21

Abordagens Não Convencionais em Manuais do Ensino Secundário: Um Exemplo

Filomena Baptista Soares[1]

Departamento de Matemática, ESEIG - IPP

António José Pascoal

Departamento de Matemática, Universidade Portucalense

Resumo. Os matemáticos do séc. XIX só ficaram plenamente tranquilizados quando o conceito de limite se viu completamente "livre" de qualquer conotação "metafísica", ou seja, quando se soube, graças à astúcia genial dos "épsilon – delta" de Weierstrass, exprimir no estilo Arquimedes a ideia intuitiva de "verdadeiro valor" de uma quantidade indeterminada sem invocar os acréscimos "infinitamente pequenos" que, no entanto, tinham tido êxito no século XVIII.

Mas o preço a pagar para apenas manipular conceitos bem definidos a partir das noções algébricas sobre os números, foi a "inversão" dos raciocínios na Análise, ou seja, o facto de que é necessário raciocinar ao contrário relativamente ao caminho heurístico e adivinhar a escolha estratégica "vencedora" em cada junção ou desdobramento lógico. Perante esta dificuldade o ensino da noção de limite viu-se "arrumado" para o 12º ano (para não dizer, aí minimizado) e os conceitos que dela dependem, como o de derivada, viram-se, nos anos anteriores, esvaziados de significado formal, sendo apresentados através de noções (próximas, mas não formais) das não convencionais reduzindo-se à expressão característica de "tende para". Esta "tendência" não possui na Análise Clássica qualquer significado formal, e apesar de se poder considerar próxima da definição Não Convencional de limite, não lhe sendo feita qualquer referência, fica assim, impossibilitada qualquer formalização da "intuição" em questão, no entanto, pretendemos alertar, através de um exemplo, para uma "pseudo" utilização das suas noções e conceitos.

Constatamos, mais uma vez, que a Análise Não Convencional parece ser um caminho possível para uma abordagem da Análise num nível não universitário.

Introdução

Tal como referimos no trabalho que apresentamos no XIV EIEM em Caminha, se se pudesse ensinar a Análise de maneira mais próxima à intuição, reforçar-se-ia certamente a acessibilidade da matemática para a grande maioria dos nossos alunos.

[1] Aluna de doutoramento na Universidade Portucalense com o apoio da Acção 5.3 do Prodep.

Constatamos também que muitos professores o foram fazendo, substituindo provisoriamente a noção formal de limite pelo conceito intuitivo correspondente, sabendo que, embora seja "ilegal", uma vez que a formalização correspondente não é possível sem "estar a inverter quantificadores" destruindo o conceito intuitivo, é a única forma que encontraram para contornar as dificuldades dos alunos. Dizer `"se x está muito próximo de 0 então $f(x)$ está muito próximo de $f(0)$" é acessível à intuição do aluno e compatível com o veredicto da máquina de calcular. Trata-se de uma constatação empírica obtida com a ajuda do conceito informal de proximidade, o qual não tem infelizmente qualquer contrapartida formal na matemática clássica.

Actualmente, não são só os professores que, perante a acessibilidade da ideia intuitiva da noção de limite, a utilizam: verifica-se a sua apresentação nos próprios manuais do ensino secundário. Mais uma vez somos confrontados com a presença da intuição em completo detrimento da formalização. Esta constatação veio reforçar a nossa convicção, que aparentemente assustou muitos: a análise não convencional pode ser um caminho possível para uma formalização algébrica e intuitiva da Análise Matemática no ensino num nível pré-universitário. Não nos considerando formalistas, não conseguimos aceitar passivamente o esvaziamento formal que hoje se verifica nas primeiras abordagens das diversas noções da Análise Matemática, sem alertar para possíveis alternativas.

Não pretendendo surpreender ninguém pela negativa, como aparentemente aconteceu no ano anterior (e que pudemos constatar por alguns comentários após a comunicação) porquê persistir na manutenção da ausência de qualquer formalização apresentando a Matemática como um "livro de receitas" que as outras Ciências utilizam como ferramenta e não reforçar a sua beleza, muito própria, de uma ciência que, por estranho que pareça a muitos, consegue traduzir a intuição? Porquê persistir na ideia que vários exemplos conduzem a um resultado transmitindo aos alunos a percepção errada de que um exemplo mostra tudo?

Porquê uma "aversão" generalizada quando surge qualquer referência à Análise Não Convencional quando o que se pode ler nos manuais é tudo menos Convencional? Vejamos um exemplo:

A Noção de Derivada no 11º ano

Recorrendo a um manual do 11º ano ficamos perante a seguinte definição derivada de uma função real num ponto x_0 do seu domínio:

> Chama-se derivada de uma função f em x_0 ao número, se existir, para que tende
>
> $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
>
> quando h tende para zero.

que é precedida, e a que se segue, uma panóplia de exemplos que conduzem à posterior definição de função derivada.

O procedimento adoptado para o cálculo do valor ou determinação da expressão dessa "derivada" é o seguinte:

(1) Forma-se o quociente das diferenças (associado ao declive de uma secante à curva de equação $y = f(x)$): $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

(2) Simplifica-se, algebricamente, este quociente;

(3) Faz-se h "tender para zero" nessa expressão simplificada (isto é, para o aluno, considera-se "$h = 0$" para obter o valor ou expressão da derivada).

Surge, no entanto, um problema importante e que preocupou muitos matemáticos dos séculos XVIII e XIX (pelo menos até Weierstrass):

Para que sejam possíveis as simplificações algébricas referidas em (2) é necessário considerar $h \neq 0$. Como se pode, então, em (3) considerar $h = 0$?

Regressamos, então à tão famosa crítica do Bispo George Berkeley (1685-1753) (quem diria tão actual no séc. XXI) [1]:

*"... They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them **the ghosts of departed quantities**...?* "

George Berkeley em *The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* (1734)

Toda esta crítica assenta na, já referida, ausência de qualquer possível formalização convencional da noção de "limite" que se pretende transmitir de forma intuitiva.

Outra ideia, não convencional, apresentada em alguns livros do ensino secundário é a noção de uma curva ser "localmente recta" e que, mais uma vez, se baseia na constatação empírica de "*zooms*" sucessivos levados a cabo através da máquina de calcular (ver figuras 1 e 2).

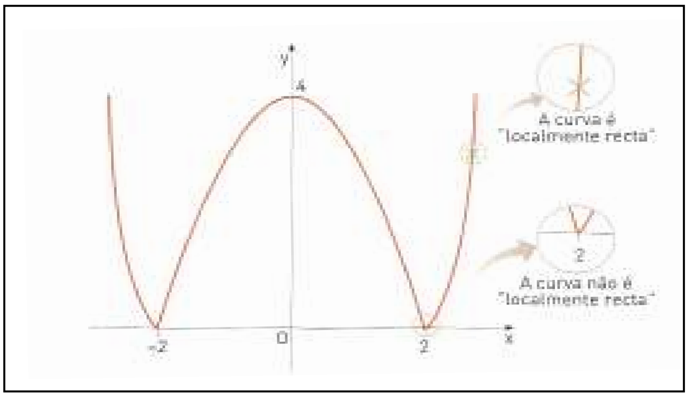

Fig. 1. Gráfico representativo de $y = \left|x^2 - 4\right|$ (em [6], pág. 89)

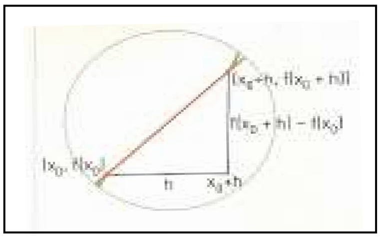

Fig. 2. "*Todas as funções polinomiais são "**localmente rectas**" …*"

(em [6], pág. 89)

Tais "*zooms*" e "*linearidade*" <u>locais</u> possuem na Análise não convencional um tratamento algébrico, concreto e uma "idealização" geométrica (sempre procurada quando se pretender expor, pela primeira vez um determinado conceito). No entanto, estas referências são apresentadas sem qualquer contextualização, baseadas apenas numa mera constatação empírica a qual não conduz sequer a qualquer contrapartida formal válida.

Uma Questão em Aberto

Assim, aquilo o que à partida nos parecia uma "idealização" remota, de implementação complicada e problemática, acaba por se ver "materializado" no caminho seguido pelos autores de livros de Matemática para o Ensino Secundário que, sem o referir com clareza, acabam por utilizar o raciocínio intuitivo proporcionado pela Análise não Convencional.

Mesmo o "empobrecimento" algébrico que se tem vindo a registar nos níveis de ensino básico e secundário ficaria a ganhar com a possível "algebrização" parcial da Análise permitida pela sua vertente não convencional.

Fica aqui, mais uma vez, levantada a questão:

> Será possível abrir aos Professores do Secundário uma nova maneira de explicar as noções de Análise sem utilizar o conceito de limite, mas também sem o abandonar, proporcionando-lhes uma ferramenta formal onde se podem apoiar?

Referências

DAVIS, P. H. e HERSH, R. "*The Mathematical Experience*", 1981.

DELEDICQ, André e DIENER, Marc, *Leçons de Calcul Infinitésimal*, Ed. Armand Colin – 1989.

DELEDICQ, André, (1990). "Le (nouveu) Calcul Infinitesimal - Introduction Amicale à l'Analyse non Standard", *Bulletin de l'APMEP* Nº 373, pg. 143 a 161.

DELEDICQ, André, (1996). "Est-il Possible d'Enseigner l'Analyse Aujourd'hui?", *Repéres – IREM*, Nº 24, pg. 79 a 101.

DIENER, Francine e DIENER, Marc (Eds.), *Nonstandard Analysis in Practice*, Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg – 1995, ISBN 3-540-60297-6.

JORGE, Ana Maria Brito et al, *Infinito 11A – Parte 2,* Novos Programas, Areal Editores, 2004

KEISLER, H. Jerome, *Elementary Calculus - An Infinitesimal Approach*, 2nd Ed., Prindle, Weber & Schmidt – 1986, ISBN 0-87150-911-3.

REEB, Georges, (1981). "Analyse non Standard (Essai de vulgarisation)", *Bulletin de l'APMEP*, Nº 328, pg. 259-273.

SOVERAL, Ana Arede e SILVA, Carmen Viegas, *Matemática 11º ANO – Vol. 2*, Texto Editora, 2004.

STROYAN, K. D., *Mathematical Background - Foundations of Infinitesimal Calculus*, Academic Press, Inc – 1997.