

Sónia Alexandra Alves Ferreira Meireles

**Uma Abordagem aos Numerais
Mistos com Recurso aos Blocos
Padrão**

**Um Estudo de Caso com Alunos
do 5.º Ano de Escolaridade**

MESTRADO EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DA MATEMÁTICA

Sónia Alexandra Alves Ferreira Meireles

**Uma Abordagem aos Numerais
Mistos com Recurso aos Blocos
Padrão
Um Estudo de Caso com Alunos
do 5.º Ano de Escolaridade**

Projeto submetido como requisito parcial para obtenção do grau de
MESTRE EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA E DA
MATEMÁTICA

Orientação

Professora Doutora Cláudia Manuela Ferreira Maia-Lima

MESTRADO EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DA MATEMÁTICA

AGRADECIMENTOS

Esta foi uma breve, mas intensa, etapa do meu desenvolvimento acadêmico e profissional e, hoje, sinto-me realizada e feliz por poder concluí-la. Embora olhe para trás e perceba que o tempo passou depressa demais, não foi uma tarefa fácil...surgiram imprevistos, incertezas, receios, obstáculos. Fiz muitas cedências, privei-me e privei quem mais amo de momentos que, infelizmente, não voltam atrás.

Recordo com grande satisfação todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram neste percurso formativo, a quem quero expressar, desde já, a minha sincera e profunda gratidão.

À minha querida orientadora, Professora Doutora Cláudia Maia, pela imprescindível capacidade de me orientar de forma construtiva, respeitando as minhas ideias e, ao mesmo tempo, transmitindo os seus conhecimentos tão pertinentes. Obrigada por ter sempre acreditado em mim, pelo apoio, pelas palavras de incentivo nos momentos de ansiedade e dúvida, pela permanente disponibilidade e dedicação incondicional. O olhar atento, o empenho e orientação dada ao acompanhar este projeto foram deveras preciosos.

À Marina, a minha companheira de luta, pelo apoio, força, ânimo e compreensão. O ombro amigo e a partilha ampararam-me nos momentos mais ansiosos.

À Teresa que acreditou em mim, convencendo-me de que esta luta valeria a pena.

À Diretora Virgínia Varandas, e restantes membros da Direção do Agrupamento de Escolas de Campo, agradeço a receptividade e a autorização para a realização deste estudo, a disponibilidade e a confiança sempre demonstradas. Agradeço ainda à coordenadora de Departamento e restantes colegas do Grupo de Matemática pelo apoio e colaboração. Aos funcionários da escola, pelo auxílio e disponibilidade demonstrados. Uma palavra especial aos alunos que participaram neste estudo e aos respetivos encarregados de educação.

À Carla, minha amiga, que, mesmo estando longe, sempre esteve perto de mim e sempre me deu o incentivo que eu precisava para me manter nesta verdadeira prova de resistência.

Aos meus maravilhosos pais e irmãos pelo apoio, incentivo, olhar atento, presença constante, compreensão e amor incondicional. Convosco aprendi a lutar pelo que acredito e a não desistir.

Ao meu querido marido agradeço o amor, o carinho, a compreensão, a paciência, a disponibilidade e a presença constante.

Foram o meu pilar nesta etapa árdua.

A todos o meu muito obrigada!

RESUMO

O estudo que apresentamos tem como objetivo aprofundar o nosso conhecimento sobre o modo como os alunos do 5.º ano de escolaridade desenvolvem o sentido de numeral misto e a capacidade de adicionarem e subtraírem com eles. Pretendemos compreender a pertinência que os numerais mistos poderão ter na compreensão dos números racionais e descobrir o contributo que os blocos padrão poderão ter num percurso de aprendizagem que pretende ser significativo. Para este efeito, concebemos uma sequência organizada de cinco tarefas exploratórias, segundo uma metodologia construtivista da aprendizagem, com recurso aos blocos padrão.

Este estudo assumiu uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, numa modalidade de estudo de caso. A recolha de dados foi feita através da observação direta e participante das aulas, com registo de notas de campo e de meios audiovisuais.

Os resultados desta investigação revelaram que o uso dos blocos padrão motivou os alunos, mantendo-os ativos no processo de aprendizagem. Além disso, por constituírem um meio eficaz de materializar a relação parte-todo, promoveram uma aprendizagem significativa da representação de números racionais na forma de fração e de numerais mistos. Foram também um excelente contributo na compreensão do conceito de frações equivalentes, tendo facilitado a compreensão do processo de adição e subtração de números racionais representados por frações e por numerais mistos. Verificamos também que a abordagem e o trabalho com os numerais mistos foram muito importantes na aprendizagem, com compreensão, do conceito de número racional pois constituem uma forma de representação mais compreensível do que a fração imprópria correspondente.

Palavras-chave: fração, numeral misto, adição e subtração, blocos padrão

ABSTRACT

The present study aims to expand our understanding of how the students of the 5th grade develop a sense of mixed number and the ability to add and subtract with them. We want to understand the relevance that mixed number have on the understanding of the concept of rational number and find out the contribution that block patterns may have in a significant learning pathway. In this sense, we designed an organized sequence of five exploratory tasks according to a constructivist methodology of learning, using the block patterns.

This study took a qualitative methodological approach in the form of case study. Data collection was carried out through direct and participant observation, with field notes record and audiovisual media.

The results of this research showed that the use of block patterns motivated the students keeping them active in the learning process. In addition, because they constitute an effective means to materialize part-whole concept, they promoted significant learning about representation of rational numbers in fraction form and mixed number. It was also an excellent contribution to the understanding of the concept of equivalent fraction, which facilitated the understanding of the process of addition and subtraction of fractions and mixed numbers. We also verified that the approach and work with mixed numbers is very important in learning with the understanding of the rational number concept because this representation is more significant than the corresponding improper fraction.

Key words: fraction, mixed number, addition and subtraction, block patterns

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS.....	11
ÍNDICE DE TABELAS.....	15
INTRODUÇÃO.....	17
Contextualização e Pressupostos.....	17
Pertinência da Investigação.....	19
Objetivos e Questões Orientadoras.....	19
Organização do Documento.....	20
Capítulo I	23
ENQUADRAMENTO TEÓRICO	23
Aprendizagem dos Números Racionais.....	23
Importância da Aprendizagem dos Números Racionais	24
O Ensino e a Aprendizagem dos Números Racionais	25
Os Numerais Mistos	36
Rumo a uma Aprendizagem Significativa.....	40
A Teoria Construtivista	40
Os Materiais Manipuláveis: Perspetiva Histórica.....	42
Os materiais manipuláveis no ensino da matemática.....	45
Os Blocos Padrão – um Recurso para Desenvolver o Sentido de Número Racional Representado na Forma de Fração	50
Constituição e suas características.....	50
Potencialidades dos blocos padrão na compreensão do número racional representado na forma de fração.....	52
Capítulo II	55
ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO.....	55
Metodologia	55
Breve Descrição dos Participantes.....	57
Pressupostos que Nortearam a Planificação e a Intervenção Didática.....	58
As Fases da Intervenção Didática	60
Situação Formativa: Abordagem aos Blocos Padrão.....	60
Situação Formativa: Adição e Subtração de Frações com o Mesmo Denominador	62
Situação Formativa: Comparação de Numerais Mistos	63
Situação Formativa: Adição e Subtração de Frações com Denominadores Diferentes	64
Situação Formativa: Adição e Subtração de Numerais Mistos	65

Capítulo III	67
APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	67
Tarefa 1 – Abordagem aos Blocos Padrão.....	67
Tarefa 2 – Adição e Subtração de Frações com Denominadores Iguais	78
Tarefa 3 – Comparação de Numerais Mistos	89
Tarefa 4 – Adição e Subtração de Frações com Denominadores Diferentes	96
Tarefa 5 – Adição e Subtração de Numerais Mistos	113
CONCLUSÃO	127
Conclusões da Investigação.....	127
Aspetos Positivos do Estudo.....	133
Limitações do Estudo	135
Sugestões para Futuras Investigações	135
REFERÊNCIAS	137
APÊNDICES	143
APÊNDICE A	145
APÊNDICE B	147
APÊNDICE C	149
APÊNDICE D	151
APÊNDICE E	157
APÊNDICE F.....	159
APÊNDICE G	165

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Duas Situações de Divisão da Unidade.....	31
Figura 2. Exemplos de Situações em que a Unidade Está Desigualmente Dividida	31
Figura 3. As Seis Peças que Constituem os Blocos Padrão.....	51
Figura 4. As Duas Peças Adicionadas aos Blocos Padrão	Erro! Marcador não definido.
Figura 5. Duas Soluções Possíveis.....	54
Figura 6. Possibilidades Encontradas por AF1 (esquerda) e AF2 (direita)	68
Figura 7. Possibilidades Encontradas por AF3 e AF4.	68
Figura 8. Tabela para Preenchimento.....	69
Figura 9. Quarto e Sexto Exercício da Segunda Questão.....	72
Figura 10. Último Exercício da Segunda Questão.....	73
Figura 11. Exercícios Três e Quatro da Ficha de Trabalho	74
Figura 12. Primeira Fase de Resolução da Segunda Alínea do Exercício Quatro (AF2)	74
Figura 13. Etapa da Resolução da Primeira Alínea do Exercício Quatro, por AF3 e AF4	75
Figura 14. Registo Feito por AF1.....	77
Figura 15. Registo Feito por AF4.....	77
Figura 16. Apresentação do Resultado da Adição Solicitada Feita por AF1 e AF2	78
Figura 17. Resposta à Justificação da Terceira Adição por AF1 e AF2	80
Figura 18. Regra para Subtração de Frações com o Mesmo Denominador.....	82
Figura 19. Explicação do par AM5 e AM6.	83
Figura 20. Representação dos Nove Sextos Feita por AM5 e AM6	83
Figura 21. Regra para Adição de Frações com o Mesmo Denominador (AM5 e AM6)	84
Figura 22. Representação de Sete Meios, por AM5 e AM6, na Malha Isométrica.....	85
Figura 23. Representação de Sete Meios, por AF3, com os Blocos Padrão	87
Figura 24. Numerais Representados na Tarefa	89
Figura 25. Representação, com os Blocos Padrão, dos Numerais Apresentados, por AF2	90
Figura 26. Primeira Proposta de Resolução da Última Questão por AF2.	90
Figura 27. Segunda Proposta de Resolução da Última Questão por AF2.	91
Figura 28. Reajuste Feito por AF2.....	91
Figura 29. Último Reajuste Feito por AF2	92
Figura 30. Representação dos Dados do Enunciado por AF1, AF3 e AF4	92
Figura 31. Resposta Dada por AM5 e AM6 à Segunda Alínea.....	95
Figura 32. Resposta Dada por AM5 e AM6 à Segunda Alínea.....	95
Figura 33. Representação da Primeira Adição Feita por AF3 e AF4	96
Figura 34. Substituição Feita por AF3 e AF4.....	97
Figura 35. Substituição, Feita por AF4, de Um Terço por Dois Sextos.....	98
Figura 36. Representação das Duas Parcelas com os Blocos Padrão	98
Figura 37. Sobreposição do Hexágono Sobre a Unidade.....	99
Figura 38. Nova Sobreposição Sobre a Representação da Soma	99
Figura 39. Representação por AM6 (esquerda) e por AM5 (direita).....	100
Figura 40. Nova Representação das Parcelas da Quarta Adição Feita por AF3 e AF4.....	101
Figura 41. Última Etapa de Resolução da Quarta Adição Feita por AF3 e AF4	101
Figura 42. Substituição dos Quatro Meios por Seis Terços.....	102

Figura 43. Explicação das Fases da Resolução da Quinta Adição	102
Figura 44. Resolução da Quinta Adição por AM6.....	103
Figura 45. Resolução da Quinta Adição por AM6.....	103
Figura 46. Representação, com os Blocos Padrão, das Parcelas da Sexta Adição, por AF4	104
Figura 47. Representação, com os Blocos Padrão, após Sugestão da Professora	104
Figura 48. Representação, com os Blocos Padrão, sem Sugestão da Professora	105
Figura 49. Representação Gráfica, Feita por AM5, da Adição	105
Figura 50. Explicação Dada por AF2	106
Figura 51. Explicação Dada por AF4 à Alínea 1.2.....	106
Figura 52. Segunda Questão do Guião de Trabalho	107
Figura 53. Fases da Resolução por AF1 e AF2	107
Figura 54. Primeira Etapa de Apoio ao Cálculo Numérico da Primeira Subtração.....	107
Figura 55. Última Fase de Resolução da Terceira Subtração	109
Figura 56. Primeira Situação Problemática.....	109
Figura 57. Resolução da Primeira Situação Problemática, Feita por AM5 e AM6	109
Figura 58. Resolução da Segunda Alínea da Primeira Situação Problemática, por AF1 e AF2.....	110
Figura 59. Segunda Situação Problemática.....	110
Figura 60. Terceira Situação Problemática	111
Figura 61. Resolução, por AM5 e AM6, da Primeira Alínea da Terceira Situação Problemática ...	111
Figura 62. Resolução, por AF3 e AF4, da Segunda Alínea da Terceira Situação Problemática	111
Figura 63. Opinião dos Alunos AM5 e AM6 sobre os Blocos Padrão e sua Utilização	112
Figura 64. Representação das Parcelas com os Blocos Padrão.....	113
Figura 65. Representação da Soma com os Blocos Padrão	114
Figura 66. Representação da Parcela $2\frac{4}{3}$ com os Blocos Padrão.....	115
Figura 67. Representação, com os Blocos Padrão, da Segunda Adição por AF3 e AF4	116
Figura 68. Cálculos Efetuados por AF4	116
Figura 69. Resposta de AF1.....	116
Figura 70. Resposta de AM5	116
Figura 71. Representação do Aditivo por AF1, AF2 e AF3	117
Figura 72. Nova Representação do Aditivo por AF1, AF2 e AF3	118
Figura 73. Representação da Diferença por AF1, AF2 e AF3.....	118
Figura 74. Segundo Passo para a Resolução da Subtração $3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$	118
Figura 75. Representação da Subtração na Malha Isométrica.....	119
Figura 76. Representação do Aditivo $4\frac{1}{3}$ Substituído por $3\frac{4}{3}$	120
Figura 77. Resolução Algébrica da Subtração $4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}$	120
Figura 78. Confirmação do Resultado por AF4.....	120
Figura 79. Resolução da Subtração Feita por AF3 e AF4	121
Figura 80. Indicação do Numeral Misto $2\frac{3}{6}$ na Reta Numérica	122
Figura 81. Primeira Situação Proposta	122
Figura 82. Primeiro e Segundo Passos: Representação das Parcelas $2\frac{3}{6}$ e $5\frac{1}{2}$	122
Figura 83. Resolução Feita por AM5 (esquerda) e AM6 (direita).....	122
Figura 84. Segunda Situação Proposta	123
Figura 85. Terceira Situação Proposta	123

Figura 86. Representação dos Dados do Enunciado com os Blocos Padrão, por AF1 e AF2	124
Figura 87. Representação das Parcelas na Malha Isométrica e Respetiva Resposta	124
Figura 88. Resolução da Quinta Situação Proposta por AF1 e AF2	125
Figura 89. Acrósticos Realizados por AF1 e AF2, AF3 e AF4 e AM5 e AM6.....	125

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Referências ao Numeral Misto nos Atuais Documentos Orientadores	39
Tabela 2. Relação entre as Medidas das Áreas de Cada uma das Peças	52
Tabela 3. Resultados (%) da Prova Final do 4.º Ano e da Primeira Ficha de Avaliação do 5.º Ano..	58
Tabela 4. Situação Formativa da Primeira Sessão	61
Tabela 5. Situação Formativa para Introdução à Adição de Números Representados por Frações	62
Tabela 6. Situação Formativa: Comparação de Numerais Mistos.....	63
Tabela 7. Quarta Situação Formativa	64
Tabela 8. Quinta Situação Formativa.....	66

INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como objetivo principal a contextualização e a apresentação da investigação realizada. Faremos também uma descrição sucinta da sua pertinência, do interesse pessoal pela escolha do tema e, ainda, dos objetivos e questões que nortearam este estudo. Por fim, apresentamos os objetivos desta investigação e uma síntese da estrutura organizativa deste relatório.

Contextualização e Pressupostos

Tenho verdadeira aversão à Matemática! (Fragoso, 2001, p. 96)

A afirmação supracitada é secular e “são muitos os que expressam aversão, medo e pavor à Matemática, decorrente de experiências passadas, seja com professores ou com algum conteúdo dos diversos existentes na área” (Reis, 2005, p. 2).

De certa forma, a Matemática é uma disciplina à qual ninguém fica indiferente. Segundo Cardoso, Benevides-Pereira e Franco (2011), esta “desperta uma relação de amor ou ódio inesquecível. As pessoas costumam não enfatizar o seu desempenho em outras disciplinas, mas nunca se esquecem como eram em matemática” (p. 867).

A aversão, o medo e o pavor advêm, muitas vezes, do facto de esta não ser compreendida por muitos. Mas, segundo Oliveira (2013), “apesar de a Matemática estar situada no mundo da constatação daquilo que é, da natureza e da abstração, ela tem de ser conhecida, aprendida e compreendida” (p. 136). Por este motivo, o ensino da Matemática não deveria resumir-se à transmissão e receção de informações pois, assim sendo, não possibilitará, segundo Deneca e Pires (s. d.), “a construção significativa de conhecimentos, e esse fato, pode criar uma apatia por parte dos estudantes em relação ao ensino da matemática” (p. 4). Conforme Becker (1993), “o aluno que já sabe aprende bem, o aluno que não sabe, não aprende nunca” (p. 43), de tal forma que, quando incompreendida, a Matemática pode mesmo tornar-se como que um inimigo imbatível, levando muitos a desistir da disciplina. Segundo Reis (2005), verifica-se, nestes alunos, uma “tendência para evitar o que lhe traz medo” (p. 2).

Outros rejeitam a Matemática desde bem cedo. De acordo com Silva e Boeri (2013), “os alunos já chegam à escola com a ideia pré-concebida que a matemática é complicada e que exige muito esforço mental (raciocínio) e reflexão” (p. 158).

Enquanto docentes da disciplina de Matemática, temos sentido este desconforto generalizado, mas especialmente quando se trata do estudo das frações. Conforme Reis (2005), por ser comum ouvirmos frases de repulsa à Matemática, facilmente os jovens se convencem que esta disciplina é realmente difícil, rejeitando-a. Segundo Paulo e Pinheiro (2013),

este fato tem se tornado uma grande barreira no processo de ensino aprendizagem dessa disciplina. Essa visão desestimula e antecipa o fracasso do aluno diante de uma ciência que carrega o peso de ser puramente complexa e desligada da realidade do estudante. (p. 1)

Assim, segundo Lessa (2011), o trabalho no ensino básico é “o ponto crucial para a sensibilização dos alunos para o raciocínio matemático, bem como para o apreço (ou a não resistência) à disciplina, muitas vezes entendida como o bicho papão da escola” (p. 13).

No que se refere ao estudo das frações, sentimos, com alguma frequência, por parte dos alunos, como que um preconceito envolto levando, a um desinvestimento à partida pois, na maioria das vezes, este “mau estar” transparece aquando da introdução do conteúdo dos números racionais, o que nos leva a crer que, quem rejeita as frações, muitas vezes o faz por ignorância, por insegurança ou por resistência à própria disciplina. Por este motivo, a compreensão da representação fracionária dos números racionais, constitui um assunto de grande importância para nós pois, se este desconforto não for ultrapassado, poderá desmotivar o aluno e, para além de dificultar o processo de ensino e de aprendizagem, poderá trazer repercussões no comportamento do aluno e, conseqüentemente, no seu percurso escolar e futuro profissional. Aliás, no livro “A criança e o medo de aprender” de Serge Boimare (2001), percebemos que, muitas vezes, crianças e adolescentes têm sérias dificuldades de aprendizagem “sem que por isso a sua inteligência seja posta em causa. Estas crianças estão muitas vezes revoltadas contra um meio onde não se sentem à vontade e onde nem sempre são as preferidas” (p. 15).

Pelo que acabamos de dizer, e tendo em conta que “as frações são um dos temas do ensino básico em que os alunos apresentam mais dificuldades” (Monteiro, Pinto, & Figueiredo, 2005, p. 47), consideramos este conteúdo um desafio no sentido de o tornar mais compreensível, mais atraente e acessível a todos. É nosso objetivo, enquanto professores de Matemática, ajudar os alunos a gostar de aprender Matemática e a desenvolverem uma autoestima positiva relativamente a esta disciplina. Segundo Walle (2009), “toda a criança pode vir a acreditar que é capaz de dar sentido à Matemática. Toda a criança deveria deixar a escola confiante das suas habilidades de compreender e fazer Matemática” (p. 9). Assim sendo, tornou-se necessário

compreender melhor quais as principais dificuldades manifestadas pelos alunos de modo a identificar algumas das suas causas, procurando melhorar a nossa prática profissional e tornar o processo de ensino mais eficiente, atraente e motivador. Partilhamos da opinião de Lessa (2011), que afirma que cabe ao professor procurar “alternativas didáticas para uma educação matemática de qualidade, que propicie aos alunos bases para seu desenvolvimento intelectual” (p. 13).

Pertinência da Investigação

O Programa de Matemática e Metas Curriculares, homologado em 2013, confere uma especial atenção aos numerais mistos, no estudo do subdomínio Números Racionais Não Negativos. Por se tratar de um assunto relativamente recente, especialmente no que se refere às operações com numerais mistos e, pelo destaque que esta representação apresenta no programa atual, consideramos oportuno o estudo deste tema, bem como a elaboração de uma proposta para um percurso de aprendizagem que pretendemos que seja significativo.

Consideramos que este estudo poderá contribuir para clarificar aspetos que possam melhorar a prática pedagógica de professores em serviço e contribuir para que, quer professores, quer alunos, tenham uma atitude positiva sobre os numerais mistos, e reconheçam a importância que os blocos padrão poderão ter no estudo deste conteúdo. Os numerais mistos já surgiam no programa anterior mas a tendência para a transformação numa fração imprópria continua a ser frequente na sala de aula por todos os intervenientes. Contudo, na nossa opinião, os benefícios em operar com este numeral são imensos e torna-se urgente sensibilizar os alunos e professores sobre as suas potencialidades.

Objetivos e Questões Orientadoras

Tendo em conta as alterações que o conteúdo dos Números Racionais não Negativos sofreu com a implementação do Programa e Metas Curriculares de Matemática, homologado em 2013, especialmente no que se refere à integração e aprofundamento do estudo dos numerais mistos nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (CEB), com este trabalho de investigação pretendemos compreender a pertinência que a abordagem dos numerais mistos tem na compreensão dos

números racionais e, ainda, como os alunos do 5.º ano de escolaridade desenvolvem a adição e subtração de frações, o sentido de numeral misto e a capacidade de operarem com eles, quando esta aprendizagem se realiza através de tarefas exploratórias e com recurso aos blocos padrão.

Para isso, também pretendemos, com este estudo, ampliar o nosso conhecimento sobre as principais dificuldades manifestadas pelos alunos no processo de aprendizagem dos números racionais, na sua representação fracionária, e identificar algumas das suas causas, no sentido de melhorar a nossa prática pedagógica no âmbito do 2.º CEB.

É ainda nosso objetivo conhecer qual o contributo que os blocos padrão poderão ter num percurso de aprendizagem que se pretende ser significativo, como esta proposta de abordagem aos números racionais é recebida pelos alunos e como contribui para ultrapassar as dificuldades detetadas na aprendizagem das frações, de modo a que os alunos deem sentido às frações. Pretendemos também conhecer as implicações e potencialidades deste recurso no percurso de aprendizagem que pretendemos desenvolver.

De acordo com os objetivos traçados colocaram-se questões a partir das quais desenvolveremos o estudo empírico:

- De que forma os blocos padrão podem contribuir para a compreensão do sentido de fração parte-todo e de numeral misto, bem como das operações de adição e subtração com estas representações?
- Que processos utilizam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento do sentido de fração parte-todo e de numeral misto?
- Qual a pertinência do estudo dos numerais mistos na compreensão do número racional?

Organização do Documento

O estudo está organizado em cinco capítulos.

A seguir a esta Introdução segue-se o Capítulo I, que consideramos fundamental, uma vez que nele apresentaremos a revisão da literatura, isto é, os fundamentos teóricos que, sustentarão e orientarão este estudo de investigação, servindo de suporte teórico e reflexivo para o estudo empírico que se seguirá. Neste capítulo serão apresentados dois subcapítulos. Primeiramente abordaremos a temática sobre a aprendizagem dos números racionais e, no segundo subcapítulo, apresentaremos a fundamentação de uma proposta de ensino dos numerais mistos, designada por Rumo a uma Aprendizagem Significativa, baseada na Teoria Construtivista, tendo-nos

debruçado no estudo dos blocos padrão e das suas potencialidades na aprendizagem significativa dos números racionais representados por frações, mais propriamente dos numerais mistos.

No Capítulo II descreveremos e justificaremos o modelo do estudo adotado, caracterizaremos os participantes e descreveremos as etapas que constituíram e nortearam a preparação da proposta de ensino, bem como da recolha de dados.

Dedicamos o Capítulo III à apresentação, análise e discussão dos resultados do trabalho realizado, que serão analisados e discutidos à medida que cada uma das cinco situações formativas for descrita.

Por fim são relatadas as conclusões deste trabalho de investigação, bem como as implicações que tiveram e poderão ter no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais e, ainda, sobre o contributo que os blocos padrão poderão ter na lecionação deste conteúdo.

Por fim, apresentamos uma listagem de referências bibliográficas, mencionadas ao longo do trabalho, das quais destacamos como fonte privilegiada a *Google books* que nos permitiu a leitura de capítulo de livros que não encontramos disponíveis. Outra fonte privilegiada foi o Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal, através do qual acedemos a investigações e artigos publicados sobre os temas que abordamos ao longo deste trabalho. As revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante*, bem como as Atas de encontros promovidos pela Associação dos Professores de Matemática e outras entidades foram outra fonte de consulta que privilegiamos, uma vez que nelas encontramos artigos diversos de professores, da área da Matemática e maioritariamente portugueses, sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, relatos de experiências de inovação, bem como trabalhos relacionados com a investigação em ensino e aprendizagem da Matemática.

Capítulo I

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo apresentaremos o enquadramento teórico que fundamentará o estudo de investigação que nos propomos realizar. Este capítulo encontra-se dividido em duas secções:

- Aprendizagem dos números racionais;
- Rumo a uma aprendizagem significativa.

Aprendizagem dos Números Racionais

Os números racionais constituem um conjunto numérico que compreende o conjunto dos números inteiros bem como o conjunto dos números fracionários. A reunião destes dois conjuntos torna o conjunto dos números racionais denso, o que exige um salto qualitativo de pensamento em relação aos números naturais (Caraça, 1989).

A ampliação significativa de conhecimentos que o estudo dos números racionais exige está também relacionada com a representação destes números na forma de fração. Segundo Llinares e Sanchez (1988, citado por Lopes, 2008) as frações constituem um “megaconceito” por ser constituído e construído “por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito” (p. 8). Deste modo, pela complexidade que este conjunto numérico apresenta, torna-se necessário possibilitar ao aluno um contacto mais prolongado com estes números e com as suas representações. Segundo Mamede (2011), pretende-se, desde cedo, “promover o desenvolvimento do sentido do número, incluindo nele também as frações. Torna-se então relevante proporcionar ao aluno a oportunidade e tempo para construir um bom conceito de fração” (p. 1). De acordo com a autora, o estudo das frações é essencial para o posterior desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, constituindo-se uma base sólida para as relações algébricas que os alunos desenvolverão numa fase posterior.

No Novo Programa de Matemática e nas Metas Curriculares, o estudo dos Números Racionais insere-se, no domínio Números e Operações, cuja abordagem ao número fracionário se inicia no segundo ano de escolaridade e se prolonga ao longo de todo o ensino básico e secundário.

Importância da Aprendizagem dos Números Racionais ¹

Os números racionais são considerados como sendo um dos conceitos mais importantes do currículo de Matemática (Monteiro & Costa, 1996). Segundo Gaviraghi (2012), investigadores reconhecem a importância da aprendizagem do conceito de número racional pois este desenvolve, nas crianças, “habilidades como compreensão e controle das situações do mundo real e ampliação das estruturas mentais necessárias para o desenvolvimento intelectual” (p.10). Por isso, o estudo dos números racionais não deve decorrer “de forma superficial e passageira” (Sá, 2011, p. 12).

Nascimento (2008) apresenta quatro aspetos que fundamentam o trabalho com números racionais nos anos de escolaridade elementar e que também são mencionados por outros autores:

- (1) o *aspeto prático* devido às relações existentes nas suas diferentes representações, nomeadamente na expressão de medidas e índices comparativos. Também Valera (2003) refere que os números racionais fazem parte do currículo escolar pois são frequentes no nosso quotidiano, nomeadamente ao nível do sistema monetário, nas percentagens utilizadas em cálculos diversos, artigos e gráficos apresentados em revistas, jornais, televisão, calculadoras e computadores.
- (2) o *nível psicológico* onde “o trabalho desenvolvido com os números racionais possibilita a expansão de estruturas mentais que são necessárias ao desenvolvimento intelectual” (p. 199). Também Menegazzi (2013) defende que “grande parte do desenvolvimento dos conceitos de número racional ocorre num período significativo de reorganização cognitiva, isto é, numa transição do pensamento concreto para o pensamento formal” (p. 249).
- (3) a *evolução concetual da matemática* pois o estudo dos números racionais, nos primeiros anos de escolaridade, principalmente na sua forma fracionária, é fundamental para o desenvolvimento de competências relacionadas com as operações algébricas que se dará numa fase posterior e ao longo de toda a escolaridade (Valera, 2003).
- (4) o *aspeto didático – epistemológico* onde o estudo deste conjunto adquire grande importância uma vez que proporciona a produção do conhecimento matemático que potencia a superação de dificuldades que surgem no campo dos números naturais. É importante que os alunos percebam que os números naturais são insuficientes para

¹ Neste trabalho iremos referir-nos sempre ao conjunto dos números racionais não negativos mesmo quando, por questões de simplificação de escrita, escrevamos apenas números racionais.

resolver determinadas situações problemáticas, o que leva à necessidade de ampliar o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números racionais não negativos.

Contudo, embora se trate de um dos mais importantes conceitos do currículo de Matemática e seja, por isso, iniciado formalmente no primeiro ciclo para proporcionar ao aluno, desde cedo, a oportunidade e tempo para construir um conceito de fração significativo, é considerado um dos mais complexos e, por isso, de difícil aprendizagem (Monteiro & Costa, 1996).

O Ensino e a Aprendizagem dos Números Racionais

Vários estudos (e.g., Silva, 2012; Valera, 2003; Ventura, 2013) realçam a existência de dificuldades concetuais nas crianças no que concerne à aprendizagem dos números racionais que, segundo Menegazzi (2013), nem sempre são superadas no final do Ensino Básico, perpetuando-se assim pelos ciclos seguintes incluindo no Ensino Superior. No artigo *“Teaching Fractions: Strategies use for teaching fractions to middle grades students”*, os autores Naiser, Wright e Capraro (2003), apresentam o estudo das frações como um grande desafio para alunos e professores. Estes autores referem que, assim como os estudantes lutam na aprendizagem das frações, de igual forma, os professores sentem-se frustrados pela procura de diferentes formas para o ensino efetivo das mesmas que nem sempre se revelam eficazes.

Mamede (2011) defende que as dificuldades sentidas no estudo dos números racionais não se resumem apenas à realização das operações elementares, mas também incidem sobre conceitos essenciais. Embora se pretenda que os alunos, no seu percurso escolar, realizem aprendizagens significativas de Matemática, a autora refere que, ao nível do ensino elementar, existem “discrepâncias entre as orientações curriculares, o currículo implementado na sala de aula e aquilo que de facto os alunos aprendem” (p. 1).

Para Nascimento (2008), muito se deve ao facto de, em muitas escolas, as aulas sobre os números racionais, na sua representação fracionária, continuarem a reduzir-se a aulas expositivas, seguidas de exercícios repetitivos, tendo o professor, geralmente, o manual escolar como único material de apoio para a elaboração das suas aulas. Prevalece ainda, no ensino da matemática, mais propriamente no ensino dos números racionais, a utilização de métodos baseados na memorização e na repetição, acreditando-se que “a repetição leva à fixação” (Dante, 1987, citado por Nascimento, 2008, p. 197). Embora este argumento seja considerado válido, este autor refere que o “melhor seria se o professor fosse mais um orientador, um incentivador, um burilador das ideias e iniciativas dos estudantes” (p. 197). Segundo Nascimento (2008) a “repetição conduz à automatização e à mecanização cegas” (p. 197).

Para Valera (2003) utilizam-se recursos metodológicos que não contribuem para a aprendizagem dos alunos, os métodos mais recorrentes são desatualizados, para além de que tornam o ensino mecânico e, conseqüentemente, desinteressante para o aluno. O autor reforça ainda a ideia de que, no ensino deste conteúdo, o professor deve fazer uso de materiais concretos e manipuláveis na realização das diversas atividades, de forma a estimular e

auxiliar as atividades de raciocínios relacionados com essa atividade (...). Diferentes recursos didáticos e possibilidades de experimentação, (...) são importantes para a implementação de um trabalho pedagógico renovado e mais adaptado às necessidades e interesses dos alunos, superando, desse modo, os obstáculos didáticos que se detetam em seu ensino, favorecendo disposições positivas. (p. 58)

Assim, de modo a proporcionar uma aprendizagem significativa, antes de a criança adquirir abstrações e generalizações matemáticas, Valera (2003) considera que a criança precisa manipular e visualizar diferentes tipos de materiais, trabalhar com diferentes situações e problemas que o levem a adquirir abstrações posteriores. Para Nascimento (2008), “esta fase exploratória e concreta torna-se fundamental para a construção de significados e para a formulação de conceitos sobre os números fracionários” (p. 207).

Deste modo, é necessário tornar o processo de ensino e aprendizagem “ativo e envolvente para os alunos (...) [pois] tornar este tema interessante e emocionante melhora a [sua] aprendizagem” (Naiser et al., 2003, p. 193). De um modo geral, parece não ser isso que se verifica.

Nascimento (2008) considera que, no início do estudo das frações, o conceito sobre este conteúdo é já apresentado pronto. Segundo esta autora, usualmente, é dada a definição de fração, identificam-se os numeradores e os denominadores e procede-se à leitura da fração. Verifica-se uma grande preocupação para que o aluno aprenda a designação dos termos de uma fração, dando-se ênfase à terminologia para a posterior classificação de frações e aplicação de técnicas operatórias (Nascimento, 2008). De seguida, iniciam-se os cálculos com frações, apresentando-se as regras e as técnicas utilizadas para se proceder aos cálculos. As aulas prosseguem com exercícios de treino, simplificação de frações, determinação do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum e, depois de um tempo exaustivo destinado à aprendizagem destas técnicas, exige-se que os alunos resolvam problemas ou exercícios com números fracionários (Nascimento, 2008). Mas, este percurso, pouco ou em nada contribui para que o aluno compreenda as diferentes formas de representação das frações (Nascimento, 2008). Para Pereira (2009), o aluno inicia o trabalho abstrato, sem ainda ter compreendido bem o conceito de fração. A este respeito, Monteiro e Pinto (2005) alertam ainda para o facto de a realização, por parte do aluno, de operações com números racionais nem sempre ter uma correlação direta com a compreensão dos conceitos subjacentes. Para as autoras, embora o “treino” lhes permita obter

respostas corretas a situações de cálculo rotineiro tal facto pode “criar a ilusão de que compreendem o que fazem” (p. 90).

Além disso, as definições sobre os diversos tipos de frações (própria, imprópria, equivalente,...), além de não fazerem sentido para o aluno, trazem conceitos abstratos e de difícil compreensão.

Está claro que o aluno não compreende esses termos, apenas os memoriza e os reproduz em exercícios propostos em sala de aula. Não que esses termos não possam vir a ser conhecidos pelos alunos, mas é preciso um trabalho de construção de conceitos primeiramente e não de memorização (...) essa maneira tradicional de organizar matemática, em que há preocupação apenas com os conceitos e dados científicos, faz parte do modo de pensar dos matemáticos, presentes numa concepção internalista da matemática que privilegia a metodologia da ciência. Um dos desafios do ensino da matemática nas escolas é romper com essa concepção internalista (...) e incorporar ao ensino uma concepção externalista e principalmente com a metodologia do ensino. (Nascimento, 2008, p. 202)

Deste modo, o caminho mais significativo no ensino da Matemática não passa única e exclusivamente pela memorização e mecanização. De acordo com Dante (1987, citado por Nascimento, 2008), “o caminho mais significativo é o de aproveitar a curiosidade dos alunos, incentivando iniciativas de exploração e redescoberta de conceitos” (p. 197), isto é, por um ensino que se preocupa com o aspeto concetual, neste caso, do número racional (e.g., Gaviraghi, 2012; Mamede, 2011; Ponte & Quaresma, 2011). De acordo com David e Fonseca (1997):

uma abordagem dos números racionais que contemple esse processo de gênese dos conceitos, em vez de ver o conteúdo matemático apenas como um produto não só proverá o educador de elementos para compreender melhor o processo pelo qual o aluno assimila esse conteúdo, como também permitirá ao aluno uma percepção da intencionalidade e da dinâmica da produção de conhecimento matemático. (p. 56)

A verdadeira aprendizagem dos números racionais, mais propriamente da sua representação na forma de fração, “exige tempo, maturidade de pensamento e muita dedicação, pois este é um conteúdo amplo e exige uma certa capacidade de abstração, pois engloba outros conceitos” (Pelissaro, 2011, p. 14).

Ponte e Quaresma (2011) designam o conceito de número racional como sendo multifacetado, sendo possível distinguir vários significados (parte-todo, razão, operador, quociente e medida). Por este motivo, segundo Mamede (2011), interessa proporcionar, aos alunos, oportunidades para explorar os números racionais na sua representação fracionária em todos os seus significados pois, o conceito de fração só estará completamente assimilado se o aluno o dominar “em todas as suas vertentes” (p. 3), com capacidade de “traduzir, raciocinar e resolver problemas nas diferentes interpretações” (p. 3). O que se pressupõe é que o aluno se aproprie dos diferentes significados da fração, das suas diferentes representações e que seja capaz de os mobilizar articulando-os com novos conceitos (Mamede, 2011).

Assim, para que haja uma aprendizagem significativa dos números racionais, os vários significados do número fracionário devem ser trabalhados, colocados em funcionamento, inter-relacionando-se e influenciando-se mutuamente, o que torna todo este processo de apropriação do sentido do número racional na sua representação fracionária complexa.

De acordo com Vigotsky (s.d., citado por Gaviraghi, 2012) o conceito de número fracionário surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida se torna forma basilar de pensamento com o qual a criança percebe e toma conhecimento da realidade que a cerca (...) [pois] um novo conceito, uma nova generalização não surge senão com base no conceito ou generalização anterior". (p. 15)

Portanto, os conhecimentos iniciais sobre os números racionais precisam estar bem alicerçados para que a aprendizagem de novos conteúdos matemáticos ocorra. E, neste âmbito, uma vez que este conteúdo se torna mais abstrato e mais complexo com o avançar da escolaridade, se os alunos não construírem o conceito de fração nos anos iniciais, sentirão dificuldades e não conseguirão avançar, o que contribuirá para um possível fracasso escolar nos anos seguintes (Nascimento, 2008). Por este motivo, é vantajoso que o ensino seja organizado de forma a possibilitar experiências com diferentes significados e diferentes representações pois, como relatou Silva (1997, citado por Pelissaro, 2011), "aprender e ensinar frações pode ser muito simples, desde que não façamos algo mecânico e sim algo pensado" (p. 15). Para Nascimento (2008), quando os conteúdos são memorizados acabam, com o passar do tempo, por serem esquecidos, comprometendo a aprendizagem.

Nascimento (2008) verifica uma "ênfase nos procedimentos e algoritmos para operar com os números racionais" (p. 200) e Monteiro e Costa (1996), uma "utilização prematura das regras no estudo das frações e decimais" (p. 60), não havendo preocupação com o seu aspeto conceptual, para além do facto do trabalho proposto ser, na sua maioria, desprovido de contexto.

Sá (2011) considera que quando é dada prioridade ao cálculo de algoritmos isso contribui para que o aluno se sinta mais confiante na resolução de exercícios e operações, mas permanecem as confusões aquando da comparação de frações e da noção de equivalência de frações. Além disso, assim sendo, não se dá a oportunidade do aluno fazer descobertas e compreender os conceitos envolvidos. Valera (2003) acrescenta que o aluno torna-se "um expectador do saber e é levado a conceber a matemática numa dimensão reducionista, incompatível com a sua natureza" (p. 11). Por isso, Serrazina (2012) defende que "é na síntese da diversidade de situações e na teia de relações, que os alunos vão estabelecendo a partir delas, que o sentido do número racional se vai desenvolvendo" (p. 111).

Além disso, na perspetiva de Duval (2012), "as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática" (p. 266) e as

dificuldades dos alunos surgem devido à complexidade e diversidade destas representações. Segundo Ponte e Quaresma (2013) “representar um número significa atribuir-lhe uma designação” (p. 278) que, na perspetiva de Goldin (2003, citado de Ponte & Quaresma, 2011), poderá ser feito pelo uso de sinais, caracteres, ícones ou objetos. De acordo com Ponte e Quaresma (2013) “os alunos precisam de compreender que um número pode ter várias designações” (p. 278), como se dá com os números racionais que podem ter várias representações – o numeral decimal, a fração, o numeral misto, a percentagem, a reta numérica, as linguagens natural e pictórica. Neste contexto, o trabalho realizado por Post, Cramer, Lesh, e Harel (1993, citado por Ponte & Quaresma, 2011), no âmbito do estudo *Rational Number Project*, aponta três aspetos a ter em conta na compreensão dos números racionais, nomeadamente: “(i) a flexibilidade na conversão entre diferentes representações; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) independência progressiva de representações pictóricas e de materiais manipuláveis” (p. 57). Assim, uma das condições para a compreensão em Matemática, mais especificamente no âmbito dos números racionais, é a articulação dos vários registos de representação destes números (Quaresma & Ponte, 2013).

Aliás, Duval (2012) alerta para a importância de os objetos matemáticos não serem confundidos com as representações que se fazem deles. Segundo o autor

toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações “inertes” que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. (p. 268)

Assim, na perspetiva de Ponte e Quaresma (2013) e, no âmbito deste conjunto numérico, os alunos devem saber e compreender que $\frac{1}{4}$, 25% e 0,25 são designações ou representações diferentes que correspondem ao mesmo número. Estas diferentes formas de representar um número desempenham um papel de grande importância na construção do conceito de número racional, na medida em que “ao estudarem frações, decimais e percentagens em simultâneo, os alunos podem aprender a alternar entre formas equivalentes, escolhendo e usando uma forma adequada e conveniente para resolver problemas e expressar quantidades” (NCTM, 2007, p. 175). Esta publicação reforça ainda que as representações não só ajudarão os alunos a desenvolver e a compreender os tópicos matemáticos como também lhes fornecerão as ferramentas de que necessitam para ampliar a sua capacidade de pensar matematicamente.

Embora, segundo Valera (2003) e Nascimento (2008), exista uma separação indesejável, entre o uso social e o uso escolar dos números racionais, uma vez que o uso social se centra na forma decimal, e, em contrapartida, o uso escolar recai essencialmente sobre a forma de fração

pois é dado maior destaque a este tipo de representação, este aspeto do contexto social é de extrema importância. Segundo uma reportagem da revista Escola (2008, citado por Oliveira & Silva, 2014)

o uso do contexto social no estudo de frações permite aos alunos manipular o conteúdo, ao mesmo tempo em que será fonte de novos problemas para eles iniciando a construção de novas relações, mas para isso será necessário promover um salto do intuitivo e informal, aprofundando a análise do conceito, o que irá se suceder ao longo dos anos. (p. 71)

Valera (2003) defende que, se assim fosse, o processo de aprendizagem centrar-se-ia no saber pensar e no saber fazer, tornando-o mais acessível pois as dificuldades sentidas pelos alunos seriam menores, para além de que a prática se tornaria mais objetiva porque “os alunos teriam um campo maior de referência nas suas reflexões, pois há sempre equivalência entre o conceito construído e o facto observado” (p. 13).

É certo que nem sempre será possível relacionar as atividades de sala de aula com situações do dia-a-dia, mas é necessário que os alunos percebam a importância das frações em atividades que virão a realizar futuramente. Neste sentido, Sá (2011) é da opinião que “através de conteúdos que são pouco trabalhados fora da sala de aula, a escola se torna um meio cultural de aprendizagem, sendo a oportunidade para a familiarização com conceitos e práticas que terão poucas chances de acontecerem fora dela” (p. 13).

Em suma, é possível apresentar um conjunto de fatores que poderão justificar as dificuldades na aprendizagem deste conteúdo. Monteiro e Costa (1996) identificam-nos como sendo: “a) a multiplicidade de significados dos números racionais; b) a conceptualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo números racionais; c) utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e frações” (p. 60).

a) Multiplicidade de significados dos números racionais.

O conceito de número racional é multifacetado, distinguindo-se vários significados. No que se refere à representação dos números racionais na sua forma fracionária existem vários significados associados: i) parte-todo; ii) razão; iii) operador; iv) quociente; v) medida.

As autoras consideram que, esta multiplicidade de significados está assim relacionada com a diversidade de contextos onde estes surgem nas abordagens didáticas destes números. A título de exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ pode ser interpretada de várias maneiras: pode representar $\frac{3}{4}$ de um bolo (dividido em 4 fatias, das quais se consideram 3); pode também representar uma razão em que se comparam duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta, por exemplo, $\frac{3}{4}$ pode representar a razão ou relação que existe entre o número de rapazes e o número de raparigas de uma turma; ou ainda pode representar três litros de sumo divididos por quatro pessoas.

Esta multiplicidade de significados não ocorre no conjunto dos números naturais, tornando assim o ensino dos números racionais, mais complexo, mais exigente e, por isso, mais demorado.

Assim sendo, verifica-se a necessidade de se estabelecerem conexões entre os vários significados dos números racionais representados na forma fracionária.

- b) A conceptualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo números racionais.

Segundo Monteiro e Pinto (2005), para a compreensão de frações, “a questão da unidade desempenha um papel fulcral, pois uma fração tem sempre subjacente uma unidade” (p. 95). No entanto, esta constitui uma das maiores dificuldades inerentes ao estudo das frações pois o conceito de unidade passa a ser alargado.

De acordo com Monteiro e Costa (1996), as primeiras experiências por que os alunos passam aquando da abordagem dos números racionais representados por frações são situações de parte-todo em que a fração representa a parte da unidade considerada que foi dividida em partes iguais, ou seja, as unidades que até então são consideradas, no âmbito dos números naturais, como um todo, passam, agora, a ser divididas. Nestes casos, tem-se verificado que, em unidades contínuas, quando se apresenta uma figura previamente dividida em partes congruentes, os alunos, por contagem das partes em que a unidade está dividida e das partes consideradas não revelam muitas dificuldades em escrever a fração correspondente à parte pintada. No entanto, segundo Silva (2004), “em situações de divisões não usuais”, como as apresentadas na Figura 1, “é comum a alegação da não possibilidade da identificação da fração que representa a parte pintada da figura sob o argumento de que a figura não está dividida em partes iguais” (p. 4).



Figura 1. Duas Situações de Divisão da Unidade

Por outro lado, segundo a autora, em figuras semelhantes às indicadas na Figura 2, a ênfase dada à contagem das partes conduz, muitas vezes, à ausência de perceção de que as partes não são iguais e não têm a mesma medida de área, o que leva muitos a identificarem $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{6}$, como sendo, respetivamente, a fração correspondente à parte pintada de cada uma das figuras.



Figura 2. Exemplos de Situações em que a Unidade Está Desigualmente Dividida

Estes tipos de erros poderão, de acordo com Silva (2004) ser evitados se a concepção parte/todo no contínuo não se resumisse, única e exclusivamente, à contagem das partes de figuras já divididas, mas sim “na relação entre áreas, a partir de tarefas que solicitassem a divisão de figuras” (p. 4). A autora refere ainda que “essas tarefas conduziriam naturalmente à percepção da equivalência tanto de áreas, quanto de frações menores que 1 que as representam” (p. 4).

Ponte e Quaresma (2011) afirmam que a esta dificuldade da divisão da unidade acresce ainda o facto de que “um mesmo problema pode envolver diversas unidades” (p. 254). Monteiro e Costa (1996) consideram também que “a unidade que serve de contexto e que aporta significado à nova representação nem sempre é explicitada nas situações propostas aos alunos” (p. 61). A título de exemplo, a unidade nem sempre ou quase nunca é explicitada quando se pretende determinar a soma de $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{4}$. Além disso, de acordo com as autoras,

cada uma das partes em que a unidade é dividida pode funcionar como um novo tipo de unidade que não mantém as mesmas características da unidade inicial, como se verifica quando é necessário compreender que 0,01 é 0,1 de 0,1. As actividades de quantificação são agora, ao invés da contagem, a medição e a divisão em partes iguais”. (p. 61)

Monteiro e Costa (1996) alertam também para o facto de surgirem dificuldades adicionais quando se considera a divisão de uma unidade composta. Segundo Monteiro e Pinto (2007)

podem considerar-se vários tipos de unidade: simples ou unidades compostas, discretas ou contínuas. Uma dúzia de maçãs pode ser considerada uma unidade composta pois resulta de se agrupar um conjunto discreto de objetos, uma maçã será uma unidade simples. A centena integra dez dezenas que, por sua vez, integra dez unidades simples. A construção de uma unidade composta, como a centena, implica que a criança coordene diferentes tipos de unidade ao mesmo tempo. (p. 15)

Assim sendo, conforme referido pelas autoras Monteiro e Costa (1996), $\frac{1}{3}$ de uma unidade contínua ou $\frac{1}{3}$ de um conjunto discreto de um determinado número de elementos remetem-nos para situações diferentes, o que poderá, no caso da última situação, constituir um motivo de perturbação para os alunos, pois terão de pensar nos elementos do conjunto discreto como sendo uma unidade. Por este motivo, Monteiro e Costa (1996) referem que “reconhecer a estrutura da unidade em diversas situações problemáticas torna-se necessário à resolução correta dessas situações” (p. 61).

Monteiro e Pinto (2005) consideram ainda que “experiências de reconstrução de unidades a partir de partes revestem-se da maior importância, pois é no convívio com uma multiplicidade de unidades que o sentido de número e dos símbolos que o representam se vai desenvolvendo” (p. 95). Deste modo, e uma vez que no estudo dos números racionais nas suas mais diversas vertentes, alterações mais complexas na natureza da unidade vão surgir, é de extrema importância confrontar os alunos com situações problemáticas diversas, permitindo-lhes

antecipar a estrutura da unidade que melhor se adequará à resolução dessas situações. Será, assim, importante e necessário, a um nível elementar, referir a unidade em causa, para além de que, associar as frações a um contexto dará significado às frações o que, por sua vez, facilitará o processo de aprendizagem.

c) Utilização precoce de regras e algoritmos dos números racionais e frações.

Monteiro e Pinto (2005), acerca do ensino dos números racionais, referem a existência de uma ênfase bastante mais acentuada nos procedimentos do que nos conceitos e que “raramente se estabelecem *pontes* entre uns e outros” (p.89). Aliás, Monteiro e Costa (1996) corroboram esta afirmação referindo que a predominância das regras e dos procedimentos “atrasam a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática” (p. 62). Estas últimas autoras mencionam que esta situação conduz a práticas sem sentido pois os alunos passam a trabalhar com símbolos e aplicam regras memorizadas de tal modo que “não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática” (p. 62). Neste sentido, os algoritmos só servirão para obscurecer os conceitos e as relações que, acima de tudo, são o que se pretende desenvolver com/nos alunos.

É certo que, à medida que os alunos forem progredindo na aprendizagem dos números racionais, os algoritmos ganharão relevo por, em alguns casos, facilitarem os cálculos, mas o estudo dos números racionais não se deverá restringir a estas situações. É o caminhar para situações mais complexas e com sentido que vai permitir interiorizar conceitos e procedimentos.

Consequentemente, estas dificuldades ao nível da compreensão conduzem a erros por parte dos alunos aquando da realização de propostas neste âmbito.

Seguidamente apresentaremos alguns erros ou dificuldades mais frequentes evidenciadas pelos alunos, apontados por Bertoni (2009):

- **Incompreensão da representação fracionária.**

Esta é uma dificuldade muito documentada na literatura, segundo Mamede (2011). Geralmente, segundo a autora, os alunos consideram as magnitudes definidas no numerador e no denominador separadamente, sem relacionarem as representações com os números em causa. Por este motivo, para muitos $\frac{1}{2} = 1,2$.

Monteiro e Pinto (2005) concordam que, pelo facto de a representação fracionária exigir a utilização de dois números, este constitui um obstáculo inerente às frações em contexto escolar.

Para as autoras, muitos dos erros dos alunos devem-se ao facto de não conseguirem compreender que, na realidade, não estão perante dois números. Sá (2011) partilha da mesma opinião. Muitos alunos entendem o número racional, representado na sua forma fracionária, como sendo dois números inteiros o que os leva a tratar os números separadamente num campo em que se sentem mais seguros, o conjunto dos números inteiros. Por exemplo, quando os alunos não se apropriam corretamente do conceito de fração é comum determinarem $\frac{2}{10}$ como sendo a soma de $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.

Outra dificuldade sentida prende-se com as diferentes representações de uma mesma quantidade (noção de fração equivalente), pelo facto de as frações representadas com numeradores e denominadores diferentes poderem ser equivalentes por representarem a mesma quantidade (Silva, 2012). Segundo Mamede (2011), “isto está longe de ser uma tarefa fácil” (p. 2) pois “fracções que se referem à mesma quantidade podem ser representadas por diferentes símbolos escritos (...) e podem ser designados por diferentes palavras (um meio, dois quartos, três quartos, ..., etc)” (p. 2). Esta tarefa torna-se ainda mais complexa quando, diz a autora, “pensarmos que as mesmas palavras e os mesmos símbolos escritos podem referir-se a quantidades distintas. Por exemplo, metade ($\frac{1}{2}$) de 8 ou metade ($\frac{1}{2}$) de 6 não representam a mesma quantidade, não pertencendo assim à mesma classe de fracções equivalentes” (p. 2).

Outro aspeto que, segundo Mamede (2011) dificulta a compreensão e, consequentemente, o trabalho com frações diz respeito à necessidade de utilizar relações multiplicativas na comparação de fração. A este respeito, Sá (2011) acrescenta que outro erro, também muito vulgar, e indicativo de que o aluno não compreendeu ainda a representação fracionária, reside no facto de, quando comparados os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, os alunos referirem que $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{1}{2}$ porque 3 é maior do que 2. Além disso, a mesma autora refere, como dificuldade, a mudança no resultado de algumas operações. Apesar de, no âmbito do conjunto dos números naturais, a multiplicação resultar sempre num produto maior ou igual aos fatores, no conjunto dos números racionais, se multiplicarmos $\frac{1}{2}$ por 20, o produto não será superior ao fator 20.

Pelos motivos referidos anteriormente, “o simbolismo de fração representa uma convenção bastante complexa que é geralmente enganosa para a criança” (Walle, 2009, citado por Gaviraghi, 2012, p. 29). Os alunos precisam compreender o significado de cada um dos seus termos, qualquer que seja o seu significado. Aliás, segundo Walle (2009), as crianças precisam ter em consideração dois aspetos, sendo eles, a quantidade de partes e a igualdade das partes, em tamanho (p.323).

- **Dificuldade na compreensão da densidade do conjunto dos números racionais.**

Este conjunto numérico é considerado um conjunto denso porque entre dois quaisquer números é sempre possível encontrar uma infinidade de outros racionais. Segundo Monteiro e Pinto (2005) este aspeto pode constituir uma dificuldade à compreensão dos números racionais pois, desde cedo, fica bem claro para os alunos que, no universo dos números inteiros, um número tem sempre um sucessor, enquanto que, no caso dos fracionários, isso já não acontece.

- **Os números decimais não estão suficientemente desenvolvidos pelos alunos.**

Segundo Monteiro e Costa (1996) “as dificuldades evidenciam-se ao nível do próprio conceito de número decimal, das relações de grandeza e proximidade” (p. 62). Monteiro e Pinto (2007) referem também a existência de algumas dificuldades dos alunos no trabalho com os números decimais nomeadamente, “(i) confundindo décimas e centésimas, não distinguindo 2,5 de 2,05; (ii) confundindo o número de algarismos e a grandeza, quando, por exemplo, dizem que 1,456 é maior que 1,5; e (iii) considerando não existirem números racionais entre 0,1 e 0,2” (p. 11).

- **Compreender as frações superiores à unidade (frações impróprias).**

Bertoni (2009) realça ainda que a utilização de frações impróprias representa “um certo obstáculo cognitivo para o aluno” (p. 22). Na perspetiva de Nascimento (2008) “esta dificuldade é decorrente da ênfase no trabalho com as frações que representam parte de um todo, deixando de lado o trabalho com as outras interpretações de frações” (p. 204).

Além disso, Bertoni (2009) refere ainda que, ao nível das frações impróprias e dos numerais mistos, a ênfase nas “regras, onde o aluno não vê lógica nem sentido” (p. 70) contribui para que a aprendizagem das frações tenha “tão poucos resultados e tantos problemas” (p. 70).

Por todos os motivos enunciados, o ensino dos números racionais, nomeadamente dos números representados por frações, necessita ser cuidadoso e exige paciência. Segundo Sá (2011),

o aprendizado não é fácil, visto que os alunos até então apenas têm conhecimentos sobre os números naturais, descobrir que existem números que representam menos de um inteiro e mais de zero, é uma abstração que exige tempo para encaixar as ideias e estabelecer relações pertinentes. (p. 75)

Nascimento (2008) defende que, para se vencer as dificuldades sentidas por parte dos alunos, é necessário fomentar um ensino mais intuitivo e menos formal, procurando, sempre que possível, estabelecer conexões na própria disciplina. No artigo *Conexões no Programa de*

Matemática do Ensino Básico, Ponte (2010) salienta que um novo conceito só passa a ser realmente compreendido quando os alunos estabelecem conexões entre as ideias matemáticas. Estas conexões também poderão e deverão ser feitas com outras áreas do conhecimento, uma vez que, segundo Nascimento (2008), uma “visão estagnada dos conteúdos e a forma linear como são ensinados causa prejuízos na aprendizagem dos alunos” (p. 203). Assim sendo e, no sentido de auxiliar os alunos a ultrapassar estas dificuldades, Ponte (2010) salienta que o professor deverá procurar criar oportunidades de trabalho de sala de aula com diversos tipos de conexões, usando-as no sentido de promover a aprendizagem da Matemática com compreensão, e de o aluno desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática e de a apreciar.

Em jeito de conclusão, Monteiro e Pinto (2005) concordam que as questões relacionadas com a forma como se desenvolvem os conceitos matemáticos e a sua relação com os símbolos é fundamental e especialmente pertinente no âmbito do estudo dos números racionais. No entanto, e sobretudo numa fase inicial, não será benéfico dar demasiada ênfase à notação simbólica e aos algoritmos, para além de que o professor deverá ter em conta que o desenvolvimento de um conceito, para ser bem compreendido e assimilado, terá de partir de situações concretas. O percurso entre o informal e o formal não constitui um processo linear, para além de que pressupõe a vivência de experiências variadas, de modo a permitir que o aluno estabeleça um conjunto complexo de relações entre os diferentes aspetos e significados dos números racionais.

Os Numerais Mistos

Os numerais mistos, à semelhança das frações impróprias, são uma forma de representar números racionais superiores à unidade. Apesar de estes numerais serem uma representação abreviada da soma de um número inteiro e de uma fração inferior à unidade, segundo Wu (1998) são geralmente encarados, por professores e alunos, com ansiedade e medo. A conversão das frações impróprias em numeral misto constitui um procedimento invulgar por parte dos professores que, geralmente, preferem as primeiras representações (Monteiro & Pinto, 2005). Contudo, as frações impróprias representam um “obstáculo cognitivo para o aluno”, devido à necessidade de fazer uso de mais do que uma unidade na sua representação pictórica (Bertoni, 2009, p. 22).

Wu (2002) considera o numeral misto como uma representação com sentido (ou que faz sentido) pois dá-nos a perceção, ainda que aproximada, da quantidade representada. Por isso, os numerais mistos devem ser vistos e trabalhados da mesma forma e com a mesma frequência que

as frações próprias e impróprias (Wu, 2002). A este respeito, Wu (2014) faz duas observações que considera pertinentes no ensino dos numerais mistos:

a) o seu conceito deve ser definido somente após a abordagem da adição de frações. A título de exemplo, o numeral misto $7\frac{1}{5}$ deve ser gradualmente introduzido como representando *sete e um quinto* sem tornar explícito que “e” significa adicionar.

b) este não deve incidir apenas no ensino e treino da técnica de conversão para uma fração imprópria. Os numerais mistos deverão ser compreendidos, pelos alunos, como o que realmente são, a representação de uma adição entre a(s) unidades e a parte fracionária inferior à unidade, e, apenas numa fase posterior, o algoritmo que permite de forma rápida a conversão de um numeral misto na fração imprópria correspondente poderá e deverá ser ensinado.

Apesar da imensa procura na literatura nacional e internacional, foram poucos os estudos encontrados sobre os numerais mistos. As referências a esta forma de representação prendem-se essencialmente com os aspetos práticos, isto é, com os procedimentos relacionados com a conversão dos numerais mistos em frações impróprias e vice-versa. No entanto, é reconhecida a importância que esta representação pode ter. Primeiro, porque os numerais mistos são usados, frequentemente, na vida diária (Amato, 2005). A título de exemplo, os numerais mistos encontram-se, quer ao nível da representação, quer ao nível do conceito, em receitas (e.g., $1\frac{1}{2}$ litros de leite), na expressão das idades (ex. $9\frac{1}{2}$ anos) e das horas (ex.: $3\frac{1}{2}$); situações estas em que a representação decimal em nada facilitaria a sua expressão. Acresce ainda o facto de, segundo Liebeck (1985, citado de Amato, 2005), este constituir um conceito que surge naturalmente através da medição de objetos. De acordo com Liebeck (1985, citado de Amato, 2005), os numerais mistos desempenham um papel importante na compreensão da densidade do conjunto dos números racionais, uma vez que sugerem sempre a existência de um número entre dois números inteiros consecutivos. Aliás, aliado a este facto, estudos recentes (e.g. Amato, 2005; Hannula, 2003) confirmam que os numerais mistos não somente são de mais fácil localização na reta numérica como, consequentemente, contribuem para uma melhor visualização de números representados na forma fracionária ou decimal, na reta numérica, assim como na compreensão do alargamento do sistema numérico, pelo que Amato (2005) defende a importância de proporcionar, aos alunos experiências várias com frações iguais a um e numerais mistos assim como as realizadas com números representados por frações próprias.

Além disso, segundo Amato (2005), a representação na forma de numeral misto pode tornar-se de fácil compreensão, após algum trabalho com as frações próprias, mas especialmente após experiências várias com frações que representam a unidade, frações impróprias e respetivos numerais mistos pois este trabalho poderá proporcionar o “link inicial” que possibilitam o

estabelecimento de relações entre as frações e os números inteiros (p. 56). Aliás, este trabalho será benéfico para que os alunos compreendam as frações enquanto uma extensão do sistema de numeração. No entanto, a autora salienta que continua a dar-se ênfase às frações próprias e parece ser dada pouca importância aos numerais mistos. Paralelamente a isso, Amato (2005) considera importante o uso de vários modelos para a representação destes conceitos. Aliás, a autora refere que a utilização de representações múltiplas ajudou os alunos que participaram na sua investigação a compreenderem que a parte fracionária de um numeral misto deve sempre representar um número inferior a um. Por isso, e, tendo em conta que o uso de representações, enquanto forma de interpretar, exprimir e discutir uma ideia, tem ganho algum relevo no ensino da Matemática nos últimos tempos pela importância que evidenciam (Valério, 2005), é de destacar o seu uso no ensino dos numerais mistos pois, a utilização de várias representações (que podem adquirir formas diversas, tais como, analogias, desenhos ou manipuláveis) poderá permitir um “uso flexível do conceito na resolução de problemas” (Vale & Pimentel, 2012, p. 350).

Em Portugal, a referência explícita aos numerais mistos nos programas curriculares é relativamente recente.

No Programa de Matemática do Ensino Básico de 1991 do 2.º CEB não havia qualquer referência direta aos numerais mistos. Um dos objetivos de aprendizagem consistia em “comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas” (p. 14) e, na adição e subtração de números racionais apenas havia referências destas operações entre “dois números representados por frações com o mesmo denominador, ou com denominadores diferentes, sendo um deles múltiplo de outro” e entre “dois números, sendo um inteiro e outro fracionário” (p. 15).

O documento “Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais” de 2001 também não mencionava a representação dos numerais mistos de forma direta, embora definisse como competência do 2.º ciclo o “reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros e racionais positivos, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles” (p. 61).

É no Programa de Matemática, datado de 2007, que os numerais mistos foram, pela primeira vez, mencionados. Para além de se verificar uma alteração importante em relação ao programa anterior, uma vez que as representações fracionárias e decimais dos números racionais surgiam em paralelo, os numerais mistos foram introduzidos no 2.º ciclo, no tópico “Números racionais não negativos”. Nas notas relativas ao objetivo específico “compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador” lemos “recorrer a representações de números por frações, decimais e numerais mistos” (p. 34), embora não seja referida forma de representação em situações de cálculo.

Apesar da evolução sentida ao nível desta representação na transição dos dois programas anteriores, é no programa atual que os numerais mistos assumem grande importância. Surgem no 1.º CEB, no domínio Números e Operações, embora de forma muito superficial, e é no 2.º CEB que ganham destaque. Aliás, pretende-se que, à entrada do 3.º CEB, os alunos mostrem “fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados” e relacionem “de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens)” (Ministério da Educação e Ciência, 2013, p. 14). Apresentamos, na Tabela 1, as referências ao numeral misto, que é possível encontrar no documento do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (2013).

Tabela 1. Referências ao Numeral Misto nos Atuais Documentos Orientadores

Domínio: Números e Operações			
Subdomínio: Números racionais não negativos			
	Conteúdo	Objetivo Geral	Descritor(es)
3.º ano	<ul style="list-style-type: none"> Adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações: - Decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria. 	<ul style="list-style-type: none"> Adicionar e subtrair números racionais 	(7) Decompor uma fração superior a 1 na soma de um número natural e de uma fração própria utilizando a divisão inteira do numerador pelo denominador.
5.º ano	<ul style="list-style-type: none"> Números racionais não negativos: - Representação de números racionais na forma de numerais mistos; adição e subtração de números racionais representados por numerais mistos. 	<ul style="list-style-type: none"> Efetuar operações com números racionais não negativos 	(9) Representar números racionais não negativos como numerais mistos. (10) Adicionar e subtrair dois numerais racionais não negativos expressos como numerais mistos, começando respetivamente por adicionar ou subtrair as partes inteiras e as frações próprias associadas, com eventual transporte de uma unidade.
		<ul style="list-style-type: none"> Resolver problemas 	(1) Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos.

Rumo a uma Aprendizagem Significativa

Investigações feitas na área da Matemática, segundo Bisognin e Bisognin (2014), têm revelado que a comunidade científica, de modo geral, considera que o professor é “um elemento essencial e imprescindível no trabalho relacionado com a educação e que um professor competente é aquele que possui conhecimento matemático e conhecimento de estratégias adequadas para ensinar” (p. 131). Para que assim seja, as autoras defendem que o professor deve possuir competências mínimas que incluem conhecimento matemático previsto no programa da disciplina e conhecimento didático e pedagógico do conteúdo que lhe possibilite recorrer a metodologias adequadas que, não somente terão o seu contributo na forma como conduzirá o trabalho de sala de aula, como também lhe permitirão aumentar e melhorar a compreensão do processo de ensino e de aprendizagem.

Piaget, Inhelder e Szeminska (1948, citado por Oliveira & Silva, 2014) defendem que, a noção de fração constrói-se no nível das operações concretas e no momento em que ocorre uma articulação operatória entre vários elementos, designadamente a existência de um todo divisível, a existência de um número determinado de partes, o esgotamento da divisão do todo, a relação entre o número total de partes e o número de partes consideradas, a igualdade das partes, a compreensão de que cada fração pode ainda ser um todo divisível e, por fim, “o princípio da invariância, que diz respeito ao facto de a quantidade contínua dos objetos não variar em função da variação de suas formas, posições e arranjos” (p. 71). Segundo Oliveira e Silva (2014), a capacidade de o aluno compreender que estas modificações resultam de transformações que são mentalmente reversíveis é fundamental para a compreensão do conceito de fração e pressupõe que o aluno aja sobre um objeto. Estes autores referem ainda que, “quando um aluno age sobre um objeto, pela partição e sobreposição de uma parte (a unidade) sobre as outras, tem a possibilidade de conseguir perceber o todo como um múltiplo da unidade tomada” (p. 72).

Nesta perspetiva, os materiais didáticos manipuláveis constituem um importante recurso didático pois “podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa” (Rodrigues & Gazire, 2012, p. 188).

A Teoria Construtivista

Os conhecimentos não se empilham, não se acumulam, mas passam de estados de equilíbrio a estados de desequilíbrio, no transcurso dos quais os conhecimentos anteriores são questionados. Uma nova fase de equilíbrio corresponde então a uma fase de reorganização dos conhecimentos, em que os novos saberes são integrados ao saber antigo, às vezes modificado. (Charnay, 2001, p. 43)

A Educação Matemática estuda as relações entre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Neste sentido, reúne conhecimentos da Matemática, da Pedagogia e da Psicologia. Para Dalbosco (2007, citado por Nienman & Brandoli, 2012) a Pedagogia está em permanente diálogo com outras áreas do conhecimento. Por sua vez, as teorias desenvolvidas com base em estudos realizados na área da Psicologia têm forte influência na construção das teorias pedagógicas que se pretendem aplicar no âmbito processo de ensino e aprendizagem realizado na escola. Por isso, Bruner (2001, citado por Niemann & Brandoli, 2012) considerava que “uma escolha de pedagogia inevitavelmente comunica uma concepção do processo de aprendizagem e do aprendiz. A pedagogia jamais é isenta. Trata-se de um meio que carrega a sua própria mensagem” (p. 4).

Deste modo, de acordo com Caldeira (2009), a Psicologia Educacional surge como o campo do conhecimento científico que fornece os instrumentos para compreendermos os processos educativos. As suas teorias concedem aos professores a possibilidade de melhor compreenderem o processo de aprendizagem realizado pelos alunos e uma base teórica para as tomadas de decisão que têm de fazer aquando da planificação das aulas e no decurso das mesmas.

Uma das teorias mais importantes na educação - o **Construtivismo** – surgiu no século XX impulsionada pelo biólogo, filósofo e epistemólogo Jean Piaget (1896-1980). Segundo Niemann e Brandoli (2012), para Jean Piaget, “o conhecimento constrói-se na interação do sujeito com o meio em que ele vive” (p. 2) e, por isso, o conhecimento não se pode considerar um dado adquirido e transmissível.

Segundo Matos e Serrazina (1996), um dos princípios envolvidos no construtivismo é de que “o conhecimento é activamente construído pelo sujeito cognoscente e não passivamente recebido do meio” (p. 83). Deste modo, o conhecimento é uma aquisição pessoal, cujo significado é construído pela própria pessoa, em função da sua experiência. O sujeito não é passivo sob a influência do meio, antes, ele responde aos estímulos externos agindo sobre eles para construir e organizar o seu próprio conhecimento, de forma cada vez mais elaborada. De acordo com Armella e Waldegg (1992), o conhecimento, nesta perspetiva, “é sempre contextualizado e nunca separado do sujeito. Conhecer é atuar e compreender de tal modo que permita partilhar com outros o conhecimento” adquirido (p. 8). De acordo com Caldeira (2009) esta teoria propõe um ensino da matemática diferente do considerado ensino tradicional no qual o professor transmite e o aluno recebe o conhecimento matemático por meio da prática mecânica de exercícios repetitivos.

Além do que já referimos, tendo em conta o segundo princípio envolvido na perspetiva construtivista, “conhecer é um processo adaptativo que organiza o mundo experiencial de cada um” (Matos & Serrazina, 1996, p. 83) e “todo o acto intelectual se constrói progressivamente a

partir de estruturas cognitivas anteriores e mais primitivas” (Armella & Waldegg, 1992, p. 8). Segundo estes últimos autores, a tarefa do professor, que se baseie nos princípios da teoria construtivista, será complexa e exigirá maior empenho de sua parte pois haverá a necessidade de “esboçar e apresentar situações que, fazendo apelo às estruturas anteriores de que o estudante dispõe, lhe permitam assimilar e conformar-se a novos significados do objecto de aprendizagem e novas operações associadas a ele” (p. 8).

Assim sendo, Caldeira (2009) é da opinião que ensinar matemática “requer actividades de resolução de problemas na sala de aula, manipulação de material, discussões e explicações entre os alunos dos seus modos de pensar e desafios que permitam o desenvolvimento de capacidades” (p. 218). O professor deverá proporcionar, aos alunos, oportunidades de experiências concretas, com significado e contextualizadas, de forma a permitir-lhes a descoberta de padrões, a formulação de questões e a construção dos seus próprios modelos, conceitos e estratégias. Cobb (2007, citado por Caldeira, 2009) considera que “a aprendizagem tem de ser significativa, na sua estrutura interna (significação lógica), e na assimilação (significação psicológica) e o aluno tem que se sentir motivado para relacionar o que aprende com o que sabe” (p. 218), isto porque a aprendizagem, para ser significativa, deve estar diretamente relacionada com a sua funcionalidade.

Walle (2009) refere que “o ensino eficaz é uma atividade centrada no estudante” (p. 54) cujo papel do professor é envolver “os estudantes propondo bons problemas e criando uma atmosfera em sala de aula de exploração e de busca de significados” (p. 54).

Embora não existam receitas para elevar a motivação e a qualidade do ensino e das aprendizagens de todos os envolvidos neste processo, o uso dos materiais manipuláveis poderá ser um contributo neste sentido.

Os Materiais Manipuláveis: Perspetiva Histórica

Se ouço, esqueço, se vejo, lembro, se faço compreendo.
(Lorenzato, 2006, p.5).

Os materiais manipuláveis são, segundo Reis (1971, citado por Matos & Serrazina, 1996) “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos reais que são usados para representar uma ideia” (p. 193).

Até o século XVI, segundo Fiorentini e Miorim (1990), acreditava-se que a criança era um adulto em miniatura, pelo que o ensino, visto nesta perspectiva, teria de acontecer de forma transmissiva, consistindo basicamente na memorização de regras, fórmulas e procedimentos. Assim sendo, conforme referem os autores, o papel do professor consistia, única e exclusivamente, em transmitir e expor um conteúdo de forma pronta e acabada. A necessidade de recorrer ao concreto através de materiais ou objetos constituía uma pura perda de tempo e eram atividades que perturbavam o silêncio ou a disciplina na sala de aula. Apesar disso, Fiorentini e Miorim (1990) acrescentam que, embora alguns professores recorressem a este tipo de materiais, apenas o faziam com o intuito de demonstrar e auxiliar a exposição, de modo a facilitar a visualização e a memorização.

No século XVII, este ensino, dito tradicional, foi posto em causa. Segundo Lorenzato (2006), por volta de 1650, Comenius defendia que o ensino deveria partir do concreto e passar gradualmente para o abstrato, fazendo apelo aos sentidos e à ideia que só se aprende fazendo. Mas, de acordo com Fiorentini e Miorim (1990), foi no século XVIII que Rousseau combateu ideias, relacionadas com a Didática, que prevaleciam há muito tempo. A criança não podia mais ser vista como um adulto em miniatura. A criança devia ser concebida na sua singularidade, com características próprias – biológicas e psicológicas - de um ser em desenvolvimento, que deviam ser levadas em consideração e respeitadas. Consequentemente, a relação rígida mantida pelo adulto em relação às crianças também precisava ser modificada. Rousseau tornou-se, assim, o precursor de uma nova concepção de escola. Na sua perspectiva, uma vez que a Educação constituía um processo natural do desenvolvimento da criança, o jogo e a experiência direta sobre os objetos passaram a ser valorizados e entendidos como necessários no processo de ensino e aprendizagem. Aliás, muitos investigadores e teóricos passaram a defender que, para o conhecimento se tornar permanente, era necessário compreender (Moyer, 2001).

No século XIX, Comenius e Pestalozzi (s.d., citado por Pinto, 2012) defendiam a construção de materiais educacionais com os quais os alunos podiam contactar uma vez que os sentidos e a observação coexistem na primeira etapa da aprendizagem e, por isso, no processo de ensino, deveria privilegiar-se a realização de ações concretas e experimentações.

Segundo Vale (1999), ensinar Matemática utilizando materiais manipuláveis foi também recomendado por Decroly (1871 – 1932) e Montessori (1870 – 1952), tendo Montessori introduzido novos materiais didáticos, de entre os quais se destacam o material dourado, os triângulos construtores, o material de equivalência e os cubos para composição e decomposição de binômios e trinômios.

Numa fase posterior, surge Piaget (1896 – 1980), também defensor da *Escola Ativa*. Piaget (1952, citado por Moyer, 2001) sugeriu que as crianças não têm a maturidade mental para

compreender conceitos matemáticos abstratos, apresentados em palavras ou símbolos, pelo que as crianças aprenderão melhor se as atividades partirem do concreto. Segundo Vale (1999), uma vez que as imagens mentais, bem como as abstratas, são baseadas nas suas experiências, os alunos que veem e manipulam vários tipos de objetos têm imagens mentais mais claras e têm capacidade de as representar de forma mais completa do que as crianças que vivenciaram menos experiências.

Bruner (1960, 1986, citado por Moyer, 2001) também defendeu que a aprendizagem decorre de um processo ativo, que parte de conhecimentos anteriores, tendo dividido o desenvolvimento cognitivo em três estágios: a) representação ativa, em que é privilegiada a ação como forma de representação do real, especialmente através da manipulação de objetos; b) representação icónica, na qual há uma perceção do ambiente e formação de modelos, fortemente dependente de uma memória visual, concreta e específica; c) representação simbólica, que constitui a forma mais elaborada de representação da realidade uma vez que a criança, neste estágio, já é capaz de representar a realidade através de uma linguagem simbólica, de carácter abstrato e sem uma dependência direta da realidade.

Consequentemente, a implementação destas teorias nas escolas veio alterar, de forma substancial o papel do professor e o ambiente de sala e aula (Vale, 1999). Um pouco por todo o mundo desenvolveram-se projetos e iniciativas inovadoras que permitiram uma abordagem mais atualizada dos assuntos a lecionar, para além de que a competência matemática deixou de se reduzir ao simples domínio de técnicas de cálculo para passar a incluir, de forma decisiva, o fator compreensão dos conceitos (NCTM, 1994). A tendência construtivista começou assim a dar os primeiros passos e a ser implementada no ensino da Matemática. Aliás, o recurso, em sala de aula, de materiais manipuláveis ou concretos advém essencialmente do contributo dos “intensos debates que puseram a claro as dificuldades de modificar de forma profunda os hábitos e as conceções desde há muito estabelecidos no ensino desta disciplina” (NCTM, 1994, p. vi).

Aprender matemática passou a significar mais do que simplesmente aprender técnicas ou memorizar regras. Aprender matemática passou a incluir o “interpretar, construir ferramentas conceituais, criar significados, sensibilizar-se para perceber problemas tanto quanto para preparar-se para equacioná-los ou resolvê-los, desenvolver raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar, transcender o imediatamente sensível” (Nascimento, 2008, p. 207).

Neste sentido, os materiais manipuláveis deram e continuam a dar o seu contributo. A referência ao uso de materiais manipuláveis, em muitos países, surgiu nos currículos dos anos 30, conforme referem Matos e Serrazina (1996). De acordo com estes autores, “em Portugal, embora a utilização destes materiais apareça como algo novo nos mais recentes programas da disciplina, há evidências de que estes já eram utilizados nos anos 50” (p. 196). Ao nível da divulgação

matemática, os materiais manipuláveis passaram a ser divulgados de uma forma mais sistemática, a partir de meados da década de 80, especialmente pelos professores das recém Escolas Superiores de Educação, que tinham obtido pós-graduações nos Estados Unidos (Vale, 1999). Atualmente “apesar das recomendações curriculares para o uso de materiais manipuláveis no ensino da Matemática, a sua utilização tem sido relativamente reduzida no ensino básico” (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012, p. 561).

Os materiais manipuláveis no ensino da matemática

A Matemática é uma disciplina com características muito próprias, que exige o desenvolvimento de uma atitude muito especial durante o processo de ensino e aprendizagem, quer por parte de quem aprende, quer por parte de quem ensina, uma vez que “de modo mais vincado do que as outras disciplinas escolares lida com abstrações” (Oliveira et al., 2012, p. 560).

O professor, especialmente nos primeiros anos de escolaridade, deve procurar proporcionar aos alunos “boas representações dos conceitos que se propõem ensinar, ou seja, é importante que os conceitos que, por natureza, são abstratos possam ser *tornados presentes* aos alunos” (Oliveira et al., 2012, p. 560).

Privilegiar a aprendizagem significativa, em que o aluno é concebido como um sujeito ativo neste processo, pressupõe uma fase inicial exploratória e concreta que lhe permita participar de forma ativa e dinâmica na construção de significados. A par disto, o professor surge como figura-chave neste processo conforme corroboram as *Normas profissionais para o ensino da Matemática* (NCTM, 1994). Neste sentido, cabe ao professor selecionar e construir propostas de atividades que potenciem, nos alunos, o desenvolvimento da compreensão dos conceitos e dos processos de forma a, simultaneamente, estimular a capacidade de resolver problemas, de raciocinar e de comunicar matematicamente. Deste modo, os materiais manipuláveis poderão ser um excelente recurso para criar representações de objetos matemáticos ou até mesmo relações matemáticas.

O estudo que Pires (1995, citado por Matos e Serrazina, 1996) realizou, com o objetivo de avaliar a proficuidade na utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem Matemática, permitiu concluir que “os alunos consideraram que a utilização de matérias manipulativos proporciona aprendizagens mais significativas (...) valorizando os processos utilizados nas suas experiências de construção da aprendizagem” (p. 199). Foi ainda acrescentado que aqueles alunos consideraram que

esses materiais proporcionam situações de aprendizagem muito próximas da realidade, permitindo uma melhor compreensão e resolução dos problemas (...) facilitam as interações com os outros,

originando mais momentos de partilha e discussão de pontos de vista. Este aspecto da comunicação torna-se particularmente interessante porque, na verdade, resulta da própria utilização das matérias. (pp. 199-200)

Este estudo permitiu ainda concluir que o recurso aos materiais manipuláveis teve um grande impacto na autoestima dos alunos, referindo que “os materiais os ajudaram a ter mais confiança e mais segurança na execução das tarefas (...) permitiu também o desenvolvimento de atitudes positivas (...) facilitou a relação com o professor e com os restantes colegas (...) favorecendo o trabalho em grupo” (Matos & Serrazina, 1996, p. 200).

Neste sentido, as indicações metodológicas para o ensino da Matemática indicadas no documento *As Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (1994) valorizam o papel dos materiais manipuláveis na aquisição e construção de conceitos matemáticos, independentemente do nível de ensino.

Em Portugal também se tem dado grande relevo à utilização de materiais manipuláveis em sala de aula. Nos documentos curriculares portugueses são várias as referências ao uso de materiais manipuláveis. A título de exemplo, o Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (2001) referia que os

materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim. (p. 71)

Numa fase posterior, no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007), encontramos as referências aos materiais manipuláveis e sugestões de materiais a usar:

Os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos, principalmente no 1.º ciclo. (p. 9)

Os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas. (p. 14)

Os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) têm um papel importante na aprendizagem da Geometria e da Medida. Estes materiais permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos. (p. 21)

Embora nos documento atuais não haja qualquer referência aos materiais manipuláveis, sendo dada liberdade aos professores para utilizarem a metodologia que entenderem (Velo, Brunheira, & Rodrigues, 2013), estes materiais terão com certeza o seu contributo no alcance das finalidades e objetivos preconizados neste programa, nomeadamente, na aquisição de conhecimentos, factos e procedimentos, na construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, na apropriação/desenvolvimento da comunicação matemática (oral e escrita) e, ainda, na resolução de problemas.

No entanto, apesar dos resultados das investigações feitas em anos recentes e referidas anteriormente e de, nestes últimos anos, existirem tantas referências e sugestões para a

utilização de materiais manipuláveis na sala de aula, com base no Relatório *Matemática 2001*, continua a haver professores que não têm em conta estas informações aquando da planificação e preparação das aulas (Ponte & Serrazina, 2004). Segundo Almiro (2005), “o uso de materiais manipuláveis é um desafio para o professor, pois acrescenta muito mais actividade e barulho às aulas e requer mais espaço e organização” (p. 280).

Fiorentini e Miorim (1990) destacam que os materiais manipuláveis promovem uma aprendizagem significativa. Para além de tornar as aulas mais interativas, os materiais manipuláveis incentivam a procura, o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação, instigando os alunos na elaboração de perguntas, descoberta de relações, criação de hipóteses e a descoberta das próprias soluções. Proporcionado este ambiente, o aluno é, acima de tudo, estimulado a raciocinar, incorporar soluções alternativas, acerca dos conceitos envolvidos e, consequentemente, aprender.

Matos e Serrazina (1996) corroboram esta ideia afirmando que

o sucesso dos alunos na aprendizagem da matemática é condicionado por diversos factores, sendo um deles o contexto em que decorre a aprendizagem (...) ambientes onde se faça uso de materiais manipuláveis favorecem aquela aprendizagem e desenvolvem nos alunos uma atitude mais positiva. (p. 193)

Segundo Vale (1999), numa perspetiva construtivista do conhecimento, os materiais manipuláveis constituem um recurso favorável a uma aprendizagem significativa pois, o ensino e a aprendizagem da matemática exigem ação, reflexão e, ainda, capacidade de comunicação.

De acordo com Almiro (2005) “diversos estudos revelam que o uso de materiais manipuláveis produz maior rendimento nos alunos do que a sua não utilização, em todas as idades e em todos os anos da escola elementar” (p. 280), isto porque, numa situação de aprendizagem com materiais, “os vários sentidos do aluno são chamados, através do contacto e da movimentação, envolvendo-o fisicamente, sendo esta interação favorável à aprendizagem” (p. 280) que se transforma num processo ativo de construção do conhecimento, com significado.

Numa perspetiva mais atual Nascimento (2008) defende também que

a aprendizagem de qualquer conteúdo por parte do aluno requer uma fase inicial exploratória e concreta. Antes de adquirir abstrações e generalizações matemáticas a criança precisa manipular e visualizar diferentes tipos de materiais (...) é fundamental para a construção de significados e a formulação de conceitos. (p. 207)

Apesar do contributo positivo que os materiais manipulativos poderão ter na aprendizagem significativa, segundo Ball (1992, citado por Moyer, 2001), os materiais manipuláveis “não são mágicos” (p. 176) pois os materiais não são portadores de significados ou ideias; são apenas ferramentas que os alunos têm oportunidade de manipular a fim de facilitar a aquisição e compreensão de noções/conceitos abstratos. Segundo Gravemeijer (1991, citado por Almiro, 2005), “não é o material que transmite os conhecimentos” (p. 281), para além de que, de acordo

com Almiro (2005) não basta ao aluno observar uma demonstração de um material por parte do professor.

Para que a aprendizagem se faça com significado, é necessário que o aluno tenha uma participação ativa e, segundo Caldeira (2009), lhe seja concedido tempo suficiente para explorar os materiais. A autora salienta que “é necessário dar um tempo para o material ser explorado, de forma a criar *insights* no processo ensino-aprendizagem” (p. 244). Deste modo, à medida que o aluno manipula os materiais selecionados de modo a experimentar padrões e relações e interpretar as suas características, os materiais manipuláveis constituem-se em mediadores e facilitadores de uma aprendizagem que pretende ser significativa pois potenciará uma interação com o meio, a par do desenvolvimento de capacidades intelectuais, sociais e afetivas (Caldeira, 2009).

Além disso, usar os materiais manipuláveis torna as sessões de ensino e aprendizagem da matemática mais ativas, fornecem uma forma mais eficaz dos alunos representarem o seu pensamento (Naiser et al., 2003) e revelarem os conhecimentos que já possuem. Os mesmos autores acrescentam que, estes recursos, também favorecem a perceção, por parte do professor, dos conhecimentos prévios dos alunos, bem como a compreensão do pensamento dos mesmos, possibilitando-lhes observar o processo de apropriação do conhecimento e a forma como os alunos atribuem significado ao objeto de estudo.

Tendo por base as potencialidades dos materiais manipuláveis e o facto de que a construção de conceitos matemáticos é um processo longo e que exige o envolvimento ativo do aluno, Vale (1999) sugere que o ensino de um conceito novo de matemática, independentemente do nível etário, deve ser feito de forma gradual, sempre partindo do nível concreto, no qual os alunos usam os materiais manipuláveis, passando, posteriormente, para um nível semiconcreto e, numa fase mais avançada, para o nível abstrato, no qual apenas usam a simbologia própria da disciplina. A manipulação dos materiais, para além de possibilitar, aos alunos, a transferência para o nível abstrato, providencia experiências nas quais podem transferir as suas compreensões entre conceitos, o que lhes permite conferir significado às noções abstratas, dando vida à matemática. Tendo em conta que, nos últimos anos se tem dado grande destaque ao papel das conexões no ensino e na aprendizagem significativa da Matemática (Ponte, 2010), os materiais manipuláveis poderão ter um forte contributo neste sentido.

Sendo reconhecido que a utilização de materiais promove um ambiente de aprendizagem mais eficaz e propício à aprendizagem, surge também a necessidade de saber selecionar os materiais de modo a que tenham um contributo positivo na aprendizagem dos alunos. Reynolds (1971, citado por Matos & Serrazina, 1996) enuncia seis critérios para selecionar bons materiais manipuláveis, sendo dois deles o de “proporcionar uma verdadeira personificação do conceito

matemático ou das ideias a ser exploradas” (p. 198) e o de representar, de modo claro, o conceito matemático.

A este respeito, Hiebert e Carpenter (1992, citado por Almiro, 2005), consideram que, por vezes, o recurso a materiais manipuláveis nem sempre é positivo devido à distância existente entre o material selecionado e as relações matemáticas que se pretendem estabelecer ou representar. Almiro (2005) afirma que “quanto mais próxima for essa correspondência, mais apoio contextual existe para os alunos construírem as relações pretendidas” (p. 281). Este é um aspeto importante a ter em conta pois, na perspetiva de Hiebert e Carpenter (1992, citado por Almiro, 2005), é possível que os alunos não vejam as mesmas relações que os adultos veem nos materiais por eles selecionados.

Outros critérios definidos por Reynolds (1971, citado por Matos e Serrazina, 1996) para selecionar bons materiais manipuláveis são: o de serem motivantes; flexíveis, no sentido de que deverão ser apropriados qualquer que seja ano de escolaridade, bem como o nível de formação de conceitos; fornecer uma base de modo a garantir que o aluno avance do nível concreto para o nível abstrato; e, por último, proporcionar manipulação individual.

De salientar que, embora os materiais concretos permitam construir um “conhecimento matemático mais sólido e mais duradouro” (Almiro, 2005, p. 281), o facto de se trabalhar com materiais manipuláveis não garante, por si só, a aprendizagem (Caldeira, 2009; Nacarato, 2005). Nacarato (2005) sublinha ainda que “um uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los” (p. 4). Há assim outros aspetos a ter em conta. Matos e Serrazina (1996) salientam que os materiais devem ser usados para além da introdução de um novo conceito. Segundo (Nacarato, 2005), muitas vezes, “os professores utilizam os materiais apenas para introduzir uma noção, mas, uma vez se chegando a ela (...) já não interessa o contexto no qual o material foi utilizado e passa-se a trabalhar apenas no nível abstrato” (p. 3). Deste modo, é aconselhável que os materiais estejam sempre disponíveis, de modo a permitir que os alunos trabalhem com eles sempre que necessitem pois a necessidade de utilização e concretização é idiossincrática.

Para Caldeira (2009), as conceções pedagógicas do professor também desempenharão um papel importante nos processos de significação e no significado matemático. O sucesso da utilização dos materiais muito dependerá da forma como as tarefas serão implementadas e dinamizadas, e também da forma como os professores encaram a matemática. A experiência de Nacarato (2005) com professores tem demonstrado que muitos desconhecem os vários materiais estruturados, bem como o contributo que poderão dar nas aulas. Segundo o autor, “poucos sabem fazer uso desses materiais estruturados e até mesmo nunca tiveram a oportunidade de

manipulá-los” (p. 5). Por isso, na opinião de Caldeira (2009), a formação inicial dos professores deverá proporcionar-lhes situações que lhes permitam contactar, construir e manipular materiais, de modo a que descubram as suas potencialidades, conheçam a sua utilização e adquiram maior apetência para esta. Somente assim, aliada a uma atitude de contínua reflexão na e sobre a ação, é que os professores poderão atuar com qualidade, de forma apelativa, enriquecedora e criativa e serão capazes de desenvolver as capacidades cognitivas dos alunos (Caldeira, 2009).

Em jeito de conclusão, e na perspetiva de Caldeira (2009), “os materiais não podem carregar neles significados próprios pois são potenciais instrumentos que desenvolvem significados” (p. 594) para cumprirem o seu real objetivo, nomeadamente “motivar e envolver activamente os alunos, respeitando diferenças, possibilitando a representação concreta de ideias abstractas e dando oportunidade de descobrirem relações e formularem generalizações” (p. 520). Na opinião de Vale (1999), os materiais manipuláveis deverão continuar a ser utilizados, especialmente na abordagem de temas complexos, sem a pretensão de que serão a “panaceia” (p. 16) para todos os problemas de aprendizagem. A autora refere que estes de nada valerão se o aluno não estiver motivado a utilizá-los ou se, por outro lado, o professor não tiver sólidos conhecimentos científicos e didáticos ao nível das potencialidades do material e da sua utilização.

Os Blocos Padrão – um Recurso para Desenvolver o Sentido de Número Racional Representado na Forma de Fração

Os blocos padrão são um recurso manipulável que foi desenvolvido nos anos 60 e especialmente usado pelos professores para auxiliar os alunos a compreenderem conceitos abstratos (Champion & Wheeler, 2014). Trata-se de um material versátil para a sala de aula de matemática pois, segundo Champion e Wheeler (2014), as formas básicas desta coleção colorida de blocos padrão criam oportunidades para os alunos resolverem situações problemáticas e, em simultâneo, explorarem as relações matemáticas subjacentes.

Constituição e suas características

Os blocos padrão, representados na Figura 3, são constituídos por seis formas geométricas com cinco cores diferentes: um hexágono amarelo; um trapézio vermelho; um paralelogramo (losango) azul; um triângulo verde; um paralelogramo (losango) castanho claro; e, um quadrado cor de laranja. O facto de cada figura ter uma cor diferente facilita a sua identificação,

especialmente nos primeiros anos de escolaridade, no entanto, recomenda-se que, de modo gradual, o professor motive os alunos a identificá-los pela sua designação matemática de figura geométrica.



Figura 3. As Seis Peças que Constituem os Blocos Padrão

Recentemente foram acrescentadas duas peças diferentes: um duplo hexágono cor de rosa e *Chevron* preto, conforme se apresenta na Figura 4.












Figura 4. As Duas Peças Adicionadas aos Blocos Padrão

Todas as peças dos blocos padrão têm a particularidade de terem lados congruentes com exceção do trapézio em que um dos lados paralelos (base maior) tem exatamente o dobro da medida comprimento de qualquer um dos outros lados. A medida de amplitude dos ângulos internos do losango azul é de 60° e 120° e do losango castanho-claro 30° e 150° .

Qualquer que seja o tema que este recurso irá apoiar, é importante que cada aluno tenha oportunidade de se familiarizar com as peças de modo a aperceber-se das propriedades e relações que possuem, o que lhes permitirá construir inúmeras combinações (Swan & White, 2013). Uma destas relações prende-se com o facto de a área do hexágono, do trapézio vermelho e do paralelogramo (losango) azul constituírem um múltiplo da área do triângulo verde, respetivamente, o sêxtuplo, o triplo e o dobro (Beckmann, 2006). No entanto, o mesmo não acontece com o quadrado e o losango castanho claro. Embora a medida da área do losango castanho claro seja metade da área do quadrado, por não reunirem as características das demais peças em relação ao triângulo verde e não nos permitir trabalhar no âmbito do conjunto dos números racionais, estes não serão usados no nosso estudo.

Sabendo que a área do quadrado e do paralelogramo castanho claro são, respetivamente, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ da área do triângulo é, assim, possível estabelecer as seguintes relações que apresentamos na Tabela 2.

Tabela 2. Relação entre as Medidas das Áreas de Cada uma das Peças

	Medida da Área							
Unidade da medida da área								
	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$

A relação existente entre as áreas de cada uma das peças (excetuando as do quadrado e do losango castanho claro) constitui uma importante e fundamental particularidade no estudo das frações. Mas, conforme referido por Champion e Wheeler (2014), embora as relações proporcionais entre as diferentes peças dos blocos padrão possam ser simples para o professor, a sua compreensão representa um desafio para os alunos, pelo que se deverá proporcionar tempo para que os alunos manipulem as peças de modo a compreendê-las.

Potencialidades dos blocos padrão na compreensão do número racional representado na forma de fração

Existem temas bastante complexos, nos programas escolares de matemática, onde os materiais manipuláveis se revestem de extrema importância, por fornecerem um suporte físico a conceitos abstratos.

Ano após ano, os alunos “aprendem” e logo esquecem como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações. A principal razão destas dificuldades parece advir do facto de apenas memorizarem modos de procedimento e algoritmos ao invés de compreenderem todo o processo envolvido. Segundo Lopes (2008), as crianças reproduzem uma rotina que lhes foi ensinada, de forma mecânica. Neste sentido, os materiais manipuláveis poderão ter um contributo favorável na compreensão do conceito de fração, pelo que se sugere, como forma de ultrapassar as dificuldades sentidas, usar materiais variados, nomeadamente os blocos padrão pois permitirão não só modelar frações, como também concretizar operações com frações (Vale, 1999). No

âmbito dos números racionais, os blocos padrão dão ainda a oportunidade de os alunos construírem significados ao nível do conceito e dos procedimentos, uma vez que este material permite-lhes visualizar o conceito de fração e não, somente, memorizar regras operatórias.

A visualização, enquanto “procedimento mental que permite mover de um objecto físico visível para a sua representação mental” (Vale, 2012, p. 188), não está apenas relacionada com o seu carácter ilustrativo, como também é “reconhecida como uma componente do raciocínio, profundamente envolvida com o conceptual e não só com o perceptual” (Pimentel & Vale, 2012, p. 350). Por isso, segundo Vale (2012), a visualização desempenha um papel muito importante na resolução de problemas, quer ao nível dos procedimentos, quer ao nível da descoberta/procura da solução e mesmo da prova. Aliás, segundo a autora, “ver é uma componente importante na generalização que os jovens estudantes devem explorar”, especialmente pela capacidade inata que estes têm de “pensar visualmente” (p. 189).

Como defende Vale (2012), o ensino básico constitui o momento apropriado para incentivar os alunos a fazerem uso das mais variadas formas de representação (concretas, verbais, numéricas, pictóricas, ...), e a altura certa para adquirirem a noção de que a representação pictórica ou figurativa pode representar um objeto, bem como as relações entre objetos, pois “os estudantes sem esta capacidade visual terão grande dificuldade em ter sucesso na aprendizagem” (Vale & Pimentel, 2012, p. 350). Segundo as autoras, a opção por cada um dos tipos de representação muito dependerá da natureza das tarefas, bem como do nível cognitivo, das formas de pensamento dos alunos e também das características da própria representação. De acordo com Vale (2012), a investigação sugere que é fundamental favorecer a utilização de múltiplas representações, para a compreensão de um conceito matemático, de modo a proporcionar o seu uso flexível na resolução de situações problemáticas propostas.

De volta às potencialidades dos blocos padrão, investigações recentes têm revelado (e.g., Ellington & Whitenack, 2010; Champion & Wheeler, 2014) que o uso dos blocos padrão tem desempenhado um papel importante na construção e desenvolvimento do conceito de número racional. Por exemplo, a construção e análise de *funcky cookies* usados e referidos por Ellington e Whitenack (2010) ajudaram os alunos a relacionarem as diferentes representações que um número racional pode adquirir. Champion e Wheeler (2014) também sugerem a utilização dos blocos padrão por acreditarem que este material possa constituir um excelente recurso para a matemática. Segundo estes autores, o professor poderá, por exemplo, solicitar, aos alunos, a criação de uma figura, composta por várias peças dos blocos padrão, em que se poderá trabalhar com diversas representações dos números racionais. Por exemplo, na Figura 5, 50% da área é ocupada por hexágonos, um quarto por trapézios e 0,25 por triângulos. Com esta tarefa, os alunos terão necessidade de associar 50% a metade (ou um meio) da figura, e dos restantes 50%

converter um quarto e 0,25 em porcentagem. Esta tarefa tem ainda outro aspecto muito positivo, para além do mencionado anteriormente. A disposição das peças, por parte de cada aluno, poderá formar muitas soluções possíveis, sem comprometer as condições estabelecidas pelo professor (ver Figura 5).

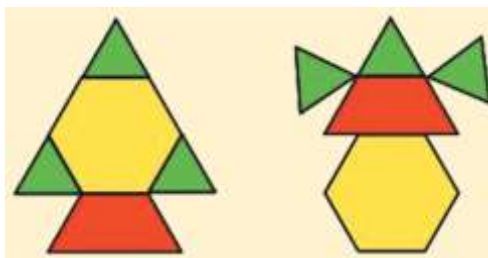


Figura 5. Duas Soluções Possíveis

Além destas, outras soluções poderiam surgir, bastando, para isso, manter as proporções. A visualização e partilha destas múltiplas soluções em muito contribuirão para a compreensão do sentido de número racional, uma vez que permite aos alunos “verem facilmente as relações entre as diferentes peças dos blocos padrão” (Champion & Wheeler, 2014, p. 339). Segundo Ellington e Whitenack (2010) este tipo de tarefa torna possível lidar e relacionarem os significados de razão e parte-todo associado aos números racionais. Além disso, os blocos padrão também têm contribuído para colmatar a dificuldade sentida na necessidade da divisão equitativa da unidade (Ellington & Whitenach, 2010). São, assim, vários os exemplos que poderiam ser dados no sentido de estimular a sua utilização em contexto de sala de aula.

Capítulo II

ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

Este capítulo tem por objetivo apresentar os caminhos que construímos e percorremos na e para a realização da investigação. Deste modo, apresentaremos as escolhas metodológicas, isto é, o cenário no qual se estabeleceu e se fez a investigação, o procedimento relativo à execução do trabalho empírico, os instrumentos e técnicas utilizadas na recolha de informação, bem como uma breve descrição dos participantes, as fases da planificação da intervenção didática e, por fim, alguns pressupostos que nortearam a nossa intervenção didática.

Metodologia

O nosso estudo implementa uma metodologia construtivista do subtópico “Números Racionais Não Negativos”, por ser nosso objetivo procurar compreender como um grupo de alunos do 5.º ano de escolaridade desenvolve o sentido de numeral misto e a capacidade de os adicionar e subtrair, quando o processo de ensino e aprendizagem se realiza através de uma sequência organizada de tarefas exploratórias com recurso aos blocos padrão. Pretendemos observar e compreender até que ponto a utilização deste material favorece a iniciação da aprendizagem dos numerais mistos, bem como a consequente evolução para o conhecimento abstrato, no sentido de melhorarmos a nossa prática pedagógica.

Neste sentido, quanto à obtenção e tratamento de dados, adotamos o método qualitativo pois pretendíamos obter pistas que nos permitam “estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo” (Bogdan & Bicklen, 2013, p. 49). Este é, segundo Bogdan e Bicklen (2013), um método que privilegia o processo em detrimento dos resultados ou dos produtos, uma vez que os significados são de importância vital. Neste tipo de investigação, o ambiente natural é a fonte direta de dados, neste caso a sala de aula, embora com um grupo restrito de alunos, e o investigador é o instrumento principal da recolha de dados, isto é, o professor. Por se tratar de uma investigação descritiva, os dados serão apresentados na forma de palavras ou imagens, para além de que serão analisados de forma indutiva. Segundo os autores citados, “uma teoria desenvolvida deste modo procede de ‘baixo para cima’ (em vez de ‘cima para baixo’), com base em muitas peças individuais de informação recolhida que são inter-relacionadas” (p. 50).

De entre os vários tipos ou modalidades de estudos qualitativos, e tendo em conta o nosso objeto de estudo, optámos por um estudo de caso que, segundo Merriam (1988, citado por Bogdan & Bicklen, 2013) “consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico” (p. 89). Ponte (1994) corrobora dizendo que o estudo de caso “baseia-se fortemente no trabalho de campo” (p. 4). Aliás, Yin (1984, citado por Ponte, 1994) refere que o estudo de caso “estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência” (p. 4), pois “visa conhecer em profundidade o seu *como* e os seus *porquês*, evidenciando a sua unidade e identidade próprias” (p. 3). Uma vez que “o seu objectivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico” (Ponte, 1994, p. 11), o estudo de caso necessita de se apoiar na descrição factual, literal, sistemática e, o mais possível, completa.

Neste sentido e, tendo em conta que pretendemos estudar os processos e dinâmicas presentes na nossa prática, com vista à sua melhoria, de modo a possuímos um registo dos trabalhos desenvolvidos na sala de aula, para posterior análise e tratamento de dados, tornou-se necessário observar e recolher dados sobre os trabalhos desenvolvidos pelos alunos aquando da realização destas tarefas. Selecionamos como técnica de pesquisa a observação direta e participante, permitindo-nos apropriar da investigação dentro do estudo do caso (Melo, 2013). Yin (2005, citado por Melo, 2013) caracteriza esta técnica da seguinte forma:

A observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é apenas um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir uma variedade de funções dentro de um estudo de caso e pode, de fato, participar dos eventos que estão sendo estudados. (p. 1040)

A informação obtida foi recolhida através de meios audiovisuais (câmara fotográfica, gravador áudio e vídeo), após autorização, por escrito, da Diretora do Agrupamento (Ver Apêndice A) e dos encarregados de educação dos alunos participantes (Ver Apêndice B). Optamos pela gravação áudio e vídeo, pela vantagem de possibilitar uma observação, momento a momento, da situação que se pretende analisar e permitir perceber, embora numa fase posterior, pormenores interessantes, interpretações, discussões e explicações dos alunos que nem sempre foram perceptíveis no decorrer da aula. Acreditamos que estes registos poderão enriquecer a análise, a interpretação e as conclusões da situação de aprendizagem e melhorar o processo de ensino, e consequentemente, a aprendizagem dos números racionais. Apesar de todas as tarefas terem sido filmadas, apenas serão transcritas as situações que forem consideradas mais relevantes para o objeto de estudo.

Além disso, sempre que necessário e pertinente, para além dos meios audiovisuais usados, foram feitas algumas notas de campo/anotações que se pautaram pelo rigor, detalhe e precisão.

Estas notas constituíram um suplemento importante aos outros meios usados, para além da análise de todos os trabalhos escritos que os alunos realizaram.

Todos os dados recolhidos foram apresentados através da descrição textual dos diálogos estabelecidos e através de fotografias que permitem a visualização dos procedimentos dos alunos na resolução das tarefas propostas, para além de facilitarem a compreensão dos mesmos.

Ao longo de todo este processo de recolha e tratamento de dados procuramos respeitar os critérios de qualidade, defendidos por Goetz e LeCompte (1984, citado por Ponte, 1994), de modo a tornar esta investigação credível, nomeadamente, a *clareza*, na forma como o estudo é relatado; o *significado*, a *adequação* e o *caráter completo*, no que respeita à formulação do problema e ao modelo geral do estudo e, por fim, à *credibilidade*, mais propriamente, à validade e fidedignidade dos dados.

Além disso, por se tratar de um estudo de caso, a escolha dos participantes adquiriu um sentido muito particular por constituir o foco da investigação. Por este motivo, a seleção dos participantes no nosso estudo foi intencional (Coutinho & Chaves, 2002) e baseou-se em critérios por nós definidos no sentido de alcançar, segundo Bravo (1998, citado por Coutinho & Chaves, 2002) “não a uniformidade mas as variações máximas” (p. 228).

No subcapítulo que se segue, faremos uma breve descrição dos participantes por nós selecionados, bem como os motivos que orientaram a nossa escolha.

Breve Descrição dos Participantes

A investigação foi realizada com um grupo de seis alunos do 5.º ano de escolaridade da mesma turma, dois do sexo masculino e quatro do sexo feminino, a quem atribuímos códigos (AF1, AF2, AF3, AF4, AM5 e AM6) de modo a manter o anonimato. São alunos que não apresentam retenções em anos anteriores, encontrando-se, pela primeira vez, a frequentar o 5.º ano de escolaridade.

A seleção dos alunos foi feita com base nos resultados obtidos nas Provas Finais de 4.º ano, mais propriamente, no domínio Números e Operações, e os resultados do primeiro teste que realizaram, com grande incidência neste domínio, no 1.º período do corrente ano letivo, apresentados na Tabela 3.

Para a realização das tarefas, os alunos foram organizados em pares (AF1 e AF2, AF3 e AF4, AM5 e AM6), relativamente homogéneos, criados também com base nos critérios acima referidos. Foi nossa opção o trabalho de pares pelo facto de este nos permitir aceder a uma variedade de informações que provavelmente não teríamos se o trabalho fosse realizado a título individual, que serão, a nosso ver, de carácter relevante para a compreensão de todo o processo

que pretendemos investigar, para além de outras razões que apresentaremos no subcapítulo seguinte.

Tabela 3. Resultados (%) da Prova Final do 4.º Ano e da Primeira Ficha de Avaliação do 5.º Ano

Alunos	Prova Final do 4.º ano		Ficha de Avaliação
	Domínio Números e Operações (46%)	Classificação final	
AF1	9	26	57,5
AF2	7	43	57,5
AF3	22	67	73,5
AF4	15	52	70
AM5	27	66	84
AM6	33	64	88

Antes da realização do estudo, os alunos já possuíam alguns conhecimentos sobre os números racionais. Embora o calendário de implementação das Metas Curriculares, que consta do Despacho 15971/2012 de 10 de Agosto, previsse a aplicação obrigatória das mesmas no 4.º ano de escolaridade apenas no presente ano letivo (2014/2015), fomos informados, pelos professores do 1.º ciclo, que houve a preocupação de sua parte em introduzir alguns dos conceitos que só agora fazem parte do currículo atual do 4.º ano de escolaridade.

Pressupostos que Nortearam a Planificação e a Intervenção Didática

As tarefas propostas, no âmbito do “Números Racionais não Negativos” foram realizadas e desenvolvidas após conclusão do estudo dos “Números Naturais”. Assim sendo, iniciaremos, com os seis alunos selecionados, uma sequência organizada de cinco tarefas, à parte da turma, com recurso aos blocos padrão. Inicialmente, pretendíamos que o grupo apenas fosse retirado da turma aquando da abordagem aos numerais mistos, mas considerando pertinente a aprendizagem da adição e subtração de frações com denominadores diferentes com recurso aos blocos padrão, visando uma aprendizagem significativa deste processo complexo, iniciaremos o estudo mais cedo, o que nos levará a retirar este grupo de alunos mais cedo da turma, aquando da introdução aos “Números Racionais não Negativos”.

Todas as tarefas propostas e a desenvolver com os blocos padrão serão desenvolvidas em pares. Segundo Lopes e Silva (2009), defensores da aprendizagem cooperativa, “quem caminha sozinho pode até chegar mais rápido, mas aquele que vai acompanhado com certeza vai mais longe” (p. IX). Além disso, Ponte (2009) defende que trabalhar em pares “proporciona formas de comunicação mais espontâneas” da parte dos alunos (p. 105). Segundo os autores Lopes e Silva

(2009), são vários os benefícios da aprendizagem cooperativa, nomeadamente os académicos uma vez que

desenvolve competências de pensamento de nível superior; estimula o pensamento crítico e ajuda os alunos a clarificar as ideias através da discussão e do debate; desenvolve as competências da comunicação oral; fomenta as competências metacognitivas nos alunos; as discussões cooperativas melhoram a recordação do conteúdo do texto por parte dos alunos; cria um ambiente de aprendizagem activo, envolvente e investigativo; promove os objectivos de aprendizagem em vez dos objectivos de desempenho; aumenta a capacidade de retenção do aluno; aumenta a persistência dos alunos na conclusão dos exercícios e a probabilidade de serem bem-sucedidos na conclusão dos mesmos; é especialmente útil para o ensino da matemática; enquadra-se bem na abordagem construtivista do ensino-aprendizagem". (p. 51)

Conforme Ponte (2009) "o professor tem de dar uma grande atenção ao planeamento das unidades didácticas" (p. 102). Assim sendo, todas as tarefas propostas serão criteriosamente planificadas de modo a estarem ao alcance dos alunos e a constituir, em simultâneo, um elemento desafiante, para além de lhes permitir ter uma parte ativa no processo de construção do seu próprio conhecimento. Procuraremos planificar tarefas que possibilitem, aos alunos, utilizar os seus conhecimentos e assim potenciar o desenvolvimento de novos conceitos ou processos. Segundo (Ponte, 2009), é importante propor-se "tarefas em que eles têm de fazer um esforço de interpretação, formular estratégias apresentar e argumentar soluções" (p. 101). Além disso, serão ainda tidas em conta algumas das características que o NCTM (1994, 2007), considera válidas para o ensino e aprendizagem da Matemática, nomeadamente, ter em atenção as diferentes experiências e predisposições dos alunos, apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e aptidão matemática, estimular os alunos a estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, apelar à formulação, resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação matemática e também o desenvolvimento da predisposição de fazer Matemática.

As tarefas propostas serão ainda organizadas, tal como refere Ponte (2009), de modo a que estarem interrelacionadas entre si, numa sequência coerente, de modo a proporcionar, aos alunos, um percurso de trabalho o mais favorável possível à aprendizagem. Procuraremos também assegurar-nos que os alunos se envolvam efetivamente no trabalho proposto, pelo que se tornará importante garantir que todos interpretem corretamente as tarefas propostas. Teremos também em consideração que, segundo Ponte (2009), é muito importante fazer boas perguntas e de diversos tipos, nomeadamente: de focalização para orientar a atenção dos alunos num ou para um determinado aspeto; de confirmação, de modo a saber se o aluno obteve a resposta correta ou se domina certos conhecimentos básicos; e de inquirição, que possibilitam ao professor e restantes alunos compreenderem o raciocínio em causa. Além disso, aquando da planificação das tarefas, procuraremos prever as respostas e formas de resolução dos alunos a fim de pensar nas questões a colocar no decurso do trabalho desenvolvido pelos alunos.

Consideramos ainda importante referir que, em todas as tarefas realizadas, será nossa intenção fornecer um guião ou ficha de trabalho de modo a orientar o trabalho dos alunos. Em todas as tarefas propostas será fornecido, para além dos blocos padrão, uma malha isométrica de modo a que os alunos façam registos, sempre que sintam necessidade. Com isto pretendemos preparar os alunos, ajudando-os a adquirirem a flexibilidade para escolher a representação que considerem ser a mais eficaz em cada contexto e situação (Ponte & Quaresma, 2011). Além disso, segundo os autores referidos, trabalhar com várias e diferentes representações ajuda os alunos a desenvolverem a capacidade de converterem informação de uma representação para outra, possibilitando-lhes desenvolver as suas próprias estratégias informais e, por isso, mais significativas, na resolução de problemas.

As Fases da Intervenção Didática

Tendo em vista o nosso objeto de estudo e toda a problemática envolta no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais representados por frações, planificamos a nossa intervenção didática através de cinco situações formativas. Segundo Lopes (2004), a situação formativa constitui uma ferramenta poderosa, uma vez que permite, ao professor, desenhar, de forma flexível e operacional, o currículo que se pretende implementar para um determinado grupo de alunos, para, numa fase posterior, fazer a sua gestão em sala de aula e avaliar a qualidade das aprendizagens que dela resultam.

Várias investigações, segundo Viegas (2010), revelam que, se o professor definir, aquando da preparação das aulas, as competências e conhecimentos que pretende tornar explícito e que os alunos desenvolvam, melhores resultados poderão ser alcançados. Uma vez que este é o nosso objetivo, construímos e organizamos as situações formativas tendo em conta o Programa de Matemática e as respetivas Metas de Aprendizagem, bem como outros aspetos que a autora refere, nomeadamente, os conhecimentos prévios dos alunos, o desenho das tarefas e da mediação do professor.

Situação Formativa: Abordagem aos Blocos Padrão

A primeira tarefa, apresentada na Tabela 4, teve como objetivo possibilitar, aos alunos, o contacto, manipulação e exploração dos blocos padrão e, em simultâneo, evidenciarem os conhecimentos já adquiridos sobre as frações, para além de recordarem a leitura de frações e os termos da fração.

Tabela 4. Situação Formativa da Primeira Sessão

Tarefa 1: Abordagem aos blocos padrão	
Domínio: NO3	Subdomínio: Números racionais não negativos
Conteúdos: - Numerais fracionários; - Frações equivalentes e noção de número racional; - Frações próprias.	
Objetivo Geral: Medir com frações	
Descritores: 11.3. Utilizar corretamente os termos “numerador” e “denominador” 11.4. Utilizar corretamente os numerais fracionários. 11.5. Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a um que resulte de divisão equitativa de um todo. 11.10. Identificar frações equivalentes utilizando medições de diferentes grandezas.	
Saberes disponíveis dos alunos: - Compreendem a fração como relação parte-todo; - Identificam frações unitárias, dada a unidade;	
Duração: 45 min.	
Recursos: Guião da tarefa (Ver Apêndice C); Blocos padrão; Folhas de registo para os alunos (malha isométrica).	
Tarefas dos alunos	Mediação do professor
<ul style="list-style-type: none"> • Apresentação dos blocos padrão. • Contactar/Manipular/Explorar as peças dos blocos padrão; • Individualmente, verificar todas as formas possíveis de, considerada a unidade o hexágono, formarem figuras geometricamente iguais à fornecida (hexágono), recorrendo a outras peças dos blocos padrão. • Registrar as descobertas relativas às várias possibilidades de sobrepor o hexágono amarelo. • Preenchimento de uma tabela para estabelecerem as relações parte-todo, considerada uma determinada unidade. • Adicionar frações unitárias com o mesmo denominador. • Expor, oralmente e com recurso aos blocos padrão, as possibilidades descobertas. • Identificar as partes da unidade, usando a linguagem matemática para expor as ideias matemáticas com precisão. • Argumentar e discutir as argumentações dos restantes colegas. • Usar a linguagem matemática ao expor a sua opinião. • Ouvir e participar na síntese feita pela professora. • Registrar, no caderno diário, a síntese escrita no quadro. 	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar os blocos padrão e explicar o motivo do seu uso nas próximas aulas. • Explicar, de forma clara, a tarefa e os seus objetivos. • Disponibilizar o material a cada par de alunos. • Colocar questões para orientar os alunos na realização da tarefa, tais como “<i>És capaz de representar o hexágono com outras cores?</i>”, “<i>Quantos sextos estão representados?</i>”, “<i>E terços?</i>”, “<i>És capaz de substituir esta figura representada a verde por outra peças da com a mesma cor?</i>”. • Dar <i>feedbacks</i> aos alunos sobre o trabalho que estão a desenvolver. • Explorar as possibilidades descobertas pelos alunos. • Avaliar e mobilizar o que os alunos já sabem sobre frações. • Fazer perguntas de orientação no sentido de os alunos participarem, sem desistir, e encontrarem todas as formas possíveis de, usando o material, sobrepor o hexágono. • Levantar questões que ajudem os alunos a visualizar e compreender a noção de frações equivalentes. • Promover a aprendizagem cooperativa (por parte dos pares). • Encorajar os alunos a explicarem as suas descobertas. • Explorar/Recordar, com os alunos, a noção de fração e o significado dos seus termos. • Favorecer a comunicação matemática, primando pela sua qualidade. • Favorecer um ambiente propício à aprendizagem.

Situação Formativa: Adição e Subtração de Frações com o Mesmo Denominador

A segunda tarefa, que consta na Tabela 5, realizada com os blocos padrão teve como objetivo iniciar e, para alguns, recordar a adição e subtração de frações com denominadores iguais. Pretendíamos que os alunos realizassem, em pares, uma ficha de trabalho sobre este conteúdo. De referir que a noção de frações equivalentes já havia sido trabalhada, bem como a comparação de frações com a unidade. Foi ainda nosso objetivo iniciar a abordagem ao conceito de numeral misto.

Tabela 5. Situação Formativa para Introdução à Adição de Números Representados por Frações

Tarefa 2: Adição e subtração de frações com o mesmo denominador	
Domínio: NO3	
Subdomínio: Números racionais não negativos	
Conteúdos: <ul style="list-style-type: none">- Adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador- Decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria.	
Objetivo Geral: Adicionar e subtrair números racionais	
Descritores: <ul style="list-style-type: none">12.4. Reconhecer que é igual a 1 a soma de a parcelas iguais a $\frac{1}{a}$ (sendo a número natural)12.6. Reconhecer que a soma e a diferença de frações de iguais denominadores pode ser obtidas adicionando ou subtraindo os numeradores12.7. Decompor uma fração superior a 1 na soma de um número natural e de uma fração própria utilizando a divisão inteira do numerador pelo denominador	
Domínio: NO5	
Subdomínio: Números racionais não negativos	
Conteúdos: <ul style="list-style-type: none">- Adição, subtração de números racionais não negativos representados na forma de fração;- Representação de números racionais na forma de numerais mistos;	
Descritor: <ul style="list-style-type: none">1.9. Representar números racionais não negativos como numerais mistos	
Saberes disponíveis dos alunos: <ul style="list-style-type: none">- Reconstruir a unidade a partir das suas partes;- Compreensão da noção de fração e do significado dos seus termos;- Frações próprias e frações impróprias;- Noção de frações equivalentes;- Comparar a fração com a unidade.	
Duração: 45 min.	
Recursos: Ficha de trabalho (Ver Apêndice D); Blocos padrão;	
Tarefas dos alunos	Mediação do professor
<ul style="list-style-type: none">• Realizar a ficha de trabalho fornecida.• Expôr dúvidas.• Representar frações, com recurso aos blocos padrão, e efetuar a adição e subtração das frações representadas.• Descobrir a regra para a adição e subtração de frações.	<ul style="list-style-type: none">• Explicar, de forma clara, a tarefa e os seus objetivos.• Disponibilizar o material (guião da tarefa e blocos padrão) aos alunos.• Promover a autonomia do aluno.• Conceder tempo para que os alunos efetuem as operações com números racionais representados por frações.• Mobilizar o que os alunos já sabem e têm aprendido sobre frações.

<ul style="list-style-type: none"> • Compreender a noção de numeral misto. • Relacionar as frações impróprias com a representação sob a forma de numeral misto. • Registrar as descobertas efetuadas. • Expor oralmente as suas conclusões, usando a linguagem matemática. • Argumentar e discutir as argumentações dos restantes colegas. • Efetuar adições e subtrações sem recurso aos blocos padrão, por aplicação da regra descoberta. • Participar na elaboração de uma síntese sobre o procedimento a ter em conta na adição e subtração de frações com denominadores iguais. • Fazer os registos, no caderno diário, efetuados no quadro. 	<ul style="list-style-type: none"> • Levantar questões no sentido de os alunos compreenderem a noção de numeral misto. <i>“O que te leva a concluir que a soma é superior à unidade?”</i>, <i>“És capaz de explicar o que representa $\frac{7}{3}$?”</i>, <i>“Quantas unidades completaste?”</i> <i>“Que parte ou que fração da unidade falta preencher?”</i> <i>“Podes substituir as peças que usaste por outra equivalente?”</i> • Interagir com os alunos individualmente ou em pequenos grupos, no sentido de pensarem, preverem, observarem e explicarem os resultados obtidos. • Favorecer a comunicação matemática. • Levantar questões que ajudem os alunos a compreender a adição e subtração de frações com o mesmo denominador. <i>“Compara o resultado com as parcelas/aditivo e subtrativo. Que alterações se verificaram ao nível do numerador? E do denominador?”</i> <i>“Por que se mantem o denominador?”</i>; <i>“Por que adicionaram/subtraem os numeradores?”</i> • Encorajar os alunos a explicarem as regras descobertas. • Promover o diálogo no sentido de ajudar os alunos a compreender a relação que existe entre uma fração imprópria e um numeral misto. Levantar questões de modo a orientar os alunos na realização de um trabalho bem sucedido: <i>“Em quantas partes vai estar dividida a unidade?”</i>, <i>“Que termo da fração indica o número de partes em que a unidade deve estar dividida?”</i> • Favorecer um ambiente propício à aprendizagem.
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Situação Formativa: Comparação de Numerais Mistos

A terceira sessão que preparamos seria realizada depois de os alunos terem trabalhado a comparação de frações com igual denominador, com igual numerador e com numeradores e denominadores diferentes. O objetivo principal desta tarefa era a comparação de numerais mistos, sempre com recurso aos blocos padrão. Apresentamos a situação formativa na Tabela 6.

Tabela 6. Situação Formativa: Comparação de Numerais Mistos

Tarefa 3: Comparação de numerais mistos	
Domínio: NO5	Subdomínio: Números racionais não negativos
Conteúdos: Representação de números racionais na forma de numerais mistos;	
Descritores: 1.9. Representar números racionais não negativos como numerais mistos	
Saberes disponíveis dos alunos:	<ul style="list-style-type: none"> - Frações próprias e frações impróprias. - Numeral misto. - Comparar a fração com a unidade.
Duração: 45 min.	
Recursos: - Guião da tarefa (Apêndice E); - Blocos padrão;	

Tarefas dos alunos	Mediação do professor
<ul style="list-style-type: none"> Ouvir atentamente a tarefa Expor dúvidas sobre a tarefa. Representar, com os blocos padrão, números superiores à unidade. Compreender a noção de numeral misto. Comparar e ordenar as representações feitas. Argumentar e discutir as argumentações dos restantes colegas. Expor oralmente as suas conclusões, nomeadamente, sobre como comparar numerais mistos. 	<ul style="list-style-type: none"> Explicar, de forma clara, a tarefa e os seus objetivos. Responder às dúvidas colocadas sobre a realização da tarefa. Disponibilizar o material (guião da tarefa e blocos padrão) aos alunos. Promover a autonomia do aluno. Conceder tempo para que os alunos compreendam a noção de numeral misto. Mobilizar o que os alunos já sabem e têm aprendido sobre frações. Interagir com os alunos no sentido de pensarem, observarem e explicarem o seu raciocínio. Favorecer a comunicação matemática. Levantar questões que ajudem os alunos a compreender como comparar numerais mistos Encorajar os alunos a explicarem as suas descobertas.

Situação Formativa: Adição e Subtração de Frações com Denominadores Diferentes

Na quarta sessão, cuja situação formativa é apresentada na Tabela 7, pretende-se que os alunos aprendam a adicionar e a subtrair frações com denominadores diferentes através da resolução de exercícios e situações problemáticas.

Tabela 7. Quarta Situação Formativa

Tarefa 4: Adição e subtração de frações com denominadores diferentes	
Domínio: NO5	Subdomínio: Números racionais não negativos
Conteúdos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Adição e subtração de números racionais não negativos representados na forma de fração; - Representação de números racionais na forma de numerais mistos; 	
Objetivo Geral: (1) Efetuar operações com números racionais não negativos (2) Resolver problemas.	
Descritores:	
1.9. Representar números racionais não negativos como numerais mistos. 2.1. Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos.	
Domínio: ALG5	
Subdomínio: Expressões algébricas e propriedades das operações	
Conteúdos:	
- Cálculo de expressões numéricas envolvendo as operações e a utilização de parêntesis.	
Objetivo Geral: (1) Conhecer e aplicar as propriedades das operações	
Descritores:	
1.10. Simplificar e calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as operações aritméticas e a utilização de parêntesis.	

Saberes disponíveis dos alunos: - Adicionar e subtrair números representados por frações com denominadores iguais - Frações equivalentes - Relação parte-todo	
Duração: 90 min.	
Recursos: Guião da tarefa (Apêndice F); Blocos padrão;	
Tarefas dos alunos	Mediação do professor
<ul style="list-style-type: none"> Acompanhar e participar no diálogo entre professora e alunos acerca da adição de frações com denominadores diferentes. Representar frações, com recurso aos blocos padrão, e efetuar a adição e subtração das frações representadas. Descobrir a regra para a adição e subtração de frações. Expor por escrito, quer por meio de esquemas, desenhos, recorrendo aos blocos padrão ou por palavras os procedimentos que efetuou para resolver as situações propostas. Argumentar e discutir as argumentações dos restantes colegas. Efetuar adições e subtrações sem recurso aos blocos padrão, por aplicação da regra descoberta. Resolver situações problemáticas segundo estratégias da sua preferência. Ouvir e participar no diálogo promovido pela professora. Fazer os registos, no caderno diário, efetuados no quadro, sempre que solicitado. 	<ul style="list-style-type: none"> Favorecer um ambiente propício à aprendizagem. Disponibilizar o material (guião da tarefa e blocos padrão) aos alunos. Promover a autonomia do aluno. Explicar, de forma clara, a tarefa e os seus objetivos. Conceder tempo para que os alunos efetuem as operações com números racionais representados por frações. Mobilizar o que os alunos já sabem e têm aprendido sobre frações. Monitorizar a ação dos alunos. Levantar questões, sempre que os alunos necessitarem de estímulos para desenvolverem a tarefa. “Conseguem representar a soma/diferença usando apenas uma cor?” “Em quantas partes vão dividir a unidade?”, “Quantas partes vão considerar?”, “Que fração da unidade obtiveram?” Formular questões que ajudem os alunos a compreender a adição de frações com o mesmo denominador. Interagir com os alunos individualmente ou em pequenos grupos, no sentido de pensarem, preverem, observarem e explicarem os resultados obtidos. Favorecer a comunicação matemática. Encorajar os alunos a explicarem as regras descobertas. Promover a discussão em grande grupo, sempre que necessário. Registar a síntese relativa a este conteúdo.

Situação Formativa: Adição e Subtração de Numerais Mistos

A quinta situação formativa (Ver Tabela 8), foi planificada com o objetivo de se lecionar a adição e subtração de numerais mistos de modo a que os alunos aprendam a adicionar e subtrair numerais mistos através da manipulação dos blocos padrão com aplicação/consolidação das aprendizagens realizadas na resolução de situações problemáticas com e sem o recurso aos blocos padrão.

Tabela 8. Quinta Situação Formativa

Tarefa 5: Adição e subtração de numerais mistos	
Domínio: NO5	Subdomínio: Números racionais não negativos
Conteúdos: - Adição e subtração de números racionais não negativos representados na forma de fração; - Representação de números racionais na forma de numerais mistos;	
Objetivo Geral: (1) Efetuar operações com números racionais não negativos (2) Resolver problemas.	
Descritores: 1.10. Adicionar e subtrair dois números racionais não negativos expressos como numerais mistos, começando respetivamente por adicionar ou subtrair as partes inteiras e as frações próprias associadas, com eventual transporte de uma unidade. 2.1. Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos.	
Saberes disponíveis dos alunos: - Adicionar e subtrair números representados por frações com denominadores iguais e com denominadores diferentes. - Compreensão da noção de numeral misto e fração imprópria.	
Duração: 180 min.	
Recursos: - Guião da tarefa (Apêndice G) - Blocos padrão - Folhas de registo para os alunos (malha isométrica).	
Tarefas dos alunos	Mediação do professor
<ul style="list-style-type: none"> • Ouvir e ler atentamente a explicação da tarefa e dos seus objetivos. • Expôr as dúvidas. • Representar numerais mistos com recurso aos blocos padrão, e efetuar a adição destes. • Descobrir o procedimento envolvido na adição de numerais mistos. • Selecionar um método de resolução com o qual se sintam mais confortável e aplicá-lo na resolução das situações propostas. • Expor por escrito, quer por meio de esquemas, desenhos, recurso aos blocos padrão ou por palavras os procedimentos que efetuou para resolver as situações propostas. • Argumentar e discutir as argumentações dos restantes colegas. • Efetuar adições e subtrações sem recurso aos blocos padrão, por aplicação da regra descoberta. • Resolver situações problemáticas segundo estratégias da sua preferência. • Ouvir e participar no diálogo promovido pela professora. • Fazer os registos, no caderno diário, efetuados no quadro, sempre que solicitado. • Realização de um acróstico com as palavras "Blocos Padrão". 	<ul style="list-style-type: none"> • Explicar, de forma clara, a tarefa e os seus objetivos. • Disponibilizar tempo para a leitura atenta e cuidada da tarefa e proporcionar um momento para esclarecimento de dúvidas. • Disponibilizar o material (guião da tarefa, blocos padrão e malhas isométricas) aos alunos. • Conceder tempo para que os alunos efetuem as operações indicadas. • Monitorizar a ação dos alunos, levantando questões e relembrando conhecimentos adquiridos, sempre que os alunos necessitarem de estímulos para desenvolverem a tarefa. <i>Conseguem representar a soma/diferença usando apenas uma cor?", "Como procedes quando, numa subtração de números naturais, os algarismos do aditivo são inferiores aos algarismos do subtrativo?"</i> • Interagir com os alunos individualmente ou em pequenos grupos, no sentido de estimular o seu raciocínio e incentivando-os a torna-lo explícito. • Favorecer a comunicação matemática. • Promover a autonomia do aluno, encorajando-o a progressivamente optar por estratégias mais abstratas. • Incentivar os alunos a explicarem a regra para operarem com numerais mistos. • Orientar e promover a discussão em grande grupo, sempre que necessário. • Registar a síntese relativa a este conteúdo. • Explicar em que consiste um acróstico.

Capítulo III

APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este constituirá o momento privilegiado para descrever, analisar e discutir a nossa intervenção no âmbito do subtópico “Números Racionais não Negativos” com recurso aos blocos padrão. Neste capítulo apresentaremos as intervenções dos alunos participantes e a forma como as competências relacionadas com a compreensão e a operação com numerais mistos foram percebidas e adquiridas pelos alunos.

De referir que, neste conjunto de atividades, os alunos apenas trabalharam com quatro tipos de peças do *kit* dos blocos padrão, nomeadamente, o hexágono, o trapézio, o losango azul e o triângulo. Embora a peça azul seja, de facto, um paralelogramo losango, pelo facto de os alunos não terem ainda iniciado o estudo das propriedades dos losangos, sempre nos referiremos a ele como sendo um paralelogramo.

Tarefa 1 – Abordagem aos Blocos Padrão

A primeira sessão consistiu numa primeira abordagem aos blocos padrão para o estudo das frações. Foi feita uma contextualização histórica, através da apresentação de um PowerPoint, de modo a ajudar os alunos a compreenderem a necessidade do surgimento do conjunto dos números fracionários. Os alunos visualizaram o *côvado* e fizeram algumas medições com esta medida de comprimento, uma vez que lhes foram apresentados côvados fracionados em duas, três e quatro partes iguais.

De seguida, foi realizada a tarefa “Abordagem aos blocos padrão” cujo objetivo principal era possibilitar aos alunos o contacto, a manipulação e a exploração deste material didático. Foi fornecido, a cada par de alunos, uma ficha (ver Apêndice C) na qual estavam representados oito hexágonos dos blocos padrão. Pretendíamos que os alunos descobrissem diferentes possibilidades de preencher cada um dos hexágonos, considerando-os a unidade, com as restantes peças dos blocos padrão. De referir que cada grupo de trabalho recebeu um conjunto suficiente de peças para poder realizar a tarefa.

Todos os grupos realizaram sem dificuldades esta tarefa, mas os pares AF1, AF2 e AF3, AF4 apresentaram constituições iguais no conjunto das oito possibilidades.

AF1 e AF2 tiveram mais dificuldades em iniciar a tarefa por não terem percebido bem o objetivo. Foi interessante notar que as primeiras três formas possíveis que encontraram para sobrepor a unidade, além do hexágono amarelo, foi usando apenas uma só cor, isto é, dividiram a unidade em partes iguais, usando dois trapézios, seis triângulos e três paralelogramos. De seguida, pelo facto de as peças terem um arranjo diferente, os alunos não se aperceberam que havia constituições iguais (ver Figura 6).

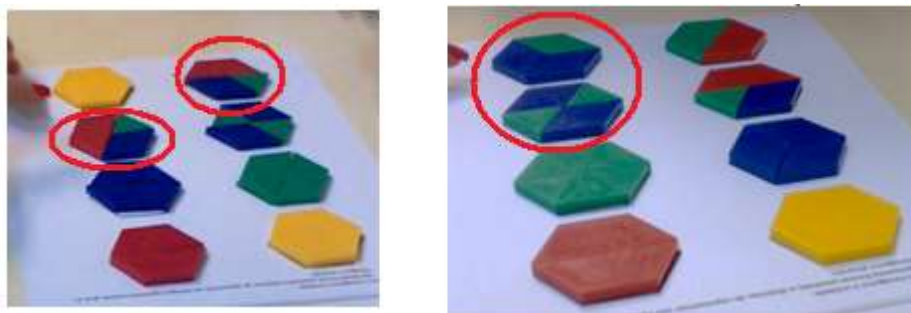


Figura 6. Possibilidades Encontradas por AF1 (esquerda) e AF2 (direita)

Após a estratégia de questionamento sucessivo, AF1 e AF2 perceberam que havia outras possibilidades de preencher a unidade e substituíram as repetidas.

O par de alunos AF3 e AF4 apresentou uma situação análoga com três constituições iguais (ver Figura 7) mas aperceberam-se desse facto sem a intervenção da professora e substituíram-nas com facilidade.

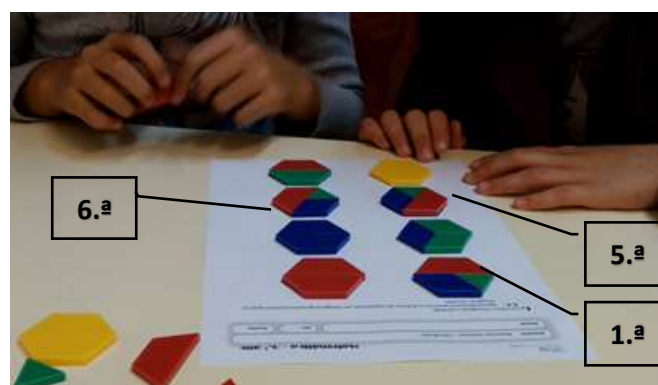


Figura 7. Possibilidades Encontradas por AF3 e AF4.

Após a realização desta tarefa foi nosso objetivo concentrar-nos na relação que cada uma das peças dos blocos padrão tem quando comparadas com a unidade (hexágono). Para tal, os alunos foram incentivados a preencher a tabela, representada na Figura 8, para perceber a relação entre as peças.






	Que parte da unidade representa cada uma das peças?			
Unidade				
				

Figura 8. Tabela para Preenchimento

Após a explicação da tarefa, de um modo geral, os alunos manifestaram dificuldades na sua realização pois todos os grupos limitaram-se a preencher a tabela sem recorrer ao uso de frações. Apenas registaram o número de hexágonos, trapézios, paralelogramos e triângulos que seriam necessários para preencher a unidade, neste caso e respetivamente, um, dois, três e seis. Assim sendo, a professora interveio, procurando manter um diálogo assente num questionamento sucessivo com todos os alunos participantes e apoiando-se num *PowerPoint* que elaborou previamente onde constavam as oito possibilidades de sobrepor o hexágono com estas peças dos blocos padrão.

Prof.: “Qual a relação que o trapézio tem com a unidade?”

AM5: “É a metade.”

Prof.: “Concordas, AF4?”

Af4: “Sim.”

Prof.: “Porquê?”

AF4: “Sim...porque está dividido em duas partes.”

AF3: “Em dois trapézios”.

Prof.: “Portanto, cada um dos trapézios representa a metade. E tu, AF1, conseguiste ver a relação que o paralelogramo azul tem com a unidade?”

AF1: “Repeti três vezes a mesma peça.”

Prof.: “O que significa isso? O que é que cada paralelogramo é em comparação com a unidade?”

AM5 e AF4: “Um terço.”

AF4: “Porque o hexágono está dividido em três partes...”

Prof.: “Iguais e estamos a considerar...”

AF4: “Uma.”

Prof.: “Muito bem! Um terço. E o triângulo?”

AF4: “Em quatro...” (com alguma hesitação)

Prof.: “Precisamente quatro triângulos para preencher o hexágono...é isso?”

AM5 e AM6: “Não.”

AF4: “Seis.”

Prof.: “Então cada triângulo representa que parte da unidade?”

AM5, AM6 e AF4: “Um sexto.”

AF4: “Porque o hexágono está dividido em seis partes.”

AM5: “Em seis partes iguais.”

Prof.: “Então se eu tiver o meu hexágono e só preencher com três triângulos...”

AM5: “Fica meio.”

AF4: “Fica metade, fica metade de um hexágono”, apontando para a possibilidade constituída por um trapézio e três triângulos.

AM5: “Por isso é dois sextos.”

Prof.: “Dois sextos porquê?... Usei quantos triângulos?”

AF3: “Três”.

Prof.: “Em quantos?”

AM5: “Em seis...ah! Três sextos!”

Prof.: “Por acaso, quando uso três triângulos...”

AM5: “Fica metade.”

Prof.: “Fica metade do hexágono, então quer dizer que o trapézio vermelho equivale a...?”

AF4: “A três triângulos.”

AM5: “Professora, então três sextos ou três triângulos equivale a metade... a um meio.”

Prof.: “O que o AM5 disse é muito importante. AM5 disse que três sextos é igual a um meio”, escrevendo no quadro e explicando a equivalência de frações. “São agora capazes de preencher corretamente a tabela? Reparem na pergunta escrita acima da tabela: que parte da unidade corresponde o hexágono amarelo?”

Todos: “Um.”

Prof.: “E o trapézio vermelho...”

AF4: “A dois.”

Prof.: “A dois? A duas unidades?”

AM6: “Sim...Não! A 0,5 ou um meio.”

AF4: “Metade”, em simultâneo com o comentário anterior.

Prof.: “E o paralelogramo azul?”

AM6: “Um terço.”

Prof.: “E o triângulo?”

AM6: “Um sexto.”

Prof.: *“Compreenderam? A AF3 diz que não compreendeu muito bem. AM5 queres explicar por que é que aqui, na segunda coluna, colocamos um meio?”*

AM5: *“Porque o hexágono corresponde a dois trapézios então cada trapézio corresponde a metade do hexágono.”*

Prof.: *“Como escrevemos metade?”*

AM5 e AF3: *“Um meio. Tenho uma unidade dividida em...duas partes iguais”*

Prof.: *“Se agora olhares para o paralelogramo, AF3, quantas vezes cabe o paralelogramo no hexágono?”*

AF3: *“Três.”*

Prof.: *“Então cada um deles corresponde a ...”*

AF3: *“Um terço.”*

Depois desta abordagem e exploração, seguiu-se, para consolidação, uma breve síntese do que foi dito, com participação dos alunos. De salientar que, aquando do visionamento da unidade dividida em três paralelogramos e depois de identificada a parte da unidade representada por cada uma dessas peças ($\frac{1}{3}$) considerámos oportuno fazer uma pequena abordagem à adição de frações com o mesmo denominador.

Prof.: *“Se uma peça representa...AF3.”*

AF3: *“Um terço.”*

Prof.: *“Duas peças representam...”*

AM5: *“Um sexto...Dois sextos!”*

AM6: *“Um meio.”*

AM5: *“Dois terços.”*

AF4: *“Um meio.”*

Prof.: *“Com dois paralelogramos eu consigo representar metade do hexágono?”*

Alunos: *“Não.”*

AM5 e AM6: *“Não, é dois terços.”*

Foram feitas perguntas semelhantes à medida que todas as possibilidades foram exploradas em conjunto, sempre procurando que compreendessem que o denominador indica sempre o número de partes em que a unidade está igualmente dividida e o numerador o número de partes consideradas (parte-todo). Na possibilidade constituída por um paralelogramo e quatro triângulos, os alunos não tiveram dúvidas em responder que o paralelogramo representava um terço da unidade e os triângulos quatro sextos da mesma.

De salientar que alguns alunos continuaram a evidenciar algumas dificuldades sobre a organização/posição das peças quando comparadas as várias possibilidades dos grupos

sobrepostas no hexágono. Embora tivessem criado, para a mesma possibilidade e ao nível da composição, figuras equivalentes, alguns alunos continuaram a questionar a equivalência, mas AF3 foi capaz de explicar aos colegas que o que interessa e faz a diferença não é a posição das peças, mas a quantidade de peças usadas.

Relacionado com a possibilidade em que os alunos usaram dois triângulos e um paralelogramo foi ainda reforçada a noção de frações equivalentes. Os alunos, quando questionados acerca da possibilidade dos dois triângulos serem substituídos por outra peça, foram unânimes em considerar que se deveria usar um paralelogramo, pelo que as frações *um terço* e *dois sextos* foram identificadas como sendo frações equivalentes, à semelhança de *um meio* e *três sextos*.

Após este momento da aula, os alunos foram solicitados a, em pares, darem continuidade à ficha de trabalho (Ver Apêndice C) com o objetivo de consolidarem as aprendizagens anteriores.

O par AF3 e AF4 encontrou a sua primeira dificuldade na segunda questão, nomeadamente nos quarto e sexto exercícios (ver Figura 9).

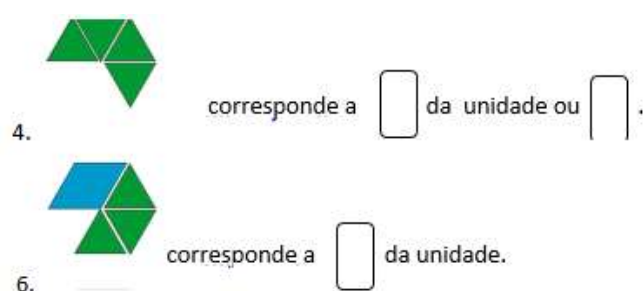


Figura 9. Quarto e Sexto Exercício da Segunda Questão

O par facilmente descobriu que a figura representava quatro sextos do hexágono, mas solicitaram a ajuda da professora para resolverem a outra parte do exercício, que requeria a escrita de uma fração equivalente. Enquanto esperavam pelo apoio tiveram o seguinte diálogo.

AF3: *“Estás a ver? Esta peça equivale a dois triângulos”,* à medida que sobrepõe dois triângulos sobre o paralelogramo.

AF4 (referindo-se à quarta alínea): *“Então se equivale a dois triângulos corresponde a um terço, não, dois terços.”*

AF3 (apontando para a sexta alínea e inicialmente para o paralelogramo): *“podemos dividir este em um, dois, três, quatro cinco... cinco sextos porque esta”* – referindo-se novamente ao paralelogramo – *“equivale a dois triângulos”*.

AF4 (referindo-se à quarta alínea): *“Por isso, este aqui é dois terços porque estes aqui dá um e estes dois dá dois...dois terços.”*

AF3: *"Pois é."*

Quando a professora se aproximou, o par explicou as suas descobertas e a professora reforçou a necessidade de transformarem a figura em outra equivalente, mas usando apenas uma cor. O par continuou o seu trabalho. Na resolução do último exercício da questão dois, representado na Figura 10, foi possível ouvir o seguinte:



Figura 10. Último Exercício da Segunda Questão

AF3: *"A quantos é que este equivale?"*, apontando para o trapézio.

AF4: *"Metade mais um terço...então dá..."*

AF3: *"Equivale a três"*, à medida que sobrepõe três triângulos sobre o trapézio, *"mais dois...três, quatro, cinco...cinco sobre seis"*.

Tendo em conta que este resultado já tinha sido resposta de exercícios anteriores, o par sentiu necessidade de confirmarem, com a professora, que o raciocínio estava correto.

O par constituído pelos alunos AM5 e AM6 também revelou algumas dificuldades na quarta alínea deste segundo exercício. Esta dificuldade foi superada quando a professora sugeriu que transformassem a mesma figura numa equivalente, mas usando uma cor apenas.

AM6 (referindo-se ao paralelogramo): *"Percebi. Trocamos aqui este por estes dois"* (triângulos).

AM5: *"Um, dois, três, quatro, cinco sextos"*.

Os alunos avançaram para os exercícios seguintes e, na sexta alínea, AM5 afirmou *"conseguimos fazer este"*, referindo-se ao trapézio, *"só com paralelogramos"*. Mas, tendo verificado que não era possível, AM6 disse que poderiam substituir por triângulos. Os alunos manipularam o material, sobrepondo os triângulos sobre a figura original, três sobre o trapézio e dois sobre o paralelogramo, e AM5 concluiu logo que a figura representava cinco sextos da unidade.

Apesar de AF1 manifestar algumas dificuldades que foram sendo ultrapassadas, AF2 surpreendeu pela positiva, pois não teve qualquer dificuldade em resolver a última alínea respondendo imediatamente *cinco sextos* e justificando que *"no hexágono sei que cabem seis triângulos. Dividi este azul ao meio e, ao todo, tenho cinco triângulos"*.

Nas propostas seguintes a unidade era diferente do hexágono o que originou algumas dificuldades (ver Figura 11).

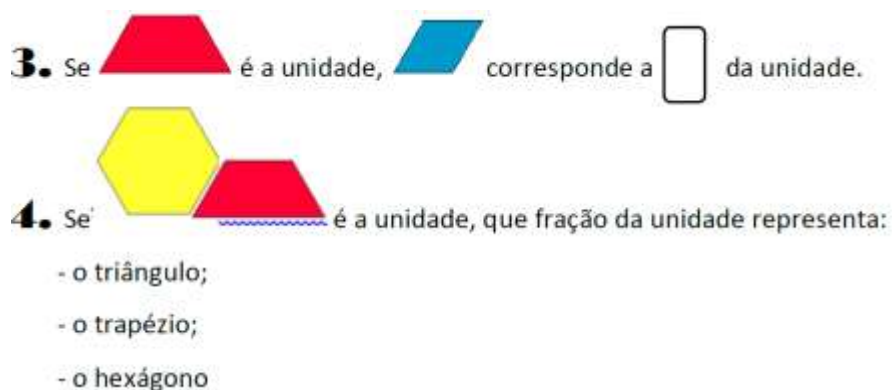


Figura 11. Exercícios Três e Quatro da Ficha de Trabalho

AF2 começou por colocar o paralelogramo sobre o trapézio e, após alguma hesitação entre $\frac{2}{6}$ e $\frac{2}{3}$, mais uma vez, contou mentalmente três partes iguais sem recorrer aos triângulos. No entanto, teve necessidade de recorrer a estas peças na determinação do numerador da fração. AF1 que, neste momento, apresentava, com alguma facilidade, as frações quando a unidade era o hexágono, manifestou novamente dificuldades. Estas foram ultrapassadas através das questões colocadas pela professora que levaram AF1 a afirmar que não era possível representar a unidade com paralelogramos mas sim com três triângulos. Na indicação da fração, AF1 hesitou entre $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$ acabando por concluir que se tratava de $\frac{2}{3}$.

Depois de superada a dificuldade no terceiro exercício, AF2 foi capaz de responder, apenas sobrepondo um triângulo sobre a unidade, que a fração da unidade representada pelo triângulo era um nono. Ao explicar o seu raciocínio apenas contou o número de triângulos que “via”, neste caso, nove. Na segunda parte do exercício (trapézio) a aluna voltou a associar o valor do trapézio, quando considerado o hexágono a unidade, tendo respondido um meio. A professora interveio da mesma forma que nas vezes anteriores e AF2 corrigiu a sua resposta. Na terceira parte do exercício, socorreu-se das peças dos blocos padrão (ver Figura 12), nomeadamente dos trapézios, e respondeu sem dificuldades: dois terços.



Figura 12. Primeira Fase de Resolução da Segunda Alínea do Exercício Quatro (AF2)

Na do terceiro exercício, junto de AF3 e AF4, a professora alertou para a necessidade de dividirem a unidade em partes iguais, o que o paralelogramo não permitia.

Prof.: *“Será possível dividir o trapézio em partes iguais?”*

AF4: *“Sim.”*

AF3: *“Sim, com triângulos.”*

Cada um dos alunos manipulou individualmente o material e chegaram à conclusão que um paralelogramo equivalia a dois triângulos e a fração era *“Dois...terços”*.

No quarto exercício este par de alunos compreendeu a necessidade de substituir a unidade por triângulos para resolver a primeira parte da questão (ver Figura 13).



Figura 13. Etapa da Resolução da Primeira Alínea do Exercício Quatro, por AF3 e AF4

Apesar de ser visível alguma dificuldade manifestada pelo diálogo entre os elementos do grupo (nove sextos, um sexto), com as questões colocadas pela professora, relativas ao número de triângulos que podem ser considerados na unidade, responderam corretamente: um nono.

Na segunda alínea do exercício o par substituiu a unidade por trapézios e, de imediato, perceberam que o trapézio dividia a unidade em três partes iguais, sendo que cada um deles representava um terço da unidade. A resposta surgiu sem dúvidas: dois terços.

Por fim, o par de alunos AM5 e AM6, na resolução do terceiro exercício, manipulou o material concreto e verificou que não era possível dividir a unidade (trapézio) em partes iguais usando paralelogramos mas lembraram-se logo dos triângulos. A indicação da fração teve a orientação da professora apenas para o uso correto da linguagem matemática.

Prof.: *“Agora temos de ver a que fração desta unidade corresponde a peça azul.”*

AM6: *“Vale dois.”*

Prof.: *“Dois quê?”*

AM6: *“Dois pequeninhos.”*

AM5: *“Dois triângulos.”*

Prof.: *“Isso não é fração nenhuma.”*

AM6: *“Dois sextos!”*

AM5 e AM6: *“Dois terços.”*

AM6: *“Ai... não está dividido em seis partes.”*

Na resolução do quarto exercício AM5 apercebeu-se que tinha de preencher toda a unidade com triângulos. Fê-lo com AM6, usando os blocos padrão, embora tivessem à sua disposição a malha isométrica.

AM6: *“São nove.”*

AM5: *“Fração AM6, fração...”*

AM5: *“São nove sextos, nove sextos!”*

De modo precipitado, responderam às questões seguintes dizendo que um trapézio representava três sextos da unidade e o hexágono seis sextos. Os alunos foram solicitados a rever as respostas e a professora teve de intervir novamente no sentido de os alertar que agora a unidade era constituída por um hexágono e um trapézio.

Prof.: *“Em quantas partes conseguem dividir a unidade, usando triângulos?”*

AM5: *“Nove.”*

AM6: *“Seis.”* (em simultâneo com a resposta anterior)

AM5: *“Nove triângulos, AM6.”*

AM6: *“Nove?!?”*

AM5: *“Sim. A unidade é isto tudo AM6.”*

AM6: *“Ah! Nove...um nono.”*

Na resolução da alínea desta questão fizeram-no usando trapézios, nomeadamente, três trapézios.

Prof.: *“Quantas peças usaram no total?”*

AM6: *“Três.”*

AM5: *“Três terços?”*

Prof.: *“Três terços é a unidade toda. Mas só estamos a considerar uma parte da unidade, o hexágono.”*

AM5: *“Ah! Dois terços.”*

A observação detalhada das gravações audiovisuais do funcionamento e desempenho de cada grupo de trabalho permitiu-nos concluir que os alunos compreenderam e identificaram facilmente a fração da unidade que cada uma das peças dos blocos padrão, utilizadas na resolução das tarefas, representava quando o hexágono constituía a unidade.

No entanto, dificuldades surgiram quando a unidade deixou de ser o hexágono. Apesar de termos tornado bem explícito qual a unidade a considerar em cada um dos exercícios, os alunos

participantes relevaram dificuldades em as resolver pois não conseguiam abstrair-se das relações (parte-todo) que haviam estabelecido anteriormente quando o hexágono era a unidade.

Constatamos que os blocos padrão facilitaram a compreensão das frações equivalentes, para além de estes terem contribuído para que os alunos compreendessem a necessidade de, frequentemente, recorrermos a este conceito para resolvermos problemas que surgem, nomeadamente no âmbito da adição e subtração de frações com denominadores diferentes. A título de exemplo, foi frequente, na realização de exercícios de consolidação, alguns alunos perguntarem se podiam escrever os resultados de duas maneiras, referindo-se às frações equivalentes.

Os alunos apreciaram muito este primeiro contacto com o material, tendo feito comentários acerca do gosto da utilização do material para aprender as frações (ver Figura 14) e da facilidade nas respostas bem como o trabalho de grupo (ver Figura 15).

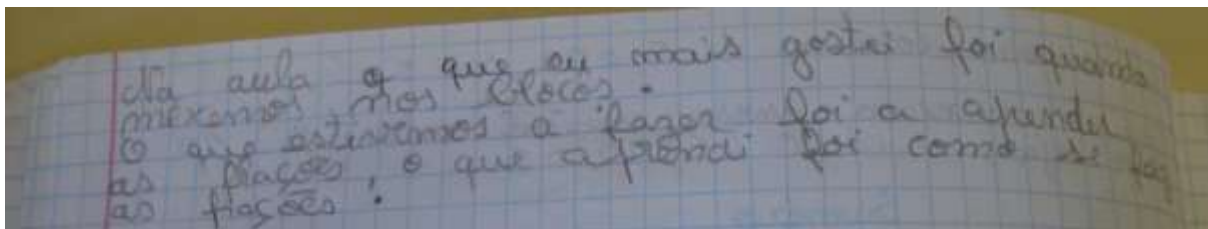


Figura 14. Registo Feito por AF1

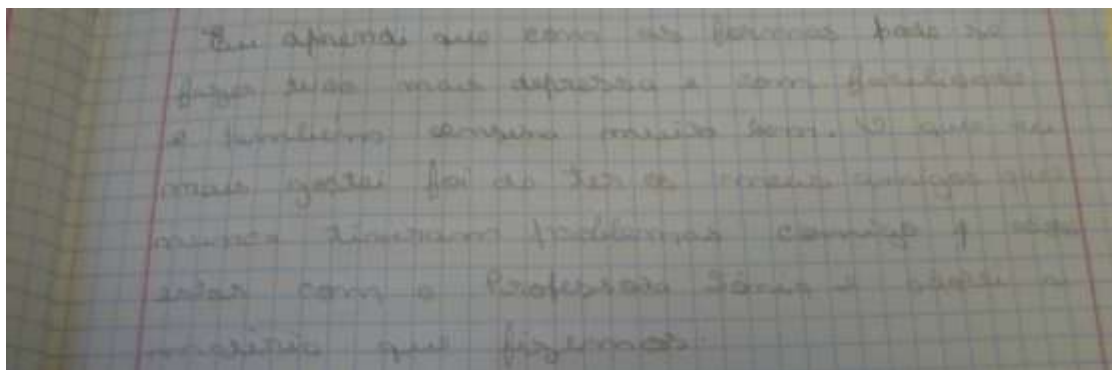


Figura 15. Registo Feito por AF4

Consideramos também interessante o comentário de AF3, numa fase posterior ao contacto inicial com as peças dos blocos padrão, mais propriamente, ao iniciar a realização de exercícios de consolidação na mesma aula, o que, de certa forma, exprime o contributo que os blocos padrão tiveram na apropriação de significados e de conceitos matemáticos. AF3 encontrava-se de tal forma confiante e motivado que, espontaneamente, referiu: “professora, vai ver... vou fazer os

exercícios com uma perna atrás das costas”. Após a correção dos exercícios em grande grupo AF3 tinha, de facto, resolvido tudo corretamente e sem dificuldades.

Tarefa 2 – Adição e Subtração de Frações com Denominadores Iguais

A tarefa que nos propusemos desenvolver, no âmbito da segunda situação formativa, foi aplicada depois de termos abordado a noção de frações equivalentes e de os alunos terem comparado frações com a unidade. Aquando da exploração da comparação de frações com a unidade, a noção de numeral misto surgiu naturalmente pois, quando solicitamos aos alunos que representassem frações impróprias, com os blocos padrão, os mesmos perceberam que essas frações representavam uma quantidade/um número superior à unidade.

Antes de os alunos resolverem em pares o guião de trabalho fornecido (ver Apêndice D), em grande grupo, foram resolvidas três adições com frações com o mesmo denominador, de modo a revermos a comparação de frações com a unidade. Apresentamos, de seguida, o diálogo que nos permite aferir o que referimos anteriormente, depois de os alunos terem, novamente, sido informados que o hexágono constituiria a unidade:

Prof.: *“Vamos representar um sexto de um hexágono (...) mais dois sextos (...) mais quatro sextos. Que resultado iremos obter?”*

A professora escreveu a operação no quadro, enquanto os alunos representaram, com os blocos padrão, as parcelas da adição. Apresentamos um dos exemplos, na Figura 16.

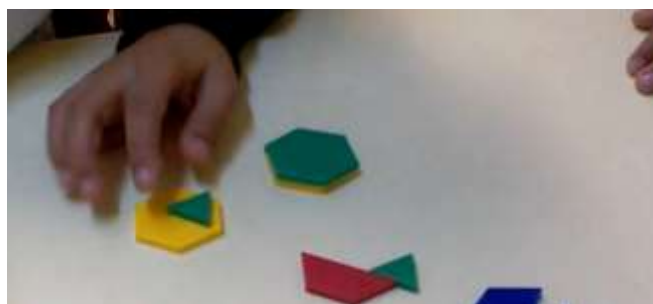


Figura 16. Apresentação do Resultado da Adição Solicitada Feita por AF1 e AF2

AF4: *“Ai...tão fácil...”*

AF3: *“Sete sextos.”*

AF4: *“Ou uma unidade e um sexto.”*

AM5: *“É um numeral misto.”*

Prof.: *“Muito bem. Temos uma unidade completa ...”*

AF2: *“...mais um sexto.”*

Neste momento, foi também interessante a intervenção de AF3, relativa à expressão que estava registada no quadro.

AF3: *“Professora, o denominador ficou igual...só fizemos contas com o numerador.”*

Posto isto, a professora explicou a tarefa que se seguiu, de modo a que todos os pares pudessem trabalhar de forma autónoma.

Relativamente às primeiras adições que constavam da ficha e após observar as gravações audiovisuais da aula, verificamos que todos os pares resolveram corretamente as adições e que não manifestaram qualquer dificuldade em manipular os blocos padrão.

De salientar que o par de alunos AF1 e AF2 recorreu sempre ao material, inicialmente para obter o resultado da operação, mas, de forma gradual apenas para validar as suas previsões, especialmente no caso de AF2. Este par trabalhou sempre em conjunto, tendo optado por, primeiro, resolver as adições e relacionar os resultados obtidos com a unidade e só depois elaborar as respetivas justificações. Após a visualização da gravação do decorrer da aula apercebemo-nos que isto se deve, essencialmente por falta de segurança, tendo o par solicitado, por diversas vezes, a intervenção da professora nestes momentos.

Consideramos pertinente que, embora AF2 tivesse sempre utilizado os blocos padrão, desvinculou-se mais cedo do material do que AF1 para resolver a tarefa. A título de exemplo, na terceira adição, antes de representar as frações com o material, AF2 utilizou como estratégia manter o denominador e, de seguida, pensou em adicionar os numeradores. Somente depois de realizado este passo, AF2 se certificou do resultado com o material e acompanhou, de forma ativa e participada, a manipulação do material por parte de AF1.

Aquando da resolução da terceira adição cujo resultado deu sete terços, a professora interveio:

Prof.: *“Sete terços é superior a uma unidade. Conseguiram completar quantas unidades?”*

AF1: *“Uma mais um terço.”*

Foi curioso verificar que os blocos padrão, nesta tarefa e para este par, foram essencialmente de ajuda para justificar, através de palavras, a comparação de frações, que corretamente fizeram, com a unidade. A título exemplificativo, referente à segunda adição, cujos alunos AF1 e AF2 já tinham registado a soma (dois terços) e já a tinham comparado, corretamente, com a unidade, registamos o diálogo que a seguir se apresenta:

Prof.: *“Representem dois terços. Por que dizem que é inferior à unidade?”*

AF2: *“Por que é menor. Falta uma peça. Falta preencher um terço.”*

AF1 e AF2 avançaram para a terceira adição, neste caso, para a justificação da comparação de sete terços com a unidade. Foi interessante notar que, não tendo registado na ficha o numeral misto equivalente à fração imprópria, este ficou gravado na sua memória pois AF2 usou

imediatamente três hexágonos sobre os quais sobrepôs sete paralelogramos. E, mais uma vez, por falta de segurança, o par solicitou a professora apenas para confirmar o raciocínio correto. Apesar de não se ter referido às duas peças como representando $\frac{2}{3}$, estes foram perfeitamente identificados pelo par na resposta que deram (ver Figura 17).

The image shows handwritten work on a worksheet. At the top, there is a calculation: $\bullet \frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$. Below this, a box contains the fraction $\frac{7}{3}$. To the right of the box, the text reads: "O resultado obtido é superior (inferior/igual/superior) à unidade." Below the box, the text "Explica porquê." is followed by a handwritten explanation: "alta preencher 2 para completar tres unidades" with a line drawn under the words "três unidades".

Figura 17. Resposta à Justificação da Terceira Adição por AF1 e AF2

Esta e outras respostas dadas pelos alunos no decorrer da aula permitem-nos constatar que o material poderá contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática pois, a partir do momento em que os alunos associam frações a cada uma das peças do material, atribuindo-lhes significado, estes passam a usar frequentemente a linguagem apropriada das frações na resolução das tarefas propostas. Aliás, verifica-se na observação das gravações e dos registos escritos feitos pelos alunos ao longo de todas as aulas que, gradualmente, os alunos deixaram de usar o nome ou a cor das peças para identificação das mesmas.

Na resolução da penúltima adição, aquando da justificação da comparação da soma $\frac{9}{6}$ com a unidade, apercebemo-nos do diálogo entre AF1 e AF2:

AF2 (ao iniciar a representação dos $\frac{9}{6}$, após observação da adição): “Vamos precisar de duas unidades mais ou menos”.

Enquanto isso, AF1 representou $\frac{9}{6}$.

AF2: “Mais quatro sextos... mais três sextos”, representando os $\frac{3}{6}$ no segundo hexágono pois apercebeu-se que AF1 já tinha completado uma unidade ao representar $\frac{2}{6} + \frac{4}{6}$.

AF1: “Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito...nove sextos é o resultado.”

AF2: “O que é nove sextos?”

AF1: “É superior à unidade.”

AF2: “Porquê?”

AF1: “Porque...”

AF2: “Completamos uma unidade e falta preencher três sextos da outra unidade.”

Neste momento, a professora interveio para realçar a possibilidade de transformarem a soma num numeral misto e para o facto de $1\frac{3}{6}$ ser equivalente a $1\frac{1}{2}$. O par compreendeu muito bem esta equivalência pois respondeu corretamente às questões colocadas.

A última adição da primeira questão, cujo objetivo era aferir até que ponto os alunos compreenderam a “regra” a aplicar na adição de frações com o mesmo denominador porque não possibilitava o uso dos blocos padrão, foi corretamente realizada, uma vez que o par já tinha descoberto o procedimento a ter na adição de fração com o mesmo denominador.

O par de alunos AF3 e AF4 recorreu várias vezes aos blocos padrão, embora a observação das gravações nos permita concluir que a adição de frações com o mesmo denominador já tinha sido interiorizada a partir da exploração inicial feita com todos os alunos. Embora esta se tratasse de uma tarefa a realizar com o par, apercebemo-nos, no momento do visionamento das gravações audiovisuais que, ambos foram realizando a atividade individualmente, socorrendo-se do colega do lado apenas quando se sentiam mais inseguros, nomeadamente, quando era necessário justificar as primeiras respostas. Embora AF4 fosse avançando na realização da tarefa e sem recorrer aos blocos padrão, o momento das justificações foi, inicialmente, sempre feito em conjunto. AF3 recorreu ao material na segunda adição, depois de já ter registado o resultado e que este era inferior à unidade, para explicarem por que se tratava de um resultado inferior à unidade. De salientar que, em todas as justificações que AF3 e AF4 deram, acerca da comparação do resultado com a unidade, sempre relacionaram o numerador com o denominador. Consideramos ainda importante salientar que AF4, aquando da previsão do resultado da soma de dois sextos com quatro sextos, associou os seis sextos à unidade, tendo escrito na previsão dos resultados “uma unidade ou $\frac{6}{6}$ ”.

Achamos também interessante que, para a obtenção da soma de $\frac{3}{3}$ com $\frac{4}{3}$, AF3, depois de representar os $\frac{3}{3}$ (três paralelogramos sobrepostos ao hexágono), usou imediatamente dois hexágonos e só depois sobrepôs sobre estes as peças que faltavam - os quatro paralelogramos. Este procedimento indica-nos que AF3 estava mentalmente a visualizar que $\frac{4}{3}$ era superior a uma unidade e inferior a duas unidades, pelo que necessitaria de dois hexágonos para sobrepor os sete paralelogramos, embora estes não fossem sobrepostos na sua totalidade.

As previsões feitas sempre estiveram corretas mas AF3 verificou em todos os casos a veracidade da sua previsão recorrendo ao material ao contrário de AF4 que nunca o fez.

Apenas na realização da penúltima adição ($\frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6}$) é que o par trabalhou em conjunto, tendo usado as peças dos blocos padrão. De referir que, neste momento, a professora questionou se poderiam transformar a fração imprópria $\frac{9}{6}$ num numeral misto. AF4 disse logo, sem hesitar,

que $\frac{9}{6}$ era “uma unidade mais três sextos”. Depois de terem registado o numeral misto $1\frac{3}{6}$, a professora questionou-os se este era o único caso em que tinham obtido um resultado superior à unidade. Ambos recordaram-se da valor da soma $\frac{7}{3}$ obtida anteriormente, tendo-a representado utilizando os blocos padrão e, sem qualquer hesitação, disseram $2\frac{1}{3}$.

A adição $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$, que não possibilitava o uso dos blocos padrão, foi realizada com sucesso e sem qualquer dificuldade pelo par. A descoberta da regra para adicionar e subtrair frações com denominadores iguais foi conseguida, como se constata na forma como resolveram as tarefas. O par registou o que aprendeu para a subtração de frações com o mesmo denominador (ver Figura 18).

2.1. Escreve a regra que te permite subtrair frações com o mesmo denominador.

Subtrair os numeradores e manter os denominadores.

Figura 18. Regra para Subtração de Frações com o Mesmo Denominador

O par de alunos AM5 e AM6 foi o único par que, por iniciativa própria, não começou a usar os blocos padrão, apesar de o poderem fazer. A procura das respostas às três primeiras adições, resolvidas com todos os alunos, foi provavelmente suficiente para se aperceberem da regra operatória da adição de frações com denominadores iguais.

Foi possível ouvirmos o seguinte diálogo, aquando do início da tarefa e referindo-se à primeira adição ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$):

AM6: “É tão fácil! É dois quartos.”

AM5: “Claro que é dois quartos. Não, não é!”

AM6 (apontando para a primeira adição): “É, é!. Este aqui?”

AM5 (rodeando os denominadores): “Nunca se soma isto. Isto fica igual por isso fica...” e escreve dois meios.

AM6: “O resultado é dois dois.”

Prof.: “Dois dois?”, querendo alertar o aluno para a necessidade de utilizar uma linguagem rigorosa na leitura de frações.

AM6: “Dois meios. Uma unidade.”

O valor da soma na segunda adição (ver Figura19) foi alcançado também sem recurso aos blocos padrão. Os alunos referiram não precisar recorrer ao material, tendo obtido o resultado $\frac{2}{3}$

e identificado que o resultado era inferior à unidade. Porém, para a explicação do motivo de se tratar de uma fração que representa um número inferior à unidade, o par recorreu ao material, que revelou ser um auxílio para os alunos apresentarem a justificação (ver Figura 19).

• $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

O resultado obtido $\frac{2}{3}$ é inferior (inferior/igual/superior) à unidade.
 Explica porquê. Porque falta uma peça para completar a unidade.

Figura 19. Explicação do par AM5 e AM6.

De salientar que AM6 poderia ter-se referido à peça azul que faltava, mas não o fez. Antes, usou a linguagem matemática que consideramos muito positivo.

Todas as previsões dos resultados feitas pelos alunos foram corretas, tendo apenas recorrido ao material para confirmar a validade das previsões. No entanto, verificamos uma alteração ao nível do comportamento do par a partir do momento em que os alunos se aperceberam da regra operatória para adição de frações com o mesmo denominador. Os alunos continuaram a executar corretamente a tarefa, no entanto por considerarem a tarefa demasiado simples, conforme nos apercebemos após observação das gravações efetuadas, deixaram de prestar a atenção desejada na realização da mesma, como foi visível nas respostas pouco refletidas que davam quando solicitados pela professora.

Ora, uma vez que as adições cujo resultado era uma fração imprópria não foram, por iniciativa dos alunos, convertidos em numerais mistos, a professora incentivou a conversão destas no numeral misto respetivo.

Relativamente à sexta adição cujo resultado deu $\frac{9}{6}$ (ver Figura 20) estabeleceu-se o diálogo que, a seguir, apresentamos.



Figura 20. Representação dos Nove Sextos Feita por AM5 e AM6

Prof.: “Se a soma é superior à unidade, posso representá-la na forma de numeral misto, não posso?”

AM5: “Pode, dois nove sextos.”

O aluno usou dois hexágonos, mas logo verificou que a soma obtida, já representada com os blocos padrão, não coincidia como numeral misto $2\frac{9}{6}$, tendo afastado os hexágonos e focalizado a sua atenção nos $\frac{9}{6}$ representados.

Prof.: “Observando os nove sextos vêς duas unidades mais nove sextos?”

AM6: “Não, vejo mais três sextos.”

Prof.: “Quantas unidades completas estão representadas?”

AM6: “Uma.”

AM5: “Ah, uma e nove sextos.”

Prof.: “Nove sextos?”

AM6: “Já sei...uma unidade e...”

AM5: “Um três sextos.”

Prof.: “Muito bem, AM5. São agora capazes de transformar os três sextos numa fração equivalente?”

AM6 disse que sim e, por iniciativa própria, recorreu aos blocos padrão e substituiu os três triângulos por um paralelogramo e um triângulo, o que dificultou a resposta à pergunta.

Prof.: “Consegues transformar o que fizeste por uma só cor?”

AM6: “Sim!”, disse substituindo as peças usadas por um trapézio.

Prof.: “Que numeral misto está agora representado equivalente a um e três sextos?”

AM6: “Seis sextos e um meio.”

Prof.: “É o que está representado, é verdade, mas transforma num numeral misto.”

AM6: “Ah! Uma unidade e um meio.”

Os alunos continuaram a realização da ficha em conjunto. Não manifestaram dificuldades na resolução da adição que não possibilitava a manipulação do material pois já tinham descoberto, compreendido e interiorizado a regra para adição de frações (ver Figura 21).

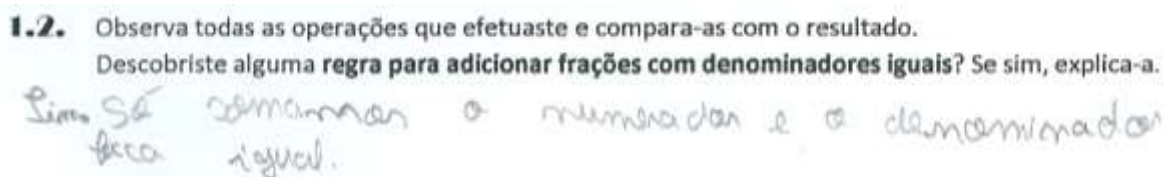


Figura 21. Regra para Adição de Frações com o Mesmo Denominador (AM5 e AM6)

O mesmo aconteceu na subtração de frações. Os alunos manifestaram compreender e dominar a adição e subtração de frações com o mesmo denominador, tendo resolvido corretamente todas as expressões do terceiro exercício. Aliás, esta evidência foi constatada em todos os pares.

Relativamente ao quarto exercício (ver Apêndice D), mais propriamente a primeira alínea, em que se pretendia que, dos resultados obtidos após cálculo das expressões numéricas do terceiro exercício, os alunos identificassem as frações que representavam números superiores à unidade, não se sentiram dificuldades. No entanto, a dificuldade surgiu aquando da transformação das frações impróprias nos numerais mistos correspondentes, através da sua representação numa malha isométrica com a qual ainda não estavam muito familiarizados. Embora esta tivesse sido disponibilizada em todas as aulas, os alunos nunca manifestaram interesse em a usar. Apesar disso, esta dificuldade foi rapidamente ultrapassada após a primeira representação, neste caso, $\frac{10}{6}$.

Analisando o trabalho de AM5 e AM6, constatamos a importância que a representação dos blocos padrão na malha isométrica pode ter na apresentação de frações equivalentes. O par AM5 e AM6 representou $\frac{7}{2}$ com os blocos padrão (sete trapézios) e, de seguida, na malha isométrica, conforme representado na Figura 22.

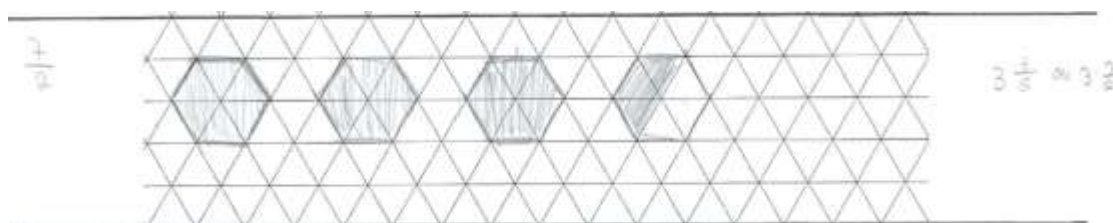


Figura 22. Representação de Sete Meios, por AM5 e AM6, na Malha Isométrica

Apesar de terem usado os trapézios na representação dos sete meios, a primeira resposta que deram, após representação na malha isométrica foi $3\frac{3}{6}$ em vez de $3\frac{1}{2}$ que considerávamos a resposta mais esperada. Apontando para a representação feita com os blocos padrão, AM5 afirmou: “*Isto equivale a três unidades*” – referindo-se aos três hexágonos constituídos por seis trapézios – “*e isto equivale a três sextos*” – apontando para o trapézio que representa um meio da unidade. Na nossa opinião os $\frac{3}{6}$ surgiram como resposta porque, na malha isométrica, os hexágonos que desenharam encontravam-se divididos em seis partes iguais, o que os levou a responder primeiramente $3\frac{3}{6}$ em vez de $3\frac{1}{2}$. Foi mais uma excelente oportunidade de recordarem a noção de frações equivalentes.

Foi interessante notar que, na impossibilidade de representar $\frac{6}{4}$ (um dos resultados indicados na primeira alínea do quarto exercício do guião da tarefa) com os blocos padrão, AM5 e AM6 avançaram para a fração seguinte, $\frac{5}{3}$. AM6 começou a representar esta fração com os blocos padrão e, tendo completado uma unidade, disse: *“Uma unidade...e agora preciso de mais dois terços.”*

AM5: *“Então temos de desenhar um hexágono e ... pintar mais quatro triângulos.”*
Apontando para a malha continuou: *“Aqui é mais fácil.”*

Prof.: *“Quatro triângulos? Por que dizes isso?”*

AM5: *“Porque cada paralelogramo equivale a dois triângulos. Porque um terço é metade de um sexto.”*

Prof.: *“Um terço é o dobro de um sexto.”*

AM5: *“É verdade. É isso, o dobro. Mas, professora, AM6 não se acredita que temos de pintar quatro triângulos além da unidade.”*

Prof. (sobrepondo triângulos sobre os dois paralelogramos): *“Com os blocos padrão podes representar os dois paralelogramos por que outras peças? Observa.”*

AM6: *“Quatro triângulos.”*

Prof.: *“Então como poderei representar esta fração na forma de numeral misto?”*

AM5: *“Dois quatro sextos.”*

Prof.: *“Representaste duas unidades completas?”*

AM5: *“Não! Um e quatro sextos. Enganei-me.”*

Prof.: *“Considerando agora a fração representada com os paralelogramos, posso dizer que um e quatro sextos é equivalente a ...”*

AM5 e AM6: *“Uma unidade e dois terços.”*

Seguiram-se exercícios semelhantes para consolidação, mas sem o recurso a blocos padrão e considerando unidades diferentes do hexágono. Estes exercícios permitiram aos alunos relacionar a divisão da unidade com o denominador da fração, quer da fração imprópria quer da parte fracionária do numeral misto, bem como o estabelecimento de relações entre o denominador da fração imprópria e o denominador da parte fracionária do numeral misto. Apercebemo-nos também que, no caso destes alunos, a representação de frações na forma de numerais mistos é mais facilmente compreendida do que as frações impróprias.

No que se refere ao trabalho desenvolvido pelo grupo de alunos AF1, AF3 e AF4, com a ajuda da professora, verificamos que, depois de terem transformado $\frac{10}{6}$ num numeral misto correspondente, quando se tratou de transformar os $\frac{7}{2}$, AF4 preocupou-se apenas em representar

esta fração na malha isométrica. Inicialmente, pintou um hexágono constituído por seis triângulos mais um triângulo, o que revela que apenas teve em consideração o numerador da fração, tendo desprezado o facto de que a unidade, neste caso o hexágono, teria de estar dividido em duas partes iguais. AF3 seguiu as instruções dadas e ajudou AF4 a compreender esta situação. Ao explicar, verificamos que não necessitou de sobrepor os trapézios sobre os hexágonos, no entanto, uma vez que AF1 estava a dar indícios de que não estava a compreender, a professora pediu que AF3 explicasse novamente o seu raciocínio usando os trapézios. A Figura 23 indica a forma como procedeu.



Figura 23. Representação de Sete Meios, por AF3, com os Blocos Padrão

A partir da representação apresentada acima, o grupo facilmente identificou o numeral misto. Verificamos que, diferentemente do outro par, este grupo não representou o numeral misto tendo em conta a divisão da unidade em seis partes iguais que a malha isométrica permite visualizar.

Quando surgiu a fração seis quartos, o grupo insistiu em representá-la com os blocos padrão, mas depois de recordado que as peças apenas permitem dividir a unidade em duas, três ou seis partes iguais, houve necessidade de representar os seis quartos usando outra unidade. A professora recorreu a um quadrado que dividiu em quatro partes iguais e orientou o grupo para a compreensão da resposta.

O grupo continuou a realização dos exercícios de consolidação e, à semelhança do par constituído por AM5 e AM6, a representação dos numerais mistos no quadriculado, bem como na malha isométrica, revelou ser mais fácil. Foi evidente uma maior dificuldade em transformar numerais mistos, mesmo que representados pictoricamente, em frações impróprias, pelo que, na representação pictórica de frações impróprias os alunos sempre tiveram de solicitar a ajuda e orientação da professora.

A nosso ver, estes exercícios que os alunos realizaram poderão ser uma mais-valia se frequentemente resolvidos com recurso aos blocos padrão ou às malhas, pois, permitirão que os

alunos consolidem estas aprendizagens pelas relações que vão estabelecendo e melhorem a compreensão das frações impróprias, considerado por muitos, um assunto de complexidade elevada. Além disso, a utilização de várias formas de representação pictórica, por permitirem a visualização das frações em causa, ajudaram os alunos a compreender o seu significado e, consequentemente, a sentirem-se mais confiantes em usar as frações. Constatamos que o incentivo ao uso de representações pictóricas, terá contribuído para que, gradualmente, superassem as dificuldades que sentiram inicialmente em exprimir a sua forma de pensar.

No que se refere a esta aula, de um modo geral, apercebemo-nos que, embora a malha isométrica estivesse disponível aos alunos, estes não a usaram nas primeira e segunda questões. Pensamos que isto se deve ao facto de o material concreto se ter revelado suficiente para a resolução das tarefas, para além de que, em alguns casos, estes pouco foram utilizados para resolver as adições e subtrações. Para alguns alunos bastaram as três explorações feitas em grande grupo para descobrirem a regra operatória, verificando-se uma rápida transição do concreto para o abstrato.

No decurso da aula, apercebemo-nos de algumas vantagens do material, nomeadamente no facto de auxiliar a memorização. O material permitiu concretizar e visualizar as frações, o que, a nosso ver, é um aspeto positivo na abordagem a este conteúdo tão abstrato, conforme várias vezes referido na fundamentação teórica.

Os blocos padrão também deram o seu contributo no desenvolvimento da comunicação matemática. Os alunos foram, gradualmente, apropriando-se da linguagem adequada às frações, tornando-se cada vez mais frequente e aumentando a confiança dos alunos na sua utilização. A partir do momento em que os alunos associaram as peças dos blocos padrão à fração que representam, quando o hexágono era considerada a unidade, os alunos deixaram de usar a cor, o tamanho ou a forma geométrica que identificam cada uma das peças e passaram a utilizar a linguagem associada às frações, o que, quanto a nós, contribuiu para que os alunos atribuíssem significado às frações. Além disso, a este nível, notámos ainda que este material revelou-se um auxílio para os alunos superarem a falta de segurança que sentiram perante diferentes situações, a título de exemplo, aquando da confirmação das previsões dos resultados e no momento da justificação através de palavras. Aliás, os blocos padrão foram muito importantes pois, por possibilitar aos alunos a visualização das frações em causa, foram um auxílio para a justificação, por meio de palavras, das suas afirmações.

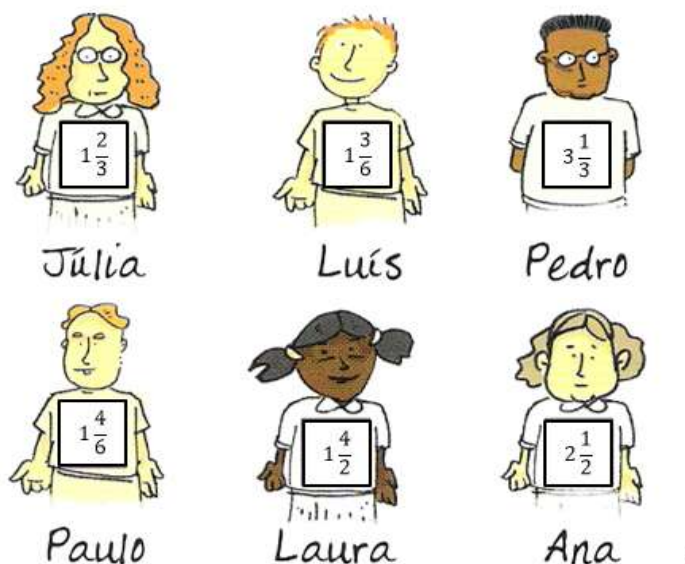
Foi interessante notar a forma como, nesta exploração, com o material e em grande grupo, a noção de numeral misto surgiu muito naturalmente quando representámos frações superiores à unidade, com os blocos padrão, embora esta noção tivesse sido abordada muito superficialmente numa situação anterior. Embora o foco desta situação formativa fosse a adição e subtração de

frações, foi possível constatar que os blocos padrão são um excelente recurso que permitem, aos alunos, associarem uma fração imprópria ao numeral misto respetivo. Os blocos padrão facilitam a perceção das frações próprias e impróprias e, no caso das últimas, de as transformarem num numeral misto pois visualizam rapidamente a parte inteira e a parte fracionária do numeral.

Tarefa 3 – Comparação de Numerais Mistos

A terceira tarefa que propusemos aos alunos surgiu da necessidade de melhor compreenderem a noção de numeral misto. Com esta atividade pretendíamos que os alunos tomassem consciência que, para compararem numerais mistos, deveriam, primeiramente, comparar a parte inteira e só depois a parte fracionária. Na Figura 24, apresentamos a primeira questão proposta aos alunos.

1. Foi pedido a seis alunos do 5ºJ que escrevessem seis numerais mistos.




1.1. Considera  a unidade.
Utiliza os blocos padrão e representa as respostas dadas por cada um dos alunos.

Figura 24. Numerais Representados na Tarefa

De um modo geral, a tarefa foi muito bem recebida por todos, para além de que foi ao encontro dos objetivos que nos propusemos alcançar. Os numerais que os alunos compararam foram todos passíveis de ser representados com os blocos padrão o que, quanto a nós, facilitou muito a realização, de forma autónoma, da tarefa bem como o alcance dos objetivos propostos.

AF2 não revelou dificuldades na representação, com os blocos padrão, dos numerais apresentados (ver Figura 25).

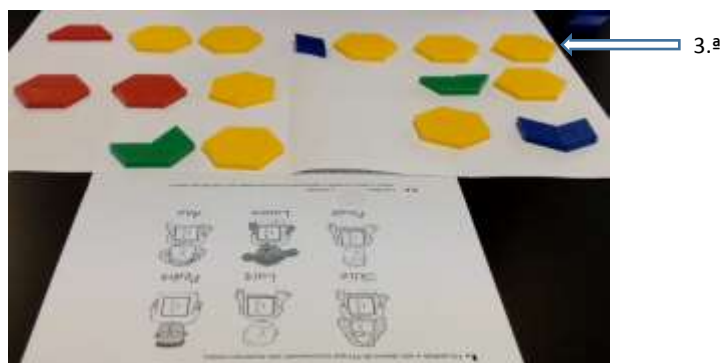


Figura 25. Representação, com os Blocos Padrão, dos Numerais Apresentados, por AF2

De seguida, AF2 prosseguiu para a segunda alínea, na qual se pedia que justificasse a afirmação “A Júlia diz que uma das respostas dadas não é um numeral misto. Concordas? Porquê?”.

Nesta altura, houve necessidade de recordar o que são numerais mistos. AF2 referiu que um numeral misto *“é completar uma unidade e os outros que estão sem completar uma unidade”*. Por isso, quando observou atentamente a parte inteira e a parte fracionária das representações feitas, imediatamente percebeu que a representação da Laura não correspondia a um numeral misto por não possuir parte fracionária. AF2 disse que a Laura representou *“três unidades”*.

A professora acompanhou a resolução da terceira alínea: “Quem representou o maior número?”.

AF2 respondeu sem hesitação e apontou para a terceira representação da Figura 25.

Prof.: *“Por que respondes assim?”*

AF2: *“Porque completou três unidades e mais um bocado...um terço.”*

Para concluir a tarefa, AF2 foi solicitado a concluir a tarefa respondendo à última questão que constituía em ordenar as representações numa sequência crescente. Fê-lo, iniciando com a representação da Júlia e terminou com a representação da Laura, (ver Figura 26).



Figura 26. Primeira Proposta de Resolução da Última Questão por AF2.

Prof. (apontando para a representação da Laura): *“Há duas situações que não compreendo. Primeiro, quantas unidades aqui estão representadas?”*

Esta pergunta foi suficiente para AF2 fazer as alterações apresentadas na Figura 27.

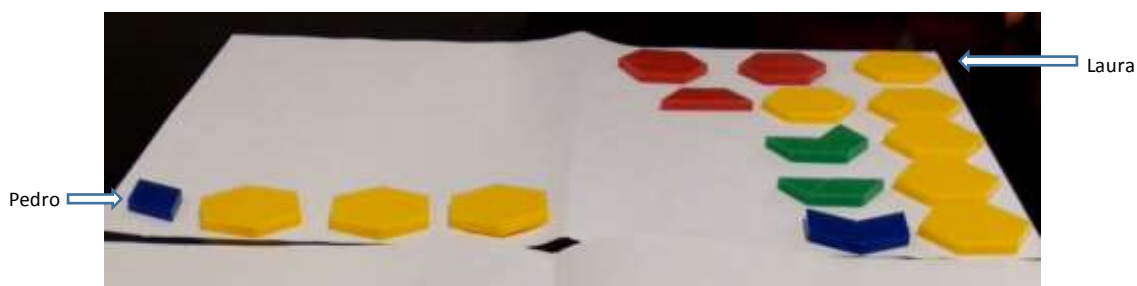


Figura 27. Segunda Proposta de Resolução da Última Questão por AF2.

Prof.: *“Podes explicar-me porque fizeste esta alteração?”*

AF2 (referindo-se primeiro à representação da Laura e depois à representação do Pedro apresentadas na Figura 27): *“Porque aqui tenho só três unidades e aqui tenho três unidades mais um bocado.”*

Prof.: *“Concordo. O Pedro representou três unidades e um terço. Mas continuo a não concordar plenamente contigo. Observa novamente as outras representações.”*

AF2 mudou imediatamente a representação da Júlia pela do Luís, ambas apresentadas na Figura 26, conforme explícito na Figura 28.



Figura 28. Reajuste Feito por AF2

Depois de a professora ter questionado sobre o motivo de o ter feito, AF2 respondeu: *“Porque aqui”*, referindo-se à representação do Luís na Figura 28, *“tenho uma unidade e metade”*. *“E aqui”*, indicando para a representação da Júlia da mesma figura, *“tenho uma unidade e mais que metade”*.

AF2 reparou, através de perguntas que lhe foram colocadas, que o terço que faltava, na representação da Júlia (ver Figura 28), para representar completamente dois hexágonos era

equivalente aos dois sextos que faltavam na representação do Paulo (ver Figura 28). Depois desta resposta, a professora ajudou AF2 a compreender que não se tratam de representações iguais mas equivalentes.

Apresentamos, de seguida, o último reajuste feito por AF2, na Figura 29.

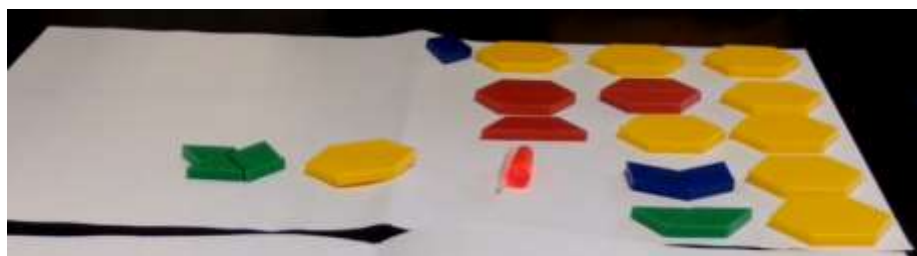


Figura 29. Último Reajuste Feito por AF2

Relativamente ao grupo de trabalho constituído por AF1, AF3 e AF4, os alunos não revelaram dificuldades ao nível da representação das respostas dos seis alunos que constavam do enunciado. Foi interessante notar que, aquando da representação de $1\frac{4}{2}$, AF1 achou estranho, pelo que enfatizou que teriam de representar quatro meios.

AF3 respondeu imediatamente: *“Quem disse? É três unidades!”*

Apresentamos, na Figura 30, a representação feita pelo grupo.



Figura 30. Representação dos Dados do Enunciado por AF1, AF3 e AF4

Aquando da realização da segunda alínea, na qual se pedia que justificasse a afirmação “A Júlia diz que uma das respostas dadas não é um numeral misto. Concordas? Porquê?”, AF4 não teve dúvidas em responder que a Laura não tinha feito a representação de um numeral misto. Quando a professora questionou sobre este facto, o grupo referiu que o numeral misto teria de

ter representado uma parte inteira e uma parte fracionária. AF4 respondeu de seguida: *“Este, porque só tenho três unidades”*, apontando para a representação da Laura.

Depois de lerem a terceira alínea, na qual teriam de indicar o nome do aluno que representou o maior número, ouvimos a resposta e a respetiva justificação.

AF4 (apontando para a representação referente ao numeral misto do Pedro representado na Figura 30): *“Quem representou o maior número? Eu acho que foi o Pedro. Porque olha...três unidades. De resto só tem uma e aqui”*, indicando a representação referente à Ana (ver Figura 30), *“só tem duas. Por isso, eu acho que foi o Pedro.”*

Solicitaram a ajuda da professora apenas para confirmarem a validade da resposta e do raciocínio.

Na ordenação dos numerais mistos numa sequência crescente, o grupo resolveu o exercício na presença da professora.

Prof.: *“Quem representou o menor número?”*

AF4: *“O menor?”*

AF3: *“Foi o Luís.”*

AF4: *“Eu acho que foi a Júlia.”*

AF1: *“O Luís.”*

AF4: *“A Júlia tem uma unidade e dois terços e o Luís uma unidade e três sextos. O da Júlia é menor.”*

A professora aconselhou AF4 a substituir os dois terços representados por paralelogramos por triângulos. AF4 identificou imediatamente que precisaria de quatro triângulos, o que lhe permitiu concluir que um e três sextos é menor que um e dois terços.

OS alunos continuaram a resolver o exercício.

AF4: *“Primeiro é o Luís, depois a Júlia.”*

AF3: *“Depois o Paulo.”*

Prof.: *“Observem a representação da Júlia e do Paulo com mais atenção. Não notam nada?”*

AF3: *“É igual!”*

AF4: *“É igual. Só que estão ao contrário”*, referindo-se à posição das peças.

Os alunos aperceberam-se que dois terços e quatro sextos são frações equivalentes.

AF3: *“Júlia e Paulo e depois Laura e depois Ana. Não...espera. Enganei-me.”*

Depois de a professora remover as peças dos alunos que o grupo já tinha referido, de modo a facilitar a comparação das representações, foi possível ouvirmos o seguinte diálogo:

Prof.: *“Dos que restam, quem tem representado o menor número?”*

Todos: *“A Ana.”*

AF3: *“Depois, a Laura.”*

AF3: *"E o Pedro."*

No caso do par de alunos AM5 e AM6, achamos interessante e curioso o diálogo que os alunos estabeleceram, depois de terem identificado a Laura como a resposta à segunda alínea ("A Júlia diz que uma das respostas dadas não é um numeral misto. Concordas? Porquê?").

AM6: *"Eu sei que é a Laura."*

AM5: *"Então diz porquê... Claro! Porque o numerador é maior que o denominador. E, para ser numeral misto, o denominador tem que ser maior do que o numerador."*

Prof.: *"Quanto é quatro a dividir por dois?"*

AM5: *"Dois. Já sei AM6. Num numeral misto o numerador tem de ser menor do que o denominador."*

AM6: *"Não! Tipo...quatro terços é um numeral misto."*

AM5: *"Não."*

Prof.: *"Pois não. É uma fração imprópria, não é?"*

AM5 e AM6: *"É."*

AM6: *"Mas é numeral misto!"*

Prof.: *"Penso que sei por que dizes isso..."*

AM6: *"É uma unidade mais quatro terços... não. Uma unidade mais um terço."*

A professora foi solicitada pelo outro grupo de trabalho e, quando voltou, os alunos ainda não sabiam como justificar corretamente a resposta.

Prof.: *"Qual é a vossa dúvida."*

AM5: *"Para mim não é dúvida. Eu estou a dizer que para ser numeral misto o numerador tem de ser menor que o denominador."*

Prof.: *"Porquê? Ora divide quatro por dois."*

AM5: *"Dá dois."*

Prof.: *"Ora, num numeral misto não tem de estar representada uma parte inteira e uma parte fracionária?"*

AM6: *"Sim."*

Prof.: *"No caso da Júlia, que é a vossa resposta, quantas partes inteiras há?"*

AM6: *"Três."*

Prof.: *"E qual é a parte fracionária?"*

AM6: *"Nenhuma."*

Prof.: *"Então podemos afirmar que a Júlia representou um numeral misto?"*

AM6: *"Não."*

Apresentamos, na Figura 31, a resposta dada pelos alunos à segunda alínea.

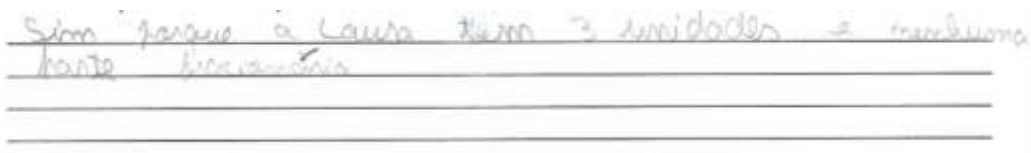


Figura 31. Resposta Dada por AM5 e AM6 à Segunda Alínea

Na resolução da terceira alínea, ambos os alunos foram unânimes em considerar que o Pedro tinha representado o maior número. Ao resolverem a quarta e última alínea, observamos o diálogo que apresentamos de seguida.

AM5 (apontando para a segunda representação da Figura 32): *“Temos de os colocar do menor para o maior. Achas que a primeira é menor? Não será antes esta?”*

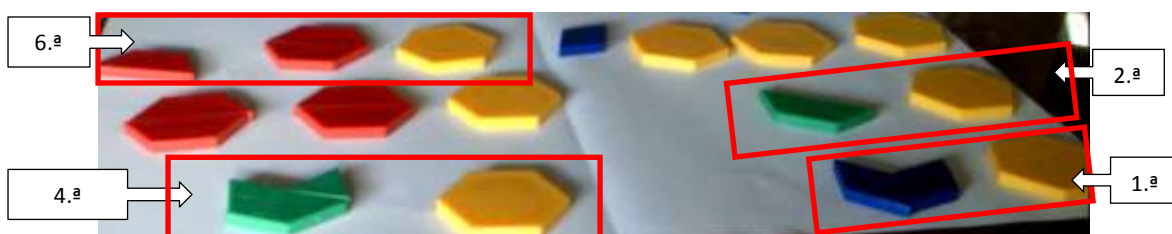


Figura 32. Resposta Dada por AM5 e AM6 à Segunda Alínea

AM6 (indicando o hexágono da primeira representação): *“Eu só estava a olhar para aqui... aponta aí... o menor é o Luís (segunda representação da Figura 32).”*

AM5 (referindo-se à primeira representação): *“A seguir ao Luís ... é esta.”*

AM6: *“A Júlia”,* referindo-se à primeira representação da Figura 32.

AM6 (referindo-se à quarta representação): *“Mas o Paulo também é.”*

AM5: *“Pomos a seguir o Paulo. E a seguir ao Paulo? Quem é AM6?”*

AM6 (referindo-se à sexta representação): *“É a Ana, depois é a Laura e depois é o Pedro”,* referindo-se, respetivamente, às sexta, quinta e terceira representações da Figura 32.

A professora retirou a segunda representação, de modo a facilitar a comparação das restantes.

AM6 (referindo-se às primeira e quarta representações): *“Estes dois são iguais.”*

Prof.: *“Concordo. E porquê?”*

AM6: *“Porque só falta um terço para completar.”*

Prof.: *“Verdade. Na primeira só falta completar um terço e nesta (quarta representação) só falta preencher dois sextos que são equivalentes a um terço.”*

AM5: *“Então, como fazemos para escrever? São iguais.”*

Prof.: *“Separa-os com ponto e vírgula, por exemplo. Posso retirá-los?”*

De seguida, os alunos continuaram o diálogo, tendo ordenado as representações que restaram numa sequência crescente, de modo correto e sem dificuldades, tendo sempre começado por comparar as partes inteiras representadas.

Após observação e análise do desempenho de cada grupo de trabalho durante a aula foi, mais uma vez, possível observar que os blocos padrão foram um excelente recurso para a compreensão da noção de frações equivalentes e para a compreensão do significado de um numeral misto. Com esta tarefa, os alunos tiveram a oportunidade de rever noções abordadas na aula anterior e consolidá-las, para além de que o exercício de comparação de numerais mistos ajudou-os, na nossa opinião, a melhor compreender o seu significado pois, de forma quase que intuitiva, os alunos “visualizaram”, a partir do material, a necessidade de compararem primeiro a parte inteira e só depois a parte fracionária.

Pensamos ainda que esta tarefa contribuiu novamente para os alunos desenvolverem a comunicação matemática, uma vez que, pelos diálogos presenciados, estes tornaram-se mais fluentes na linguagem de frações e de numerais mistos. Conforme referido na análise da segunda tarefa, os alunos deixaram de identificar as peças pelas suas características físicas e geométricas, associando-as às frações que representavam em comparação com a unidade que estava a ser usada, neste caso, o hexágono.

Tarefa 4 – Adição e Subtração de Frações com Denominadores Diferentes

A aula iniciou-se com, a resolução em grande grupo, da primeira adição. De referir que, para a resolução da ficha de trabalho, os alunos poderiam usar os blocos padrão e uma malha isométrica, com a qual já estavam familiarizados, associada a cada uma das operações.

Quando a professora solicitou que cada par representasse as parcelas $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, todos os pares efetuaram corretamente com os blocos padrão (ver Figura 33).

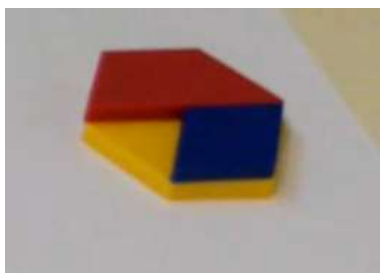


Figura 33. Representação da Primeira Adição Feita por AF3 e AF4

Mas, quando os alunos foram solicitados a exprimirem a soma surgiram algumas dificuldades por dois motivos: a soma estava representada por peças diferentes e, consequentemente, a unidade estava dividida em partes desiguais.

Os pares foram incentivados a encontrarem a resposta a partilharem o seu raciocínio com os restantes alunos.

AM6: *“Professora, estava aqui a dizer que só faltava um sexto para completar a unidade.”*

Prof.: *“Se falta um sexto para completar a unidade, que parte da unidade está então representada?”*

AM5 e AM6: *“Falta um sexto...então...cinco sextos.”*

Prof.: *“Interessante...mas eu não consigo ver a unidade dividida em seis partes iguais! Como é que podemos estar certos disso?”*

Os alunos estavam com alguma dificuldade em perceber o que se pretendia, pelo que a professora perguntou se seria possível substituir as peças por outras de uma só cor.

AM5: *“Eu consigo.”*

AF4: *“Nós conseguimos. Temos de usar os triângulos, certo?”*

Todos os pares substituíram a representação por triângulos (ver na Figura 34).



Figura 34. Substituição Feita por AF3 e AF4

Prof.: *“Então podemos afirmar que a soma de um meio com um terço é...”*

AF3 e AF4: *“Cinco sextos.”*

Tendo todos os pares compreendido a soma obtida, a professora registou a adição e a soma no quadro, recordando que os alunos haviam substituído um terço e um meio por frações equivalentes, respetivamente, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$, conforme referido por AF1 e AF2.

A professora pediu que cada par calculasse $\frac{2}{6} + \frac{1}{3}$ ao que AM5 respondeu imediatamente que a soma era $\frac{2}{3}$. Foi interessante notar que o aluno não precisou de sobrepor uma peça azul sobre as peças verdes, nem mesmo o par de alunos AF1 e AF2 o fez. Aliás, AF2 pensou no número

de triângulos, tendo contado quatro. No entanto, o par de alunos AF3 e AF4, mais propriamente AF4, sobrepôs sobre a peça azul, duas peças verdes, conforme representado na Figura 35.

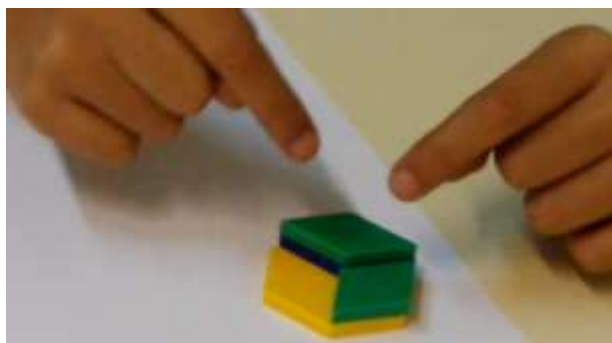


Figura 35. Substituição, Feita por AF4, de Um Terço por Dois Sextos

Prof.: “AM5 diz que o resultado final é dois terços. Por que dizes isso?”

AM5: “Porque podemos transformar estes dois sextos num terço.”

Prof.: “Concordam?”

AF2 e AF4: “Sim. E há outra.”

A professora foi registando no quadro que $\frac{2}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{3}$ de modo a compreenderem o procedimento para o cálculo numérico de adições de frações com denominadores diferentes. De seguida, perguntou qual a soma de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, ao que os alunos responderam de forma unânime $\frac{2}{3}$.

No que concerne à outra forma encontrada por AF2 e AF4, AF4 explicou que “na peça azul, um terço, podemos substituir por dois sextos...e dá quatro sextos”, o que ajudou AM5 a concordar com este raciocínio.

Apesar de se terem obtido resultados diferentes, designadamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, os alunos identificaram-nos como sendo frações equivalentes. De seguida, os alunos registaram estes dois processos de resolução e continuaram a resolver a tarefa proposta.

Na adição de $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, AF2 disse imediatamente que não conseguia por ter dificuldades em colocar as peças de modo a completar a unidade. Mas, depois de a professora ajudar o par a organizar as peças, conforme apresentamos na Figura 36, AF2 apercebeu-se que o resultado seria superior à unidade.



Figura 36. Representação das Duas Parcelas com os Blocos Padrão

Para ajudar AF1 a compreender este facto, a professora sobrepôs o hexágono sobre as peças representadas na figura anterior, conforme representado na Figura 37.



Figura 37. Sobreposição do Hexágono Sobre a Unidade

Este passo foi muito importante pois AF2 identificou imediatamente o resultado: *“uma unidade mais um sexto”*. Mais uma vez, verificamos que a noção de numeral misto surgiu de forma muito natural.

A professora sugeriu-lhes que apresentassem também o resultado na forma de fração imprópria, a fim de mais facilmente descobrirem as regras da adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Manifestando algumas dificuldades, a professora sugeriu que substituíssem a representação feita por peças de uma só cor. Após algumas tentativas, AF2 percebeu que só poderia fazê-lo usando os triângulos, e depois de novamente sobreporem o hexágono sobre a unidade (ver Figura 38), foram capazes de identificar a soma, neste caso, sete sextos.

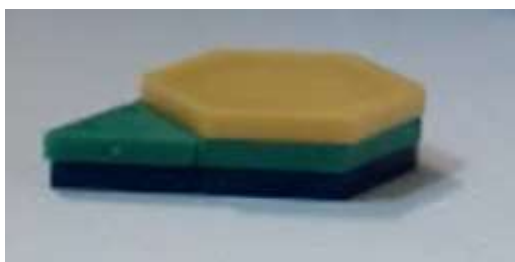


Figura 38. Nova Sobreposição Sobre a Representação da Soma

Novamente, no sentido de ajudar os alunos a compreenderem o procedimento para o cálculo numérico das adições de frações com denominadores diferentes, a professora incentivou o par a substituir cada uma das parcelas pelas frações equivalentes, tendo os alunos substituído, na expressão, $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{6}$ e $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{6}$. Este processo permitiu-lhes, assim, adicionar mentalmente $\frac{4}{6}$ com $\frac{3}{6}$, confirmando as conclusões a que chegaram aquando da manipulação dos blocos padrão.

A determinação do valor desta adição também causou alguma estranheza ao par de alunos AF3 e AF4 pela forma representada (ver Figura 36). No entanto, foram mais rápidos em perceber que só seria possível usar triângulos para representar a soma de uma só cor. Houve também necessidade de a professora lhes sugerir a sobreposição do hexágono sobre a representação do valor obtido para mais facilmente determinarem a soma. Verificamos, mais uma vez, que, de forma imediata e muito natural, AF3 respondeu *“uma unidade e um sexto”*, enquanto AF4 ainda estava a contar os triângulos. Foi feito um percurso semelhante ao realizado com o par anterior, tendo também compreendido este processo de adição.

Relativamente ao par de alunos AM5 e AM6, logo após a representação das parcelas da adição com os blocos padrão, AM5 apercebeu-se que, para obter a soma, teriam de transformar a representação com triângulos. Além disso, sem recorrer concretamente aos triângulos, AM5 disse que o resultado seria $\frac{7}{6}$ e explicou a AM6 que o trapézio correspondia a $\frac{3}{6}$ e os dois paralelogramos a $\frac{4}{6}$, pelo que o resultado teria de ser $\frac{7}{6}$. Para ajudar AM6 a perceber o seu raciocínio, AM5 sobrepôs sete triângulos sobre a representação. Apenas houve intervenção por parte da professora quando lhes solicitou que apresentassem o resultado na forma de numeral misto para além da fração imprópria. Pensamos que não o fizeram de forma tão imediata e espontânea quanto os restantes alunos por não terem sobreposto o hexágono sobre a representação inicial. Nesta adição, os alunos não revelaram quaisquer dificuldades. A apresentação dos cálculos, por fases, da adição foi também feita com sucesso e sem intervenção da professora.

O par avançou, de forma autónoma, para a resolução da quarta adição $\left(\frac{10}{6} + \frac{1}{2}\right)$. Foi interessante observar que, enquanto AM6 representava as duas parcelas com os blocos padrão (ver Figura 39 à esquerda) AM5 interveio e substituiu o trapézio por três triângulos (ver Figura 39 à direita).



Figura 39. Representação por AM6 (esquerda) e por AM5 (direita)

Terminada esta fase, AM5 afirmou: *“duas unidades e um sexto. A resposta é dois e um sexto”*. Aquando da apresentação das fases da resolução da adição, ouvimos AM5 a explicar: *“Dez sextos...fica igual e um meio transformamos em três sextos, OK? O resultado dá treze sextos ou dois e um sexto.”*

Na mesma adição, AF3 e AF4 experimentaram várias estratégias, e sentiram algumas dificuldades em adicionar as representações apresentadas na Figura 40, por não recordarem a importância de substituir o trapézio por triângulos.



Figura 40. Nova Representação das Parcelas da Quarta Adição Feita por AF3 e AF4

Após algumas questões colocadas pela professora, AF3 e AF4 substituíram o trapézio por três triângulos e verificaram que dois deles poderiam ser transferidos para completar a segunda unidade, como mostramos na Figura 41.

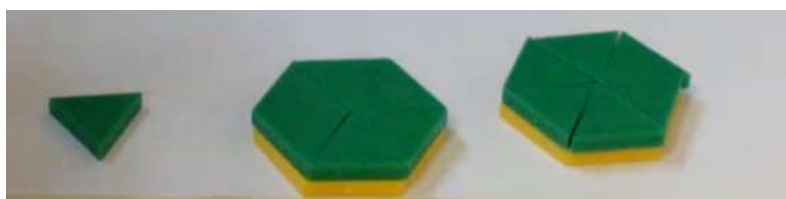


Figura 41. Última Etapa de Resolução da Quarta Adição Feita por AF3 e AF4

AF3 e AF4 disseram imediatamente que o resultado seria “duas unidades e um sexto”.

O par foi solicitado a escrever o resultado na forma de fração, conforme indicação no enunciado. Foi necessário a professora levantar questões sobre o número de partes em que a unidade estava dividida e o número de partes que estavam consideradas para concluírem que a soma, na forma de fração, era treze sextos.

O par de alunos AF1 e AF2 evidenciou as mesmas dificuldades que o par anterior, mas quando substituíram a segunda parcela $\left(\frac{1}{2}\right)$, representada pelo trapézio, por três triângulos, a dificuldade esvaneceu-se. Por identificarem o triângulo como sendo $\frac{1}{6}$ da unidade, depois de fazerem a contagem do número total de triângulos, responderam que a soma era $\frac{13}{6}$. Uma vez que se tratava de uma fração imprópria, incentivamos os alunos a apresentarem o resultado na forma de numeral misto, tendo AF1 dado a resposta correta: “Duas unidades mais um sexto.”

Estas quatro operações não foram suficientes para AF1 e AF2 revelarem mais autonomia na realização da quinta adição: $\frac{5}{3} + \frac{4}{2}$. Foi, mais uma vez, necessário sugerir a transformação das

parcelas representadas por figuras de uma só cor. AF1 e AF2 substituíram a representação da segunda parcela por paralelogramos (ver Figura 42).



Figura 42. Substituição dos Quatro Meios por Seis Terços

Esta substituição permitiu-lhes concluir que o resultado da adição seria “três unidades e dois terços”, conforme referiu AF2. Para que os alunos apresentassem o resultado também na forma de fração, a professora teve necessidade de questionar novamente em quantas partes estava dividida cada uma das unidades apresentadas. Foi interessante verificar a associação que AF2 fez pois respondeu “vinte e dois sextos”, mesmo sem ter feito uso dos triângulos. AF1 disse ter obtido um resultado diferente – onze terços – e depois de explicar o seu raciocínio a AF2, e terem chegado à conclusão que ambas eram frações equivalentes, optaram pela fração $\frac{11}{3}$ para explicarem, por palavras, o procedimento realizado (ver Figura 43).

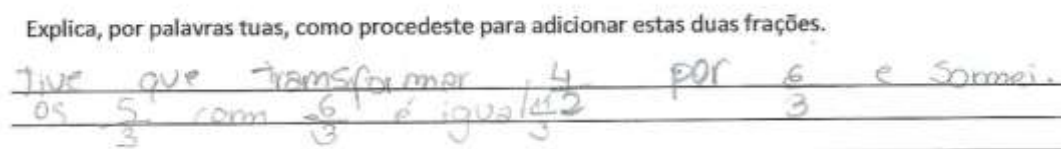


Figura 43. Explicação das Fases da Resolução da Quinta Adição

Foi interessante verificar que o par de alunos AF3 e AF4 também resolveu a adição da mesma forma, seguindo os mesmos passos, tendo sido necessária a intervenção da professora para ultrapassarem a dificuldade em adicionar representações de frações com peças diferentes dos blocos padrão. Observamos também que o primeiro resultado apresentado pelos alunos foi na forma de fração, designadamente, $\frac{11}{3}$. Só depois, quando incentivados pela professora a apresentarem o resultado na forma de numeral misto, é que o fizeram, muito facilmente, apenas por observação das representações feitas com os blocos padrão.

Curiosamente, o par de alunos AM5 e AM6 utilizou outro processo e sem necessitarem do auxílio da professora pois demonstraram compreender que teriam de transformar as

representações de modo a obter outras equivalentes desde que utilizassem apenas uma cor. AM6 começou por substituir os paralelogramos por triângulos e AM5 perguntou-lhe: “Por que transformaste os cinco terços em dez sextos?” Interessante esta questão pelo rigor da linguagem e pertinente pois AM5 apercebeu-se que não possuíam número suficiente de triângulos para sobrepor-los sobre todas as peças utilizadas na representação das parcelas. Mas isso não prejudicou o raciocínio de AM6 pois alterou, por representações equivalentes, cada uma das parcelas (ver Figura 44).

$$\bullet \quad \frac{5}{3} + \frac{4}{2} = \frac{22}{6}$$

$$\frac{10}{6} + \frac{12}{6} = \frac{22}{6} = 3 \frac{2}{3}$$

Figura 44. Resolução da Quinta Adição por AM6

Depois de calculado o valor daquela adição, a professora informou-os da estratégia utilizada pelos restantes colegas. Quando se aperceberam que aqueles substituíram os trapézios por paralelogramos, os alunos identificaram imediatamente que o resultado equivalente seria $\frac{11}{3}$. AM6 registou o procedimento adotado conforme o apresentado na Figura 45.

Explica, por palavras tuas, como procedeste para adicionar estas duas frações.

Transformamos as frações em frações equivalentes com o denominador igual.

Figura 45. Resolução da Quinta Adição por AM6

Nesta altura, este par já não revelou qualquer dificuldade em calcular a soma de frações com denominadores diferentes o que, de certa forma, prejudicou o desempenho na sala de aula, ao nível do comportamento, pois a adição que se seguiu não se apresentou como um desafio novo, mas apenas como mais uma resolução de uma adição diferente.

Na adição que se seguiu $\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{2} + \frac{3}{6}\right)$ os alunos automaticamente transformaram os três trapézios triângulos. De salientar que antes de o fazer, AM5 já se tinha apercebido que os três meios equivalem a nove sextos, mas mesmo assim, prosseguiu a sobreposição de peças. Nesta altura, foi muito interessante observar que o par já não se socorreu dos blocos padrão para obter a soma, isto é, não se preocupou em completar as unidades para depois contar o número total de triângulos usados. Os blocos padrão foram apenas um meio usado para descobrirem a fração

equivalente a $\frac{3}{2}$ pois, a partir desse momento, os alunos escreveram a fração equivalente $\left(\frac{9}{6}\right)$ e aplicaram diretamente a regra operatória para adição de frações com denominadores iguais percebida em sessões anteriores.

Nesta proposta AF4 também revelou uma evolução muito positiva pois, de forma autônoma, transformou a representação de $\frac{3}{2}$ feitas com trapézios por triângulos, conforme apresentado na Figura 46.

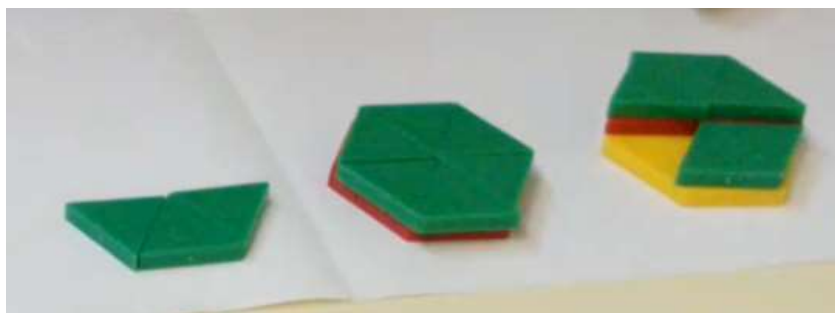


Figura 46. Representação, com os Blocos Padrão, das Parcelas da Sexta Adição, por AF4

A professora sugeriu que AF4 completasse, sempre que possível, a unidade, de modo a facilitar a visualização da representação do numeral misto. AF4 assim fez, como podemos ver na Figura 47. Primeiramente, apresentou a solução correta na forma de fração $\left(\frac{14}{6}\right)$ e, imediatamente a seguir, concluiu: “ou duas unidades e dois sextos”. A apresentação dos cálculos decorreu dentro da normalidade, tendo o par registado corretamente cada um dos passos efetuados.



Figura 47. Representação, com os Blocos Padrão, após Sugestão da Professora

Relativamente ao desempenho do par de alunos AF1 e AF2, foi muito curioso observar a preocupação do par em completar as unidades, diferentemente do par anterior, antes de sobreporem os triângulos sobre os trapézios, como é visível na Figura 48, sem terem obtido qualquer orientação por parte da professora.

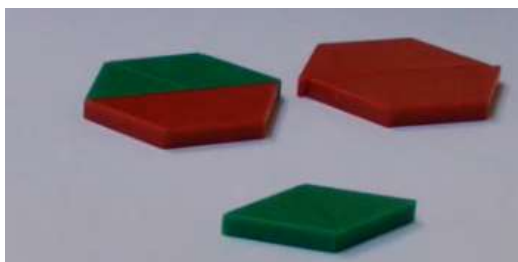


Figura 48. Representação, com os Blocos Padrão, sem Sugestão da Professora

Além disso, consideramos importante referir que quando questionado sobre o resultado desta adição, AF2 não hesitou em apresentar o resultado na forma de numeral misto – “*duas unidades e dois sextos*”. O resultado na forma de fração foi solicitado pela professora, ao que AF2 sentiu necessidade de substituir os trapézios por triângulos e associar $\frac{3}{2}$ a $\frac{9}{6}$, o que lhes permitiu responder que esta soma era igual a $\frac{14}{6}$.

Finalmente, seguiram-se três adições de frações, ainda pertencentes à primeira questão, cuja resolução não podia ser feita com os blocos padrão pelo facto de os denominadores serem diferentes de 2, 3 e 6. A primeira adição foi a seguinte: $\frac{2}{5} + \frac{1}{10}$.

Ao iniciar a resolução desta adição verificamos que, para AM6, a dificuldade residia na impossibilidade de usar os blocos padrão enquanto que, para AM5, o problema residia no facto das frações não terem o mesmo denominador. Em qualquer um dos casos, nenhum dos problemas apontados foram impeditivos do cálculo das suas somas. Aliás, quando os alunos iniciaram as estratégias de cálculo apercebemo-nos que AM5 começou pela representação gráfica de cada uma das frações sendo depois motivado, pela professora, a apresentar o respetivo cálculo numérico (ver Figura 49).

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} \\ & \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} \end{aligned}$$

Figura 49. Representação Gráfica, Feita por AM5, da Adição

A apresentação dos cálculos foi efetuada, à medida que conversavam.

AM6: “Dois quintos é igual a quatro décimos (...) multipliquei os dois por dois e o cinco por dois.”

AM5: “Eu também concordo...e temos de multiplicar o um por um e o dez por um.”

Depois escreveram as frações equivalentes a cada uma das parcelas e o resultado correto.

AF3, AF4, AF1 e AF2 tiveram um desempenho muito semelhante, tendo facilmente resolvido esta adição através de cálculos.

Não foi, nesta altura, pedido que o resultado fosse apresentado na forma irredutível.

Apresentamos, na Figura 50, a explicação dada por AF2 sobre a forma como procedeu, com o seu par, para adicionar as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{4}$ por acharmos interessante a referência ao mínimo múltiplo comum, observando assim a conexão com conhecimentos adquiridos em aulas anteriores, tal como fizeram os restantes pares.

$\frac{3}{8} + \frac{2}{4} =$

$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

Explica, por palavras tuas, como procedeste para adicionar estas duas frações.

Fui a tirar duas das do denominadores e fui encontrar o mínimo múltiplo comum e obtive 8.

Figura 50. Explicação Dada por AF2

As adições que se seguiram foram resolvidas por todos os pares, de forma correta e autónoma. Apercebemo-nos que a regra para adicionar frações com denominadores diferentes foi bem percebida pois, de uma forma geral, todos os pares a explicaram corretamente. Apresentamos, na Figura 51, uma das respostas dadas.

1.2. Regista o que deves fazer sempre que tiveres de adicionar frações com denominadores diferentes.

Temas de transformar em frações equivalentes com o mesmo denominador e somamos os numeradores e mantemos os denominadores.

Figura 51. Explicação Dada por AF4 à Alínea 1.2

Depois de descoberta a regra para adicionar frações com denominadores diferentes, os alunos foram, na segunda questão do guião de trabalho, incentivados a verificar se esta regra se aplicava à subtração, tendo-o verificado nos três casos que se apresentam na Figura 52.

2. Verifica se esta regra se aplica à subtração de números representados por frações. **Confirma usando os blocos padrão.**

$\frac{5}{3} - \frac{1}{2} =$	$\frac{4}{6} - \frac{1}{2} =$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} =$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Figura 52. Segunda Questão do Guião de Trabalho

Quando observamos as gravações audiovisuais dos pares AF1 e AF2, apercebemo-nos das várias fases de resolução da primeira subtração e que apresentamos na Figura 53.

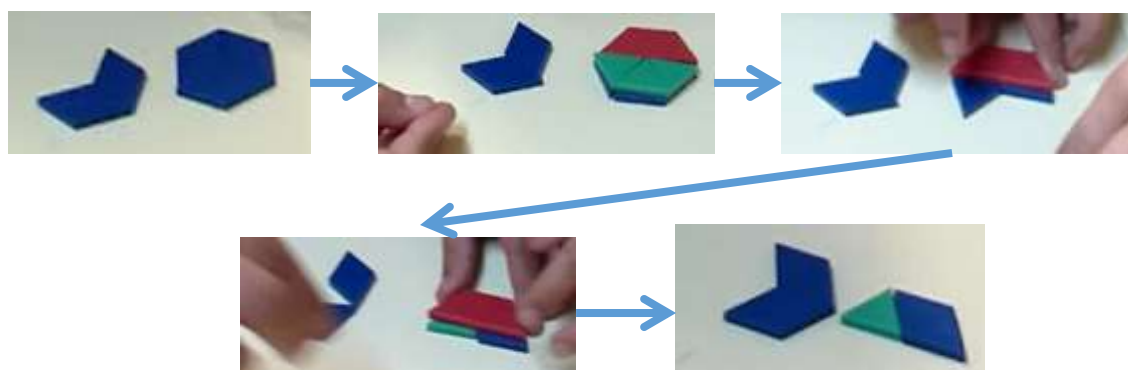


Figura 53. Fases da Resolução por AF1 e AF2

Quando questionados sobre o valor da diferença, AF2 respondeu “sete sextos”. AF2 contabilizou o número de triângulos que poderiam ficar sobrepostos sobre as peças representadas na última etapa da Figura 53 sem para isso ter usado os triângulos. No entanto, na necessidade de exprimir os raciocínios de forma numérica, o par recorreu novamente aos blocos padrão pois teve necessidade de voltar a representar o aditivo, no qual, imediatamente a seguir, sobrepôs triângulos (ver Figura 54).

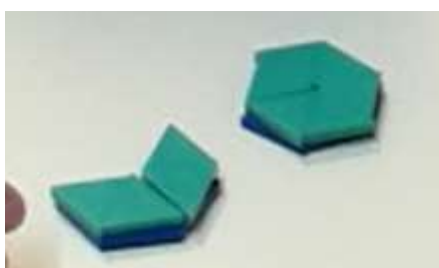


Figura 54. Primeira Etapa de Apoio ao Cálculo Numérico da Primeira Subtração

Esta etapa permitiu a AF1 e a AF2 concluir que os $\frac{5}{3}$ equivalem a $\frac{10}{6}$ e $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{6}$ concluindo que a diferença era $\frac{7}{6}$.

A segunda subtração decorreu normalmente, tendo os alunos, verificado a necessidade de encontrarem frações equivalentes com o mesmo denominador para calcularem a diferença.

No que se refere à terceira subtração, os alunos optaram por transformar os $\frac{2}{6}$ em $\frac{1}{3}$ e, a partir daí, o resultado foi imediato ($\frac{1}{3}$).

Relativamente ao par de alunos AM5 e AM6, aquando da resolução da primeira subtração, representou os $\frac{5}{3}$ com paralelogramos e, logo de seguida, lhe sobrepôs triângulos afirmando: *“uma unidade e quatro sextos”*. Uma vez que, neste caso, pretendíamos trabalhar com frações impróprias, a professora perguntou-lhes a que fração esse numeral misto correspondia e AM6 não hesitou em responder *“dez sextos”*. De seguida, na presença da professora, AM6 sobrepôs sobre os triângulos no trapézio, que representava a fração $\frac{1}{2}$, retirando-os da representação e permitindo-lhes obter o resultado correto ($\frac{7}{6}$).

Na segunda subtração foi a vez de AM5 representar as frações com os blocos padrão. Antes de terem sobreposto três triângulos sobre o trapézio, AM6 chegou logo à conclusão de que $\frac{1}{2}$ era equivalente a $\frac{3}{6}$. O resultado $\frac{1}{6}$ foi obtido apenas efetuando os cálculos. Pensámos ainda que este par usou o material por indicação do enunciado pois, enquanto AM5 sobrepunha os triângulos sobre o trapézio, referiu que *“um meio é sempre igual a três sextos”*, o que denota que o aluno já era capaz de fazer a equivalência mentalmente. Para além disso, mais uma vez, por observação das gravações audiovisuais da aula, apercebemo-nos que a manipulação do material, embora ainda feita com motivação manifestada pelos alunos, já não era feita por necessidade.

Foi o que constatamos na terceira subtração onde AM6 representou os $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{6}$ e logo afirmou: *“vamos transformar tudo em sextos”*. De seguida, sobrepôs dois triângulos sobre um dos paralelogramos e concluiu que $\frac{2}{3}$ era equivalente a $\frac{4}{6}$ à medida que apresentava os cálculos efetuados. Mais uma vez, o aluno não teve necessidade de sobrepôr com triângulos todos os paralelogramos, como podemos observar na Figura 55. Enquanto escrevia o resultado, AM6 disse: *“quatro sextos menos dois sextos são dois sextos”*.

O par de alunos AF3 e AF4 teve um desempenho muito semelhante a este último par pelo que não consideramos necessário proceder a uma descrição das etapas por eles realizadas.



Figura 55. Última Fase de Resolução da Terceira Subtração

Após a descoberta e aplicação da regra para adição e subtração de frações com denominadores diferentes, os alunos resolveram o quarto exercício da ficha de trabalho, no qual foram apresentadas algumas situações problemáticas. As mesmas poderiam ser resolvidas usando esquemas, desenhos, palavras ou cálculos, conforme a opção de cada aluno. Não se fez referência aos blocos padrão, embora a primeira situação, e única, permitisse o seu uso (ver Figura 56).

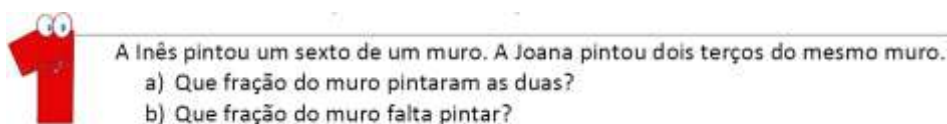


Figura 56. Primeira Situação Problemática

Todos os pares optaram por resolver a situação apresentada com cálculos. Identificaram a operação a efetuar e depois de a registarem resolveram-na corretamente. Apresentamos, em seguida (Figura 57), a resolução feita por AM5 e AM6.

Figura 57. Resolução da Primeira Situação Problemática, Feita por AM5 e AM6

Aquando da resolução da segunda alínea AM5 e Am6 identificaram prontamente a resposta correta ($\frac{1}{6}$) e AM6 justificou oralmente “porque se pintaram cinco sextos... só falta um sexto para acabar” e o par escreveu “falta pintar $\frac{1}{6}$ porque uma unidade são $\frac{6}{6}$ e já temos $\frac{5}{6}$ ”.

Os restantes pares, de forma autónoma, também associaram a unidade a $\frac{6}{6}$ e resolveram imediatamente (ver Figura 58). De salientar que, tendo AF3 apresentado alguma incerteza na resolução desta alínea, a professora recorreu aos blocos padrão, o que facilitou a compreensão por parte da aluna.

b)

$$\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

R: faltam 2 pontas $\frac{1}{6}$ do meu porque uma unidade é $\frac{6}{6}$.

Figura 58. Resolução da Segunda Alínea da Primeira Situação Problemática, por AF1 e AF2

Prosseguimos para a descrição da segunda situação que apresentamos na Figura 59.

O Pedro foi às compras.²
 Gastou $\frac{2}{5}$ do seu dinheiro na compra de um livro e $\frac{1}{3}$ na compra de uma caneta.
 a) Que fração do dinheiro gastou o Pedro nas duas compras?
 b) Que fração do dinheiro sobrou?

Figura 59. Segunda Situação Problemática

Todos os pares resolveram corretamente a situação apresentada tendo, para isso, novamente optado pelo cálculo numérico.

No caso da segunda alínea, foi interessante notar que AF2, depois de obter o resultado da primeira alínea ($\frac{11}{15}$), associou imediatamente e sem dificuldade, assim como fez anteriormente, $\frac{15}{15}$ à unidade, o que nos leva a constatar que o aluno compreendeu bem a relação parte-todo. Feita esta associação, o par de alunos AF1 e AF2 subtraiu-lhe $\frac{11}{15}$, obtendo, assim, o resultado correto ($\frac{4}{15}$).

À semelhança do que aconteceu na segunda alínea da primeira situação problema, os pares de alunos AF3, AF4 e AM5, AM6 não apresentaram cálculos. Depois de terem obtido a soma $\frac{11}{15}$ na resolução da primeira alínea, os alunos AM5 e AM6, apenas apresentaram como resposta: “Faltam $\frac{4}{15}$ porque uma unidade são $\frac{15}{15}$ e nós já temos $\frac{11}{15}$ ”, resposta semelhante apresentada por AF3 e AF4.

Apresentamos, na Figura 60, a terceira situação que os pares resolveram.

3 A Joana comeu $\frac{2}{5}$ de um bolo. A sua irmã comeu $\frac{1}{4}$ do mesmo bolo.
O primo João também comeu uma parte do bolo: $\frac{3}{10}$.

a) Que fração do bolo comeram as duas irmãs?
b) Compara a porção do bolo que o João comeu com a porção que ambas as irmãs comeram. Justifica.

Figura 60. Terceira Situação Problemática

Mais uma vez, todos os alunos usaram cálculos para resolverem a primeira alínea, pelo que apresentamos, na Figura 61, um destes exemplos.

a)

$$\frac{2(4)}{5(4)} + \frac{1(5)}{4(5)} =$$

$$= \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$$

R: As duas irmãs comeram $\frac{13}{20}$ avos.

Figura 61. Resolução, por AM5 e AM6, da Primeira Alínea da Terceira Situação Problemática

A segunda alínea foi resolvida com sucesso, tendo todos os alunos respondido que as irmãs comeram uma maior porção do bolo. Apresentamos, na Figura 62, a resposta apresentada por AF3 e AF4.

$$\frac{13}{20} \qquad \frac{3}{10}$$

$$\Downarrow$$

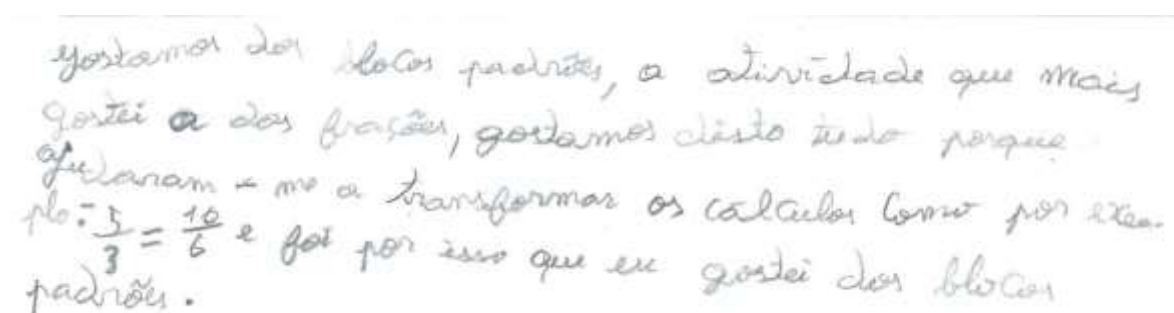
$$\frac{6}{20}$$

R: As irmãs comeram mais foram as raparigas
porque em 20 fatias comeram 13 e o
João em 20 fatias comeu 6.

Figura 62. Resolução, por AF3 e AF4, da Segunda Alínea da Terceira Situação Problemática

Finalizada a apresentação do decurso desta aula, por observação das gravações audiovisuais das mesmas, apercebemo-nos da complexidade da aprendizagem, por parte dos alunos, ao nível da compreensão da adição de frações com denominadores diferentes, mesmo

apesar do recurso ao material manipulável. Quando as representações, com os blocos padrão, envolvem peças diferentes, nem todos os alunos pensam imediatamente em transformar as representações numa só cor. Apenas o par de alunos AM5 e AM6 o fez de forma mais autónoma, após a realização de dois exemplos, quando era possível usar os blocos padrão. Apesar disso, com a prática, os alunos foram gradualmente ultrapassando esta dificuldade e, depois de compreendido este processo, observamos a facilidade com que os alunos resolveram, de forma numérica, as expressões numéricas. Mais uma vez, constatamos que os blocos padrão foram uma mais-valia para a compreensão das frações equivalentes. Uma frase escrita por AM5 e AM6 vem confirmar isso, conforme podemos ver na Figura 63.



gostamos dos blocos padrões, a atividade que mais gostei ~~a~~ das frações, gostamos disto tudo porque ajudaram-nos a transformar os cálculos como por ex. $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ e foi por isso que eu gostei dos blocos padrões.

Figura 63. Opinião dos Alunos AM5 e AM6 sobre os Blocos Padrão e sua Utilização

Tivemos ainda a oportunidade de constatar que a manipulação do material foi muito importante pois ajudou os alunos a melhor compreenderem o processo de resolução de uma expressão numérica, não tendo, por isso, evidenciado dificuldades na resolução do terceiro exercício da ficha de trabalho que não permitia o uso dos blocos padrão. Foi um exercício que todos resolveram, de uma forma mais individualizada, de modo a permitir, à professora, identificar aspetos que deveriam ser reforçados a nível individual. Aproveitou-se este momento para a abordagem à noção de fração irredutível que ainda não tinha sido dada. De uma forma geral, todos os alunos resolveram as expressões sem grandes dificuldades. Em nenhum dos casos os alunos adicionaram frações com denominadores diferentes, sem antes terem procedido à escrita de frações equivalentes com o mesmo denominador, e quando o fizeram nunca deixaram de fazer as alterações necessárias aos numeradores, nem mesmo omitiram passos na resolução das expressões numéricas. Os alunos estavam, nesta altura, mais confiantes na resolução deste tipo de propostas.

Apesar do tempo despendido nos dois primeiros exercícios, para compreenderem a importância e a necessidade de utilização das frações equivalentes na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, sentimos que este tempo foi muito importante para a

compreensão do conceito de fração e da noção de frações equivalentes. Esta compreensão teve reflexos óbvios na prática, quer pelo raciocínio usado na resolução de exercícios e situações problemáticas, quer na linguagem utilizada pelos alunos, bem como na rapidez e eficiência com que resolveram as expressões numéricas do terceiro exercício da ficha de trabalho e as situações apresentadas na questão quatro. Foi possível observar-se que, apesar de muito terem manipulado os blocos padrão, gradualmente se libertaram deles para a realização destas tarefas, sendo que o par AM5 e AM6 foi aquele que mais rapidamente o fez.

Além disso, mais uma vez, tivemos a oportunidade de constatar a facilidade com que os alunos compreenderam a noção de numeral misto.

Tarefa 5 – Adição e Subtração de Numerais Mistos

As propostas que fazem parte desta tarefa foram realizadas em duas sessões de 90 minutos, com os seis alunos presentes. Os alunos foram novamente informados que poderiam resolver cada uma das tarefas utilizando os blocos padrão, a malha isométrica ou, se preferissem, apenas cálculos.

A primeira tarefa, que consistia em adicionar dois numerais mistos, $2\frac{1}{3}$ e $1\frac{2}{6}$, foi realizada em grande grupo à semelhança das aulas anteriores. Todos os pares usaram os blocos padrão pois referiram ser o processo mais fácil.

Assim sendo, cada par representou as parcelas com os blocos padrão, conforme apresentamos na Figura 64.



Figura 64. Representação das Parcelas com os Blocos Padrão

Foi interessante observar que quando solicitados a fazerem uma estimativa do resultado, AM5 referiu imediatamente que o resultado seria “*três unidades mais isto*” – referindo-se à parte fracionária – “*que podemos transformar em cinco sextos*”. Quando solicitado a explicar como obteve os cinco sextos, AM5 afirmou “transformamos um terço em dois sextos.”

Foi ainda curioso observar que, de uma forma geral, quando questionados sobre o resultado final, os alunos dispuseram os blocos padrão da forma que está representada na Figura

65, o que, a nosso ver, reflete o contributo que os blocos padrão deram na compreensão do processo de adição dos numerais mistos. Por iniciativa próprias os alunos adicionaram as partes inteiras e depois as partes fracionárias.



Figura 65. Representação da Soma com os Blocos Padrão

Conforme solicitado no enunciado, o resultado deveria ser também apresentado na forma de fração. AM5 disse imediatamente *“podemos transformar as três unidades em sextos...dezoito sextos mais...”*. AF2 interveio e completou: *“mais cinco sextos”*. Logo de seguida, AM5 calculou mentalmente e respondeu *“vinte e três sextos”*.

Neste momento, a professora questionou os alunos sobre qual das representações, numeral misto ou fração, se sentiam mais à vontade para apresentar resultados. Unanimemente responderam o *“numeral misto porque é mais fácil”*, *“já temos as três unidades...e não é preciso somar tudo”* (AM6), *“não precisamos de transformar as unidades completas numa fração imprópria”* (AM5).

A professora perguntou ainda que parte da unidade faltava representar para obtermos quatro unidades. AM5 e AM6 responderam de imediato: *“um sexto”*.

A partir deste momento, depois de todos terem compreendido a tarefa que se seguia, os alunos prosseguiram para a resolução da primeira proposta da ficha de trabalho: $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}$.

Os alunos AM5 e AM6 usaram os blocos padrão para representação das parcelas. Substituíram, de forma autónoma, as partes fracionárias representadas pelos paralelogramos e pelo trapézio por triângulos, obtendo como soma *“dois mais sete sextos”*.

Foi curioso observar a forma como os alunos, naturalmente e intuitivamente, se aperceberam que $2 + \frac{7}{6}$ era equivalente a $3\frac{1}{6}$, sem haver qualquer intervenção por parte da professora.

AM6: *“transformei logo $2 + \frac{7}{6}$ em $3\frac{1}{6}$ porque $\frac{7}{6}$ passa da unidade”*

AM5: *“Em $\frac{7}{6}$ o numerador é maior que o denominador, por isso, temos mais uma unidade.”*

Os alunos confirmaram, de seguida, que os cálculos efetuados após a manipulação do material corresponderam ao primeiro resultado obtido.

AF3 e AF4, bem como AF1 e AF2 seguiram o mesmo percurso, tendo o material sido essencial na representação do resultado na forma de fração imprópria.

Foi também interessante observar a forma como estes alunos iniciaram a segunda adição: $1\frac{3}{6} + 2\frac{4}{3}$. Sem colocarem as peças dos blocos padrão, AM5 e AM6 iniciaram fazendo uma estimativa, isto é, AM5 estimou que o resultado seria de, pelo menos, quatro unidades começando por representar a segunda parcela (ver Figura 66).

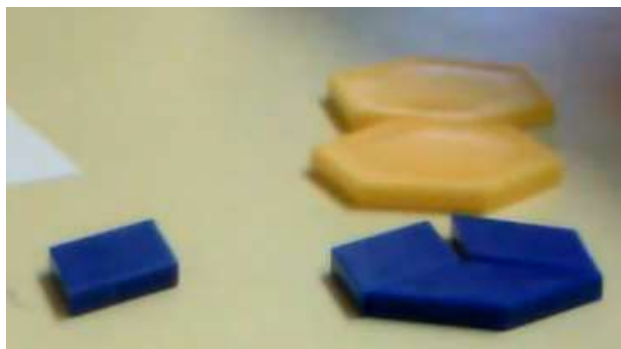


Figura 66. Representação da Parcela $2\frac{4}{3}$ com os Blocos Padrão

AM5 decidiu transformar os $\frac{4}{3}$ em $\frac{8}{6}$, o que lhes permitiu confirmar que a soma seria maior do que quatro unidades. Por erro de contagem, obtiveram o resultado incorreto de $4\frac{11}{6}$, contudo, recorrendo ao cálculo numérico, verificaram que o resultado correto era $3 + \frac{11}{6}$ que, imediatamente, representaram por $4\frac{5}{6}$ porque *“ $\frac{11}{6}$ passa da unidade $\frac{5}{6}$. Ganhei uma unidade e mais $\frac{5}{6}$ ”*.

AF1 e AF2 também obtiveram o resultado $3 + \frac{11}{6}$ e tiveram facilidade em associá-lo ao numeral misto $4\frac{5}{6}$, mas somente após visualização da representação feita com os blocos padrão. Depois, foram lembradas que deveriam escrever o resultado na forma de fração imprópria. Fizeram-no contabilizando o número total de triângulos que seriam necessários para sobrepor esta representação, sem, contudo, os utilizar.

Por seu lado, AF3 e AF4, resolveram a segunda adição, também com recurso aos blocos padrão, segundo um percurso muito semelhante ao par anterior, mas, neste caso, sobrepuseram os triângulos, como podemos observar na Figura 67.



Figura 67. Representação, com os Blocos Padrão, da Segunda Adição por AF3 e AF4

Este passo permitiu a AF3 afirmar que o resultado seria “*quatro e cinco sextos*” e confirmar o resultado obtido através do cálculo numérico (ver Figura 68).

$$\begin{aligned}
 & \bullet 1\frac{3}{6} + 2\frac{4}{3} = 4\frac{5}{6} \\
 & = (1+2) + \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{3}\right) = \\
 & = 3 + \left(\frac{3}{6} + \frac{8}{6}\right) = \\
 & = 3 + \frac{11}{6} = \\
 & = 4\frac{5}{6} = \frac{29}{6}
 \end{aligned}$$

Figura 68. Cálculos Efetuados por AF4

Pensamos que estas adições foram suficientes para os alunos compreenderem o processo envolvido na adição de numerais mistos, como podemos observar pela leitura das respostas (Figuras 69 e 70) que AF1 e AM5, de pares distintos, deram na questão que a seguir apresentamos.

Como explicarias a um colega teu como se adicionam numerais mistos?
 Primeiro devemos adicionar as unidades e depois
 devemos somar as frações.

Figura 69. Resposta de AF1

Como explicarias a um colega teu como se adicionam numerais mistos?
 Somamos a unidade (primeiro) e depois somamos
 as frações.

Figura 70. Resposta de AM5

Pensamos que o termo “unidade” usado por ambos os alunos, ao invés de “parte inteira”, deveu-se ao facto de, na maioria das vezes, a parte inteira ser representada pelo hexágono (a unidade). Posteriormente à análise destas respostas, os alunos foram alertados para a necessidade de serem rigorosos na linguagem utilizada.

De seguida, todos os alunos seleccionaram os blocos padrão como forma de resolução preferida e apresentaram os motivos da sua escolha:

AF1: *“quando uso os blocos padrão dá-me o resultado e depois quando vou fazer as contas vejo que o resultado dá-me certo.”*

AF2: *“obtenho sempre o resultado certo e transformo logo.”*

AF3: *“para mim é muito mais fácil porque vejo as frações.”*

AM6: *“Porque é mais rápido de fazer e é mais explícito.”*

AM5: *“os blocos padrão porque é a forma mais fácil de representar frações.”*

Seguiu-se a resolução de uma adição de numerais mistos, cujas frações não podiam ser representados com os blocos padrão para perceber se as aprendizagens estavam dependentes destes recursos. De salientar que nenhum dos alunos teve necessidade de recorrer a uma representação pictórica, todos recorreram ao cálculo numérico para obter, com sucesso, a soma pretendida.

Uma vez percebido o processo de adição dos numerais mistos, os alunos resolveram a segunda questão da ficha, agora com a subtração de numerais mistos.

Na primeira proposta $\left(3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6}\right)$ todos os alunos recorreram aos blocos padrão. Com estes, os alunos representaram o aditivo, conforme mostramos na Figura 71.



Figura 71. Representação do Aditivo por AF1, AF2 e AF3

Retirar uma unidade foi fácil para os alunos, mas retirar um sexto já não. AF2 queria retirar um dos paralelogramos, mas AF3 alertou-o para o facto de essa peça representar dois terços da unidade e não um sexto, lembrando-lhe assim que teria de *“transformar um terço em sextos”*. Com esta pista, AF2 e AF1 procederam às alterações ao nível da constituição da representação, como podemos constatar por observação da Figura 72.



Figura 72. Nova Representação do Aditivo por AF1, AF2 e AF3

Este procedimento foi fundamental pois, após retirarem a representação do subtrativo, os alunos chegaram à conclusão que a diferença era $2\frac{1}{2}$ (ver Figura 73).



Figura 73. Representação da Diferença por AF1, AF2 e AF3

A confirmação com cálculo numérico permitiu-lhes escrever $2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$.

Quando solicitados a apresentarem o resultado numa fração imprópria, AF2 disse imediatamente: “doze...não...quinze sextos”, o que nos permite constatar que AF2 compreendia que a unidade era constituída por seis sextos e, por isso, duas unidades eram compostas por doze sextos. Portanto, mais uma vez constatamos que os blocos padrão também constituíram um meio facilitador para a expressão de resultados na forma de fração imprópria.

A segunda proposta acrescentava à subtração de numerais mistos a particularidade de haver necessidade do transporte de uma unidade: $3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$.

Todos os alunos se aperceberam da impossibilidade de subtrair $\frac{5}{6}$ a $\frac{1}{6}$ porque “ $\frac{1}{6}$ é menor do que $\frac{5}{6}$ ”.

Os alunos subtraíram as duas unidades tendo ficado $1\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$ e, de seguida, uns substituíram o hexágono por seis triângulos permitindo-lhes responder que o resultado era “dois sextos” (ver Figura 74), outros não precisaram desta representação para responderem imediatamente.

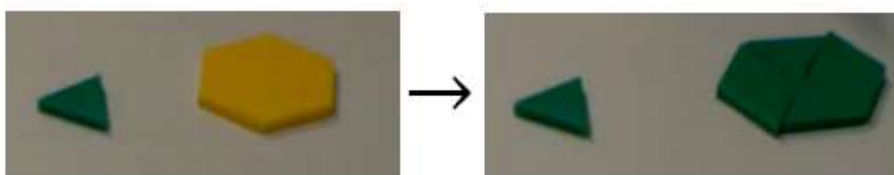


Figura 74. Segundo Passo para a Resolução da Subtração $3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$

Apesar de esta operação ter um grau de dificuldade superior às anteriores, apercebemo-nos que, de forma geral, foi compreendida pelos alunos, quer com a manipulação dos blocos padrão, quer no cálculo numérico, embora tenham sentido algumas dificuldades na substituição do aditivo $3\frac{1}{6}$ por $2\frac{7}{6}$. Este facto ocorreu porque, neste caso, quando usavam os blocos padrão, não era visível essa equivalência. Contudo, quando a professora lhes perguntou o motivo de substituírem o aditivo $3\frac{1}{6}$ por $2\frac{7}{6}$ no cálculo numérico referiram:

AM6: *“Porque não podia subtrair um sexto a cinco sextos, por isso, tive de pedir uma unidade ao $3\frac{1}{6}$. Fiquei com $2\frac{7}{6}$ que já dá para subtrair $2\frac{5}{6}$.”*

AM5: *“Porque tivemos que pedir uma unidade ao $3\frac{1}{6}$ para poder transformar $3\frac{1}{6}$ em $2\frac{7}{6}$ porque não posso subtrair $\frac{5}{6}$ a $\frac{1}{6}$ ”.*

Os outros alunos preferiram usar a malha isométrica para fazer essa explicação (ver Figura 75).

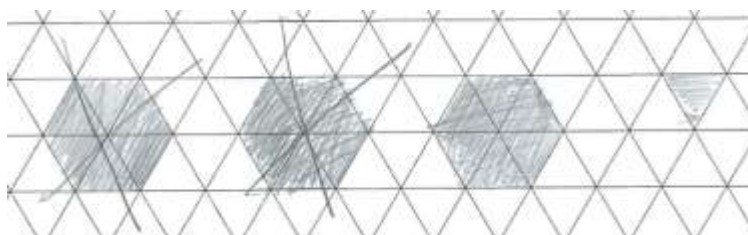


Figura 75. Representação da Subtração na Malha Isométrica

Consideramos que a utilização da malha isométrica, por permitir a divisão da unidade, neste caso o hexágono, em duas, três e seis partes iguais, foi de real importância para o cálculo numérico. A representação pictórica permitiu-lhes visualizar a substituição de $3\frac{1}{6}$ por $2\frac{7}{6}$ e ajudou-os a ter consciência da necessidade desta substituição constituir o primeiro passo a realizar. Contudo, sentimos que este procedimento ainda não estava perfeitamente percebido. Foi somente no cálculo da terceira expressão numérica, $4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}$, que se tornou evidente para os alunos a necessidade de substituir $4\frac{1}{3}$ substituído por $3\frac{4}{3}$. Com os blocos padrão tiveram de substituir um dos hexágonos por dois trapézios para lhes poder retirar $\frac{1}{2}$ para além de uma unidade (ver Figura 76).

Após esta substituição, o grupo resolveu, com sucesso, a subtração com os blocos padrão e através de cálculos (ver Figura 77).



Figura 76. Representação do Aditivo $4\frac{1}{3}$ Substituído por $3\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}
 & \bullet 4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} = 2\frac{5}{6} \text{ ou } \frac{17}{6} \\
 & = 3\frac{4}{3} - 1\frac{1}{2} = 1 = \\
 & = (3-1) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \\
 & = 2 + \left(\frac{8}{6} - \frac{3}{6}\right) = \\
 & = 2 + \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

Figura 77. Resolução Algébrica da Subtração $4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}$

Os restantes alunos resolveram de forma análoga, apesar de um dos alunos ter ainda a necessidade de substituir a representação da parte fracionária por triângulos para confirmação do resultado (Figura 78).



Figura 78. Confirmação do Resultado por AF4

Depois de solicitados, pela professora, a apresentarem o resultado obtido na forma de fração, AM6, apontando para cada uma das unidades e depois para a parte fracionária, respondeu: “Seis...doze...cinco...” e AM5 concluiu: “Dezassete! Dezassete sextos”. Todos concordaram.

Na nossa opinião, os blocos padrão foram muito benéficos na compreensão do processo de subtração de numerais mistos, especialmente das subtrações em que a parte fracionária do aditivo é inferior à parte fracionária do subtrativo. Os blocos padrão facilitaram muito a

compreensão da necessidade de converter (no aditivo) uma unidade da parte inteira para a parte fracionária. Aliás, os alunos perceberam a importância de, aquando da resolução de qualquer subtração de numerais mistos através de cálculos, observarem e compararem, primeiro, as partes fracionárias.

Apercebemo-nos também da pertinência do uso da malha isométrica na resolução algébrica da subtração. O facto de não permitir a mobilidade das peças que representa ajudou os alunos a visualizar e a compreender o empréstimo de uma unidade à parte fracionária do aditivo. Aliás, numa sessão posterior em que dedicamos alguns minutos para a revisão da subtração de numerais mistos que não podiam ser representados através dos blocos padrão, os alunos tiveram necessidade de recorrer à representação pictórica do aditivo para iniciar a resolução algébrica.

A proposta seguinte, tal como nos casos anteriores, não permitia o uso dos blocos padrão. Este facto permitiria analisar o processo que os alunos adotariam para calcularem o valor da expressão numérica: $4\frac{3}{5}$ e $2\frac{7}{10}$.

AF1, AF2, AF3 e AF4 recorreram à representação pictórica para auxiliar o processo simbólico (ver Figura 79). Mas AM5 e AM6 resolveram-na apenas com cálculos.

$$\begin{aligned}
 &4\frac{3}{5} - 2\frac{7}{10} = \\
 &= 3\frac{6}{5} - 2\frac{7}{10} = \\
 &= (3-2)\frac{6}{5} - \frac{7}{10} = \\
 &= 1\frac{6}{5} - \frac{7}{10} = \\
 &= 1 + \frac{12}{10} - \frac{7}{10} = \\
 &= 1\frac{5}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Figura 79. Resolução da Subtração Feita por AF3 e AF4

No final da primeira sessão sobre adição e subtração de numerais mistos, os alunos também foram incentivados a representar, na reta numérica, as somas e as diferenças obtidas. Foi muito interessante verificar que os alunos foram mais rápidos na descoberta da posição dos numerais mistos do que na das frações impróprias correspondentes, o que nos leva a concluir que a compreensão do numeral misto tinha sido bem-sucedida e o processo para a correta posição na reta numérica também. Por exemplo, AM5 e AM6 aperceberam-se que, após a determinação de duas somas na reta numérica, que apenas a unidade representada pela parte inteira do numeral misto precisava ser dividida nas partes indicadas pelo denominador da parte fracionária, ou seja, as unidades da reta numérica tinham de ser equidistantes, mas apenas a parte fracionária da unidade indicada pela parte inteira é que foi dividida pelos alunos (ver Figura 80).



Figura 80. Indicação do Numeral Misto $2\frac{3}{6}$ na Reta Numérica

Na segunda sessão, propusemos aos alunos a resolução de situações problemáticas envolvendo operações com numerais mistos.

A resolução da primeira situação problemática requeria que os alunos adicionassem os numerais mistos $2\frac{3}{6}$ e $5\frac{1}{2}$ (ver Figura 81).

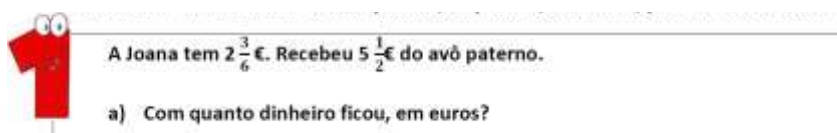


Figura 81. Primeira Situação Proposta

Os alunos AF1, AF2, AF3 e AF4 usaram os blocos padrão e, depois de contarem as unidades e terem adicionado as partes fracionárias, logo se aperceberam que a soma era oito euros (ver Figura 82).



Figura 82. Primeiro e Segundo Passos: Representação das Parcelas $2\frac{3}{6}$ e $5\frac{1}{2}$

O par de alunos AM5 e AM6 não recorreu aos blocos padrão. Embora tivessem optado pelo cálculo numérico, ambos expuseram resoluções diferentes (ver Figuras 83).

$ \begin{aligned} 2\frac{3}{6} + 5\frac{1}{2} &= \\ &= (2+5) + \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= 7 + \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\right) = \\ &= 7 + \frac{3+3}{6} = \\ &= 7 + \frac{6}{6} = \\ &= 7 + 1 = \\ &= 8 \text{ €} \end{aligned} $ <p>R: Ficou com 8€.</p>	<p>a)</p> $ \begin{aligned} \left(\frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2} = \\ &= 7\frac{2}{2} = 8 \text{ €} \end{aligned} $
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figura 83. Resolução Feita por AM5 (esquerda) e AM6 (direita)

Consideramos interessante a igualdade que AM6 apresentou inicialmente, reveladora que a noção de frações equivalentes foi bem compreendida pelo aluno, o que lhe permitiu resolver com simbologia matemática esta adição de forma rápida e com significado.

Na segunda situação problemática (ver Figura 84), que não possibilitava o uso dos blocos padrão, AF2 começou por fazer uma estimativa que o resultado seria “uma unidade e tal porque às duas unidades temos de retirar uma unidade”.

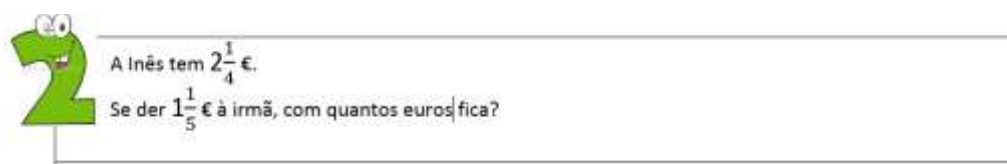


Figura 84. Segunda Situação Proposta

Mais uma vez, constatamos que o processo para a adição e subtração de numerais mistos foi bem percebido por todos os alunos, uma vez que a resolveram corretamente, sendo o resultado obtido $1 \frac{1}{20}$. Apesar disso, a professora solicitou que os alunos exprimissem o resultado na forma de numeral decimal pois ouviu, por parte de alguns alunos, que a Inês tinha ficado com um euro e vinte cêntimos. Por isso, houve necessidade de ajudá-los a compreender que um e um vinte avos de um euro correspondia a um euro mais a vigésima parte de um euro, ao que os alunos, após divisão de um euro por vinte, concluíram que o resultado a apresentar na forma decimal era 1,05 euros.

Na terceira situação problemática (ver Figura 85), apenas AM5 e AM6 não recorreram aos blocos padrão (ver Figura 86).

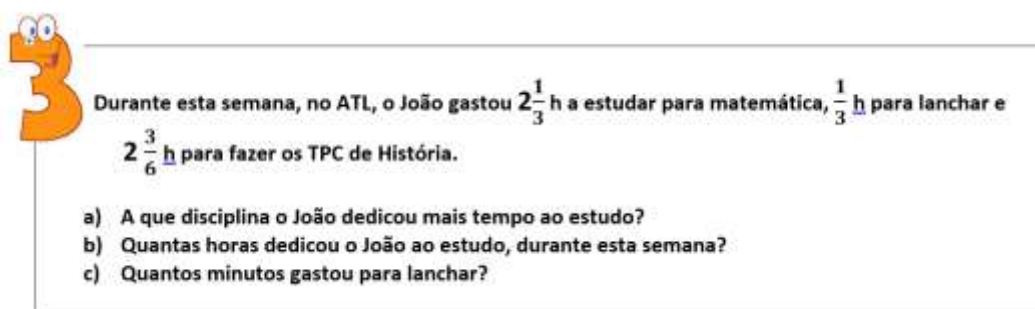


Figura 85. Terceira Situação Proposta



Figura 86. Representação dos Dados do Enunciado com os Blocos Padrão, por AF1 e AF2

O recurso aos blocos padrão permitiu aos alunos identificarem a disciplina de História como sendo aquela em que o João dedicou mais tempo, tendo AF2 explicado *“porque gastou duas horas e trinta minutos”* e AF4 *“porque em História gastou 2h30 e em Matemática gastou 2h20, por isso, gastou mais tempo em História”*.

Consideramos pertinente partilhar a forma de resolução da primeira alínea, por parte dos alunos AM5 e AM6, pois, embora também tivessem imediatamente associado os três sextos da hora a meia hora, para explicarem o seu raciocínio utilizaram a malha isométrica, na qual representaram apenas as partes fracionárias do tempo dedicado às disciplinas de História e Matemática (ver Figura 87) que lhes permitiu responder corretamente.



Figura 87. Representação das Parcelas na Malha Isométrica e Respetiva Resposta

Os alunos chegaram à conclusão que $4\frac{5}{6}$ da hora equivaliam a quatro horas e cinquenta minutos depois de terem sido ajudadas, pela professora, a descobrirem quantos minutos correspondiam a um sexto da hora. Este tipo de raciocínio contribuiu para que os pares de trabalho fossem capazes de responder corretamente à terceira alínea.

No que se refere à quarta situação, que não permitia o uso dos blocos padrão, todos os alunos iniciaram o processo de cálculo número comparando as partes fracionárias dos numerais mistos. Verificaram que a parte fracionária do aditivo era superior à parte fracionária do subtrativo e concluíram a resolução da subtração, com sucesso e sem a intervenção da professora.

Por fim, os alunos resolveram a quinta situação problemática. Todos os alunos obtiveram o resultado correto mas AF1 e AF2 optaram pela representação pictórica (ver Figura 88) e os restantes por cálculo numérico.



Figura 88. Resolução da Quinta Situação Proposta por AF1 e AF2

Para concluir a sessão de trabalho, a fim de obtermos um *feedback* do que os alunos pensam sobre os blocos padrão e a sua utilização nas aulas de Matemática, mas propriamente no estudo dos números racionais, foi-lhes proposto a construção, em pares, de um acróstico constituído pelas palavras “blocos padrão”, apresentados na Figura 89.

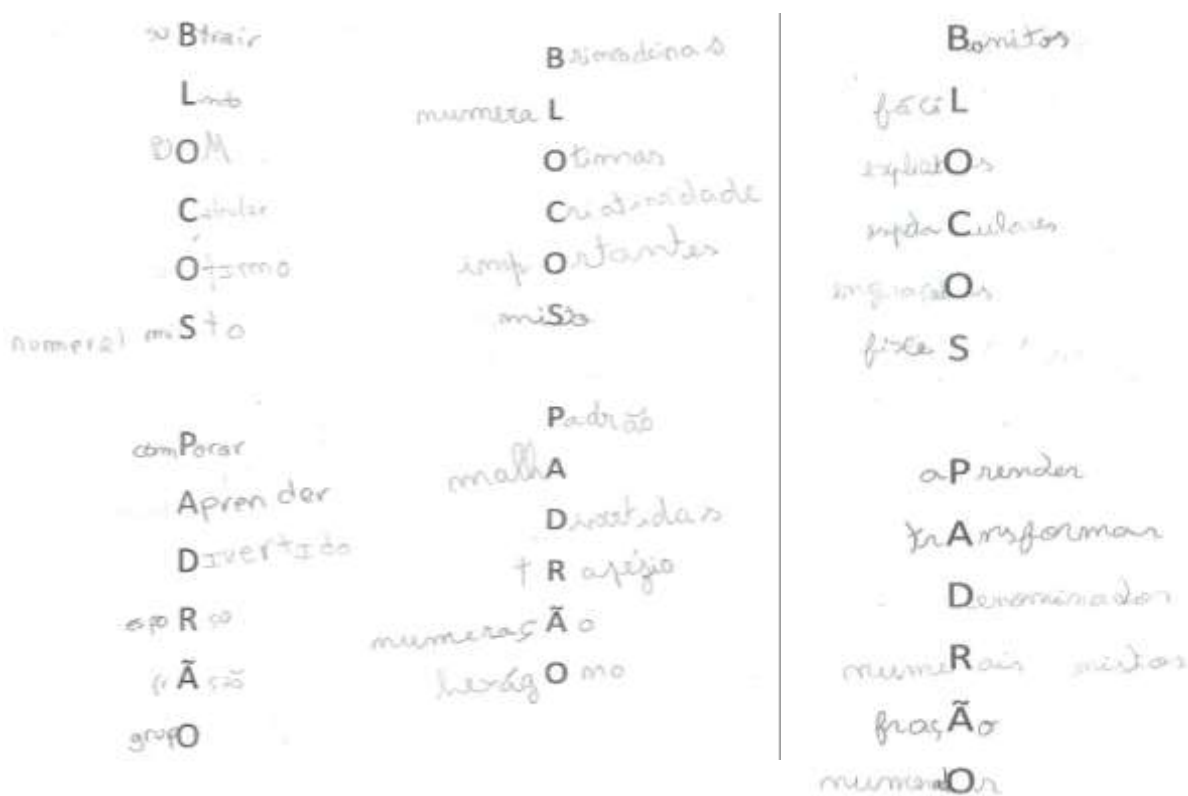


Figura 89. Acrósticos Realizados por AF1 e AF2, AF3 e AF4 e AM5 e AM6

Pela análise dos acrósticos concluímos que os blocos padrão favoreceram a criação de um ambiente de sala de aula favorável à aprendizagem dos números racionais, nomeadamente dos números fracionários pois, apesar de se tratar de um assunto de difícil aprendizagem para muitos alunos, os blocos padrão permitiram concretizar estas aprendizagens com significado. As palavras “*explícitos*” e “*aprender*”, assim como o comentário referido por AF3 quando seleccionou os blocos padrão como forma de resolução preferida porque “*para mim é muito mais fácil porque vejo as frações*”, permitem-nos concluir a importância e a proficuidade que os blocos padrão podem ter no estudo das frações. O facto de a manipulação dos blocos padrão permitir, aos alunos, a manipulação e a visualização de frações e numerais mistos pela representação das peças dos blocos padrão, tornou, neste caso, o estudo dos números fracionários mais explícito, mais concreto, levando-nos a defender o recurso dos blocos padrão no estudo deste tema complexo. Aliás, em todos os acrósticos, os pares referiram os “*numerais mistos*”, para além de termos associados ao estudo de frações como “*denominador*”, “*numerador*”, “*fração*” e “*comparar*”.

Para além de facultarem momentos favoráveis à aprendizagem, a manipulação e exploração deste material, ajudou-nos a proporcionar um ambiente de aprendizagem agradável e que, na nossa opinião, foi ao encontro dos interesses dos alunos, por isso, nos acrósticos encontramos as palavras “*importantes*”, “*ótimo*”, “*fixes*”, “*espetaculares*”, “*bom*” e “*divertidos*”. Os blocos padrão foram extremamente importantes para manter os alunos motivados nas tarefas propostas. Os alunos nunca desistiram de aprender apesar das dificuldades que alguns foram sentindo. Antes pelo contrário, os alunos foram persistentes pois, mesmo que por vezes não tivessem o apoio imediato da professora, os alunos encontravam nos blocos padrão a ajuda que necessitavam para resolver as tarefas. Os blocos padrão contribuíram também para que o tema dos Números Racionais Não Negativos fosse encarado, pelos alunos, de forma positiva e sem medos, embora estivessem conscientes de que era necessário “*esforço*” de sua parte, conforme referido no acróstico criado pelos alunos AF1 e AF2.

CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentaremos as conclusões mais importantes relativas a cada um dos objetivos definidos e questões de investigação, aspetos positivos da investigação realizada, limitações do estudo assim como algumas sugestões para futuras investigações. A par das conclusões do nosso estudo, serão mencionados algumas investigações sobre as mesmas matérias, que compararemos com as nossas conclusões.

Conclusões da Investigação

A primeira questão que nos propusemos investigar foi:

De que forma os blocos padrão podem contribuir para a compreensão do sentido de fração parte-todo e de numeral misto, bem como das operações de adição e subtração com estas representações?

Este estudo permitiu-nos verificar que a fração é, de facto, uma forma de representação complexa, cuja compreensão constitui um verdadeiro desafio para muitos alunos. São vários os motivos que conduzem a esta situação, que advêm da complexidade do conceito e do método de ensino que os professores privilegiam, conforme expusemos no Capítulo I, pelo que se revela profícua a abordagem conceptual do conceito de fração (Mamede, 2011; Nascimento, 2008; Ponte & Quaresma, 2011).

Destacaremos a questão da unidade que, segundo Monteiro e Pinto (2005), constitui uma das maiores dificuldades inerentes ao estudo das frações, como verificamos aquando da resolução da primeira tarefa, quando alteramos a estrutura da unidade considerada. Apesar disso, este estudo permitiu-nos comprovar que o trabalho com uma variedade de unidades é profícuo, conforme defendido pelos autores, para além de que os blocos padrão em muito contribuíram para a superação desta dificuldade, uma vez que, para além de facilitarem a compreensão da relação parte-todo, através da manipulação deste material concreto e de questões orientadoras, os alunos aperceberam-se de dois aspetos fundamentais a ter em conta na representação sob a forma de fração, designadamente, a quantidade das partes envolvidas, bem como a necessidade de estas estarem igualmente divididas. Apercebemo-nos ainda que, quando os alunos compreendem a estrutura da unidade, estes progridem na compreensão de frações e, consequentemente, na compreensão dos numerais mistos, permitindo-lhes facilmente converter o numeral misto numa fração imprópria e vice-versa, outra fragilidade que, inicialmente, sentimos

por parte dos alunos, mas que os blocos padrão, bem como as representações pictóricas a eles associados, em muito ajudaram a ultrapassar. Pudemos comprovar, conforme defendido por Amato (2005) que o trabalho sistemático com frações que representam a unidade constitui um passo muito importante para a compreensão da representação de números racionais na forma de numerais mistos. Aliás, apercebemo-nos que as dificuldades detetadas por vários autores, nomeadamente Bertoni (2009) e Nascimento (2008), que se prendem ao estudo das frações impróprias, por representarem números superiores à unidade, foram apenas visíveis numa fase inicial. O trabalho com os blocos padrão e a insistência nas representações pictóricas/figurativas foram poderosos contributos na compreensão deste tipo de frações, de tal forma que, ainda agora os alunos utilizam ambas as representações (fração imprópria e numeral misto) de um modo flexível, com destreza, não lhes causando qualquer tipo de constrangimento, facto este que se comprova pela observação de uma tendência natural, por parte dos alunos participantes deste estudo, em converterem as frações impróprias, obtidas sem contexto, resultantes do cálculo numérico de uma expressão, na forma de numeral misto e vice-versa.

Além disso, a compreensão da estrutura da unidade, depois de adquirida, revestiu-se de suma importância para a compreensão da noção de frações equivalentes que consideramos imprescindível na compreensão dos processos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Embora, inicialmente, se observasse um ligeiro bloqueio na resolução destas operações com frações representadas com denominadores diferentes, a frequente manipulação dos blocos padrão, a par de questões de orientação por parte da professora, ajudaram os alunos a ultrapassar este bloqueio inicial, tornando diminutas e praticamente ultrapassadas, numa fase posterior, as dificuldades apontadas por Monteiro e Pinto (2005), Mamede (2011) e Sá (2011) aquando da resolução do cálculo numérico das operações. Estes ligeiros bloqueios foram rapidamente ultrapassados pela utilização dos blocos padrão e malha isométrica, por tornarem necessária e, acima de tudo, compreendida a noção de fração equivalente. Podemos assim afirmar que os blocos padrão tornaram sólida a passagem do nível concreto e semiconcreto, indicado por Vale (1999), para o nível abstrato.

Além disso, uma vez que um dos problemas relacionados com a aprendizagem dos números racionais advém, em grande parte, dos métodos de ensino utilizados pelos professores, conforme defendido por Nascimento (2008), é nossa opinião que esta situação poderá ser ultrapassada se o professor fizer uso, de forma refletida e compreendida, de materiais concretos e manipuláveis, como são exemplo, os blocos padrão. Estes poderão proporcionar um ambiente de aprendizagem ativo e envolvente, tornando este tema emocionante e interessante (Nacarato, 2005).

Além disso, foi surpreendente observar a potencialidade deste material em manter os alunos motivados nas tarefas propostas. Observamos que os alunos nunca desistiram de aprender, apesar das dificuldades que alguns sentiram. Pelo contrário, os alunos foram persistentes pois, mesmo que por vezes não tivessem o apoio imediato da professora, os alunos encontraram nos blocos padrão a ajuda que necessitavam para resolver as tarefas. Este aspeto torna-se de real importância quando se trata do estudo das frações, um conceito abstrato, considerado por muitos complexo e, por isso, de difícil compreensão.

Não podemos, com isto, dizer que os blocos padrão retiram as dificuldades dos alunos no estudo dos números racionais e, por isso, resolvem os problemas ao nível do ensino e da sua aprendizagem, mas podemos afirmar que estes revelaram ser um poderoso contributo por serem um meio eficaz de materializar um conceito tão abstrato. A sua manipulação permitiu que os alunos atribuíssem sentido à noção de fração, de numeral misto e da operação com estas representações, uma vez que tornou possível a sua concretização por ter favorecido a sua visualização. O estudo dos números racionais tornou-se mais concreto e, por isso, mais explícito e significativo, o que nos leva a defender o recurso a este material em toda a leção deste tema. Os blocos padrão constituem, neste âmbito, um excelente instrumento para motivar o pensar.

Outro aspeto positivo que observamos na utilização deste material manipulável foi o facto de os blocos padrão favorecerem a comunicação matemática, nomeadamente o uso da linguagem adequada das frações pois, apesar de os alunos manipularem formas geométricas de cores diferentes e, numa fase inicial, ser natural usarem estes atributos para se referirem às diferentes partes da unidade, de forma gradual, os alunos deixaram de usar estes atributos apropriando-se da linguagem associada às frações o que, a nosso ver foi muito positivo, quer ao nível da comunicação, quer ao nível da compreensão.

Outra questão que nos propusemos investigar foi:

Que processos utilizam os alunos na resolução de tarefas conducentes ao desenvolvimento do sentido de fração parte-todo e de numeral misto?

Tendo em conta os resultados de investigações sobre os benefícios da utilização de várias representações no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos (Vale, 2012), foi nossa intenção incentivar o uso, por parte dos alunos, de várias representações (concreta, verbal, pictórica e simbólica), embora tivéssemos dado particular atenção às representações visuais/figurativas, de modo a usarem-nas, com flexibilidade, visando o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Apesar disso, inicialmente, tivemos necessidade de induzir o uso dos blocos padrão, por este material constituir um dos nossos objetos de estudo, e, gradualmente, foi dada a possibilidade de os alunos optarem pelo recurso ou processo que consideravam ser, no momento, o mais eficaz. Em praticamente todos os casos, os alunos deram preferência aos blocos padrão, recorrendo espontaneamente a estes, tendo sido visível uma evolução na apropriação destes. Este estudo permitiu-nos assim constatar que os blocos padrão foram recebidos com agrado pelos alunos, para além de terem sido de fácil manipulação como pudemos observar no modo flexível com que usavam e manipulavam as peças. Este facto confirma as conclusões dos mais diversos estudos realizados (e.g., Nacarato, 2005; Naiser, et al., 2003; Vale, 1999) e referidos no Capítulo II, sobre a relevância do uso dos materiais manipuláveis no ensino da matemática, uma vez que estes materiais, pela sua manipulação, apelam ao sentido do tato e da visão dos alunos, favorecendo a construção ativa, e com significado, do conhecimento (Almiro, 2005; Nascimento, 2008). Estes possibilitaram uma melhor compreensão dos conceitos que pretendíamos trabalhar, uma vez que potenciaram a ação, a reflexão e a capacidade de comunicação, essenciais à aprendizagem matemática (Vale, 1999). Além disso, os blocos padrão, enquanto material manipulável, tiveram um grande impacto na autoestima dos alunos, tendo-os ajudado a terem mais confiança e segurança na execução das tarefas, tal como referiram Matos e Serrazina (1996). Foi, por isso, possível ver que, independentemente dos diferentes ritmos de aprendizagem, estes sempre foram usados, por todos, como suporte na explicitação das relações observadas. Os alunos com mais dificuldades usaram-nos, sempre que possível, ao longo de todo o processo de resolução das situações propostas e, os alunos com maior destreza mental, mesmo depois de terem evoluído para um nível mais abstrato, apesar de se terem desvinculado mais cedo do material, não deixaram de recorrer aos blocos padrão para confirmação e validação dos resultados. Além disso, a este respeito, verificamos que, após algum contacto com este material, este mostrou ser também um importante auxílio na previsão dos resultados, especialmente quando estes se apresentavam na forma de numeral misto, por tornarem explícito a representação da quantidade a ser trabalhada.

Por isso, na planificação das tarefas, tivemos em consideração três etapas, sugeridas por Vale (1999) para que o processo de ensino e aprendizagem fosse bem-sucedido, nomeadamente: a importância de se partir do *nível concreto*, no qual os alunos manipularam os blocos padrão; passando para um *nível semiconcreto*, neste caso, o pictórico ou figurativo; para o alcance de uma fase mais avançada, o *nível abstrato*, de modo a favorecer a utilização da simbologia própria da matemática. Neste sentido, gradualmente, incentivamos o abandono dos blocos padrão, tendo os alunos sido motivados a utilizar as malhas isométricas ou outras formas de representação, de modo a evoluírem, gradualmente, para a fase pictórica e, finalmente, para o abstrato. As malhas

isométricas disponibilizadas foram, no entanto, pouco usadas pelos alunos. Pensamos que isto se deve à facilidade com que os alunos se apropriaram do material, tendo o seu uso sido suficiente na resolução das tarefas, por permitir uma excelente visualização do conceito envolvido. Apesar disso, as malhas isométricas, quando usadas, foram muito importantes na compreensão do conceito de frações equivalentes, neste caso, de frações com os denominadores dois, três e seis (uma vez que os blocos padrão apenas permitiram o trabalho com frações com estes denominadores), pelo facto de a malha isométrica usada, também permitir a divisão e consequente visualização, da unidade em duas, três e seis partes iguais. Pensamos que este recurso, a par dos blocos padrão, contribuiu para a aprendizagem significativa deste conceito, aliás, foram frequentes os casos em que, de forma espontânea, os alunos apresentaram os resultados usando várias frações equivalentes.

Verificámos ainda a importância que a representação pictórica teve na passagem para o nível abstrato, pelo que constitui uma representação que não deve ser descurada, pois, “pensar visualmente” constitui, segundo Vale e Pimentel (2012), uma “capacidade inata nos alunos” (p. 189). Aliás, foi o que verificamos pois, em vários casos, os alunos recorreram a esta forma de representação para realizar procedimentos, encontrar a solução a uma situação proposta e também para prova da mesma. Esta representação teve, neste âmbito, grandes implicações na compreensão das frações, dos numerais mistos e das operações com estas representações, especialmente em situações de mais difícil compreensão, como observámos quando os alunos tiveram de aplicar a regra que descobriram para adição e subtração de frações com denominadores diferentes sem a possibilidade de recurso dos blocos padrão e na subtração de numerais mistos que exigiam o empréstimo de uma unidade à parte fracionária do aditivo. A representação pictórica assumiu, nestes casos, particular importância na compreensão do cálculo numérico, tendo sido possível observar uma evolução para o nível abstrato, pela rápida transição entre a representação pictórica e a representação numérica.

Portanto, em jeito de conclusão, podemos concluir que, neste grupo de alunos participantes, as estratégias de ensino que parecem ter facilitado o desenvolvimento do sentido de fração, de numeral misto e das operações com ambas as representações, foram o recurso aos blocos padrão e o incentivo frequente à representação pictórica e verbal, em detrimento da ênfase nos procedimentos e algoritmos, uma vez que estas forneceram, aos alunos, os alicerces para a compreensão e facilidade na assimilação e aplicação dos procedimentos a ter na resolução de expressões numéricas.

A terceira questão que nos propusemos investigar foi:

Qual a pertinência do estudo dos numerais mistos na compreensão do número racional?

A este respeito consideramos, agora, que o destaque dado no Programa e Metas Curriculares de Matemática faz todo o sentido na compreensão deste assunto tão complexo. Primeiro, porque, a realidade apresentada por Wu (2002) foi por nós constatada, isto é, os numerais mistos são, para os alunos, uma forma de representação muito mais compreensível do que a fração imprópria correspondente, uma vez que facilita a perceção/noção da quantidade envolvida. Talvez por isso, na sequência de tarefas exploratórias que delineamos, com recurso aos blocos padrão, a noção de numeral misto tenha surgido muito naturalmente quando se representaram frações superiores à unidade. Além disso, foi também possível observar que esta representação, depois de assimilada, passou a ser muitas vezes usada pelos alunos na expressão de somas e diferenças de frações quando pretendíamos como primeiro resultado uma fração. Este facto leva-nos a crer que esta é uma representação a que os alunos mais facilmente atribuem significado quando trabalhada a par com material manipulável, designadamente os blocos padrão, pelo que, à semelhança de Wu (2002) defendemos que esta representação seja trabalhada da mesma forma e com a mesma frequência do que as restantes frações.

A segunda razão pela qual consideramos pertinente o trabalho com os numerais mistos prende-se com o facto de estes amenizarem a dificuldade que os alunos frequentemente manifestam na compreensão das frações impróprias por estas representarem números superiores à unidade. Verificamos que os alunos participantes sentiram-se mais à vontade em trabalhar com numerais mistos do que com as frações impróprias correspondentes, por exemplo, no posicionamento correto na reta numérica.

Além disso, diferentemente do que pensávamos, a resolução de operações com numerais mistos foi de fácil assimilação e compreensão, para além de que permitiram uma rápida previsão dos resultados, ajudando os alunos a terem um olhar mais atento e mais crítico face ao resultado obtido. Assim, consideramos muito importante e pertinente o destaque que o programa atual confere aos numerais mistos e adição e subtração de números racionais representados por numerais mistos, especialmente quando este conteúdo é trabalhado paralelamente com os blocos padrão.

Em suma, consideramos que os blocos padrão constituem um recurso muito útil, aliás, um excelente mediador na aprendizagem dos números racionais, nomeadamente, na compreensão da sua representação, quer na forma de fração, quer na forma de numeral misto e operações com estas representações. Os blocos padrão potenciaram a utilização do tato e da visão, tornando mais claro e mais explícita a representação na forma de fração e numeral misto, bem como o processo de adição e a subtração destas representações, o que levou os alunos a encontrarem significado em todos os procedimentos realizados. Este estudo permitiu-nos também concluir que

a leção deste conteúdo deve ir mais além do ensino de regras e procedimentos mecânicos (Nascimento, 2008), para que o conhecimento se adquira com compreensão, e os blocos padrão tornam isso possível. Estes poderão contribuir para que os conhecimentos dos alunos cresçam e se desenvolvam em bases sólidas, sobre bons alicerces e com menores riscos de se desmoronarem. Acreditamos que, quanto melhor compreendida a noção de fração e a representação na forma de numeral misto, as operações com estas representações serão melhor compreendidas e, conseqüentemente, o conceito dos números racionais tornar-se-á mais claro e mais significativo.

Aspetos Positivos do Estudo

Temos constatado que o trabalho realizado com os alunos que participaram neste estudo continua a ter um impacto positivo no seu processo de aprendizagem. Apesar de já terem integrado novamente a turma e não estarem, neste momento, a trabalhar com os blocos padrão, os alunos evidenciam ter feito uma aprendizagem significativa dos conteúdos trabalhados através da sequência de tarefas que propusemos com recurso aos blocos padrão. Dizemos isto pois, aquando da realização de uma simples adição, diferentemente dos restantes alunos que não trabalharam com os blocos padrão, estes foram os únicos que relacionaram os resultados com a unidade, isto é, em todas as operações cujo resultado era uma fração com numerador igual ao denominador, os alunos imediatamente associaram à unidade, e, quando o resultado era uma fração imprópria converteram-na num numeral misto. Isto leva-nos a crer que os alunos interpretaram a operação, atribuindo-lhe significado, o que lhes permitiu estabelecer as igualdades sem ter sido fornecida orientação neste sentido. Quando lhes foi pedido que explicassem esta conversão, os alunos nunca relacionaram os numeradores com os denominadores, tendo simplesmente referido a unidade e a parte fracionária que não estava completa. Por exemplo, um dos alunos, AM5, quando solicitado a explicar como procedeu na escrita da fração $\frac{11}{8}$ num numeral misto disse “ $\frac{11}{8}$ é maior do que a unidade. A unidade são $\frac{8}{8}$ e $\frac{11}{8}$ são uma unidade mais $\frac{3}{8}$ ”. Em outra situação, AF2 explicou que “ $\frac{26}{20} = 1 \frac{6}{20}$ porque passam $\frac{6}{20}$ dos $\frac{20}{20}$ que são a unidade”. De salientar que, em ambas as situações, os alunos já não recorreram a representações pictóricas e, mesmo depois de terem aprendido a “técnica” para a conversão de frações impróprias em numerais mistos e vice-versa, as explicações dos alunos não se cingiram à explicação de técnicas. Os alunos participantes explicaram, tornando explícito o seu modo de

pensar e raciocinar, o que nos leva a concluir que fizeram uso dos procedimentos com compreensão, tornando a aprendizagem, neste âmbito, significativa.

Foi também muito agradável constatar a rapidez com que os alunos faziam esta conversão, sem recorrer às técnicas que, normalmente, são ensinadas e o foram aquando da sua integração na turma. Aliás, quando esta técnica/procedimento foi ensinada, os alunos tiveram, inicialmente, alguma dificuldade em assimilá-la pois, para eles, não fazia sentido aprender uma técnica para algo que já faziam de forma tão compreendida e fluente. Apesar de, neste momento, já terem adquirido esta técnica, a maioria dos alunos participantes não a usa na resolução de conversões e operações.

Por outro lado, o trabalho desenvolvido com os blocos padrão ao nível de sala de aula, pela divulgação que teve no Agrupamento, especialmente ao nível do 1.º CEB, foi também muito importante pois impulsionou um trabalho de articulação com este grupo de professores que, embora já existisse, passou agora a centrar-se mais ao nível da planificação e partilha de estratégias de ensino e aprendizagem mais eficazes. Estas sessões de articulação têm surtido efeitos positivos, especialmente ao nível da atitude com que os professores passam a encarar este tema e a sua leção, cujo estudo se tornou mais profundo e mais complexo neste ciclo de ensino.

Assim, tendo em vista, o contributo positivo que os blocos padrão proporcionaram quer com os alunos participantes, quer com os professores que lecionam no 1.º CEB do Agrupamento, numa melhor compreensão dos números racionais e das operações, ora representados na forma de fração, ora na forma de numeral misto, pensamos que este material, assim como a sequência de tarefas aplicadas, precisam de ser mais conhecidos pelos educadores e pelos professores. Estes favorecerão o desenvolvimento do gosto, pelos alunos, por este tema e pela Matemática, e, conseqüentemente, uma maior predisposição para a aprendizagem que se pretende que seja significativa. Para além disso, poderão também aumentar a motivação para o ensino deste tema e da Matemática, cujos professores e educadores ambicionam que seja de qualidade, apelativo, enriquecedor e criativo, capaz de potenciar o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos nossos alunos. Esperamos, com esta investigação, ter contribuído para uma reflexão sobre as conceções e práticas dos professores que lecionam a disciplina de Matemática, visando a melhoria das práticas de ensino no que respeita a este conteúdo.

Limitações do Estudo

Apesar da imensa procura na literatura nacional e internacional, não encontramos muita informação disponível sobre o ensino dos numerais mistos e sobre os blocos padrão o que, para nós, constituiu uma limitação ao nosso estudo. Aceder a mais trabalhos de investigação, além dos apresentados, poderia ter enriquecido a aplicação das tarefas que propusemos aos alunos.

Além disso, o facto de termos retirado um grupo de seis alunos da turma onde normalmente estão integrados e habitualmente trabalham individualmente, e termos constituído grupos de trabalho, de acordo com determinados critérios, poderá ter condicionado o desempenho inicial dos alunos participantes.

Sugestões para Futuras Investigações

Pelos aspetos positivos observados na utilização dos blocos padrão, é nossa sugestão para futuras investigações, a descoberta das potencialidades que os blocos padrão poderão ter na exploração dos vários significados da fração, bem como na exploração das operações multiplicação e divisão, e dos mais variados temas do programa, desde o 1.º CEB.

A esta sugestão acrescentamos um estudo sobre a forma como os professores atualizam os seus conhecimentos científicos sobre os números racionais, perante as constantes mudanças do Programa de Matemática.

REFERÊNCIAS

- Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. In GTI Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 275-315). Lisboa: APM.
- Amato, S. A. (2005). Developing student's understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick, & J. Vincent, *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 2, (pp. 49-56). Melbourne, Australia: Department of Science and Mathematics Education University of Melbourne.
- Armella, L. M., & Waldegg, G. (1992). Construtivismo e educação matemática. *Educación Matemática*, 4(2), pp. 7-15.
- Becker, F. (1993). *A epistemologia do professor: o cotidiano da escola*. Petrópolis: Vozes.
- Beckmann, S. (2006). *Why Can't We Use Those Other Pattern Tiles?* Consultado em <https://mathematicsteachingcommunity.math.uga.edu/files/83341964-Measurement.pdf> em 7 de dezembro de 2014
- Bertoni, N. E. (2009). Módulo IV: Educação e linguagem matemática IV - Frações e números fracionários. Brasília: Universidade de Brasília.
- Bisognin, E., & Bisognin, V. (2014). Modelagem e competências matemáticas: uma investigação com professores em formação continuada. *REVEMAT*, 9(2), 130-134.
- Bogdan, R. C., & Bicklen, S. K. (2013). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Boimare, S. (2001). *A criança e o medo de aprender*. Lisboa: CLIMEPSI EDITORES.
- Caldeira, M. F. (2009). A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática. Tese de Doutorado, Escola Superior de Educação João de Deus, Málaga.
- Caraça, B. J. (1989). *Conceitos Fundamentais da Matemática*, (9.ª ed.). Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.
- Cardoso, E., Benevides-Pereira, A., & Franco, V. (2011). Aspectos afetivos: elementos relevantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. In Cadernos dos Trabalhos Completos do X CONPE (Congresso Nacional de Psicologia Escolar e Educacional), *Psicologia Escolar e Educacional: Caminhos Trilhados, Caminhos a Percorrer* (pp. 866-883). Universidade Estadual de Maringá: ABRAPEE.
- Champion, J., & Wheeler, A. (2014). Revisit Pattern Blocks to Develop Rational Number Sense. *Mathematics teaching in the middle school*, 19 (6), 336-343.
- Charnay, R. (2001). Aprendendo (com) a resolução de problemas. In PARRA, C. (org.). *Didática da Matemática, reflexões psicopedagógicas* (pp. 36-47). Porto Alegre: Artes Médicas.
- Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221-243.

- David, M. M., & Fonseca, M. (1997). Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. *Presença Pedagógica*, 3(14), 55-67.
- Deneca, M. L., & Pires, M. (s.d.). *O ensino da Matemática com auxílio dos materiais manipuláveis*. Retirado em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/625-4.pdf> em 12 de novembro de 2014
- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2), 266-297.
- Ellington, A. J., & Whitenack, J. W. (2010). Fraction and the funky cookie. *Teaching Children Mathematics*, 16(9), 532-539.
- Fiorentini, D., & Miorim, M. (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. *Boletim de Educação Matemática da SBEM-SP*, 4 (7), 5-10.
- Fragoso, W. C. (2001). O Medo da Matemática. *Educação*, 6(2); 26(2), 96-109.
- Gaviraghi, A. (2012). Alguns entendimentos do número racional na representação fracionária produzidos por alunos no início do 6º ano. Monografia, Universidade Regional do Noroeste do Rio Grande do Sul de Ijuí, Brasil.
- Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction on a Number Line, In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 17-24.
- Lessa, V. E. (2011). A compreensão do conceito de número fracionário: uma sequência didática para o significado medida. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- Lopes, A. J. (2008). O que os nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*, 31, 1-22.
- Lopes, J. (2004). *Aprender e Ensinar Física*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Lopes, J., & Silva, H. S. (2009). *A aprendizagem cooperativa na sala de aula : um guia prático para o professor*. Lisboa: Lidel.
- Lorenzato, S. (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, S.P: Autores associados.
- Mamede, E. (2011). Sobre o ensino e aprendizagem de frações nos níveis elementares de ensino. In *Actas do Profmat2011* (pp. 1-6). Lisboa: APM.
- Matos, J. M., & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Melo, H. M. (2013). Relevância da abordagem qualitativa no estudo de caso. *Indagatio Didactica* 5(2), 1030-1046.
- Menegazzi, M. (2013). O estudo de frações: uma experiência no curso de pedagogia. *REVEMAT*, 8(1), 248-265.
- Ministério da Educação. (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização de ensino-aprendizagem (2.º CEB)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

- Ministério da Educação. (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais. Lisboa: Departamento de Educação Básica.
- Ministério da Educação. (2007). Programa de Matemática do ensino básico. Lisboa: DGIDC.
- Ministério da Educação e Ciência. (2013). Programa e metas curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: MEC.
- Monteiro, C., & Costa, C. (1996). Dificuldades na aprendizagem dos números racionais. *Educação e Matemática*, nº40, 60-63.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-107.
- Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). Mal entendidos mais comuns dos alunos relativamente às fracções e aos numerais decimais. *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.
- Monteiro, C., Pinto, H., & Figueiredo, N. (2005). As frações e o desenvolvimento do sentido do número racional. *Educação e Matemática*, 85, 47-51.
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175-197.
- Nacarato, A. M. (2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Educação Matemática*, 9, 1-6.
- Naiser, E. A., Wright, W. E., & Capraro, R. M. (2003). Teaching Fractions: Startegies Used for Teaching Fractions to Middle Grades Students. *Journal of Research in Childhood Education*, 18(3), 193-198.
- Nascimento, J. (2008). Perspectivas para aprendizagem e ensino dos números racionais. *Revista de Iniciação Científica da FFC*, 8(2), 196-208.
- NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- NCTM. (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.
- Niemann, F. d., & Brandoli, F. (2012). Jean Piaget: um aporte teórico para o construtivismo e suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem da Língua Portuguesa e da Matemática. In *Atas do IX ANPED SUL Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul*. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. (2012). Recursos Didáticos numa aula de ensino exploratório: da prática à representação de uma prática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 559-571). Portalegre: SPIEM.
- Oliveira, R. G., & Silva, L. (2014). Aprendizagem do conceito de frações frente a situações de aprendizagem sugeridas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *REVEMAT*, 9(1), 69-89.
- Oliveira, R. N. (2013). “Ver como”: uma vivência do olhar para aprendizagem de Geometria. *REVEMAT*, 8(2), 135-143.

- Paulo, S. G., & Pinheiro, M. (2013). Alguns aspectos do ensino da Matemática por meio de materiais concretos. In XI Encontro Nacional de Educação Matemática, *Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas*. Curitiba: SBEM.
- Pelissaro, S. (2011). Ensino de frações: novas abordagens. Monografia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- Pereira, M. C. (2009). Construindo FRAC-SOMA 235 e conhecimento, no ensino básico. Monografia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- Pinto, S. I. (2012). Materiais estruturados: qual o seu papel na aprendizagem dos primeiros números? Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interações*, 5(12), 96-114.
- Ponte, J. P. (2010). Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 110, 3-6.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 20(1), 55-81.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (org.) *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 253-268). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2013). Representações e raciocínio matemático nos números racionais. In L. Santos, A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático*, (pp. 277-296). Lisboa: SPIEM.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática*, 80, 8-12.
- Reis, L. R. (2005). Rejeição à matemática: causas e formas de intervenção. Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de Brasília, Brasil.
- Rodrigues, F. C., & Gazire, E. (2012). Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *Revemat*, 7(2), 187-196.
- Sá, F. B. (2011). Aprendizagem de frações no Ensino Fundamental. Monografia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- Serrazina, M. L. (2012). O sentido do número no 1.º ciclo: uma leitura de investigação. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes (Org.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 109-120). Lisboa: APM.
- Silva, F. F., & Boeri, C. N. (2013). Por que os alunos têm medo de matemática? Um estudo de caso no primeiro ano de uma escola de ensino médio. *Ágora*, 16, 157-170.

- Silva, M. J. (2004). *As concepções de números fracionários*. Consultado em 20 de dezembro de 2014 em http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/def_mat_concepfracoes1.pdf.
- Silva, M. M. (2012). Do número natural ao número racional: um projeto de colaboração com uma professora do 3.º ano de escolaridade, Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Swan, P., & White, G. (2013). *Developing Mathematics with Pattern Blocks*. Perth: RIC Publications.
- Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In APM (Ed.), *Actas ProfMat99* (pp. 111-120). Lisboa: APM.
- Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, 8(20), 181-207.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavaro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347-360). Portalegre: SPIEM.
- Valera, A. R. (2003). Uso social e escolar dos números racionais - representação fracionária e decimal. Dissertação de Pós-Graduação, Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Brasil.
- Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 37-65.
- Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A Proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas. *Educação e Matemática*, 123, pp. 3-8.
- Ventura, H. M. (2013). A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2.º ciclo do ensino básico. Tese de Doutoramento em Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Viegas, M. C. (2010). Identificar e Testar Factores de Eficácia no Sentido de Melhorar as Práticas de Ensino de Física em Engenharia no Ensino Superior. Tese de Doutoramento em Didáctica da Física, Universidade de Trás-os-Monte e Alto Douro, Portugal.
- Walle, J. V. (2009). *Matemática no ensino fundamental* (6.ª ed.). Brasil: ARTMED EDITORA, S.A.
- Wu, H. (1998). *Teaching fractions in elementary school: A manual of teachers*. Consultado em <https://math.berkeley.edu/~wu/fractions1998.pdf> em 22 de dezembro de 2014.
- Wu, H. (2002). *Chapter 2: Fractions*. Consultado em <https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf> em 22 de dezembro de 2014.
- Wu, H. (2014). *Teaching Fractions According to the Common Core Standards*. Consultado em https://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf em 22 de dezembro de 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A



AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CAMPO

Campo, 21 de novembro de 2014

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas de Campo:

No âmbito do Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática realizado na Escola Superior de Educação do Porto, pretendo desenvolver um projeto de investigação para aferir de que modo o conteúdo “Números racionais não negativos”, com incidência nos numerais mistos, ensinado com recurso aos blocos padrão, é recebido pelos alunos e o contributo que a utilização deste material poderá ter na qualidade do processo de ensino e aprendizagem. Assim sendo, é meu objetivo realizar um estudo no sentido de procurar compreender como alunos do 5.º ano de escolaridade desenvolvem o sentido de numeral misto e a capacidade de os adicionarem e subtraírem, quando esta aprendizagem se realiza através de uma sequência organizada de tarefas exploratórias com recurso aos blocos padrão.

Esta investigação visa assim encontrar, criar, melhorar e aprofundar métodos que incentivem a aprendizagem dos alunos relativamente à disciplina de Matemática. Torna-se, por isso, importante e necessário observar e recolher dados sobre os trabalhos desenvolvidos pelos alunos aquando da realização destas tarefas. A recolha desta informação será feita nas próximas semanas de aulas, com um grupo de alunos do 5.º D, enquanto o conteúdo “Números racionais não negativos” estiver a ser lecionado. Para o efeito, pretende-se utilizar, após autorização dos encarregados de educação dos alunos envolvidos, diversos materiais de recolha de informação, nomeadamente, audiovisuais (câmara fotográfica, gravador áudio e vídeo) de modo a ter um registo dos trabalhos desenvolvidos na sala de aula, para posterior análise e tratamento de dados. Os dados recolhidos serão apenas usados no âmbito desta investigação, pelo que se manterá o anonimato dos alunos.

Deste modo, venho por este meio, solicitar a V.ª Ex.ª a autorização para a realização deste projeto.

Com os melhores cumprimentos,

A docente

(Sónia Meireles)

APÊNDICE B



AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CAMPO

Campo, 21 de novembro de 2014

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Didática das Ciências da Natureza e da Matemática realizado na Escola Superior de Educação do Porto, pretendo aferir de que modo o conteúdo “Números racionais não negativos”, com incidência nos numerais mistos, ensinado com recurso aos blocos padrão, é recebido pelos alunos e o contributo que a utilização deste material poderá ter na qualidade do processo de ensino e aprendizagem. Assim sendo, é meu objetivo realizar um estudo no sentido de procurar compreender como alunos do 5.º ano de escolaridade desenvolvem o sentido de numeral misto e a capacidade de os adicionarem e subtraírem, quando esta aprendizagem se realiza através de uma sequência organizada de tarefas exploratórias com recurso aos blocos padrão.

Esta investigação visa assim encontrar, criar, melhorar e aprofundar métodos que incentivem a aprendizagem dos alunos relativamente à disciplina de Matemática. Torna-se, por isso, importante e necessário observar e recolher dados sobre os trabalhos desenvolvidos pelos alunos aquando da realização destas tarefas. A recolha desta informação será feita nas próximas semanas de aulas, enquanto o conteúdo “Números racionais não negativos” estiver a ser lecionado. Para o efeito, pretende-se utilizar diversos materiais de recolha de informação, nomeadamente, audiovisuais (câmara fotográfica, gravador áudio e vídeo) de modo a ter um registo dos trabalhos desenvolvidos na sala de aula, para posterior análise e tratamento de dados.

Deste modo, venho por este meio, solicitar a sua autorização para a participação do seu educando nas atividades que se realizarão, bem como para a recolha dos dados acima referidos.

Desde já garanto que os dados recolhidos serão apenas usados no âmbito desta investigação, pelo que se manterá o anonimato dos alunos.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração abaixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

(A professora Sónia Meireles)

(A Diretora do Agrupamento)

Eu, _____, encarregado(a) de educação do aluno(a) _____, nº ____ do 5.º ____ autorizo a participação deste(a), bem como o respetivo registo audiovisual nas sessões de trabalho que se desenvolverão nas próximas semanas de aulas.

O(A) encarregado(a) de educação

(____ / ____ / 2014)

APÊNDICE C



Matemática – 5.º ano

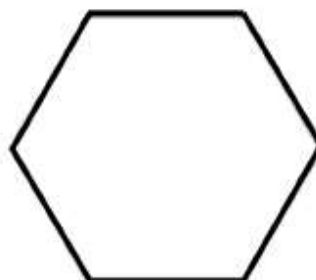
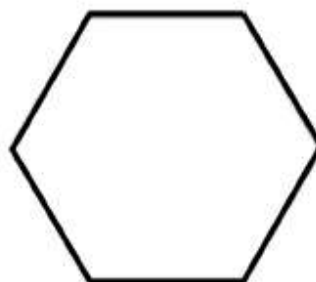
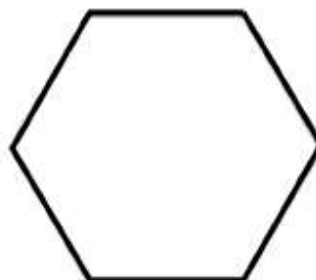
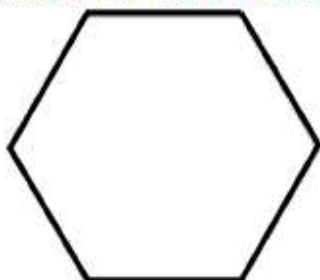
Assunto: Números racionais representados por fração – introdução

Nome:

N.º:

Turma:

- 1.** Considera o hexágono a unidade. Apresenta formas possíveis e distintas de representar um hexágono geometricamente igual ao hexágono amarelo.



1.1. Tendo em conta o trabalho que realizaste anteriormente, completa a tabela que se segue:


		Que parte da unidade representa cada uma das peças?			
Unidade					
					


2. Se  é a unidade,


•  corresponde a da unidade.


•  corresponde a da unidade.

•  corresponde a da unidade ou .


•  corresponde a da unidade ou .

•  corresponde a da unidade.

•  corresponde a da unidade.

•  corresponde a da unidade.

3. Se  é a unidade,  corresponde a da unidade.

4. Se  é a unidade, que fração da unidade representa:

- o triângulo;
- o trapézio;
- o hexágono

APÊNDICE D



Matemática – 5.º ano

Assunto: Adicionar e subtrair números racionais, representados por frações, com denominadores iguais. Numeral misto.

Nome: _____

N.º: _____

Turma: _____



1. Considera _____ a unidade.

1.1. Utiliza os blocos padrão e as malhas isométricas, sempre que necessário, e efetua as operações indicadas.

Faz os registos e apresenta o resultado sob a forma de fração.

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

O resultado obtido é _____ (inferior/igual/superior) à unidade.

Explica porquê. _____

$$\bullet \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

O resultado obtido é _____ (inferior/igual/superior) à unidade.

Explica porquê. _____

$$\bullet \frac{3}{3} + \frac{4}{3} =$$

O resultado obtido é _____ (inferior/igual/superior) à unidade.

Explica porquê. _____

$$\bullet \frac{2}{6} + \frac{4}{6} =$$

Qual é o resultado que prevês?

A tua previsão confirmou-se? _____

O resultado obtido é _____ (inferior/igual/superior) à unidade.

Explica porquê. _____

$$\bullet \frac{1}{6} + \frac{3}{6} =$$

És capaz de prever o resultado?

O resultado obtido é _____ (inferior/igual/superior) à unidade.

$$\bullet \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} =$$

Faz uma previsão do teu resultado.

O resultado obtido é _____ (inferior/igual/superior) à unidade.

Explica porquê. _____

$$\bullet \frac{3}{7} + \frac{2}{7} =$$

- 1.2.** Observa todas as operações que efetuaste e compara-as com o resultado.
Descobriste alguma regra para adicionar frações com denominadores iguais? Se sim, explica-a.

- 2.** Verifica, com recurso aos blocos padrão, se a regra que descobriste se pode aplicar na operação subtração.

$$\bullet \frac{3}{3} - \frac{2}{3} =$$

$$\bullet \frac{5}{2} - \frac{3}{2} =$$

$$\bullet \frac{9}{6} - \frac{4}{6} - \frac{1}{6} =$$

- 2.1.** Escreve a regra que te permite subtrair frações com o mesmo denominador.

3. Aplica as regras que descobriste, efetua as operações que se seguem e simplifica-as.

$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} =$	$\frac{4}{7} - \frac{1}{7} =$
$\frac{7}{6} + \frac{3}{6} =$	$\frac{12}{5} - \frac{6}{5} - \frac{1}{5} =$
$\frac{3}{2} + \frac{4}{2} =$	$\frac{7}{4} + \frac{9}{4} - \frac{10}{4} =$
$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$	$\frac{7}{3} - \frac{2}{3} =$

4. Observa novamente os resultados que obtiveste na questão 3.



4.1. Escreve os que representam números superiores à unidade.

4.2. Como sabes que os números são superiores à unidade?

4.3. Escreve as frações impróprias na forma de numeral misto. Representa-os na malha isométrica, se necessário. Considera o hexágono a unidade.

Fração imprópria	Numeral misto

5. Representa as frações impróprias em numerais misto e vice-versa. Utiliza o quadriculado se necessário.

Fração imprópria		Numeral misto
$\frac{6}{4}$	 <div>unidade</div>	<div></div>
	 <div>unidade</div>	$1\frac{3}{8}$
$\frac{12}{5}$		<div></div>
		$1\frac{5}{10}$
$\frac{8}{7}$		<div></div>

APÊNDICE E



Matemática – 5.º ano

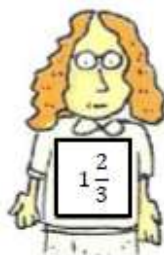
Assunto: Comparação e ordenação de numerais mistos.

Nome:

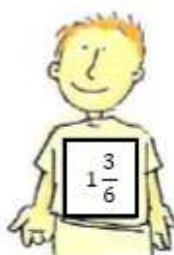
N.º:

Turma:

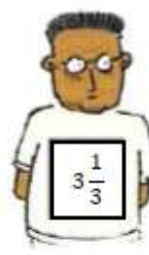
1. Foi pedido a seis alunos do 5.ºJ que escrevessem seis numerais mistos.¹



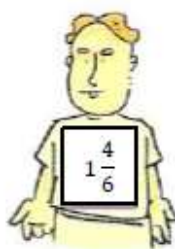
Júlia



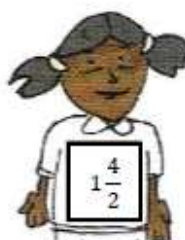
Luís



Pedro



Paulo



Laura



Ana



- 1.1. Considera a unidade.
Utiliza os blocos padrão e representa as respostas dadas por cada um dos alunos.

- 1.2. A Júlia diz que uma das respostas dadas não é um numeral misto. Concordas? Porquê?

- 1.3. Quem representou o maior número?

- 1.4. Ordena as respostas dadas pelos alunos numa sequência crescente.

¹ Exercício adaptado de “Construir a Matemática – 5.º ano”, p. 172, de Carlos Pisa, Fátima Nunes e Hélia Pinto, Santillana.

APÊNDICE F



Matemática – 5.º ano

Assunto: Adição e subtração de números representados por frações com denominadores diferentes.

Nome:

N.º:

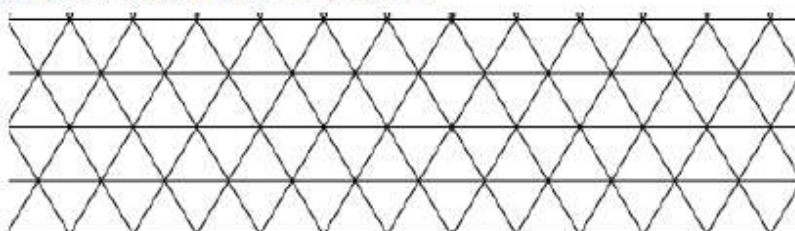
Turma:



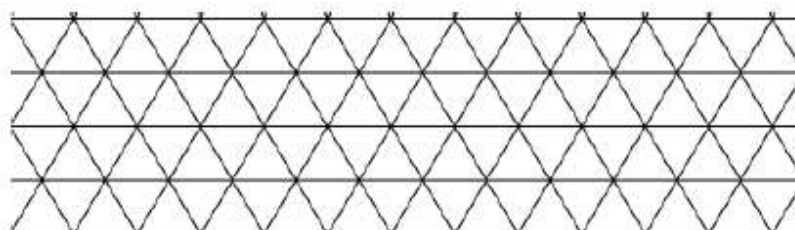
1. Considera a unidade.

1.1. Efetua as operações indicadas, faz os registos e apresenta o resultado sob a forma de fração. Utiliza os blocos padrão, e se necessário a malha isométrica.

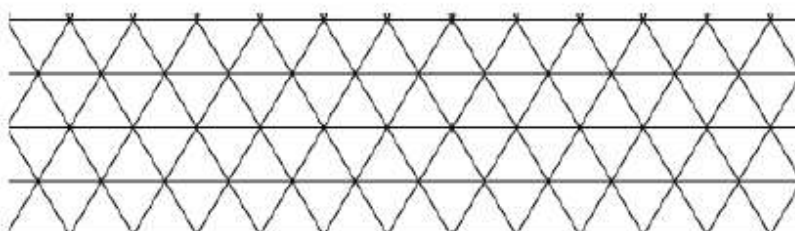
• $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$



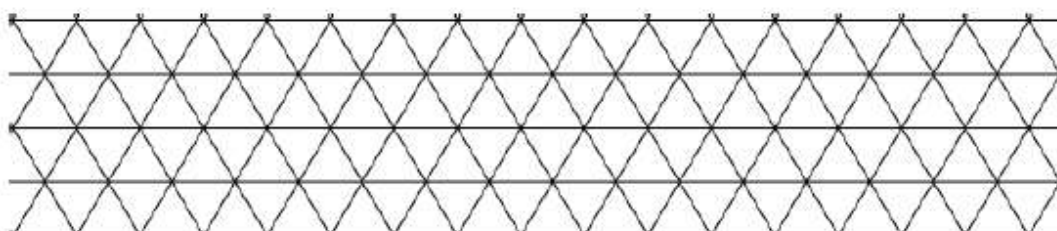
• $\frac{2}{6} + \frac{1}{3} =$



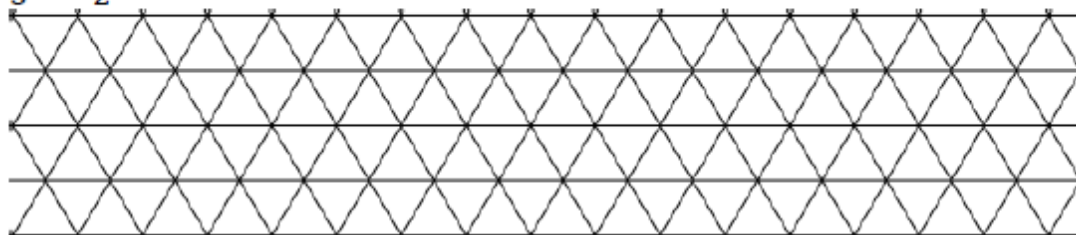
• $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$



• $\frac{10}{6} + \frac{1}{2} =$

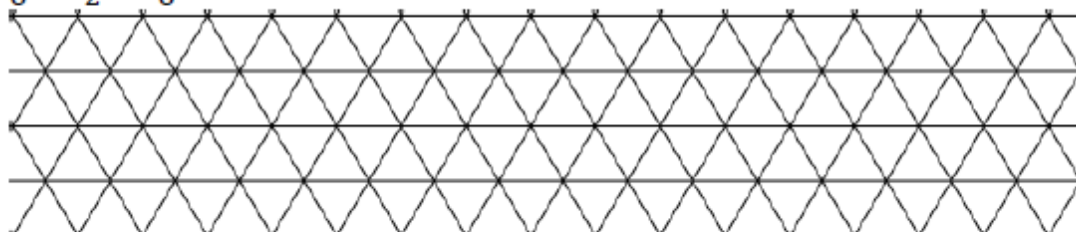


$$\bullet \frac{5}{3} + \frac{4}{2} =$$



Explica, por palavras tuas, como procedeste para adicionar estas duas frações.

$$\bullet \frac{2}{6} + \frac{3}{2} + \frac{3}{6} =$$



$$\bullet \frac{2}{5} + \frac{1}{10} =$$

$$\bullet \frac{3}{8} + \frac{2}{4} =$$

Explica, por palavras tuas, como procedeste para adicionar estas duas frações.

$$\bullet \frac{2}{3} + \frac{5}{4} =$$

1.2. Regista o que debes fazer sempre que tiveres de adicionar frações com denominadores diferentes.

2. Verifica se esta regra se aplica à subtração de números representados por frações. Confirma usando os blocos padrão.

$\frac{5}{3} - \frac{1}{2} =$	$\frac{4}{6} - \frac{1}{2} =$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} =$
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

3. Aplica:

$\frac{2}{10} + \frac{3}{5} =$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{8} =$	$\frac{1}{8} - \frac{1}{16} =$
$3 + \frac{7}{2} =$	$\frac{2}{8} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} =$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} =$
$\frac{7}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) =$	$0,5 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) =$	

4. Resolve as situações que se seguem.

Podes resolvê-las usando esquemas, desenhos, palavras ou cálculos.



A Inês pintou um sexto de um muro. A Joana pintou dois terços do mesmo muro.¹

- a) Que fração do muro pintaram as duas?
- b) Que fração do muro falta pintar?

a)

R.:

b)

R.:



O Pedro foi às compras.²

Gastou $\frac{2}{5}$ do seu dinheiro na compra de um livro e $\frac{1}{3}$ na compra de uma caneta.

- a) Que fração do dinheiro gastou o Pedro nas duas compras?
- b) Que fração do dinheiro sobrou?

a)

¹ Exercício retirado de "Exercícios 5 de Matemática" de Maria Augusta Ferreira Neves e Luísa Faria, Porto Editora.

² Exercício adaptado de "Exercícios 5 de Matemática" de Maria Augusta Ferreira Neves e Luísa Faria, Porto Editora.

R.:

b)

R.:



A Joana comeu $\frac{2}{5}$ de um bolo. A sua irmã comeu $\frac{1}{4}$ do mesmo bolo.

O primo João também comeu uma parte do bolo: $\frac{3}{10}$.

- a) Que fração do bolo comeram as duas irmãs?
- b) Compara a porção do bolo que o João comeu com a porção que ambas as irmãs comeram. Justifica.

a)

R.:

b)

R.:

APÊNDICE G



Matemática – 5.º ano

Assunto: Adição e subtração de numerais mistos.

Nome:

N.º:

Turma:

1. Considera o hexágono a unidade.

Efetua as operações indicadas e resolve-as. Apresenta os resultados sob a forma de numeral misto e respetiva fração imprópria.

- $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} =$

- $1\frac{3}{6} + 2\frac{4}{3} =$

Como explicarias a um colega teu como se adicionam numerais mistos?

- Qual a forma de resolução que preferes?

☐ Blocos padrão

☐ Malha isométrica

☐ Cálculos

Explica o motivo da tua escolha.

- $2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} =$

2. Considera o hexágono a unidade.

2.1. Efetua as operações indicadas.

Apresenta os resultados sob a forma de numeral misto e respetiva fração imprópria.

- $3\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6} =$

- $3\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6} =$

Explica como subtraíste $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{6}$.

- $4\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} =$

3. Lê atentamente cada uma das situações que se seguem e resolve-as.

Podes resolvê-las usando os blocos padrão, esquemas, desenhos, palavras ou cálculos.



A Joana tem $2\frac{3}{6}$ €. Recebeu $5\frac{1}{2}$ € do avô paterno.

a) Com quanto dinheiro ficou, em euros?

a)

R.:



A Inês tem $2\frac{1}{4}$ €. ¹

Se der $1\frac{1}{5}$ € à irmã, com quantos euros fica?

R.:



Durante esta semana, no ATL, o João gastou $2\frac{1}{3}$ h a estudar para matemática, $\frac{1}{3}$ h para lanchar e $2\frac{3}{6}$ h para fazer os TPC de História.

- a) A que disciplina o João dedicou mais tempo ao estudo?
- b) Quantas horas dedicou o João ao estudo, durante esta semana?
- c) Quantos minutos gastou para lanchar?

a)

R.:

b)

R.:

¹ Retirado de “Exercícios 5 de Matemática” de Maria Augusta Ferreira Neves e Luísa Faria, Porto Editora.

c)

R.:



A avó do Luís precisa de beber 2 litros e meio de água por dia para fazer um tratamento. Hoje já bebeu $1\frac{2}{5}$ L.

a) Quanto lhe falta beber para completar o tratamento diário?

a)

R.:



Como lembrança da viagem à Suíça, que fez nas férias de verão, a Joana trouxe seis barras de chocolate para cada uma das suas três melhores amigas. Ao fim de semana, as três amigas encontraram-se e comentaram:²

a) Indica, justificando, que quantidade de barras de chocolate as três amigas da Joana já comeram.

Já comi $2\frac{1}{2}$ dos chocolates!

Diana



Já comi $\frac{5}{4}$ dos chocolates!

Ana



Já comi $1\frac{1}{4}$ dos chocolates!



Lara

R.:

² Adaptado de "Ases da Matemática 5", p. 31, Porto Editora.

NM

MESTRADO EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DA MATEMÁTICA

fevereiro 2015