

Carla Assunção Breda da Cruz

Tarefas de Investigação com Recurso a Materiais Manipuláveis em Geometria

**Estudo de caso com uma turma do 5.º ano do Ensino
Básico**

**MESTRADO EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DA MATEMÁTICA**

Carla Assunção Breda da Cruz

Tarefas de Investigação com Recurso a Materiais Manipuláveis em Geometria

**Estudo de caso com uma turma do 5.º ano do
Ensino Básico**

Projeto submetido como requisito parcial para obtenção do grau de
MESTRE

Orientação

Prof.^a Doutora Cláudia Maia-Lima

**MESTRADO EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DA MATEMÁTICA**

AGRADECIMENTOS

A atividade desenvolvida no âmbito do Projeto de Mestrado, não pode considerar-se um trabalho isolado. Efetivamente, ele beneficiou de inúmeras ajudas e sugestões. Justifica-se, por isso, que apresente os meus agradecimentos a todos quantos me deram a sua colaboração e estímulo, sem a qual não teria sido possível realizar esta etapa da minha formação profissional.

Deste modo agradeço sentidamente:

À Prof.^a Doutora Cláudia Maia-Lima, minha orientadora científica, por todos os ensinamentos e numerosos encorajamentos, bem como pela amizade, rigor e competência com que coordenou as atividades deste Projeto.

Às amigas Armanda, Dina, Marta e Teresa, pela amizade, colaboração e estímulo permanentes.

À Direção do Agrupamento, a todo o corpo docente e aos funcionários, de quem sempre recebi provas de amizade e colaboração.

Aos alunos com os quais também aprendi e com quem me deu tanto prazer trabalhar.

Finalmente, à minha família, e de um modo especial à Susana, que diariamente me ajudam a ultrapassar as dificuldades, com a sua força e incentivo, tornando esta fase da minha vida mais agradável e sustentável.

RESUMO

O presente relatório tem como objetivo descrever e analisar a atividade curricular dos alunos perante as tarefas de investigação matemática e o uso de materiais manipuláveis e a sua influência no desenvolvimento do pensamento geométrico.

A homologação do programa de Matemática de 2013 foi a causa principal para a realização desta investigação uma vez que, perante as estratégias valorizadas no programa anterior e o grau de formalismo que caracteriza este novo documento, seria importante analisar se as estratégias desenvolvidas anteriormente ainda teriam lugar neste novo programa.

A metodologia utilizada é qualitativa descritiva, dada a característica de recolha e análise dos dados, e baseada num estudo de caso, com alunos de uma turma do 5.º ano de escolaridade. Das tarefas realizadas foram selecionados e analisados conjuntos de episódios, relativos às fases implícitas numa tarefa de investigação: da motivação, do desenvolvimento da investigação propriamente dita e da discussão final.

No decorrer deste estudo, foi visível que as tarefas de investigação encerram imensas potencialidades para a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos e para uma visão da Matemática, como um todo articulado e coerente. Foi possível constatar que as metas curriculares podem ser desenvolvidas através de experiências matemáticas ricas e diversificadas e da reflexão sobre essas experiências, de acordo com a maturidade dos alunos. E que, em situações de aprendizagem com materiais manipuláveis, os vários sentidos do aluno são atraídos, através do contacto e da movimentação, envolvendo-o fisicamente. Aprender torna-se um processo ativo de construção do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: Tarefas de Investigação; Materiais Manipuláveis; Geometria; Triângulos.

ABSTRACT

This report aims to describe and analyze the curricular activities of students during the mathematics research tasks and the use of handleable materials and its influence on the development of geometric thinking.

The new Mathematics syllabus (2013) was the main reason for carrying out this research as the strategies valued in the previous syllabus and the high degree of formalism which characterizes this new document, it would be important to consider whether the strategies developed previously, would still take place in this new syllabus.

The adopted methodology is qualitative and descriptive, due to the characteristics of the data collection and analysis, and based on a case study, with students in a class of 5th grade. From the performed tasks sets of episodes were selected and analyzed, relating to every step in a research task: the motivation, the research development itself, and the final discussion.

During this study, it was clear that the research tasks contain enormous potential for the acquisition of content knowledge and procedures, for the construction and development of mathematical reasoning, for (oral and written) communication suitable for mathematics, to solve problems in different contexts and for a vision of mathematics as an articulated and coherent whole. It was possible to note that the curriculum goals can be developed through rich and diverse mathematical experiences and reflection on those experiences, according to the maturity level of the students. And that, in learning situations with handleable materials, the different senses of the student are drawn through the contact and the movement, having them physically engaged. Learning becomes an active process of knowledge construction.

KEYWORDS: Research Tasks; Manipulatives Materials; Geometry; Triangles.

ÍNDICE

LISTA DE ACRÓNIMOS.....	11
ÍNDICE DE FIGURAS	13
ÍNDICE DE TABELAS.....	17
1. INTRODUÇÃO	19
1.1. Contextualização e Pressupostos.....	19
1.2. Pertinência do Estudo.....	21
1.3. Objetivos e Questões Orientadoras	21
1.4. Organização do Estudo.	22
2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO	25
2.1. O Ensino da Matemática	25
2.1.1. Investigações matemáticas, porquê?	29
2.1.2. A preparação das aulas de investigação	30
2.2 Materiais Manipuláveis.....	31
2.3. Os Programas de Matemática do Ensino Básico (2007 e 2013) e a Geometria... 33	
2.4 Conceções em Geometria.....	46
3. ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO.....	49
3.1. Opções Metodológicas	49
3.2. Caracterização do Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua	51
3.2.1. Contexto geográfico e socioeconómico.....	52
3.2.2. Caracterização dos Participantes	54
3.3. Planificação e Organização de Atividades	56
4. APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	63
4.1. Primeira Intervenção Didática.....	63
4.1.1. Leitura e análise do poema “Figuras Figuronas” de Maria Alberta Menéres 63	
4.1.2. Construção de triângulos com régua, compasso e transferidor	67
4.2. Segunda Intervenção Didática.....	77

4.2.1. Propriedades dos triângulos	77
4.2.2. Triângulos ao espelho	80
4.3. Exposição dos Trabalhos Realizados.	93
5. CONCLUSÃO	99
5.1. Principais Conclusões e Resposta às Questões Orientadoras	99
5.2. Limitações e Recomendações Futuras.....	102
5.3. Reflexão Final.....	102
6. REFERÊNCIAS	105
APÊNDICE: Guião de Investigação	119

LISTA DE ACRÓNIMOS

AEPL – Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua

ALG - Álgebra

CA – Caderno de Apoio

CEB – Ciclo do Ensino Básico

EB – Ensino Básico

EBS – Ensino Básico e Secundário

GM – Geometria e Medida

MC – Metas Curriculares

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

NO – Números e Operações

OTD – Organização e Tratamento de Dados

PEM – Projeto Educativo Municipal

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Distribuição geográfica das escolas do AEPL ³	53
Figura 2. Figuras Figuronas	58
Figura 3. Leitura e análise do Poema “Figuras Figuronas” de Maria Alberta Menéres.	64
Figura 4. Construção de um triângulo equilátero com 15 cm de perímetro.	67
Figura 5. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 5 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 72°	68
Figura 6. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 6,5 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 45°	68
Figura 7. Construção de um triângulo isósceles com um dos seus lados de 5 cm de comprimento e cujos ângulos adjacentes a esse lado medem 120° e 30° de amplitude..	69
Figura 8. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 6 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 36°	70
Figura 9. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 6 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 90°	70
Figura 10. Medição dos ângulos internos.	70
Figura 11. Cálculo da soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo.	71
Figura 12. Conclusão do cálculo da soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo.	72
Figura 13. Identificação e discussão de erros de cálculo.	72
Figura 14. Correção dos erros de cálculo.	73
Figura 15. Registo no caderno diário.	74

Figura 16. Aluno apontando para a hipotenusa.....	75
Figura 17. Redação da definição de hipotenusa.....	76
Figura 18. Registo da medida dos lados de um triângulo.	78
Figura 19. Reconhecimento que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.	78
Figura 20. Registo das conclusões no caderno diário.	80
Figura 21. Visualização de um triângulo ao espelho – grupo 1.	81
Figura 22. Visualização de um quadrado ao espelho – grupo 1.....	81
Figura 23. Visualização de um pentágono ao espelho – grupo 4.....	82
Figura 24. Visualização de um hexágono ao espelho – grupo 4.	82
Figura 25. Visualização de um octógono ao espelho – grupo 4.....	82
Figura 26. Visualização de um hexágono ao espelho – grupo 2.	83
Figura 27. Visualização de um triângulo ao espelho – grupo 3.	84
Figura 28. Conclusões, do grupo 2, após o preenchimento da tabela.	85
Figura 29. Conclusões do grupo 4, após o preenchimento da tabela.	85
Figura 30. Conclusões do grupo 3, após o preenchimento da tabela.	86
Figura 31. Registo dos resultados observados: variação do ângulo de abertura do livro de espelhos vs. Figura observada.	87
Figura 32. Cálculo do ângulo necessário para observar um dodecágono.	87
Figura 33. Preenchimento da tabela projetada e registo de um aluno.....	89
Figura 34. Opiniões dos alunos sobre a atividade.....	91

Figura 35. Opiniões dos alunos sobre a atividade.	92
Figura 36. Opinião do aluno sobre a atividade.	92
Figura 37. Exposição.	93
Figura 38. Opinião de uma professora de Português do Agrupamento	94
Figura 39. Opinião de um aluno estagiário do Agrupamento.....	95
Figura 40. Opiniões de três alunos do Agrupamento	96
Figura 41. Opiniões de dois Encarregados de Educação	97

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Quadro Comparativo dos Programas de Matemática do Ensino Básico datados de 2007 e de 2013.....	35
Tabela 2. Quadro Comparativo dos Conteúdos Programáticos de 2007 e 2013 para o 2.º CEB.....	41
Tabela 3. Constituição do Agrupamento e Número de Turmas por Níveis de Ensino (ano letivo 2014/2015).....	52
Tabela 4. População Residente nas Freguesias da Área Geográfica do AEPL.	54
Tabela 5. Caraterísticas Sociodemográficas dos Participantes (n = 23).....	54
Tabela 6. Planificação da Intervenção Didática 1.....	56
Tabela 7. Planificação da Intervenção Didática 2.....	60

1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como desígnio a contextualização da investigação e seus pressupostos, a pertinência do estudo, os objetivos, das questões que permitirão orientar o trabalho no sentido de atingir os objetivos propostos e organização.

A organização deste documento encontra-se no final deste capítulo.

1.1. Contextualização e Pressupostos.

O Projeto, no âmbito do curso de Mestrado em didática das Ciências da Natureza e Matemática da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, visa o desenvolvimento das competências científicas e didáticas, disciplinares e não-disciplinares, nas áreas das Ciências e da Matemática. Assim é dada, uma atenção específica à importância da utilização de tecnologias adequadas, à mobilização e integração de saberes científicos, tecnológicos e didáticos, para conceber, desenvolver e avaliar projetos educativos e curriculares, que melhorem o ensino e a aprendizagem das Ciências da Natureza e da Matemática. Pretende-se, ainda, fomentar a inovação e a investigação aplicada, tendo em vista intervenções que integrem eficazmente as Tecnologias no Ensino e Aprendizagem em Ciências da Natureza e em Matemática, em regime de orientação científica.

Ser professor, nos tempos que correm, implica que este se empenhe no desempenho de uma profissão muito exigente e que possua a capacidade de mobilizar um conjunto de saberes, que não se esgotam na formação inicial. As mudanças, que se fazem sentir na sociedade atual, implicam um forte investimento na aprendizagem e no crescimento do professor. Por isso, os docentes deverão

“refletir sobre a sua prática docente de forma sistemática; efectuar estudos ou investigação com base na sua prática docente; integrar na sua prática docente os resultados dos estudos realizados, tanto de carácter académico como baseados na prática docente; avaliar a eficácia das suas estratégias de ensino e modificá-las em conformidade; e realizar uma avaliação das suas próprias necessidades de formação” (Comissão Europeia, 2007, p. 14).

Desta forma, a formação contínua de professores pode ser entendida como um instrumento de inovação, onde se aprende a mudar. A formação pela investigação é o eixo metodológico que procura ir ao encontro e dar resposta ao crescimento profissional dos professores, que cada vez mais têm de se assumir como produtores da sua própria formação, chamando a si a responsabilidade de investigação, ou seja, devem tornar-se investigadores do seu próprio ensino (Cachapuz, Praia, & Jorge, 2002).

Serrazina e Oliveira (2002) referem que a pesquisa é um modo de descrever a investigação dos professores, nos seus ambientes de ensino e aprendizagem, e implica o sentido de descoberta, a curiosidade e uma abertura à exploração de diferentes aspetos observados na sala de aula. Embora nem sempre façam investigação formalizada, os professores avaliam e modificam constantemente as suas ações e os seus comportamentos, de forma a tornar a aprendizagem dos alunos mais significativa, tendo a responsabilidade de os motivar, fomentando o desenvolvimento pessoal e social dos jovens em contexto. A pesquisa valida o trabalho de sala de aula do professor, pela importância de interação entre professor e aluno, como fonte de informação da aprendizagem e do ensino (Serrazina & Oliveira, 2002).

“Ensinar é mais que uma arte. É uma procura constante com o objetivo de criar condições para que aconteçam as aprendizagens” (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 7).

É neste sentido que a opção, possibilitada pela Escola Superior de Educação do Porto, de obter o grau de Mestre, sendo uma Licenciada “pré-Bolonha”, pela mesma Escola, através da apresentação de um projeto elaborado no decorrer da atividade profissional, incluindo a discussão da experiência e competências adquiridas, a par de uma reflexão aprofundada, sistematizada e fundamentada, representa uma oportunidade de valorização profissional.

Como profissional, ao fim de vinte e dois anos de serviço urge refletir, re(descobrir), re(criar) para re(agir) às mudanças, aos desafios educativos que são colocados quer pela sociedade, em constante mudança, quer ao nível do desenvolvimento curricular, como o que atualmente ocorre relacionado com o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013 (PMEB, 2013).

1.2. Pertinência do Estudo

Com a homologação do Programa de Matemática 2013 e com a liberdade metodológica dada aos professores descorou-se o quanto os alunos devem estar envolvidos na sua aprendizagem e privilegia-se mais o conhecimento científico e os procedimentos (PMEB, 2013). O ensino corre o risco de torna-se num exercitar de técnicas privilegiando os procedimentos e não o trabalho investigativo (Brunheira, 2013; Veloso, Brunheira & Rodrigues, 20013). Torna-se, assim pertinente, dado o grau de formalismo atribuído ao PMEB 2013 propor as tarefas de investigação e analisar se estas tarefas podem contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos e para a aprendizagem da Matemática preconizados neste programa.

1.3. Objetivos e Questões Orientadoras

O presente trabalho tem como objetivo analisar a reação, a prestação e as dificuldades sentidas pelos alunos aquando da exploração das tarefas de investigação matemática em Geometria, em particular, quando estas utilizam como recursos: materiais manipuláveis, tais como livro de espelhos e materiais de desenho. Este documento relata as experiências tal como sucederam, descreve situações e factos para além de proporcionar conhecimento acerca do ensino e aprendizagem da Geometria e Medição.

A tarefa de investigação em sala de aula intitula-se “Triângulos ao espelho”, na qual os alunos, além de desenvolverem as competências matemáticas, previstas ao longo do ensino básico (Despacho n.º 17169/2011, de 23 de Dezembro), tais como: a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem simples e adequada à situação; a capacidade de decidir sobre a razoabilidade de um resultado, promover o estabelecimento de conexões matemáticas e a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, terão, como objetivos específicos, medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude, classificar polígonos, classificar triângulos quanto à medida de comprimento dos lados e quanto à medida de amplitude dos ângulos e construir triângulos.

O projeto foi desenvolvido no Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua, cuja caracterização se encontra no Capítulo 3.2.

No âmbito da problemática acima referida e dos pressupostos supracitados, definimos os seguintes objetivos que nos propomos atingir com este estudo:

- Explorar as diferentes possibilidades de construção de triângulos;
- Detetar fragilidades nesta temática;
- Utilizar a capacidade de comunicar matemática oralmente (expor as suas ideias, comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e colocar as suas dúvidas) e a redigir convenientemente (explicando o seu raciocínio e as suas conclusões);
- Analisar a atividade curricular dos alunos, intrínseca a tarefas de investigação matemática e Geometria, recorrendo ao uso de materiais manipuláveis.

Para atingir os objetivos propostos foram definidas as seguintes questões de orientação:

- Poderão as tarefas de investigação previstas, no programa de 2007, ser aplicadas em sala de aula de forma eficaz, com o programa de 2013?
- De que forma os materiais manipuláveis podem apoiar na aprendizagem de conceitos geométricos?
- Que tipo de dificuldades se pode detetar na abordagem desta temática?

1.4. Organização do Estudo.

Para o domínio “Geometria e Medida” foi realizada, pela investigadora, uma revisão científica dos conteúdos a abordar, de forma a manter-se atualizada, quer em relação a informação teórica, quer em relação a avanços pedagógicos e estratégias de ensino, específicas da temática em destaque. Assim, seria possível proporcionar aos alunos não só a aprendizagem de conhecimentos do conteúdo, mas também, o desenvolvimento de competências necessárias para enfrentar e resolver os problemas, com que serão confrontados ao longo da sua vida profissional, social e pessoal. Posteriormente à pesquisa e estudo aprofundados dos conteúdos a lecionar, foi elaborada a planificação geral dos conteúdos e objetivos de aprendizagem, a elaboração

dos recursos didáticos necessários para o desenvolvimento das tarefas, a planificação de cada aula com as estratégias a desenvolver, de forma a atingir os objetivos propostos e, posteriormente, a reflexão sobre o seu desempenho profissional, discussão e reformulação de estratégias que permitam melhorar a sua prática.

No capítulo do Enquadramento Teórico, é apresentada, detalhadamente, a revisão da literatura que foca as temáticas centrais de preparação da atividade, ou seja, o papel do professor, a importância das tarefas de investigação e do recurso aos materiais manipuláveis, os programas de Matemática do Ensino Básico no que concerne à Geometria, as preconcepções existentes mais frequentes nesta área e relevantes para o presente estudo.

No capítulo do Enquadramento Metodológico, é relatada a caracterização da escola e dos participantes neste estudo da turma, a pertinência das tarefas a desenvolver, as suas planificações, estratégias desenvolvidas e os recursos didáticos elaborados.

No capítulo da Apresentação, Análise e Discussão dos Resultados, é apresentada a descrição da recolha dos dados em contexto de sala de aula, destacando-se a observação participante, enquanto professora da turma e investigadora, a análise de registos fotográficos e audiovisuais e registos escritos dos alunos. A análise teve como base os constructos teóricos de referência e a reflexão sobre as atividades pedagógicas desenvolvidas. Apresenta-se ainda, neste capítulo, um relato do impacto que a exposição dos trabalhos realizada num espaço comum da escola, em colaboração com a disciplina de Educação Visual, teve na comunidade educativa.

Segue-se a Conclusão, na qual se reflete sobre o trabalho desenvolvido, no decorrer do estudo, e implicações para futuras propostas, baseando-se na análise das estratégias dos alunos e no processo decorrente da atividade matemática inerente à atividade de investigação proposta.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo é apresentado o enquadramento teórico que fundamenta o estudo. O capítulo encontra-se dividido em quatro secções: o ensino da Matemática, as tarefas de investigação, a utilização de materiais manipuláveis, a Geometria nos últimos programas de Matemática do Ensino Básico (2007 e 2013), o ensino desta área e a problemática associada às concepções existentes, entre elas as alternativas, e a sua influência na aprendizagem.

2.1. O Ensino da Matemática

Ser professor, hoje, obriga a uma aprendizagem constante e a ter a capacidade de investigar e refletir sobre a sua prática profissional.

A qualidade de ensino é determinada, entre outros fatores, pela qualidade dos currículos e da instrução (Jones, Langrall, Thornton, & Nisbet, 2002). Melhorar o ensino da Matemática pressupõe ajustar os objetivos curriculares e as ideias matemáticas fundamentais, que apoiem o crescimento matemático dos alunos, mas pressupõe também melhorar a qualidade do conhecimento do professor (Shulman, 1986).

Para muitos alunos, aprender ciência revela-se uma espiral ascendente de confusão e fracasso. As práticas de sala de aula não vão ao encontro das suas necessidades, nem têm em conta os conhecimentos prévios e competências (Van Heuvelen, 1992). Todos os professores têm altas expectativas para os seus alunos. O mesmo autor refere que os professores querem que os alunos compreendam os conteúdos e, além disso, desenvolvam altas competências, tal como análise, raciocínio e resolução de problemas. Infelizmente, as práticas quotidianas, na maioria das salas de aula, estimulam os alunos a aprenderem superficialmente os conceitos e a desenvolverem baixas competências (Van Heuvelen, 1992).

A crescente necessidade de reformular os métodos de ensino das ciências tem recebido maior atenção nos últimos anos, indicando que as metodologias que são hoje

tipicamente utilizadas na sala de aula não contribuem para o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo (Wright, Sunal, & Day, 2004).

O significado de literacia científica tem sofrido diversas reformulações, bem como os estudos realizados por investigadores, para aferirem as melhores metodologias a empregar no ensino de ciências (DeBoer, 2000). Todos concordam, contudo, que os alunos não podem ser cientificamente competentes se não dominarem conceitos e conhecimentos científicos. É nas falhas da aprendizagem destes conceitos que residem as atuais disputas em torno de programas curriculares, seleção de temas, escolha de alvos adequados e a sua avaliação na construção de instrumentos de medição adequados (DeBoer, 2000).

A compreensão do mundo que nos rodeia exige noções que nem sempre se adquirem, subordinando-as a uma qualquer aplicação. Pelo contrário, a sua apreensão requer, quase sempre, um nível de abstração que é preciso assumir sem complexos. O ensino exige, por isso, um equilíbrio entre a abstração e a formalização necessárias à formulação clara de ideias, conceitos e leis e, por outro lado, a sua ilustração com situações do quotidiano e aplicações (Mestre, Gerace, Dufresne, & Leonard, 1997; Pfundt & Duit, 1991). A sempre desejável contextualização, quando se ensinam assuntos de Geometria, não deve ser um fim em si mesma mas sobretudo um meio pedagógico, sendo necessária uma intervenção planeada do professor, a quem cabe a responsabilidade de sistematizar os conhecimentos, de acordo com o nível etário dos alunos e o contexto da escola (PMEB, 2013).

A partir dos resultados da investigação educacional (e.g., Gick & Holyoak, 1980, 1983, 1987; Glaser, 1992) sabe-se que os alunos têm modos mais ou menos ingénuos de explicar os acontecimentos do dia-a-dia, mesmo antes do primeiro contacto formal com o ensino das ciências na escola. Estas ideias, genericamente designadas por pré conceções, são construídas pelos próprios alunos através de experiências diárias do foro informal - sensorial, linguístico, cultural - ou formal, e por vezes divergem, erroneamente, dos conceitos aceites pela comunidade científica (Anderson, Fisher, & Norman, 2002; Köse, 2008). Estas últimas têm sido descritas como *misconceptions* (Fisher, 1985), conceções alternativas (Arnaudin & Mintzes, 1985), preconceitos (Gallegos, Jerezano, & Flores, 1994), estruturas alternativas (Driver, 1981), ideias

errôneas (Sanders, 1993), ou ciência das crianças (Gilbert, Osborne, & Fenshman, 1982).

Tais concepções são, normalmente, construídas pelos alunos, na sua interação com o mundo físico, isto é, para dar sentido a eventos do mundo em que vivem. Van Heuvelen (1992), refere, a possibilidade de tais concepções serem reforçadas ou construídas em sala de aula, por exemplo, pelo uso de metáforas inadequadas ou pouco esclarecidas. Nesse sentido, o surgimento de uma concepção alternativa pode ocorrer devido à falta de compreensão do aluno sobre o conteúdo apresentado (Van Heuvelen, 1992).

Se essa dificuldade não for identificada pelo professor, durante as aulas, ou na avaliação do desempenho do aluno, pode tornar-se um verdadeiro obstáculo pedagógico, no futuro (Clement, 1993). Assim, é necessário que, no início de qualquer atividade letiva, o professor aplique estratégias para ter acesso ao nível de conhecimentos prévios dos alunos. Um modo de o fazer é disponibilizar algum tempo, para que os alunos indiquem, perante a turma, o que pensam já conhecer sobre o assunto cujo estudo se vai iniciar. Outra forma de ter acesso à informação pretendida é fazer uma avaliação de pré-conhecimentos, através de respostas escritas (Von Glasersfeld, 1989, 1992; Clement, 1993).

Vygotsky, na sua defesa de um construtivismo social como fundamento para o processo de ensino e aprendizagem, atribui um papel fundamental aos professores, e, de um modo geral, à sociedade, na construção do conhecimento pelos jovens, reconhecendo que os obreiros fundamentais dos seus esquemas de conhecimento são os próprios jovens, concluindo que não se consegue ensinar a quem não colabora ativamente na construção da sua aprendizagem (Woolfolk, 2000).

No entanto, o papel do professor é fundamental como mediador da compreensão, quando se pretende que os alunos passem dos seus esquemas conceituais simples, desenvolvidos sem demasiadas preocupações de rigor e validade, para os esquemas conceituais científicos das Ciências, extremamente exigentes em termos de rigor, ao ponto de se exprimirem através de relações matemáticas e utilizando frequentemente conceitos abstratos, aos quais os alunos só podem aceder através de analogias apropriadas (Chi & Glaser, 1981).

Os variados estudos de investigação educacional concluem que os esquemas conceituais que os alunos possuem, antes de frequentar uma disciplina, são arraigados, o que significa que os alunos não vão facilmente substituí-los por outros (Anderson, 1987; Chi & Glaser, 1981; Disessa, 1988; Kulm & Stuessy, 1991; Resnick, 1983, 1987; Ritchie, Tobin, & Hook, 1997; Schauble, 1990; Von Glasersfeld, 1989, 1992). Ao professor cabe contribuir para o desenvolvimento das capacidades dos alunos, disponibilizando-lhes os conceitos e as teorias da comunidade científica, organizando demonstrações elucidativas de conteúdos de leis e conceitos, desafiando-os, para que expliquem o que pensam estar a perceber, incentivando-os a aplicar conceitos e leis a contextos diferentes, encorajando-os a discutir situações físicas diferentes, guiando-os, desta forma, na utilização da Ciência para a compreensão dos fenómenos do dia-a-dia (Brown & Clement, 1989; Camp & Clement, 1994; Clement, 1993; Wenk, Dufresne, Gerace, Leonard, & Mestre, 1997).

Para ajudar os alunos a desenvolverem, simultaneamente, as capacidades de análise conceitual e de resolução de problemas, devemos conduzi-los à seguinte sequência de experiências educativas (Hewson, Kerby, & Cook, 1995; Larkin, 1979; Leonard, Dufresne, & Mestre, 1996; Dufresne, Gerace, Hardiman, & Mestre, 1992; Leonard & Gerace, 1996; Kulm & Stuessy, 1991):

- Explorar as suas noções preexistentes, para que estas não interfiram com os conceitos científicos;
- Fortalecer e interrelacionar conceitos, criando uma rede de ideias que os ajudam a compreendê-los e lembrá-los;
- Aprender a utilizar conceitos, para analisar e raciocinar sobre situações comuns, o que lhes facilita a resolução de problemas complexos;
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas através de estratégias, alicerçadas em princípios, em vez de abordagens simples, usando recursos superficiais;
- Aprender a organizar e hierarquizar os seus conhecimentos, o que se revela muito útil na análise e resolução de problemas.

Estes princípios são reconhecidos nas tarefas de investigação onde os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente, ou por escrito, as suas conclusões (Ponte,

Oliveira, Varandas, Oliveira, & Fonseca, 2005). Qualquer tema da Matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de propostas de natureza investigativa. Este tipo de tarefas também é favorável à ligação da Matemática, com outras áreas do currículo (PMEB, 2013).

2.1.1. Investigações matemáticas, porquê?

Numa investigação matemática, segundo Fonseca, Brunheira, & Ponte, 1999, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes, a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

As investigações matemáticas envolvem processos de raciocínio complexos, requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade, por parte do aluno, e desempenham um papel importante no desenvolvimento e consolidação de conceitos específicos (Abrantes, 1994).

Cabe ao professor encorajar os alunos a elaborar relatórios, onde explicam, por escrito, o seu raciocínio e conclusões, de forma a desenvolver a comunicação. Além disso, é muito importante que, num momento posterior, a turma se envolva na discussão dos resultados (Brunheira & Fonseca, 1995).

O matemático português José Sebastião e Silva, já na sua altura, mencionava as vantagens das tarefas de natureza investigativas, escrevendo: “Os estudantes não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação. Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva, alternam-se constantemente na investigação científica” (s.d., citado por Silva, 1977, p. 111). Desta forma, as atividades de exploração e de investigação matemática são uma viagem até ao desconhecido e “o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções” (Pirie, 1987, p. 2). Também Pólya (1957) escrevia que “a Matemática tem duas faces: é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva” (p. 7).

2.1.2. A preparação das aulas de investigação

O desenvolvimento das tarefas de investigação, na aula de Matemática, constitui um momento de aprendizagem significativa para os alunos, se o professor investir de uma forma determinada na preparação dessas aulas. Tal ideia é corroborada por Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998 realçando que a variedade de processos em que os alunos se podem envolver, bem como o seu grau de complexidade e até de imprevisibilidade, exigem do professor uma preparação cuidada, que vai para além da tarefa que propõe aos alunos. Ou seja, do professor, é necessário a adoção de uma atitude que deve ser, também ela, de carácter investigativo e de uma capacidade de reflexão sobre os objetivos, que se pretendem atingir. Cabe, assim, ao professor participar ativamente na elaboração do currículo, delineando objetivos, metodologias e estratégias, e reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática (Ponte et al., 1998).

A riqueza e variedade da Geometria constituem, de facto, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática.

As tarefas de natureza investigativas em Geometria conduzem, rapidamente, à necessidade de se lidar com diversos aspetos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais (Abrantes, 1999). Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adotar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática (Battista, 2007). Há alguns princípios lógicos que devem ser considerados, quando se define um conceito, nomeadamente:

“uma definição estabelece simultaneamente condições necessárias e suficientes; o conjunto de condições de uma definição deve ser minimal; as definições são arbitrárias, no sentido de que, estabelecendo uma relação de equivalência entre as condições relacionadas com um dado conceito obtemos uma classe de equivalência de definições e portanto cada uma dessas definições pode ser tomada arbitrariamente como a definição do conceito” (Gomes & Ralha, 2005, p. 227).

Desta forma, a Geometria oferece numerosas ocasiões para se conhecerem exemplos sugestivos da história e da evolução da Matemática (Abrantes, 1999) bem como estimular o raciocínio lógico e dedutivo tão importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico (Battista, 2007).

2.2 Materiais Manipuláveis

Ao lado do conhecimento de Matemática *per si* e da forma de aprender esta ciência, o professor necessita de conhecer as finalidades, objetivos e orientações curriculares, de modo a selecionar as tarefas adequadas para a aprendizagem, recorrer aos materiais adequados, gerir o tempo e os recursos disponíveis. Assim, apresentam-se os três tipos de conhecimento, que Shulman (1986) estabeleceu, como sendo a base para um bom desempenho docente: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento didático do conteúdo e o conhecimento curricular. O domínio e a articulação destes saberes facilitará a prossecução dos desígnios da Educação (Shulman, 1986), neste caso particular da Educação Matemática.

Os materiais manipuláveis são um recurso privilegiado, como ponto de partida ou de suporte a várias tarefas escolares, que permitem desenvolver atividades de investigação e promover a comunicação matemática entre os alunos. Reynolds (1971, citado por Matos & Serrazina, 1996, p. 193) referiu-se aos materiais manipuláveis como sendo: “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são utilizados para representar uma ideia”.

Uma das recomendações curriculares, referenciadas pela National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007), é a da utilização, na sala de aula, de material manipulável, por ser um bom ponto de partida para explorações, obtenção de dados e formulação de conjecturas.

Os materiais manipuláveis, de que é exemplo o livro de espelhos, podem, assim, ter um papel essencial como mediadores na aprendizagem de diversos temas da

Geometria, para além dos materiais tradicionais: régua, esquadro, compasso e transferidor.

No entanto, não podemos esquecer que os materiais não conduzem, por si só, a uma aprendizagem. O professor tem um papel fundamental no processo, devendo disponibilizar os materiais e organizar o ambiente educativo, de modo a encorajar os alunos, nas suas explorações e nas suas descobertas (Driver, Guesne, & Tiberghien, 1985). O professor deve promover também discussões na turma, para que os conceitos se possam desenvolver e aperfeiçoar.

Desta forma, os alunos têm oportunidade de abordar e explorar os conteúdos, com verdadeira compreensão, e não só como reprodução de um conjunto de regras, procedimentos e/ou características (Ponte & Serrazina, 2000).

Reys (1971) identificou, a partir da comparação de diferentes teorias de aprendizagem, alguns aspetos que fundamentam o uso de materiais manipuláveis, no ensino e aprendizagem da Matemática: a formação de conceitos é essencial para a aprendizagem da Matemática; a aprendizagem é baseada na experiência; a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência e, assim, o coração da aprendizagem; a aprendizagem é um processo de crescimento e é, por natureza, um processo de desenvolvimento; a aprendizagem é caracterizada por estádios distintos de desenvolvimento; a aprendizagem é aumentada pela motivação; a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstrato; a aprendizagem requer uma participação ativa do aluno; a formulação de abstrações matemáticas é um processo longo. Convém referir que os aspetos focados, não são independentes, mas estão bastante interrelacionados.

Serrazina (1990) em relação a estes materiais apontou os seguintes objetivos: diversificar as atividades de ensino, representar corretamente ideias abstratas, analisar sensorialmente dados necessários à formulação de conceitos, descobrir relações e formular generalizações, aumentar a motivação, respeitar as diferenças individuais, realizar experiências em torno de situações problemáticas e envolver os alunos ativamente na aprendizagem. De facto, são diversos os estudos que apontam que o uso de materiais manipuláveis produz maior rendimento nos alunos, em todas as idades e em todos os anos do ensino básico (e.g., Serrazina, 1990; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977).

Nas situações de aprendizagem com materiais manipuláveis, os vários sentidos do aluno são atraídos, através do contacto e da movimentação, envolvendo-o fisicamente. Esta interação é favorável à aprendizagem. Aprender torna-se, assim, num processo ativo de construção do conhecimento (Vale, 1999).

2.3. Os Programas de Matemática do Ensino Básico (2007 e 2013) e a Geometria

A organização curricular da disciplina de Matemática é guiada pelo princípio de que deve ficar claramente estabelecido quais os conhecimentos e as capacidades fundamentais, que os alunos devem adquirir e desenvolver.

No entanto, é reconhecido que a aprendizagem da Matemática, nos anos iniciais, deve partir do concreto, pelo que é fundamental que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo, desta maneira, o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é característico (PMEB 2013).

Analisando o Programa de Matemática, agora em vigor, verificamos que este apresenta uma lista de conteúdos, não apresentando os objetivos de aprendizagem. Nas páginas iniciais do programa há várias ideias de grande importância: desenvolvimento da compreensão, o gosto pela Matemática, a importância da resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação, ideias-chave, hoje, na Educação Matemática.

O programa de Matemática para o Ensino Básico é um programa para todos os alunos e é muito importante que estes se envolvam em atividades matemáticas, atividades desafiantes, atividades que lhe desenvolvam o pensamento crítico (Magendzo, 2008). E, tal como é referido no PMEB (2013, p. 4),

“os desempenhos dos alunos devem concorrer, a partir do nível mais elementar da escolaridade, para a aquisição de conhecimento de factos e de procedimentos, para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, para a resolução de

problemas em diversos contextos e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente” (p. 4).

A valorização do ensino da Geometria tem sido notável desde o programa, datado de 1990, onde se tentava, desta forma, recuperar da séria crise deste tema, na Matemática escolar (Lobato, 1991). A Geometria ganhou espaço e visibilidade, nesta reforma curricular, embora com pouca expressão ao nível do currículo em ação (Sacristán, 2000), pela falta de preparação dos professores originada pelo abandono a que a Geometria foi votada nos últimos anos (Velo, 1994).

O programa de Matemática do Ensino Básico seguinte, datado de 2007, trouxe mudanças significativas, em relação ao anterior, não apenas pela introdução de novos conteúdos, mas também pela necessidade de os abordar sob diferentes perspetivas (Maia, 2014). Assim, apelava-se, à experiência matemática dos alunos, na sintonia com as atuais orientações curriculares internacionais para o ensino da Matemática, e no estatuto que este programa conferia às capacidades transversais, que surgiam “valorizadas e assumindo-se também como conteúdos” (PMEB, 2007, p. 1). Assim, neste programa estavam presentes sugestões metodológicas, que contemplavam propostas de tarefas a realizar com os alunos.

Atualmente, encontra-se em vigor o programa de Matemática homologado em 2013, que, mais uma vez, surge com diferenças significativas (ver Tabela 1) em relação ao anterior e que tem reunido um conjunto de vozes críticas em relação ao conteúdo e aprendizagens a atingir (e.g., Brunheira, 2013; Velo, Brunheira, & Rodrigues, 2013). Este programa ignora muito do que se tem investigado sobre o valor de uma experiência matemática rica e significativa, desde os primeiros anos da escola, o que não decorre de uma ideologia, mas sim de uma ciência reconhecida há vários anos, chamada Didática da Matemática (Velo, Brunheira, & Rodrigues, 2013).

Tabela 1. Quadro Comparativo dos Programas de Matemática do Ensino Básico datados de 2007 e de 2013.

PMEB 2007	PMEB 2013
Finalidades	
<p>Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.</p> <p>Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.</p>	<p>A estruturação do pensamento.</p> <p>A análise do mundo real.</p> <p>A interpretação da sociedade</p>
Objetivos	
<p>Conhecer factos e procedimentos</p> <p>Compreender a Matemática</p> <p>Lidar com diversas representações</p> <p>Comunicar matematicamente</p> <p>Raciocinar matematicamente</p> <p>Resolver problemas</p> <p>Estabelecer conexões</p> <p>Fazer matemática de modo autónomo</p> <p>Apreciar a Matemática</p>	<p>Identificar/designar: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de maneira equivalente, ainda que informal.</p> <p>Estender: O aluno deve definir o conceito como se indica ou de forma equivalente, ainda que informal, reconhecendo que se trata de uma generalização.</p> <p>Reconhecer: O aluno deve conhecer o resultado e saber justificá-lo, eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares. No caso das propriedades mais complexas, deve apenas saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados pelo professor para as deduzir, bem como saber ilustrá-las utilizando exemplos concretos. No caso das propriedades mais simples, poderá ser chamado a apresentar de forma autónoma uma justificação geral um pouco mais precisa.</p> <p>Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.</p>

Conteúdos organizados	
Números e operações (NO) Geometria e Medida (GM) Álgebra (ALG) Organização e tratamento de dados (OTD)	Números e operações (NO) Geometria e Medida (GM) Álgebra (ALG) Organização e tratamento de dados (OTD)
Capacidades transversais	
Resolução de problemas Raciocínio matemático Comunicação matemática	Conhecimento de factos e procedimentos Raciocínio matemático Comunicação matemática Resolução de problemas A Matemática como um todo coerente
Orientações metodológicas	
Apresentas diversas orientações metodológicas gerais, que dizem respeito, nomeadamente, à diversidade de tarefas, resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação matemática, representações, conexões, diversidade de recursos, cálculo mental, lugar da História da Matemática, atenção ao papel da Matemática no mundo atual e, finalmente, as diferentes formas de trabalho na sala de aula.	Não apresenta, dando assim total liberdade metodológica ao professor.

Uma das razões invocadas, para revogar o anterior programa de Matemática, seria a de dar liberdade aos professores, para utilizarem a metodologia que entenderem (PMEB, 2013) pois o PMEB (2007) era “demasiado rígido nas indicações metodológicas” (Brunheira, 2013, p. 1). Esta autora refere ainda que, a par deste programa, marcado pelo elevado grau de formalismo, sem fazer qualquer referência a tarefas de investigação ou projetos, à história da Matemática ou à tecnologia, estão as metas curriculares, que se traduzem numa “redução da compreensão, o desprezo pelas capacidades transversais, remetendo a resolução de problemas para a simples aplicação de conhecimentos adquiridos, e que antecipa conceitos e procedimentos próprios de idades mais avançadas”.

Assim, recordando Paulo Abrantes (s. d., citado por Serrazina, 2013), interessa “proporcionar aos alunos uma experiência rica e estimulante, valorizando os aspetos afetivos e pessoais (não cognitivos), considerando que a aprendizagem da Matemática deve ter valor próprio na altura em que se desenvolve e não ser entendida somente como uma preparação para o futuro” (p. 40).

Para Paulo Abrantes, a Matemática constituía um património cultural da humanidade e um modo de pensar. Sendo assim, era, para ele impensável que não se proporcionassem a todos os alunos uma aprendizagem da Matemática, de modo significativo, e que fizesse sentido no momento em que estavam a aprender (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). A ideia que o aluno é um recipiente, que vai acumulando conhecimento, e que a função do professor é a de transmitir corretamente essa informação, parece voltar a estar presente nos atuais documentos curriculares (Serrazina, 2013), o que era rejeitado por ele. Pelo contrário, Paulo Abrantes procurava

“concretizar os contributos da investigação em Educação Matemática, nomeadamente quando afirmava que para haver uma apropriação de novas ideias e novos conhecimentos não basta que o aluno participe em atividades concretas, é preciso que se envolva num processo de reflexão sobre essas atividades” (Serrazina, 2013, p. 41).

A ausência de elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas, nas atividades dos alunos, pode mesmo ser responsável por grande parte das dificuldades que muitos sentem, em realizar procedimentos aparentemente simples (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). Quando um aluno realiza uma tarefa

matemática de forma mecânica e sem lhe atribuir qualquer sentido, é muito provável que ele seja incapaz de reconstituir aquilo que parecia saber fazer, perante uma situação que apresenta alguma diferença (mesmo que ligeira) ou que esteja colocada num contexto diferente (ainda que familiar) (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

A Geometria e a Medida são duas áreas fundamentais para o dia-a-dia dos nossos alunos, não só enquanto estudantes mas também enquanto cidadãos. Por todo o lado existe Geometria, seja na natureza, na arte, nas construções, nos monumentos, nos objetos que usamos... sendo um dos motivos de ser tão importante trabalhar este domínio. É urgente que a escola proporcione, aos alunos, experiências ricas, para que melhor compreendam o mundo que as rodeia (Breda, Serrazina, Menezes, Souza, & Oliveira, 2011).

Desde cedo, há necessidade de se realizarem experiências de manipulação e observação, mas, progressivamente, a ênfase deve ser colocada no raciocínio espacial e no desenvolvimento da capacidade de visualização espacial. As experiências geométricas, diversificadas e ricas, são essenciais para o desenvolvimento do sentido e do raciocínio espacial de cada pessoa (Figueira, Loureiro, Lobo, Rodrigues, & Almeida, 2007).

A Geometria ocupa-se fundamentalmente da descrição de relações e do raciocínio, pelo que tem sido considerada, “desde há muito, como o conteúdo do currículo da Matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da Matemática” (NCTM, 2007, p. 44).

É fundamental que, para além dos alunos poderem explorar e fazer as suas descobertas, possam também ter oportunidade de discutir as suas ideias e conclusões. Nos primeiros anos da Matemática escolar, as crianças estão, segundo a teoria de Piaget, na fase das operações concretas, fazendo todo o sentido que o trabalho em Geometria permita que os alunos explorem os objetos fisicamente (Woolfolk, 2000). De facto, o estudo desenvolvido por Maia (2014) concluiu que são os professores do ensino elementar que frequentemente recorrem aos materiais manipuláveis no apoio à aprendizagem da Geometria.

Com atividades bem concebidas, com ferramentas adequadas e com o apoio do professor, poderão formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas, logo desde os primeiros anos de escolaridade (NCTM, 2007, p. 44).

Atualmente, as orientações curriculares definidas na esfera mundial dão um lugar de destaque à Geometria, apontando para a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial, enquanto propósito principal do ensino da Geometria (Heuvel-Panhuizen, 2005; NCTM 2007; PMEB 2013 e Metas Curriculares).

Os vários documentos curriculares atuais, nacionais e internacionais são concordantes no que respeita à forma de encarar a Geometria como um domínio de excelência, para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, centrado nas relações entre objetos geométricos e na articulação de argumentos acerca das suas propriedades, os quais poderão vir a constituir-se como demonstrações (PMEB, 2013).

De acordo com vários autores (e.g., Clements, Battista, & Sarama, 2001; Lehrer, Kenkins, & Osana, 1998), o desenvolvimento do pensamento geométrico das crianças depende tanto da maturação como da instrução. Por outro lado, o aprendente de Geometria desenvolve experiências de natureza geométrica, como fazendo parte de si próprio, enquanto vai evoluindo neste processo. Nesta perspetiva, a aprendizagem é também uma forma de identidade, de vir a ser, e de se tornar sendo (Brown, 2011; Wenger, 1998).

O anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2007) propôs, como ideia central em Geometria, ao longo dos três ciclos, o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. Neste já era dada muita importância ao estudo da Geometria. O PMEB de 2013 dá um lugar, também, central ao domínio da Geometria.

No 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) são apresentadas as noções básicas da Geometria, começando-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas e segmentos de reta, paralelismo e perpendicularidade, a partir dos quais se constroem objetos mais complexos, como polígonos, circunferências, sólidos ou ângulos. Por outro lado, a igualdade de distâncias entre pares de pontos, obtida primitivamente por

deslocamentos de objetos rígidos com dois pontos neles fixados, preside aos princípios genéricos, que assistem às operações de medição de comprimentos, conduzindo ao conceito de fração e, posteriormente, à medição de outras grandezas. A igualdade de ângulos é apresentada, inicialmente, por deslocamentos rígidos de três pontos, levando à noção de igualdade de amplitude, associando-se, a este princípio, um importante critério geométrico prático de congruência de ângulos, baseado em igualdade entre segmentos de reta, que servirá de fundamento ao estudo da medida de amplitude de ângulos, nos ciclos posteriores.

No 2.º CEB, em Geometria, são introduzidos alguns conceitos e propriedades – tão elementares quanto fundamentais – envolvendo paralelismo e ângulos, com aplicações simples aos polígonos (ver Tabela 2). Em particular, é fornecida uma definição geométrica de soma de ângulos, por justaposição, análoga à justaposição de segmentos de reta abordada no 1.º CEB. Tratando-se de uma etapa indispensável ao estudo sério e rigoroso da Geometria, nos ciclos de ensino posteriores, os alunos deverão saber relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem, e que são pertinentes em cada situação. É também pedido aos alunos a realização de diversas tarefas, que envolvem a utilização de instrumentos de desenho e de medida (régua, esquadro, compasso e transferidor, programas de Geometria Dinâmica), sendo desejável que adquiram destreza na execução de construções rigorosas e reconheçam alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos. O tópico da Medida, neste ciclo, é dedicado a áreas de figuras planas, a volumes de sólidos e a amplitudes de ângulos. À imagem do conceito de medida de comprimento que decorre, na abordagem preconizada no 1.º CEB, da justaposição retilínea de segmentos de reta, as medidas de amplitude de ângulo alicerçam-se na noção de soma geométrica de ângulos.

Tabela 2. Quadro Comparativo dos Conteúdos Programáticos de 2007 e 2013 para o 2.º CEB.

Tópicos PMEB 2007 (p. 37)	Objetivos específicos PMEB 2007 (pp. 37- 38)	Metas Curriculares 2013 (pp. 32-33)	Conteúdos PMEB 2013 (p. 15)
<ul style="list-style-type: none"> Ângulos: amplitude e medição Polígonos: propriedades e classificação 	<ul style="list-style-type: none"> Identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos. Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados. Construir triângulos e compreender os casos de possibilidade na construção de triângulos. Compreender relações entre elementos de um triângulo e usá-las na resolução de problemas. Compreender o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo. Identificar as propriedades da circunferência e distinguir circunferência de círculo. Resolver problemas envolvendo propriedades dos triângulos e do círculo. 	<p>Reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos.</p> <ol style="list-style-type: none"> Utilizar corretamente os termos «ângulo interno», «ângulo externo» e «ângulos adjacentes a um lado» de um polígono. Reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. Reconhecer que num triângulo retângulo ou obtusângulo dois dos ângulos internos são agudos. Designar por «hipotenusa» de um triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto e por «catetos» os lados a ele adjacentes. Reconhecer que um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes. Reconhecer que, num triângulo, a soma de três ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro. Identificar paralelogramos como quadriláteros de lados paralelos dois a dois e reconhecer que dois ângulos opostos são iguais e dois ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares. Utilizar corretamente os termos «triângulo retângulo», «triângulo acutângulo» e «triângulo obtusângulo». 	<p>Triângulos e quadriláteros:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ângulos internos, externos e adjacentes a um lado de um polígono; Ângulos de um triângulo: soma dos ângulos internos, relação de um ângulo externo com os internos não adjacentes e soma de três ângulos externos com vértices distintos; Triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos; hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo; Ângulos internos de triângulos obtusângulos e retângulos; Paralelogramos: ângulos opostos e adjacentes de um paralelogramo; Critérios de igualdade de triângulos: critérios LLL, LAL e ALA; construção de triângulos dados os comprimentos de lados e/ou as amplitudes de ângulos internos;

Tabela 2. (Continuação)

Tópicos PMEB 2007 (p. 37)	Objetivos específicos PMEB 2007 (pp. 37- 38)	Metas Curriculares 2013 (pp. 32-33)	Conteúdos PMEB 2013 (p. 15)
		<p>9. Construir triângulos dados os comprimentos dos lados, reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LLL de igualdade de triângulos».</p> <p>10. Construir triângulos dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LAL de igualdade de triângulos».</p> <p>11. Construir triângulos dado o comprimento de um lado e as amplitudes dos ângulos adjacentes a esse lado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério ALA de igualdade de triângulos».</p> <p>12. Reconhecer que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.</p> <p>13. Reconhecer que em triângulos iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.</p> <p>14. Classificar os triângulos quanto aos lados utilizando as amplitudes dos respetivos ângulos internos.</p> <p>15. Saber que num triângulo ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo, e vice-versa.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Relações entre lados e ângulos num triângulo ou em triângulos iguais; - Igualdade dos lados opostos de um paralelogramo; - Desigualdade triangular; - Pé da perpendicular traçada de um ponto para uma reta e, num dado plano, perpendicular a uma reta num ponto; - Distância de um ponto a uma reta e entre retas paralelas; altura de um triângulo e de um paralelogramo. <p>Problemas</p> <ul style="list-style-type: none"> - Problemas envolvendo as noções de paralelismo, perpendicularidade, ângulos e triângulos.

Dentro da Matemática, a Geometria é um dos domínios mais propícios à realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa. É fundamental proporcionar aos alunos diversos tipos de experiência de aprendizagem, que os levem a realizar descobertas, sem a necessidade de um elevado número de pré-requisitos e evitando a visão da Matemática centrada na resolução de algoritmos e em receitas, para resolver exercícios (Abrantes, 1999). “Fazendo apelo à intuição, à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a Geometria torna-se (...) especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas” (Abrantes, 1999, p. 4).

Hersh (1998) é a favor de uma visão humanista, em que a Matemática é a nossa ferramenta, o nosso instrumento de jogo. É possível ver mais Geometria nas salas de aula e, na sua aprendizagem, devem ser usados vários recursos, tais como, a régua, o compasso, o transferidor e outros materiais manipuláveis. Para além disso, deve-se levar os alunos a “pensar matematicamente”, e para tal, estes devem ter a possibilidade de se envolverem em problemas abertos e em explorações e investigações matemáticas. É necessário que os alunos se envolvam em diferentes experiências de investigação e discussão de conceitos geométricos (Abrantes, Ponte, Fonseca, & Brunheira, 1999).

Os professores têm que ter consciência de que a aquisição de conceitos geométricos deve ocorrer mediante a realização de atividades que envolvam as crianças na observação e na comparação de figuras geométricas, a partir de diferentes atributos (Pires, Curi, & Campos, 2000; Ponte, 2003).

As atividades investigativas em Geometria conduzem, rapidamente, à necessidade de se lidar com diversos aspetos essenciais da natureza da própria Matemática. Em que formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, se tornam processos naturais (Abrantes, 1999).

Na aprendizagem da Geometria, a capacidade espacial (ou sentido espacial) é essencial, especialmente em tarefas como visualizar objetos, comparar figuras com diferentes orientações, seguir direções, fazer diagramas, ler tabelas, ler mapas... Desta forma, a capacidade espacial, refere-se à forma como os alunos, ou as pessoas em geral, percecionam o mundo que os rodeia e a sua capacidade de interpretar, modificar e

antecipar transformações dos objetos (Ponte & Sousa, 2010). O sentido espacial inclui a capacidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais, por exemplo, rodar objetos na nossa mente. Del Grande (1990) destaca sete aspetos do sentido espacial, envolvendo diversas subcapacidades, que Ponte e Serrazina (2000) sistematizam e definem da seguinte forma:

“Coordenação visual motora – capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo;

Memória visual – capacidade de recordar objetos que já não estão à vista;

Perceção figura-fundo – capacidade de identificar uma componente específica, numa determinada situação, e que envolve a mudança de perceção de figuras contra fundos complexos;

Constância percetual – capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas;

Perceção da posição no espaço – capacidade para distinguir figuras iguais, mas colocadas com orientações diferentes;

Perceção de relações espaciais – capacidade de ver e imaginar dois ou mais objetos, em relação consigo próprios ou em relação connosco;

Discriminação visual – capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objetos” (p. 168).

A teoria de van Hiele, desenvolvida nos anos 50 do século XX, por Dina e Peter van Hiele, um casal holandês, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico, através de cinco níveis de complexidade crescente (Ponte & Serrazina, 2000). Estes níveis de reconhecimento podem ser iniciados no nível 0 ou no nível 1, consoante os autores, e dentro destes podem ser considerados subníveis (Battista, 2007). De acordo com Battista, (2007) estes níveis apresentam as seguintes características:

Nível 1: Visualização – Neste nível de aprendizagem, o espaço é visto pelos alunos apenas como algo que existe à sua volta. Identificam as figuras geométricas apenas pela sua aparência física, pela sua forma, não conseguindo ainda identificar as suas propriedades. Os alunos são capazes de reproduzir figuras

e aprender um vocabulário geométrico básico. O raciocínio é dominado pela percepção visual. Por exemplo, os alunos são capazes de identificar um retângulo, porque este se assemelha a uma porta;

Nível 2: Análise - Os alunos começam a identificar as características e as propriedades das figuras, mas não conseguem, ainda, estabelecer relações entre elas. Adquirem conceitos, por via experimental, através de observações, de medições, de desenhos e de modelações.

Nível 3: Ordenação - Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras, estabelecendo relações entre as propriedades de uma dada figura, com outras figuras. Conseguem classificar hierarquicamente e dar justificações informais, para justificar a sua classificação. As definições começam, desta forma, a ter sentido para os alunos, contudo ainda não compreendem a dedução ou o papel dos axiomas;

Nível 4: Dedução - Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo. São capazes de reformular teoremas, compreender e desenvolver demonstrações formais, utilizando axiomas;

Nível 5: Rigor - Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria. A Geometria é entendida sob um ponto de vista abstrato.

A progressão dos níveis é determinada pelas experiências de ensino, pelo que o professor tem um papel primordial na definição de tarefas adequadas, para os alunos poderem progredir, para níveis superiores de pensamento geométrico (Clements & Battista, 1992).

A teoria de van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento, desde as formas iniciais de pensamento, até às formas dedutivas finais, onde a intuição e a dedução se vão articulando. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspeto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades (Battista, 2007). Por isso, estes níveis estabelecidos não atribuem à memorização uma posição de destaque, em qualquer um dos níveis, e dão relevo à compreensão (Clements & Battista, 1992).

Para desenvolver o sentido espacial é importante que os alunos tenham a oportunidade de viver experiências, incidindo nas relações geométricas; na direção, orientação e perspectivas dos objetos no espaço; nas formas e tamanhos relativos das figuras e objetos; e no modo como uma modificação numa forma se relaciona com uma mudança no tamanho (NCTM, 1994).

Assim, é importante que, ao nível dos primeiros anos, se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico, em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

2.4 Conceções em Geometria.

Ao longo dos anos e dos estudos desenvolvidos, jovens alunos foram apresentando, frequentemente, a existência de inúmeras conceções alternativas em Geometria (Ozerem, 2012; Siew, Chong, & Abdullah, 2013). Mack (2007) declarou que a maioria dos alunos sabe mencionar as designações matemáticas, para quadrado, triângulo, retângulo e círculo, mas muitas vezes ficam perplexos e incertos, quando as formas estão rodadas. A perceção da congruência de figura, independentemente da sua posição, sendo a “capacidade de reconhecer que um objeto possui invariantes propriedades, tais como o tamanho e a forma, apesar da possível variabilidade, quando é observado de um ponto de vista distinto” continua a originar enormes constrangimentos (Lindquist & Shulte, 1987, p. 128). Com esta capacidade, um aluno consegue reconhecer, por exemplo:

- um cubo, sem que uma das arestas esteja na horizontal (Lindquist & Shulte, 1987);
- ângulos retos em outras posições que não sejam a posição standard (um lado na vertical e o outro na horizontal), mesmo após algum exercitamento (Clements & Battista, 1992);
- um triângulo retângulo, somente quando o ângulo reto possui um dos lados na vertical e outro na horizontal (Clements & Battista, 1992);

- um quadrado, somente quando um dos lados é horizontal (Clements & Battista, 1992).

A inconciliabilidade entre a definição formal e a imagem mental e conceitual das formas geométricas (Archavsky & Goldenberg, 2005; Mack, 2007) traz, assim, algumas desvantagens ao nível da intuição geométrica (Fischbein, 1987, citado por Clements & Battista, 1992). O desenvolvimento desta competência “depende, em parte, das aprendizagens e experiências provenientes de atividades de natureza geométrica” (Frostig & Horne, 1964, citados por Lindquist & Shulte, 1987, p. 128) que devem ser propostas aos alunos. Apesar disso, Ozerem (2012) verificou que, mesmo os alunos que possuem um elevado desenvolvimento conceitual, podem apresentar fragilidades na aprendizagem de conceitos matemáticos.

De acordo com Idris (2007), as dificuldades de aprendizagem em Geometria, entre jovens alunos, pode ser explicada em termos do desenvolvimento cognitivo do indivíduo, de práticas pedagógicas e materiais utilizados bem como dos programas curriculares. Indivíduos com melhor percepção visual têm uma vantagem no raciocínio geométrico (Walker, Winner, Hetland, Simmons, & Goldsmith, 2011). Contudo a capacidade cognitiva do indivíduo não recai apenas sobre a percepção visual, mas também na tomada de decisão, o que é crucial para atingir uma ordem superior de pensamento para aprender Geometria (Siew, Chong, & Abdullah, 2013).

Alguns investigadores estudaram a aptidão dos alunos em compreenderem formas geométricas básicas (e.g., triângulo, círculo, quadrilátero) (Clements & Sarama, 2000; Wu & Ma, 2006). Em particular, Clements e Sarama (2000) verificaram que estes identificam o triângulo confiando “no ponto superior” da forma, a qual deve ter uma linha horizontal como base (Kaur, 2012). Assim, muitos alunos julgam e identificam como triângulo qualquer forma com três lados, ainda que dois deles sejam linhas curvas (Siew, Chong, & Abdullah, 2013). Quanto aos quadriláteros, para além do que já foi referido, os alunos identificam muitas vezes qualquer forma longa com quatro lados, como um retângulo, não distinguindo paralelogramos ou trapézios (Clements & Sarama, 2000).

No que diz respeito aos ângulos, existem evidências que o ângulo e a sua medição são conceitos difíceis (Mitchelmore, 1998). Muitos alunos acreditam que a amplitude de

um ângulo depende do comprimento dos lados representados (Foxman & Ruddock, 1984; Outhred, 1987) ou que o raio do arco influencia diretamente a amplitude do ângulo (Mitchelmore, 1998), ou, ainda, que um lado deve ser horizontal e a direção sempre no sentido inverso ao movimento dos ponteiros do relógio (Krainer, 1989). Têm ainda dificuldades no reconhecimento de ângulos retos, em orientações não standard (Noss, 1987; Outhred, 1987) e na aprendizagem do uso de um transferidor (Mitchelmore, 1983).

Algumas conceções alternativas, na aprendizagem de Geometria, também podem ter origem na terminologia e linguagem utilizada (Lee & Ginsburg, 2009). Por exemplo, as definições simples ou convenientes de que os eixos de simetria cortam as formas pela metade não explicitam que a metade criada por esse eixo tem de ser necessariamente a imagem de espelho exata da outra. Assim, muitas vezes os alunos encontram mais eixos de simetria do que os que de facto existem (Mitchelmore, 1998).

“O que os alunos aprendem está fundamentalmente relacionado com o modo como aprendem” (NCTM, 1994, p. 23). Assim, torna-se imprescindível que o processo de aprendizagem se apresente envolto num contexto ativo, produtivo e de construção (Arends, 1995).

Neste sentido, o professor tem um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem, dado que as suas estratégias e o trabalho que realiza são componentes essenciais à construção deste tipo de ambientes. O docente deve privilegiar a resolução de problemas e atividades de investigação em Matemática, nomeadamente a nível da Geometria e Medida, para permitir o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos.

3. ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

Neste capítulo são apresentadas as opções metodológicas adotadas para o desenvolvimento da parte prática deste estudo, a caracterização do Agrupamento, a caracterização dos alunos participantes e a planificação e organização das atividades.

3.1. Opções Metodológicas

Neste trabalho foi utilizada uma metodologia qualitativa descritiva, dada a característica de recolha e análise dos dados que se idealizou no planeamento da tarefa.

A pesquisa qualitativa dá “profundidade aos dados, a dispersão, a riqueza interpretativa, a contextualização do ambiente, os detalhes e as experiências únicas (...) oferecendo também flexibilidade” (Sampieri, Collado, & Lucio, 2006, p. 15). Desta forma, a investigação qualitativa possui cinco características básicas: a existência de um ambiente natural, no qual se recolhem diretamente os dados e o investigador é o instrumento principal; os dados recolhidos devem permitir fazer uma descrição da situação analisada; deve ser dada primazia à análise dos processos em detrimento dos resultados; o significado dado às coisas e situações pelos intervenientes é de extrema importância; e a análise dos dados deve seguir o caminho do processo indutivo (Ludke, 1986; Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin, 1994; Bogdan & Biklen, 2013). As estratégias mais representativas da investigação qualitativa, e aquelas que melhor ilustram as características, anteriormente referidas, são a observação participante e os registos orais e escritos dos indivíduos (Bogdan & Biklen, 2013), ambas aplicadas no decorrer deste estudo.

Ao nível descritivo, o objetivo do investigador “consiste em descrever situações, acontecimentos e feitos” (Sampieri et al., 2006, p. 100), especificando as propriedades, as características e os perfis importantes dos fenómenos que se submetem a análise. Do ponto de vista científico, Sampieri et al. (2006, p. 102), declaram que descrever é recolher dados (para os investigadores quantitativos, medir, para os qualitativos, recolher informações). Desta forma, os estudos descritivos integram a medição ou informação de cada variável com a pretensão de detalhar como é que se manifesta o

fenómeno de interesse, não tendo como objetivo indicar como se relacionam as variáveis medidas.

A metodologia deste projeto é baseada, sobretudo, na observação direta e participante da Professora Investigadora, em situações de sala de aula, e nos momentos de desenvolvimento de tarefas de investigação, previamente planificadas. Destas situações foram selecionados e analisados conjuntos de episódios, relativos às fases implícitas numa tarefa de investigação: da motivação, onde o professor apresenta uma tarefa a toda a turma; do desenvolvimento da investigação propriamente dita, em que os alunos trabalham em pequenos grupos; da discussão final em que os alunos apresentam os seus resultados e do trabalho realizado, elaborado por todos os alunos da turma, em conjunto com o professor. As técnicas de recolha de dados privilegiadas foram:

Observação participante – relato escrito da observação de aulas, a partir de registos efetuados pela professora e por duas professoras observadoras;

Gravações vídeo das sessões de trabalho com os alunos – gravação de alguns momentos das aulas, em que se realizaram as tarefas;

Análise documental dos produtos escritos pelos alunos – documentos produzidos pelos alunos, como a ficha de trabalho e registos fotográficos;

Dos instrumentos de recolha de dados, realçamos ainda o registo de diálogos, de gravação áudio, de fotografias e de anotações da investigadora.

Esta investigação assume-se como particularística, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação específica (triângulos), procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse (Geometria e Medida). Estas características evidenciam a classificação deste trabalho como um estudo de caso (Ponte, 1994) que se assume como um sistema limitado e com fronteiras em termos de tempo, eventos ou processos (Creswell, 2013). “É um estudo sobre algo, que necessita ser identificado para conferir foco e direção à investigação, que preserva o caráter “único, específico, diferente, complexo do caso” (Mertens, 1998, citado por Coutinho & Chaves, 2002, p. 224), e no qual o investigador recorre a fontes múltiplas de dados e a métodos de recolha diversificados” (Coutinho & Chaves, 2002, p. 224).

Neste estudo foram implementadas algumas tarefas com vista à abordagem completa do tópico “triângulos”, do PMEB, e que foram desenvolvidas numa turma do 5.º ano de escolaridade do Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua, no ano letivo de 2014/2015, na disciplina de Matemática.

Para tal, foram solicitadas as devidas autorizações, à Direção do Agrupamento e aos Encarregados de Educação. É de referir, que alguns Encarregados de Educação não deram autorização.

Os resultados obtidos da análise do desenrolar das propostas foram apresentados na forma de observações diretas e indiretas, questionários, narrativas, registos fotográficos, cadernos diários, documentos, entre outros.

Coube ao professor propor tarefas, tendo em atenção quais os alunos que tinha à sua frente, o meio onde estavam inseridos, e o seu modo de trabalhar. Conhecendo o seu meio e as suas envolverências tornou-se mais fácil planificar as tarefas, tendo em atenção a natureza das tarefas a propor, a dinâmica da sala de aula e os materiais a utilizar. Por este motivo, optou-se por fazer a caracterização do Agrupamento de Escolas, onde estava inserida a turma e a caracterização da mesma.

3.2. Caracterização do Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua

O Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua (AEPL) foi criado por Despacho do Senhor Secretário de Estado do Ensino e da Administração Escolar, em 28 de junho de 2012 e resulta da agregação do Agrupamento de Escolas de Leça do Balio (anteriormente homologado por despacho do Senhor Diretor Regional de Educação do Norte, em 19 de Abril de 2002), da Escola Secundária do Padrão da Légua e da Escola EB da Amieira (anteriormente pertencente ao Agrupamento de Escolas da Senhora da Hora).

Este agrupamento constitui uma unidade orgânica de ensino, pertencente à rede pública do Ministério de Educação e Ciência e tem sede na Escola Básica e Secundária do Padrão da Légua, situada na Rua dos Fogueteiros, no Padrão da Légua, na União de

Freguesias de Custóias, Leça do Balio e Guifões, concelho de Matosinhos, distrito do Porto. Esta unidade orgânica integra o Conselho Municipal de Educação de Matosinhos.

O AEPL engloba seis estabelecimentos abrangendo vários níveis de ensino, conforme consta da Tabela 3.

Tabela 3. Constituição do Agrupamento e Número de Turmas por Níveis de Ensino (ano letivo 2014/2015).

Estabelecimento de educação e ensino	Educação pré-escolar (n.º de turmas)	Ensino básico (n.º de turmas)			Ensino secundário (n.º de turmas)	Ensino profissional/vocacional (n.º de turmas)
		1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB		
EB da Amieira	1	5				
EB do Araújo	2	8				
EB de Gondivai	2	8				
EB do Padrão da Légua	4	10				
EB de Leça do Balio			9	9		0/2
EBS do Padrão da Légua			5	12	15	5/1

3.2.1. Contexto geográfico e socioeconómico

O AEPL insere-se numa área geográfica repartida pelas ex freguesias de Leça do Balio (EB de Leça do Balio (7), EB do Araújo (6), EB de Gondivai (5), EB do Padrão da Légua (2 e 3)¹, Custóias (EBS do Padrão da Légua (3)) e S. Mamede de Infesta (EB da Amieira (1))² como se ilustra na Figura 1.

As escolas EBS do Padrão da Légua, EB do Padrão da Légua e Amieira surgem numa área marcada por forte urbanização, onde coexistem bairros sociais, cooperativas habitacionais e outras áreas residenciais. Este desenvolvimento urbano determinou a proliferação do setor dos serviços e comércio, em detrimento das atividades agrícola e industrial. As restantes escolas do AEPL, EB de Gondivai, EB do Araújo e EB de Leça do Balio, também estão inseridas em espaço urbano, embora ainda aí prevaleçam traços rurais que, no entanto, estão em regressão face à expansão de novas áreas residenciais. Destaca-se, nesta área, a presença de atividades económicas do setor terciário,

¹ Edifício do Jardim de Infância do Monte da Mina.

² Atualmente estas unidades territoriais estão agrupadas nas duas Uniãos de Freguesias: União de Custóias/Leça do Balio/Guifões e a União de S. Mamede de Infesta/Senhora da Hora.

nomeadamente, a existência de superfícies comerciais, e de um setor industrial marcado pela presença de algumas unidades fabris de grande dimensão, nas áreas da eletromecânica, da metalomecânica, da química e da produção e transformação alimentar, e por pequenas e médias empresas, dos ramos da metalomecânica e da construção civil.



Figura 1. Distribuição geográfica das escolas do AEPL ³

Da análise dos censos 2011, constata-se que a população das freguesias em que se insere o AEPL sofreu, na globalidade, ao longo da última década, um ligeiro aumento, mais significativo na freguesia de Leça do Balio, que apresenta uma taxa de variação de 12,11% (ver Tabela 4).

No que se refere à estrutura etária à semelhança do registado no país, verifica-se uma tendência de envelhecimento demográfico. A “população, com idade inferior a 25 anos, regista um decréscimo, entre 1991 e 2001, sendo ainda mais evidente, nesta última década. (...) No entanto, o grupo etário dos 0 aos 14 anos registou, na freguesia de Leça do Balio, um crescimento de 9%”³ (Projeto Educativo Municipal (PEM) de Matosinhos, Maio de 2013).

³ Dados recolhidos em PEM de Matosinhos Disponível em: http://www.cm-matosinhos.pt/uploads/writer_file/document/5244/Projeto_Educativo_Municipal_de_Matosinhos.pdf; Acesso em 26 outubro de 2014

Tabela 4. População Residente nas Freguesias da Área Geográfica do AEPL.

Freguesias	1981	1991	2001	2011	Taxa de variação (2001-2011)
Custóias	12.302	14.797	18.065	18650	3,24 %
Leça do Balio	13.681	14.329	15.673	17571	12,11 %
S. Mamede de Infesta	18.953	20.468	23.542	23122	-1,78 %
Senhora Hora	13.321	19.988	26.543	27747	4,54 %

Fonte: Projeto Educativo Municipal , Matosinhos, CMM , Maio de 2013 ⁴

3.2.2. Caracterização dos Participantes

Participaram neste estudo 23 alunos de um 5.º ano de Ensino Básico, no Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua, dos quais 13 são raparigas e 10 são rapazes. A idade dos participantes varia entre os 9 e os 13 anos, situando-se a média nos 10,17 anos. A Tabela 5 apresenta a descrição dos dados sociodemográficos dos participantes.

O conjunto dos alunos tem uma origem bastante diversificada, quanto ao estabelecimento de ensino frequentado no 1.º CEB. Existem grupos de três a cinco alunos com origem em quatro escolas distintas do Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua (Escola Básica do Araújo, Escola Básica do Padrão da Légua, Escola Básica da Amieira e Escola Básica de Gondivai).

Tabela 5. Caraterísticas sociodemográficas dos participantes (n = 23).

	Grupo Experimental	
	N	Frequência (%)
Género		
Feminino	13	56.5
Masculino	10	43.5
Idade		
9-10 anos	19	82.6
11-13 anos	4	17.4

No sentido de obter uma melhor caracterização do contexto estudado analisar-se-á o ambiente familiar dos alunos e serão referidas algumas das suas características, tais como, o nível académico do encarregado de educação, a profissão e o agregado familiar

⁴ Disponível em: <http://www.cm-matosinhos.pt/pages/261>; Acesso em 26 de outubro de 2014

(ascendentes ou outros) com quem vivem os alunos. O nível de escolaridade dos Encarregados de Educação situa-se, maioritariamente, no Ensino Básico e Secundário, com profissões associadas ao setor dos serviços. Todos os alunos referem viver com os pais, com exceção de dois, que habitam apenas com a mãe. Os agregados familiares de proveniência caracterizam-se por fashquias de dois irmãos em média; nenhum aluno é portador de problemas de saúde e todos afirmam dormir entre oito a dez horas por dia.

Todos os alunos tomam o pequeno-almoço antes de virem para a escola e fazem, em média, quatro refeições diárias.

As disciplinas em que afirmam ter mais dificuldades são, respetivamente, Matemática, Inglês e Português, embora dois alunos tenham igualmente referido a disciplina de História e Geografia de Portugal. Apenas três alunos ficaram retidos em anos letivos transatos e 99% declaram ter ajuda no estudo, quer de ordem familiar, quer em centros de estudo. A maioria dos alunos diz estudar fazendo os trabalhos de casa, resumindo o manual e fazendo os exercícios do caderno de atividades. Todos declaram gostar de estudar em pequeno grupo (com um colega) e ter apoio dos pais na verificação dos trabalhos de casa, na orientação das dificuldades e na análise dos resultados escolares.

Todos os alunos declararam ter computador e internet em casa mas, em média, dedicam-lhe apenas uma hora por dia. Relativamente às atividades dos tempos livres, verifica-se uma preferência acentuada por ouvir música; ver televisão e ler. No que concerne às expetativas académicas futuras, 99% dos alunos referem querer tirar um curso superior na área das ciências ou das humanidades e apenas um declara querer optar por um curso profissional.

A turma tem um conjunto de alunos com prestações e competências claramente acima da média, com bastante autonomia e espírito de responsabilidade e iniciativa, acabando por ser uma minoria aqueles que poderemos considerar como alunos ditos “regulares”.

3.3. Planificação e Organização de Atividades

Tendo em conta que este estudo é de natureza qualitativa, elaborou-se uma experiência de aprendizagem cuja recolha de dados foi feita em contexto de sala de aula, na disciplina de Matemática. Esta foi realizada em aulas de noventa minutos.

Em todas as tarefas propostas pretendia-se privilegiar o trabalho de grupo de forma a promover a partilha e confronto de ideias. Assim, os alunos foram organizados em quatro grupos, três de seis elementos e um de cinco, sendo um deles o porta-voz.

Na primeira Intervenção didática (ver Tabela 6), realizada no mês de Outubro, pretendeu-se abordar os conceitos necessários e a utilização de instrumentos de desenho para a realização da atividade: utilização do transferidor, compasso e régua, classificação de polígonos e a construção de triângulos, sendo dado o comprimento dos lados, o comprimento de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado, e ainda o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado.

Tabela 6. Planificação da Intervenção Didática 1.

Situação Formativa: Construção de triângulos	Duração: 90 minutos
Conhecimentos prévios: Utiliza o transferidor, compasso e régua. Classifica polígonos. Constrói triângulos sendo dados os comprimentos dos lados. Constrói triângulos sendo dados comprimento de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado. Constrói triângulos sendo o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado. Classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.	
Recursos: Cartolinas coloridas, envelope, tesoura, lápis, borracha, esferográfica compasso, régua, transferidor e guião de investigação.	
Domínio: Geometria e Medida (GM)	
Subdomínio: Propriedades Geométricas	
Objetivos gerais: Reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos Resolver problemas	
Metas (descritores): <ul style="list-style-type: none">• Reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos• Utilizar corretamente os termos «ângulo interno», «ângulo externo» e «ângulos adjacentes a um lado» de um polígono.	

<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. • Reconhecer que num triângulo retângulo ou obtusângulo dois dos ângulos internos são agudos. • Designar por «hipotenusa» de um triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto e por «catetos» os lados a ele adjacentes. • Utilizar corretamente os termos «triângulo retângulo», «triângulo acutângulo» e «triângulo obtusângulo». • Construir triângulos dados os comprimentos dos lados, reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LLL de igualdade de triângulos». • Construir triângulos dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LAL de igualdade de triângulos». • Construir triângulos dado o comprimento de um lado e as amplitudes dos ângulos adjacentes a esse lado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério ALA de igualdade de triângulos». • Utilizar raciocínio dedutivo para reconhecer propriedades geométricas. • Resolver problemas envolvendo ângulos e triângulos. 	
<p>Capacidades transversais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas - compreensão de um problema; conceção, aplicação e justificação de estratégias; • Raciocínio matemático - formulação e teste de conjeturas; • Comunicação matemática - interpretação; representação; expressão e discussão. 	
<p>Tarefa dos alunos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ler e sublinhar as palavras relacionadas com Matemática; • Partilhar com os colegas as palavras encontradas; • Construir os triângulos de acordo com as instruções do guião de investigação (ver Apêndice); • Partilhar ideias com os colegas; • Medir as amplitudes dos ângulos internos dos triângulos; • Preencher a tabela; • Registar as conclusões no caderno diário. 	<p>Mediação do professor</p> <ul style="list-style-type: none"> • Organizar atividades cooperativas de aprendizagem promotoras de autonomia, responsabilidade e criatividade de cada aluno; • Organizar a aula com base em materiais e recursos diversificados, lúdicos e significativos para o aluno; • Organizar os grupos da turma; • Distribuir, do Guião de Investigação e material necessário à atividade, a cada grupo; • Ler o poema do livro de Maria Alberta Menéres: “Figuras e Figuronas”; • Discutir em grande grupo sobre cada palavra encontrada (<i>brainstorming</i> de vocabulário relacionado com triângulos e sua classificação); • Introduzir a tarefa; • Apoiar os alunos na descoberta das suas aprendizagens e na construção do seu próprio saber; • Discutir as conclusões, em grande grupo; • Registar as conclusões no quadro; • Sistematizar os conteúdos desenvolvidos; • Favorecer um ambiente propício à aprendizagem na sala de aula;

	<ul style="list-style-type: none"> • Questionar os alunos; • Incentivar os alunos à partilha das descobertas que vão realizando, dentro de cada grupo; • Interagir com os alunos individualmente ou em pequeno grupo, durante a realização da tarefa.
--	--

Os dados deste estudo foram coletados através da avaliação dos registos efetuados pelos alunos presentes no Guião de Investigação (ver Apêndice), concebido na sala de aula e descrito de seguida.

Esta primeira Intervenção Didática contemplou duas tarefas. A primeira tarefa consistiu na leitura do poema do livro de Maria Alberta Menéres “Figuras Figuronas” (ver Figura 2) e subsequente procura de todas as palavras que pudessem estar relacionadas com a Matemática.

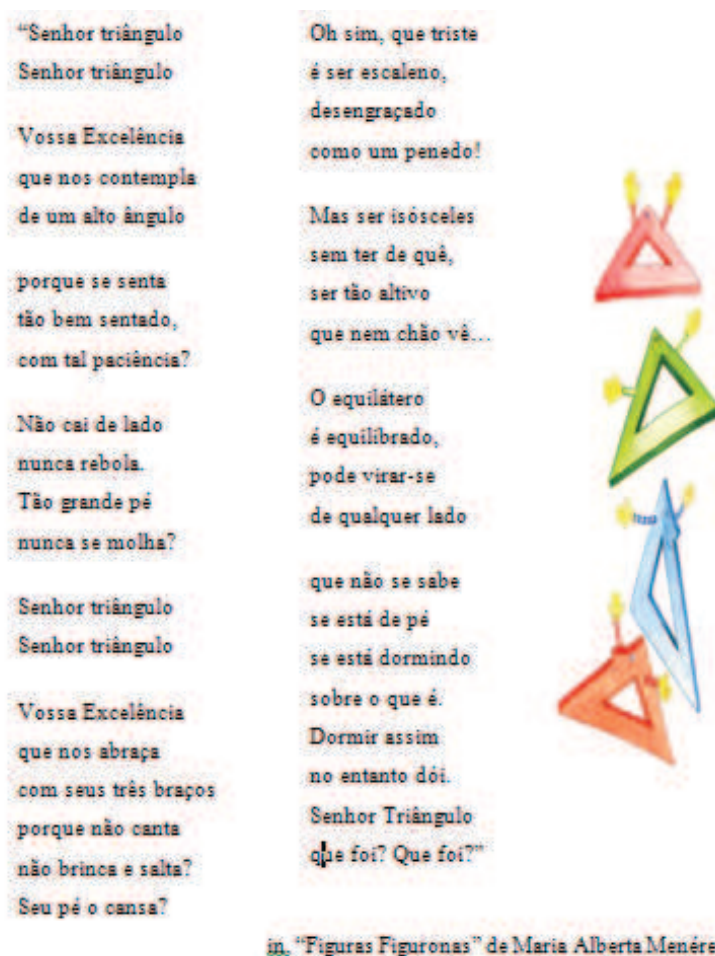


Figura 2. Figuras Figuronas

Esta atividade, teve como objetivo, construir uma “agenda de discussão” com o vocabulário selecionado e a identificação dos temas ou conceitos matemáticos já conhecidos e também daqueles que foram desenvolvidos e explorados na aula.

Este trabalho foi proposto para que os alunos trabalhassem a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificassem as questões que se levantassem, explicando-as de modo claro, conciso e coerente e discutissem estratégias, que conduzissem à sua resolução. Desta forma, os alunos foram incentivados a expor a suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas.

Na segunda tarefa, os alunos construíram triângulos, de acordo com as instruções do guião de investigação (ver Tabela 6 e Apêndice), partilharam ideias com os colegas, mediram as amplitudes dos ângulos internos dos triângulos e registaram as conclusões no caderno diário.

Com estas tarefas pretendeu-se que os alunos utilizassem corretamente os termos «triângulo retângulo», «triângulo acutângulo» e «triângulo obtusângulo», os termos «ângulo interno», «ângulo externo» e «ângulos adjacentes a um lado» de um polígono e que designassem por «hipotenusa», de um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto, e por «catetos» os lados a ele adjacentes. Pretendeu-se também que os alunos fossem capazes de construir triângulos:

- Dados os comprimentos dos lados, reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LLL de igualdade de triângulos»;
- Dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério LAL de igualdade de triângulos»;
- Dado o comprimento de um lado e as amplitudes dos ângulos adjacentes a esse lado, e reconhecer que as diversas construções possíveis conduzem a triângulos iguais, e utilizar corretamente, neste contexto, a expressão «critério ALA de igualdade de triângulos».

Deviam ainda concluir e reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso, adotando por isso uma prova empírica ingênua, identificada por Balacheff (1998), sendo própria para esta idade e para uma primeira abordagem.

Sendo a redação escrita parte integrante da atividade matemática, os alunos foram também incentivados a redigir corretamente as suas respostas, explicando adequadamente o seu raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em português correto e evitando a utilização de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas (PMEB, 2013, p. 5).

Na segunda Intervenção Didática (ver Tabela 7 e Apêndice), realizada no mês de novembro, foram trabalhados os seguintes conteúdos: Polígonos; Ângulos internos de um triângulo; Classificação de triângulos; Construção de triângulos e Relações entre elementos de triângulos.

Tabela 7. Planificação da Intervenção Didática 2.

Situação Formativa: Triângulos ao espelho	Duração: 90 minutos
Conhecimentos prévios: Utiliza o transferidor, compasso e régua. Classifica polígonos. Classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.	
Recursos: Livro de espelhos e triângulos, lápis, borracha, esferográfica, compasso, régua, transferidor e guião de investigação.	
Domínio: Geometria e Medida (GM)	
Subdomínio: Propriedades Geométricas	
Objetivos gerais: Reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos Resolver problemas	
Metas (descritores): <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer propriedades de triângulos e paralelogramos • Utilizar corretamente os termos «ângulo interno», «ângulo externo» e «ângulos adjacentes a um lado» de um polígono. • Reconhecer que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso. • Reconhecer que num triângulo retângulo ou obtusângulo dois dos ângulos internos são agudos. • Designar por «hipotenusa» de um triângulo retângulo o lado oposto ao ângulo reto e por «catetos» os lados a ele adjacentes. 	

<ul style="list-style-type: none"> • Utilizar corretamente os termos «triângulo retângulo», «triângulo acutângulo» e «triângulo obtusângulo». • Reconhecer que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente. • Reconhecer que em triângulos iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente. • Classificar os triângulos quanto aos lados utilizando as amplitudes dos respetivos ângulos internos. • Saber que num triângulo ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo, e vice-versa. • Utilizar raciocínio dedutivo para reconhecer propriedades geométricas. • Resolver problemas envolvendo ângulos e triângulos. 	
Capacidades transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas - compreensão de um problema; conceção, aplicação e justificação de estratégias; • Raciocínio matemático - formulação e teste de conjecturas; • Comunicação matemática - interpretação; representação; expressão e discussão. 	
Tarefa dos alunos <ul style="list-style-type: none"> • Colocar o livro de espelhos ao longo dos ângulos assinalados em cada um dos triângulos construídos na aula anterior (ver Apêndice); • Preencher a tabela 1 do guião de investigação; • Discutir, a tarefa, com os colegas do grupo e registar as conclusões; • Classificar os triângulos quanto à medida do comprimento dos seus lados e quanto à medida dos seus ângulos e preencher a tabela 2 do guião de investigação (ver Apêndice); • Registar as conclusões; • Medir os lados de cada um dos triângulos e relacionar com a amplitude dos ângulos; • Registar as conclusões no caderno diário; • Registar, no espaço próprio, do guião de investigação o que achou da atividade realizada. 	Mediação do professor <ul style="list-style-type: none"> • Organizar atividades cooperativas de aprendizagem promotoras de autonomia, responsabilidade e criatividade de cada aluno; • Organizar a aula com base em materiais e recursos diversificados, lúdicos e significativos para o aluno; • Organizar os grupos da turma; • Distribuir, do Guião de Investigação e material necessário à atividade, a cada grupo; • Introduzir a tarefa; • Apoiar os alunos na descoberta das suas aprendizagens e na construção do seu próprio saber; • Discutir, as conclusões, em grande grupo • Registar as conclusões no quadro; • Sistematizar os conteúdos desenvolvidos; • Favorecer um ambiente propício à aprendizagem na sala de aula; • Questionar os alunos; • Incentivar os alunos à partilha das descobertas que vão realizando, dentro de cada grupo; • Interagir com os alunos individualmente ou em pequeno grupo durante a tarefa.

Nesta Intervenção Didática pretendeu-se que, numa primeira tarefa, os alunos fossem capazes de reconhecer que, num triângulo retângulo ou obtusângulo, dois dos ângulos internos são agudos, que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente e que, em triângulos iguais, a lados iguais opõem-se ângulos iguais, e reciprocamente. Pretendeu-se, igualmente, que os alunos soubessem classificar os triângulos quanto aos lados, utilizando as amplitudes dos respetivos ângulos internos e que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e, ao menor lado, opõe-se o menor ângulo, e vice-versa. Utilisassem raciocínio dedutivo para reconhecer propriedades geométricas e resolvessem problemas, envolvendo ângulos e triângulos.

Numa segunda tarefa, pretendeu-se que os alunos visualisassem a formação de diversos polígonos, obtidos através da reflexão de triângulos num espelho e sua classificação. A professora, antes de os alunos começarem a trabalhar, explicou o que é o livro de espelhos e que este não serve para se verem ao espelho, nem para brincar, mas para fazer a atividade, discutindo com os colegas do grupo as descobertas que fossem fazendo.

4. APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo faremos uma apresentação dos resultados obtidos com o desenvolvimento das tarefas de investigação e, seguidamente, a análise e discussão dos resultados e o impacto dos resultados na comunidade educativa.

Os alunos participantes demonstraram muito interesse pela área disciplinar de Matemática, destacando-se o seu gosto por atividades de Geometria. É de referir ainda que, apesar de estarem habituados a resolver exercícios e problemas matemáticos, nunca estiveram envolvidos em tarefas de investigação, sendo, por isso, uma nova experiência para os participantes.

Sendo a autora deste estudo a investigadora e professora da turma, a relação com os alunos era já de alguma familiaridade, o que facilitou o desenvolvimento do trabalho investigativo. O papel assumido pela investigadora foi de observadora participante.

4.1. Primeira Intervenção Didática

4.1.1. Leitura e análise do poema “Figuras Figuronas” de Maria Alberta Menéres

Aquando da realização da análise do poema “Figuras Figuronas” de Maria Alberta Menéres, pelos diferentes grupos (ver Figura 3), aproveitou-se este momento para fazer uma breve revisão das matérias já aprendidas em aulas anteriores, esclarecendo as dúvidas colocadas por cada um dos grupos e incentivando-os a fazerem registos escritos das resoluções.

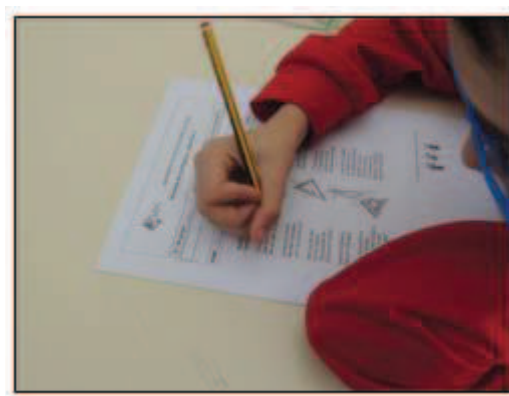


Figura 3. Leitura e análise do Poema “Figuras Figuronas” de Maria Alberta Menéres.

Como resultado da leitura e análise do poema supracitado debateu-se, em grande grupo, sobre cada palavra encontrada, que serviu de “pano de fundo” a um *brainstorming* do vocabulário, relacionado com triângulos e a sua classificação, descrita de seguida:

Professora (P): Grupo 1, qual a primeira palavra que encontraram?

Grupo 1 (G1): Ângulo.

P: O que é um ângulo?

Grupo 2 (G2): O ângulo são duas semirretas com a mesma origem.

P: Estão todos de acordo, acham que a definição do grupo 2 está completa?

Grupo 3 (G3): Não.

P: Então o que achas que deve ser acrescentado?

G3: As duas semirretas com a mesma origem dividem o plano em duas partes. Cada uma delas se chama ângulo.

P: Ah, muito bem... Agora penso que está melhor... Duas semirretas com a mesma origem dividem o plano em duas regiões distintas. Cada uma dessas regiões designa-se por ângulo.

E alguém se lembra como se chamam os dois ângulos?

Neste momento, os alunos demonstraram alguma dificuldade em classificar os ângulos, tendo-se aproveitado a oportunidade para recordar a noção de ângulo, o ângulo convexo e o ângulo côncavo.

Neste diálogo recuperou-se uma noção de ângulo a partir dos conhecimentos que os alunos já possuíam.

P: Grupo 4, qual a palavra que escolheram a seguir?

G4: Triângulo.

P: Porque escolheram essa palavra?

G1: Tem a ver com Matemática.

P: Mas o que é um triângulo?

G1: Um triângulo é uma figura geométrica com 3 lados.

G2: Professora, nós dissemos que é um polígono com três lados.

Perante esta afirmação a professora reforçou a importância da palavra polígono para excluir a possibilidade de os lados da tal figura geométrica, referida pelo G1, serem curvos.

P: Outra palavra?

G3: Escaleno.

P: O que é um triângulo escaleno?

G2: É um triângulo com os lados todos diferentes...

P: É mesmo?

G3: Sim, todos os lados têm medidas de comprimento diferentes.

P: Então, e o triângulo isósceles?

G2: O triângulo isósceles tem pelo menos dois lados iguais

P: O grupo 4 está de acordo?

G4: Sim, professora o triângulo isósceles tem pelo menos dois lados, com a mesma medida de comprimento.

Estes diálogos são realmente fundamentais na aula de Matemática. Repara-se que os alunos referiram “pelo menos dois lados iguais” que permite incluir nesta classe, os triângulos equiláteros. Esta particularidade, é de facto, muito relevante para o estudo dos quadriláteros que se seguirá e cuja exploração prevê a adoção de uma classificação hierárquica destes polígonos.

P: Vamos agora a outro grupo. Outra palavra.

G3: Equilátero.

P: E o que é um triângulo equilátero?

G3: É um triângulo com os três lados iguais.

G1: Nós dissemos de outra maneira, professora!

P: Então diz lá, como disseram?

G1: Um triângulo equilátero tem os três lados com a mesma medida de comprimento.

Repare-se na preocupação destes alunos em utilizar uma linguagem mais rigorosa no discurso matemático.

P: Muito bem! A definição está correta! Até agora estivemos a classificar os triângulos quanto aos lados! Mais alguma palavra?

G4: Mas nós ainda encontramos outra palavra!

P: Ai sim? Então qual?

A5: Lado. Lembrámo-nos que o triângulo tem três lados.

P: Estão a ver? Este poema tem muita Matemática!

A exploração deste texto permitiu o contributo de todos que, através do discurso, foram direcionados para a definição de conceitos, para a argumentação matemática e para o uso de linguagem formal.

4.1.2. Construção de triângulos com régua, compasso e transferidor

No início da atividade 1 (ver Apêndice), foi distribuído o material necessário, e após uma breve explicação dos objetivos os alunos começaram a tarefa autonomamente.

O tipo de questionamento desenvolvido pela professora foi o questionamento socrático, que estimula a aprendizagem ativa e encoraja os alunos para a aquisição de atitudes questionadoras e investigativas (Padesky, 2005). Desta forma, sempre que os alunos colocavam alguma questão, a professora devolvia questões, que fomentavam o raciocínio e a procura autónoma das próprias respostas.

A Figura 4 ilustra a atividade desenvolvida.

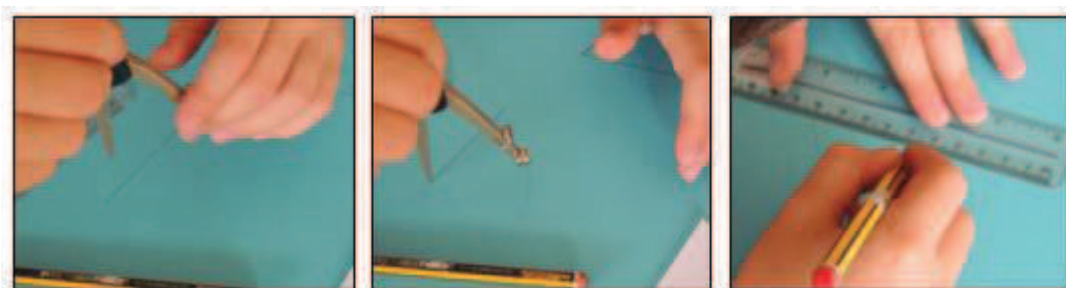


Figura 4. Construção de um triângulo equilátero com 15 cm de perímetro.

Uma vez que o triângulo era equilátero os alunos começaram por dividir 15 cm por três, para saber qual o comprimento dos lados do triângulo e, seguidamente, traçaram o segmento de reta com cinco centímetros, depois abriram o compasso, utilizando os extremos do segmento traçado anteriormente, construíram o triângulo equilátero.

No grupo 2, um aluno começou por traçar um segmento com 15 cm, mas um dos colegas fez logo a observação de que não era dado o comprimento do lado, mas sim o

perímetro do triângulo. O colega rapidamente se deu conta do erro e dividiu 15 por três seguindo a estratégia do grupo anterior.

Na construção do segundo triângulo (ver Atividade 1 do Apêndice), como se pode ver na Figura 5, os alunos utilizaram com rigor a régua, compasso e transferidor. Pode ainda observar-se, no grupo 3, duas alunas a fazer a leitura, com muito cuidado, do transferidor, de forma a serem rigorosas na marcação do ângulo de 72° .

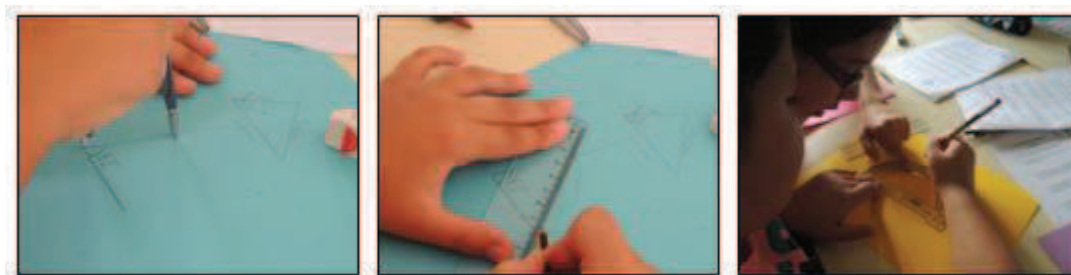


Figura 5. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 5 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 72° .

O grupo 3, na construção do terceiro triângulo (ver Atividade 1 do Apêndice), manuseou com facilidade o transferidor e um aluno do grupo 4 assinalou a medida do ângulo, para que o colega verificasse se estava correto (ver Figura 6). Podemos ainda observar, na Figura 6, a construção do triângulo isósceles com dois lados de 6,5 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 45° , realizada pelo grupo 2.

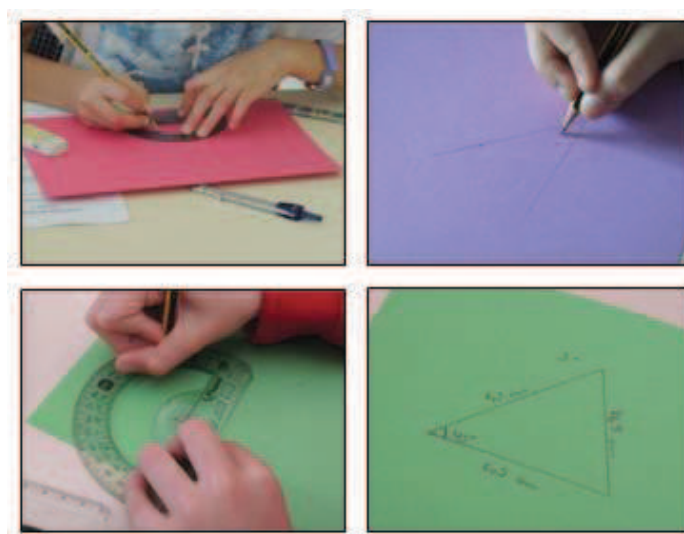


Figura 6. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 6,5 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 45° .

Na Figura 7 podemos observar o trabalho realizado pelo grupo 5, na construção do quarto triângulo (ver Atividade 1 do Apêndice). O aluno 3 e o aluno 4 deste grupo marcaram o lado de 5 cm e, seguidamente, marcaram os dois ângulos adjacentes ao mesmo.



Figura 7. Construção de um triângulo isósceles com um dos seus lados de 5 cm de comprimento e cujos ângulos adjacentes a esse lado medem 120° e 30° de amplitude.

Alguns alunos tiveram dificuldades no manuseio do transferidor ou não fizeram a leitura correta do mesmo (marcando 60° em vez de 120°).

Os alunos necessitaram de ajuda, com o procedimento requerido na utilização de um transferidor – alinhá-lo com o vértice e com um dos lados do ângulo, de forma a ler, corretamente, o valor do ângulo na escala do transferidor.

Nos casos onde existirem erros de leitura, por exemplo, confusão entre um ângulo de 120° e um ângulo de 60° , os alunos tomaram consciência da existência das duas escalas no transferidor. Neste caso, a investigadora apelou ao conhecimento que os alunos tinham sobre ângulos de referência, nomeadamente ao ângulo reto lembrando-lhes que deviam ter em atenção onde começa a leitura do ângulo e, no final, analisar se a sua resposta podia corresponder ao ângulo pedido.

A professora acompanhou os alunos, verificando se utilizavam corretamente o transferidor (ver Figura 8). Como estavam a trabalhar em grupo, sugeriu que, após a medição ou construção dos ângulos, trocassem, com os seus colegas, o triângulo, para o corrigirem. O trabalho de grupo facilitou a tarefa de construção de triângulos, pois os alunos ajudaram-se e aprenderam com os seus próprios erros.

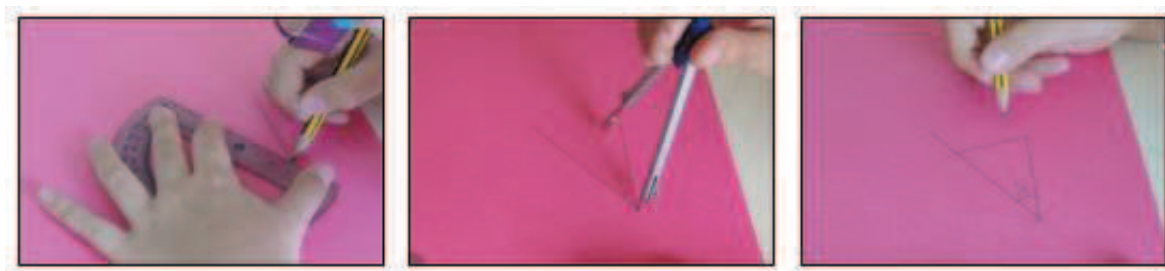


Figura 8. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 6 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 36° .

Na construção do triângulo isósceles, (ver Atividade 1 do Apêndice), com dois lados de 6 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 90° (ver Figura 9), pode observar-se que os alunos registaram o comprimento dos lados, a amplitude do ângulo e todos os dados da questão.

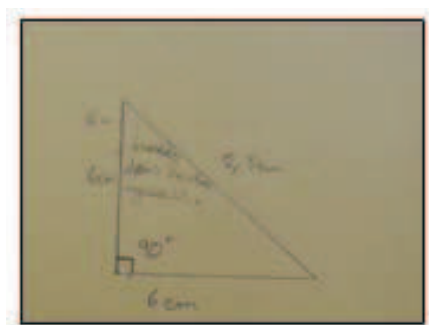


Figura 9. Construção de um triângulo isósceles com dois lados de 6 cm de comprimento e a amplitude do ângulo por eles formado igual a 90° .

Na Figura 10, pode observar-se o trabalho desenvolvido pelos alunos, depois de recortarem os triângulos, a medirem a medida de amplitude dos três ângulos internos.



Figura 10. Medição dos ângulos internos.

À medida que verificavam a medida de amplitude dos ângulos internos dos triângulos, foram registando os seus valores numa tabela e calculando a soma dos três ângulos internos do triângulo (ver Figura 11), retirando posteriormente as conclusões (ver Figura 12).

G1: Professora, estamos a ver que dá sempre 180° .

P: Mas será que é sempre assim? Continuem a verificar!

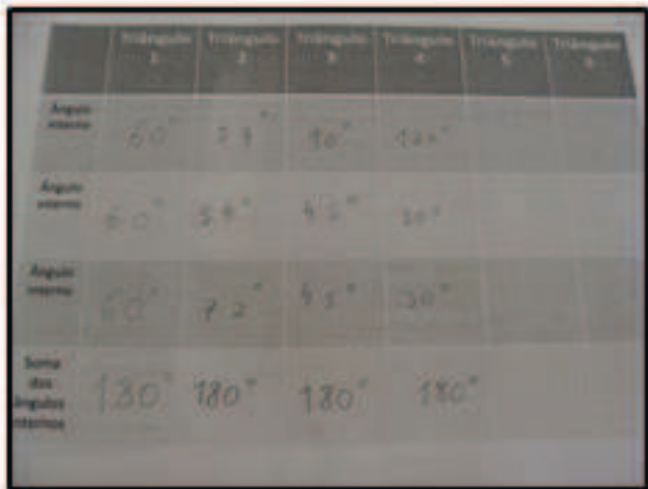
G2: Que interessante, professora, a soma dá sempre 180° .

P: Continuem, para no fim fazerem as conclusões.

G3: Já acabamos a tabela e dá sempre 180° .

P: Muito bem, então o que podemos concluir?

G3: Que a soma dos ângulos internos é sempre 180° .



	Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3	Triângulo 4	Triângulo 5	Triângulo 6
Ângulo interno	60°	73°	10°	125°		
Ângulo interno	60°	58°	45°	30°		
Ângulo interno	60°	72°	55°	30°		
Soma dos ângulos internos	180°	180°	180°	180°		

Figura 11. Cálculo da soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo.

Este procedimento insere-se no já referido tipo de prova empirismo ingénuo que é próprio para este tipo de investigações com crianças desta faixa etária e de escolaridade.

	Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3	Triângulo 4	Triângulo 5	Triângulo 6
Ângulo interno	60°	54°	45°	120°	30°	90°
Ângulo interno	60°	54°	45,5°	30°	70°	45°
Ângulo interno	40°	70°	69,5°	30°	70°	40°
Soma dos ângulos internos	180°	180°	180°	180°	180°	150°

Figura 12. Conclusão do cálculo da soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo.

O trabalho de grupo e os momentos de discussão em grande grupo promoveram o pensamento crítico e a troca de ideias entre alunos, o que facilitou a aquisição de conhecimentos. Também os diálogos estabelecidos entre a professora e os alunos, com base na necessidade de justificação dos procedimentos e dos resultados apresentados, levaram os alunos a refletirem sobre o seu trabalho, assumindo uma posição crítica, o que contribuiu para clarificarem algumas ideias e chegarem a determinadas conclusões.

G4: Professora, estamos a completar a tabela, mas há um triângulo que está a dar diferente (ver Figura 13).

	Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3	Triângulo 4	Triângulo 5	Triângulo 6
Ângulo interno	60°	54°	45°	120°	30°	90°
Ângulo interno	60°	54°	45,5°	30°	70°	45°
Ângulo interno	40°	70°	69,5°	30°	70°	40°
Soma dos ângulos internos	180°	180°	180°	180°	180°	202,5°

Figura 13. Identificação e discussão de erros de cálculo.

P: Então, quanto vos dá?

G4: Um dos triângulos dá 202,5°.

P: Não querem voltar a medir a amplitude dos ângulos?

G4: Já medimos e dá-nos igual...

P: E se voltarem a somar?

G4: Professora, não fizemos a conta bem. Agora já dá 180° (ver Figura 14).

	Triângulo 1	Triângulo 2	Triângulo 3	Triângulo 4	Triângulo 5	Triângulo 6
Ângulo interno	60°	72°	45°	120°	72°	90°
Ângulo interno	60°	54°	$67,5^\circ$	30°	72°	45°
Ângulo interno	60°	54°	$67,5^\circ$	30°	36°	45°
Soma dos ângulos internos	60° $\frac{180^\circ}{3}$	72° 54° $\frac{180^\circ}{2}$	$67,5^\circ$ $67,5^\circ$ $\frac{135^\circ}{2}$	120° 30° $\frac{150^\circ}{2}$	72° 72° $\frac{144^\circ}{2}$	90° 45° $\frac{135^\circ}{2}$

Figura 14. Correção dos erros de cálculo.

Por fim, realizou-se a síntese geral da atividade.

P: Acabaram de construir triângulos isósceles, escalenos e equiláteros ... Hoje já falamos muito da classificação dos triângulos quanto aos lados. Mas os triângulos só se podem classificar quantos aos lados?

G2: Não, podem também classificar-se quanto aos ângulos.

P: Ai sim! Então, digam como se classifica, quanto aos ângulos?

G1: Triângulo retângulo, acutângulo e obtusângulo.

P: Mas o que entendem por triângulo retângulo?

G2: É um triângulo que tem um ângulo reto.

P: E um triângulo obtusângulo?

G3: O triângulo obtusângulo tem 1 ângulo obtuso.

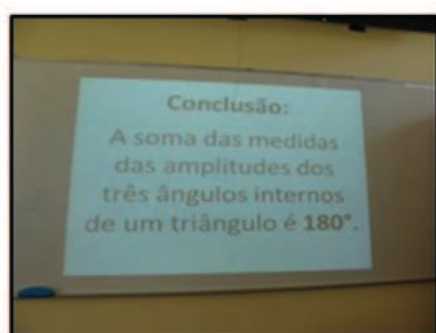
P: E pode ter dois ângulos obtusos?

G3: Não, pois passa de 180° .

P: Podes explicar-me melhor?

G3: A soma dos três ângulos tem que ser igual a 180° e se tivesse dois ângulos obtusos já ultrapassava.

P: Muito bem! A soma das medidas das amplitudes dos três ângulos internos de um triângulo é 180° . Vamos registar no caderno diário (ver Figura 15).



*Conclusão:
A soma das medidas dos três ângulos internos
de um triângulo é 180° .*

Figura 15. Registo no caderno diário.

P: Vocês disseram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . No triângulo equilátero, como vou saber a amplitude de cada um dos ângulos internos?"

G4: Dividimos por três.

P: Mas porquê?

G2: Porque se o triângulo é equilátero, tem os lados todos iguais e, por isso, também vai ter os ângulos todos iguais.

P: Então, qual é a amplitude de cada um dos ângulos?

G1: Fazemos 180 a dividir por 3, que dá 60. Cada ângulo mede 60° .

Para esta conclusão, a tabela preenchida anteriormente facilitou a relação entre os ângulos e os lados dos triângulos. Repare-se que o primeiro triângulo era equilátero e,

no preenchimento da tabela, todos os ângulos foram identificados como tendo 60° de amplitude. Ou seja, três lados iguais, três ângulos iguais. Os mesmos reparos foram incentivados no preenchimento da amplitude dos ângulos nos triângulos seguintes.

“O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspetos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem” (Oliveira, Brocardo & Ponte, 2005, p. 23).

Aprender matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática. Deste modo é possível verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre ele. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos (Braumann, 2002, p. 5).

P: Agora, peguem no vosso triângulo retângulo. Qual é o maior lado desse triângulo?

G2: O maior lado é o que está à frente do ângulo de 90° .

Aluno: Este aponta para a hipotenusa, lado oposto ao ângulo de 90° (ver Figura 16).



Figura 16. Aluno apontando para a hipotenusa.

P: Sim, em matemática dizemos que é o lado que está oposto a esse ângulo. E alguém sabe como se chama.

G3: Sim, hipotenusa.

Esta aluna, já sabia a designação de hipotenusa e catetos, a sua mãe é professora de Matemática e já tinha conversado com a mesma sobre a hipotenusa e os triângulos catetos.

P: Sofia, sabes como se chamam os outros dois lados?

Aluna: São os catetos.

P: Então vamos registar no caderno diário (ver Figura 17), para ficarmos todos a saber!

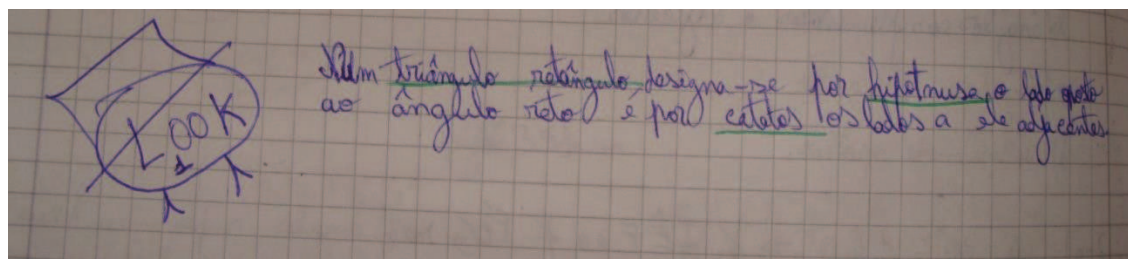


Figura 17. Redação da definição de hipotenusa.

No fim desta aula, os alunos comentaram:

Aluno 1: Construímos 3 tipos de triângulos, desempenhamo-nos bem.

Eu (Aluno 2) e a Aluna 3 ajudamos os colegas e também aprendemos a fazer triângulos isósceles, retângulos e escalenos.

Aluno 4: O que gostei mais foi de usar os materiais: régua, transferidor e compasso.

Aluno 5: Gostei de ajudar os colegas e de construir os triângulos.

Aluno 6: Gostei de trabalhar em grupo, fazer os triângulos e ajudar os colegas. Ficamos a saber melhor o significado das palavras.

P: O que ficaram a saber mais, hoje?

Aluno 7: Ficamos a conhecer a hipotenusa e os catetos.

A tarefa suscitou grande curiosidade nos alunos, que deram contribuições bastante significativas para a discussão e para a síntese. Durante toda a tarefa, os alunos mantiveram-se muito empenhados e foram revelando bastante curiosidade, acerca dos triângulos que iam encontrando.

Com as perguntas ou comentários pertinentes dos alunos, a professora aproveitou para dar novos conceitos e estabelecer algumas conexões como outros domínios da Matemática.

A síntese da tarefa foi registada numa tabela projetada no quadro, aproveitando as contribuições dos alunos e assegurando que os mesmos copiavam os registos, para a sua ficha de trabalho.

No final da aula, a professora teve a sensação que a maioria dos alunos tinha compreendido as ideias essenciais, às quais voltaria nas próximas aulas, aquando da resolução de exercícios e problemas.

Os alunos envolveram-se ativamente na construção de triângulos recorrendo de imediato aos materiais necessários: régua, compasso e transferidor! Os alunos classificaram triângulos, quanto à medida de comprimento dos seus lados e quanto à medida de amplitude dos seus ângulos.

O vocabulário próprio do tema foi gradualmente integrado, tendo sido certamente uma tarefa enriquecedora para todos.

4.2. Segunda Intervenção Didática

4.2.1. Propriedades dos triângulos

Utilizando os triângulos obtidos na primeira intervenção didática, deu-se início à aula, recordando o trabalho já efetuado e solicitando aos alunos que medissem os comprimentos dos lados de cada triângulo (ver Figuras 18 e 19).



Figura 18. Registo da medida dos lados de um triângulo.

G1: Cada lado mede 5 cm (Ver Atividade 1 do Apêndice).

P: E a amplitude dos ângulos qual é?

G1: Cada ângulo tem 60° .

P: E o que podem concluir?

G1: Quando os ângulos são iguais, os lados também são iguais.

P: Vejam o que acontece com todos os triângulos.



Figura 19. Reconhecimento que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais e reciprocamente.

Neste momento os alunos registavam individualmente os comprimentos dos lados de todos os triângulos e iam confirmando com os colegas esses valores. Uma vez que a professora dirigiu o último diálogo para a relação entre o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos, nos registos efetuados, os alunos já estavam atentos e tentavam descobrir novas relações. O entusiasmo era evidente.

P: Então, já mediram os lados do triângulo?

G3: Dois lados medem 6 cm e o outro 8,5 cm.

P: Vejam agora os ângulos e tentem chegar a uma conclusão.

G3: Tem dois ângulos iguais e dois lados iguais.

P: E qual é o maior ângulo?

G3: É o ângulo reto.

P: E qual é o maior lado?

G3: É o que está à frente do ângulo.

P: Muito bem, podem continuar as vossas investigações.

No fim, a professora fez um plenário para discutirem em grande grupo a atividade.

P: Vamos conversar sobre o que estiveram a fazer e que conclusões chegaram!
Grupo 4, querem dizer as vossas conclusões?

G4: Em todos os triângulos, em frente ao maior ângulo está o maior lado.

G3: Oh, professora, também vimos que à frente do menor lado está o menor ângulo.

P: Muito bem. Grupo 2, querem dizer alguma coisa?

G2: No triângulo que tem os três lados iguais, também tem os três ângulos iguais.

P: Muito bem, chegaram todos a boas conclusões. Vamos agora registá-las no caderno diário.

As conclusões foram projetadas e os alunos copiaram-nas no caderno diário (ver Figura 20).

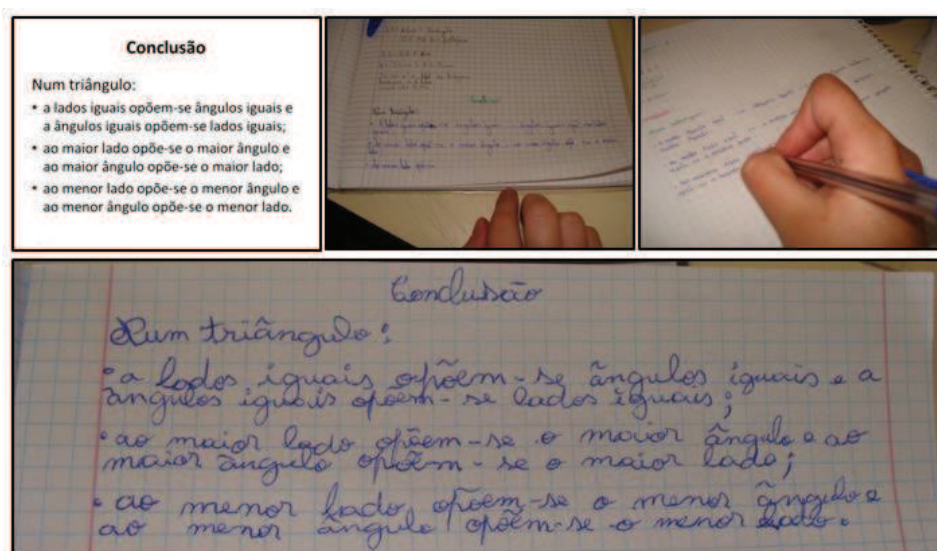


Figura 20. Registo das conclusões no caderno diário.

As tarefas de investigação integram uma forma de construir conhecimento. Pelo que vivenciei nas aulas realizadas, as mesmas podem contribuir para a aprendizagem dos alunos. Para além disso, não se pode deixar de referir o entusiasmo que os alunos manifestam, normalmente, com estas atividades! “Arregaçando as mangas” e colocando “as mãos na massa”, tornam-se construtores do seu conhecimento e entusiasma-se pela Matemática.

Nesta tarefa o papel do professor foi preponderante no sentido de ser um mediador do discurso estimulando a comunicação, a partilha de ideias e a justificação das afirmações dos alunos que serviam de argumentos às suas conclusões.

4.2.2. Triângulos ao espelho

A tarefa dos espelhos suscitou muita curiosidade nos alunos, que não sabiam muito bem o que iriam fazer. Após continuação, por parte da professora, do claro entendimento da tarefa por parte dos grupos de trabalho, a mesma foi orientando e apoiando as explorações dos vários grupos, sem, porém, lhes dar pistas.

À medida que os alunos descobriam os polígonos que obtinham, quando colocavam o triângulo correspondente no livro de espelhos (ver Figuras 21 a 27), era

visível na sala de aula, um ambiente de “magia” e de um certo “fascínio”. As expressões de satisfação e de surpresa eram evidentes, nos seus comentários.

Grupo 1

Aluno 1: Ah! Um triângulo...



Figura 21. Visualização de um triângulo ao espelho – grupo 1.

Aluno 2: Quadrado, fixe!

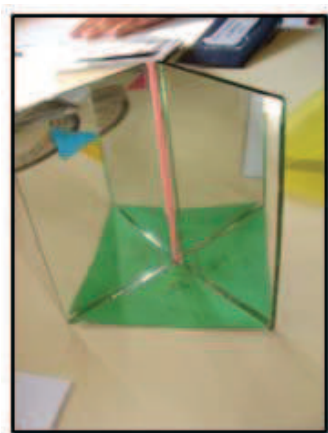


Figura 22. Visualização de um quadrado ao espelho – grupo 1.

Aluno 3: É um quadrado! Quem diria...

Grupo 4

Aluno 4: Parece magia. Saiu um pentágono!

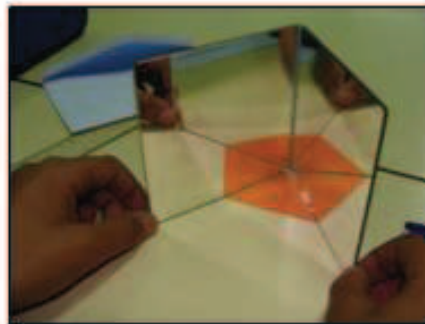


Figura 23. Visualização de um pentágono ao espelho – grupo 4.

Aluno 5: Ei, um hexágono... “Fixe”...

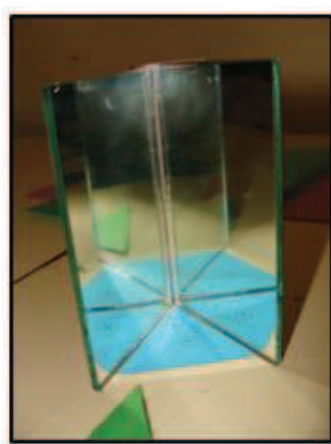


Figura 24. Visualização de um hexágono ao espelho – grupo 4.

Aluno 6: Oito lados são um octógono, dá certinho...

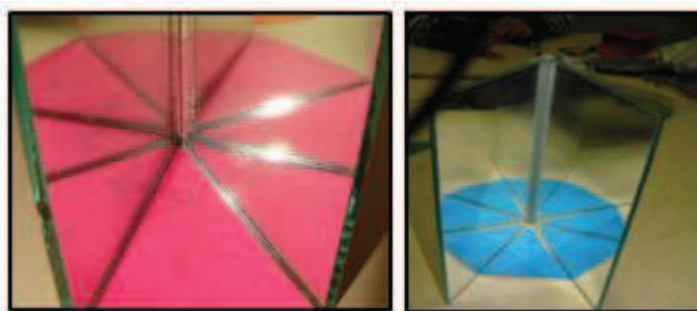


Figura 25. Visualização de um octógono ao espelho – grupo 4.

Aluno 7: Um ângulo de 36° ... Que figura é essa tão esquisita?

Aluno 8: Oito... oito... oito... é um octógono.

Grupo 2

Aluno 9: Como é que é possível?

Aluno 10: Parece um hexágono!

Aluno 11: É muito grande, vou contar quantos lados tem.

Aluno 12: Tem 6 lados. É um hexágono.



Figura 26. Visualização de um hexágono ao espelho – grupo 2.

Os alunos foram colocados, perante desafios e não perante conclusões. Puderam experimentar, fizeram as suas descobertas e registaram as suas conclusões.

Grupo 3

Aluno 13: Este tem sete lados.

Aluno 14: Que fixe.

Aluno 15: É um heptágono

Aluno 16: Este tem todos os ângulos iguais e os lados também. É um quadrado!

Aluno 17: O meu tem três lados, é um triângulo!

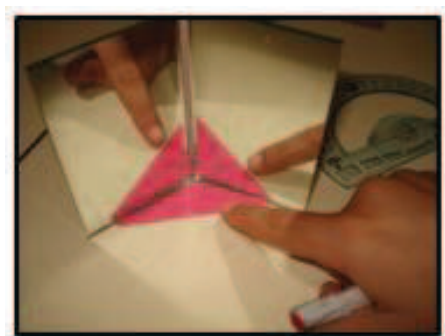


Figura 27. Visualização de um triângulo ao espelho – grupo 3.

Durante esta fase, os alunos estavam sempre a solicitar a professora, para revelarem as suas descobertas.

O recurso a materiais manipuláveis facilitou a interpretação e a resolução das situações apresentadas, pois os alunos, sempre que necessitaram, tiveram oportunidade de realizar a concretização, servindo esta, algumas vezes, apenas para confirmar, por uma questão de segurança, o que já tinham efetuado, de forma mais abstrata.

Quando todos os grupos tinham terminado esta tarefa, passou-se à discussão da 1ª parte da atividade 2 (ver Apêndice, Atividade 2: Triângulos ao espelho), em grande grupo.

A professora questionou os alunos de cada grupo sobre as conclusões obtidas, confrontando-as com as dos restantes.

Os alunos deram contribuições muito significativas, quer para a discussão, quer para a síntese.

P: A que conclusão chegaram?

Ao pedir aos alunos que explicassem por escrito o seu raciocínio e as suas descobertas (ver Figuras 28, 29 e 30), os alunos melhoraram a sua capacidade de comunicação (Sá, Sá, & Zenhas, 2004; Tenreiro-Vieira, 2010) e, por outro lado, suscitam-se momentos de reflexão sobre o que acabaram de descobrir.

Este grupo referiu apenas a relação entre o número de lados e a medida de amplitude do ângulo ao centro definido pelo livro de espelhos. De facto, esta relação de proporcionalidade inversa foi registada por todos os grupos.

O que observas? Preenche a tabela seguinte:

Triângulo com um ângulo de:	Número de lados do polígono	Classificação do polígono
120°	3	triângulo
90°	4	quadrilátero
72°	5	pentágono
60°	6	hexágono
45°	8	octógono
36°	10	decágono

Tabela 1

Observa agora a tabela preenchida. O que concluis?

Quanto maior o ângulo, menor é o número de lados e quanto menor o ângulo, maior o número de lados.

Figura 28. Conclusões, do grupo 2, após o preenchimento da tabela.

Este grupo, para além da mesma observação do grupo 2, encontrou a particularidade dos produtos dos valores serem todos iguais a 360°. Esta descoberta era fundamental uma vez que permitiria explorar outros casos cujos ângulos não estivessem representados nos triângulos.

O que observas? Preenche a tabela seguinte:

120° x 3 = 360°	Triângulo com um ângulo de:	Número de lados do polígono
90° x 4 = 360°	120°	3
72° x 5 = 360°	90°	4
60° x 6 = 360°	72°	5
45° x 8 = 360°	60°	6
36° x 10 = 360°	45°	8
	36°	10

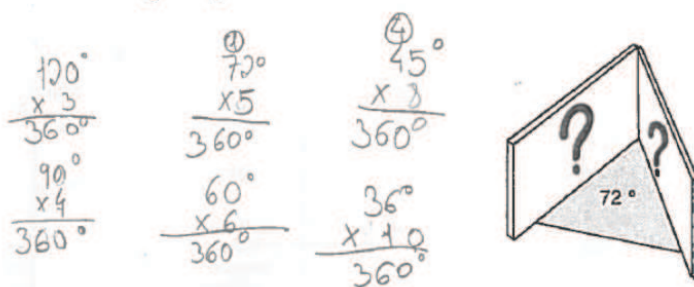
Tabela 1

Observa agora a tabela preenchida. O que concluis?

Quanto maior é o ângulo o polígono tem menos lados. Se não multiplicar o ângulo ao número de lados não sempre 360° (ângulo giro).

Figura 29. Conclusões do grupo 4, após o preenchimento da tabela.

Coloca o livro de espelhos ao longo dos lados dos ângulos assinalados em cada um dos triângulos que construístes.



O que observas? Preenche a tabela seguinte:

Triângulo com um ângulo de:	Número de lados do polígono	Classificação do polígono
120°	3	triângulo
90°	4	quadrado
72°	5	pentágono
60°	6	hexágono
45°	8	octógono
36°	10	decágono

Tabela 1

Observa agora a tabela preenchida. O que concluis?

Se multiplicar o número de lados pelo ângulo do triângulo dá sempre 360°.

Figura 30. Conclusões do grupo 3, após o preenchimento da tabela.

Este grupo mencionou apenas que o produto daquelas variáveis era constante.

Cada grupo elaborou as suas descobertas e partilhou-as com os colegas.

Esta tarefa requereu que se procedesse à discussão do trabalho realizado. Tendo-se verificado que alguns alunos demonstram dificuldade na escrita do seu raciocínio além de o fazerem de forma sintética e incompleta.

Esta fase foi essencial, para levar os alunos a perceberem que, para além de fazerem descobertas, têm também que justificá-las.

Após um momento de partilha e discussão, a professora solicitou a um aluno de que viesse ao quadro preencher a tabela (ver Figura 31).

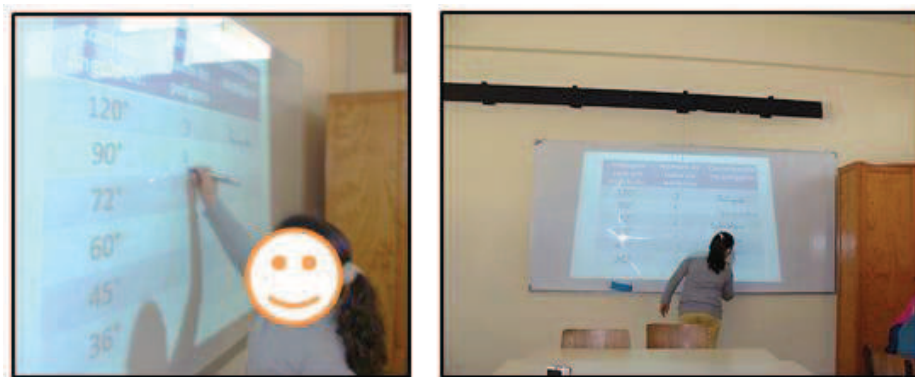


Figura 31. Registro dos resultados observados: variação do ângulo de abertura do livro de espelhos vs. Figura observada.

Após o preenchimento da tabela, a professora solicitou a partilha das conclusões, a que os alunos chegaram.

Então, o que podemos concluir?

Aluno 20: Se multiplicarmos o número de lados do polígono “vezes” a amplitude do ângulo dá sempre 360° .

P: Muito bem! E se tivéssemos um polígono com doze lados? Que ângulo teria?

Aluno 12: Fazíamos trezentos e sessenta a dividir por doze.

P: Então, vem fazer ao quadro e diz quanto dá (ver Figura 32).



Figura 32. Cálculo do ângulo necessário para observar um dodecágono.

Aluno 12: Dá trinta graus.

P: E como se chama o polígono nesse caso?

A4: Se tem doze lados, chama-se dodecágono.

P: Boa! E se fosse um ângulo de dez graus? Como íamos saber?

A2: Temos que dividir trezentos e sessenta por dez.

P: Então, façam os cálculos e digam-me quantos lados tem, nesse caso, o polígono?

A3: Já fiz, dá um com 36 lados.

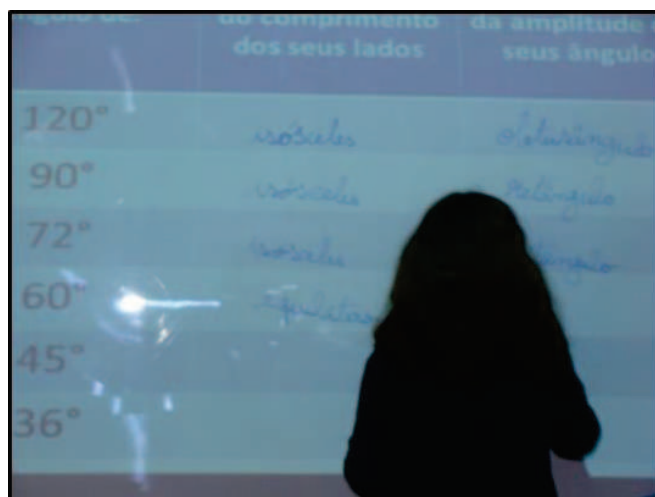
P: Muito bem!

A partir de alguns exemplos, pretendeu-se que os alunos estabelecessem uma relação entre o número de lados e a amplitude do ângulo (ângulo de abertura do livro de espelhos). A generalização, para qualquer caso, poderá servir para aplicação a outras situações.

A professora escreveu as conclusões que os alunos iam referindo, fazendo por vezes acertos ao texto, no quadro e os alunos copiaram para o caderno diário.

A tabela facilitou a organização dos dados e as respetivas conclusões.

Seguidamente, a professora apresentou a segunda atividade (ver atividade no Apêndice) a qual, depois de feita pelos alunos foi concretizada também numa tabela projetada no quadro (ver Figura 33) e verificada por todos os alunos, para poderem validar o seu trabalho.



Classifica os triângulos que construiste quanto à medida do comprimento dos seus lados e quanto à medida da amplitude dos seus ângulos.

Triângulo com um ângulo de:	Quanto à medida do comprimento dos seus lados	Quanto à medida da amplitude dos seus ângulos
120°	isósceles	obtusângulo
90°	isósceles	retângulo
72°	isósceles	acutângulo
60°	equilátero	acutângulo
45°	isósceles	acutângulo
36°	isósceles	acutângulo

Tabela 2

Figura 33. Preenchimento da tabela projetada e registo de um aluno.

A tabela foi preenchida por cada um dos grupos:

G3: É um triângulo isósceles, tem dois lados iguais e é obtusângulo, porque tem um ângulo obtuso.

G1: É um triângulo retângulo, porque tem um ângulo reto, um ângulo de 90° e também é isósceles, tem dois lados iguais.

G2: É um triângulo equilátero, tem os três lados com o mesmo comprimento e é acutângulo.

P: Quanto mede cada um dos ângulos?

G3: 60°

P: É sempre assim nos triângulos equilátero?

Aluna 7: Sim, professora, porque a soma dos três ângulos é sempre 180° .

P: Vamos continuar a preencher a tabela.

G4: Quanto aos lados é um triângulo isósceles e quanto aos ângulos é um triângulo acutângulo.

G3: Oh, professora, quase todos os triângulos eram isósceles e não havia nenhum escaleno.

P: É verdade, tens razão. Mas, já agora, o que é um triângulo escaleno?

A10: Um triângulo escaleno tem os três lados diferentes.

A facilidade com que os alunos responderam a algumas questões deu-lhes confiança, levou-os a compreender a importância do trabalho realizado anteriormente e permitiu-lhes aprofundá-lo.

O empenho que os alunos puseram na realização das tarefas, foi grande, bem como a satisfação por serem eles próprios fazerem as suas descobertas e aprendizagens.

A realçar o interesse, ficam algumas das opiniões dos alunos sobre as tarefas realizadas agrupadas em três grandes grupos. O gosto pelas tarefas desenvolvidas foi notório em todos os registos mas uns focalizaram-se num tema e outros noutros. Vejamos na Figura 34, os alunos destacaram a última descoberta relativamente ao livro de espelhos e o facto do referido produto ser sempre constante e igual a 360° ou a relação de proporcionalidade inversa existente.

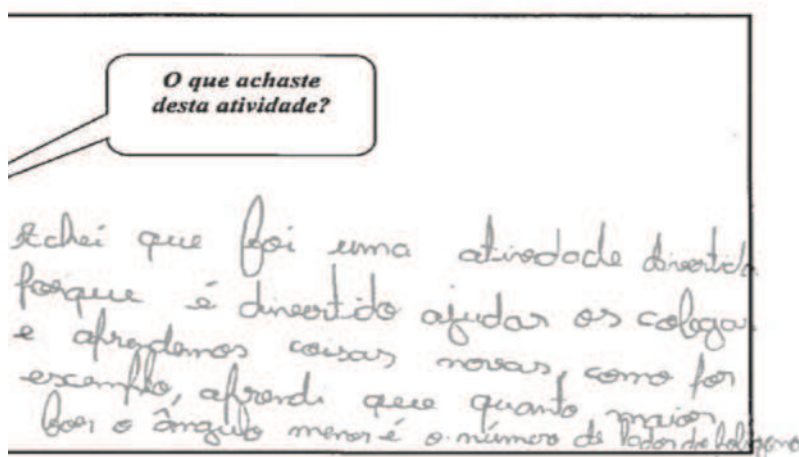
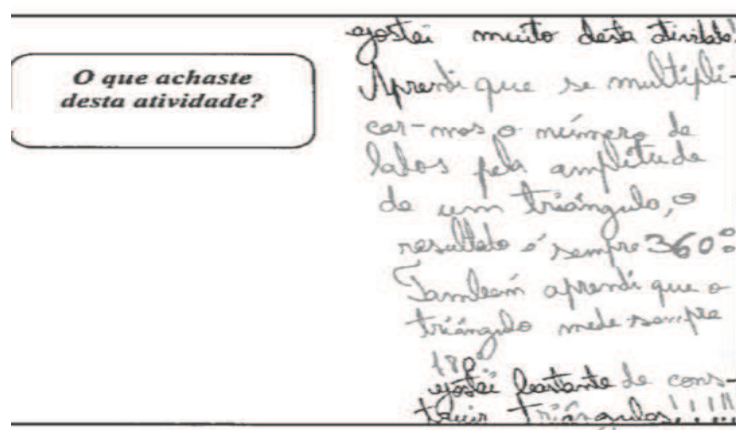
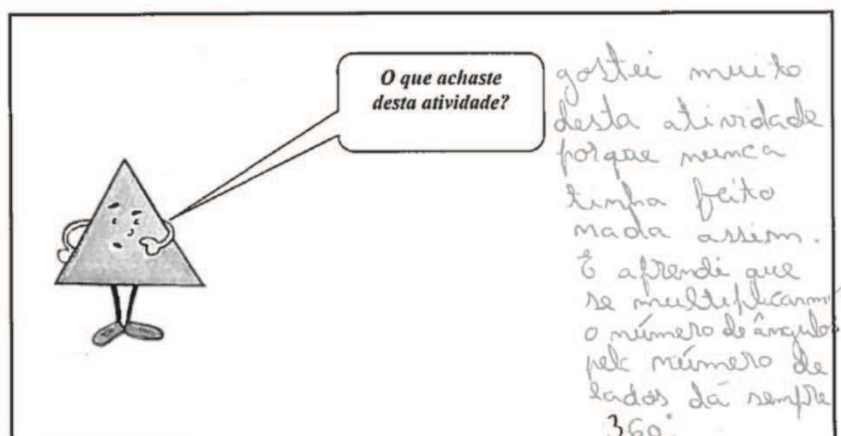


Figura 34. Opiniões dos alunos sobre a atividade.

Outros registaram o facto de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre igual a 180° . Num dos casos os termos hipotenusa e catetos não ficaram esquecidos.

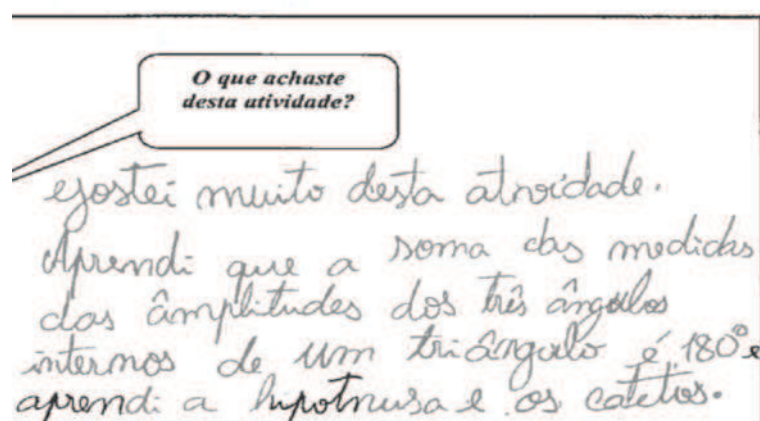
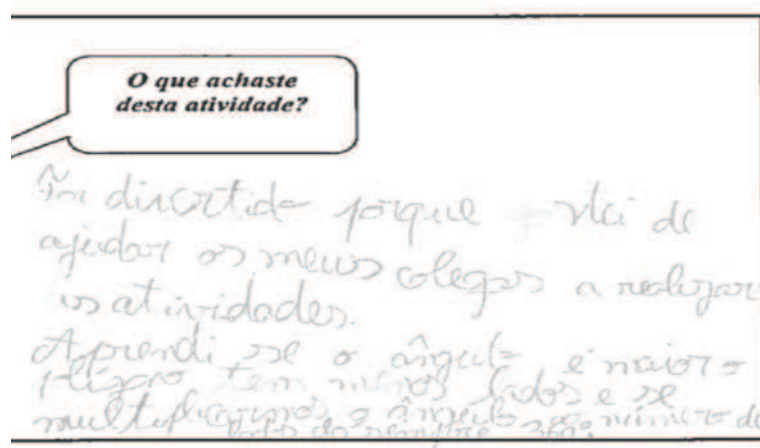


Figura 35. Opiniões dos alunos sobre a atividade.

Nos registos anteriores, dois dos alunos mencionaram o espírito de interajuda existente entre os elementos do grupo tendo-a como positiva. Outro aluno descreveu no geral o que realizou nas tarefas e apresentava um feedback positivo (ver Figura 36).

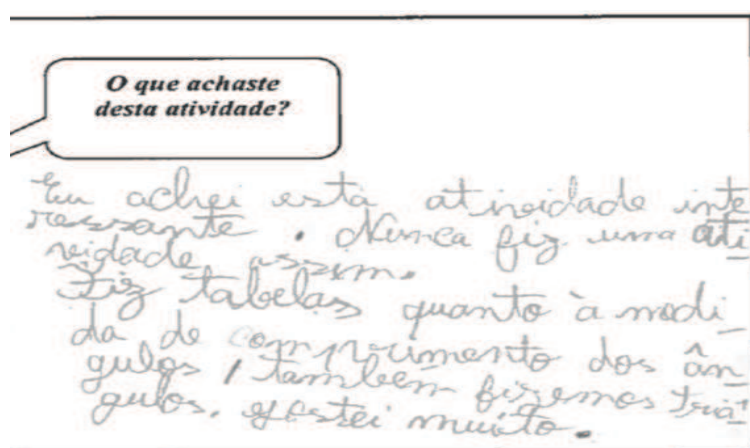


Figura 36. Opinião do aluno sobre a atividade.

Os registos dos alunos acerca das atividades permitiu-nos tirar algumas ilações que podem ajudar o professor na preparação de outras atividades de sala de aula ou mesmo a replicarem esta noutras turmas.

4.3. Expoição doa Trabalhoa Realizadoa.

O percurso de aprendizagem adotado teve imenso sucesso e transbordou da sala de aula, e da disciplina de Matemática, para toda a comunidade educativa. Os alunos contaram à professora de Educação Visual a atividade realizada na aula de Matemática e a professora achou tão interessante que quis “aproveitar” o entusiasmo e fazer também, na sua aula, atividades onde puderam exercitar as suas aprendizagens e utilizar os instrumentos de desenho e medida, revelando-se uma mais-valia para os alunos.

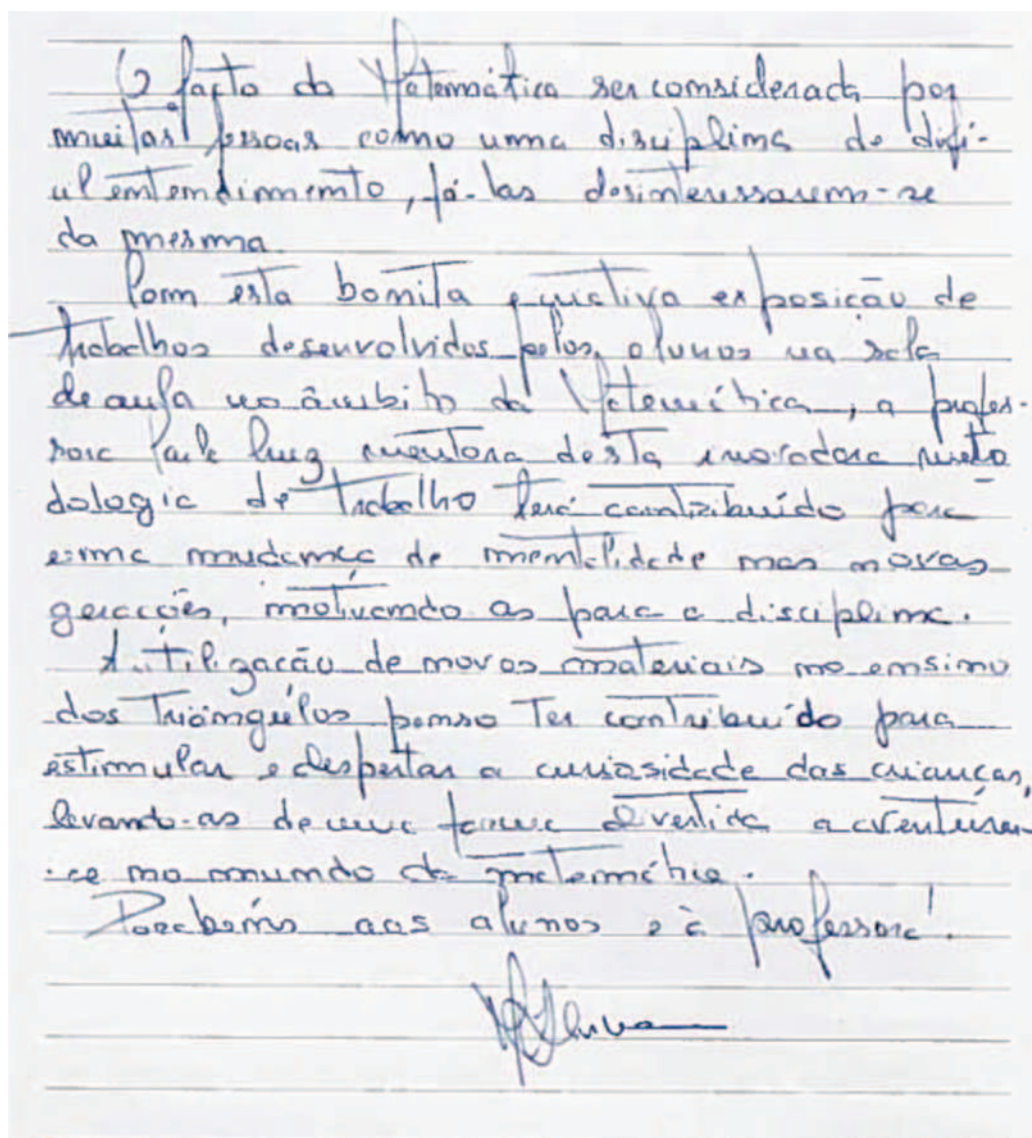
Com os trabalhos realizados em ambas as aulas foi montada uma exposição na entrada principal da Escola (ver Figura 37), que teve muito impacto em toda a comunidade educativa.



Figura 37. Exposição.

Esta exposição foi visitada pelos docentes da escola, pelos alunos da escola, pelo pessoal não docente, pelos estagiários, pelos pais e encarregados de educação. Junto à exposição havia um livro de registos de opiniões.

Nas Figuras 38, 39, 40 e 41 estão apresentadas algumas das opiniões, dadas por visitantes da exposição.



O facto da Matemática ser considerada por muitas pessoas como uma disciplina de difícil entendimento, faz-las desinteressarem-se da mesma.

Por esta bonita e curta exposição de trabalhos desenvolvidos pelos alunos na sala de aula no âmbito da Matemática, a professora pode ter acentuado desta maneira muito a metodologia de trabalho tendo contribuído para uma mudança de mentalidade nas novas gerações, motivando as para a disciplina.

A utilização de novos materiais no ensino dos Triângulos possa ter contribuído para estimular e despertar a curiosidade das crianças, levando-as de uma forma divertida a interessarem-se no mundo da matemática.

Obrigado aos alunos e à professora!

[Assinatura]

Figura 38. Opinião de uma professora de Português do Agrupamento

A organização de uma exposição é sempre algo que nos fascina, pois queremos sempre apresentar a um público aquilo com que temos lhamos ou que está relacionado conosco. Torna-se ainda mais agradável quando algo é preparado com tanto empenho, como esta exposição, principalmente por ter sido construída pelos próprios alunos. Ao longo das aulas muitos foram os conhecimentos dados e aprendidos de uma forma mais construtiva, interessante e sobretudo cativante!

Pela os próprios alunos, verem expostos os seus trabalhos, de onde recolhem muitos aprendizagens, torna-se algo que provoca o desejo de repetir.

Pela beleza, pela forma como estava construída e organizada e pela maneira como se trabalhava a Matemática, esta é uma exposição que, em minha opinião deveria ser continuada! Parabéns!
Tiago fernaz, aluno ESE-Peto.

Figura 39. Opinião de um aluno estagiário do Agrupamento.

gostei muito da exposição "Triângulos e Polígonos" pois
tínhamos sido nós a fazê-la.

Quando estava a trabalhar em grupo, penso que fiquei a
perceber melhor como são os triângulos, se é sempre
possível construí-los, etc.

Achei que os triângulos com os princípios tinham sido
uma ideia muito original.

Estava tudo perfeito!!!

Francisca Pinto

Achei aquela exposição diferente das outras e mu-
to especial. Pois mostrava o que fizemos durante
2 meses: os triângulos e os polígonos. Foi muito
divertido ver-nos a nós a realizar diversas ativi-
dades. Com isto aprendi coisas novas que me
ajudaram a perceber melhor a matéria e descobri
que era divertido ajudar os colegas. Achei esta
exposição fantástica!!

Chês Martinho

gostei muito da exposição e adorei porque
aprendi muito sobre os triângulos. Também conhe-
ci nome de novos triângulos.

A exposição era original e ajudou-me a aprender a
matéria.

João Ferreira

Figura 40. Opiniões de três alunos do Agrupamento

Aprender a saber fazer, o
manusear e dar asas à
criatividade é importante no
ensino.
É de louvar estas atividades,
pois enquanto mãe e encarregada
de educação foi notável o
empenho da criança educanda
e muito gratificante o
entusiasmo e felicidade
com que divulgou o
trabalho exposto.

Nas Blogofias expostas, os alunos Blogéicos
demonstram o interesse na aula, saindo "os Pares"
de casa Blogéica, percebendo-se que não os
incumem, mas pertence o seu funcionamento
de uma das aulas de Matemática.
A exposição dá a entender como seguramente se
espande, tornando a matéria por vezes aborrecida,
num método de estudo agradável.
Assimile a opinião as exposições deverão realigar-se
com alguma frequência, para demonstrar as capa-
cidades de aprendizagem a cada aluno.
Parabéns pelo trabalho e dedicação exposta.

Figura 41. Opiniões de dois Encarregados de Educação

Foi notável o reconhecimento que se pode ter com as exposições, trampolim para futuras investigações e consequentemente novas exposições. Desta forma o trabalho dos alunos é valorizado e torna-se uma mais-valia para toda a comunidade educativa. O trabalho sai das paredes da sala de aula e transborda para todo o Agrupamento.

5. CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões e resposta às questões orientadoras; as limitações e recomendações para futuras investigações e por fim uma reflexão final.

5.1. Principais Conclusões e Resposta às Questões Orientadoras

O dia-a-dia com os colegas de Projeto, e principalmente com a Orientadora Científica, permitiu a partilha de conhecimentos e de métodos de ensino, proporcionando o conhecimento de diversas estratégias de ensino e a realização de aprendizagens acerca da elaboração de recursos didáticos com qualidade. Este percurso será, certamente, uma mais-valia, no desenvolvimento profissional da proponente.

De um modo geral, as atividades decorreram num clima cordial, favorável ao empenhamento e aprendizagem dos alunos, segundo as regras estabelecidas, mas procurando deixar oportunidades para a criatividade, liberdade e autonomia. A investigadora crê ter transmitido, com a sua postura e intervenções pedagógicas, motivação e entusiasmo, reforçando positivamente os comportamentos adequados e evitando os comportamentos desviantes. Os alunos, na sua maioria, mostraram-se empenhados e colaboradores, facilitando o trabalho docente. Mostraram também receptividade a um tipo de ensino que privilegiou as tarefas de investigação, com recurso a materiais manipuláveis, afirmando sentirem-se motivados, e valorizando alguns aspetos, como, por exemplo, o trabalho de grupo.

De seguida, são apresentadas as respostas às três questões de partida.

- Poderão as tarefas de investigação previstas, no programa de 2007, ser aplicadas em sala de aula de forma eficaz, com o programa de 2013?

No decorrer deste estudo, ficou visível que as tarefas de investigação encerram imensas potencialidades para a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, para a resolução de

problemas em diversos contextos e para uma visão da Matemática, como um todo articulado e coerente, tal como referido no programa de Matemática de 2013 e reforçado por vários investigadores e documentos orientadores (e.g., PMEB, 2013; Ponte, Oliveira, Varandas, Oliveira & Fonseca, 2005). As experiências da sala de aula, aqui reunidas, mostram que é possível continuar a concretizar as inovações introduzidas pelo PMEB 2007, nomeadamente tarefas de investigação, com recurso a materiais manipuláveis na sala de aula de forma eficaz, com o programa de 2013. Após o término das atividades descritas e elaboração da análise, apresentada neste estudo, pode-se constatar que estas atividades contribuíram para um ensino de qualidade e o sucesso da aprendizagem dos alunos, em Matemática.

Deste estudo, infere-se a notória necessidade de continuar a investir em tarefas de investigação, criando momentos em que os alunos tenham que realizar registos escritos, e discutir as suas ideias, desenvolvendo assim a sua comunicação oral. Assim sendo, e em jeito de conclusão, constata-se que é possível continuar a propor tarefas de natureza investigativa tão preconizadas no programa de 2007, em articulação com o programa de 2013, tendo como pressuposto de que todo o processo de aprendizagem se desenvolve com o aluno e não para o aluno (Ponte & Serrazina, 2000). Pode ainda afirmar-se que todo o investimento, a formação e as aprendizagens desenvolvidas, com o tão recente programa de 2007, poderão servir de trampolim para enfrentar este novo programa de 2013.

Assim, apesar do enorme formalismo e pela tendência para a mecanização e para o ensino transmitido que é criticado por vários autores (e.g. Brunheira, 2013; Veloso, Brunheira, & Rodrigues, 2013), é possível continuar a aplicar estratégias que contrariem a aquisição de conhecimentos de uma forma acabada e que se incentive à participação ativa por parte dos alunos. Assim, de uma forma compreendida os alunos chegavam às conclusões que estavam previstas nas metas curriculares.

- De que forma os materiais manipuláveis podem atuar na formação e no desenvolvimento de conceitos geométricos?

Propor aos alunos experiências de aprendizagem, utilizando vários recursos, parece ser um modo de motivar os alunos para a disciplina de Matemática. Tal como no estudo apresentado por Vale (1999), verifica-se que, em situações de aprendizagem com

materiais manipuláveis, os vários sentidos do aluno são atraídos, através do contacto e da movimentação, envolvendo-o fisicamente. Esta interação é favorável à aprendizagem. Aprender torna-se, assim, num processo ativo de construção do conhecimento. Confirma-se, com este estudo, que a utilização de material manipulável foi uma mais-valia, na forma positiva como podem decorrer as aulas, uma vez que a sua utilização foi do agrado dos alunos, tendo-os apoiado na realização das atividades e motivado para o trabalho na disciplina. Através da utilização de materiais manipuláveis: material de desenho e medida, triângulos e livros de espelhos, os alunos puderam manipular triângulos e perceber as relações entre lados e ângulos bem como, com o livro de espelhos, perceber a relação de proporcionalidade inversa entre o número de lados e a amplitude do ângulo ao centro determinado. Assim, tal como o NCTM (2007) havia escrito, os materiais manipuláveis revelaram ser um bom recurso como ponto de partida para as investigações. Para além deste facto e conforme Serrazina (1990) tinha referido, serviu como fonte de motivação, permitiu a abordagem pelo concreto de conceitos e relações abstratas, facilitou as generalizações e facilitou o respeito pelo ritmo de trabalho de cada um. Deste modo, vale a pena continuar a fazer tarefas de investigação, com recurso a material manipulável, deve-se continuar a propor aos alunos este caminho, na certeza de que se forem envolvidos na sua própria aprendizagem e construtores ativos do seu conhecimento, se podem atingir as metas curriculares e, assim contribuir para o sucesso da Matemática. Em conclusão, deve-se continuar a proporcionar estas atividades aos alunos, não só no domínio da Geometria mas também noutros domínios.

- Que tipo de dificuldades se pode detetar na abordagem desta temática?

Como principais dificuldades dos alunos, realçamos em primeiro lugar o modo como fazem as construções em Geometria. As primeiras dificuldades apareceram quando utilizaram o material de desenho. Tal como no estudo apresentado por Mitchelmore (1983) os alunos apresentaram dificuldade na utilização do transferidor. Apesar de identificarem os triângulos e conhecerem as suas propriedades, a sua construção não foi uma atividade fácil para alguns alunos.

É importante também que esta atividade em Geometria os leve a adotar uma atitude séria na forma como analisam as situações que lhes são colocadas, não respondendo ao primeiro impulso, ou não se preocupando com as indicações que lhes

são apresentadas. Este estudo mostra também que os alunos têm dificuldades em explicar as suas descobertas. Alguns alunos mostraram dificuldades em justificar as suas resoluções, usando de forma adequada o vocabulário específico da disciplina.

5.2. Limitações e Recomendações Futuras

No que diz respeito às limitações do presente estudo, o facto de a professora lecionar numa turma com alunos com um leque diversificado de conhecimentos e de aprendizagem, e acumular o papel de investigadora, exige um trabalho redobrado e dificulta o processo de recolha de dados. Contudo, esta recolha não consegue registar todos os contributos relevantes que podiam ter ajudado a acrescentar informação a este trabalho. A análise dos dados revelou-se muito exigente, dada a sua natureza qualitativa e a sua extensão. Estes factos obrigam a uma análise atenta e repetida, para que seja possível estabelecer relações e tirar conclusões. Além destas, este estudo encerra limitações, que se prendem com o facto de ter trabalhado apenas num dado momento da escolaridade destes alunos.

Tendo em conta os resultados deste estudo, e as conclusões a partir dele obtidas, referem-se, de seguida, algumas investigações cujo interesse parece relevante: realizar estudos semelhantes ao realizado, noutros domínios; replicar este estudo com outros alunos, do mesmo ano de escolaridade e de anos diferentes, de forma a poder comparar resultados; realizar estudos, que permitam perceber a relação entre a forma como o professor utiliza as tarefas de investigação, na sala de aula, e o desenvolvimento do conhecimento, por parte dos alunos.

5.3. Reflexão Final

Após reflexão, sobre a atividade realizada com os alunos e sobre a preparação e planeamento das aulas, bem como a forma como os alunos aprenderam e como os conteúdos foram lecionados, pode-se comprovar que as metas curriculares podem ser desenvolvidas através de experiências matemáticas ricas e diversificadas e da reflexão sobre essas experiências, de acordo com a maturidade dos alunos. Não se pode ainda

deixar de referir que o modo como foram introduzidas as atividades e o modo como os alunos trabalharam, em pequenos grupos, seguido de discussão em grande grupo, pode ter salientado algumas das potencialidades das tarefas de investigação. Confirma-se que, com o trabalho de grupo, os alunos têm uma atitude mais ativa e interveniente, desenvolvendo o seu espírito de colaboração, verificando-se uma comunicação entre alunos e professora, muito diferentes duma aula centrada no professor (Van Heuvelen, 1992). De facto, as discussões em grande grupo revelam-se como momentos significativos de aprendizagem, nos quais se apresentam e discutem as resoluções dos vários grupos, se sintetizam novos conhecimentos e se registam os aspetos mais significativos da aprendizagem.

Na situação prática vivida, constatou-se a complexidade do processo ensino-aprendizagem e o elevado número de variáveis, que nele devem ser consideradas. No desenrolar das tarefas de investigação percorreram-se diferentes caminhos, na escolha das mesmas, nos materiais a utilizar, na condução das aulas, foram elencados os objetivos de cada tarefa e traçadas estratégias e metodologias que melhor correspondessem aos alunos e fossem um contributo positivo, para a sua formação e aprendizagem. As tarefas de investigação exigem que o professor esteja mais atento, sempre disponível para ouvir as descobertas dos alunos, para desbravar caminhos e/ou perseguir caminhos já encontrados (Ponte et al., 1998).

Mas torna-se necessário refletir, também, na importância das tarefas de investigação e dos materiais manipuláveis, para a aprendizagem dos alunos e, conseqüentemente, para o sucesso da Matemática... não abandonando o caminho que, nos últimos anos, vinha a construir mas, apropriando-nos do PMEB 2013, das Metas Curriculares (MC) e Cadernos de apoio (CA), dar um novo impulso e continuar a construir caminho... e fazer como diz o poeta Castelhana, António Machado, no seu poema “Cantares”: “O caminho faz-se caminhando”!

Pode-se, então, concluir que só através de reflexão e da investigação dos vários componentes do processo, como o planeamento, a concretização do ensino, a avaliação e a melhoria do mesmo, se consegue progredir. De facto, embora os aspetos particulares da situação vivida, durante o período em que decorreu este estudo, sejam irrepetíveis, a investigadora reconhece que, ao longo da sua carreira profissional, não poderá, em momento algum, deixar de se sentir aprendiz. Com efeito, só nesta perspetiva de

inconformismo, de curiosidade e vontade de fazer melhor, se adquire gosto pela profissão de professor, não tendo receio de cair na angústia e na rotina.

A investigadora acredita que esta nova formação irá, de um modo decisivo, facilitar e incentivar o seu desenvolvimento profissional, visto que despertou para a necessidade de um esforço quotidiano e permanente de aprofundamento e atualização dos seus conhecimentos. Este estudo contribuiu para melhorar o seu desempenho como professora capaz de refletir sobre as práticas e aperfeiçoá-las num processo de formação contínua tal como previsto no documento elaborado pela Comissão Europeia em 2007.

Ao agir como investigador, o professor não só desempenha os seus deveres profissionais, mas também se observa a si próprio, tendo uma visão mais ampla do que se está a passar, tal como refere Bogdan e Biklen (2013). Este estudo permitiu uma reflexão mais profunda sobre a eficácia das estratégias utilizadas, assim como sobre os processos usados pelos alunos e as dificuldades que estes apresentam, no domínio da Geometria. Foi assim possível aumentar a minha compreensão acerca deste processo.

“A reflexão pode abrir novas possibilidades para a ação e pode conduzir a melhoramentos naquilo que se faz” (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 39).

Penso que,

“O objetivo é a jornada, não o destino.”

S. Pirie, 1987

6. REFERÊNCIAS

- Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J. P. & Abrantes, P. (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*, Lisboa: DEFCUL.
- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do projecto MAT789*. Dissertação de doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.
- Agrupamento de Escolas de Padrão da Légua (2014). Projeto Educativo do Agrupamento. Acedido em 26 de outubro de 2014 em <http://www.aeplegua.pt/documentos-estruturantes/projeto-educativo-de-agrupamento/Projeto%20Educativo%20do%20AEPL%202014%20-%202017.pdf/view>
- Anderson, C. W. (1987). Strategic teaching in science. In B. F. Jones, A. S. Palincsar, D. S. Ogle & E. G. Carr (eds.). *Strategic Teaching and Learning: Cognitive Instruction in the Content Areas*, 73-91. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Anderson, D. L., Fisher, K. M., & Norman, G. J., (2002). Development and evaluation of conceptual inventory of Natural Selection. *Journal of Research in Science Teaching*, 39, 952-978.
- Arends, R. (1995). *Aprender a ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill.
- Arnaudin, M. W., & Mintzes, J. J. (1985). Students' alternative conceptions of the human circulatory system: A cross age study. *Science Education*, 69(5), 1-33.
- Archavsky, N., & Goldenberg, P. (2005). Perceptions of a Quadrilateral in a Dynamic Environment. In D. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Medium and Meaning*:

Video Papers in Mathematics Education Research (CD-ROM), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school Mathematics. In Pimm, D. (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometry and Spatial Thinking. In F. K. Lester, Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Reston: NCTM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & Dionísio (Orgs), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Souza, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Brown, D., & Clement, J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: Factors influencing understanding in a teaching experiment. *Instructional Science*, 18, 237-261.

Brown, T. (2011). Rethinking objectivity and subjectivity: Redistributing the psychological in mathematics education. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of 35th Conference of the psychological in mathematics education*, 2 (pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME.

Brunheira, L. (2013). Exames, metas e um <novo> programa – a trilogia do regresso ao passado. *Educação e Matemática*, 122, 1.

Brunheira, L., & Fonseca, H. (1995). Investigar na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 35, 16-20.

- Cachapuz, A., Praia, J., & Jorge, M. (2002). *Ciência, Educação em Ciência e Ensino das Ciências*. Instituto de Inovação Educacional. Lisboa: Ministério da Educação.
- Camp, C., & Clement, J. (1994). *Preconceptions in mechanics: Lessons dealing with students' conceptual difficulties*. Dubuque, IA: Kendall/Hunt Publishing Company.
- Chi, M. H., & Glaser, R. (1981). The measurement of expertise: Analysis of the development of knowledge and skills as a basis for assessing achievement. In E. L. Baker & E.S. Quellmalz (Eds.). *Design, Analysis and Policy in Testing* (pp. 37-47). Beverly Hills, CA: Sage Publications.
- Clement, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30(10), 1241-1257.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Nova Iorque: Macmillan.
- Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (2001), Logo and Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*. 10, 1-177.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482-488.
- Comissão Europeia (2007, Agosto). *Melhorar a Qualidade da Formação de Professores*. Comunicação oral da Comissão Europeia apresentada ao Conselho e ao Parlamento. Bruxelas.
- Coutinho, C., & Chaves, J. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Portuguesa de Educação Revista*, 15(1), 221-244.
- Creswell, J. W. (2013). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Approaches (2.ª ed.)*. Thousand Oaks: SAGE Publications.

- DeBoer, G. E. (2000) Scientific literacy: another look at its historical and contemporary meanings and its relationship to science education reform. *Journal of Research in Science Teaching*, 37(6), 582–601.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37, 14-20.
- Diário da República (2011). Despacho n.º 17169/2011 , 2.ª série, n.º 245 de 23 de dezembro de 2011. Lisboa: Ministério da Educação.
- Disessa, A. (1988). Knowledge in Pieces. In G. Forman & P. Pufall (Eds.). *Constructivism in the Computer Age* (pp. 49-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Driver, R. (1981). Pupils' alternative frameworks in science. *European Journal of Science Education*, 3(1), 93-101.
- Driver, R., Guesne, E., & Tiberghien, A. (1985). *Children's Ideas in Science*, Reino Unido: Open University Press.
- Dufresne, R., Gerace, W. J., Hardiman, P. T., & Mestre, J. P. (1992). Constraining novices to perform expert-like problem analyses: Effects on schema acquisition. *Journal of the Learning Sciences*, 2, 307-331.
- Figueira, C., Loureiro, C. Lobo, E., Rodrigues, M. P., & Almeida, P. (2007) Visualização e Geometria nos primeiros anos. Brochura do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos. Escola Superior de Educação de Lisboa.
- Fisher, K. M. (1985). A misconception in biology: Aminoacids and translation. *Journal of Research in Science Teaching*, 22(1), 63-72.
- Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). *As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática* (conferência). In Actas do ProfMat 99 (pp. 91.101). Lisboa: APM.
- Foxman, D., & Ruddock, G. (1984). Concepts and skills: Line symmetry and angle. *Mathematics in Schools*, 13(2), 9-13.

- Gallegos, L., Jerezano, M. E., & Flores, F. (1994). Preconceptions and relations used by children in the construction of food chains. *Journal of Research in Science Teaching*, 31(3), 259-272.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1987). The cognitive basis of knowledge transfer. In S. M. Cormier & J. D. Hagman (Eds.), *Transfer of Learning: Contemporary Research and Applications* (pp. 9-46). San Diego, CA: Academic Press.
- Gilbert, J. K., Osborne, R. J., & Fenshman, P. J. (1982). Children's science and it's consequences for teaching. *Science Education*, 66(4), 623-633.
- Glaser, R. (1992). Expert knowledge and processes of thinking. In D. Halpern (Ed.). *Enhancing Thinking Skills in the Sciences and Mathematics* (pp. 63-75). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gomes, A., & Ralha, M. E. (2005). *Conceitos elementares de Matemática: o papel da definição*. In Atas do V Congresso Ibero Americano de Educação Matemática (V CIBEM). Porto, Portugal.
- Graça, T., Bastos, R., Delgado, M. J., Oliveira, M., Varandas, J., Loureiro, C., & Lopes, A. (1990). *Actividades Matemáticas na Sala de Aula*. Lisboa: Texto Editores.
- Hersh, R. (1998). *What is Mathematics, really*. London: Vintage.
- Heuvel-Pauhuizen, M. (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry*. TAL Project, Freudenthal Institute, Utrecht University, National Institute for Curriculum Development.
- Hewson, P. W., Kerby, H. W., & Cook, P. A. (1995). Determining the conceptions of teaching science held by experienced high school science teachers. *Journal of Research in Science Teaching*, 32, 503-520.

- Idris, N. (2007). The effects of geometers' sketchpad on the performance in geometry of Malaysian students' achievement and van Hiele geometric thinking. *Malaysian Journal of Mathematical Science*, 1, 169-180.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Nisbet, S. (2002). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. In English, L. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 113-141). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaur, J. (2012). Children's understanding of the geometry concepts: Implications for teaching geometry. In *Proceedings of NIME National Conference on Mathematics Education*.
- Köse, S. (2008). Diagnosing Student Misconceptions: Using Drawings as a Research Method. *World Applied Sciences Journal*, 3(2), 283-293.
- Krainer, K. (1989). *Living geometry: Deliberations on a comprehensive understanding of geometry teaching as exemplified by the angle concept*. Frankfurt: Lang.
- Kulm, G., & Stuessy, C. (1991). Assessment in science and mathematics education reform. In G. Kulm & S. M. Malcom (Eds.). *Science Assessment in the Service of Reform* (pp. 71-87). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Larkin, J. H. (1979). Information processing models in science instruction. In J. Lochhead & J. Clement (Eds.). *Cognitive Process Instruction* (pp. 109-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lee, J. S., & Ginsburg, H. P. (2009). Early Childhood Teachers' Misconceptions about Mathematics Education for Young Children in the United States. *Australasian Journal of Early Childhood*, 34(4), 37-45.
- Leher, R., Kenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of childrens reasoning about space and geometry. In R. Leher & D. Chazan (Eds), *Designing learning environments for developing understading of geometry and space* (pp. 137-167). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Leonard, W. J., & Gerace, W. (1996). The power of simple reasoning. *The Physics Teacher*, 34(5), 280-283.
- Leonard, W. J., Dufresne, R. J., & Mestre, J. P. (1996). Using qualitative problem-solving strategies to highlight the role of conceptual knowledge in solving problems. *American Journal of Physics*, 64, 1495-1503.
- Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Lindquist, M. M., & Shulte, A. P. (1987). *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lobato, G. (1991). Novos programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário – que mudança? *Educação e Matemática*, 19/20, 3-6.
- Ludke, M. (1986) *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.
- Mack, N. K. (2007). Gaining insights into children's geometric knowledge. *Teaching Children Mathematics*, 14(4), 238-245.
- Magendzo, A. K. (2008). *Dilemas del curriculum y la pedagogía. Analizando la Reforma Curricular desde una perspectiva crítica*. Santiago do Chile: LOM Ediciones.
- Maia, C. (2014). *As Isometrias na Inovação curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de doutoramento, Universidade Portucalense, Portugal.
- Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Menéres, M. A. (2007). *Figuras Figuronas*. Edições Asa.
- Mestre, J. P., Gerace, W. J., Dufresne, R. J., & Leonard, W. J. (1997). Promoting active learning in large classes using a classroom communication system. In E. F.

- Redish, & J. S. Rigden (Eds.). *The Changing Role of Physics Departments in Modern Universities: Proceedings of the International Conference on Undergraduate Physics Education / Part Two: Sample Classes* (pp. 1019-1036) Woodbury, NY: American Institute of Physics.
- Mitchelmore, M. C. (1983). Children's learning of geometry: Report of a cooperative research project. *Caribbean Journal of Education*, 10, 179-228.
- Mitchelmore, M. C. (1998). Young Students' Concepts of Turning and Angle. *Cognition and Instruction*, 16(3), 265-284.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Noss, R. (1987). Children's learning of geometrical concepts through LOGO. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 343-36.
- Oliveira, H, Brocardo, J., & Ponte, J. P. (2005) *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Lisboa: Coleção Tendências em Educação Matemática.
- Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI - Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e Investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.
- Outhred, L. (1987). Left angle or right angel: Children's misconceptions of angle. *Research in Mathematics Education in Australia*, 8, 41-47.
- Ozerem, A. (2012). Misconceptions in geometry and suggested solutions for seventh grade students. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1, 23-35.
- Padesky, C. (2005). In P. M. Salkovskis (Ed.), *Fronteiras da Terapia Cognitiva* (pp. 235-256). S. Paulo: Casa do Psicólogo Livraria e Editora Lda.

- Pfundt, H., & Duit, R. (1991). *Bibliography: Students' Alternate Frameworks in Science Education*, (3^a ed.). Kiel, Germany: Institute for Science Education.
- Pires, C. C., Curi, E., & Campos, T. M. (Orgs.) (2000). *Espaço e Forma: A construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental*. São Paulo: PROEM.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical Investigations in your Classroom*. Basingstoke: Macmillan.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.) New York: Doubleday.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Ponte, J. P., Oliveira, P., Varandas, J. M., Oliveira, H., & Fonseca, H. (2005). *Exploring the role of virtual interactions in pré-service mathematics teacher educations*. Atas do Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), 17-21 Fevereiro, Sant Felix de Guixols, Espanha.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.
- PMEB (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.


- PMEB (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Resnick, L. B. (1983). Mathematics and science learning: A new conception. *Science*, 220, 477-478.
- Resnick, L. B. (1987). *Education and Learning to Think*. Washington, DC: National Academy Press.
- Reys, R. (1971). Considerations for teaching using manipulative materials. *The Arithmetic Teacher*, 18(8), 551-558.
- Ritchie, S. M., Tobin, K., & Hook, K. S. (1997). Teaching referents and the warrants used to test the viability of students' mental models: Is there a link? *Journal of Research in Science Teaching*, 34, 223-238.
- Sá, A. C., Sá, A., & Zenhas, M. G. (2004). *Como abordar a comunicação escrita na aula de matemática*. Porto: Areal Editores.
- Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática (3.ª ed.)*. Porto Alegre: Artmed.
- Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2006). *Metodologia de pesquisa (3ª ed.)*. São Paulo: McGraw-Hill.
- Sanders, M. (1993). Erroneous ideas about respiration: The teacher factor. *Journal of Research in Science Teaching*, 30(8), 919-934.
- Schauble, L. (1990). Belief revision in children: The role of prior knowledge and strategies for generating evidence. *Journal of Experimental Child Psychology*, 49, 31-57.
- Serrazina, L., & Oliveira, I. (2002). O professor como investigador: Leitura Crítica de investigações em educação matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação, (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 283-308). Lisboa: APM.

- Serrazina, M. L. (1990). Os materiais e o ensino da Matemática. *Educação e Matemática*, 13, 1.
- Serrazina, M. L. (2013). As voltas que o currículo dá – recordando Paulo Abrantes. *Revista Educação e Matemática*, 123, 40-41.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Siew, N. M., Chong, C. L., & Abdullah, M. R. (2013). Facilitating Students' Geometric Thinking Through Van Hiele's Phase-Based Learning Using Tangram. *Journal of Social Sciences*, 9 (3), 101-111.
- Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, (Vols. 2-3). Lisboa: Edição GEP do Ministério da Educação e Investigação Científica.
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 498-505.
- Suydam, M., & Higgins, J. (1977). *Activity-based Learning in Elementary School Mathematics: Recommendations from Research*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Tenreiro-Vieira, C. (2010). *Promover a Literacia da Matemática na sala de aula dos Alunos*. Lisboa: Editora Educação Nacional.
- Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na Sala de Aula: o que se diz, o que se faz. In APM (Eds.), *Actas do ProfMat 99*, (pp.111-120). Lisboa: APM
- Van Heuvelen, A. (1992). *Models of teaching and learning*. Invited Plenary session, presented at the Workshop on Research in Science and Mathematics Education, Cathedral Peak, South Africa, January 20-24, 1992.
- Veloso, E. (1994). Geometria no 10.º ano: o fracasso que era previsível. *Educação e Matemática*, 30, 29-30

- Veloso, G., Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas. *Educação e Matemática*, 123, 3-8.
- Von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching. *Synthese*, 80, 121-140.
- Von Glasersfeld, E. (1992). A constructivist's view of learning and teaching. In R. Duit, F. Goldberg & H. Niedderer (Eds.). *Research in Physics Learning: Theoretical Issues and Empirical Studies / Proceedings of an International Workshop* (Bremen, Germany, March 5- 8, 1991, pp. 29-39). Kiel, Germany: IPN (Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften).
- Walker, C. M., Winner, E., Hetland, L., Simmons S., & Goldsmith, L. (2011). Visual thinking: Art students have an advantage in geometric reasoning. *Creative Education*, 2, 22-26.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wenk, L., Dufresne, R., Gerace, W., Leonard, W., & Mestre, J. (1997). Technology-assisted active learning in large lectures. In A. P. McNeal & C. D'Avanzo (Eds.). *Student-active science: Models of innovation in college science teaching* (pp. 431-452), Orlando, FL: Saunders College Publishing.
- Woolfolk, A. E. (2000), *Psicologia da educação*. Porto Alegre: Artmed.
- Wright, E. L., Sunal, D. W. & Day, J. B. (2004) Improving undergraduate science teaching through educational research. In Sunal D.W., Wright, E. L. & Day, J. B. (eds), *Reform in undergraduate science teaching for 21st century. Information Age* (pp. 1-11), Greenwich: CT.
- Wu, D. B. & Ma, H. L. (2006). The distributions of Van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th Graders. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková, (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 5 (pp. 409-416). Prague: PME.

APÊNDICES

APÊNDICE: Guião de Investigação

		
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE PADRÃO DA LÊGUA		
Atividade de Investigação – Matemática		
N.º do grupo: _____	Data: ____/____/____	ANO LECTIVO 2014/2015
GUIÃO DE INVESTIGAÇÃO		
NOME: _____ ANO: 5.º TURMA: _____		

Senhor triângulo
Senhor triângulo

Vossa Excelência
que nos contempla
de um alto ângulo

porque se senta
tão bem sentado,
com tal paciência?

Não cai de lado
nunca rebola.
Tão grande pé
nunca se molha?

Senhor triângulo
Senhor triângulo

Vossa Excelência
que nos abraça
com seus três braços
porque não canta
não brinca e salta?
Seu pé o cansa?



Oh sim, que triste
é ser escaleno,
desengraçado
como um penedo!

Mas ser isósceles
sem ter de quê,
ser tão altivo
que nem chão vê...

O equilátero
é equilibrado,
pode virar-se
de qualquer lado

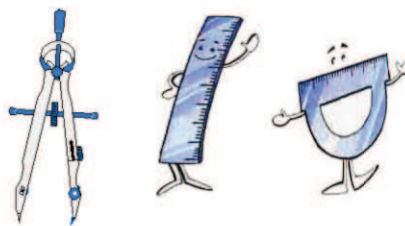
que não se sabe
se está de pé
se está dormindo
sobre o que é.
Dormir assim
no entanto dói.
Senhor Triângulo
que foi? Que foi?

in, “Figuras Figuronas” de Maria Alberta Menéres



Construção de triângulos

ATIVIDADE 1



Constrói, em cartolina, os triângulos seguintes:

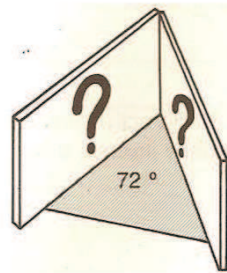
1. Um triângulo equilátero com 15 cm de perímetro. Recorta-o e assinala um dos seus ângulos de 60° .
2. Um triângulo isósceles cujos lados geometricamente iguais medem, respetivamente, 5 cm de comprimento e cujo ângulo por eles formado mede 72° de amplitude. Recorta-o e assinala o ângulo de 72° .
3. Um triângulo isósceles cujos lados geometricamente iguais medem, respetivamente, 6,5 cm de comprimento e cujo ângulo por eles formado mede 45° de amplitude. Recorta-o e assinala o ângulo de 45° .
4. Um triângulo em que um dos seus lados mede 5 cm de comprimento e cujos ângulos adjacentes a esse lado medem, respetivamente, 120° e 30° de amplitude. Recorta-o e assinala o ângulo de 120° .
5. Um triângulo isósceles cujos lados geometricamente iguais medem, respetivamente, 6 cm de comprimento e cujo ângulo por eles formado mede 36° de amplitude. Recorta-o e assinala o ângulo de 36° .
6. Um triângulo em que um dos seus lados mede 6 cm de comprimento e cujos ângulos adjacentes a esse lado medem, respetivamente, 90° e 45° de amplitude. Recorta-o e assinala o ângulo de 90° .



Triângulos ao Espelho

ATIVIDADE 2

Coloca o livro de espelhos ao longo dos lados dos ângulos assinalados em cada um dos triângulos que construístes.



O que observas? Preenche a tabela seguinte:

Triângulo com um ângulo de:	Número de lados do polígono	Classificação do polígono
120°		
90°		
72°		
60°		
45°		
36°		

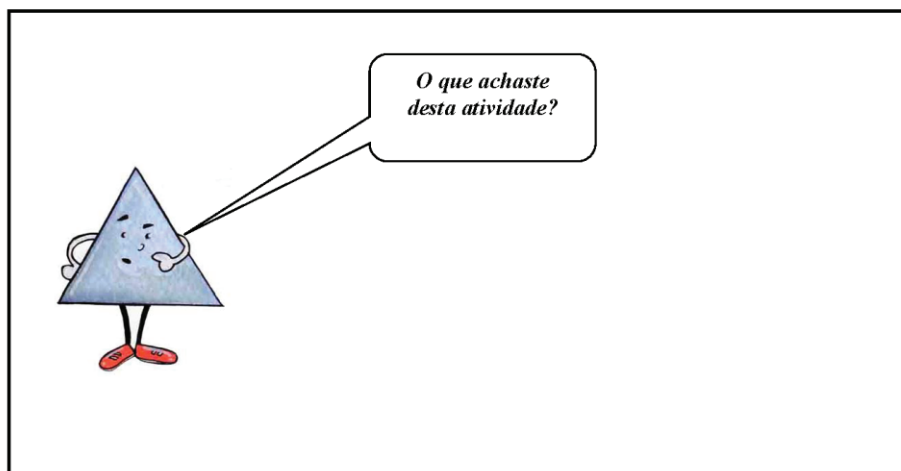
Tabela 1

Observa agora a tabela preenchida. O que concluis?

Classifica os triângulos que construístes quanto à medida do comprimento dos seus lados e quanto à medida da amplitude dos seus ângulos.

Triângulo com um ângulo de:	Quanto à medida do comprimento dos seus lados	Quanto à medida da amplitude dos seus ângulos
120°		
90°		
72°		
60°		
45°		
36°		

Tabela 2



Adaptado de: Lopes, A., Bernardes, A. Loureiro, C., Varandas, J., Oliveira, M., Delgado, M., Bastos, R. e Graça, T. (1990). *Actividades Matemáticas na Sala de Aula*. Lisboa: Texto Editora.

NM

MESTRADO EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS DA
NATUREZA E DA MATEMÁTICA

fevereiro 2015