equilíbrio de mercado. O modelo “*Multi Index Model*” resultando do APT, torna-se o mais adequado de operar.

Interessava, saber qual a técnica estatística mais adequada para o trabalho a efectuar com o “*Multi Index Model*”. A análise de factores é uma das possíveis técnicas estatísticas, uma vez que os seus resulta-

dos revelam um grau de significância elevado. Complexa, esta técnica requer a compreensão de vários conceitos bem como o domínio de vários níveis de interpretação para proceder às conclusões visadas pelo trabalho.

Um ensaio de aplicação da análise de componentes principais constitui a fase final do trabalho, sendo ao mesmo tempo uma exemplificação da sua utilização relativamente ao mercado accionista português. Adstrita a limitações, desta análise conclui-se que a taxa de inflação não é significativa para explicar o comportamento do mercado e que as componentes que explicam a evolução do mercado são duas. A primeira componente diz respeito à taxa de retorno e à quantidade transaccionada. A segunda componente diz respeito ao índice BVL geral e ao valor do Activo e do Resultado Líquido do Exercício. A exclusão da taxa de inflação pode estar ligada a razões estruturais deste estudo, ou não. E isto porque, em termos teóricos, podemos considerar que a taxa de inflação não é um indicador directamente ligado ao investimento. Está, isso sim, ligada à evolução da taxa de juro.

A diferença encontrada em termos de resultado, utilizando a mesma análise mas somente face ao BCP, releva a possibilidade de separação de entidades por sectores de actividade, em estudos futuros.

A amplitude deste estudo poderia ser muito mais vasta. Dificuldades de exploração e colheita de dados inviabilizaram a utilização de outras variáveis. De qualquer forma, o objectivo aqui era proceder a um ensaio de aplicação da análise de componentes principais.



## BIBLIOGRAFIA

– Afonso, António Pedro e João Cláudio Teixeira, (1997), “Efficiency in Portuguese Stock Exchange Indexes: Runs Tests and BDS Statistics”, *Instituto Superior de Economia e Gestão – Universidade Técnica de Lisboa*.

– Brigham, Eugene F. e Louis C. Gapenski, (1994), *Financial Management*, The Dryden Press.

– Chan, Louis K.C., (1997), “The Risk and Return from Factors”, *National Bureau of Economic Research, Inc.*

– Cochrane, John, (1999), “New Facts in Finance”, *The Journal of Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, pp. 58.

– Copeland, Thomas E. e J, Fred Weston, (1992), *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley Publishing Company.

– Copeland, Tom, Tim Koller, Jack Murrin, (1996), *Valuation Measuring and Managing the Value of Companies*, McKinsey & Company, Inc., Wiley Frontiers in Finance.

– Damodaran, Aswath, (1992), *Applied Corporate Finance*, John Wiley & Sons, Wiley Finance Editions.

– Engle, Robert F. e Joe Lange, (1997), “Measuring, Forecasting and explaining Time Varying Liquidity in the Stock Market”, *National Bureau of Economic Research, Inc.*

– Fama e Eugene French, (1970), “Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work”, *Journal of Finance*, Vol. 25, pp. 383-417.

– Fama e Eugene French, (1991), “Efficient Capital Markets II”, *Journal of Finance*, Vol.46, pp. 1575-1614.

- Fama e Eugene French, (1992), “The Cross-Section of Expected Returns”, *Journal of Finance*, Vol. 47, pp. 427-465.
- Jagannathan, Ravi e Zhenyu Wang, (1993), “The CAPM is Alive and Well”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Staff Report* 165.
- Markowitz, Harry, (1952), “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77-91.
- Pindyck, Robert S. e Daniel L. Rubinfeld, (1991), *Econometric Models & Economic Forecasts*, McGraw-Hill International Editions.
- Roll, Richard e Stephen A. Ross, (1980), “An Emirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory”, *Journal of Finance*, Vol. 35, pp. 1073-1103.
- Ross, Stephen A. (1976), “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, pp. 341-360.
- Varian, Hal R., (1987), “The Arbitrage Principle in Financial Economics”, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 1. n.º 2, pp. 55-72.